

01163
1ej.
2

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

INFLUENCIA DE LA DISPERSION DE LOS PARAMETROS DEL
SUELO EN LA EVALUACION DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO
DE OBRAS DE TIERRA

T E S I S

que presenta

PATRICK CARELS

para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(Mecánica de Suelos)

01163
1982

J U R A D O

- DR. LEONARDO ZEEVAERT WIECHERS
- M en I J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ
- M en I GABRIEL AUVINET GUICHARD
- M en I RAMON CERVANTES BELTRAN
- ING. JESUS ALBERRO ARAMBURU

EL COORDINADOR DE LA SECCION

M en I J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ

EL SECRETARIO ACADEMICO

M en I SERGIO TIRADO LEDESMA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	pág
1. INTRODUCCION	1
2. COMPORTAMIENTO DINAMICO DE LOS SUELOS	5
2.1 <i>Propiedades significativas en los análisis de estructuras térreas</i>	5
2.1.1 Propiedades significativas y ecuaciones constitutivas	5
2.1.2 Factores que afectan las propiedades G y β	13
2.2 <i>Determinación de las propiedades dinámicas</i>	19
2.2.1 Generalidades	19
2.2.2 Pruebas de campo	23
2.2.3 Pruebas de laboratorio	25
2.2.3.1 Pruebas de columna resonante	25
2.2.3.2 Pruebas de corte repetido	26
2.2.3.3 Pruebas triaxiales cíclicas	30
2.2.4 Procesamiento de los resultados	33
2.2.4.1 Métodos de ajuste entre resultados de campo y de laboratorio	34
2.2.4.2 Propiedades obtenidas en distintas pruebas de laboratorio	41

	pág
2.3 <i>Modelo de comportamiento probabilista</i>	51
2.3.1 <i>Introducción</i>	51
2.3.2 <i>Concepto de coeficiente de variación de una distribución probabilista</i>	51
2.3.3 <i>Modelo propuesto</i>	53
3. <i>TEORIA DE PERTURBACIONES Y SU APLICACION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO</i>	61
3.1 <i>Conceptos generales</i>	61
3.1.1 <i>Introducción</i>	61
3.1.2 <i>Teoría de perturbaciones</i>	62
3.2 <i>Aplicación de la teoría a la ecuación de movimiento</i>	63
3.2.1 <i>Revisión de conceptos</i>	63
3.2.1.1 <i>Ecuación de movimiento</i>	63
3.2.1.2 <i>Método de respuesta compleja</i>	65
3.2.2 <i>Incorporación del modelo probabilista</i>	67
3.2.3 <i>Programa de computadora, DARE</i>	74
4. <i>METODO SIMPLIFICADO PARA EVALUAR EL EFECTO DE LA DISPERSION EN LAS ACELERACIONES MAXIMAS</i>	89
4.1 <i>Introducción</i>	89
4.2 <i>Obtención del procedimiento simplificado para depósitos de suelo</i>	90

	pág
4.2.1 Descripción de los datos	90
4.2.2 Resultados	90
4.3 <i>Dispersión en la respuesta de un terraplén a distintas pendientes</i>	107
5. CONCLUSIONES	112
6. REFERENCIAS	115
· APENDICES	123
A. METODO LINEAL EQUIVALENTE	123
B. TEORIA CONVENCIONAL NO DEGENERADA DE PERTURBACIONES	129
C. DETERMINACION DEL MODULO COMPLEJO PERTURBADO	134

1. INTRODUCCION

En las últimas dos décadas la dinámica de suelos ha recibido especial atención debido al gran número de fallas causadas por acciones sísmicas. La investigación en este campo se ha dirigido especialmente a: 1) estudiar el comportamiento dinámico de los suelos, y 2) desarrollar métodos teóricos para análisis dinámicos.

Por otra parte, la aplicación de métodos probabilistas a los análisis del comportamiento dinámico de los suelos, constituye un nuevo horizonte dentro de la dinámica de los suelos. En la última década, el mayor esfuerzo de investigación se enfocó hacia la aplicación de nuevas técnicas tanto analíticas como experimtales en el aspecto determinista del comportamiento dinámico. Sin embargo, el número creciente de publicaciones sobre métodos --

probabilistas y sus aplicaciones al comportamiento dinámico, in dica el inicio de una nueva rama de investigación en rápido desa rrollo (ref 1)..

La necesidad de evaluar la confiabilidad de las respuestas de estructuras térreas obtenidas analíticamente se justifica plena mente por la incertidumbre que se presenta en la determinación de las propiedades mecánicas de los suelos y por el carácter alea- torio de las solicitaciones sísmicas. Evaluar la confiabilidad permite también verificar la eficiencia de los modelos analíti- cos, al comparar los resultados calculados con los que se miden en la realidad.

En el campo de la estática de los suelos ya se ha hecho algo de investigación para considerar los efectos de dispersión en forma general (ref 2). Con respecto a la dinámica de los suelos cada tipo de problema puede necesitar un enfoque específico, com pletamente distinto de otro problema, debido a la gama amplia de parámetros y tipos de análisis. Por ello, no se ha encontra do una técnica probabilista general que abarque todos los tipos de dispersión o aleatoriedad que puedan presentarse. En cambio, ya existen varias soluciones particulares para distintos proble mas (ref 3-10).

Para el mejor entendimiento de las causas de incertidumbre en los resultados de análisis geotécnicos, Cornell (ref 11) propuso

la siguiente clasificación:

1. Las características del suelo son procesos estocásticos es paciales y en los cálculos se consideran solamente valores medios.
2. Los valores medios de las características del suelo, se ob tienen a partir de pruebas, cuyos resultados dependen de di versos factores aleatorios (operador, tipo de pruebas, tem peratura, aparatos, etc).
3. Los valores medios se estiman a partir de un número finito de pruebas.
4. Las excitaciones a las que está sometido el suelo no se co nocen con precisión.
5. El método de análisis se basa en hipótesis simplificadoras que no corresponden rigurosamente a la realidad.

En este trabajo se consideran los tres primeros tipos de disper sión, mediante una teoría probabilista basada en la teoría de perturbaciones, para evaluar la confiabilidad de la respuesta de estructuras térreas con propiedades aleatorias, bajo excita ción dinámica determinista.

Los objetivos principales de este trabajo son:

- a) Analizar incertidumbres existentes en los resultados de las pruebas,
- b) Proponer un modelo probabilista analítico que permita evaluar la confiabilidad de la respuesta de una manera rápida, y
- c) Estudiar el grado de influencia de cada parámetro dinámico en la respuesta del suelo.

Para alcanzar los objetivos propuestos, el trabajo se ha dividido en tres partes: la primera abarca la obtención de un modelo probabilista de comportamiento dinámico de los suelos; en la segunda parte se propone un método analítico para evaluar las bandas de confianza en la respuesta; y en la tercera, se discuten los resultados de los estudios paramétricos realizados.

Las conclusiones obtenidas ponen en evidencia algunos conceptos prácticos, para uso en la ingeniería de la dinámica de suelos.

2. COMPORTAMIENTO DINAMICO DE LOS SUELOS

2.1 *Propiedades significativas en los análisis de estructuras térreas*

2.1.1 Propiedades significativas y ecuaciones constitutivas

En la evaluación de la estabilidad sísmica de estructuras térreas se tienen que considerar dos aspectos fundamentalmente: a) la respuesta dinámica, que involucra las características esfuerzo-deformación del material y la determinación de esfuerzos dinámicos y b) la resistencia a la falla que incluye la degradación de la estrutura del suelo por la acción de la deformación angular y la consecuente generación de presión de poro.

En este trabajo, se analizaron los parámetros del suelo relacionados con la evaluación de la respuesta dinámica de estructuras térreas.

La propagación de las ondas de corte provocadas por eventos sísmicos genera en el suelo deformaciones angulares, que se pueden representar con curvas como las mostradas en la fig 2.1. En general, el comportamiento del suelo es no-lineal e hysterético, y muestra una disminución de rigidez al aumentar las deformaciones (Strain-Softening).

En los últimos años, gran parte de la investigación sobre el tema, se ha enfocado al desarrollo de ecuaciones constitutivas o al planteamiento e implementación de métodos que toman en cuenta los efectos no-lineales.

Sin embargo, independientemente del método, los parámetros básicos que describen el comportamiento dinámico son: 1) la variación del módulo de corte G (tangente o secante) con la deformación; 2) un parámetro relacionado con las pérdidas de energía en los ciclos de histéresis durante la carga transitoria (viscosidad o amortiguamiento hysterético), en función del nivel de deformación; y 3) el nivel máximo de esfuerzo cortante $\tau_{máx}$ (fig 2.2 y 2.3).

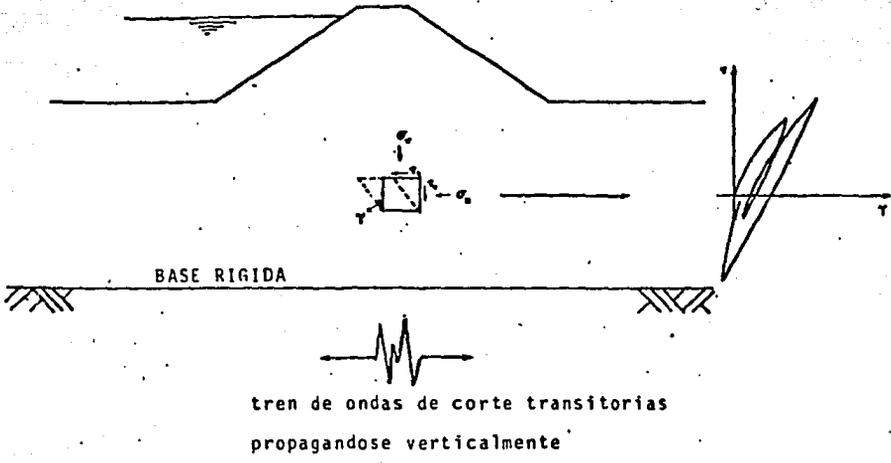


fig.2.1 Estructura térrea bajo excitaci3n de ondas de corte transitorias, con la relaci3n t pica de esfuerzo cortante τ vs. deformaci3n angular γ .

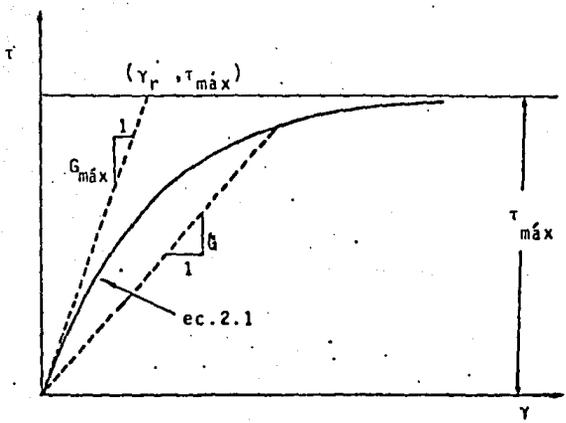


fig.2.2 Parámetros básicos para la expresi3n hiperb3lica de la relaci3n esfuerzo-deformaci3n.

Las deformaciones inducidas por las cargas transitorias (eventos sísmicos, explosiones, etc), dependen en gran medida de sus características y de su magnitud. En general, durante estas excitaciones, el nivel de deformación angular raramente rebasa 1%. Sólo se logra rebasar 1% durante sismos destructores o explosiones fuertes y cerca de la zona de liberación de energía, donde otro tipo de ondas (como las de Rayleigh y de Love) también inducen deformaciones angulares importantes.

Por lo anterior, las pruebas de laboratorio (inciso 2.2), no se hacen, en general, a mayores niveles de deformación angular.

Por otra parte, la descripción analítica del comportamiento del suelo depende en gran medida de la resistencia al esfuerzo cortante bajo carga estática, $\tau_{m\acute{a}x}$. Así, la rama principal (backbone, fig 2.2) de los ciclos histéreticos se representa con la hipérbola,

$$\tau = \frac{\gamma}{\frac{1}{G_{m\acute{a}x}} + \frac{\gamma}{\tau_{m\acute{a}x}}} \quad (2.1)$$

de donde se pueden obtener expresiones analíticas para los ciclos de histéresis como el modelo de Ramberg-Osgood (ref 43).

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{m\acute{a}x}} \left(1 + \alpha \frac{\tau}{C_1 \tau_{m\acute{a}x}} \right)^{R-1} \quad (2.2)$$

para incrementos positivos de los esfuerzos, y

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{\tau - \tau_1}{G_{m\alpha x}} \left(1 + \alpha \frac{\tau - \tau_1}{2C_1 \tau_{m\alpha x}} \right)^{R-1} \quad (2.3)$$

para descargas a partir del punto (τ_1, γ_1) . En las ecs 2.2 y 2.3, α , C_1 y R son parámetros que dependen de cada suelo como se muestra en la fig 2.4, para un suelo cohesivo y uno friccionante.

Las ecs 2.1, 2.2 y 2.3 permiten representar analíticamente las relaciones dinámicas entre esfuerzo y deformación.

El número de modelos del suelo y de métodos de análisis existentes es muy amplio, y por tanto el usuario debe recurrir a su criterio para escoger el modelo más adecuado para sus necesidades.

Richart y Wylie (ref 33), investigaron la influencia del tipo de modelo constitutivo en los resultados del análisis dinámico de un depósito de suelo (fig 2.5.a). Si se desean evaluar posibles deformaciones permanentes en el depósito, se debe recurrir a un modelo de tipo Ramberg-Osgood (fig 2.5.b). Si por otro lado, las deformaciones permanecen sensiblemente en el intervalo elástico, un modelo lineal, tipo visco-elástico, con las propiedades compatibles al nivel de deformación angular, parece ser más adecuado (fig 2.5.c) para la evaluación de los esfuerzos dinámicos.

Amortiguamiento

1. por viscosidad = $F_1(E, \Delta E)$

2. histerético = $F_2(E, \Delta E)$

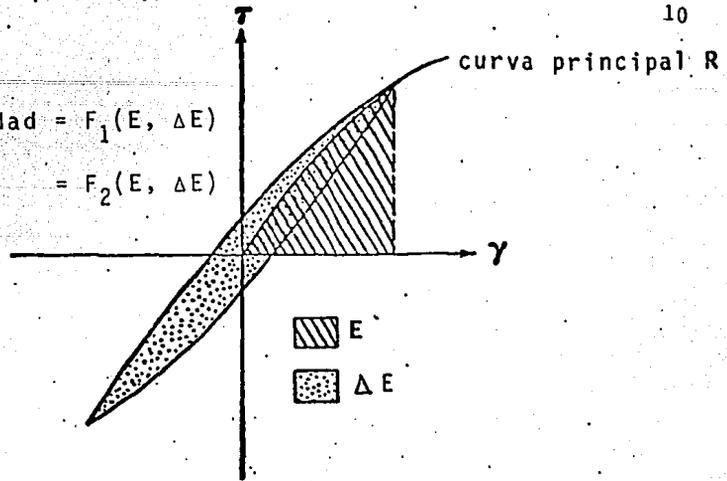


fig.2.3 Parámetros relacionados con las pérdidas de energía durante un ciclo histerético.

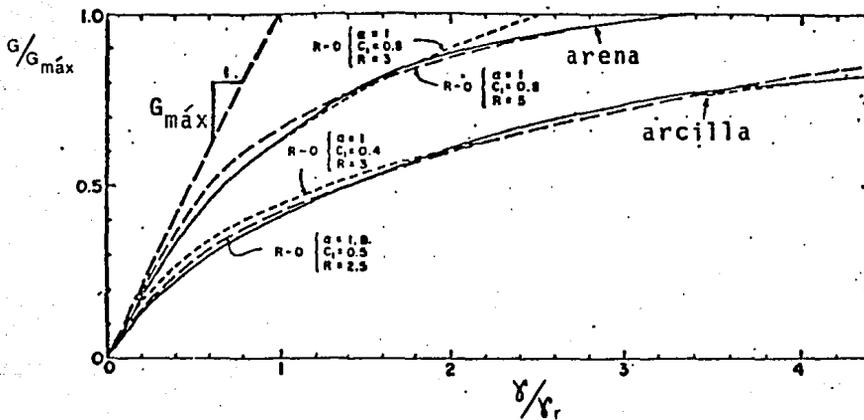


fig.2.4 Ajuste de la ec.2.2 al comportamiento del suelo (ref.32)

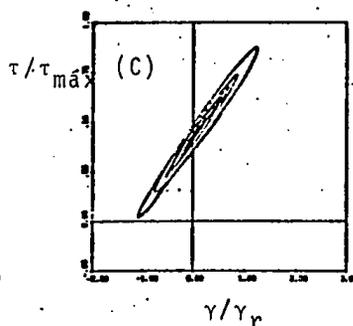
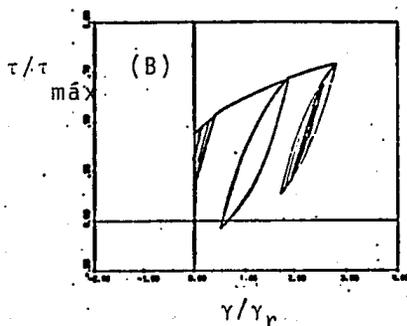
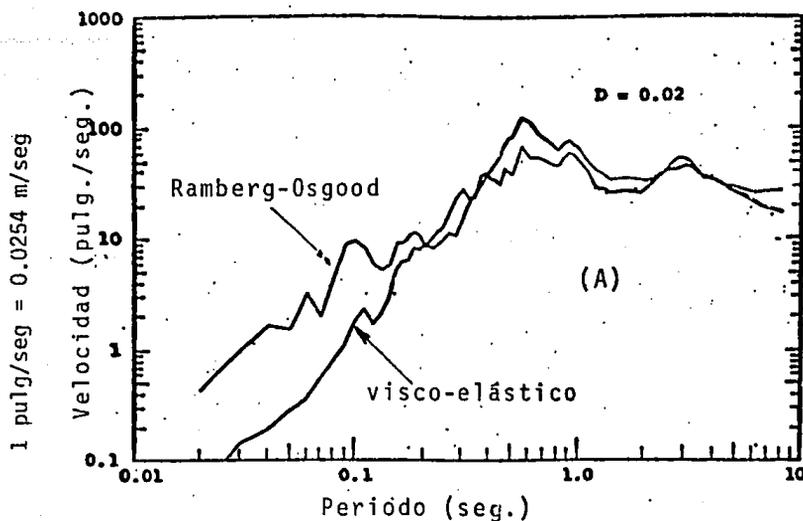


fig.2.5 A. Espectro de la velocidad en la superficie de un depósito de suelo, simulado por los dos modelos señalados.

B. Relación adimensional de esfuerzo-deformación para el modelo Ramberg-Osgood, ec.2.2.

C. Como B, pero para el modelo visco-elástico (las propiedades compatibles con la deformación).

En este trabajo se utiliza un método similar al último mencionado, llamado lineal equivalente, propuesto por Seed e Idriss en la ref 26 (Apéndice A).

El método se basa en el análisis en términos de esfuerzos totales y, por tanto, no puede tomar directamente en consideración los efectos hidrodinámicos.

Las presiones de poro dinámicas se miden en el laboratorio en pruebas cíclicas no-drenadas con un estado de esfuerzos totales equivalente al generado en la estructura térrea por la acción sísmica. De esta forma, es posible estimar los incrementos de presión de poro asociados a la respuesta calculada en términos de esfuerzos totales. Este procedimiento se utiliza para evaluar la estabilidad de los respaldos de las cortinas de presas de tierra ante sismos (refs 44 y 52).

Cabe recordar que los análisis en términos de esfuerzos efectivos requieren un modelo bifásico (suelo-agua) complejo. De hecho por la interacción entre las dos fases, el número de parámetros aumenta (p.e. debe considerarse la permeabilidad). Este tipo de modelos se utilizan en estudios de susceptibilidad de estratos de suelos arenosos (saturados) a licuación y del fenómeno de consolidación en suelos cohesivos. En el estado actual del conocimiento, la complejidad de estos modelos no permite aplicarlos en forma simple a problemas prácticos. Sin embargo, constituyen uno de los temas principales de la investigación actual en dinámica de suelos (ref 47).

El método lineal equivalente tiene la desventaja que no permite calcular deformaciones permanentes, y obliga a un análisis en términos de esfuerzos totales; por otra parte, los esfuerzos calculados con este método son similares a los obtenidos con métodos no-lineales incrementales, con la ventaja que se determinan en menor tiempo y a un costo más bajo. Además, de comparaciones con casos reales se ha demostrado que es confiable para deformaciones angulares menores de 1% (ref 26).

2.1.2 Factores que afectan las propiedades G y β

Para poder predecir adecuadamente el comportamiento del suelo, se necesita un modelo que involucre todos los factores que afectan las propiedades. Lógicamente, esto resultaría difícil, a parte de ser antieconómico por el alto costo del análisis y del programa de pruebas para obtener toda la información.

A continuación, se hace una breve revisión de la información relativa de cada uno de los factores involucrados.

Estudios paramétricos han mostrado (refs 34 y 45) que el módulo de corte, G , y el amortiguamiento β , básicamente son función de trece variables. En la tabla 2.I (basado en la ref 45) la influencia de cada uno de los factores se clasifica como muy importante (M), importante (I) y poco importante (P).

TABLA 2.1 Factores que afectan las propiedades G y β

FACTOR	importancia en			
	Módulo de corte		Fracción del amortiguamiento crítico	
	Suelos granulares	Suelos cohesivos	Suelos granulares	Suelos cohesivos
1. Amplitud de deformación	M	M	M	M
2. Esfuerzo efectivo octaédrico	M	M	M	M
3. Relación de vacíos	M	M	M	M
4. Número de ciclos	P	P	M	M
5. Grado de saturación	P	M	I	P
6. Grado de consolidación	P	I	P	I
7. Envolvente de resistencia	I	I	I	I
8. Esfuerzo de corte octaédrico	I	I	I	I
9. Frecuencia	P	P	P	I
10. Efectos del tiempo	P	I	P	I
11. Características de las partículas	P	P	P	P
12. Estructura del suelo	M	M	M	M
13. Cambio volumétrico por deformación angular (para $\gamma < 0.5\%$)	P	P	P	P

M = muy importante
 I = importante
 P = poco importante

Tomando en cuenta sólo los factores más importantes, G se puede expresar de la siguiente manera:

$$G = f(A, \sigma_M, e, S, t, E) \quad (2.4a)$$

donde

- A amplitud de la deformación
- σ_M esfuerzo efectivo octaédrico
- e relación de vacíos
- S grado de saturación
- t tiempo (sólo para suelos cohesivos)
- E estructura del suelo

El módulo de corte máximo, $G_{m\acute{a}x}$, permanece constante para deformaciones menores de 10^{-4} % y, por tanto, se pueden encontrar para expresarlo fórmulas experimentales donde no interviene el nivel de deformación.

Para muchos suelos, tanto cohesivos como friccionantes, se puede expresar aproximadamente $G_{m\acute{a}x}$ (en MPa) como (refs 45 y 49):

$$G_{m\acute{a}x} = 8.7 \frac{(2.973 - e)^2}{1 + e} (\text{OCR})^\alpha \sigma_M^{1/2} \quad (2.4b)$$

donde

- σ_M en MPa
- OCR relación de preconsolidación

α índice función de la plasticidad del suelo ($= 0$ para suelos granulares y $= 0.5$ para arcillas con $IP \approx 100$)

La expresión sólo es una de las propuestas en la literatura. Otras incorporan parámetros adicionales como, por ejemplo, el contenido de agua (ref 50):

Otra manera de representar el módulo de corte G , con respecto a los principales parámetros mencionados, es mediante la variación de $G/G_{m\acute{a}x}$ contra el nivel de deformación angular, como se está mostrando en la fig 2.6.

Así, se consideran de una manera práctica los factores de mayor importancia, señalados en las ecs 2.4 a y b. Analíticamente, ésto se puede expresar mediante un ajuste de la ec 2.1, o sea

$$\frac{G}{G_{m\acute{a}x}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_h}} \quad (2.5)$$

donde (ref 45)

$$\gamma_h = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{G_{m\acute{a}x}}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left(\left(\frac{1+K_0}{2} \sigma_V \sin \phi + C \cos \phi \right)^2 - \left(\frac{1-K_0}{2} \sigma_V \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$K_0 = \frac{\sigma_H}{\sigma_V}$$

- σ_v esfuerzo efectivo vertical inicial
- ϕ, C parámetros de resistencia estática en términos de esfuerzos efectivos

Comparando muchos resultados reportados en la literatura, se llega a una dispersión grande, como se puede verificar en la fig 2.7 (ref 51). Esto indica que se tienen que considerar curvas diferentes para los distintos tipos de suelo. Aún haciendo esta distinción, se llega a dispersiones altas cuando se comparan resultados reportados en la literatura (véase inciso 2.3.3). En la ref 48, los autores compararon así, muchos datos y llegaron a las siguientes expresiones:

para suelos cohesivos (fig 2.8)

$$G_{m\acute{a}x} = 2300 q_u \quad (2.6)$$

q_u = resistencia no-drenada

para suelos friccionantes (fig 2.9)

$$G_{m\acute{a}x} = 7.2 K_2 (\sigma_M)^{1/2} \quad (2.7)$$

($G_{m\acute{a}x}$ y σ_M en MPa)

K_2 factor variando con los factores ya mencionados en la ec 2.4 a y b

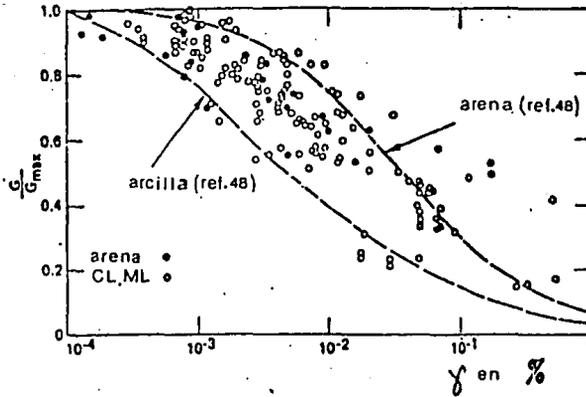


fig.2.6 Ejemplo de la presentación de los resultados G/G_{\max} vs. la deformación angular.

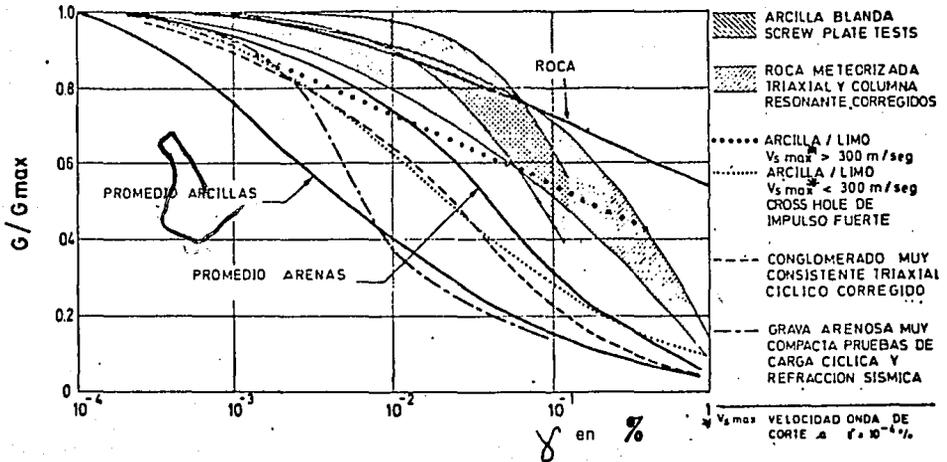


fig.2.7 Dispersión en los resultados G/G_{\max} vs. γ , (ref.51) presentados en la literatura.

Investigaciones recientes han aportado mucho al mejor entendimiento con respecto a la influencia de parámetros como el tiempo, la historia de cargas, la estructura del suelo, etc. Estos afectan más el comportamiento de suelos cohesivos que el de suelos granulares (véase también tabla 2.I).

Para mayor información, el lector puede referirse a la literatura especializada (refs 18, 19, 20, 28, 32, 33, 34, 45, 48 y 49).

También para el amortiguamiento, β , se han propuesto leyes de variación del mismo tipo; se dan expresiones para un amortiguamiento máximo correspondiente ahora a grandes deformaciones.

Como en el caso de $G/G_{m\acute{a}x}$, se puede recurrir a relaciones teóricas del tipo hiperbólico como la ec 2.5

$$\frac{\beta}{\beta_{m\acute{a}x}} = \frac{\gamma/\gamma_h}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_h}} \quad (2.8)$$

En este trabajo, se manejan los parámetros G y β , mediante las curvas $G/G_{m\acute{a}x}$ vs. γ (fig 2.10a), β vs. γ (fig 2.10b).

2.2 Determinación de las propiedades dinámicas

2.2.1 Generalidades

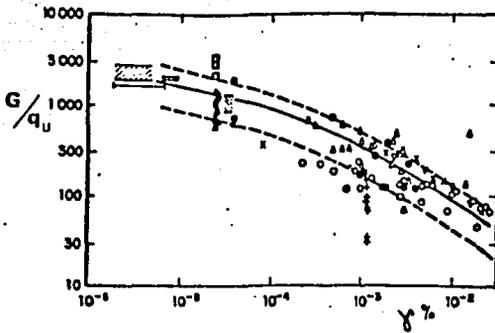


fig.2.8 Variación G/q_u (ref.48) vs. deformación angular para suelos cohesivos.

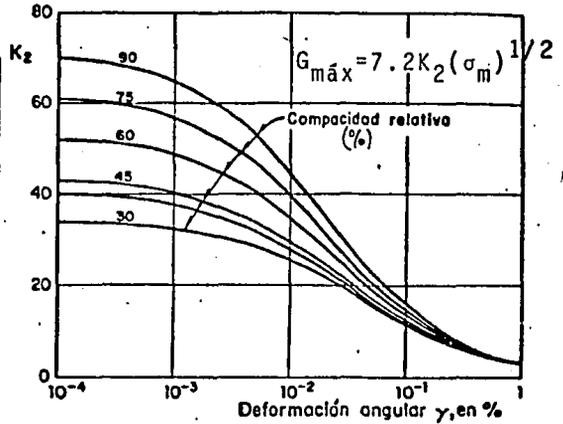


fig.2.9 Variación K_2 vs. (ref 48) deformación angular para suelos granulares.

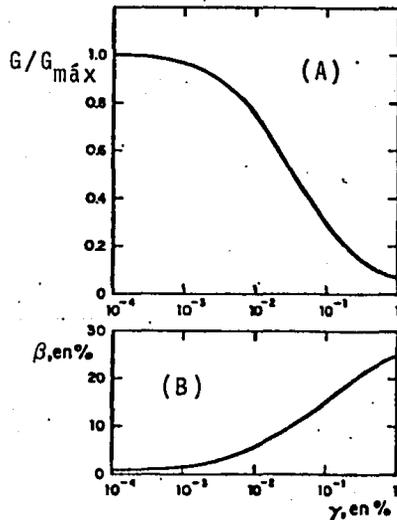


fig.2.10 Curvas tipo de $G/G_{m\acute{a}x}$ y β (ref.46) vs. la deformación angular γ

Para obtener información sobre las relaciones dinámicas esfuerzo deformación, y de ahí calcular las propiedades dinámicas que rigen la respuesta de los suelos bajo cargas cíclicas o transitorias, existen varios métodos tanto de campo, como de laboratorio.

La breve revisión de los ensayos que se presenta a continuación, está enfocada a analizar las diferencias y las incompatibilidades que presentan entre sí, respecto a deformación y estado de esfuerzo.

Estas diferencias inducen una dispersión importante en los resultados que se suma a la originada por los factores clásicos como el método de muestreo (ref 17), la influencia del operador (muy difícil de cuantificar) y el procedimiento de prueba cuando no está estandarizado (ref 18). La necesidad de determinar las variaciones de los parámetros dentro de un intervalo amplio (10^{-4} % hasta 1%) de deformación, tiene su origen en la consideración de los efectos no-lineales en el método lineal equivalente (Apéndice A).

De esta manera se puede cubrir con un sólo método de análisis el intervalo común de deformaciones inducidas tanto por maquinaria, (del orden de 10^{-3} %) como por sismos o explosiones (desde 10^{-3} % hasta 1% o más).

Cabe recordar que este método lineal no calcula deformaciones permanentes, y que por tanto no se recomienda utilizarlo para

niveles de deformación $> 1\%$.

Para reducir la dispersión en las propiedades, se necesita recurrir a un método de ensaye que cumpla con los siguientes requisitos:

- 1) Representar adecuadamente en el laboratorio o en el campo, el comportamiento que se presenta en la realidad
- 2) Cubrir todo el intervalo de deformaciones, de 10^{-4} hasta 1% , que se pueden desarrollar en casos reales.

Muchos métodos cumplen razonablemente con la primera condición; el mayor problema surge con la segunda condición, que es técnicamente difícil de lograr. Entre las dificultades, pueden mencionarse las de controlar adecuadamente las condiciones de frontera de la muestra y excitarla adecuadamente para deformaciones pequeñas, la imposibilidad de obtener un estado de deformaciones constantes en un plano de la muestra, etc.

Con respecto a estas dificultades, la investigación realizada ha sido escasa (ref 19, 20, 21 y 22).

Para fines de este trabajo las pruebas de interés son las que representan el comportamiento del suelo sometido a ondas de corte (S), provocadas por sismos. Tomando en cuenta lo anterior,

en los incisos siguientes se hace énfasis en los métodos geosfísicos de campo, para encontrar los valores de las propiedades a bajos niveles de deformación angular ($< 10^{-4} \%$). A continuación, se ven los métodos de laboratorio aplicables para niveles mayores de deformación; y, finalmente, se hace énfasis en las diferencias entre los resultados obtenidos por los distintos procedimientos y se proponen pasos de cálculo para obtener curvas de diseño.

2.2.2 Pruebas de campo

Todos los métodos de campo, para obtener información sobre las propiedades del suelo a bajos niveles de deformación ($< 10^{-4} \%$), se basan en la geosísmica, que mide valores de la velocidad de propagación de las ondas generadas por fuerzas artificiales. Conociendo la velocidad V_S de ondas de corte y las condiciones del subsuelo, se evalúa el módulo al corte, $G_{m\acute{a}x}$ a partir de la relación (ref 34)

$$V_S = \sqrt{\frac{G_{m\acute{a}x}}{\rho}}$$

ρ densidad de masa del suelo

Este procedimiento permite explorar zonas grandes del subsuelo desde la superficie, utilizando: 1) la refracción de ondas de corte y 2) la medición de vibraciones establecidas en ondas de superficie.

Para obtener información detallada sobre la variación de la velocidad de onda de corte V_S con la profundidad, en un lugar, se utilizan las técnicas de pozos (bore-hole). Se habla de "up-" "down-" o "cross-hole", dependiendo de la ubicación de la excitación y del sensor (fig 2.11).

En el método "up-hole", se da la excitación a distintas profundidades en el pozo, y se realiza la lectura en el sensor colocado en la superficie (fig 2.11 b). En el "down-hole" se da la excitación en la superficie y se lee en sensores ubicados a varias profundidades (fig 2.11 c). Ambos métodos proporcionan valores promedios de la velocidad de propagación de onda, para el suelo localizado entre los sensores y la excitación.

En el método "cross-hole" se necesitan 2 pozos, uno para la colocación del excitador y otro para el sensor (fig 2.11 a). Se generan ondas de corte al activar el excitador (p.e. pegando con un martillo), y conociendo la distancia entre los pozos, se calculan las velocidades de propagación. La distancia entre los dos pozos debe ser determinada cuidadosamente; la evaluación de la velocidad es muy sensible a inexactitudes de este tipo (si es necesario se puede utilizar un inclinómetro en los pozos para determinar su inclinación).

También se pueden medir parámetros relacionados con el amortiguamiento, utilizando las diferencias entre las velocidades de -

propagación de ondas de compresión (P) y de corte (S), y recurriendo a una teoría adecuada. Esta técnica ha sido desarrollada en Japón (ref 30).

Los métodos geosísmicos se utilizan mucho por su bajo costo en relación con las pruebas de laboratorio, ver inciso 2.2.3) y por su facilidad de ejecución. Por otra parte, los valores así obtenidos no están afectados por las causas típicas de dispersión en las propiedades obtenidas en laboratorio (muestreo, alteración, operador, temperatura, etc.).

Sin embargo, generalmente no se conocen todas las condiciones del subsuelo con exactitud (por ejemplo, saturación, confinamiento, compacidad, condiciones después de la construcción) y resulta difícil correlacionar los resultados de campo con los de laboratorio.

2.2.3 Pruebas de laboratorio

2.2.3.1 Pruebas de columna resonante

El método de la columna resonante, para determinar velocidades de propagación de onda, se ha ido desarrollando mucho en las últimas décadas. La larga lista de referencias (ref 32, 34) es una medida de los esfuerzos de la investigación para mejorar el funcionamiento del método, y la confiabilidad de los resultados obtenidos.

Es una de las pruebas que representa mejor la propagación de ondas de corte en una muestra de suelo.

El método consiste en buscar el modo fundamental de vibración en una muestra de suelo cilíndrica, contenida en una membrana, ubicada en un equipo triaxial y puesta en vibración torsional o longitudinal. La frecuencia de resonancia, la geometría de la muestra y las condiciones de frontera permiten calcular la velocidad de propagación de onda (ref 34), (fig 2.12) basándose en la teoría de propagación de ondas en barras prismáticas (ref 35).

Para eliminar la variación de la deformación angular en los planos de corte, se propuso utilizar muestras cilíndricas huecas, en lugar de las sólidas. Así, se genera un estado de deformación angular, casi constante.

Mayores detalles sobre el método se encuentran en la literatura (refs 34 y 32).

Los resultados obtenidos son confiables en el intervalo de deformaciones $10^{-5} \% < \gamma < 10^{-2} \%$; por tanto se pueden comparar con los módulos de corte G , obtenidos de pruebas geosísmicas.

2.2.3.2 Pruebas de corte repetido

Bajo este nombre se agrupan todas las pruebas en que las fuerzas externas excitadoras de la muestra son de tipo cortante y gene-

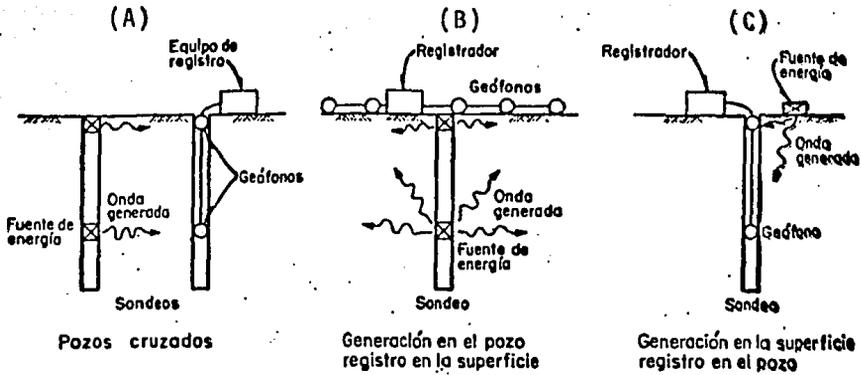


fig.2.11 Arreglo del equipo para los distintos métodos (ref.46) geosísmicos.

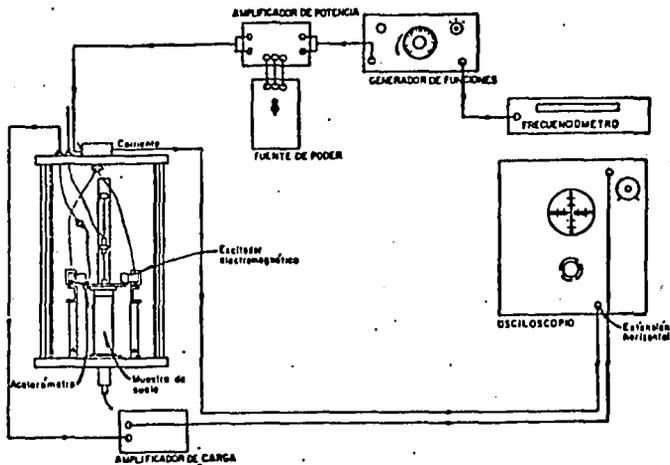


fig.2.12 Equipo para la prueba de la columna resonante. (ref.46)

ran un estado bidimensional de deformaciones. Se clasifican en dos categorías:

- 1) Equipos de corte simple cíclico (refs 21 y 23), comúnmente conocidos como de tipo Roscoe (ref 40) o de tipo NGI (ref 41), y sus adaptaciones a condiciones dinámicas
- 2) Equipos utilizando muestras cilíndricas, sólidas o huecas (refs 20, 21, 23 y 35) sometidas a torsión.

La diferencia básica entre las dos clases es la manera de aplicar las fuerzas excitadoras, por corte directo (fig 2.13) o por torsión, (fig 2.14) y por tanto en las condiciones de confinamiento lateral de las pruebas.

El principio consiste en inducir esfuerzos cortantes, por medio de vibraciones establecidas o libres en planos horizontales y verticales (en general bajo condiciones de deformación controlada), y medir las relaciones dinámicas esfuerzo-deformación y las presiones de poro (ciclos de histéresis) de las cuales se obtienen los parámetros G y β (Apéndice A). Para información más detallada, el lector puede recurrir a las refs 20, 21, 23, 32, 34 y 35.

Teóricamente, las condiciones de esfuerzo y deformación inducidas por las dos categorías de equipo son idénticas en todo el espécimen de suelo.

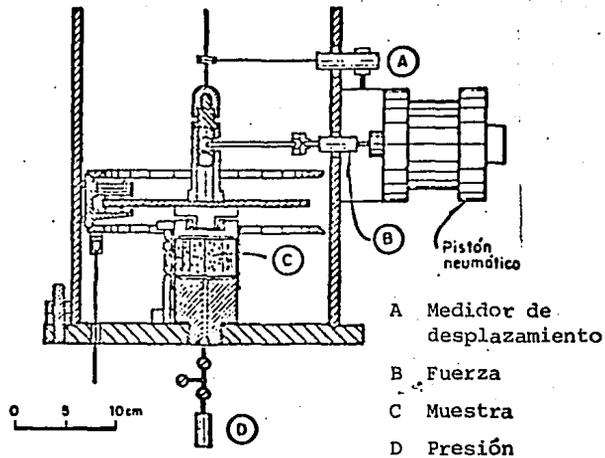


fig.2.13 Equipo para la prueba de corte (ref.46) directo cíclico.

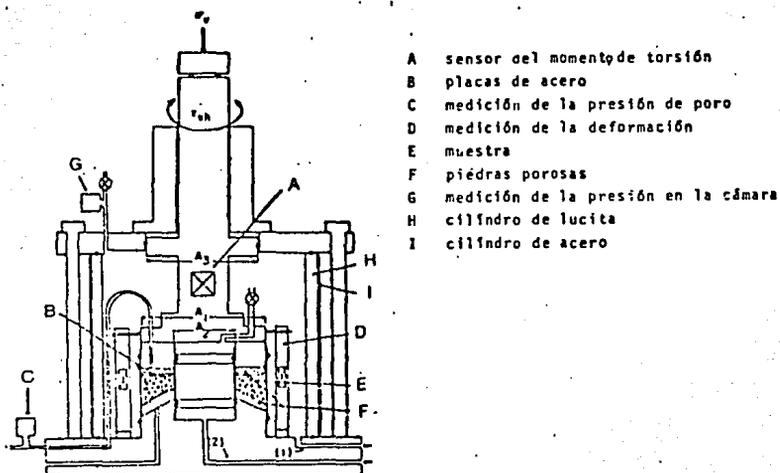


fig.2.14 Equipo para la prueba de corte cíclico (ref.20) por torsión con muestras huecas.

Las diferencias que se reportan (ref 20), se deben en gran medida a causas propias del equipo y del procedimiento, como por ejemplo: 1) fricciones que se generan en las fronteras, 2) confinamiento lateral imperfecto, 3) condiciones no perfectamente bidimensionales y 4) estado de deformaciones no homogéneo.

Las deformaciones inducidas en las muestras son mayores de $10^{-2}\%$.

2.2.3.3 Pruebas triaxiales

Otro tipo de prueba que permite obtener información sobre el comportamiento dinámico de los suelos, es la prueba triaxial cíclica. Esta prueba consiste en colocar una muestra de suelo en una cámara triaxial y consolidarla a una presión confinante deseada. Posteriormente, se aplica un esfuerzo desviador cíclico, o una deformación axial cíclica, con una forma de onda conocida (cuadrada, senoidal, etc) a una frecuencia deseada. En la fig 2.15 se muestra una cámara triaxial cíclica (ref 53).

La respuesta medida es la relación dinámica esfuerzo-deformación, así como la presión de poro generada. Este tipo de prueba se utiliza principalmente para la obtención de las resistencias a sollicitaciones cíclicas y los estudios de susceptibilidad a licuación de los suelos (ref 55).

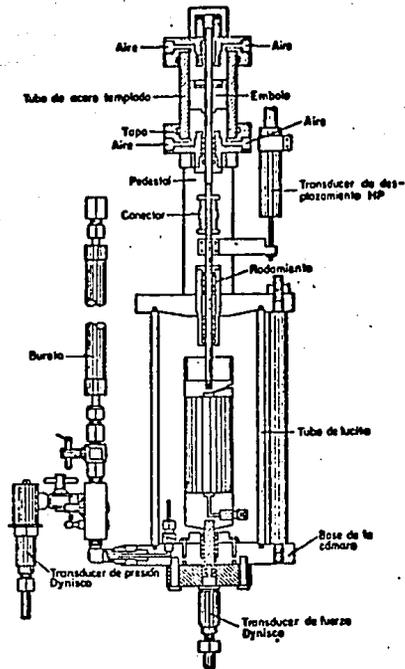


fig.2.15 Equipo para la prueba triaxial
(ref.53) cíclica.

El estado de deformaciones y esfuerzos generado no representa adecuadamente las condiciones de corte puro que se generarían en el campo libre en el caso de que sólo existieran ondas de corte propagándose verticalmente.

En términos de esfuerzos, por ejemplo, se observa que, dependiendo de cómo se aplica el desviador cíclico y de la condición inicial del suelo en la probeta, los ejes principales pueden girar en un intervalo de 0° a 90° . Las direcciones principales no sufren cambios de tal magnitud en el campo.

En la ref 56 se compararon los resultados de pruebas no drenadas en arenas saturadas en una mesa vibradora, con los obtenidos por triaxiales cíclicas y pruebas de corte directo cíclico. Las condiciones generadas en la muestra a gran escala, en la mesa, pueden considerarse parecidas a las del campo libre. Se establecieron factores de correlación para calcular los resultados de campo libre, a partir de los obtenidos en la triaxial cíclica.

Por otra parte, entre los resultados obtenidos en la mesa vibradora y los obtenidos en las pruebas de corte directo cíclico, se encontró buena compatibilidad.

Otros factores de correlación han sido propuestos. Estos tienen su origen en el hecho que se deben cumplir condiciones de similitud de los esfuerzos (ref 37) y de las deformaciones (ref 36).

No obstante que en la triaxial cíclica no se tiene un estado de esfuerzos de corte puro (como el que ocurre en el campo libre, cuando sólo se propagan ondas de corte verticalmente), es común utilizar los resultados de este tipo de prueba, debido a la gran experiencia acumulada, a través de su aplicación en la evaluación del comportamiento sísmico de muchos casos reales (por ejemplo ref 57); además, como se mencionó anteriormente, investigaciones experimentales han mostrado que los resultados de pruebas triaxiales cíclicas se pueden correlacionar con los correspondientes de corte directo y de mesa vibradora (ref 56).

2.2.4 Procesamiento de los resultados

Después de haber efectuado todas las pruebas necesarias, para obtener datos en un amplio intervalo de deformaciones angulares (10^{-4} % hasta 1%), se necesita procesar esta información para determinar las curvas de diseño $G/G_{m\acute{a}x}$ vs. γ y β vs. γ . Las discrepancias entre los resultados obtenidos por los distintos métodos señalados en los incisos anteriores, se pueden clasificar en dos grupos: 1) las que se presentan entre las propiedades medidas en campo y en laboratorio (a bajos niveles de deformación) y 2) las existentes entre las propiedades obtenidas por los distintos procedimientos de laboratorio (en todo el intervalo de deformaciones).

2.2.4.1 Métodos de ajuste entre resultados de campo y de laboratorio

Para predecir la rama principal completa (hasta la falla) de la relación esfuerzo-deformación (p.e. la curva R en la fig 2.3) para las condiciones del campo, se combinan los resultados de pruebas in situ, que proporcionan el módulo de corte máximo, $G_{m\acute{a}x}$, con las pruebas de laboratorio, de las cuales se obtiene información completa sobre el comportamiento del suelo.

Los cinco procedimientos propuestos (refs 9 y 31), tienen su origen en las diferencias entre los $G_{m\acute{a}x}$ obtenidos en el campo y la laboratorio, y en que los métodos de campo no permiten hasta ahora una determinación completa de la relación esfuerzo-deformación (sólo se pueden determinar los puntos extremos).

Los procedimientos comúnmente conocidos como métodos de ajuste, están dirigidos a la predicción de la curva G vs. γ en el campo.

Todos tienen dos puntos en común: 1) el módulo tangente inicial $G_{m\acute{a}x}$, determinado en el campo por métodos sísmicos, se utiliza como el módulo inicial de la curva de comportamiento en el campo y 2) los efectos de la velocidad de aplicación de carga en el esfuerzo cortante máximo $\tau_{m\acute{a}x}$, no se consideran explícitamente.

A continuación se describen los cinco métodos:

- a) *Método del incremento de porcentaje*: ajusta la curva G vs. γ de laboratorio, a cada nivel de deformación por la relación constante de $(G_{m\acute{a}x})_{\text{campo}} / (G_{m\acute{a}x})_{\text{lab}}$.

o sea

$$G_{\text{campo}}(\gamma) = G_{\text{lab}}(\gamma) \times \frac{(G_{m\acute{a}x})_{\text{campo}}}{(G_{m\acute{a}x})_{\text{lab}}} \quad (2.10)$$

- b) *Método del incremento aritmético*: ajusta la curva de laboratorio por una traslación constante, igual a la diferencia entre $(G_{m\acute{a}x})_{\text{campo}}$ y $(G_{m\acute{a}x})_{\text{lab}}$, o sea

$$G_{\text{campo}}(\gamma) = G_{\text{lab}}(\gamma) + \left[(G_{m\acute{a}x})_{\text{campo}} - (G_{m\acute{a}x})_{\text{lab}} \right] \quad (2.11)$$

Se propuso para $\gamma < 10^{-1} \%$, porque la aplicación de este método para $\gamma > 10^{-1} \%$, puede resultar en sobrestimaciones del módulo de rigidez.

- c) *Método del decremento lineal*: considera 3 partes en la curva G vs. γ , obtenida en laboratorio, y ajusta cada parte de la siguiente manera:

$$\text{para } \gamma < 10^{-3} \%, G_{\text{campo}} = G_{\text{lab}} \times \frac{(G_{m\acute{a}x})_{\text{campo}}}{(G_{m\acute{a}x})_{\text{lab}}}$$

para $10^{-3} < \gamma < 1\%$

$$G_{\text{campo}} = G_{\text{lab}} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{(G_{\text{máx}})_{\text{campo}}}{(G_{\text{máx}})_{\text{lab}}} - 1 \right) \log \gamma \right] \quad (2.12)$$

para $\gamma > 1\%$ $G_{\text{campo}} = G_{\text{lab}}$

- d) *Método de la deformación de referencia:* utiliza el concepto de la normalización de las deformaciones γ con una deformación de referencia $\gamma_h = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G_{\text{máx}}}$ (fig 2.1) y postula que la forma de las curvas $\left(\frac{G}{G_{\text{máx}}} \right)_{\text{campo}}$ y $\left(\frac{G}{G_{\text{máx}}} \right)_{\text{lab}}$ son idénticas, o sea

$$G_{\text{campo}} = \frac{(G_{\text{máx}})_{\text{campo}}}{1 + \eta \gamma_h} \quad (2.13)$$

donde η es un parámetro, que se determina ajustando una curva hiperbólica (ec 2.1) a los resultados de laboratorio, y

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_h}$$

En este método intervienen los 2 puntos extremos de la relación esfuerzo-deformación, obtenidos en el campo $(G_{\text{máx}}$ y $\tau_{\text{máx}})$.

En condiciones estáticas este método ha sido utilizado con éxito (ref 9).

- e) *Método del ajuste de deformación*: involucra correcciones en los módulos obtenidos de pruebas triaxiales cíclicas, para tomar en cuenta las deformaciones no-homogéneas en la muestra del suelo basándose en relaciones del tipo

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon}{F} \quad (2.14)$$

donde

- ϵ_m deformación en el tercio medio de la muestra
- ϵ deformación medida entre las cabezas
- F factor de ajuste

para definir

$$E_m = \frac{\sigma}{\epsilon_m} \quad (2.15)$$

- E_m módulo de Young en el tercio medio no afectado por las condiciones de frontera

La idea de ajustar las deformaciones mediante ecuaciones como la 2.14 es racional, ya que se trata de eliminar perturbaciones inducidas por las condiciones de frontera. Sin embargo, el uso del factor F , es discutible porque abarca demasiados factores. El mismo enfoque se puede aplicar también a las pruebas de corte repetido.

Escoger entre los cinco métodos propuestos resulta difícil, y el criterio del usuario tiene un papel importante en la decisión final. En las refs 9 y 31 se analizaron los distintos procedimientos, junto con sus impactos respectivos en la rama principal completa de la relación esfuerzo-deformación, y en respuestas dinámicas. En la fig 2.16 se dan algunos ejemplos.

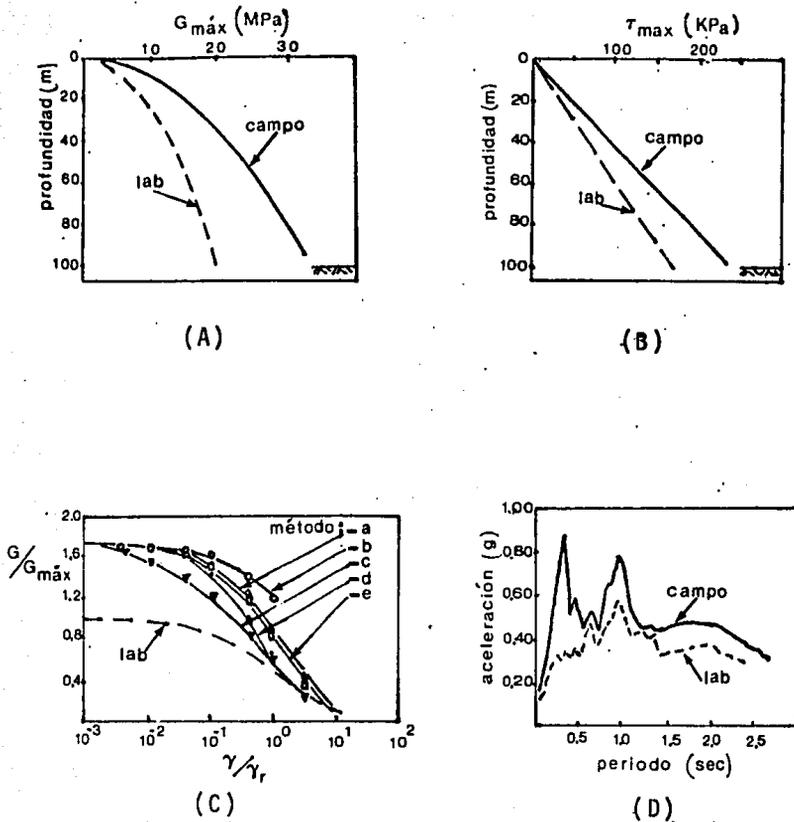
En este trabajo se ha optado por el método más simple, que introduce menos artificios en los resultados (incremento del porcentaje).

La desventaja de no poder ajustar el $\tau_{m\acute{a}x}$ no es grave para los casos considerados aquí, ya que se trabaja en un intervalo de deformaciones pequeñas ($< 1\%$, donde no se llega a $\tau_{m\acute{a}x}$).

Se recomienda utilizar la siguiente secuela para el cálculo de los módulos de corte G en el campo:

- A. Se obtiene un valor $(G_{m\acute{a}x})_{campo}$ para las condiciones de campo a una cierta profundidad, a la que corresponde un σ_M o un q_u .
 Esto permite obtener, mediante por ejemplo la ec 2.7 (en su equivalente SI) para suelos granulares

$$G_{m\acute{a}x} = K (\sigma_M)^{1/2} \quad (\text{en MPa})$$



- fig.2.16 A. Diferencia entre los $G_{\text{máx}}$ obtenidos en el campo y en el laboratorio.
 $(G_{\text{máx}})_{\text{campo}} = 1.7(G_{\text{máx}})_{\text{lab}}$.
- B. diferencia entre $\tau_{\text{máx}}$ obtenido en el campo y el obtenido en el laboratorio.
- C. variancia en las curvas $G/G_{\text{máx}}$ vs. γ , obtenidas por los distintos métodos.
- D. influencia de las propiedades utilizadas en la respuesta dinámica del depósito (en términos de la aceleración).

el parámetro K , del suelo en el campo, o sea

$$\left[K \right]_{\text{campo}} = \frac{(G_{\text{máx}})_{\text{campo}}}{(\sigma_M)^{1/2}} \quad (2.16)$$

- B. De las pruebas de columna resonante, se obtienen valores $(G_{\text{máx}})_{\text{lab}, X}$ donde X indica las condiciones bajo las cuales se ejecutaron.

En forma análoga a lo planteado en el inciso anterior, se obtienen valores de K

$$\left[K \right]_{\text{lab}, X}$$

- C. Se calculan los factores de ajuste, α_X , para las distintas condiciones X

$$\alpha_X = \frac{\left[K \right]_{\text{campo}}}{\left[K \right]_{\text{lab}, X}} \quad (2.17)$$

- D. Se obtienen los valores de $(G)_{\text{campo}}$, para las condiciones X (inducidas por la construcción)

$$\left[G \right]_{\text{campo}, X} = \alpha_X \left[G \right]_{\text{lab}, X} \quad (2.18)$$

2.2.4.2 Propiedades obtenidas en distintas pruebas de laboratorio

Para el análisis de este punto, se presentan a continuación los resultados de un programa de pruebas, de los tipos ya mencionados, en un mismo suelo (ref 52) bajo condiciones representativas, después de la construcción.

El suelo en estudio es una arena media con limo. La curva granulométrica se muestra en la fig 2.17 ($S = 80\%$, $F = 20\%$, $C_u = 2.7$, $C_c = 5.3$).

El suelo se utilizará como material para la construcción de los respaldos de una presa de tierra (altura = 100 m, longitud de la cresta = 350 m, ancho de la cresta = 20 m), y se encuentra en un banco de préstamo en las cercanías del lugar de construcción. Se cuenta con los resultados de un programa de pruebas geosísmicas en el banco de préstamo.

En el laboratorio se llevó a cabo un programa de pruebas, para obtener información sobre la influencia de: 1) la saturación (aguas arriba o aguas abajo), 2) compacidad relativa (para $DR_1 = 91\%$ y $DR_2 = 71\%$), 3) nivel de confinamiento radial ($\sigma_{\lambda_1} = 200$ k Pa y $\sigma_{\lambda_2} = 500$ k Pa), y 4) consolidación anisotrópica ($K_1 = 1.00$, $K_2 = 1.50$ y $K_3 = 2.50$, donde $K = \frac{\sigma_v}{\sigma_h}$, para representar las condiciones extremas y medias de esfuerzos dentro del cuerpo de la presa).

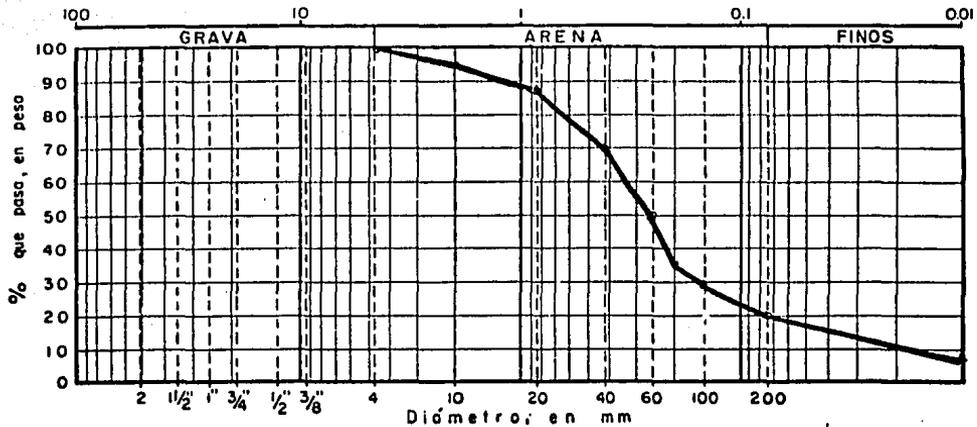


fig.2.17 Curva granulométrica del material ensayado.

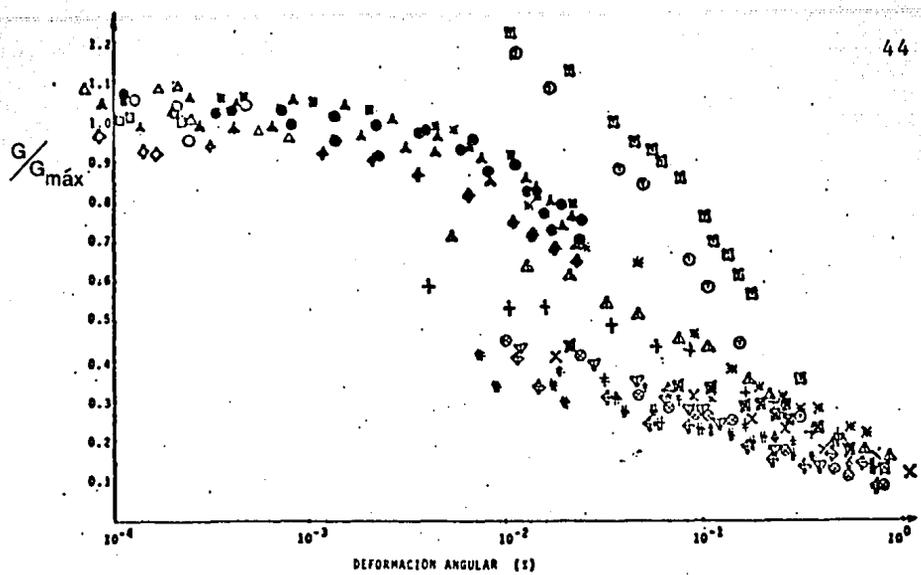
En la tabla 2.II se muestran los valores $G_{m\acute{a}x}$ obtenidos con la columna resonante.

Haciendo uso del procedimiento propuesto en el inciso anterior, se obtienen las curvas $(G/G_{m\acute{a}x})_{campo}$ vs. γ , para las distintas condiciones ya mencionadas (fig 2.18). Con respecto a la influencia de estas condiciones se ha observado lo siguiente (fig 2.18 y tabla 2.II):

- Los $G_{m\acute{a}x}$ en condiciones no saturadas (NS), son mayores que en condiciones saturadas (S) (tabla 2.II), del orden de $(G_{m\acute{a}x})_{NS} = 1.20 (G_{m\acute{a}x})_S$. Para deformaciones mayores, este efecto es despreciable.
- Para mayor confinamiento se nota un aumento en la rigidez, como podría esperarse con base en la ec 2.7; sin embargo, también se notan menores pérdidas de rigidez, para mayor confinamiento a todos los niveles de deformación.
- En general las rigideces correspondientes a un grado de compacidad mayor, son mayores.

Con respecto a las diferencias entre los resultados obtenidos por distintos tipos de prueba, se observa lo siguiente (fig 2.18):

- i) Las máximas discrepancias se ubican en el intervalo 10^{-2} % a 10^{-1} %. Este corresponde al traslape de los intervalos de aplicación de las diversas pruebas.



leyenda

○	RC, $\sigma_{r,1}, S, DR_1, K_1$	TIPO DE PRUEBA	- COLUMNA RESONANTE (RC)	⊗	DSS, $\sigma_{r,1}, S, DR_1, K_1$
△	RC, $\sigma_{r,1}, NS, DR_1, K_1$		- TRIAXIAL CICLICA (TX)	⊠	DSS, $\sigma_{r,1}, S, DR_1, K_2$
□	RC, $\sigma_{r,1}, S, DR_2, K_1$	COMPACIDAD	- CORTE SIMPLE CICLICO (DSS)	△	DSS, $\sigma_{r,1}, S, DR_1, K_3$
◇	RC, $\sigma_{r,1}, NS, DR_2, K_1$		- DR ₁ (=91%)	▽	DSS, $\sigma_{r,1}, S, DR_2, K_1$
●	RC, $\sigma_{r,2}, S, DR_1, K_1$	SATURACION	- DR ₂ (=71%)	⊕	DSS, $\sigma_{r,1}, NS, DR_2, K_1$
▲	RC, $\sigma_{r,2}, NS, DR_1, K_1$		- S = 100% (S)	×	DSS, $\sigma_{r,2}, S, DR_1, K_1$
■	RC, $\sigma_{r,2}, S, DR_2, K_1$	CONSOLIDACION	- S < 100% (NS)	+	DSS, $\sigma_{r,2}, S, DR_1, K_2$
◆	RC, $\sigma_{r,2}, NS, DR_2, K_1$		- K = 1.00 (K ₁)	※	DSS, $\sigma_{r,2}, S, DR_1, K_3$
◇	RC, $\sigma_{r,2}, NS, DR_2, K_1$		- K = 1.50 (K ₂)	†	DSS, $\sigma_{r,2}, S, DR_2, K_1$
⊙	TX, $\sigma_{r,1}, S, DR_1, K_2$	CONFINAMIENTO	- K = 2.50 (K ₃)	#	DSS, $\sigma_{r,2}, NS, DR_2, K_1$
⊚	TX, $\sigma_{r,1}, S, DR_1, K_2$		- $\sigma_r = 0.200$ MPa ($\sigma_{r,1}$)		
⊛	TX, $\sigma_{r,2}, S, DR_1, K_1$		- $\sigma_r = 0.500$ MPa ($\sigma_{r,2}$)		

fig.2.18 Resultados de las pruebas cíclicas, graficados en una curva $G/G_{m\acute{a}x}$ vs. la deformación angular.

TABLA 2.II Valores de $G_{m\acute{a}x}$ (MPa) en campo, calculados según el procedimiento
 señalado en las ecs 2.16 a 2.18

CR	σ_h	K	C O N D I C I O N E S					
			SATURADAS			NO SATURADAS		
			1.00	1.50	2.50	1.00	1.50	2.50
91%	0.2 MPa		111.803	120.762	136.931	134.164	144.914	164.317
	0.5 MPa		176.777	190.941	216.506	212.132	229.129	259.808
71%	0.2 MPa		104.998	113.411	128.536	126.437	136.568	154.854
	0.5 MPa		166.017	179.319	203.328	199.915	215.933	244.845

ii) Los valores obtenidos por la prueba triaxial cíclica son mayores que los obtenidos por las otras pruebas, lo cual ha sido observado en otras investigaciones (ref 56).

El estado de esfuerzos y deformaciones generado en la triaxial difiere del que se genera en las pruebas de corte directo cíclico y de la columna resonante (ref 36).

La diferencia básica reside en la aplicación de la perturbación en la muestra cargada directamente en corte en las pruebas de corte repetido, pero solicitada por una compresión y extensión alternadas en la triaxial.

Sin embargo, se pueden considerar factores de ajuste, basándose en la anisotropía de las rigideces (ref 36) y en la similitud de los estados de esfuerzo (ref 37). Por ejemplo, la anisotropía de las rigideces se puede expresar como sigue (material lineal-elástico-anisótropo en condiciones de corte puro y deformación plana)

$$G_{HV} = \frac{E_V}{1 + \frac{1}{n} + 2 \nu_{VH}} \quad (2.19)$$

donde

G_{HV} rigidez en planos verticales

$$\nu_{VH} = \frac{\epsilon_H}{\epsilon_V}$$

ϵ_H , ϵ_V deformación lineal horizontal y vertical

E_H, E_V = módulos de Young en dirección horizontal y vertical

$$n = \frac{E_H}{E_V}$$

Aplicando la ec 2.19, junto con la expresión clásica para un material isótropo, se llega a:

$$\frac{G}{G_{HV}} = \frac{1 + \frac{1}{n} + 2 \nu_{VH}}{2(1 + \nu)} \frac{E}{E_V} \quad (2.20)$$

Las condiciones en la triaxial no corresponden exactamente con los requisitos equivolúmetricos, bajo los cuales se cumple la ec (2.19); sin embargo, se llega a una mejor compatibilidad entre G , obtenido en una prueba de corte simple, y G_{HV} , obtenido en la triaxial, a condición de que se disponga de los parámetros E_V y ν_{VH} . Estimaciones erróneas pueden causar más dispersión que compatibilidad.

Con respecto a la similitud de los estados de esfuerzo se puede comprobar que bajo la condición,

$$(\sigma_c)_{TR} = (\sigma_v)_{cc}$$

se puede calcular el módulo de corte que se encontraría en una prueba de corte simple cíclico G_{cc} , a partir del módulo de Young, E_{TR} , obtenido de la triaxial cíclica, o sea

$$G_{cc} = C E_{TR} \quad (2.21)$$

donde

$(\sigma_c)_{TR}$ esfuerzo de confinamiento hidrostático en la triaxial cíclica

$(\sigma_v)_{cc}$ esfuerzo vertical en la prueba de corte cíclico

$$C = \frac{\left[\frac{1 + 2K_0}{3} \right]^{1/2}}{2(1 + \nu)}$$

$$K_0 = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$$

ν relación de Poisson

Utilizando estas similitudes (ref 37), se logra encontrar una buena compatibilidad entre los resultados de las triaxiales y las pruebas de corte cíclico en el intervalo de deformaciones de $10^{-2}\%$ a 1% . De hecho, ni la triaxial ni la prueba de corte directo, pueden representar confiablemente el estado de esfuerzos y deformaciones requerido para deformaciones pequeñas. Esto tiene su origen en la complejidad de estos estados generados, que hace que las propiedades obtenidas resulten distintas de las que se obtendrían con la columna resonante (cuyo estado de esfuerzo y deformación es más simple y representativo de lo que ocurre en el campo libre, para la condición de ondas de corte propagándose verticalmente). Además, resulta difícil inducir y medir pequeñas deformaciones en las triaxiales cíclicas y las pruebas de corte directo.

Ello es otra causa de dispersión en los resultados dentro de la zona de traslape ($10^{-2}\%$ a 1%) de la aplicación de los distintos procedimientos.

A altas deformaciones, los estados complejos dentro de las muestras se uniformizan más y por ello, se observa que las diferencias a $\gamma = 1\%$, prácticamente desaparecen.

Debido a las discrepancias entre los resultados obtenidos de las diferentes pruebas cíclicas, sería conveniente llevar a cabo una investigación experimental y teórica con el fin de entender mejor la causa de estas diferencias.

Otro factor que induce variaciones entre los resultados, a parte de los ya mencionados, es la manera de obtención de las propiedades. El módulo G en la columna resonante se obtiene mediante una expresión analítica ($G = V_S^2 \rho$), mientras que en las pruebas triaxiales y de corte cíclico, intervienen procesos de estimación de módulos (tangentes o secantes). El nivel de deformación juega, otra vez, un papel importante. De hecho las estimaciones de los módulos son muy delicadas a pequeñas deformaciones.

El análisis cualitativo de los resultados en la fig 2.18, ha permitido llegar a algunas aclaraciones, respecto a las discrepancias que existen entre las propiedades obtenidas por distintos procedimientos.

Considerando todas las observaciones al respecto, se puede concluir que es difícil comparar resultados que representan teóricamente un mismo fenómeno pero que son obtenidos por distintos procedimientos.

En el caso de la fig 2.18, este efecto es notorio en la zona $\gamma \approx 10^{-2} \%$.

Por ello, para eliminar este tipo de discrepancias, se necesita encontrar un método confiable que cubra todo el intervalo de deformaciones que puedan ocurrir en casos prácticos.

El procedimiento más indicado sería el de la columna resonante hueca, por lo siguiente:

- Se genera un estado de deformación y esfuerzos homogéneos
- Los efectos de condiciones de borde son mínimos (en comparación con los otros procedimientos)
- Representa mejor las condiciones del campo libre
- Se eliminan procesos de estimación de módulos (a deformaciones pequeñas donde los efectos no lineales son despreciables)

Sin embargo, se tendría que encontrar la teoría adecuada para interpretar los resultados a mayores deformaciones (efectos no lineales).

2.3 *Planteamiento de un modelo de comportamiento probabilista*

2.3.1 *Introducción*

Tomando en cuenta las observaciones mencionadas en los párrafos anteriores, respecto a las posibles dispersiones en los valores de las propiedades G y β , parece razonable proponer un modelo de comportamiento probabilista.

Haciendo uso de tal modelo, se puede evaluar la influencia de la incertidumbre de las propiedades en la evaluación de la respuesta dinámica de estructuras térreas (cap 3).

2.3.2 *Concepto de coeficiente de variación de una distribución probabilista*

Para evaluar la dispersión en los parámetros G y β del suelo, se maneja el concepto estadístico del coeficiente de variación (CV) de un parámetro. Este CV se define como el cociente de la desviación estándar (σ) entre el valor medio (μ) correspondiente de un parámetro.

Entonces, el coeficiente de variación se define como:

$$CV_{\kappa} = \frac{\sigma_{\kappa}}{\mu_{\kappa}} \quad (2.22)$$

donde

CV_{κ} coeficiente de variación del parámetro κ

μ_{κ} valor medio del parámetro κ , que se define como el primer momento de una distribución probabilista $p(x_{\kappa})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x_{\kappa}) dx_{\kappa}$$

σ_{κ} desviación estándar del parámetro κ , que se define como la raíz cuadrada del 2º momento de una distribución probabilista $p(x_{\kappa})$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x_{\kappa} - \mu_{\kappa})^2 p(x_{\kappa}) dx_{\kappa} \right]^{1/2}.$$

Hasta este punto no se ha hecho una hipótesis sobre el carácter de la ley probabilista que rige la distribución de los valores de las propiedades.

Basándose en el teorema del límite central (ref 54) (intervienen muchos factores, cada uno con su distribución), parece razonable considerar que la distribución es normal o Gaussiana.

Esto implica que el parámetro CV_{μ} se puede definir de la siguiente manera

$$CV_{\mu} = \frac{N}{\sqrt{N}} \left[\frac{\sum_{i=1}^N (x_{\mu i} - m_{\mu})^2}{\sum_{i=1}^N x_{\mu i}} \right]^{1/2} \quad (2.23)$$

donde

- N número total de muestras
- $x_{\mu i}$ valor del parámetro μ en la i -ésima muestra
- m_{μ} valor promedio sobre N muestras

Este enfoque se puede aplicar a cualquier ley de variación del valor medio μ_{μ} del parámetro μ .

2.3.3 Modelo propuesto

Este concepto de coeficiente de variación se aplica a las leyes de variación de los parámetros G y β , con el nivel de deformación angular, ya descritas.

En la fig 2.19a se muestran ejemplos de estas leyes promedios del módulo al corte dinámico $G(\gamma)$ y de la fracción del amortiguamiento crítico $\beta(\gamma)$, de un suelo granular (ref 48), afectadas por una dispersión $CV_G(\gamma)$ y $CV_{\beta}(\gamma)$, respectivamente (fig 2.19b). Las dispersiones se obtuvieron mediante un análisis estadístico de resultados reportados en la literatura técnica, (véase tabla 2.III).

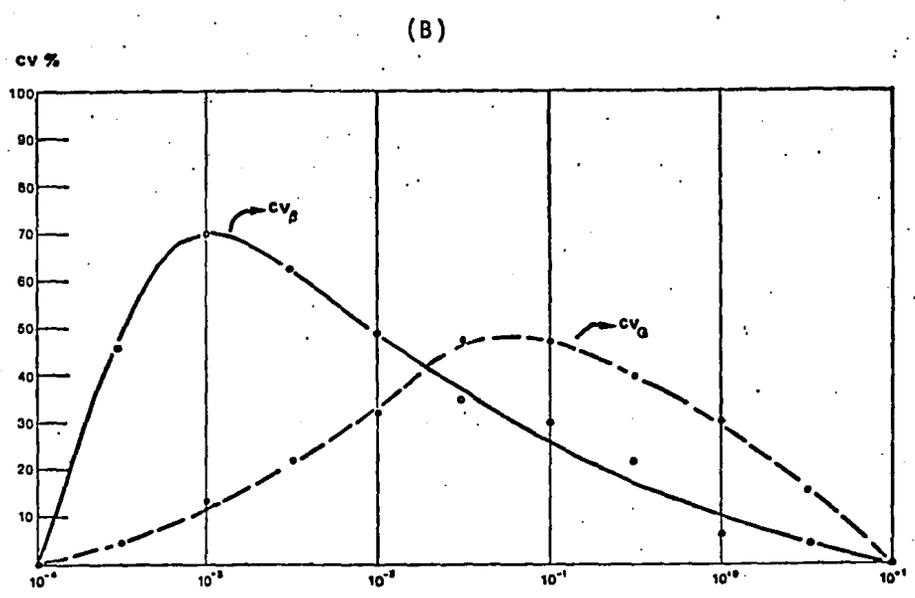
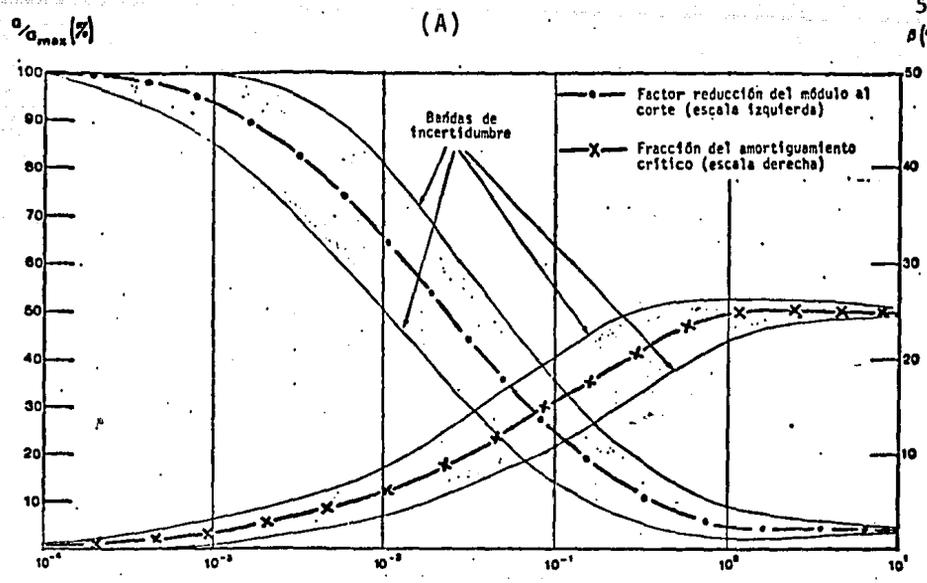


fig.2.19 Ejemplos del modelo de comportamiento probabilista; (A) bandas de confianza en las propiedades, y (B) variación de los CV con la deformación angular.

Deformación angular efectiva (1)		10^{-4}	3.16×10^{-4}	10^{-3}	3.16×10^{-3}	10^{-2}	3.16×10^{-2}	10^{-1}	3.16×10^{-1}	10^0	3.16	10^{+1}	
Módulo al corte (Factor de reducción) (1)	A R E N A	Valor promedio (2)	1.000	0.984	0.934	0.826	0.656	0.443	0.246	0.115	0.049	0.049	0.049
		Coefficiente de variación (3)	0.000	0.070	0.070	0.170	0.220	0.320	0.410	0.510	0.440	0.220	0.000
	A R C I L L A	Valor promedio (2)	1.000	0.913	0.761	0.505	0.400	0.261	0.152	0.070	0.037	0.013	0.024
		CV (3)	0.000	0.050	0.140	0.22	0.310	0.480	0.480	0.400	0.320	0.150	0.000
Fracción del amortiguamiento crítico (1)	A R E N A	Valor promedio (2)	0.50	0.80	1.70	3.20	5.60	10.00	15.50	21.00	24.60	24.60	24.60
		CV (3)	0.000	0.45	0.700	0.620	0.490	0.350	0.300	0.220	0.060	0.060	0.093
	A R C I L L A	Valor promedio (2)	2.50	2.50	2.50	3.50	4.75	6.50	9.25	13.80	20.00	26.00	29.00
		CV (3)	0.000	0.240	0.500	0.760	0.760	0.630	0.490	0.340	0.270	0.200	0.000

(1) Este factor se aplica a los módulos de rigidez al corte definidos para amplitudes pequeñas de la deformación al corte (definida como 10^{-4}), para obtener los módulos de rigidez a niveles más altos de la deformación al corte.

(2) Estos valores promedio se sacaron de los valores propuestos por Seed e Idriss (1970).

(3) Estos valores de CV se obtuvieron de un análisis de datos reportados en la literatura.

Tabla 2.III Resultados de un análisis probabilista de datos presentados en la literatura técnica (véase fig. 2.19).

El procesamiento estadístico de datos presentados en la literatura, resulta, como ya se ha señalado, difícil porque muchas referencias no dan toda la información necesaria, para calcular dispersiones de casos particulares.

Ya se discutió la importancia de factores como relación de vacíos, saturación, alteración de la muestra, confinamiento, etc., (véanse incisos anteriores) en los valores de los parámetros.

Por ello, para elaborar una curva de dispersiones típica ($CV(\gamma)$), se necesita conocer las condiciones bajo las cuales las pruebas reportadas fueron hechas. En general, esto no es posible, y con estudios estadísticos de resultados de la literatura se llega a una dispersión demasiado generalizada. Sin embargo, cuando no se dispone de resultados propios para los suelos disponibles para la construcción de la obra, esta manera de proceder resulta económica y del lado de la seguridad, ya que las dispersiones son más altas.

La mejor manera para obtener la información necesaria es, sin ninguna duda, realizar un programa de pruebas cubriendo todo el intervalo de deformación con los suelos en estudio; a partir de estos resultados se obtendrán dispersiones más acordes al problema bajo consideración.

Con el modelo propuesto se evalúan límites de confianza que proporcionan resultados potencialmente más útiles para el diseño de componentes críticos. Con respecto a la práctica, cabe recordar que la teoría de la probabilidad sirve para considerar los efectos aleatorios en una variable. Por tanto, antes de empezar el estudio estadístico de los resultados (como por ejemplo los de la fig 2.19) se deben eliminar todas las causas conocidas o de terministas.

Así, por ejemplo, si los datos presentados en la fig 2.18 se quisieran utilizar para el análisis sísmico de una presa de tierra, se podría eliminar el efecto del grado de saturación en la dispersión, puesto que podemos hacer la hipótesis que la línea superior de flujo separa la zona saturada y la parcialmente saturada. Por otra parte, no se tiene certidumbre respecto al estado de esfuerzos iniciales (antes de que ocurra el sismo), ni las condiciones finales de compacidad relativa; consecuentemente, estos aspectos deben considerarse en la determinación de la alea toriedad de las propiedades.

Un posible procedimiento (fig 2.20) para el procesamiento de in formación, consiste en la aplicación del método de los mínimos cuadrados al ajuste de una expresión analítica (función de varios parámetros, como por ejemplo la ec 2.2 con los parámetros C_1 , α y R) a los datos. Este método permite también el uso de factores de peso, dando a los datos más confiables mayor peso, según cierto

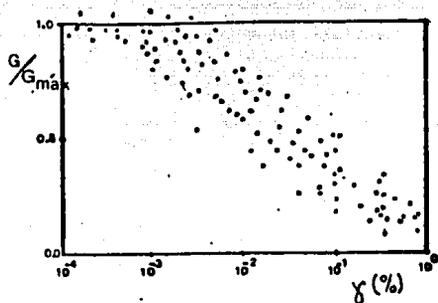
criterio, disminuyendo así la influencia de datos menos confiables. Las curvas propuestas en la ref 48 son producto de este procedimiento.

Por otra parte, en general, se nota una tendencia, en la forma de la nube de puntos (por ejemplo fig 2.18), y el trazo a mano de una curva que se ajusta a los mismos puede dar una aproximación suficiente para fines prácticos.

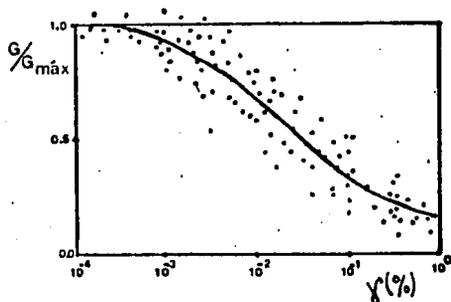
Una vez que se dispone de la curva media, obtenida por uno de los procedimientos descritos, se puede proceder a la evaluación de la dispersión. Como posible procedimiento, se puede mencionar lo siguiente (fig 2.20), basándose en la ec 2.23:

- Se aplica la ec 2.23 para las deformaciones donde haya muchos resultados, obteniendo así valores de CV en puntos discretos
- Se interpola gráficamente entre los CV conocidos, para obtener la curva completa CV vs. γ (fig 2.20.3)
- Se aplica esta gráfica (fig 2.20.3) a la curva media, para un cierto grado de confiabilidad, y se obtiene el modelo de comportamiento probabilista (fig 2.20.4).

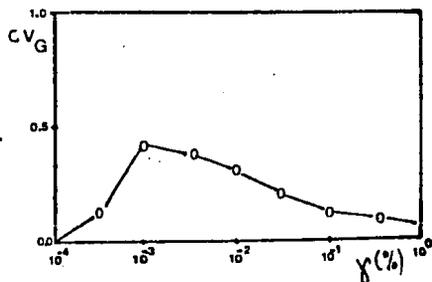
En la fig 2.20 se dió el ejemplo de la curva $G/G_{m\acute{a}x}$ vs. γ . Las ideas mencionadas se aplican también a las gráficas β vs. γ (véase por ejemplo fig 2.19).



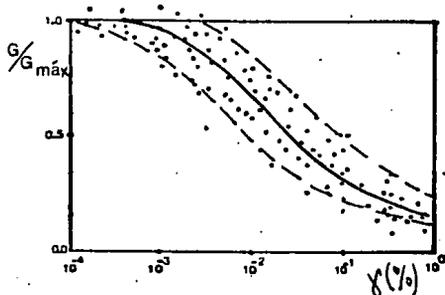
1. Se grafican todos los datos



2. Se calcula la curva promedio por uno de los procedimientos propuestos.



3. Se calculan los CV con la ec.2.23, en los puntos donde hay suficientes datos



4. Se obtienen las bandas de confianza, combinando los resultados de los pasos 2 y 3

fig.2.20 Secuela para la obtención de las bandas de confianza en el modelo probabilista.

El modelo propuesto de comportamiento probabilista permite considerar, en cierta forma, las siguientes causas de dispersión en las propiedades de diseño:

- a) La no homogeneidad del suelo in situ: relación de vacíos, grado de saturación, estructura del suelo, etc.
- b) Las causas de dispersión no cuantificables en las pruebas: tipo de muestreo, incompatibilidad entre las pruebas, influencia del operador, etc.
- c) El número finito de pruebas
- d) El estado de esfuerzos estáticos; no se conoce con certeza la distribución de esfuerzos en la estructura térrea antes de la acción sísmica.
- e) Esfuerzos dinámicos; la acción sísmica causa cambios en la dirección de los esfuerzos principales, aspecto que no se toma en cuenta de manera adecuada en las pruebas de laboratorio.

El modelo se utilizará en una teoría (cap 3), para cuantificar la influencia de las dispersiones mencionadas en la respuesta de estructuras térreas bajo excitación sísmica.

3. TEORIA DE PERTURBACIONES Y SU APLICACION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

3.1 *Conceptos generales*

3.1.1 *Introducción*

Hasta ahora, los análisis sísmicos de estructuras térreas se hacían bajo la hipótesis de que las propiedades del suelo obtenidas de pruebas de laboratorio eran deterministas. Para evaluar la incertidumbre en los resultados se analizaba varias veces el mismo problema, cada vez con otro conjunto de propiedades. Las respuestas resultantes de tal enfoque del problema permitían al ingeniero obtener una evaluación aproximada de los efectos de la dispersión en las propiedades.

En sistemas de muchos grados de libertad, este método de análisis paramétrico, aunque válido y racional, resulta muy costoso, ya que el factor tiempo de cómputo, en estos sistemas, tiene mucha importancia.

Por ello, se necesita un método que incorpore, dentro del análisis, la aleatoriedad de las propiedades y que permita reducir el costo del análisis.

A parte del análisis paramétrico mencionado, existen dos tipos más de análisis probabilistas que cumplen con el requisito de la incorporación directa de la aleatoriedad: (1) los análisis de primer orden (ref 2), y (2) los análisis basados en la teoría de las perturbaciones (ref.12). En este trabajo se describe un método basado en esta teoría de perturbaciones.

3.1.2 Teoría de perturbaciones

En la ref 12, se exponen los conceptos básicos de la teoría de perturbaciones, aplicada al problema matemático de los valores característicos.

Para mayor claridad, en el Apéndice B, se hace énfasis en la teoría convencional no degenerada. Esta teoría se puede utilizar para encontrar las perturbaciones de las soluciones de la ecuación de movimiento, la cual se resuelve con el modelo de elemento finito.

3.2 Aplicación de la teoría a la ecuación de movimiento

3.2.1 Revisión de conceptos

3.2.1.1 Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento para vibraciones no amortiguadas del modelo del elemento finito bidimensional mostrado en la fig 3.1 es la siguiente:

$$(M) \{\ddot{u}\} + (K) \{u\} = - \{m\} \ddot{y}(t) \quad (3.1)$$

donde

- $\{u\}$ desplazamientos nodales relativos a la base rígida
- $\{\ddot{u}\}$ aceleraciones correspondientes
- (K) matriz de rigidez
- (M) matriz de masa (concentrada o consistente)
- $\ddot{y}(t)$ aceleración de excitación dada en la base rígida incluyendo las componentes horizontal y vertical
- $\{m\}$ vector de carga correspondiente a $y(t) = 1$, y relacionado con la matriz de masa a través de la siguiente relación:

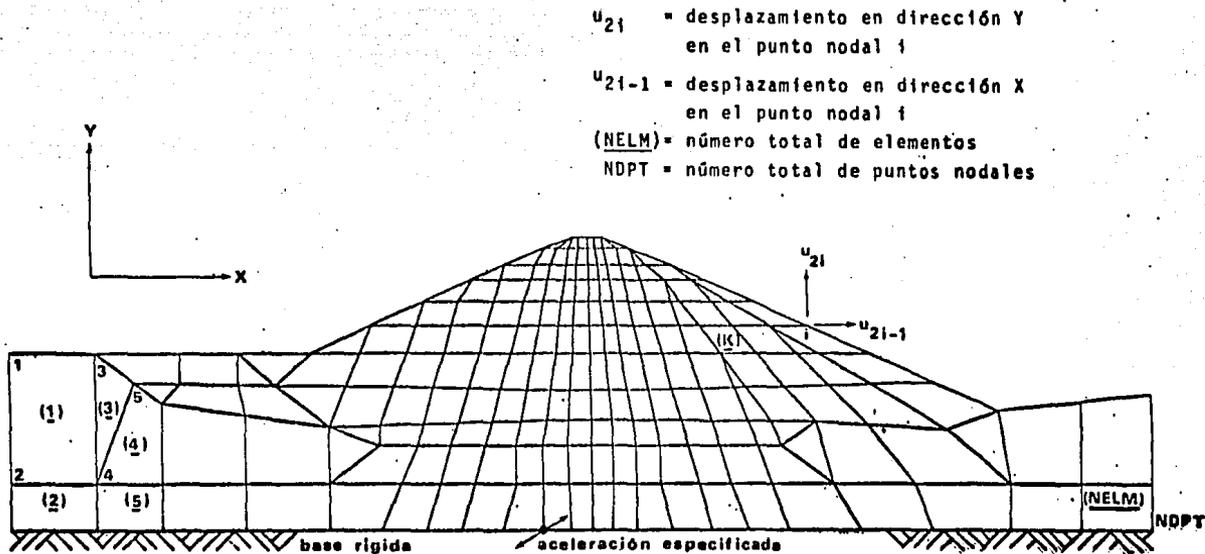


fig.3.1 Ejemplo del modelo de elemento finito.

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y} e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

donde \ddot{y} es la amplitud y en general es compleja. Esto implica que la respuesta es compleja también:

$$\{u\} = \{U\} e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

donde $\{U\}$ es un vector constante, en general complejo. Sustituyendo la ec (3.4) en la ecuación de movimiento (ec 3.1), se obtiene el siguiente resultado:

$$(K - \omega^2 M) \{U\} = - \ddot{y} \cdot \{m\} \quad (3.5)$$

Este sistema de ecuaciones lineales se puede resolver por eliminación de Gauss si ω no es la frecuencia natural del sistema.

En la práctica, la ec 35 se resuelve para varias frecuencias. Así, se obtiene la respuesta del sistema bajo las cargas dadas, en el dominio de la frecuencia.

La respuesta, $\{u\}$, en función del tiempo, se obtiene utilizando la ec 3.4, para cada frecuencia:

$$\{u(t)\} = \sum_{j=1}^n \{U_j\} e^{i\omega_j t}$$

Este método de la respuesta compleja sólo es aplicable a sistemas lineales. Para considerar las no-linealidades del comportamiento del suelo, se ha desarrollado el método lineal equivalente (Apéndice A).

El amortiguamiento viscoso de los materiales se introduce usando módulos de rigidez complejos en la formulación de la matriz (K). El módulo de rigidez al cortante complejo está dado por la relación (ref 14):

$$G^* = G(1 - 2\beta^2 + 2i\beta \sqrt{1 - \beta^2}) \quad (3.6)$$

donde β es la fracción del amortiguamiento crítico. Al usarse G^* , en lugar de G en la formulación de la matriz de rigidez (K), se tiene la ventaja de que el determinante de la ec 3.5 siempre es diferente de cero y por tanto es posible obtener $\{u\}$ para todos los valores de ω . Además se ha comprobado (ref 24), que el uso de la ec 3.6 induce errores de menor importancia (con respecto a la teoría clásica) en la respuesta.

3.2.2 Incorporación del modelo probabilista

La ecuación de movimiento del modelo matemático mostrado en la fig 3.1 está dada por la ec 3.5 :

$$(K - \omega^2 M) \{u\} = - \{m\} \ddot{y}$$

Si (K) es una matriz aleatoria, usando la teoría de perturbaciones (ref 15), se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$(K) = (K)_0 + (Q)_1 + (Q)_2 + \dots \quad (3.7)$$

donde

$(K)_0$ matriz de rigidez no perturbada (determinista)

$(Q)_1$ matriz de rigidez con perturbación de primer orden

$(Q)_2$ matriz de rigidez con perturbación de segundo orden

Si las perturbaciones son pequeñas, la solución de la ec (3.5) se puede escribir como sigue:

$$\{U\} = \{U\}_0 + \{U\}_1 + \{U\}_2 + \dots \quad (3.8)$$

donde

$\{U\}_0$ solución no perturbada (determinista)

$\{U\}_1$ solución con perturbación de primer orden

$\{U\}_2$ solución con perturbación de segundo orden

Sustituyendo las ecs 3.7 y 3.8 en la ec 3.5 (y despreciando órdenes superiores a dos) se obtiene la siguiente ecuación:

$$(K_0 + Q_1 + Q_2 - \omega^2 M) \{U_0 + U_1 + U_2\} = - \{m\} \ddot{y} \quad (3.9)$$

Efectuando las operaciones algebraicas indicadas y agrupando los términos de igual orden en la ec 3.9, se obtiene:

para el orden cero

$$(K_0 - \omega^2 M) \{u\}_0 = - \{m\} \ddot{y} \quad (3.10)$$

para el primer orden

$$(K_0 - \omega^2 M) \{u\}_1 = - (Q)_1 \{u\}_0 \quad (3.11)$$

para el segundo orden

$$(K_0 - \omega^2 M) \{u\}_2 = (Q)_2 \{u\}_0 - (Q)_1 \{u\}_1 \quad (3.12)$$

En las ecs 3.10, 3.11 y 3.12 se observa que la solución del problema perturbado (probabilista) es directa debido a que el vector de carga es el único que cambia en tales ecuaciones. Por ello, el problema se puede resolver para carga unitaria y multiplicando después la solución por el vector de carga correspondiente.

En términos de un vector de carga unitario $\{E\}$ las ecs 3.5, 3.10, 3.11 y 3.12, se escriben como sigue:

$$(K - \omega^2 M) \{A\} = \{E\} \quad (3.13)$$

$$(K_0 - \omega^2 M) \{A\}_0 = \{E\} \quad (3.14)$$

$$(K_0 - \omega^2 M) \{A\}_1 = - (Q)_1 \{A\}_0 \quad (3.15)$$

$$(K_0 - \omega^2 M) \{A\}_2 = - (Q)_1 \{A\}_1 - (Q)_2 \{A\}_0 \quad (3.16)$$

donde

$\{A\}$ solución unitaria; $\{U\} = - \{A\}^T (B)$

$\{A\}_0$ solución no perturbada unitaria;

$$\{U\}_0 = \{A\}_0^T (B)$$

(B) matriz diagonal que contiene las componentes del vector $- \{m\} \ddot{y}$; $\{E\}^T (B) = - \{m\}$

$\{A\}_1$ solución perturbada de primer orden unitaria

$\{A\}_2$ solución perturbada de segundo orden unitaria

Sustituyendo las ecs 3.13, 3.14, 3.15 y 3.16 en la ec 3.8 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\{A\} = (L)^{-1} \{E\} - (L)^{-1} (Q)_1 \{A\}_0 - (L)^{-1} \left[(Q)_1 \{A\}_1 + (Q)_2 \{A\}_0 \right]$$

y sustituyendo los valores de $\{A\}_0$ y $\{A\}_1$, se obtiene

$$\{A\} = (L)^{-1} \{E\} - (L)^{-1} (Q)_1 (L)^{-1} \{E\} - (L)^{-1} \left[- (Q)_1 (L)^{-1} (Q)_1 (L)^{-1} \{E\} + (Q)_2 (L)^{-1} \{E\} \right]$$

o,

$$\{A\} = \left[(I) - (L)^{-1}(Q)_1 + (L)^{-1}(Q)_1, (L)^{-1}(Q)_1, - \right. \\ \left. - (L)^{-1}(Q)_2 \right] (L)^{-1}\{E\} \quad (3.17)$$

donde

(I) matriz unitaria

(L) $(K_0 - \omega^2 M)$

La solución $\{U\}$ se obtiene multiplicando la ec. (3.17) por la matriz de carga $\{B\}$:

$$\{U\} = \{A\}^T \{B\} \quad (3.18)$$

En el programa DARE (inciso 3.2.3), sólo se consideran perturbaciones de primer orden. Por consiguiente el sistema de ecuaciones que se resuelve es:

$$(K_0 - \omega^2 M) \{U\}_0 = - \{m\} \ddot{y} \quad (3.19)$$

$$(K_0 - \omega^2 M) \{U\}_1 = - (Q)_1 \{U\}_0$$

y la solución final es:

$$\{U\} = \{U\}_0 + \{U\}_1 = \left[- (I) + (L)^{-1}(Q)_1, (L)^{-1}\{m\} \right] \ddot{y} \quad (3.20)$$

Para la solución de la ecuación 3.20 se necesita generar una matriz $(Q)_1$ probabilista. Esta matriz $(Q)_1$ se forma de la misma manera que la matriz de rigidez determinista $(K)_0$ (inciso 3.2.1.2) sólo que en lugar de los valores deterministas (G_0, β_0) se utilizan valores probabilistas $(\Delta G, \Delta \beta)$ que corresponden a las perturbaciones que se inducen en (G_0, β_0) .

En cuanto al problema de la formación de la matriz $(Q)_1$, se puede comprobar que, con el módulo complejo perturbado, (ver Apéndice C):

$$\Delta G^* = G_0^* \left[R_G CV_G + 2 i \beta_0 R_\beta CV_\beta \right] \quad (3.21)$$

donde

R_G, R_β números aleatorios con una distribución normal ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$) (ver inciso 2.3.2)

CV_G, CV_β coeficientes de variación correspondientes de G y β

G_0^* módulo complejo (ec 3.6)

i $\sqrt{-1}$,

β_0 amortiguamiento

se logra formar la perturbación $(Q)_1$ de la matriz $(K)_0$.

Para generar las N soluciones probabilistas requeridas, se forman N matrices $(Q)_1$ mediante N muestreos de ΔG^* .

Ello da lugar a N soluciones $\{u\}_1$ (ec 3.19). De este conjunto se determinan los valores promedios y desviaciones estándar, para encontrar las bandas de confianza de la solución $\{u\}$ de la siguiente manera:

Media

$$\{m_N\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{u_i\}_1 \quad (3.22a)$$

Desviación estándar

$$\{S_N\} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N \{u_i^2\}_1 - \{m_N^2\}}{N - 1} \right]^{1/2} \quad (3.22b)$$

Puede verificarse fácilmente que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{m_N\} = \{0\} \quad (3.23)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{S_N\} = \text{RMS} \{u_i\}_1 \quad (3.24)$$

donde RMS = raíz cuadrada del segundo momento (en el sentido probabilista.)

Bandas de confianza

límite superior:

$$\{u\}_{LS} = \{u\}_0 + \alpha \{S_N\} \quad (3.25)$$

límite inferior:

$$\{u\}_{LI} = \{u\}_0 - \alpha \{S_N\} \quad (3.26)$$

El parámetro α rige el ancho de la banda de confianza y depende del riesgo que se quiera admitir en la solución.

3.2.3 Programa de computadora DARE

La teoría y los conceptos descritos en este capítulo, se concretizaron en un programa de computadora, DARE. En la ref 16, se describe su funcionamiento y se presenta el manual para el usuario.

Para verificar la eficacia de la teoría y el funcionamiento del programa, se analizó un mismo problema (fig 3.2) bajo el mismo sistema de cargas, por tres métodos:

Método I:

Se generan 20 conjuntos de propiedades, de una distribución normal alrededor de los promedios conocidos. A continuación, se hacen 20 análisis deterministas, con el mismo programa DARE, cada vez con otro conjunto de datos. Por medio de un análisis estadístico se obtienen los promedios y límites de confianza (Tabla 3.1).

Método II:

Se hace un análisis probabilista, simulando 20 conjuntos de propiedades (con la teoría descrita anteriormente). Como se muestra más adelante, 20 simulaciones probabilistas dan buena con-

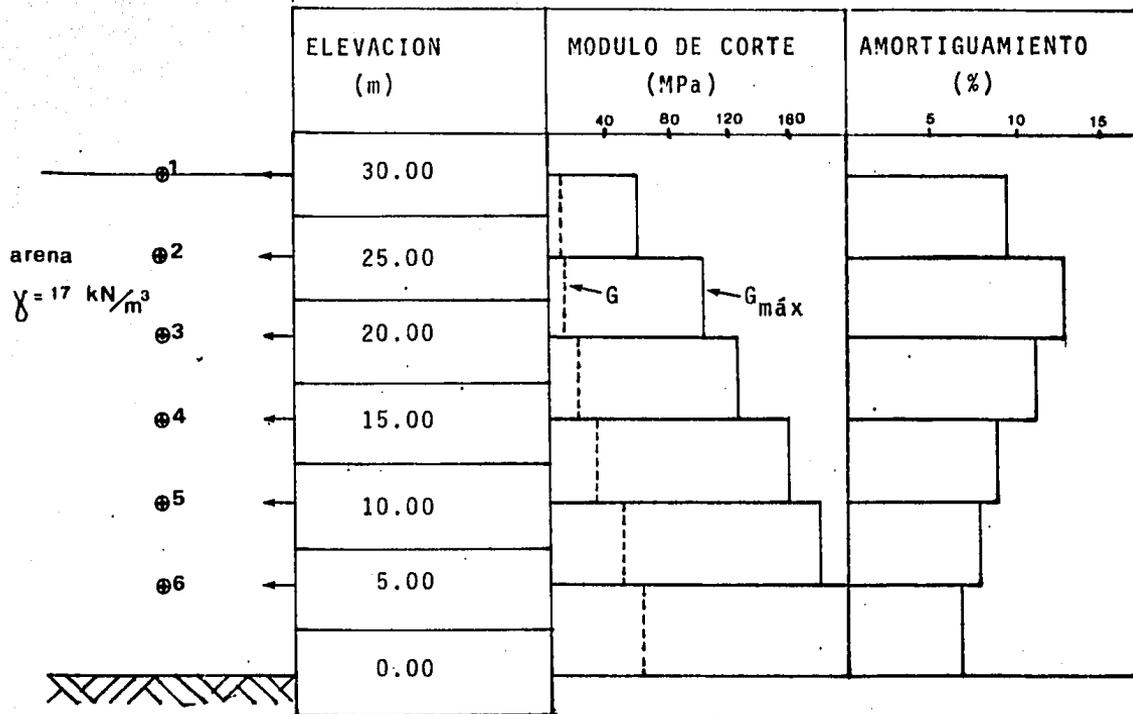


fig.3.2 Esquema del problema con las propiedades G y β , compatibles con el nivel de deformación inducido por el sismo N°1 (fig.4.2.a)

fiabilidad. Se obtienen los promedios y límites de confianza (tablas 3.I y 3.II).

Método III:

Se generan 3 conjuntos de propiedades, uno con los límites superiores, otro con los valores promedios y el último con los límites inferiores (en cada caso las propiedades utilizadas corresponden al nivel de deformación inducida). Haciendo 3 análisis deterministas se obtienen resultados correspondientes a los 3 grupos de datos (tabla 3.II).

La comparación de los resultados de los métodos I y II, permite evaluar la confiabilidad de la teoría propuesta (tabla 3.I y fig 3.3).

Los resultados de los métodos II y III, siendo métodos alternativos dan la oportunidad de comparar la utilidad del programa (tabla 3.II y fig 3.4).

Finalmente, se analiza el costo del análisis, comparando los tiempos de cómputo de los tres métodos (tabla 3.III).

Por medio de estas comparaciones se puede observar lo siguiente:

- a) Con respecto a la confiabilidad de la teoría (tabla 3.I y fig 3.3),

TABLA 3.I Comparación numérica entre los resultados
obtenidos por los métodos 1 y 2

Punto	AR_i		AR		AR_s	
	1	2	1	2	1	2
1	2.609	2.915	2.947	3.113	3.285	3.310
2	1.179	1.265	1.325	1.365	1.470	1.464
3	0.912	0.912	1.031	1.037	1.151	1.172
4	0.890	0.941	1.034	1.055	1.177	1.170
5	0.873	0.858	0.948	0.939	1.022	1.021
6	0.732	0.739	0.807	0.792	0.881	0.846

AR amplificación de la aceleración máxima (media)
en la base rígida.

AR_i, AR_s límite inferior, límite superior

TABLA 3.II Comparación numérica entre los resultados obtenidos por los métodos 2 y 3

Punto	AR _z		AR		AR _s	
	2	3	2	3	2	3
1	2.915	2.265	3.113	3.100	3.310	1.846
2	1.265	1.380	1.365	1.365	1.464	1.806
3	0.912	0.833	1.037	1.037	1.172	1.575
4	0.941	0.891	1.055	1.033	1.170	1.221
5	0.858	0.789	0.939	0.921	1.021	0.989
6	0.739	0.789	0.792	0.784	0.846	0.961

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

TABLA 3.III Comparación económica de los tres métodos

Método	Tiempo CPU (sec)	% del costo de la referencia
1	447.4	100
2	118.4	26
3	154.5	35

CPU = tiempo utilizado en el procesador central de la computadora

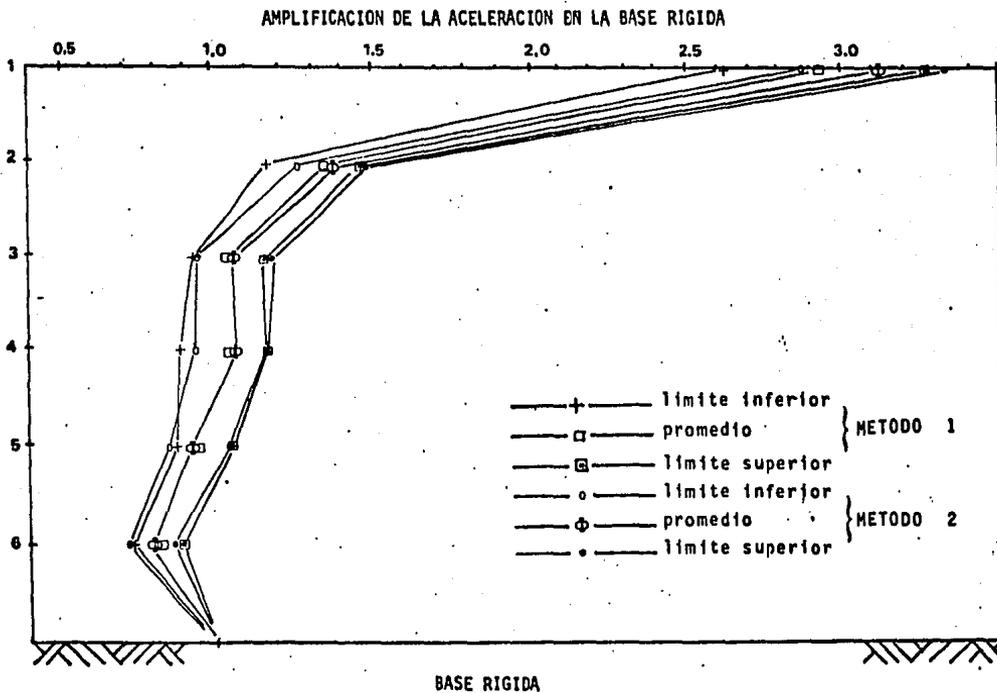


fig.3.3 Comparación gráfica de las amplificaciones obtenidas por los métodos 1 y 2.

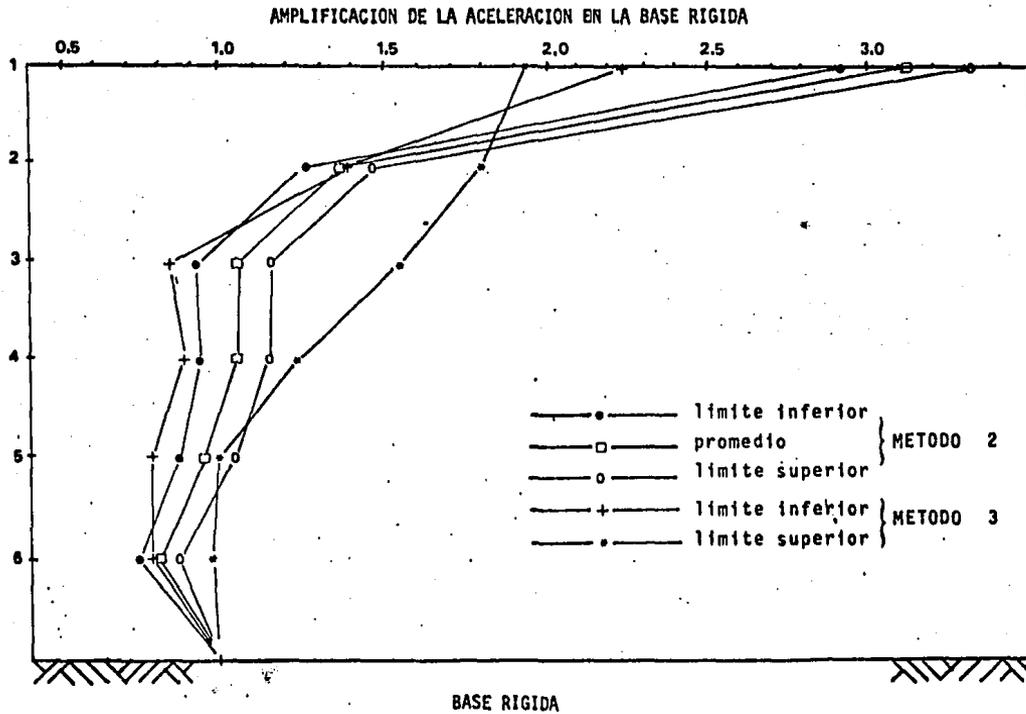


fig.3.4 Comparación gráfica de las amplificaciones obtenidas por los métodos 2 y 3.

- Los resultados obtenidos por los dos métodos son casi iguales. Las diferencias se pueden atribuir (1) al número finito de los conjuntos utilizados de propiedades y (2) al haber omitido los términos de orden mayor que 2 en la teoría de las perturbaciones.

b) Con respecto a la utilidad del programa (tabla 3.II y fig 3.3),

- El uso de los tres conjuntos de propiedades en el método III, da origen a resultados incompatibles con los obtenidos por los otros métodos; por ejemplo, las amplificaciones correspondientes a las propiedades límite superior son menores que las correspondientes a las propiedades límite inferior en el punto 1 (fig 3.4). Esto indica que los conjuntos no se pueden comparar entre sí, con el objeto de evaluar dispersiones en la respuesta. De hecho, se trata de tres grupos de datos distintos, de los cuales se puede decir que uno es más rígido o más blando globalmente que otro, y por tanto va a tener otra respuesta.

Por otra parte, en los métodos I y II cada grupo de datos se genera utilizando variables aleatorias con distribución normal. Por consiguiente, el aspecto probabilista de las propiedades es considerado adecuadamente y, consecuentemente, las respuestas calculadas con ambos métodos son similares.

c) Con respecto al costo (tabla 3.III)

- Tomando como referencia el tiempo para aplicar el método I, se observa que el método II utiliza 26% y el método III, 35% de dicho tiempo.
- El tiempo del método I toma en cuenta 20 corridas deterministas con propiedades equivalentes (véase método lineal equivalente) congruentes con el nivel de deformación. También el método II, se inicia con las propiedades equivalentes; en el método III se tiene que iterar, hasta llegar a la convergencia, para los conjuntos de propiedades correspondientes a los límites. Por ello, hay una diferencia entre el tiempo unitario del método I ($= \frac{447.4}{20} = 22.4$ sec.) y del método III ($= \frac{154.5}{3} = 51.5$ sec.).

Estas observaciones ponen en evidencia las ventajas de la teoría propuesta, tanto en confiabilidad como en utilidad.

Con respecto a la evaluación de un número adecuado de simulaciones probabilistas (que da buena confiabilidad a un costo razonable) se analizó el mismo problema (fig 3.2) con seis distintos números $N = 3, 6, 12, 25, 40$ y 50 . Se aplicó la distribución de

Student a los estimadores de los promedios de la aceleración máxima a varias profundidades.

Se manejan los siguientes conceptos:

N número de simulaciones probabilistas

δ_p ancho de la banda de confiabilidad (p %) alrededor del promedio estimado, E . La confiabilidad crece cuando δ_p disminuye

$$\left(= \frac{m_\delta - m_i}{E} \right) \quad (3.27)$$

$$m_\delta = 1 + t_\alpha \frac{CV}{\sqrt{N-1}}$$

$$m_i = 1 - t_\alpha \frac{CV}{\sqrt{N-1}}$$

t_α valor de la distribución de Student a nivel de probabilidad α , ($1 - 2\alpha = p$).

Por tanto, la ec 3.27 se vuelve

$$\delta_p = \frac{2 t_\alpha CV}{\sqrt{N-1}} \quad (3.28)$$

Si se toma como δ_p^*

$$\delta_p^* = \frac{\delta_p}{CV} \quad (3.29)$$

se observa que δ_p^* no es función de la profundidad.

En la tabla 3.IV se muestran los resultados de las seis corridas. En la ec 3.29 se utiliza $p = 90\%$ ($\alpha = 0.05$). Al graficar el parámetro

$$\frac{100}{CPU^1 \times \delta_p^*}$$

contra N (fig 3.5), se observa que la curva pasa por un máximo ($N = 20$). Esto indica que para $N = 20$, se obtiene la mejor combinación de economía y confiabilidad, en el uso del programa DARE.

Cabe mencionar que este es el resultado de un ejemplo específico.

En general, se tendrá que correlacionar los CPU con los datos básicos del problema; como por ejemplo, número de grados de libertad (NGL), número de puntos digitizados del sismo (NS), ancho de la banda de la matriz de rigidez (AB), el paso del tiempo (DT), la máxima frecuencia del análisis (FR), etc. En lugar de utilizar el tiempo CPU se recurriría a un tiempo unitario, definido como

$$CPU^* = \frac{CPU}{Z}$$

donde $Z = f(NGL, NS, DT, FR, AB \dots)$

1 CPU = tiempo utilizado en el procesor central de la computadora

TABLA 3.IV Resultados del análisis para la obtención de un número adecuado de simulaciones

N	$t_{0.05}$	δ_p^*	CPU, (seg)	$\frac{100}{\text{CPU} \delta_p^*}$
3	2.353	3.33	73.3	0.410
6	1.943	1.74	86.7	0.663
12	1.782	1.07	101.5	0.921
25	1.708	0.70	138.6	1.031
40	1.684	0.54	186.0	0.990
50	1.678	0.48	226.7	0.920

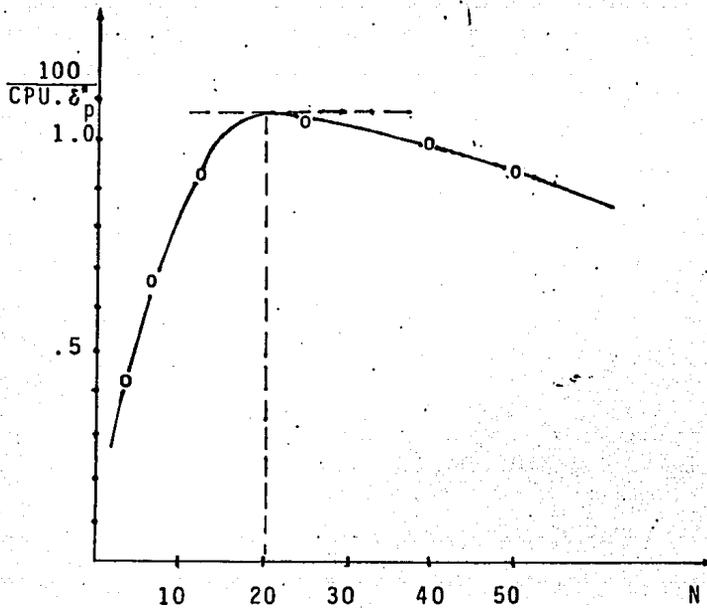


fig.3.5 Obtención gráfica del número adecuado de simulaciones.

Sin embargo, el uso de

$$\frac{100}{\text{CPU}^* \times \delta_p^*}$$

en lugar de

$$\frac{100}{\text{CPU} \times \delta_p^*}$$

no cambia significativamente el resultado de un número adecuado N . Este análisis, para la obtención de un número adecuado N , no toma en cuenta las consideraciones importantes de costo de la falla en una estructura térrea. De hecho, para la evaluación de la dispersión de componentes críticos en el diseño, no es suficiente tomar en cuenta sólo el costo del análisis y la confiabilidad.

4. METODO SIMPLIFICADO PARA EVALUAR EL EFECTO DE LA DISPERSION EN LAS ACELERACIONES MAXIMAS

4.1 *Introducción*

Las ideas expuestas en el capítulo 3 se aplican a varios casos prácticos, como a depósitos de suelo y a estructuras térreas. El estudio de distintos depósitos de suelo (distinta rigidez, geometría y excitación), permitió establecer un procedimiento simplificado para estimar la dispersión en la aceleración máxima a partir de las características del depósito y su respuesta determinista. Como representativo de las estructuras térreas, se analizó un terraplén homogéneo de sección triangular con diferentes pendientes.

4.2 Obtención del procedimiento simplificado para depósitos de suelo

4.2.1 Descripción de los datos

Se analizaron dos estratigrafías: 1) una homogénea (20 m de arcilla de consistencia media con la resistencia no drenada variando linealmente con la profundidad (veáse fig 4.1a), y 2) una heterogénea (fig 4.1b), que corresponde al sitio de la unidad Nonoalcotlatelolco en el centro de la ciudad de México (ref 58).

Se utilizaron dos sismos de igual duración (5.2 sec.), pero de contenido de frecuencias distinto; se emplearon varias aceleraciones máximas en la base rígida del modelo. En la fig 4.2, se muestran los espectros de aceleración de ambos sismos. La tabla 4.1 agrupa todos los casos analizados.

Para el estudio general de la influencia de los CV de las propiedades en la evaluación de la respuesta se consideraron los siguientes valores de CV_G y CV_β : 0%, 10%, 20%, 30%, 40% y 50%, y se supusieron independientes de la deformación angular.

4.2.2 Resultados

En el caso 1, se analizaron 35 posibles combinaciones de (CV_G , CV_β) (por ejemplo (0%, 10%), (0%, 20%), ..., (0%, 50%), (10%, 20%), ...etc). El análisis con (0%, 0%) no se llevó a cabo porque no da información sobre influencias de CV_G y CV_β (caso determinista).

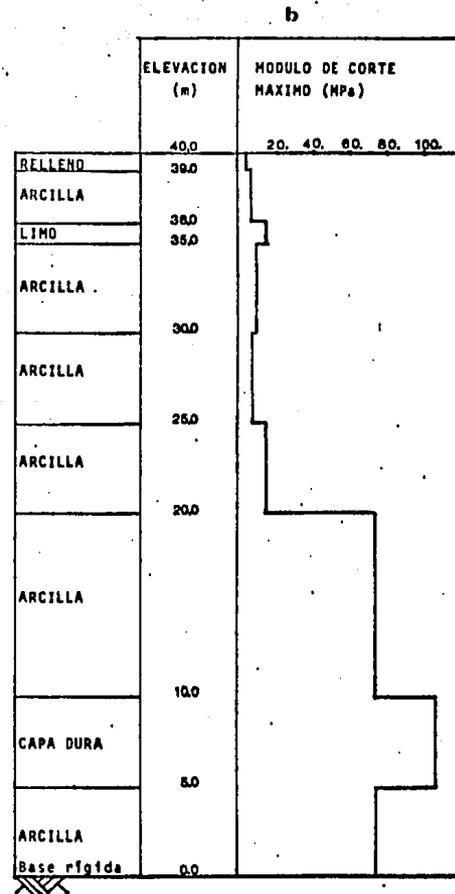
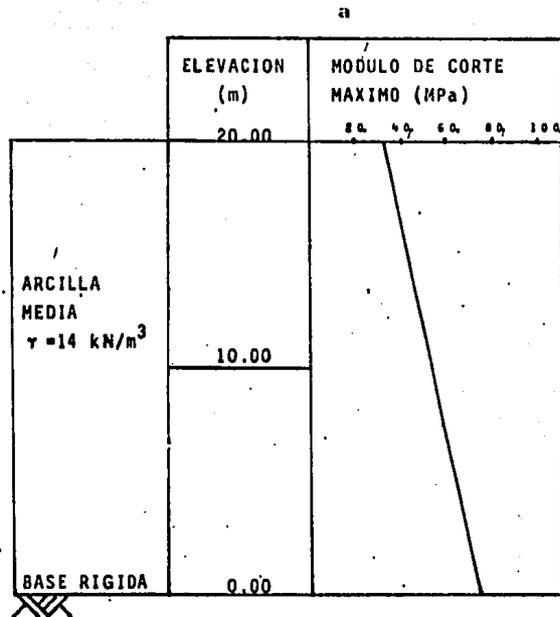


fig.4.1 Estratigrafías estudiadas;
 a. depósito homogéneo
 b. depósito heterogéneo (ref.58)

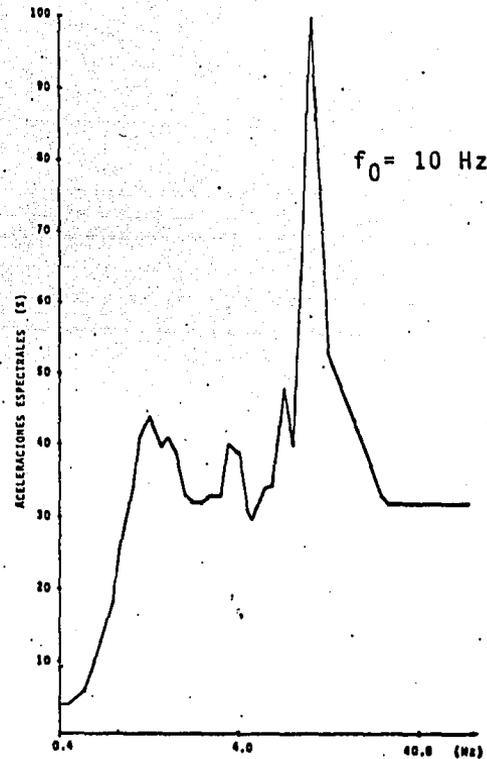
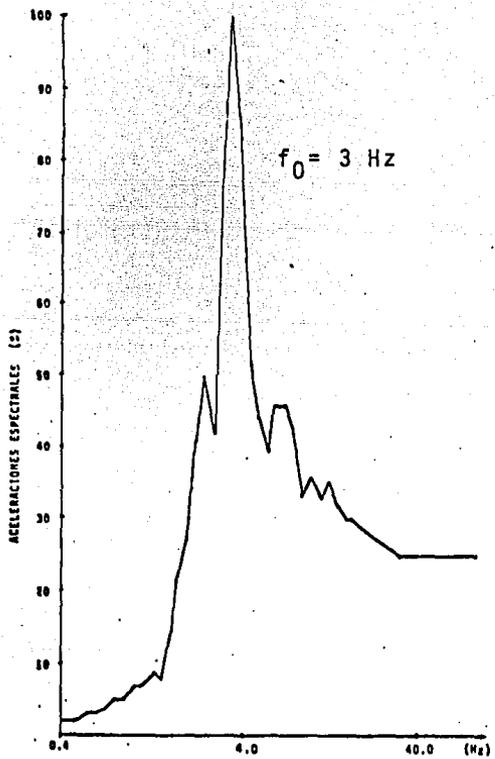


fig.4.2 Espectros de respuesta (aceleración) de los dos sismos utilizados en los análisis. Las amplitudes espectrales se escalan de acuerdo a la aceleración máxima de la excitación utilizada.

TABLA 4.I Casos estudiados

Estratigrafía	1	2
<u>Sismo $f_0 = 10\text{Hz}$</u>		
aceleración máxima = 0.07 g	Caso 1	---
aceleración máxima = 0.11 g	Caso 2	---
<u>Sismo $f_0 = 3\text{Hz}$</u>		
aceleración máxima = 0.05 g	Caso 3	Caso 6
aceleración máxima = 0.09 g	Caso 4	Caso 7
aceleración máxima = 0.19 g	Caso 5	---

En la fig 4.3 se concentraron los datos resultantes en la forma de dos parámetros:

$\frac{CV_R}{CV_G}$ relación entre el coeficiente de variación de la aceleración máxima (CV_R) y el CV_G , calculada para todas las combinaciones (CV_G , CV_B), a partir de los $CV_G = 0\%$.

$(\frac{CV_R}{CV_B})_{CV_G=0}$ relación entre CV_R y CV_B para todas las combinaciones (0% , CV_B).

El ancho de las barras en la fig 4.3 da idea sobre la dispersión en los resultados.

Analizando la fig 4.3 se observa lo siguiente:

- La influencia de CV_B en CV_R es mínima y despreciable comparada con la de CV_G en CV_R .
- Lo anterior se confirma también en el hecho de que $\frac{CV_R}{CV_G}$ permanece sensiblemente constante al aumentar CV_B de 0% a 50% (en algunos casos se observó una ligera tendencia a la alza).
- Para fines prácticos se puede considerar que $\frac{CV_R}{CV_G}$ permanece constante en una profundidad dada (para el intervalo de CV considerados), de tal manera que $\frac{CV_R}{CV_G}$ se puede

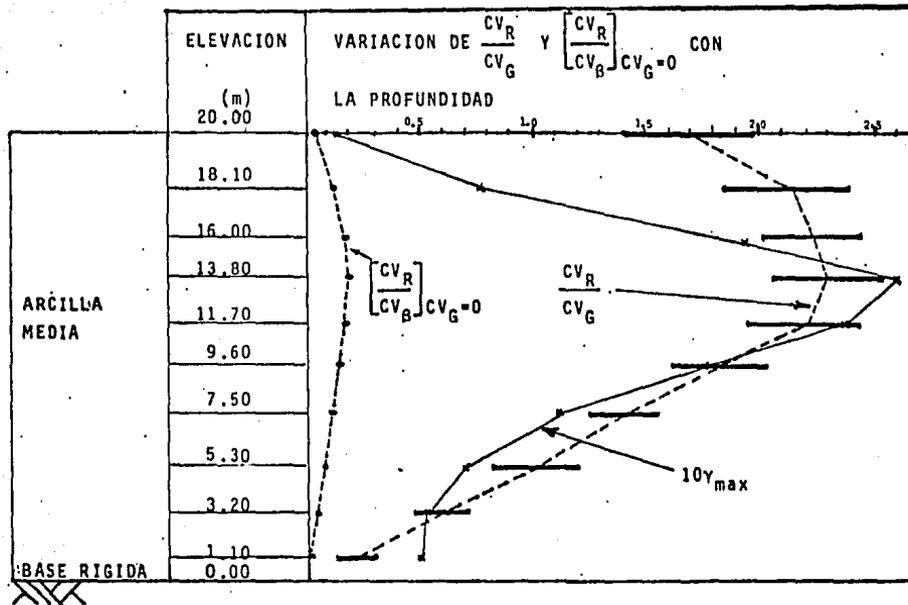


fig.4.3 Influencia de CV_G y CV_B en los coeficientes de variación de la aceleración máxima (CV_R) y comparación con la tendencia de γ_{max} .

considerar como la amplificación en la respuesta (en términos de la aceleración máxima) por la dispersión en las propiedades.

- La variación de $\frac{CV_R}{CV_G}$ tiene similitud con la de $\gamma_{máx}$.

Estas observaciones permitieron enfocar la atención a la importancia de CV_G en el análisis de los siguientes casos (2, 3, 4, 5, 6 y 7).

En las figs 4.4 y 4.5 (estratigrafía 1) se muestran ejemplos de la respuesta que se puede obtener con el método propuesto. En la fig 4.4 se grafica para $CV_G = 10\%$ y $CV_B = 0\%$ (bajo sismo 1) el perfil de las aceleraciones máximas (promedios y límite superior). El límite superior está calculado de tal manera que hay 16% de probabilidad de excederlo.

En la fig 4.5 están graficados, a varias profundidades, los espectros de respuesta (en términos de la aceleración) para un amortiguamiento de 5%. Estos permiten evaluar la influencia de los CV_s en el contenido de frecuencia de la respuesta; de hecho el parámetro CV_R , sólo da información sobre la máxima respuesta posible, en las frecuencias altas. Se observa que el ancho de la banda (= límite superior - promedio) varía con la frecuencia.

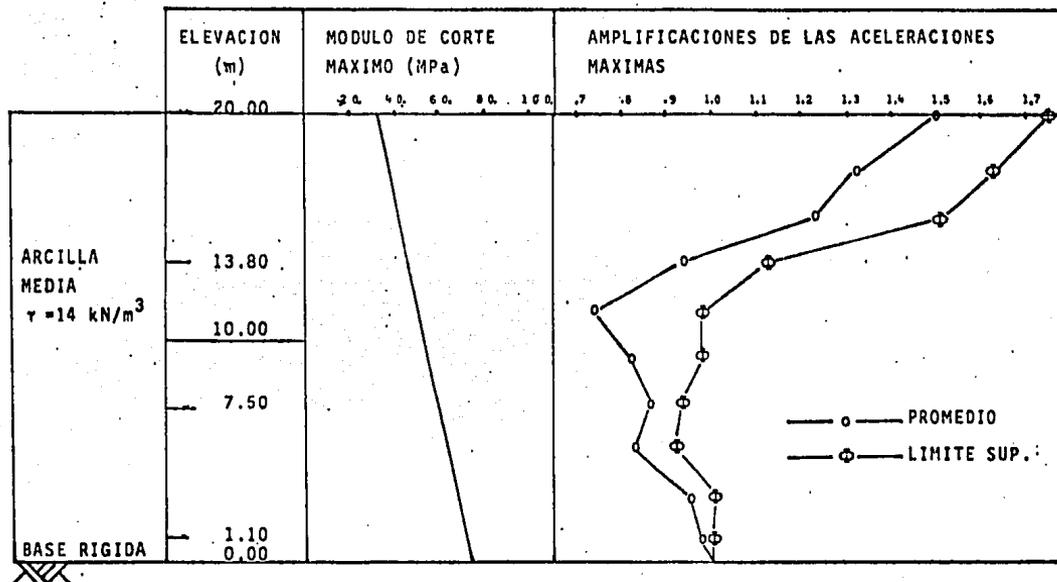


fig.4.4 Variación de las amplificaciones calculadas en el depósito homogéneo ($CV_G=10\%, CV_\beta=0\%$, caso N°1)

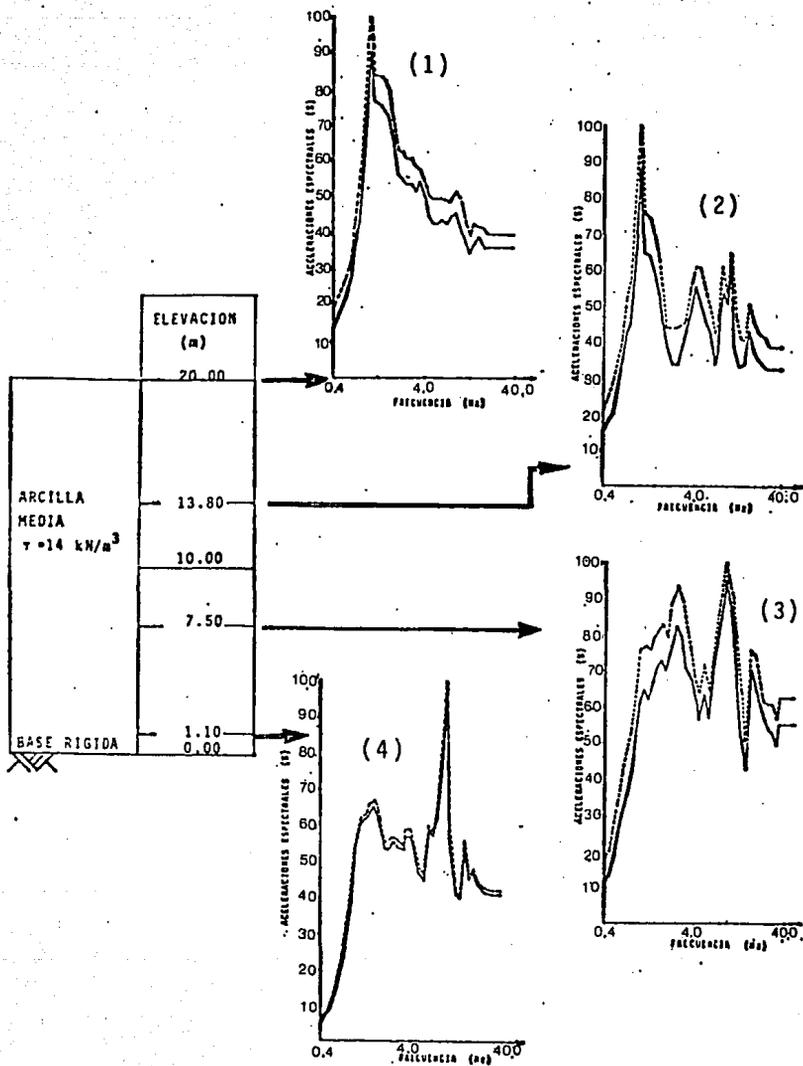


fig4.5 Espectros de respuesta (aceleración) a varias profundidades. Los valores máximos corresponden a (1) 0.3105g, (2) 0.2025g, (3) 0.175g y (4) 0.1675g. (líneas continuas=promedios, líneas discontinuas=límites superiores)

En las figs 4.6, 4.7 y 4.8 se grafica información similar para la estratigrafía 2 (bajo sismo 2), caso N° 6, para $CV_G = 40\%$ y $CV_\beta = 0\%$.

La respuesta en términos de la aceleración se muestra en la fig 4.6. Como para el caso N° 1, la probabilidad de exceder el límite superior es 16%.

También se observa que el perfil de $\gamma_{m\hat{a}x}$ (fig 4.7) tiene la misma tendencia que el de $\frac{CV_R}{CV_G}$. En la fig 4.8, se nota que hay mayor dispersión en frecuencias bajas, para las zonas blandas de la estratigrafía 2. Este efecto no se observa en las capas más rígidas, además se nota que no necesariamente los límites superiores y los promedios tienen los mismos picos en las mismas frecuencias.

El análisis de los resultados de los siete casos (tabla 4.1), ha permitido generalizar las observaciones ya hechas:

- La dispersión en la fracción del amortiguamiento crítico, β , no tiene importancia en el intervalo de los CV_β considerados

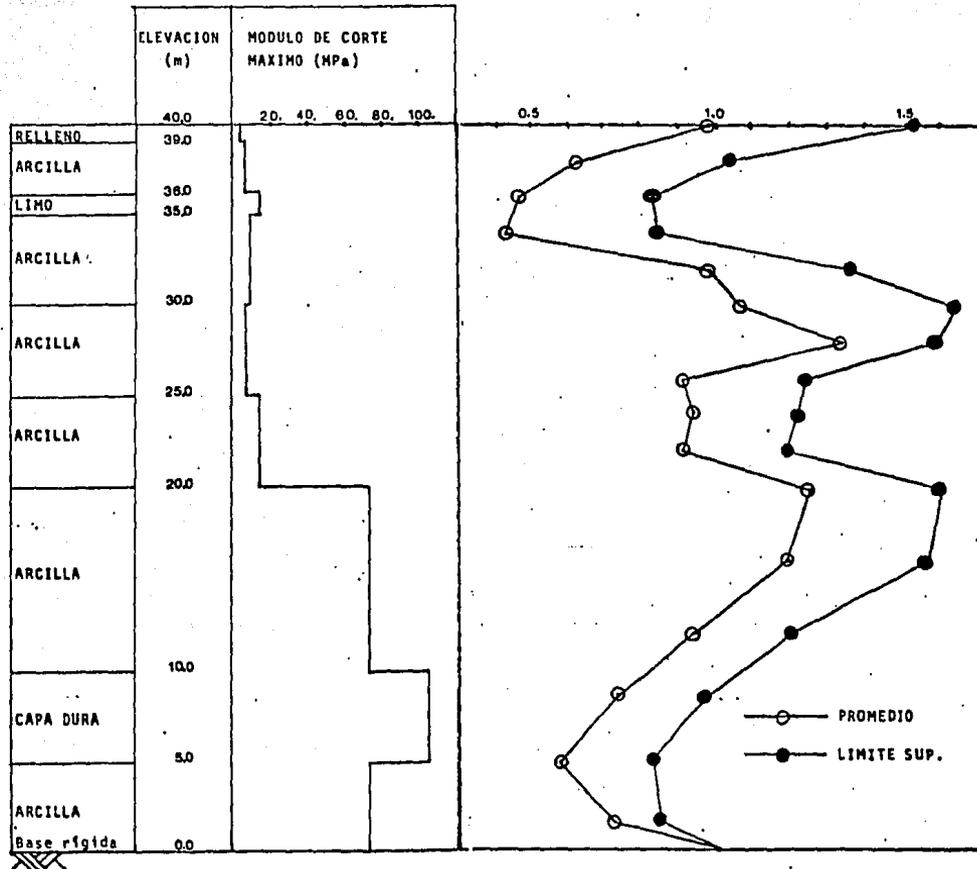


fig.4.6 Perfil de las amplificaciones promedios y superiores (caso N°6, $CV_G=40\%$, $CV_B=0\%$). La aceleración máxima en la base rígida fue de 0.05g.

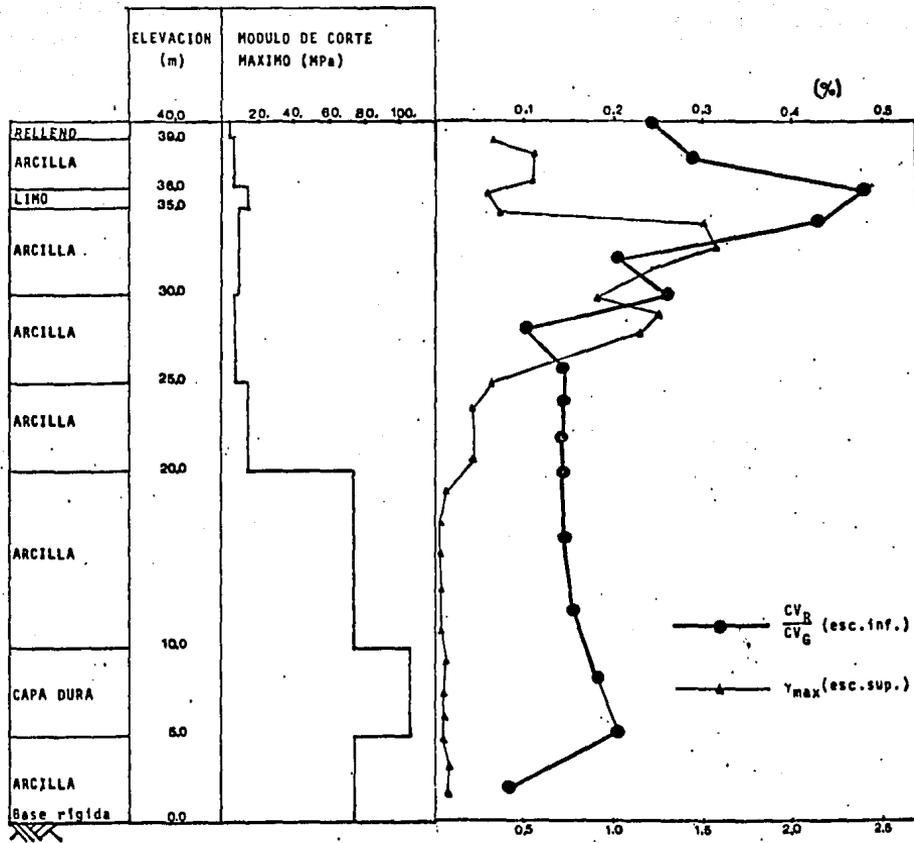


fig.4.7 Perfil de $\frac{CV_R}{CV_G}$ y de γ_{max} , para el mismo caso mostrado en la fig.4,6.

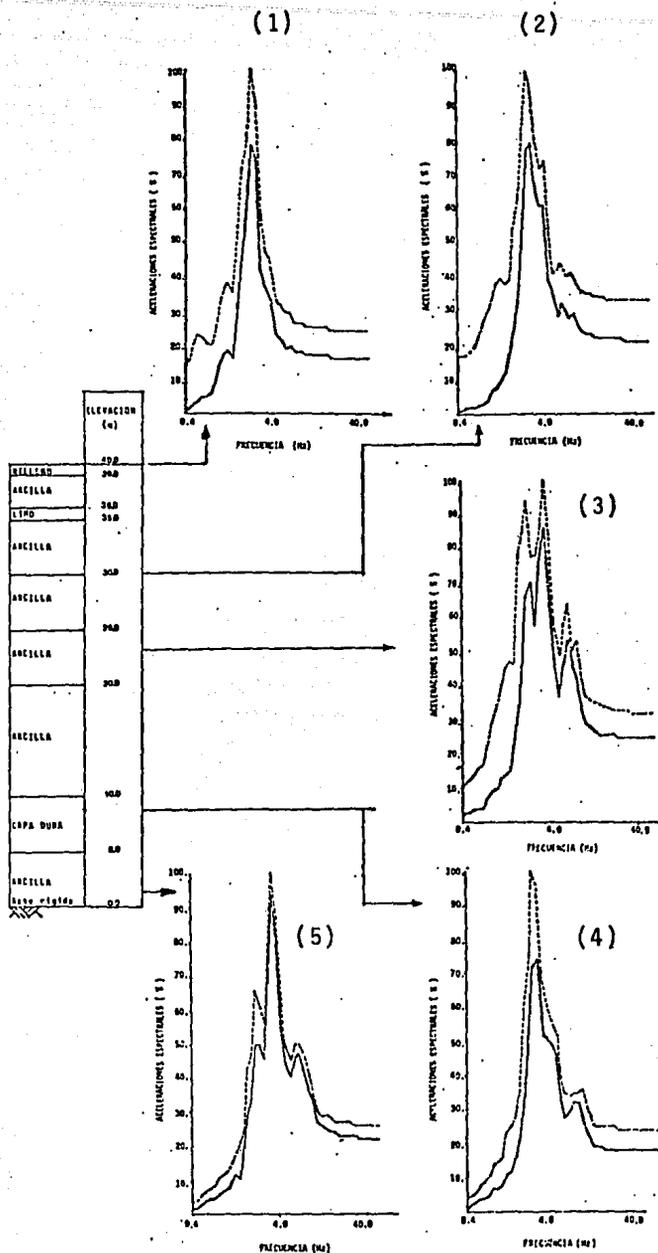


fig.4.8 Espectros de respuesta a varias profundidades para el caso mostrado en las figs.4.6 y 4.7. Los máximos corresponden a; (1)0.2930g, (2)0.2281g, (3)0.1629g, (4)0.1832g y (5)0.1448g.

- El perfil de $\frac{CV_R}{CV_G}$ tiene la misma tendencia que el de $\gamma_{m\acute{a}x}$
- Los efectos de la dispersi3n disminuyen considerablemente cerca de la base r3gida del modelo.
- Para suelos muy blandos ($G_{m\acute{a}x} < 15 \text{ MPa}$) el modelo propuesto no se puede aplicar por problemas de precisi3n
- En general, al aumentar la aceleraci3n m3xima de la respuesta disminuye su dispersi3n (CV_R)
- Los resultados muestran que la dispersi3n en la respuesta aumenta, en general, al incrementarse el CV_G
- La dispersi3n en la respuesta var3a con la frecuencia y depende del contenido de frecuencias de la excitaci3n y las caracter3sticas del dep3sito

Estas observaciones generales permitieron encontrar una ley generalizada, que da la dispersi3n en la aceleraci3n m3xima, en funci3n de un par3metro que se calcula a partir de la respuesta de terminista y las caracter3sticas del dep3sito.

Para ello se busc3 un par3metro δ que describiera la proporcionalidad entre el perfil de deformaciones angulares m3ximas, $\gamma_{m\acute{a}x}$, y $\frac{CV_R}{CV_G}$ de la siguiente forma

$$\frac{CV_R}{CV_G} = f(\delta) \quad (4.1)$$

donde $\delta = P \gamma_{m\acute{a}x}$. El factor P debe contener la informaci3n faltante como la geometr3a y las dem3s caracter3sticas de la respuesta determinista. Result3 que el par3metro adimensional

$$P = \frac{Z}{H} \frac{g}{a_{m\acute{a}x}} \frac{G}{G_{m\acute{a}x}} \beta \quad (4.2)$$

di3 resultados aceptables

- Z altura en el dep3sito (origen = base r3gida)
- H espesor total
- g aceleraci3n gravitacional (m/seg²)
- $a_{m\acute{a}x}$ aceleraci3n m3xima determinista de la respuesta en el punto considerado (m/seg²)
- G y β propiedades del suelo, compatibles con el nivel de deformaci3n angular
- $G_{m\acute{a}x}$ m3dulo de corte m3ximo

Se calcul3 δ en los siete casos y se grafic3 vs. $\frac{CV_R}{CV_G}$ en la fig 4.9. Analizando la fig 4.9 se observa que la tendencia entre $\log \frac{CV_R}{CV_G}$ y $\log \delta$, es sensiblemente lineal. Por tanto, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\log \frac{CV_R}{CV_G} = X_1 + X_2 \log \delta \quad (4.3)$$

donde X_1 y X_2 se calculan a partir de los resultados en la fig 4.9. Se obtiene:

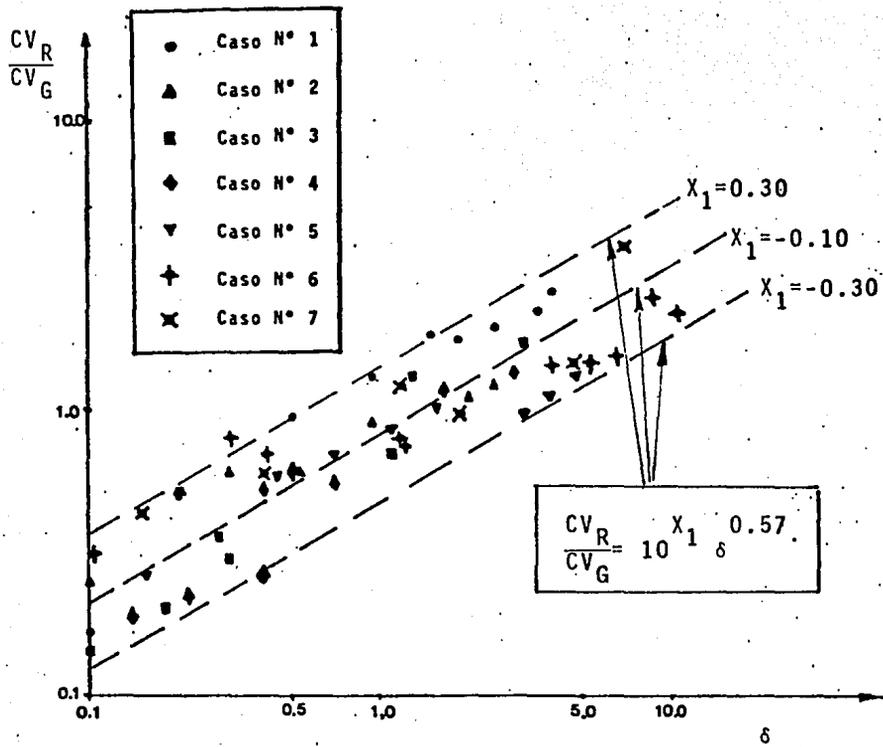


fig.4.9 Resultados obtenidos de los siete casos. Obtención de la ley lineal entre δ y

$$\frac{CV_R}{CV_G}$$

$$- 0.3 < X_1 < 0.1 \text{ y } X_1 = 0.10$$

$$X_2 = 0.57$$

o sea

$$\log \frac{CV_R}{CV_G} = X_1 + 0.57 \log \delta \quad (4.4)$$

o

$$\frac{CV_R}{CV_G} = 10^{X_1} \delta^{0.57} \quad (4.5)$$

con

$$- 0.30 < X_1 < 0.10$$

La dispersión que se observa en los resultados de la fig 4.9 se debe probablemente al número finito de las simulaciones probabilísticas en el modelo propuesto y a la incertidumbre no considerada en los sismos. Cabe recordar que para el modelo desarrollado se ha considerado la excitación sísmica como un evento determinista. Por tanto, para minimizar la dispersión se requiere de un modelo analítico que agrupe las ideas presentadas en el capítulo 3 con la teoría de las vibraciones aleatorias (refs 3 y 5).

Sin embargo, se puede aplicar la ec 4.5 para estimar los posibles efectos de la dispersión en las propiedades de las aceleraciones máximas, por ejemplo, en la fase preliminar de diseño.

En la fig 4.10 se muestra gráficamente la secuela para estimar las dispersiones en la respuesta, haciendo uso de la ec 4.5.

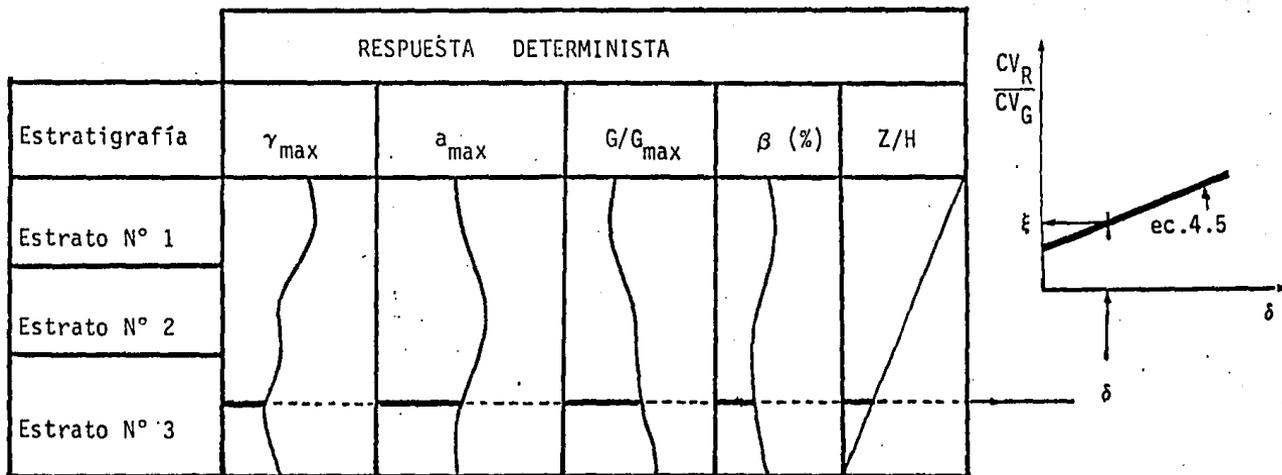
4.3 *Dispersión en la respuesta de un terraplén con distintas pendientes*

Para analizar la influencia de la geometría de las estructuras térreas, en la posible dispersión en la respuesta, se estudió un terraplén ($h = 20 \text{ m}$) con pendientes 1/2, 1/1 y 2/1 (fig 4.11), bajo la excitación del sismo N° 1 (fig 4.2a). El terraplén consiste de un suelo cohesivo con $\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$, $G_{m\acute{a}x} = 60 \text{ MPa}$ y $q_u = 0.4 \text{ MPa}$).

Se observa lo siguiente:

- Las dispersiones son mayores para grandes pendientes. Este efecto se nota más para pendientes grandes ($tga = 2$) que para normales ($tga = 1$ y $tga = 0.5$). Esto se debe al aumento de la esbeltez del terraplén a mayores pendientes (en la hipótesis de que $H = \text{constante}$)
- Las variaciones de la dispersión dentro del cuerpo del terraplén son como indicadas en la fig 4.12, independientemente de la pendiente.

Se evaluaron los resultados con el mismo parámetro δ , ya definido anteriormente. Considerando la variación de $\frac{CV_R}{CV_G}$ con la pen-



base rígida

Con el parámetro ξ se calcula la estimación del límite superior (probabilidad de exceso=16%) de la aceleración máxima, correspondiendo a una dispersión en las propiedades CV_G , a partir de

$$(a_{max})_{LS} = a_{max}(1 + \xi \cdot CV_G)$$

para una profundidad dada.

fig.4.10 Método simplificado para obtener estimaciones de las dispersiones en las aceleraciones máximas.

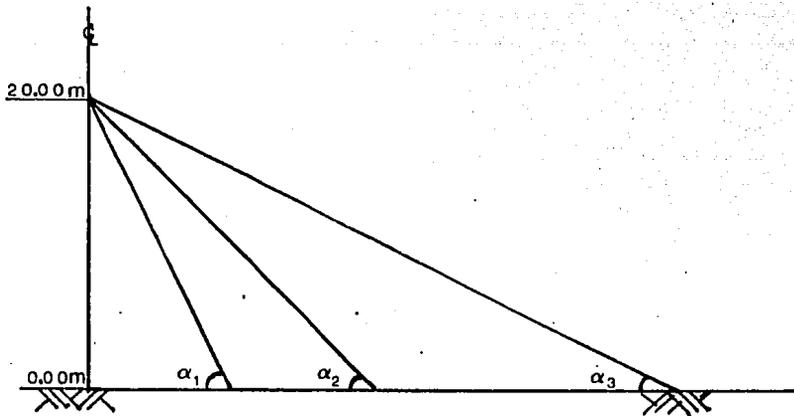


fig.4.11 Perfil del terraplén utilizado en los análisis ($\text{tg } \alpha_1 = 2, \text{tg } \alpha_2 = 1, \text{tg } \alpha_3 = 0.5$).

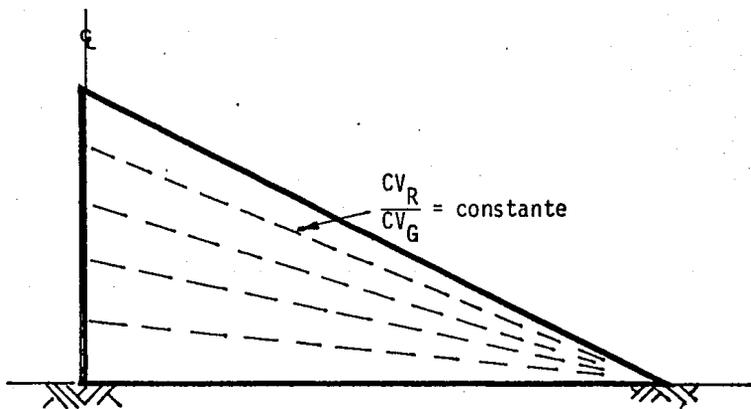


fig.4.12 Variación de la dispersión en la respuesta dentro del cuerpo del terraplén.

diente se optó por afectar δ por $\delta \text{sen}^2 \alpha$, obteniendo

$$\delta^* = \delta \text{sen}^2 \alpha \quad (4.6)$$

donde α , ángulo entre la base rígida y los respaldos de la estructura.

En el caso del depósito, α sería igual a 90° ($\text{sen}^2 \alpha = 1$) y por tanto, para depósitos

$$\delta = \delta^*$$

Los resultados se grafican en la fig 4.13. Se observa que dan buena compatibilidad con la ley ya establecida en el inciso anterior.

Esto indica que la ley generalizada se puede establecer, ahora de la siguiente manera:

$$\frac{CV_R}{CV_G} = 10^{X_1} \left(\delta \text{sen}^2 \alpha \right)^{0.57} \quad (4.7)$$

El procedimiento simplificado, entonces se aplica de la misma manera, como ya se ha señalado en el inciso anterior.

Cabe enfatizar que la ley generalizada propuesta sólo se recomienda usarla en el intervalo estudiado ($\delta < 10$), ya que se obtuvo de un modelo analítico que pierde precisión cuando los suelos están demasiado blandos.

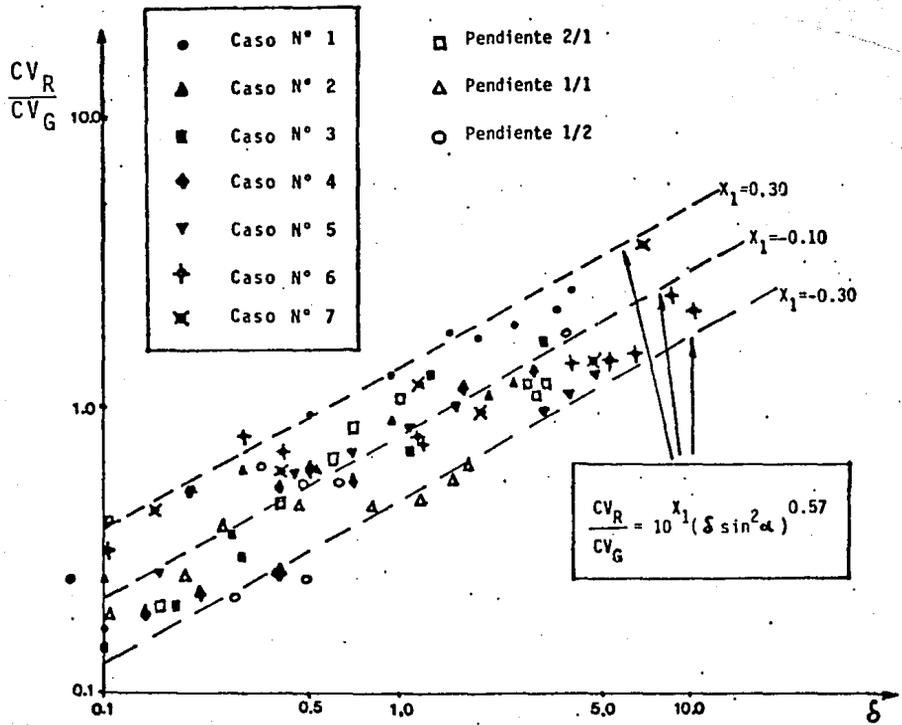


fig.4.13 Obtencion de la ley generalizada.

5. CONCLUSIONES

En la primera parte del presente trabajo se enfatizaron las propiedades dinámicas del suelo y los procedimientos para determinarlas. Se compararon resultados obtenidos por los distintos procedimientos. También se propuso un modelo de comportamiento probabilista, que permite la consideración de ciertas causas de dispersión en las propiedades.

En la segunda parte, se propuso un modelo analítico basado en la teoría de las perturbaciones que permite la evaluación de la dispersión en la respuesta dinámica de estructuras térreas.

En la tercera parte, se llegó a un procedimiento simplificado para la obtención de la dispersión en la respuesta dinámica en estructuras térreas, a partir de la geometría y la respuesta determinista. Obviamente, este procedimiento tiene las mismas limitaciones que el método equivalente, (inciso 2.1.1 y Apéndice A).

A continuación se resumen las conclusiones obtenidas mediante el desarrollo del trabajo:

1. Primera parte

- Existe una gran dispersión en las propiedades dinámicas del suelo
- En caso de que se tengan condiciones de corte puro en el campo libre (como se generaría cuando se propagen ondas de corte verticalmente), los resultados de pruebas triaxiales cíclicas deben afectarse por factores de correlación (ec 2.21), antes de usarse en los análisis dinámicos.
- Las dispersiones debidas a los distintos procedimientos para obtener las propiedades, se pueden reducir considerablemente utilizando un solo tipo de prueba confiable.
- El tipo de prueba más adecuado para la evaluación de las propiedades, parece ser la columna resonante, por ser la más representativa
- El modelo de comportamiento probabilista propuesto, abarca las causas más importantes de dispersión en las propiedades.

2. Segunda parte

- El modelo analítico propuesto permite analizar adecuadamente la dispersión en la respuesta dinámica, debida a la incertidumbre en las propiedades

- El uso del modelo es más económico, para un mismo grado de confianza que los otros métodos estudiados
- El uso del método, que calcula posibles dispersiones en la respuesta por medio de las propiedades promedio más límites inferior y superior (utilizado en la práctica) no es recomendable, por que los resultados no reflejan adecuadamente la incertidumbre en las propiedades.

3. Tercera parte

- En el intervalo estudiado de CV de las propiedades, el CV_{β} afecta poco la respuesta dinámica; por otra parte, el efecto de CV_{σ} en la respuesta es significativo.
- La dispersión en la respuesta está ligada al nivel de deformación angular máxima que se genera en la estructura térrea
- El procedimiento propuesto permite obtener estimaciones de las posibles dispersiones en la respuesta dinámica de estructuras térreas
- Para la evaluación de la dispersión debida a la aleatoriedad de los sismos se tendrá que desarrollar un modelo analítico, que incorpore las ideas expuestas en el capítulo 3 y la teoría de las vibraciones aleatorias.

Los resultados presentados en este informe, en conjunción con el programa de computadora DARE (ref 16), brindan la posibilidad de evaluar el efecto de la aleatoriedad de las propiedades en la respuesta sísmica de estructuras térreas.

6. REFERENCIAS

1. Christian, J. T., "Probabilistic soil dynamics: State of the art", ASCE - GT4, April 1980
2. Cambou, B., "Método del elemento finito. Análisis de incertidumbre de primer orden", Publ. # 339, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1974
3. Van Marcke, E.H., "Random vibration approach to soil dynamics problems", ASCE Fall Convention "The use of probabilities in earthquake Engineering", San Francisco, Oct 1977 Preprint 2913
4. Van Marcke, E.H., Dobry R., Madera, G., "Estimation of dynamic properties of soils and structures", 1st. Conference on Application of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering. Sep 1971, Hong Kong
5. Romo Organista, M.P., "Soil structure interaction in a Random seismic Environment", Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1977
6. Romo, M.P., Chen, J.H., Lysmer, J., Seed, H.B., "PLUSH, a computer program for probabilistic finite elements analysis of seismic soil-structure interaction". Report UCB/EERC 77/01, september 1980, Berkeley, Ca.
7. Fardis, M.N., "Probabilistic liquefaction of sands during earthquakes". Ph.D. Dissertation, MIT, Cambridge, Mass., 1978

8. Gazetas G., Debchaudhury, A., Gasparini, D.A., "Random vibration analysis for the seismic response of earth dams". Geotechnique 31, No. 2, pp 261-277, 1981
9. Anderson, D.G., "Uncertainty in determining dynamic non-linear stress-strain relationships", Inter. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, UK, 1980
10. Faccioli, E., "A stochastic approach to soil amplification". Bull. of the Seism. Soc. of A., Vol 66, No. 4, Aug 1976, pp 1277-1291
11. Cornell, C.A., "First-order uncertainty analysis of soils deformation and stability", 1st. Conf. of Appl. of Statistics and Probability to soil and Structural Engineering, 1971, Hong Kong
12. Mathews, J., Walker, R.L., "Mathematical methods of physics". 2nd Ed., Benjamin Publishers, 1964, pág 286-298
13. "Dynamic geotechnical testing-STP654", ASTM Publications, 1978
14. Lysmer, J., Udaka, T., Seed, H.B., Hwang, R., "LUSH, a computer program for complex response analysis of soil structure systems", Report No. EERC74-4, Univ. of Cal. Berkeley, 1974
15. Romo, M.P., "Análisis dinámico de sistemas suelo-estructura y presas de tierra", X Reunión Nac. de Mec. de Suelos, Morelia, Mich, 1980, pp 112-113

16. Carels, P., Romo, M.P., "DARE, un programa de elemento finito para análisis sísmico de estructuras térreas con propiedades aleatorias", Informe interno Proyecto 1528, Ins.de Ing. UNAM, México, 1982
17. Singh, S., Seed, H.B., Chan, C.K., "Undisturbed sampling and cyclic load testing of sands", Report No. EERC-79-33, Univ. of Cal. Berkeley, 1979
18. Silver, M., Park, T., "Testing procedure effects on dynamic soil behaviour", ASCE, Journal Geot. Eng. Div., Vol 101, Part III, 1975, GT10
19. Kokusho, T., "Cyclic triaxial test of dynamic soil properties for wide strain range", VII Inter. Conf. on Earthq. Eng. Istanbul, 1980, pp 705-712
20. Ishibashi, I., Sherif, M., "Soil liquefaction by torsional simple shear device", ASCE, Jour. Geot. Eng. Div. GT8, 1974 pp 872-888
21. Wright, D.K., Gilbert, P.A., Saada, A.S., "Shear devices determining dynamics soil properties", ASCE, Conf. Earthq. Eng. and Soil Dyn., Pasadena, Cal. 1978, pp 1056-1075
22. Shen, C.K., Herrman, L.R., Sadigh, k., "Analysis of cyclic simple shear test data", ASCE, Conf. Earthq. Eng. and soil Dyn., Pasadena, Cal., 1978, pp 864-874
23. Woods, R.D., "Measurements of dynamic soil properties", ASCE, Conf. Earthq. Eng. and Soil Dyn., Pasadena, Cal., 1978, pp 91-178

24. Udaka, T., "Analysis of response of large embankments to travelling base motions", Ph. D. Dissertation, Univ. of Cal. Berkeley, 1975
25. Seed, H.B., Idriss, I.M., "Influence of soil conditions on ground motions during earthquakes", ASCE, Journ. Soil Mech. and Found. Div. Vol 95, SM1, 1969
26. Idriss, I.M., Seed, H.B., "Seismic response of horizontal soil layers", ASCE, Journ. Soil Mech. and Found. Div., SM8, Vol 94, 1968
27. Meirovitch, L., "Analytical methods in vibrations", Mac Millan Company, 1967
28. Yohimi, Y., et al, "Soil dynamics and its applications to foundations engineering", X ICSMFE, Tokyo, 1977, Vol II, pp 605-650
29. Prakash, S., "Soil dynamics", Mc Graw Hill Company, 1981
30. Imai, T., Tonouchi, K., "Determining dynamic deformation characteristics of soils by in-situ measurements and laboratory testing", 7th. World Conf. Earthq. Eng. Istambul, 1980, pp 289-296
31. Stokoe, K.H., Chen, A.T.F., "Effects on site response of methods of estimating in situ nonlinear soil behaviour", 7th. World Conf. Earthq. Eng. Istambul, 1980, pp 395-402
32. Richard, Jr. F., "Some effects of dynamic soil properties on soil - structure interaction", 10th. Terzaghi lecture, ASCE, Journ. Geot. Eng. Div. GT12, Vol 101, 1975

33. Richard, F.E. Jr., Wylie, E.B., "Influence of dynamic soil properties on response of soil masses", Symp. Struct. and Geot. Mech. Univ. of Ill. Mich., oct. 1976
34. Richard, F.E. Jr., et al, "Vibrations of soils and foundations", Prentice Hall, 1970
35. Zeevaert, L., "Foundation engineering for difficult subsoil conditions", Van Nostrand Reinhold, Ltd, New York, 1973
36. Pyke, R., "Some effects of test configurations on measured soil properties under cyclic loading", Geot. Testing Journ. GTJODJ, Vol 1, No. 3 1978, pp 125-133
37. Park, T.H., Silver, M.L., "Dynamic triaxial and simple behaviour of sand", ASCE, Journ. of Geot. Eng. Div., Vol 101 GT6, 1975, pp 513-529
38. Silver, M.L., Seed, H.B., "Deformation characteristics of sands under cyclic loading", ASCE, Journ. of Soil Mech. and Found. Div., Vol 97, SM8, 1971, pp 1081-1098
39. Seed, H.B., Peacock, W.H., "Test procedures for measuring liquefaction characteristics", véase ref 38, pp 1099-1119
40. Roscoe, K.H., "Apparatus for the application of simple shear to soil samples", Proc. 3rd. ICSMFE, Zurich, 1953, pp 186-191
41. Bjerrum, L., Landva, A., "Direct simple shear test on Norwegian quick clay", Geotechnique, Vol 16, No. 1, 1966, pp 1-20

42. Philippe, P.M., "Non linear methods for dynamic analysis of ground response", Ph. D. Diss. Univ. of Cal. Berkeley, 1975
43. Ramberg, W.; Osgood, W.T., "Description of stress-strain curves by three parameters", Tech. Note 902, NACA, 1943
44. Seed, H.B., "Considerations in the earthquake resistant design of earth and rockfill dams", Geotechnique 29, No. 3, pp 215-263, 19th. Rankine Lecture, 1979
45. Hardin, B.O., Drnevich, V.P., "Shear modulus and damping soils; measurements, parameter effects, design equation and curves", ASCE, Journ. Soil Mech. and Found. Div. Vol 98, SM6 (603-624) y SM7 (667-692), 1972
46. Jaime, P. A., "Comportamiento dinámico de los suelos", X Reunión Nacional de Mec. de Suelos, Morelia, Mich., 1980 pp 147-169
47. Díaz, R. A., Cervantes, B. R., Porras, S.V., "Modelos numéricos de la dinámica de suelos - comportamiento sísmico de depósitos de arena", véase ref 46, pp 59-91
48. Seed, H.B., Idriss, I.M., "Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis", EERC - 70-10, Univ. of Cal. Berkeley, 1970
49. Hardin, B.O., Black, W.L., "Vibration modulus of normally consolidated clay", Journ. of Soil Mech. and Found Div. ASCE Vol 94, SM2, 1968, pp 353-369

50. Massarch, K.R., Broms, B.B., "Pile driving in clay slopes", X, ICSMFE, Stockholm, 1981, Vol III, pp 469-474
51. Ortigosa, T., "Modelación de problemas en suelos sometidos a cargas cíclicas", Conf. Int. de Mec. Suelos, México, D.F. agosto 1982, pp 75-84
52. ELC-Electroconsult, "Uribante-Caparo Hydro Development Doradas Project-Las Cuevas Dam", Design Report, Appendix H and I, Milano, Italia, 1982
53. Jaime, P.A., "Comportamiento de arenas bajo carga estática y cíclica", Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, 1978
54. Benjamin, J.R., Cornell, C.A., "Probability, statistics and decision for civil engineers", Mc-Graw Hill Company, New York, 1970, pp 251-253
55. Silver, M.L., "Laboratory triaxial testing procedures to determine the cyclic strength of soil", Report for Div. of Reactor Sef. Res. U.S. Nucl. Reg. Commission, NUREG-0031-NRC-6, 1977
56. De Alba, P., Chan, C., Seed, H.B., "Determination of soil liquefaction characteristics by large scale tests", Univ. of Cal. Berkeley, EERC-75-14, May 1975
57. Jaime, A., Romo, M., Montañez, L., "Observed and predicted liquefaction of sand stratum", Proc. Int. Conf. on Recent Advances in Geot. Earthq. Eng. and Soil Dyn., St. Louis, Mo, University of Rolla, 1981, pp 505-510

58. Faccioli, E., Ramirez, J., "Respuestas sísmicas máximas probables en las arcillas de la ciudad de México", Publicación No. 359, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1975

APENDICE A:

Método lineal equivalente (ref 24, 25 y 26)

Este método se ha desarrollado para considerar los efectos no lineales en las relaciones esfuerzo-deformación, al hacer uso del método de la respuesta compleja (ver inciso 3.2.1.2), que sólo es aplicable a sistemas lineales.

El objetivo de este método es determinar los módulos al corte y coeficientes viscosos equivalentes de las relaciones histeréticas esfuerzo-deformación.

Sea una relación histerética teórica (fig A.1), que se representa mediante la expresión:

$$F(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \left[F_+(\gamma) (1 + \text{sign } \dot{\gamma}) + F_-(\gamma) (1 - \text{sign } \dot{\gamma}) \right] \quad (\text{A.1})$$

en donde

- F representación de la histerésis
- F_+ representación del tramo con velocidad $\dot{\gamma}$ positiva (ADB en la fig A.1)
- F_- similar a F_+ , pero con $\dot{\gamma}$ negativa (ACB en la fig A.1)
- γ deformación angular
- $\dot{\gamma}$ velocidad de deformación $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$

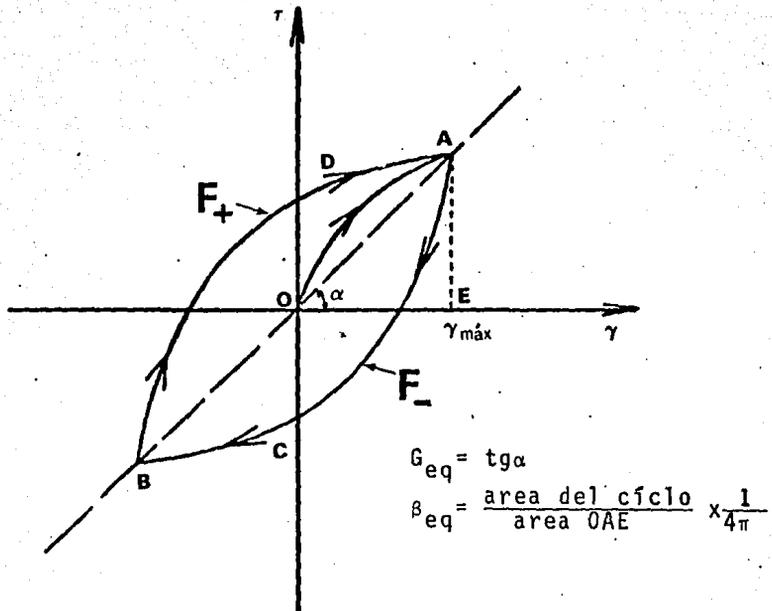


fig.A.1 Ciclo de histéresis teórico y procedimiento simplificado para obtener G_{eq} y β_{eq} .

Aplicando el método de los cuadrados mínimos, el error E , que resulta considerando un módulo equivalente G y un coeficiente viscoso equivalente C , se puede expresar por una función de G, C, ω (frecuencia) y γ .

$$E(G, C, \omega, \gamma) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[F(\gamma, \dot{\gamma}) - G\gamma - C\dot{\gamma} \right]^2 dt \quad (\text{A.2})$$

donde γ puede representarse por $\gamma_{\text{máx}} \cos \omega t$. ($\gamma_{\text{máx}}$ = deformación máxima en el ciclo de histerésis).

Para mantener el error E mínimo, se requiere:

$$\frac{\partial E}{\partial G} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \left[F - G\gamma - C\dot{\gamma} \right] \gamma dt \Big|_{\gamma = \gamma_{\text{máx}} \cos \omega t} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial E}{\partial C} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \left[F - G\gamma - C\dot{\gamma} \right] \dot{\gamma} dt \Big|_{\gamma = \gamma_{\text{máx}} \cos \omega t} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Este sistema de ecuaciones A.3 y A.4, da valores de G y C , equivalentes. Considerando que $\int_0^{2\pi} \gamma \dot{\gamma} dt = 0$, se obtiene:

$$G = \frac{\int_0^{2\pi} F \cdot \gamma dt}{\int_0^{2\pi} \gamma^2 dt} \Big|_{\gamma = \gamma_{\text{máx}} \cos \omega t} \quad (\text{A.5})$$

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} \omega^2 F \cdot \dot{\gamma} dt}{\int_0^{2\pi} \omega^2 \dot{\gamma}^2 dt} \quad \left| \gamma = \gamma_{m\acute{a}x} \cos \omega t \right. \quad (\text{A.6})$$

Tomando en consideraci3n las ecs A.1, A.5, A.6 y

$$\int_0^{2\pi} \omega^2 \gamma_{m\acute{a}x}^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega} \gamma_{m\acute{a}x}^2$$

$$\int_0^{2\pi} \omega^2 \gamma_{m\acute{a}x}^2 \sin^2 \omega t dt = \pi \omega \gamma_{m\acute{a}x}^2$$

y sustituyendo $\cos \omega t$ por λ , las propiedades equivalentes (ecs A.5 y A.6) se vuelven:

$$G = \frac{1}{\pi \gamma_{m\acute{a}x}} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left[F_+(\gamma_{m\acute{a}x} \lambda) + F_-(\gamma_{m\acute{a}x} \lambda) \right] d\lambda \quad (\text{A.7})$$

y

$$C = \frac{\text{Area del ciclo de hist3resis}}{\pi \gamma_{m\acute{a}x}^2 \omega} \quad (\text{A.8})$$

Los valores de A.7 y A.8 dan las mejores aproximaciones de las propiedades para linearizar la relaci3n no lineal esfuerzo-deformaci3n (fig A.1).

Sin embargo, en general en la realidad, no se dispone de expresiones matemáticas confiables para los ciclos histeréticos. Por ello, se propone un procedimiento simplificado, para determinar un modelo equivalente G_{eq} y un factor de amortiguamiento equivalente β_{eq} .

El módulo, usualmente, se expresa como el módulo secante, (puntos A y B en la fig A.1).

El amortiguamiento se considera (ver ec A.8) proporcional al área en el ciclo de histerésis.

Así, se llega a las siguientes expresiones (fig A.1):

$$G_{eq}(\gamma_{m\acute{a}x}) = \frac{AE}{OE} \quad (A.9)$$

y debido a que $\omega C = 2 G\beta$, (para las frecuencias de interés en dinámica de suelos (0-10 Hz) y para β pequeño (ref 24)).

y la ec (A.8):

$$C = \frac{\text{Area del ciclo}}{\pi \gamma_{m\acute{a}x}^2 |\omega|}$$

$$\text{Se obtiene } \beta_{eq}(\gamma_{m\acute{a}x}) = \frac{\text{Area del ciclo}}{4 \pi \text{ area AOE}} \quad (A.10)$$

que relaciona el trabajo utilizado en el ciclo con el trabajo elástico.

Entonces, se determina G_{eq} y β_{eq} en función de la deformación angular inducida γ_0 , durante las cargas cíclicas o transitorias, y se obtienen curvas como las mostradas en las figs 2.10.a y b. Los resultados obtenidos por análisis con este método (cuidando que haya compatibilidad entre las propiedades y los niveles de deformación efectiva) dan buena concordancia con las respuestas medidas durante sismos (ref 26).

Comparaciones entre el método lineal equivalente y un modelo que considera directamente los efectos no-lineales por medio de ecuaciones constitutivas tipo Masing (análisis por incrementos), muestran buena similitud hasta niveles de excitaciones que inducen deformaciones angulares del 1%.

APENDICE B:

Teoría convencional no-degenerada de perturbaciones
(ref 12)

Se considera un problema de valores característicos:

$$Lu = \lambda u \quad (\text{B.0})$$

L = operador lineal o matricial

Se requiere encontrar los vectores u_n y los valores λ_n característicos. O sea:

$$Lu_n = \lambda_n u_n \quad (\text{B.1})$$

Se supone que L está casi igual a L^0 , del cual se conocen los vectores u_n^0 y valores λ_n^0 . Entonces

$$L^0 u_n^0 = \lambda_n^0 u_n^0 \quad (\text{B.2})$$

y

$$L = L^0 + Q \quad (\text{B.3})$$

en donde Q es pequeño.

En este caso, se pueden hacer las hipótesis siguientes:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} + \dots \quad (\text{B.4})$$

y

$$u_n = u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \sum_m a_{mn}^{(2)} u_m^0 + \dots \quad (\text{B.5})$$

donde $\lambda_n^{(1)}$ y $a_{mn}^{(2)}$, tienen el mismo orden que Q , $\lambda_n^{(2)}$ $a_{mm}^{(2)}$ el mismo orden que Q^2 , etc.

Además, se asumió que los vectores no perturbados u_m^0 forman un conjunto completo; en este caso se hace la hipótesis de que forman un conjunto ortonormal, o sea:

$$u_m^0 \cdot u_n^0 = \delta_{mn} \quad (\text{B.6})$$

Se sustituyen las ecs B.3, B.4 y B.5 en la ecuación original B.1, y se obtiene:

$$(L^0 + Q)(u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots) = (\lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + \dots)(u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots) \quad (\text{B.7})$$

La parte de orden cero

$$L^0 u_n^0 = \lambda_n^0 u_n^0 \quad (\text{B.2})$$

La parte de primer orden:

$$Q u_n^{\circ} + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^{\circ} u_m^{\circ} = \lambda_n^{(1)} u_n^{\circ} + \lambda_n^{\circ} \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^{\circ} \quad (\text{B.8})$$

Se multiplican escalarmente ambos lados de B.8 por u_n° , y se obtiene:

$$u_n^{\circ} \cdot Q \cdot u_n^{\circ} = \lambda_n^{(1)} \quad (\text{B.9})$$

De esta manera se puede corregir B.4:

$$\lambda_n = \lambda_n^{\circ} + u_n^{\circ} Q u_n^{\circ} + O(Q^2) \quad (\text{B.10})$$

$O(Q^2)$ = operador que contiene órdenes mayores del operador, Q^2

Para obtener $a_{mn}^{(1)}$, aplicando la ec B.5, se multiplican escalarmente ambos lados de la ec B.8, por u_p° ($p \neq n$), esto resulta en:

$$u_p^{\circ} Q u_n^{\circ} = (\lambda_n^{\circ} - \lambda_p^{\circ}) a_{pn}^{(1)} \quad (\text{B.11})$$

Las multiplicidades de los valores λ_n° son uno (teoría no-degenerada) y por ello $\lambda_n^{\circ} \neq \lambda_p^{\circ}$, o sea:

$$a_{pn} = \frac{u_p^{\circ} Q u_n^{\circ}}{\lambda_n^{\circ} - \lambda_p^{\circ}} \quad (\text{B.12})$$

Se observa de los resultados de las ecs B.9 y B.12, que se puede considerar el operador Q como pequeño, cuando $u_p^o Q u_n^o$ es pequeño comparado con $\lambda_n^o - \lambda_p^o$.

Abreviando la anotación $u_p^o Q u_n^o$, como su representación matricial Q_{pn} , las ecs B.9 y B.12 se vuelven:

$$Q_{nn} = \lambda_n^{(1)} \quad (\text{B.13})$$

$$a_{mn}^{(1)} = \frac{Q_{mn}}{\lambda_n^o - \lambda_m^o} \quad (\text{B.14})$$

El valor de $a_{nn}^{(1)}$ no está fijado por la ecuación de primer orden B.8.

Se supone que se requiere que los nuevos vectores característicos formen un conjunto ortonormal.

$$\begin{aligned} u_m u_n &= (u_m^o + \sum_i a_{im}^{(1)} u_i^o + \dots) \cdot (u_n^o + \sum_j a_{jn}^{(1)} u_j^o + \dots) \\ &= \delta_{mn} + a_{mn}^{(1)*} + a_{mn}^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

En el caso que la matriz Q no es Hermitiana⁽¹⁾, los términos de primer orden en la ec B.15 no desaparecen.

(1) Una matriz cuadrada compleja se llama hermitiana cuando es igual a su conjugada transpuesta

En cambio, si Q es Hermitiana, como sucede en general, los términos de primer orden se despejan para $m \neq n$. Para el caso $m = n$, el requisito que

$$u_n \cdot u_n = 1 \quad (\text{B.16})$$

conforme la condición que impone

$$\text{Re } a_{nn}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.17})$$

La parte imaginaria de $a_{nn}^{(1)}$ no está determinada. La razón de esto es que siempre se puede multiplicar un vector característico por un número complejo, de valor absoluto igual a uno,

$$u_n + e^{i\delta} u_n = (1 + i\delta + \dots) u_n \quad (\text{B.18})$$

sin afectar la ortonormalidad de los vectores característicos.

APÉNDICE C:

Determinación del modulo complejo perturbado

$$\text{Sea } G^* = G ((1 - 2\beta^2) + 2i\beta \sqrt{1 - \beta^2}) \quad (\text{C.1})$$

$$= G e^{2i\beta} = G (1 + 2i\beta + \frac{(2i\beta)^2}{2} + \dots)$$

$$= G ((1 - 2\beta^2) + 2i\beta + \dots)$$

y

$$G^* + \Delta G^* = (G + \Delta G) e^{2i(\beta + \Delta\beta)} \quad (\text{C.2})$$

donde los términos Δ son las perturbaciones de los parámetros, respectivos.

Desarrollando la ec (C.2) se obtiene:

$$G^* + \Delta G^* = G e^{2i(\beta + \Delta\beta)} + \Delta G e^{2i(\beta + \Delta\beta)} \quad (\text{C.3})$$

Considerando las ecs C.1, C.3 se vuelve

$$1 + \frac{\Delta G^*}{G^*} = e^{2i\Delta\beta} (1 + \frac{\Delta G}{G}) \quad (\text{C.4})$$

o

$$\Delta G^* = G^* (e^{2i\Delta\beta} + e^{2i\Delta\beta} \frac{\Delta G}{G} - 1) \quad (\text{C.5})$$

Desarrollando la ec C.5 en serie, se obtiene

$$G^* = G^* (1 + 2i\Delta\beta - 2\Delta\beta^2 + \dots + \frac{G}{\Delta G} (1 + 2i\Delta\beta - 2\Delta\beta^2 + \dots) - 1) \quad (C.6)$$

Despreciando los términos de orden superior, la ec C.6 se vuelve:

$$\Delta G^* = G^* \left(\frac{\Delta G}{G} + 2i\Delta\beta \right) \quad (C.7)$$

Definiendo:

$$\Delta G = R_G CV_G G$$

$$\Delta\beta = R_\beta CV_\beta \beta$$

La ec (C.7) se vuelve:

$$\Delta G^* = G^* (R_G CV_G + 2i\beta R_\beta CV_\beta) \quad (C.8)$$

donde los símbolos tienen el mismo significado que el mencionado en el inciso 3.2.2.

La expresión (C.8), da la perturbación del módulo complejo ΔG^* en función de los coeficientes de variación del módulo $G(CV_G)$ y de la fracción del amortiguamiento crítico $\beta(CV_\beta)$.