

01161  
lej.  
3

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
SECCION DE ESTRUCTURAS

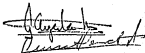
TESIS QUE PRESENTA

WU DE LUN

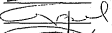
para obtener el grado de  
MAESTRO EN ESTRUCTURAS

JURADO:

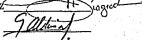
DR. GUSTAVO AYALA MILIAN



DR. LUIS FERRER ARGOTE



M. EN I. RAMON CERVANTES BELTRAN



M. EN I. J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ

DR. GONZALO ALDUNCIN GONZALEZ

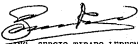


COORDINADOR DE LA SECCION

SECRETARIO ACADEMICO



DR. GONZALO ALDUNCIN GONZALEZ



ING. SERGIO TIRADO LEDESMA

01161  
1982

C.U., México, D.F., 15 de noviembre de 1982

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## DEFINICIONES

- isóbaras  $\sigma_1$ : Lugar geométrico de puntos que tienen el mismo valor de esfuerzo normal  $\sigma_1$ .
- isóbaras  $\sigma_2$ : Lugar geométrico de puntos que tienen el mismo valor de esfuerzo normal  $\sigma_2$ .
- isocromáticas: Lugar geométrico de puntos que tienen el mismo valor de esfuerzo de corte máximo. Se obtienen fotoelásticamente con un polariscopio circular.
- isostáticas 1,2: líneas tangentes en todo punto a la dirección de los esfuerzos principales 1,2.
- campo oscuro: Se obtiene con un polariscopio circular (en el que el polarizador y el analizador, así como los ejes L y P de los  $\lambda/4$ , están cruzados). El orden de las isocromáticas obtenidas es: 0, 1, 2, 3, etc.
- campo claro: Se obtiene con un polariscopio circular en el que el polarizador y el analizador están paralelos. El orden de las isocromáticas obtenidas es: 0.5, 1.5, 2.5, 3.5 etc.

USO DE COEFICIENTE DE INFLUENCIA PARA DETERMINAR  
CARGAS APLICADAS A CUERPOS PLANOS

RESUMEN

SUMMARY

INTRODUCCION

DEFINICIONES

1. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE ISOCROMATICAS Y EL COEFICIENTE DE INFLUENCIA
  2. COEFICIENTE DE INFLUENCIA DE LAS ISOCROMATICAS EN EL DISCO CARGADO EN LAS EXTREMIDADES DE UNA CUERDA
  3. EJEMPLOS
    - 3.1 Disco con tres puntos de contacto simétricos
      - 3.1.1 Formando triángulo equilátero
      - 3.1.2 Formando triángulo isósceles
    - 3.2 Disco con tres puntos de contacto cualesquiera
    - 3.3 Disco con cuatro puntos de contacto
    - 3.4 Disco con cinco puntos de contacto
    - 3.5 Sistema de Discos
  4. CASOS PARTICULARES
  5. EL USO DE LAS ECUACIONES DE HERZ
  6. EL COEFICIENTE DE INFLUENCIA DEL SNILLO
  7. CONCLUSION
- RECONOCIMIENTO
- REFERENCIAS

### Summary

The principle of superposition of isochromatic orders are as well as the concept of the coefficients of influence of these fringes presented. The proposed method is applied to the determination of the forces taking place at the points of contact between disks loaded in their plane, using Michell equations and a numerical method. The method could be generalized to other bodies loaded in the plane, and when no theoretical solution is available the problem could be solved completely in an experimental way. The application presented in this paper deals with discret, or granular media.

## INTRODUCCION

La mecánica de suelos y de rocas considera a menudo los medios de que trata como discontinuos o granulares. Sistemas de esferas o de discos coplanares, pueden usarse como modelos para conocer, en primera aproximación, la distribución de esfuerzos. Esta a su vez puede obtenerse fotoelásticamente. Para el análisis de este sistema se propone aquí un método híbrido que simplifica, en muchos casos, la determinación de las fuerzas aplicadas en los puntos de contacto.

R. Marsal<sup>(1)(2)</sup>, J. Alberro<sup>(3)</sup> y M. Mendoza<sup>(4)</sup> han contribuido con varios trabajos teóricos y de laboratorio al estudio de este tema. Uno de los fines perseguidos en esas investigaciones es la determinación de la distribución de esfuerzos en cada uno de los discos del sistema de discos cargados, lo que permite la determinación de las cargas aplicadas a cada disco, en los puntos de contacto con otros discos. Una contribución a la simulación del medio granular usando esferas puede encontrarse en <sup>(5)</sup>.

En la fig 1 se muestran las isocromáticas correspondientes a un conjunto de discos. Puede observarse que la distribución de esfuerzos en los contactos entre discos es complicada. Y además que como el tamaño y el orden de los discos son arbitrarios, la posición de los puntos de contacto entre discos

también es arbitraria. También es difícil conocer de antemano el número de puntos de contacto de cada disco. Si se pudiera determinar la intensidad y la dirección de cada una de las cargas a las que cada disco está sometido el análisis del conjunto de los discos sería factible.

Es posible determinar las cargas aplicadas a los discos usando las ecuaciones de Hertz y midiendo el ancho de la superficie de contacto, o la posición del máximo esfuerzo cortante, o el valor de este esfuerzo, etc. Pero este método tiene limitaciones, y una de las más importantes es la necesidad de gran resolución en los registros fotográficos. En muchos casos el método descrito aquí va a dar resultados más precisos. Resultados de un estudio en que se utilizan las ecuaciones de Hertz se publica por separado.

El método que se va a presentar para la determinación de las cargas en los puntos de contacto entre muchos discos cargados unos por otros requiere:

- 1) El conocimiento del esfuerzo de corte máximo  $\tau_{m\acute{a}x}$  en los puntos del campo del cuerpo (en este caso un disco circular), cuando cargas unitarias se aplican a puntos arbitrarios de los bordes. Esta relación es la que se va a definir como coeficiente de influencia. En el caso específico del disco circular esta relación se conoce teóricamente, gracias a las ecuaciones de Michell<sup>(6)</sup>. En el caso general de cuerpos de otras configuraciones esta relación podría obtenerse experimentalmente si no existe solución teórica.
- 2) Un ensayo fotoelástico en el cuerpo cargado, y la determinación de  $\tau_{m\acute{a}x}$  en un número suficiente de puntos del campo para determinar las cargas cuya magnitud y dirección se desea conocer. En general el número de puntos a analizar es dos veces el número de cargas a determinar.

Por conveniencia se van a llamar franjas isocromáticas, o simplemente isocromáticas, el lugar de puntos que exhiben el mismo valor de  $\tau_{m\acute{a}x}$ , sea que hayan sido determinados fotoelásticamente, sea que se los hayan obtenido matemáticamente. Isoclinas son las franjas que dan la dirección de los planos sobre los cuales actúan los esfuerzos principales. Se van a llamar isóclinas al lugar de puntos que exhiben el mismo valor de esfuerzo normal  $\sigma$ .

1. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE ISOCROMATICAS Y EL COEFICIENTE DE INFLUENCIA.

La ley básica de la fotoelasticidad puede escribirse como sigue<sup>(7)</sup>:

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{ct}{\lambda} (\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{2ct}{\lambda} \tau_{1\text{máx}} \\n_2 &= \frac{ct}{\lambda} (\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{2ct}{\lambda} \tau_{2\text{máx}} \\n_3 &= \frac{ct}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2ct}{\lambda} \tau_{3\text{máx}}\end{aligned}\tag{1-1}$$

donde

$n_1, n_2, n_3$  = valor del orden de isocromáticas en los planos de  $\tau_2$  y  $\tau_3, \tau_3$  y  $\tau_1, \tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente

$\lambda$  = longitud de onda de la luz utilizada

$c$  = coeficiente fotoelástico

$t$  = longitud del paso de la luz en el modelo

$\sigma_i$  = esfuerzos principales,  $i = 1, 2, 3$

$\tau_{i\text{máx}}$  = esfuerzo de corte máximo  $i = 1, 2, 3$

Estas ecuaciones también pueden escribirse en la forma siguiente:



$$\tau_{i \text{ máx}} = \frac{\lambda}{2ct} n_i = \frac{f}{t} n_i \quad (1-2)$$

donde

$$f = \frac{\lambda}{2c} \quad (1-3)$$

que es el valor de una franja en término de esfuerzos y es una constante que depende del material del modelo, y es independiente de la longitud del paso de la luz en el modelo. Sus unidades son psi-in/franja o lbs/in franja, o en unidades del sistema métrico kg/cm-franja.

El esfuerzo de corte máximo actúa sobre un plano particular que en general, es diferente para cada punto del campo elástico, y que en cada punto depende de las condiciones de borde. La dirección de este plano se puede obtener usando la franja isocлина. En general la superposición de  $\tau_{\text{máx}}$  requiere que los esfuerzos actúen sobre el mismo plano.

La ecuación (1-2) aplicada a problemas planos se convierte en:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{f}{t} n \quad (1-4)$$

donde  $t$  es el espesor del modelo.

En las fórmulas anteriores, se ve que hay relaciones lineales entre el orden de las franjas isocromáticas y los esfuerzos principales o los esfuerzos de corte máximos. Pero en general, no existen relaciones lineales entre los esfuerzos de corte máximos y las cargas aplicadas, puesto que para una carga  $i$ , tenemos

$$\tau_{\text{máx } i} = \sqrt{\frac{\sigma_{xi} - \sigma_{yi}}{2}} + \tau_{xyi}^2 \sqrt{\frac{\sigma_{xi} - \sigma_{yi}}{2} \left( 1 + \frac{2\tau_{xyi}}{\sigma_{xi} - \sigma_{yi}} \right)^2} \quad (1-5)$$

Entonces para que bajo varias cargas simultáneas el esfuerzo de corte máximo sea

$$\tau_{\text{máx}} = \sum \tau_{\text{máx } i} = \frac{\sum \sigma_{xi} - \sum \sigma_{yi}}{2} \quad (1-6)$$

es necesario que

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = \dots = \tau_{xyn} = 0 \quad (1-7)$$

Lo que significa que en un punto es necesario que los planos principales sean los mismos para los esfuerzos producidos por todas las cargas que se desean superponer.

Entonces, de acuerdo a lo anterior se puede expresar el principio de superposición de isocromáticas como sigue.

Si la carga que se aplica es menor que el límite elástico del material y siempre que los planos sobre los que actúan los esfuerzos de corte máximos correspondientes a esas cargas sean los mismos, o aproximadamente los mismos, para todas las cargas que se adicionan, el orden de franjas en los puntos del modelo equivale a la suma de los órdenes de franjas de cada una de las cargas aplicadas, *i.e.* el orden de franja en un punto genérico es:

$$n_i = \sum_{j=1}^n n_{ij} \quad (1-8)$$

donde

$n_i$  = orden de franja en el punto  $i$

$n_{ij}$  = orden de franja en el punto  $i$ , producido por la carga  $F_j$  sólo mente.

Así, (1-8) presenta claramente el principio de superposición del orden de isocromáticas. Se verá más adelante que aunque es poco común que esfuerzos de corte máximos actúen en los mismos planos para diferentes condiciones de borde, en el caso particular que se va a estudiar no sólo esto ocurre sino que el problema se simplifica también porque uno de los esfuerzos principales es cero en el caso de la placa semi-infinita, y constante en el caso del disco. Entonces las isocromáticas son también isóbaras de  $\sigma$ .

Cuando la carga  $F_j$  es unitaria,  $F_j = 1$ , llamaremos  $g_{ij}$  al orden de franja en el punto  $i$ . Entonces (1-8) se escribe:

$$n_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} F_j \quad (1-9)$$

En esta fórmula a  $g_{ij}$  se le llama coeficiente de influencia de las isocro

máticas. Está relacionado con las propiedades fotoelásticas del modelo y con la posición relativa del punto  $i$  respecto a la carga.

Usando el concepto de coeficientes de influencia de isocromáticas, la determinación de cargas aplicadas sobre la frontera del problema plano se convierte en la solución de la ecuación integral (Fig 2):

$$n_i = \int w(Q)g(i,Q)dx(Q) \quad (1-10)$$

donde

- $g(i,Q)$  es el orden de franja en el punto  $i$  producido por una carga unitaria aplicada en la posición  $Q$  de la frontera
- $w(Q)$  es la carga aplicada en la frontera
- $n_i$  es el orden de franja en el punto  $i$

La ecuación (1-10) es una ecuación integral lineal. El coeficiente de influencia  $g(i,Q)$  es continuo.

La determinación de la carga en la superficie de contacto entre los discos es fácil usando la ecuación (1-10), porque los esfuerzos en los puntos de contacto entre los discos pueden ser reemplazados por su fuerza resultante. Según el principio de Saint Venant, este procedimiento sólo tendrá influencia en las zonas vecinas de los puntos de contacto.

Las consideraciones anteriores se van a aplicar al caso del disco (Fig 3). Cada una de las fuerzas aplicadas al borde se descompone siguiendo las direcciones de las cuerdas que conectan los puntos de aplicación de las cargas. El disco queda pues cargado por pares de fuerzas aplicadas en las extremidades de las cuerdas. En la Fig3, el disco tiene cuatro puntos de contacto. Las cargas se descomponen en 6 pares de fuerzas. Entonces, el orden de isocromática en un punto  $i$  en el disco debe ser:

$$n_i = \sum_{j=1}^6 g_{ij} F_j \quad (1-11)$$

Siempre que los planos sobre los cuales los esfuerzos de corte máximo actúan sean aproximadamente los mismos.

Generalmente si el disco tiene  $r$  puntos de contacto, las fuerzas aplicadas se descomponen en  $S$  pares de fuerzas

$$S = \frac{r(r-1)}{2} \quad (1-12)$$

Por lo tanto la ecuación general es:

$$n_i = \sum_{j=1}^S B_{ij} F_j \quad (1-13)$$

Las ecuaciones representadas por (1-13) son lineales.  $n_i$  queda determinado por el experimento mismo.  $B_{ij}$  se calcula teóricamente como se indica en el análisis que sigue.

De acuerdo a las restricciones estipuladas más arriba, será conveniente elegir como puntos  $i$  puntos en los cuales  $\tau_{\text{máx}}$  actúa aproximadamente en el mismo plano bajo las cargas consideradas. Si éste no fuera el caso, el máx todo requiere la determinación de las direcciones de los esfuerzos principales, lo que lo hace menos práctico.

## 2. COEFICIENTE DE INFLUENCIA DE LAS ISOCROMATICAS EN EL DISCO CARGADO EN LAS EXTREMIDADES DE UNA CUERDA

Para determinar los esfuerzos que actúan en puntos de un disco sometido a dos fuerzas opuestas en la dirección de una cuerda, se pueden usar las ecuaciones de Michell<sup>(6)</sup> que pueden obtenerse considerando el problema de semi-infinita sometida a una carga concentrada

Los esfuerzos (Fig 4) están dados por:

$$\sigma_{r_1} = \frac{2F}{\pi t} \frac{\cos \theta_1}{r_1} ; \quad \sigma_{\theta_1} = 0 ; \quad \tau_{r_1 \theta_1} = 0 \quad (2-1)$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2F}{\pi t} \frac{\cos \theta_2}{r_2} ; \quad \sigma_{\theta_2} = 0 \quad \tau_{r_2 \theta_2} = 0$$

donde  $t$  es el espesor de la placa.

Si el punto  $i$  está en la posición de la placa que corresponde a la circunferencia del disco los esfuerzos normales y cortantes con respecto al plano tangencial a la circunferencia son<sup>(6)</sup>:

$$\sigma_R = -\frac{2F}{\pi t} \left[ \frac{\cos \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2}{r_1} + \frac{\cos \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_1}{r_2} \right] \quad (2-2)$$

$$\tau_{RT} = -\frac{2F}{\pi r} \left[ \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2}{r_1} - \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{r_2} \right]$$

Dado que

$$r_1 = D \sin \theta_2 \quad , \quad r_2 = D \sin \theta_1$$

la ec (2-2) se convierte en

$$\sigma_R = -\frac{2F}{\pi D t} \sin (\theta_1 + \theta_2) \quad (2-3)$$

$$\tau_{RT} = 0$$

Como en cualquier punto de la circunferencia  $\sin(\theta_1 + \theta_2)$  es constante,  $\sigma_R$  es un esfuerzo normal a la circunferencia, y uniforme a lo largo de todo el borde del disco. Entonces agregando estos esfuerzos uniformes para que el borde del disco sea libre, obtenemos los esfuerzos en cualquier punto del disco.

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2F}{\pi t} \frac{\cos \theta_1}{r_1} + A \quad ; \quad \sigma_{\theta_1} = 0 \quad ; \quad \tau_{r_1 \theta_1} = 0 \quad (2-4)$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2F}{\pi t} \frac{\cos \theta_2}{r_2} + A \quad ; \quad \sigma_{\theta_2} = 0 \quad ; \quad \tau_{r_2 \theta_2} = 0$$

donde

$$A = \frac{2F}{\pi D t} \sin (\theta_1 + \theta_2) \quad (2-5)$$

Es importante observar que la dirección de la cuerda es una dirección principal de esfuerzo. En coordenadas polares locales, donde  $r$  es la distancia del punto considerando al punto de contacto de la fuerza con el disco y  $\theta$  es el ángulo que el radio que pasa por el punto considerado hace con la dirección de la fuerza, las ecuaciones de Michell se expresan así.

$$\sigma_{\theta} = \sigma_1 = 0$$

$$\sigma_r = \sigma_2 = -\frac{2F \cos \theta}{\pi t r}$$

(2-6)

$$\tau_{r\theta} = \tau_{12} = 0$$

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{F}{\pi t} \frac{\cos \theta}{r}$$

Esto quiere decir: 1) que las isostáticas son líneas radiales y circunferenciales, como se muestra en la Fig 5, y 2) que el esfuerzo normal  $\sigma_\theta$ , que tiene la dirección de la tangente a la circunferencia y que es  $\sigma_1$ , es cero en todo punto del campo.

Las isocromáticas correspondientes al caso en que la carga es perpendicular a la tangente en el punto de contacto, se muestran en la Fig 6. Son todas circunferencias tangentes al punto de contacto, y con centros situados sobre la línea de acción de la carga. En la Fig 6 también se muestran las isocromáticas correspondientes al caso de la carga inclinada respecto a la tangente. Se expresan por las mismas ecs (2-6) siempre que se tome la dirección de la fuerza como origen de los ángulos. Resulta entonces que 1) las isostáticas de la Fig 5, se aplican a cargas que tengan cualquier dirección; 2) las isocromáticas para cargas con cualquier dirección, son también isóbaras, o lugares de punto en los cuales  $\sigma_2$  es constante y 3) es posible sumar aritméticamente los esfuerzos correspondientes a varias cargas de diferentes direcciones, aplicadas al mismo punto del borde. Esto último se muestra gráficamente en la Fig. 7.

Esta idea, puede ser aplicada al caso del disco. Entonces, es conveniente convertir la ec (2-4), usando el sistema de coordenadas x, y de la Fig 4.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2F}{\pi c} \left[ \frac{\cos \theta_1}{r_1} \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \operatorname{sen}^2 \theta_2 \right] + A \\ \sigma_y &= \frac{2F}{\pi c} \left[ \frac{\cos \theta_1}{r_1} \cos^2 \theta_1 + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \cos^2 \theta_2 \right] + A \\ \tau_{xy} &= -\frac{2F}{\pi c} \left[ \frac{\cos^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1}{r_1} - \frac{\cos^2 \theta_2 \operatorname{sen} \theta_2}{r_2} \right] \end{aligned} \quad (2-7)$$

De acuerdo con la ec (2-7) se puede deducir la expresión que da el esfuerzo de corte máximo en cualquier punto:

$$\tau_{\max}^2 = \left[ \frac{F}{\pi c} \right]^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta_1}{r_1^2} + \frac{\cos^2 \theta_2}{r_2^2} + \frac{2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos 2(\theta_1 + \theta_2)}{r_1 r_2} \right]$$

Sustituyendo la ec (1-4) en la ec (2-8), y si  $F = 1$  entonces el coeficiente de influencia en el punto i es:

$$E_{ij} = \frac{1}{\pi f} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_1}{r_1^2} + \frac{\cos^2 \theta_2}{r_2^2} + \frac{2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos 2(\theta_1 + \theta_2)}{r_1 r_2}} \quad (2-9)$$

Llamando  $D$  al diámetro del disco,  $d$  a la longitud de la cuerda correspondiente a la fuerza  $F_j$  y además

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{d}{D} \\ m &= \frac{D}{r_1} \end{aligned} \quad (2-10)$$

y considerando

$$\begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 &= d \\ r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones que permiten calcular el coeficiente de influencia:

$$E_{ij} = \frac{1}{\pi D f} k_{ij} \quad (2-12)$$

donde

$$k_{ij} = m \sqrt{1 + \frac{2\ell m - 1}{(\ell m - 2)^2}} \quad \text{para } \theta_2 = \theta_1 = 0 \quad (2-13)$$

$$k_{ij} = \frac{m^2 \ell}{1 + (\ell m)^2} \quad \text{para } \theta_1 = 90^\circ \quad (2-14)$$

$$k_{ij} = \cos \theta_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\sin 2 \theta_2}{\sin 2 \theta_1}\right)^2 + 2 \left(\frac{\sin 2 \theta_2}{\sin 2 \theta_1}\right) \cos 2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2-15)$$

para  $0 < \theta_1 < 90^\circ$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\ell m - \cos \theta_1} \right] \quad (2-16)$$

En estas fórmulas se ve que  $E_{ij}$  es función de las constantes  $D$  y  $f$  del modelo, y de las localizaciones relativas ( $\ell$ ,  $m$ ,  $\theta_1$ ) entre el punto  $i$  y la carga  $F_j$ . Conociendo los parámetros  $\ell$ ,  $m$ ,  $\theta_1$  se pueden determinar los valores de  $k_{ij}$  usando tablas, como la tabla 1, que ha sido preparada para  $m = 10$ .



TABLA 1. VALORES DEL COEFICIENTE DE INFLUENCIA  $k_{ij}$ , PARA PUNTOS SITUADOS EN  $m = 10$ , Y PARA VARIOS ANGULOS  $\theta_1$

$\theta_1 \backslash \ell$	0.40	0.55	0.60	0.70	0.80	0.85	1.00
0	13.333	12.222	12.000	11.667	11.429	11.333	11.111
5	13.221	12.140	11.923	11.598	11.365	11.272	11.054
10	12.889	11.897	11.696	11.393	11.175	11.087	10.883
15	12.353	11.500	11.324	11.056	10.863	10.784	10.601
20	11.637	10.962	10.818	10.597	10.435	10.369	10.214
25	10.771	10.298	10.193	10.026	9.902	9.851	9.729
30	9.786	9.527	9.462	9.356	9.273	9.238	9.154
35	8.717	8.669	8.645	8.600	8.561	8.543	8.499
40	7.595	7.743	7.760	7.775	7.779	7.778	7.774
45	6.448	6.770	6.823	6.895	6.939	6.956	6.990
50	5.300	5.767	5.853	5.975	6.057	6.088	6.158
55	4.171	4.752	4.864	5.029	5.143	5.188	5.290
60	3.077	3.738	3.871	4.070	4.211	4.266	4.396
65	2.028	2.738	2.886	3.110	3.271	3.335	3.486
70	1.032	1.763	1.919	2.159	2.333	2.404	2.570
75	0.094	0.820	0.979	1.225	1.407	1.481	1.657
80	0.782	0.084	0.072	0.317	0.500	0.576	0.755
85	1.598	0.945	0.796	0.560	0.381	0.307	0.129
90	2.353	1.760	1.622	1.400	1.231	1.160	---

$$\ell = d/D$$

$$m = D/r_1$$

### 3. EJEMPLOS

Para determinar el valor de un número  $S$  de componentes de las cargas aplicadas a un disco, solamente se necesita según la ec (1-12), escoger un número  $S$  de puntos, en el campo de las isocronámicas, cuyas direcciones principales no varían o varían poco en las cargas a considerar y determinar para cada uno de esos puntos las coordenadas y el valor de franja. Sin embargo, a fin de facilitar el cálculo, y teniendo en cuenta tanto el campo de aplicación de las ecuaciones usadas, como la cantidad de la respuesta, es conveniente escoger los puntos sobre las líneas de aplicación de las fuerzas, y a una distancia  $D/10$  de los puntos de contacto. Es decir que  $m$  sea 10 en (2-10).

Los puntos 1, 2, ... etc. han sido localizados en la Fig 8 siguiendo este criterio. Las siguientes reglas facilitan la interpretación: 1) en cada cuerda sólo actúan un par de fuerzas opuestas, y en la dirección de la cuerda; 2) en cada cuerda se fijan dos puntos a los que se asigna el mismo número que se asigna a la componente de la fuerza que actúa en la dirección de la cuerda. Si el orden de franja no es suficientemente elevado y si es posible observar el modelo en el polariscopio, sería posible aumentar

la precisión usando un método de compensación en el punto seleccionado. El coeficiente de influencia en un punto es el resultado de sumar la influencia de una carga particular sobre los 2 puntos que tienen el mismo número.

El valor de franja del material se determina usando el disco cargado diametralmente, (Fig 9). En el centro del disco, usando la ec (2-8) para  $r_1 = r_2 = D/2$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , resulta:

$$\tau_{\text{máx}}^2 = \left( \frac{F}{\pi t} \right) \frac{16}{D^2}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{F}{\pi t} \frac{4}{D} \quad (3-1)$$

De acuerdo con (1-4), tenemos

$$\frac{F}{\pi t} \frac{4}{D} = \frac{f}{t} n_c$$

por lo tanto, el valor de franja es:

$$f = \frac{4 F}{\pi D} n_c \quad (3-2)$$

donde  $n_c$  es el orden de la isocromática en el centro del disco. Utilizando "Homalite" como material para el modelo.

$$f = 7.82 \text{ kg/cm-franja} \quad (3-3)$$

### 3.1 Disco con tres puntos de contacto simétricos

#### 3.1.1 Formando triángulo equilátero

Las longitudes de las tres cuerdas en coyas extremidades se aplican las fuerzas, son iguales (Fig 10). Siguiendo la ec.(1-13) las ecuaciones regulares son:

$$\begin{aligned} n_1 &= \epsilon_{11} F_1 + \epsilon_{12} F_2 + \epsilon_{13} F_3 \\ n_2 &= \epsilon_{21} F_1 + \epsilon_{22} F_2 + \epsilon_{23} F_3 \\ n_3 &= \epsilon_{31} F_1 + \epsilon_{32} F_2 + \epsilon_{33} F_3 \end{aligned} \quad (3-4)$$

y por la ec (2-12):

$$k_{ij} = \epsilon_{ij} \cdot D f$$

la ecuación (3-4) se puede escribir en forma de matriz:

$$\{k\} \{F\} = n D f \{n\} \quad (3-5)$$

Las fuerzas son entonces:

$$\{F\} = n D f \{k\}^{-1} \{n\} \quad (3-6)$$

Para determinar las componentes  $\{F\}$  de las cargas que actúan sobre un disco se pueden utilizar las ecs (3-5) y (3-6) como fórmulas generales. Si se conoce  $\{n\}$  por un experimento de fotoelasticidad, y la matriz de coeficientes de influencia  $\{k\}$ , entonces es fácil resolver las ecuaciones lineales para encontrar  $\{F\}$ .

Cuando logramos la matriz  $\{k\}$ , hay que considerar las condiciones requeridas por el principio de superposición de isocromáticas. Con el criterio anterior si despreciamos la influencia de las fuerzas alejadas del punto considerado, por ejemplo la influencia de la fuerza  $F_3$  sobre los puntos  $A_1$  y  $A_2$ , y de la fuerza  $F_1$ , sobre los puntos  $B_2$  y  $B_3$ , etc., los planos principales en los puntos considerados son los mismos, para las cargas que se consideran.

Cuando el disco tiene tres puntos de contacto simétricos, de acuerdo con ec. (2-10)  $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \frac{0.866 D}{D} = 0.866$ . Los coeficientes  $k_{ij}$  se obtienen de la tabla 1. Cada coeficiente depende de tres parámetros  $m, \ell, \theta$ . Hemos fijado  $m = 10$ . Sólo quedan dos parámetros:  $\ell, \theta$ .

Punto 1: Componente 1 :  $\ell_1 = 0.866$      $\theta_1 = 0$      $k_{11} = 2 \times 11.305$   
 Componente 2 :  $\ell_2 = 0.866$      $\theta_1 = 60^\circ$      $k_{12} = 1 \times 4.283$   
 Componente 3 :  $\ell_3 = 0.866$      $\theta_1 = 60^\circ$      $k_{13} = 1 \times 4.283$

Y para los puntos 2 y 3:

$$\begin{array}{lll} k_{21} = 4.283 & k_{23} = 4.283 & k_{22} = 22.61 \\ k_{31} = 4.283 & k_{32} = 4.283 & k_{33} = 22.61 \end{array}$$

Por lo tanto la matriz del coeficiente de influencia es:

$$(k) = \begin{pmatrix} 22.61 & 4.283 & 4.283 \\ 4.283 & 22.61 & 4.283 \\ 4.283 & 4.283 & 22.61 \end{pmatrix}$$

La inversa de  $k$  es:

$$(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.04707 & -0.007496 & -0.007496 \\ -0.007496 & 0.04707 & -0.007496 \\ -0.007496 & -0.007496 & 0.04707 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo  $(k)^{-1}$  en (3-6):

$$\{F\} = nDf \begin{pmatrix} 0.04707 & -0.007496 & -0.007496 \\ -0.007496 & 0.04707 & -0.007496 \\ -0.007496 & -0.007496 & 0.04707 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

Dado que la matriz  $(k)$  depende solamente de las coordenadas de los puntos de contacto en el disco, la ec.(3-7) puede usarse como la fórmula general para cualquier disco con tres puntos de contacto simétricos.

Los resultados de los experimentos y del cálculo se presentan en la tabla 2, donde  $P$  es carga vertical aplicada en punto A (Fig 10), y  $P_{ca}$  es la carga calculada con las medidas de  $(n)$  obtenidas con varios niveles de carga Tardy.

La solución para un disco con  $D = 9.8$  cm y  $f = 7.82$  obtenida para  $\{F\}$  y para  $P_{ca}$  es la siguiente.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 11.33 & -1.80 & -1.80 \\ -1.80 & -11.33 & -1.80 \\ -1.80 & -1.80 & 11.33 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

y

$$P_{ca} = (F_1 + F_2) \cos 30^\circ$$

### 3.1.2 Formando triángulo isósceles

Otro ejemplo, en el cual los valores de  $n$  han sido tomados por interpolación entre las franjas de la fotografía, (Fig 11), se muestran en la Fig 12 .

Los parámetros son

$$D = 6.0 \text{ cm} \quad \ell_1 = \ell_2 = 0.924 \quad \ell_3 = 0.707$$

Usando de nuevo la tabla 1 se pueden obtener los elementos de la matriz  $\{k\}$ :

en el punto 1: Componente 1:  $k_{11} = 2 \times 11.22$

Componente 2:  $k_{12} = 6.977$

Componente 3:  $k_{13} = 2.634$

en el punto 2:  $k_{21} = k_{12} = 6.977$      $k_{22} = k_{11} = 22.44$      $k_{23} = 2.634$

en el punto 3:  $k_{31} = 2.949$      $k_{32} = 2.949$      $k_{33} = 23.32$

Usando la foto, se encuentra:

$$n_1 = 4.05 + 2.65 = 6.70$$

$$n_2 = 4.00 + 2.75 = 6.75$$

$$n_3 = 1.35 + 1.25 = 2.60$$

Sustituyendo los datos anteriores en ec.(3-5)

$$\begin{bmatrix} 22.44 & 6.977 & 2.634 \\ 6.977 & 25.44 & 2.634 \\ 2.949 & 2.949 & 23.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = D f \begin{Bmatrix} 6.70 \\ 6.75 \\ 2.60 \end{Bmatrix}$$

Los resultados son:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = D f \begin{Bmatrix} 0.2220 \\ 0.2252 \\ 0.05521 \end{Bmatrix}$$

Dando a los parámetros los valores:  $D = 6.0 \text{ cm}$   $f = 7.82$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32.72 \\ 33.20 \\ 8.14 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

La carga vertical calculada para el punto de contacto A es:

$$P_{ca} = (F_1 + F_2) \cos 22.5^\circ = 60.90 \text{ kg}$$

La carga aplicada fué:  $P = 63.24 \text{ kg}$ , entonces

$$\frac{P - P_{ca}}{P} = - 3.79\%$$

De acuerdo con los resultados anteriores se pueden determinar las cargas normales y tangenciales en cada punto de contacto:

Punto de contacto	Carga normal (kg)	Carga tangencial (kg)
A	60.90	0.18
B	35.98	6.77
C	36.43	6.95

### 3.2 Disco con tres puntos de contacto arbitrarios

La geometría y las propiedades del disco observado (Fig 13) son:

$$D = 10.00 \text{ cm} ; \quad f = 7.82 \text{ kg/cm-franja}$$

Los puntos de aplicación de las cargas están a las siguientes distancias el uno del otro:

$$AB = 6.6 \text{ cm}, \quad AC = 9.00 \text{ cm} \quad \text{y} \quad BC = 9.6 \text{ cm}$$

La carga  $P$  aplicada en  $A$  es vertical.

Para obtener los coeficientes  $k_{ij}$ , ec.(2-13) a (2-15), hay que calcular previamente el parámetro  $\ell$ :

$$AB : \quad \ell = \frac{6.6}{10.0} = 0.66$$

$$AC : \quad \ell = \frac{9.0}{10.0} = 0.90$$

$$BC : \quad \ell = 0.96$$

El valor de los ángulos  $\theta_i$  está dado en la Fig 13. Los valores de  $n$  en este caso han sido obtenidos por compensación (método de Tardy), visualmente en el polariscopio.

Despreciando la influencia de las fuerzas que actúan sobre puntos alejados, los coeficientes de influencia, son:

$k_{11} = 2 \times 11.67$	$k_{12} = 2.402$	$k_{13} = 3.50$
$k_{21} = 2.158$	$k_{22} = 2 \times 11.33$	$k_{23} = 7.77$
$k_{31} = 3.10$	$k_{32} = 7.77$	$k_{33} = 2 \times 11.11$

Sustituyendo en la ec. (3-5) calculando la inversa de la matriz  $\{k\}$  y usando los datos del disco se obtienen los componentes de las fuerzas:



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10.83 & -0.640 & -1.481 \\ -0.584 & 12.41 & -4.247 \\ -1.307 & -4.247 & 12.80 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Para verificar se puede usar:

$$P_{ca} = F_1 \cos 25.8^\circ + F_2 \cos 48.7^\circ$$

Los resultados se dan en la tabla 3.

### 3.3 Disco con cuatro puntos de contacto

Los puntos de contacto están situados en posiciones simétricas respecto a la dirección de aplicación de las cargas. Las isocronísticas son también, aproximadamente, simétricas (Fig 14). En consecuencia es necesario solamente resolver tres fuerzas. Los datos para el cálculo están dados en la Fig 15:

$$\begin{aligned} D &= 10.05 \text{ cm} & f &= 7.82 \\ \ell_1 &= 0.55 & \ell_2 &= 1.0 & \ell_3 &= 0.887 \\ n_1 &= \frac{0.9 + 0.95 + 0.75 + 0.85}{4} = 0.91 \\ n_2 &= \frac{1.55 + 1.6 + 1.6 + 1.65}{4} = 1.60 \\ n_3 &= \frac{1.70 + 1.75 + 1.75 + 1.75}{4} = 1.74 \end{aligned}$$

Consultando la tabla 1, los coeficientes de influencia son:

$$\begin{array}{lll} k_{11} = 12.222 & k_{12} = 4.396 & k_{13} = 1.16 \\ k_{21} = 3.738 & k_{22} = 11.111 & k_{23} = 9.238 \\ k_{31} = 1.76 & k_{32} = 9.154 & k_{33} = 11.333 \end{array}$$

Sustituyendo estos datos en la ec.(3-5) se obtiene:

TABLA 2. CALCULO DE LAS CARGAS APLICADAS A UN DISCO, CON TRES PUNTOS DE CONTACTO SIMETRICOS, DESPRECIANDO LA CARGA ALEJADA

No. de orden de carga	P(kg)	Experimento			Cálculo				Error relativo (P-P <sub>ca</sub> )/P (%)
		n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	P <sub>ca</sub>	
2	28.85	1.85	2.08	1.14	15.16	18.18	5.84	28.87	+ 0.000
3	43.35	2.96	2.75	2.07	24.86	22.10	13.17	40.69	- 6.14
4	57.85	3.76	4.15	2.37	30.86	35.98	12.61	57.88	+ 0.000
5	72.35	4.63	5.05	3.13	37.73	43.25	8.04	70.13	- 3.07
6	86.84	6.00	6.05	3.99	49.90	50.56	23.52	87.00	+ 0.001

TABLA 3. CALCULO DE LAS CARGAS APLICADAS A UN DISCO, SOPORTADO EN TRES PUNTOS ARBITRARIOS

No. de orden de carga	P (kg)	Experimento			Cálculo				Error relativo (P-P <sub>ca</sub> )/P (%)
		n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	P <sub>ca</sub>	
	72.35	5.31	5.62	5.23	46.17	44.43	36.13	70.89	- 2.0

$$\begin{bmatrix} 12.222 & 4.396 & 1.16 \\ 3.738 & 11.111 & 9.238 \\ 1.76 & 9.154 & 11.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.91 \\ 1.60 \\ 1.74 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05674 \\ 0.01389 \\ 0.1336 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.01 \\ 3.43 \\ 32.99 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

en el experimento la carga vertical sobre los puntos A y B es:  
 $P = 71.18 \text{ kg}$ . Según el cálculo el valor de dicha carga resulta:

$$P_{cA} = 2F_1 + 2F_2 \cos 30^\circ = 71.91 \text{ kg}$$

la diferencia es:  $\frac{P - P_{cA}}{P} = + 1.0\%$

De acuerdo con los resultados anteriores se pueden determinar las cargas normales y tangenciales en cada punto de contacto

Punto de contacto	Carga normal (kg)	Carga tangencial (kg)
A y C	39.05	+ 4.36
B y D	39.05	- 4.36

Otro ejemplo del disco con cuatro puntos de contacto (ángulo central  $120^\circ$ ) se presenta en la Fig 16; los datos para el cálculo aparecen en la Fig 17.

$$D = 6.0 \text{ cm}, \quad f = 7.82$$

$$n_1 = \frac{1.8 + 1.75 + 1.75 + 1.75}{4} = 1.75$$

$$n_2 = \frac{2.65 + 2.2 + 2.25 + 2.45}{4} = 2.36$$

$$n_3 = \frac{2.10 + 2.10 + 1.70 + 1.70}{4} = 1.90$$

Los puntos de contacto en este caso tienen la misma posición relativa que en la Fig 14 y la matriz  $\{k\}$  depende solamente de las posiciones relativas de los puntos de contacto. Por lo tanto, la matriz  $\{k\}$  es:

$$\{k\} = \begin{vmatrix} 12.222 & 4.396 & 1.16 \\ 3.738 & 11.111 & 9.238 \\ 1.76 & 9.54 & 11.333 \end{vmatrix}$$

Con los datos que se muestran en la Fig 17, las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  resultan:

$$\begin{vmatrix} F \\ F \\ F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12.05 \\ 24.35 \\ 3.19 \end{vmatrix} \text{ kg}$$

La carga vertical aplicada fue  $P = 47.654 \text{ kg}$  y la calculada con la expresión siguiente:

$$P_{ca} = 2(F_1 + F_2 \cos 60^\circ) = 48.45 \text{ kg}$$

En consecuencia, el error es:

$$\frac{P - P_{ca}}{P} = + 2.1\%$$

Las cargas normales y tangenciales en cada punto de contacto se presentan en la tabla siguiente:

<u>Punto de contacto</u>			<u>Carga normal</u>	<u>Carga tangencial</u>
			(kg)	(kg)
A	y	C	33.14	+ 8.84
B	y	D	33.14	- 8.84

### 3.4 Disco con cinco puntos de contacto (un eje de simetría)

La distribución de isocromáticas es aproximadamente simétrica y el número de fuerzas a determinar es solo las que están numeradas en la Fig 18

Los parámetros geométricos son:

$$l_1 = \frac{2 \cdot R/2 \sin 36^\circ}{D} = 0.588$$

$$l_2 = \frac{2 \cdot D/2 \sin 72^\circ}{D} = 0.951$$

$$l_3 = 0.951; l_4 = 0.951; l_5 = 0.588; l_6 = 0.588$$

1- Se van a usar las ccs (2-9) y (2-12) para calcular algunos  $k_{ij}$  porque los valores dados en la tabla 1 son para  $\theta_j$  menores que  $90^\circ$  Para  $k_{15} = k_{51} = k_{56} = k_{65}$ , los parámetros son:

$$l = 0.6; m = 1.6; \theta_1 = 8.74^\circ \text{ y } \theta_2 = 108^\circ$$

con lo que resulta:

$$k_{15} = k_{51} = k_{56} = k_{65} = 5.894$$

Los otros coeficientes de influencia se pueden obtener de la tabla 1.

$$|k| = \begin{bmatrix} 29.10 & 8.362 & 8.362 & 2.205 & 5.894 & 0 \\ 8.468 & 22.37 & 0 & 8.362 & 8.468 & 1.419 \\ 8.468 & 0 & 11.185 & 8.362 & 1.419 & 0 \\ 1.419 & 8.362 & 8.362 & 22.37 & 1.419 & 8.468 \\ 5.894 & 8.362 & 2.205 & 10.567 & 24.00 & 5.894 \\ 0 & 2.205 & 0 & 8.362 & 5.894 & 12.05 \end{bmatrix}$$

2- La matriz de  $\{n\}$  se obtiene de las isocromáticas y del esquema de cálculo que se muestra en las Figs 19 y 21.

$$\{n\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (7.0 + 0.8 + 1.0 + 6.0) \\ (5.7 + 0.9 + 3.15 + 1.10) \\ (8.5 + 9.5) \\ (9.0 + 3.0 + 4.65 + 9.0) \\ (7.75 + 5.7 + 6.0 + 2.65) \\ (2.25 + 2.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.4 \\ 5.425 \\ 9.00 \\ 8.64 \\ 11.05 \\ 2.125 \end{Bmatrix}$$

3- Usando la ecuación que da las fuerzas:

$$\{k\} \{F\} = \pi DF \{n\}$$

se obtienen las seis componentes siguientes:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \pi DF \begin{Bmatrix} -0.129196 \\ 0.150270 \\ 0.865580 \\ 0.014028 \\ 0.365680 \\ -0.039747 \end{Bmatrix}$$

4- Las cargas normales y tangenciales en los puntos de contacto son por lo tanto:

Punto de Contacto	Carga Normal	Carga Tangencial
A	0.134 nDf	0
B		-0.143 nDf
B'	0.957 nDf	0.143 nDf
C		0.370 nDf
C'	0.348 Df	-0.370 nDf

### 3.5 Sistema de Discos

Para demostrar la aplicación de este método se elegirá como ejemplo el disco mostrado en fig 1, obtenida mediante un ensayo fotoelástico. La verificación comprenderá a los discos numerados 1-12 pero en lugar de comparar con la carga aplicada se usará el equilibrio del sistema para demostrar la efectividad de este método híbrido.

El esquema para el cálculo de las fuerzas en los discos 1-12, está dado en la Fig 20, y los resultados se presentan a continuación:

Carga disco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.294									
2	2.962	1.285	0.117							
3	1.348	1.142	1.161							
4	1.718	0.120	0.201							
5	4.709	1.123	1.434							
6	0.649	0.911	-0.0136	1.476	0.873	-0.0736				
7	0.171	4.141	0.519	1.013	1.425	0.964				
8	0.0144	1.576	0.967	0.519	2.078	-1.198	1.103	0.765	0.736	0.777
9	1.613	0.704	1.888	-0.024	0.972	0.190	2.990	0.800	0.248	-0.0166
10	0.745	2.089	0.906	0.472	2.401	0.916				
11	0.358	3.872	-0.0168	-0.365	2.198	0.789				

Con los resultados anteriores verificaremos el equilibrio de los puntos de contacto y de todo el conjunto de discos.

#### 1. Fuerzas en los puntos de contacto

Si los resultados son correctos, las fuerzas en los puntos de contacto deben estar en equilibrio.



En la tabla que sigue los símbolos denotan:

$C_{ij}$  = punto de contacto entre el disco  $i$  y  $j$

$F_k^{(i)}$  = dirección de la fuerza resultante. Se eligió la fuerza  $k$  del disco  $i$  como la dirección normativa

$F_j$  = fuerza resultante del disco  $j$  a lo largo de la dirección  $F_k^{(i)}$

$C_{ij}$	$F_k^{(i)}$	$F_i$	$F_j$	$\Delta F_{ij} = nF_j - F_i$
$C_{1,9}$	$F_1^{(1)}$	3.294	2.9215	0.3725
$C_{2,9}$	$F_1^{(2)}$	3.647	3.373	0.274
$C_{2,6}$	$F_2^{(2)}$	1.221	1.402	-0.181
$C_{3,6}$	$F_2^{(3)}$	2.050	1.641	0.409
$C_{4,6}$	$F_1^{(4)}$	1.797	1.545	0.252
$C_{5,7}$	$F_1^{(5)}$	5.51	5.71	-0.200
$C_{6,7}$	$F_4^{(6)}$	2.090	1.918	0.172
$C_{7,10}$	$F_6^{(7)}$	4.12	4.37	-0.250
$C_{9,10}$	$F_8^{(9)}$	2.434	2.173	-0.261
$C_{10,11}$	$F_6^{(10)}$	3.860	3.75	0.11
$C_{10,12}$	$F_6^{(10)}$	3.529	3.467	0.062
$C_{9,12}$	$F_8^{(9)}$	2.151	2.849	-0.698

Con los resultados anteriores se puede estimar el error relativo ( $\epsilon$ ) mediante los valores de  $\bar{F}_{ij}$  y  $\bar{F}_i$  o  $\bar{F}_j$  mostrados en la tabla anterior. El valor de  $\epsilon$  resulta

$$e = \frac{\Delta \bar{F}_{ij}}{\Delta \bar{F}_i} = \frac{0.270 \text{ nf}}{2.975 \text{ nf}} = 9\%$$

## 2. Equilibrio del sistema de discos

Se considera el equilibrio del todo el sistema, utilizando las condiciones  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma M_o = 0$ .

Se eligió el sistema de coordenadas Z, y y el centro de momentos O Fig 20. Los cálculos se presentan en la tabla anexa con la siguiente notación:

$F_{ij}$  = Fuerza j en el disco i

$\alpha_{ij}$  = ángulo de la fuerza  $F_{ij}$  con respecto al eje X

$A_{ij}$  = distancia de la fuerza  $F_{ij}$  al punto fijo O

De acuerdo con los resultados anteriores tanto el equilibrio de los puntos de contacto como el equilibrio de todo el sistema revelan errores apreciables. Estos errores pueden deberse a las siguientes causas:

- i) error al sistema, i.e. error del orden de franja de cada isocromática
- ii) error al apreciar la localización de los puntos de contacto entre discos. La posición del punto de contacto afecta a la determinación del orden de franja y el coeficiente de influencia
- iii) aproximación de algunos coeficientes de influencia en la matriz k
- iv) error en las mediciones geométricas

$F_{ij}$	Valor	$\alpha_{ij} (^{\circ})$	$A_{ij}$	$\bar{X}$	Y	$M_o$
$F_{1.1}$	3.294	188	-11.5	-3.262	-0.458	-37.88
$F_{2.1}$	2.962	143	- 6.2	-2.366	1.783	-18.36
$F_{2.3}$	0.117	197	- 5.8	-0.112	-0.034	- 0.679
$F_{3.2}$	1.142	161	- 2.6	-1.080	0.372	- 2.97
$F_{3.3}$	1.161	121	0	-0.598	0.995	0
$F_{4.1}$	1.718	75	4.85	0.445	1.659	8.332
$F_{4.3}$	0.201	130	3.80	-0.129	0.154	0.764
$F_{5.1}$	4.709	77	8.70	1.059	4.588	40.968
$F_{5.2}$	1.123	32	7,8	0,953	0,595	8.759
$F_{11.3}$	0.906	10	13.7	0.892	0.157	12.412
$F_{11.6}$	2.401	321	3.2	1.866	-1.511	7.683
$F_{11.4}$	0.916	287	- 5.5	0.268	-0.876	- 5.038
$F_{12.2}$	3.872	273	- 5.8	0.203	-3.866	-22.458
$F_{12.6}$	2.198	304	4.0	-1.229	-1.822	8.792
$F_{12.5}$	-0.65	236	-12.7	0.204	+0.303	4.636
$F_{12.4}$	0.789	266	- 5.3	-0.055	-0.788	-4.182
$\Sigma$				-0.473	+1.251	+0.779

$$\Sigma X = \Sigma F_{ij} \cos \alpha_{ij} = 0.473 \quad \text{nf}$$

$$\Sigma Y = \Sigma F_{ij} \sin \alpha_{ij} = +1.251 \quad \text{nf}$$

$$\Sigma M_o = \Sigma F_{ij} A_{ij} = + 0.779 \quad \text{nf}$$

#### 4. CASOS PARTICULARES

Hay ciertos casos especiales de distribución de fuerzas sobre el borde de un disco circular para los cuales las ecuaciones de Michell se expresan en forma sencilla, y no es necesario entonces, para determinar las cargas en esos casos seguir el procedimiento explicado más arriba de calcular los coeficientes de influencia. Las cargas quedan determinadas directamente usando el valor de franja en un punto seleccionado del campo del disco. Estos casos y las ecuaciones a usar han sido tabulados.

La ecuación general (2-9), cuando  $r_1 = r_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$ , se convierte en:

$$k = \sqrt{2 m^2 \cos^2 \theta} \sqrt{1 + \cos 4 \theta} \quad (4-1)$$

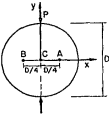
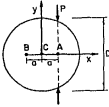
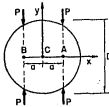
donde

$$m = D/r \quad (4-2)$$

y la carga aplicada dada por

$$P = \frac{\pi D f}{k} n \quad (4-3)$$

Casos particulares de aplicación de las ecuaciones de Michell

	Coeficientes de influencia en puntos particulares $k_i$	Fórmula para las cargas $n_i = \text{orden de isocromática}$
	$k_A = k_B = 1.92$ $k_C = 4.0$	$p = \frac{\pi Df}{k_i} n_i$ $i = A, B, C$
	$k_A = \frac{4D}{d}$ $k_C = \frac{2\sqrt{2}d}{D} \sqrt{1 + \cos 4\theta_C}$ $k_B = \frac{2\sqrt{2}\cos\theta_B}{\sqrt{1+16a^2/D^2}} \sqrt{1 + \cos 4\theta_B}$ $\tan \theta_C = \frac{2a}{d}, \quad \tan \theta_B = \frac{4a}{d}$	$p = \frac{\pi Df}{k_i} n_i$ $i = A, B, C$
	$k_A = k_B = \frac{4D}{d} + \frac{2\sqrt{2}\cos\theta_B}{\sqrt{1+16a^2/D^2}} \sqrt{1 + \cos 4\theta_B}$ $k_C = \frac{4\sqrt{2}d}{D} \sqrt{1 + \cos 4\theta_C}$ $\tan \theta_C = \frac{2a}{d}$ $\tan \theta_B = \frac{4a}{d}$	$p = \frac{\pi Df}{k_i} n_i$ $i = A, B, C$

## 5. USO DE LAS ECUACIONES DE HERTZ

Hertz sentó las bases de la teoría que permite determinar el estado elástico en la superficie de contacto de dos cuerpos cargados el uno contra el otro. Los dos cuerpos pueden tener cualquier forma y las consideraciones teóricas obtenidas pueden aplicarse al caso general en el que los puntos de contacto son separados tal que cada uno de ellos tiene su campo de isocronáticas respectivamente.

Un resumen de teoría de Hertz, su desarrollo por H. Ponisky y su aplicación para el uso de coeficiente de influencia son las siguientes secciones.

### 5.1 Solución al problema de contacto entre cilindros bajo la aplicación de tracción normal.

Según Hertz, la tracción normal tiene la distribución sobre el plano demostrado en la fig 21.

$$p = \frac{2F'}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad |x| < a; y = 0 \quad (5-1)$$

donde  $F'$  = fuerza total de compresión normal en espesor unitario

$2a$  = el ancho de contacto

Cuando se usa el sistema de coordenadas con focales

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \xi \cos \eta \\ y &= a \sinh \xi \sin \eta \\ \zeta &= \xi + i \eta \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (5-2)$$

en este caso, la solución de los esfuerzos en el dominio  $y \geq 0$  son

$$\sigma_x = \frac{2F'}{\pi a} \operatorname{I} \left[ \frac{\frac{x}{a} e^{-\zeta} - e^{-2\zeta}}{\sinh \zeta} \right] \quad (5-3)$$

$$\sigma_y = \frac{2F'}{\pi a} \operatorname{I} \left[ \frac{1 - \frac{x}{a} e^{-\zeta}}{\sinh \zeta} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{2F'}{\pi a} \operatorname{R} \left[ \frac{e^{-\zeta} \left( \frac{x}{a} - \cosh \zeta \right)}{\sinh \zeta} \right] \quad (5-3)$$

Cuando se aplica la tracción tangencial, consideramos la tracción tangencial la misma distribución que para la tracción normal.

$$t = \frac{2T'}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad |x| < a, y = 0 \quad (5-4)$$

donde  $T'$  es la tracción total, en espesor unitarios.

Sea

$$\mu = \frac{T'}{F'} \quad (5-5)$$

entonces la ec (4) se convierte en

$$t = \frac{2\mu F'}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (5-6)$$

bajo la aplicación de la tracción tangencial solamente, los esfuerzos en el cuerpo y  $\geq 0$  son los siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2\mu F'}{\pi a} \left[ 2R(e^{-\zeta}) + \frac{y}{a} I \left( \frac{e^{-\zeta}}{\sinh \zeta} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{2\mu F'}{\pi a} \left[ \frac{y}{a} I \left( \frac{e^{-\zeta}}{\sinh \zeta} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{2\mu F'}{\pi a} \left[ I(e^{-\zeta}) - \frac{y}{a} R \left( \frac{e^{-\zeta}}{\sinh \zeta} \right) \right]\end{aligned}\tag{5-7}$$

### 5.2 Esfuerzos máximos tangenciales

De acuerdo con las soluciones anteriores, en el caso general, bajo la aplicación de la tracción normal y tangencial, los esfuerzos son

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2F'}{\pi a} \left[ 2\mu R(e^{-\zeta}) + I \left( \frac{\left( \frac{x}{a} + \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} - e^{-2\zeta}}{\sinh \zeta} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{2F'}{\pi a} I \left[ \frac{\left( -\frac{x}{a} + \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} + 1}{\sinh \zeta} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{2F'}{\pi a} \left[ \mu I(e^{-\zeta}) + R \left( \frac{\left( \frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} \right) \right]\end{aligned}\tag{5-8}$$

Se usa la fórmula

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}\tag{5-9}$$

para ser sustituida en las ecs (5-8) y (5-9) con la cual se puede obtener

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{2F'}{\pi a} \left\{ \left[ 2^2 \left[ R^2(e^{-\zeta}) + I^2(e^{-\zeta}) \right] + 2\mu \left[ R(e^{-\zeta}) I \left( \frac{\left( \frac{x}{a} e^{-\zeta} - e^{-2\zeta} + 1 \right)}{\sinh \zeta} \right) \right] \right. \right. \\ &+ \left. \left. I(e^{-\zeta}) R \left( \frac{\left( \frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} \right) \right] \right. \\ &+ \left. I^2 \left( \frac{\left( \frac{x}{a} e^{-\zeta} - e^{-2\zeta} + 1 \right)}{\sinh \zeta} \right) + R^2 \left( \frac{\left( \frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} \right) \right\}^{1/2}\end{aligned}\tag{5-10}$$



puesto que

$$\zeta = \xi + i\eta$$

$$e^{\pm\zeta} = e^{\pm\xi} (\cos \eta \pm i \sin \eta)$$

entonces

$$e^{-\zeta} + e^{\zeta} = (e^{-\xi} + e^{\xi}) \cos \eta + i(e^{\xi} - e^{-\xi}) \sin \eta$$

$$e^{2\zeta} = e^{2\xi} (\cos 2\eta + i \sin 2\eta) \quad (5-11)$$

por lo tanto

$$R^2(e^{-\zeta}) + I^2(e^{-\zeta}) = e^{-2\xi} \cos^2 \eta - e^{-2\xi} \sin^2 \eta = e^{-2\xi} \cos 2\eta$$

$$(5-12)$$

$$\frac{\frac{x}{a} - \zeta - (e^{-2\zeta} + 1)/2}{\sinh \zeta} = \frac{(\frac{2x}{a} - (e^{-\xi} + e^{\xi}) \cos \eta) - i(e^{\xi} - e^{-\xi}) \sin \eta}{(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1) + i e^{2\xi} \sin 2\eta}$$

$$(5-13)$$

$$\frac{(\frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a}) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} = \frac{2(\frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a}) - (e^{-\xi} + e^{\xi}) \cos \eta - i(e^{\xi} - e^{-\xi}) \sin \eta}{(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1) + i e^{2\xi} \sin 2\eta}$$

Usando estas ecuaciones se obtiene la parte real y la imaginaria de las expresiones anteriores,

$$I\left(\frac{(\frac{x}{a} - \zeta - \frac{1}{2}(e^{-2\zeta} + 1))}{\sinh \zeta}\right) =$$

$$\frac{-\left(\frac{2x}{a} - (e^{-\xi} + e^{\xi}) \cos \eta\right) e^{2\xi} \sin 2\eta - (e^{2\xi} \cos 2\eta - 1)(e^{\xi} - e^{-\xi}) \sin \eta}{(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1)^2 + (e^{2\xi} \sin 2\eta)^2} \quad (5-14)$$

$$R\left(\frac{(\frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a}) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta}\right) =$$

$$(5-15)$$

$$\frac{(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1) [2(\frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a}) - (e^{-\xi} + e^{\xi}) \cos \eta] - e^{2\xi} \sin 2\eta \sin \eta (e^{\xi} - e^{-\xi})}{(e^{2\xi} \cos 2\eta - 1)^2 + (e^{2\xi} \sin 2\eta)^2}$$

$$R \left( \frac{\left(\frac{x}{a} - \eta \frac{y}{a}\right) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} \right) \quad (5-15)$$

$$= \frac{(e^{2\zeta} \cos 2\eta - 1) \left[ 2 \left( \frac{x}{a} - \eta \frac{y}{a} \right) - (e^{-\zeta} + e^{\zeta}) \cos \eta \right] - e^{2\zeta} \sin 2\eta \sin \eta (e^{\zeta} - e^{-\zeta})}{(e^{2\zeta} \cos 2\eta - 1)^2 + (e^{2\zeta} \sin 2\eta)^2}$$

Utilizando las ecs (5-12) - (5-15). La ec (5-10) se convierte en una función de  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\mu$ , es decir,

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}(\xi, \eta, \mu) \quad (5-16)$$

Pero usando la ec (5-2), tenemos las relaciones entre las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $\xi$ ,  $\eta$

$$\sinh \xi = \frac{\sqrt{u}}{a}$$

$$\cosh \xi = \sqrt{\frac{a^2 + u}{a^2}}$$

$$\cos \eta = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + u}}$$
(5-17)

$$\sin \eta = \frac{y}{\sqrt{u}}$$

$$\text{donde } u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2} \quad (5-18)$$

Con esta transformación, los esfuerzos cortantes máximos pueden ser expresados por las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $u$ .

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}(x, y, \mu) \quad (5-19)$$

### 5.3 El coeficiente de influencia de Franjas Isocromáticas

Si se sustituye la ec (5-19) en

$$\tau_{\max} = \frac{F}{\pi a t} k \quad (5-20)$$

donde  $t$  es espesor del cilindro,  $F' = F/t$ ,  $F$  es carga normal en el punto de contacto, y  $k$  es un coeficiente adimensional y depende la localización del punto considerado, se obtiene que

$$k = 2 \left\{ \mu^2 e^{-2\zeta} \cos 2\eta + 2\mu \left[ e^{-\zeta} \cosh \eta I \left( \frac{\frac{x}{a} - \zeta - \frac{e^{-2\zeta} + 1}{2}}{\sinh \zeta} \right) - e^{-\zeta} \sin \eta R \left( \frac{\left( \frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} \right) \right] \right\} \quad (5-21)$$

$$+ R^2 \left( \frac{\left( \frac{x}{a} - \mu \frac{y}{a} \right) e^{-\zeta} - e^{-\zeta} \cosh \zeta}{\sinh \zeta} \right) + I^2 \left( \frac{\frac{x}{a} - \zeta - \frac{e^{-2\zeta} + 1}{2}}{\sinh \zeta} \right) \left. \right\}^{1/2}$$

Cuando se usa el método de la fotoelasticidad para estudiar el problema de contacto lo más importantes es la definición de las cargas normales y tangenciales. En el caso del problema plano es factible el uso del método de coeficientes de influencia, ya que las franjas isocromáticas tienen la relación siguiente

$$\tau_{\max} = \frac{f}{c} n \quad (5-22)$$

Al igual las ecs (5-20) y (5-22), encontramos la carga

$$F = \tau_{\max} \frac{n}{k} \quad (5-23)$$

#### 5.4 Aplicación del coeficiente de influencia $k$

De acuerdo con la ec (5-23)  $n$  y  $k$  son dependiente de la posición del punto considerado, por lo tanto hay que elegir varios puntos para determinar  $F$ . Sin embargo, en la práctica, considerando los órdenes de franja más altos y la influencia de la singularidad en el punto de contacto más pequeño se escogen los puntos que están en círculo que tiene el radio  $2a$ . Entonces un punto  $M$  que queda en el círculo, su coeficiente de influencia tiene la regalción, Fig 22

$$k_M = k_M(u, \alpha) \quad (5-24)$$

bajo cierto valor de  $u$ ,  $k$  solamente es la función de  $\alpha$ .  
Por supuesto que:

$$x^2 + y^2 = (2a)^2 \quad (5.25)$$

el parámetro de cálculo resulta

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \{ (x^2 + y^2 - a^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2} \} \\ &= 1.5(1.0 + \sqrt{1 + 1.7778 \sin^2 \alpha})a^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Si se utiliza la computadora se pueden obtener los valores de  $k$  mostrados en la tabla 4.

### 5.5 Ejemplo de aplicación

En la práctica, se encuentran los siguientes problemas

- . El coeficiente  $u$  no es conocido.  $u$  es diferente del coeficiente de fricción del material del modelo.
- . Dificultad en la medición del ancho de contacto. Entre ellos, el más importantes es el de cómo definir el valor de  $u$ .

En general  $u$  y el patrón de franjas isocromáticas presenta alguna de las siguientes características:

1. Cuando  $u = 0$  el patrón de franjas tiene un eje simétrico (eje Y en la fig 21).
2. Cuando  $u \neq 0$ , se puede definir aproximadamente con el uso de la Fig 23. Primero se encuentra un punto  $M_{cr}$  que está en el círculo considerado y se obtiene el orden de franja máxima. El punto  $M_{cr}$  determina un valor de  $\alpha_{cr}$  con el cual al usar la curva en la Fig 23 a determinar  $u$  aproximadamente

Ejemplo. En la figura 24 se presenta el patrón de franjas elástica. La Fig 25 es un esquema que permite obtener la información necesaria, Los datos son los siguientes

Points	2n (cm)	$\alpha_{cr}^{\circ}$	$\mu$	$\alpha$					
				60°	70°	80°	90°	100°	110°
A	1.30	56°	0.25	3.5	3.45	3.25	3.15	3.0	2.75
B	1.40	90°	0.0	3.5	3.40	3.25	3.20	3.20	3.20
C	1.6	60°	0.25	3.6	3.50	3.45	3.25	3.20	3.15
D	1.40	90°	0.0	4.75	5.25	5.25	5.30	5.20	4.75

Si se usa la ec (5.23) y la tabla 4 se obtiene los resultados siguientes:

$\alpha$		60°	70°	80°	90°	100°	110°	EF/N
A	n	3.50	3.45	3.25	3.15	3.0	2.75	5.298
	k	0.4386	0.4265	0.4096	0.3881	0.3606	0.3248	
	F	5.187	5.258	5.157	5.276	5.408	0.503	
B	n	3.5	3.40	3.25	3.20	3.20	3.20	5.728
	k	0.3641	0.3912	0.4090	0.4190	0.4223	0.4190	
	F	6.720	6.084	5.562	5.346	5.304	5.346	
C	n	3.6	3.50	3.45	3.25	3.20	3.15	6.721
	k	0.4314	0.4275	0.4165	0.4007	0.3387	0.3488	
	F	6.676	6.549	6.627	6.489	6.76	7.2248	
D	n	4.75	5.25	5.25	5.30	5.20	4.75	8.819
	k	0.3641	0.3912	0.4090	0.4190	0.4223	0.4190	
	F	9.132	9.394	8.885	8.854	8.619	7.935	

En cada punto las fuerzas normal y tangencial son

	A	B	C	D
F	5.298	5.728	6.721	8.819
T	1.324	0.0	1.344	0.0

Usando los resultado se verifica el equilibrio del disco

$$EM = \pi R (1.344 - 1.324) = 0.02f$$

Con el patrón de la Fig<sup>25</sup>, se obtiene que:

$$EX = 0.7 \pi f$$

$$EY = 0.3 \pi f$$

Si el modelo es del mismo tamaño que el de la foto, y el material del modelo es poliuretano con un valor de  $f = 0.062 \text{ Kg/cm-franja}$  entonces los errores resultantes son:

$$EX = 0.7 \pi f = 0.14 \text{ kg}$$

$$EY = -0.3 \pi f = 0.06 \text{ kg}$$

$$EM = 0.02 \pi f = 0.02 \text{ kg-cm (siendo } D = 11.0 \text{ cm)}$$

De acuerdo con este ejemplo se ve que el uso del coeficiente de influencia (De Hertz) para definir las cargas normales y tangenciales en el punto de contacto es válido, ya que su exactitud se encuentra de límites ingenierilmente aceptables.

Tabla 4 Valores de coeficientes de influencia k

$\mu$	$\alpha$	$k$	$\mu$	$\alpha$	$k$	$\mu$	$\alpha$	$k$
0.0000	0.0000	0.0000	0.1500	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.1000
0.0000	0.1745	0.1745	0.1500	0.1745	0.1426	0.2000	0.1745	0.2068
0.0000	0.3491	0.3491	0.1500	0.3491	0.2445	0.3000	0.3491	0.3040
0.0000	0.5236	0.5236	0.1500	0.5236	0.3240	0.3000	0.5236	0.3810
0.0000	0.6981	0.6981	0.1500	0.6981	0.3751	0.3000	0.6981	0.4161
0.0000	0.8727	0.8727	0.1500	0.8727	0.3971	0.3000	0.8727	0.4175
0.0000	1.0472	1.0472	0.1500	1.0472	0.4009	0.3000	1.0472	0.4024
0.0000	1.2217	1.2217	0.1500	1.2217	0.4004	0.3000	1.2217	0.3863
0.0000	1.3962	1.3962	0.1500	1.3962	0.4104	0.3000	1.3962	0.3769
0.0000	1.5707	1.5707	0.1500	1.5707	0.4103	0.3000	1.5707	0.3721
0.0000	1.7452	1.7452	0.1500	1.7452	0.4044	0.3000	1.7452	0.3630
0.0000	1.9197	1.9197	0.1500	1.9197	0.3994	0.3000	1.9197	0.3537
0.0000	2.0942	2.0942	0.1500	2.0942	0.3866	0.3000	2.0942	0.3445
0.0000	2.2687	2.2687	0.1500	2.2687	0.3184	0.3000	2.2687	0.3317
0.0000	2.4432	2.4432	0.1500	2.4432	0.2999	0.3000	2.4432	0.3195
0.0000	2.6177	2.6177	0.1500	2.6177	0.2199	0.3000	2.6177	0.1754
0.0000	2.7922	2.7922	0.1500	2.7922	0.1709	0.3000	2.7922	0.1624
0.0000	2.9667	2.9667	0.1500	2.9667	0.1255	0.3000	2.9667	0.1798
0.0000	3.1412	3.1412	0.1500	3.1412	0.0804	0.3000	3.1412	0.1688
0.0000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.1072	0.2500	0.0000	0.1874
0.0000	0.1745	0.1745	0.2000	0.1745	0.1626	0.2500	0.1745	0.2307
0.0000	0.3491	0.3491	0.2000	0.3491	0.2053	0.2500	0.3491	0.2554
0.0000	0.5236	0.5236	0.2000	0.5236	0.2404	0.2500	0.5236	0.4001
0.0000	0.6981	0.6981	0.2000	0.6981	0.2679	0.2500	0.6981	0.4296
0.0000	0.8727	0.8727	0.2000	0.8727	0.2803	0.2500	0.8727	0.4526
0.0000	1.0472	1.0472	0.2000	1.0472	0.4059	0.2500	1.0472	0.3980
0.0000	1.2217	1.2217	0.2000	1.2217	0.4005	0.2500	1.2217	0.3787
0.0000	1.3962	1.3962	0.2000	1.3962	0.4002	0.2500	1.3962	0.3591
0.0000	1.5707	1.5707	0.2000	1.5707	0.3967	0.2500	1.5707	0.3422
0.0000	1.7452	1.7452	0.2000	1.7452	0.3940	0.2500	1.7452	0.3282
0.0000	1.9197	1.9197	0.2000	1.9197	0.3753	0.2500	1.9197	0.3150
0.0000	2.0942	2.0942	0.2000	2.0942	0.3463	0.2500	2.0942	0.2707
0.0000	2.2687	2.2687	0.2000	2.2687	0.2851	0.2500	2.2687	0.2116
0.0000	2.4432	2.4432	0.2000	2.4432	0.2401	0.2500	2.4432	0.1708
0.0000	2.6177	2.6177	0.2000	2.6177	0.2042	0.2500	2.6177	0.1432
0.0000	2.7922	2.7922	0.2000	2.7922	0.1730	0.2500	2.7922	0.1195
0.0000	2.9667	2.9667	0.2000	2.9667	0.1386	0.2500	2.9667	0.2033
0.0000	3.1412	3.1412	0.2000	3.1412	0.1072	0.2500	3.1412	0.1074
0.0000	0.0000	0.0000	0.2500	0.0000	0.1340	0.4000	0.0000	0.2144
0.0000	0.1745	0.1745	0.2500	0.1745	0.1897	0.4000	0.1745	0.2645
0.0000	0.3491	0.3491	0.2500	0.3491	0.2382	0.4000	0.3491	0.3078
0.0000	0.5236	0.5236	0.2500	0.5236	0.2821	0.4000	0.5236	0.4192
0.0000	0.6981	0.6981	0.2500	0.6981	0.3221	0.4000	0.6981	0.4429
0.0000	0.8727	0.8727	0.2500	0.8727	0.4032	0.4000	0.8727	0.4260
0.0000	1.0472	1.0472	0.2500	1.0472	0.4114	0.4000	1.0472	0.3918
0.0000	1.2217	1.2217	0.2500	1.2217	0.4050	0.4000	1.2217	0.3630
0.0000	1.3962	1.3962	0.2500	1.3962	0.3957	0.4000	1.3962	0.3372
0.0000	1.5707	1.5707	0.2500	1.5707	0.3911	0.4000	1.5707	0.3277
0.0000	1.7452	1.7452	0.2500	1.7452	0.3831	0.4000	1.7452	0.3170
0.0000	1.9197	1.9197	0.2500	1.9197	0.3665	0.4000	1.9197	0.2938
0.0000	2.0942	2.0942	0.2500	2.0942	0.3517	0.4000	2.0942	0.2473
0.0000	2.2687	2.2687	0.2500	2.2687	0.2771	0.4000	2.2687	0.1840
0.0000	2.4432	2.4432	0.2500	2.4432	0.2281	0.4000	2.4432	0.1340
0.0000	2.6177	2.6177	0.2500	2.6177	0.1894	0.4000	2.6177	0.1528
0.0000	2.7922	2.7922	0.2500	2.7922	0.1499	0.4000	2.7922	0.2047
0.0000	2.9667	2.9667	0.2500	2.9667	0.1197	0.4000	2.9667	0.2248
0.0000	3.1412	3.1412	0.2500	3.1412	0.0940	0.4000	3.1412	0.2144

## 6. COEFICIENTE DE INFLUENCIA DEL ARILLO

Para un arillo cargado diametralmente en el borde exterior, los puntos que quedan en la circunferencia interior solo tienen los esfuerzos tangenciales y, por lo tanto, el plano tangencial del borde interior es un plano principal. En este caso es posible encontrar el coeficiente de influencia para los puntos de borde interior.

Se considera un arillo con espesor unitario bajo la carga diametral  $F$  (Fig 26) tomando  $(r, \theta)$  como las coordenadas polares, y  $\phi(r, \theta)$ , la función de esfuerzos en el problema de esfuerzos planos, los esfuerzos se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{6-1}$$

Para encontrar la solución se expresan las condiciones en frontera como sigue:



$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) && \text{para } r=r_0 \\ \sigma_r &= 0 && \text{para } r=r_i \\ \tau_{r\theta} &= 0 && \text{para } r=r_0, r_i \end{aligned} \quad (6-2)$$

De acuerdo con la teoría de series de Fourier, las constantes son:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_r d\theta \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_r \cos(n\theta) d\theta \end{aligned} \quad (6-3)$$

Bajo la aplicación de carga concentrada diametral, se debe satisfacer

$$\begin{aligned} r_0 \int_{-0.5\pi}^{\theta} \sigma_r d\theta &= 0 && -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta \\ r_0 \int_{-0.5\pi}^{\theta} \sigma_r d\theta &= F && 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (6-4)$$

Si se elige la función de esfuerzos

$$\begin{aligned} \phi &= r_0^2 \left[ A_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + B_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \frac{n\pi}{2} + r_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[ A_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+2} + B_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right. \\ &\quad \left. + C_n \left(\frac{r_i}{r}\right)^n + D_n \left(\frac{r_i}{r}\right)^{n-2} \right] n a_n \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (6-5)$$

y se sustituye la ec (6-5) en las ecs (6-1), utilizando las condiciones (6-2) - (6-4) se pueden expresar las constantes de la ec (6-5) como sigue:

$$A_0 = \frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$B_0 = -\frac{\rho^2}{1-\rho^2}$$

$$A_n = \frac{1}{2R_n} \left( \frac{1-\rho^{2n}}{n} - \frac{1-\rho^{2n-2}}{n+1} \right)$$

$$C_n = \frac{\rho^n}{2R_n} \left( -\frac{1-\rho^{2n}}{n} + \frac{1-\rho^{2n-2}}{n+1} \rho^2 \right) \quad (6-6)$$

$$D_n = \frac{\rho^n}{2R_n} \left( -\frac{1-\rho^{2n}}{n} \rho^2 + \frac{1-\rho^{2n+2}}{n-1} \right)$$

donde

$$R_n = (1-\rho^{2n})^2 - n^2 \rho^{2n-2} (1-\rho^2)^2$$

$$\rho = \frac{r_i}{r_0}$$

Lo más interesante para nuestro problema es el esfuerzo  $\sigma_0$ . Con las ecuaciones (6-6), (6-5), (6-1) se obtiene

$$\sigma_0 = \frac{Fk}{\pi r_0} \quad (6-7)$$

donde

$$k = \frac{2}{1 - \rho^2} + 2\rho^{-2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (P_n \rho^n + Q_n) \cos(n\theta)$$

$$P_n = n(n+1)(n+2)\rho^2 A_n + n^2(n-1) B_n \quad (6-8)$$

$$Q_n = n^2(n+1) C_n + n(n-1)(n-2) D_n$$

Con este resultado, es obvio que  $k$  depende de la localización del punto en el borde interior y la relación  $\rho$  del arillo. Aquí,  $k$  es coeficiente de influencia que está demostrado en la tabla 5.

Si se utiliza la teoría de fotoelasticidad, para el problema del arillo, también obtenemos una fórmula general:

$$[k] \{F\} = 2\pi r_o f \{n\} \quad (6-9)$$

donde  $[k]$  es la matriz de coeficientes de influencia;  $f$  es valor de material del modelo;  $\{n\}$  es vector de valor de orden de franjas isocromáticas en el borde interior de arillo. Fig 27. Utilizando la ec (6-9) se puede encontrar la solución de cargas  $\{F\}$ .

En la práctica los puntos de contacto no están siempre distribuidos en los extremos de un diámetro, por ejemplo, si solo tenemos tres puntos de contacto. En este caso, se puede usar el método de superposición, como se muestra en la Fig 28. El caso A se obtiene por la diferencia de los casos B y C. En un punto  $j$  el coeficiente tiene la relación

$$k_{ji}^A(\theta) = k_{ji}^B(\theta) - k_{ji}^C(\theta) \quad (6-10)$$

Sin embargo,

$$k_{ji}^C(\theta) = k_{ji}^A(\theta + \pi)$$

por lo tanto

$$k_{ji}^B(\theta) = k_{ji}^A(\theta) + k_{ji}^A(\theta + \pi) \quad (6-11)$$

Considerando la ec (6-8) tenemos

$$k_{ji}^A(\theta) = k_{ji}^A(\theta + \pi) \quad (6-12)$$

Entonces

$$k_{ji}^A(\theta) = \frac{1}{2} k_{ji}^B \quad (6-13)$$

Esta relación significa que para calcular el caso A se puede usar el coeficiente de influencia del caso B: para  $\frac{1}{2} k_{ji}^B$ . Solo se calcula un punto  $i$  que quede en la línea de la fuerza  $j$  aplicada y el orden de franjas isocromáticas  $\{n\}_A$  correspondiente los puntos interiores de cada punto de contacto.

Cuando existen fuerzas tangenciales en los puntos de contacto, el problema parece ser muy complicado como para lograr la solución exacta. Teóricamente el camino hacia la solución de este problema es encontrar la solución para un arillo cargado por dos cargas a lo largo de cualquier cuerda. Fig 29.

Ejemplo. Se usa un arillo con diámetro interno  $D_i = 10.16\text{cm}$  y diámetro externo  $D_o = 16.96\text{cm}$ . Material del modelo  $f = 7.82\text{kg/cm-franja}$ . Cargado en tres puntos de contacto que se muestra en la Fig 30 y la Fig 31.

Considerando el problema como simétrico, es necesario calcular solo las cargas  $P_1, P_2$ . Los coeficientes de influencia son  $(D_i/D_o = 0.6)$

$$k_{11} = 23.4375 \quad k_{12} = 3.2766 \quad k_{21} = k_{12} \quad k_{22} = 23.4375$$

$$(n) = [3.7, 2.5]^T$$

$$\begin{bmatrix} 23.4375 & 3.2766 \\ 3.2766 & 23.4375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \pi D_o f \begin{Bmatrix} 3.7 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \pi D_o f \begin{Bmatrix} 0.1458 \\ 0.08628 \end{Bmatrix}$$

6

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \pi \times 16.96 \times 8.2 \begin{Bmatrix} 0.1458 \\ 0.08628 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 63.70 \\ 37.696 \end{Bmatrix} \text{ Kg}$$

En la prueba  $P = 63.76 \text{ Kg} = P_1$

Tabla 5 Los coeficientes de influencia para arillo

$\rho$	$\alpha$	$K$
0.4000	0.2000	+10.7710
0.4000	0.2475	+10.5712
0.4000	0.2745	+7.3773
0.4000	0.2814	+7.0090
0.4000	0.2891	+7.6340
0.4000	0.2954	+7.0730
0.4000	0.2956	+7.1951
0.4000	0.2937	+7.1170
0.4000	0.2901	0.0970
0.4000	0.2854	0.5308
0.4000	0.2727	5.5241
0.4000	0.2599	9.1293
0.4000	0.2474	1.4875
0.4000	1.1347	10.7784
0.4000	1.1217	12.0681
0.4000	1.1090	12.6077
0.4000	1.1033	13.0175
0.4000	1.1035	13.0175
0.4000	1.1008	13.0175
0.4000	1.1000	13.0175
0.5000	0.0970	+15.1111
0.5000	0.0975	+14.8410
0.5000	0.1745	+14.0590
0.5000	0.2514	+12.7294
0.5000	0.2891	+10.9519
0.5000	0.2956	+9.7307
0.5000	0.2937	+8.2223
0.5000	0.2901	+7.4134
0.5000	0.2854	+6.4205
0.5000	0.2727	2.8655
0.5000	0.2599	8.4771
0.5000	0.2474	10.4400
0.5000	1.1347	12.1520
0.5000	1.1217	13.7091
0.5000	1.1090	15.6758
0.5000	1.1033	15.3051
0.5000	1.1035	15.6842
0.5000	1.1008	15.3749
0.5000	1.1000	15.9353
0.6000	0.0970	+23.4375
0.6000	0.0975	+23.0340
0.6000	0.1745	+21.8356
0.6000	0.2514	+19.8788
0.6000	0.2891	+17.2231
0.6000	0.2956	+13.7491
0.6000	0.2937	+10.1564
0.6000	0.2901	+5.9501
0.6000	0.2854	+1.4877
0.6000	0.2727	3.1248
0.6000	0.2599	11.7950
0.6000	0.2474	14.5131
0.6000	1.1347	16.9569
0.6000	1.1217	17.2535
0.6000	1.1090	22.5207
0.6000	1.1033	23.5658
0.6000	1.1035	23.8846
0.6000	1.1008	24.1307
0.6000	1.1000	24.2035
0.7000	0.0970	+41.9070
0.7000	0.0975	+41.2107
0.7000	0.1745	+37.1432
0.7000	0.2514	+35.7672
0.7000	0.2891	+31.1052
0.7000	0.2956	+27.3366
0.7000	0.2937	+19.9929
0.7000	0.2901	+11.7530
0.7000	0.2854	+4.0368
0.7000	0.2727	3.1212
0.7000	0.2599	14.7195
0.7000	0.2474	23.2952
0.7000	1.1347	27.4708
0.7000	1.1217	31.4766
0.7000	1.1090	37.3859
0.7000	1.1033	39.8816
0.7000	1.1035	39.7417
0.7000	1.1008	40.1570
0.7000	1.1000	40.2350

## 7. CONCLUSION

Se ha presentado un método híbrido para determinar la intensidad y dirección de múltiples cargas que actúan sobre el borde de un cuerpo plano y en su plano. El método se basa en el principio de superposición del orden de franjas isocromáticas y utiliza coeficientes de influencia para aplicaciones en dos tipos de problemas: el problema de Flamant y el problema de borde libre en que los planos sobre los cuales actúan los esfuerzos de corte máximos que se superponen, tengan aproximadamente la misma orientación.

El método presentado es matemático y experimental y requiere que los valores fotoelásticos sean obtenidos con suficiente precisión.

La aplicación del método a varios casos muestra que es suficientemente preciso para la solución de gran número de problemas.

#### RECONOCIMIENTO

Esta investigación se llevo a cabo en el laboratorio del Instituto de Ingeniería de la UNAM, México, Bajo la guía de los profesores A. J. Durelli, R.J. Marsal, el director de la tesis L. Ferrer. Sin el apoyo y guía no habría sido posible terminar este trabajo. Las conversaciones con el Ing. J. Alberro fueron muy valiosas para la mejor comprensión del problema. Las fotografías fueron cooperados por M. Mendoza, C. Hernández y E. Rojas.

El autor desea expresar su agradecimiento



## REFERENCIAS

1. Marsal R.J. Contact Forces in Soils and Rockfill Materials. Proc. II Panamerican Conf. Soil Mechanics. Found Eng. Vol 2, Pags 67-98, 1963.
2. Marsal R.J. Mechanical Properties of Rockfill Embankment Dam Engrg. Casagrande Volume, John Wiley and Sons, Pags. 109-200, 1973.
3. Alberro J. Estructura Discontinua y Propiedades Mecánicas de los Suelos Granulares. Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM, Proyecto 811.
4. Mendoza M. Measurement of Contact Forces in Photoelastic Models, Proc Panam. Conf. Soil Mechanics and Found. Eng. Vol I, Buenos Aires, Pags 1-10, 1975
5. Thurston, C.W. y Dersiewicz H. Analysis of a Compression Test of a Model of a Granular Medium. Jour. App. Mech. Jun. 1959, Pags 251-258
6. Timoshenko S. Theory of Elasticity. Mc Graw Hill, Primera Ed. 1934, p 106. El Problema fue resuelto originalmente por J.M. Michell. Proc London Math, Soc. Vol. 32. p 44, 1900 y Vol. 34, p. 134, 1901.
7. Ver por ejemplo: Durelli A. J. and Riley W.F. Introduction to Photo-mechanics, Prentice Hall, p 54, 1965
8. Ponitsky H. Schenectady, N. Y. Stresses and Deflectivas of Cylindrical Bodies in Contact with Application to Contact of gears and Locomotive wheels J. of Applied Mechanics June 1950 pp 191-203
9. Pipperger E.A., and Davids N., Critical Stresses in a Circular Ring Analysis of Stresses. Proc. Am. Soc. of Civil Enginners 1946 February pp 159-168

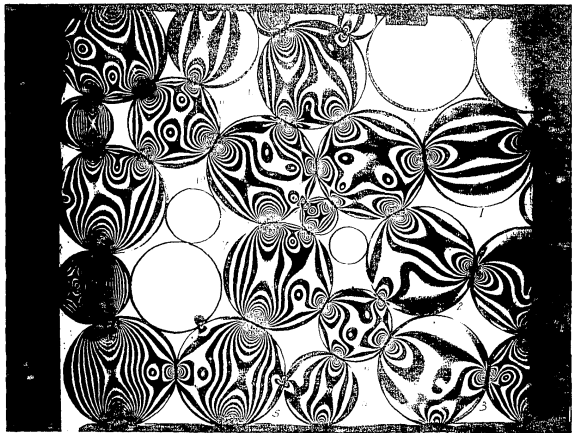


Fig.1 Isogramáticas en un sistema de discos

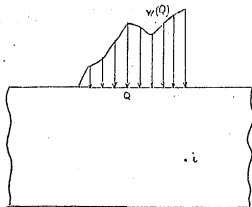


Fig.2 CUERPO PLANO SOMETIDO A CARGA-CUALQUIERA EN EL BORDE.  $i$  ES UN PUNTO GENERICO EN EL CUAL LA ISOCROMATICA VALE  $n_i$

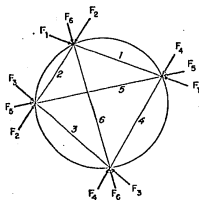


Fig 3. Disco cargado en el borde con cuatro fuerzas concentradas. Las fuerzas se descomponen en seis pares en la dirección de cuerdas

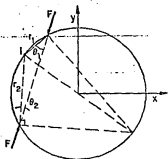
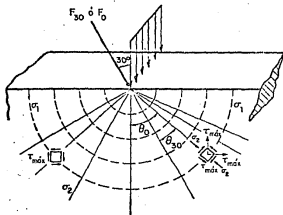


Fig 4. Coordenadas polares de un punto genérico en el borde del disco cargado en las extremidades de una cuerda



(ángulo  $\theta$  a contar a partir de la dirección de la fuerza)

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} = 0$$

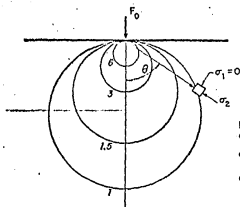
$$\sigma_r = \sigma_{\theta} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{F}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

Isostáticas:  
(para carga  $F_0$  ó  $F_{30}$ )

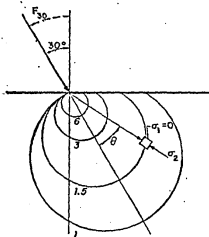
Fig 5. Placa semi-infinita sometida a una fuerza concentrada en el borde. Las isostáticas son radios y circunferencias concéntricas para cualquier dirección de la carga



Isocromáticas e isóbaras  
 $\sigma_r$  (para carga  $F_0$ )

$$\sigma_\theta = \sigma_1 = 0$$

$$\sigma_r = \sigma_2 = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

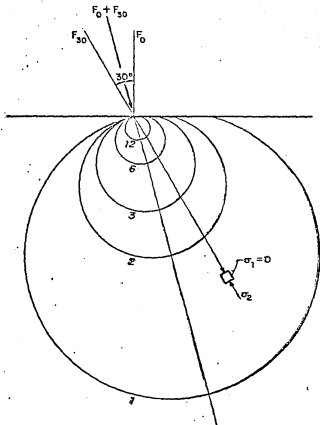


Isocromáticas e isóbaras  
 $\sigma_r$  (para carga  $F_{30}$ )

$$\sigma_\theta = \sigma_1 = 0$$

$$\sigma_r = \sigma_2 = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

Fig 6. Placa semi-infinita sometida a una fuerza concentrada en el borde : a) perpendicular al borde ; b) haciendo 30° con la normal al borde. Isocromáticas e isóbaras  $\sigma_r$  son las mismas en los dos casos referidos a la dirección de la carga como eje



Isocromáticas e isóbaras  $\sigma_r$   
(sumas de cargas  $F_0$  y  $F_{30}$ )

Fig 7. Placa semi-infinita sometida a una fuerza resultante concentrada en el borde. El esfuerzo  $\sigma_2$  actúa sobre el mismo plano para las dos componentes que pueden sumarse algebraicamente

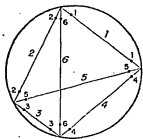


Fig 8. Cada cuerda esta sometida a dos fuerzas opuestas aplicadas en sus extremidades, en la dirección de la cuerda. El valor de isocromáticas debe ser determinado en tantos pares de puntos como  $C$  cuerdas

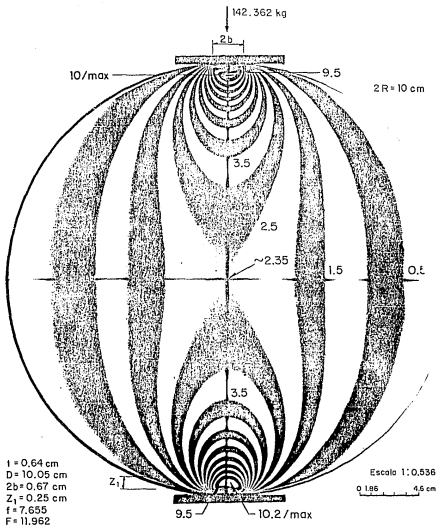


Fig 9

Características elásticas de un disco circular sometido a carga diametral por dos placas planas, rígidas. (Isocromáticas de campo claro)



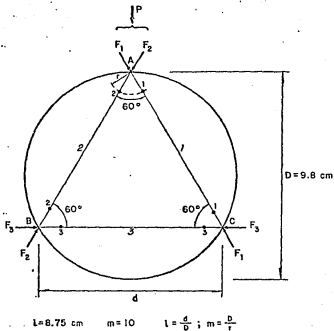


Fig 10. Disco cargado en tres puntos equidistantes del borde

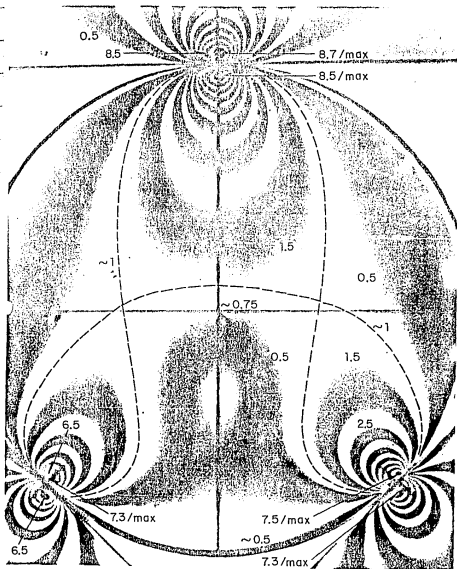


Fig. 11. Disco sometido a una carga vertical y dos inclinadas a 30°. Isocromáticas

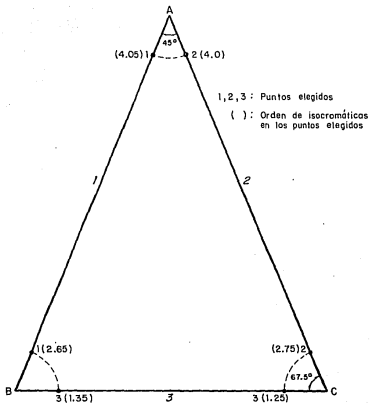
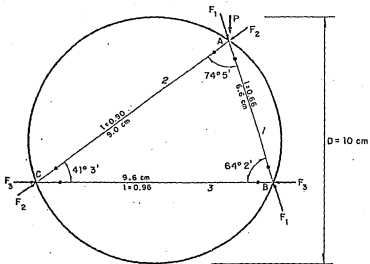


Fig 12. Esquema para determinar las fuerzas aplicadas al disco con tres puntos de contacto (con distribución de triángulo isósceles)



$$l = \frac{d}{\theta} \quad m = 10$$

Fig 13. Disco cargado en tres puntos arbitrarios del borde

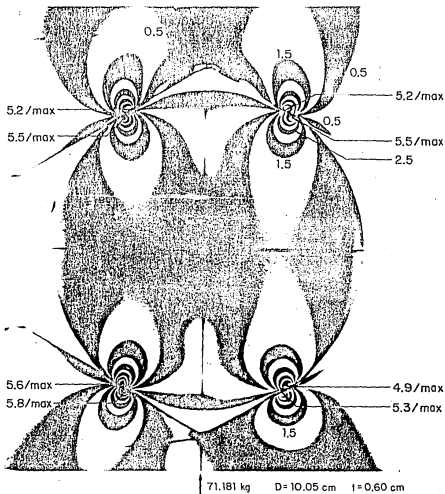


Fig 14. Isocromáticas en un disco cargado simétricamente en 4 puntos

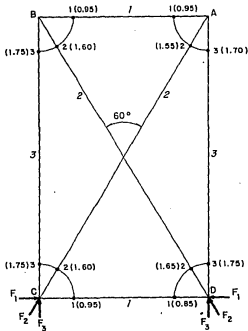


Fig 15. Esquema de cálculo para determinar las cuatro cargas aplicadas al borde de un disco a  $30^\circ$  de la vertical

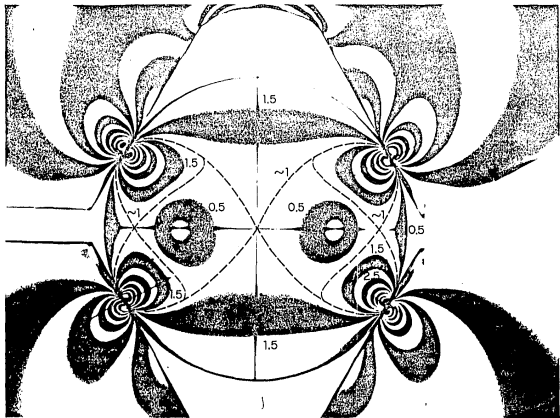
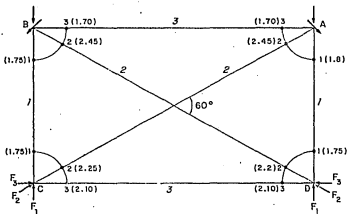


Fig 16. Isocro' tica' un disco sometido a + cargas



1, 2, 3 : Puntos elegidos

( ) : Orden de isocromáticas en los puntos elegidos

Fig. 17 Esquema para determinar las cuatro cargas aplicados al borde de un disco



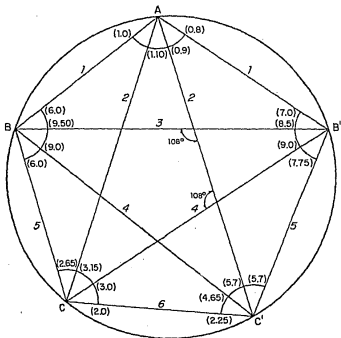


Fig. 18

Esquema de cálculo para determinar las cargas aplicadas a un disco con 5 puntos de contacto



Fig.19 Disco con cinco puntos de contacto

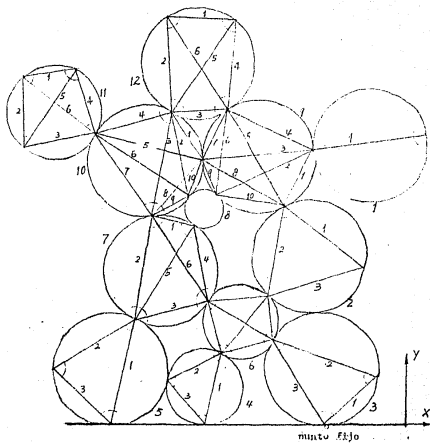


Fig.20 Esquema de un conjunto de discos(según fig.1)

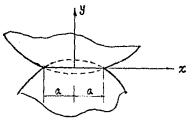


Fig. 21

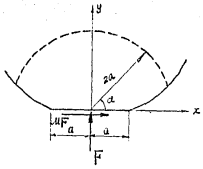


Fig. 22

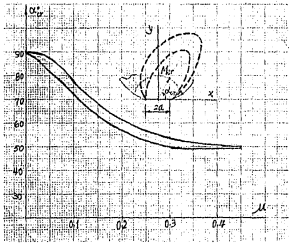


Fig. 23 curva de  $\mu-\alpha$



Fig.24 esquema de un ejemplo usando ecuaciones de Hertz

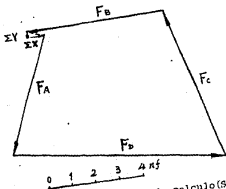
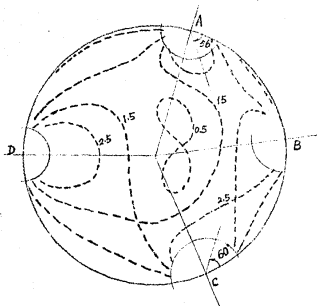


Fig.25 Resultados de calculo (Según fig.24)

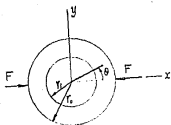


Fig. 26

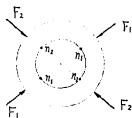


Fig. 27

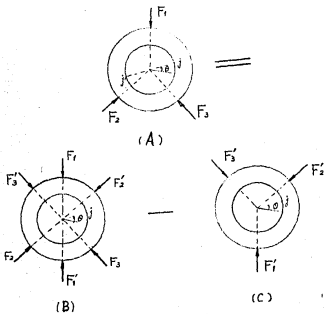


Fig. 28  $(A) = (B) - (C)$ .

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

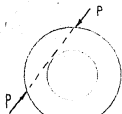


Fig.29

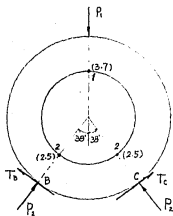


Fig.31





Fig.30 Un arillo con tres puntos de contacto