

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**Modelado Bidimensional de la Distribución
de Esfuerzos en Estructuras Geológicas por
medio del Método del Elemento Finito.**

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :

RICARDO OCTAVIO VAZQUEZ ROMERO



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE INGENIERIA

Dirección

60-I-135

Señor RICARDO OCTAVIO VAZQUEZ ROMERO.

P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Jaime Urrutia Fucugauchi, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como -- tesis de su examen profesional de ingeniero geofísico:

"MODELADO BIDIMENSIONAL DE LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN ESTRUCTURAS GEOLOGICAS POR MEDIO DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO"

- I INTRODUCCION AL METODO DE ELEMENTOS FINITOS, PRINCIPIOS GENERALES Y FORMULACION.
- II METODOS DE CALCULO POR COMPUTADORA.
- III APLICACIONES EN LA RESOLUCION DE UN PROBLEMA.
- IV CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en -- lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se -- deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, D.F., a 3 de julio de 1987.

EL DIRECTOR



DANIEL RESENDIZ NUÑEZ

I N D I C E

PROLOGO

i

I

INTRODUCCION AL METODO DE ELEMENTOS FINITOS, PRINCIPIOS GENERALES Y FORMULACION

I.1	Introducción	1
I.2	Que son los elementos finitos	3
I.3	Breve Reseña Histórica	8
I.4	Principio de los trabajos virtuales	9
I.5	Ensamble de las ecuaciones elementales	20
I.6	Funciones de forma o Interpolación	24

II

METODOS DE CALCULO POR COMPUTADORA

II.1	Introducción	26
II.2	Formulación del problema	26
II.3	Aspectos generales del Algoritmo	45
II.4	Especificación de Variables	51

III

APLICACIONES EN LA RESOLUCION DE UN PROBLEMA

III.1	Introducción	53
III.2	Método de Crossadit	53

III.3	Aplicación del Método del Elemento Finito a Problemas Geoestructurales.	57
III.4	Aplicación del Método del Elemento Finito a Problemas de distribución del potencial eléctrico en el Subsuelo.	66
III.5	Aplicación del Método del Elemento Finito a Problemas de Flujo en Medios Porosos.	77

I V

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

<i>Conclusiones y Sugerencias</i>	105
-----------------------------------	-----

APENDICE A :	<i>Programa para resolver la distribución de esfuerzos y deformación por medio del Elemento Finito.</i>	109
APENDICE B :	<i>Estabilidad y Convergencia del Método del Elemento Finito.</i>	130
APENDICE C :	<i>Funciones de Forma, Algunas Familias Generales de Continuidad C.</i>	149

APENDICE D :	<i>Modelación Matemática de Sistemas, Introducción al Cálculo Variacional</i>	160
APENDICE E :	<i>Interpolación e Integración Numéricas.</i>	168
APENDICE F :	<i>Introducción a la Teoría de la Elasticidad Lineal</i>	180
APENDICE G :	<i>Introducción a la Teoría Electromagnética</i>	195
APENDICE H :	<i>Flujo de Filtración</i>	201
REFERENCIAS CITADAS :		243.
CONSULTA RECOMENDADA		245

PROLOGO.

El método del elemento finito es una de las herramientas numéricas de mayor trascendencia en la actualidad para el ingeniero. Trata sobre la transformación de una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales en el dominio continuo a una ecuación o sistema de ecuaciones algebraicas que resultan más sencillas de resolver por algún método numérico. En este trabajo se trata de cubrir en la forma más amplia posible los aspectos más importantes del método sin descuidar su aplicación práctica en la resolución de un problema concreto.

El objetivo del presente trabajo no ha sido, elaborar un tratado más, que se sume al número cada día creciente de los excelentes que se han publicado y se publican en el mundo entero, ni tampoco la presentación de novedades en el campo siempre en desarrollo del método del elemento finito. Sólo la lectura constante de publicaciones periódicas especializadas y el estudio de las memorias que sobre reuniones y congresos nacionales e internacionales van difundiendo, constituye el único medio de alcance de los adelantos diarios de la ciencia. El propósito es más modesto y, quizá, más urgente. Es notorio que, en los últimos años, tanto los criterios de la Facultad de Ingeniería de la UNAM a través de sus diferentes carreras como las de otras institucio

nes hermanas en el país, han coincidido en dar cada vez mayor auge a la difusión del método del elemento finito entre estudiantes e ingenieros. La División de Estudios de Postgrado ha creado al efecto dos períodos anuales de 6 meses de duración en los que la especialidad de estructuras la difunde en forma intensiva.

El propósito de esta obra queda así definido: se ha querido ofrecer el material introductorio que oriente al estudiante de ingeniería geofísica en el recorrido de un camino de enorme desarrollo en el procesamiento de sus datos de campo. Partiendo de lo anterior, este trabajo que presento como tesis profesional, tiene el objeto de mostrar de manera adecuada la enorme necesidad de integrar en nuestros programas de trabajo de la carrera esta herramienta matemática que sirve para resolver en general cualquier tipo de ecuación diferencial que se le asigne ciertas condiciones de frontera.

El tratamiento de los dos primeros capítulos es completamente matemático, de tal forma que la teoría que lleva involucrada se formaliza. Los dos últimos capítulos justifican una aplicación del método en el campo de la distribución de los esfuerzos en el interior de una estructura geológica modelada desde el punto de vista de la mecánica lineal.

La ecuación diferencial que se resuelve constituye la ley generalizada de Hooke y constituye un mero ejemplo de la enorme utilidad que el método tiene en la ingeniería geofísica. Puede mostrarse lo mismo resolviendo la ecuación de Laplace o de Gauss y encontrarse la distribución de los potenciales existentes en un medio continuo determinado o bien la ecuación de Darcy y calcular problemas de flujo en medios porosos, todo ello de sumo interés en el campo de la ingeniería geofísica.

El trabajo se divide en cuatro capítulos a saber: el primero de ellos trata de formalizar los principios generales y formular la teoría que será de gran ayuda para entender como se aplica el método del elemento finito, éste último es materia del tercer capítulo en el cual se puede observar que al ejemplificar las aplicaciones del método del elemento finito, se resuelven problemas bidimensionales pensando que resulta más sencillo y práctico para el diseño de un algoritmo que posteriormente se anexa al final del trabajo.

El segundo capítulo detalla todo cuanto es necesario saber para poner a funcionar el programa; datos de entrada y salida, espacio necesario de memoria para cada corrida, nombre y funciones de cada subrutina, diagrama de flujo y limitaciones del programa entre otros. El cuarto capítulo establece las conclusiones a las que se llegaron y da algunas

sugerencias para el desarrollo de futuros trabajos.

Me siento en deuda con todos y cada uno de los profesores que han dedicado su tiempo y capacidad en leer y criticar las secciones que pertenecen al campo de su especialidad.

Al *Dr. Jaime Urrutia F.*, la enorme cooperación desinteresada que me brindo en la dirección de este trabajo. Al *Ing. Mario Benhumea L.*, por su amabilidad y acertada orientación. También aprecio mucho la ayuda del *M.I. Ramón Cervantes B.*, por todo el apoyo que me brindó para documentarme en lo referente al método y al *Ing. Hilarión Simón Cruz Galindo* por facilitarme el material que tiene elaborado sobre el método del elemento finito así como por su gran apoyo.

Debe extender también mi agradecimiento al *Ing. Alejandro Arroyo C.*, quién dispuso siempre de tiempo para señalarme lo necesario para registrar este trabajo.

Finalmente me siento en deuda también con el *Ing. Roboan León S.*, que es en la actualidad formador ya de varias generaciones de Ingeniería Geofísica en la U.N.A.M.

Manifiesto un profundo reconocimiento a la labor completamente desinteresada del *Sr. Mario Ortega Mainero* por su constante apoyo a lo largo de todo este trabajo. A la *Srita. Olga Aguilar Olvera* que se preocupó y ayudo con profunda dedicación a la redacción del manuscrito.

Por otra lado agradezco también al *Sr. René Cabrera* a cuya pluma se deben los dibujos de esta obra, así como también a la *Srita. Lupita* quien se encargó del mecanografiado del texto original

A todos ellos mi más sincero agradecimiento,

R.V.R.

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS, PRINCIPIOS GENERALES Y FORMULACIÓN

I.1.- INTRODUCCION :

Para iniciar este trabajo doy un resumen que permite centrar nuestra atención en los objetivos perseguidos. Primero que nada debo hacer la aclaración que el método del elemento finito se propone como herramienta numérica auxiliar en el procedimiento de datos geofísicos. En este contesto presento la solución (después de dar la fundamentación adecuada) a tres problemas de diferentes áreas de Ingeniería Geofísica.

La primera se refiere a un problema de geología es-tructural; su objetivo pretende modelar una distribución bidimensional de desplazamientos, esfuerzos y deformaciones ocurridas en el interior de una estructura geológica sometida a trabajos de ingeniería civil, aunque como el lector podra verlo, su aplicación no se limita a esto, pues es el mismo tratamiento cuando estas estructuras representan zonas de subducción o placas tectónicas y se analiza su riesgo sísmico.

El segundo problema se refiere al cálculo de la distribución de los potenciales eléctricos desarrollados en una zona de diferentes resistividades debida al flujo de una in-tensidad eléctrica de inyección. En esta parte lo que se pretende ofrecer es la posibilidad de obtener la distribución

del potencial eléctrico referido de un modelo teórico de conductividades por medio del método del elemento finito, con esto se obtiene su curva de resistividades aparentes para hacer la comparación usual con la curva de resistividades obtenida en campos y repetir lo mismo con varios modelos hasta lograr un ajuste conveniente.

Por último el tercer problema que se presenta para - apoyar la utilidad de esta técnica en geofísica resuelve el - flujo a través de medios porosos que resulta obvia su utili - zación.

1.2 Que son los elementos finitos.

En términos generales el método del elemento finito (MEF), es una herramienta numérica para obtener una aproximación a la solución de un problema que requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, provisto de ciertas condiciones que definen el problema y, de ahí, su solución.

El más sencillo de los casos se presenta cuando la ecuación diferencial es ordinaria y lineal, pero puede contener derivadas de orden arbitrario y condiciones de frontera dadas, que involucren combinaciones arbitrarias de la función buscada y sus derivadas.

Para el caso más sencillo la ecuación diferencial por resolver es de la forma (I.2.1).

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(i)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{I.2.1})$$

sujeta a las condiciones (I.2.2).

$$g_1(y_{10}, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}) = 0$$

$$g_2(y_{20}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}) = 0$$

(I.2.2)

$$g_m(y_{m0}, y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}) = 0$$

donde y_{ij} es el valor que adquiere la derivada de orden j de la función $y(x)$, en la i^a ecuación del conjunto (I.2.2).

El hecho de modelar mediante ecuaciones diferenciales se debe a que los sistemas físicos en cuestión poseen un dominio continuo. En contraposición un sistema que contenga

elementos discretos da lugar a modelos matemáticos provistos de ecuaciones algebraicas de la forma (I.2.3.).

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{I.2.3}$$

Que en general se constituyen por ecuaciones no lineales, pero con frecuencia los sistemas físicos analizados, presentan un comportamiento lineal, dando así lugar a modelos matemáticos -- constituidos por ecuaciones algebraicas lineales, esto es, de la forma (I.2.4).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{I.2.4}$$

Que en forma condensada nos queda :

(I.2.5)

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

donde :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Son una matriz de $n \times n$ y dos vectores de dimensión n , en este trabajo se tratará con sistemas lineales, por lo que se partirá de las expresiones de la forma (I.2.1) e (I.2.2) para llegar a los modelos lineales de la forma (I.2.4) e (I.2.5). El MEF es el que establece la relación que permite formular problemas asociados a sistemas continuos en forma discreta, esto es, como si se tratara de sistemas que dan lugar a modelos matemáticos provistos de ecuaciones algebraicas de la forma (I.2.3). Esto lo consigue mediante un proceso de discretización, que consiste en hacer depender la solución al problema original continuo de un conjunto discreto de valores.

En suma, el MEF permite llevar la solución de un problema que, en principio requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, a la forma de un problema algebraico, esto es, de un problema que requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

El interés por llevar un problema continuo a una forma algebraica, especialmente las lineales, de la forma (I.2.5), estriba en que estos sistemas están plenamente estudiados desde el siglo pasado. Más aún, con el advenimiento de las computadoras electrónicas, se han desarrollado métodos muy eficaces para resolver estos sistemas como veremos más adelante.

Esquemáticamente, la secuencia del método se puede resumir en los pasos siguientes :

- 1) Discretización del continuo en un número finito de elementos interconectados mediante puntos nodales. Esta división, en principio puramente geométrica ha de hacerla el analista con un cierto juicio "ingenieril" sobre la solución que espera obtener. Así por ejemplo en regiones donde los gradientes de las magnitudes a calcular sean altos será preciso disponer de un número de elementos suficientemente elevado como para permitir la caracterización correcta de esta variación.
- 2) Obtención de la ley de comportamiento de cada elemento. Quizá sea esto el problema crucial en la formulación del NEF y a su desarrollo se ha debido probablemente el amplio uso que el método disfruta en la actualidad. La obtención de estas leyes de comportamiento suele hacerse en la actualidad a partir de formulaciones que pueden dividirse en principios variacionales, métodos de residuos ponderados y en el principio de los trabajos virtuales. Se utilizará para este caso, el último.
- 3) Con la selección apropiada de los puntos nodales, la variable de la ecuación diferencial se aproxima mediante una combinación lineal de funciones de forma conocidas que dependen de las coordenadas de cada nodo y de los valores desconocidos de la variable evaluada en esos mismos puntos (ver ecuación I.4.11. a, b, c).
- 4) Obtención de las ecuaciones de comportamiento del sistema global en función de las ecuaciones parciales desarrolladas para cada elemento. Se trata de realizar lo que se conoce como "ensamble" (ver ecuación I.5.1).
- 5) Solución del sistema simultáneo de ecuaciones con las correspondientes condiciones de contorno. En general los sistemas que se obtienen constan de un número elevado de ecuaciones - que sin embargo suelen dar origen a matrices de rigidez simó

tricas dispersas y en banda que admiten una reducción del almacenamiento necesario y la adopción de métodos eficaces de solución, actualmente bien desarrollados.

- 6) Cálculo de variables asociadas a la solución obtenida en cualquier punto del medio. Por otra parte derivaremos en este trabajo a partir de la solución fundamental que son los desplazamientos a las deformaciones del medio para poder obtener así el tensor de esfuerzos mediante las relaciones que ofrece la cinemática de la deformación y las ecuaciones constitutivas del medio (ver ref. 1 y/o Apéndice F).

El objetivo de este trabajo consiste en discutir brevemente, los fundamentos del elemento finito y darle una aplicación en la ingeniería Geofísica aplicada a la Geotecnia. Se evalúa la distribución de esfuerzos en estructuras geológicas que van a soportar una obra de Ingeniería Civil, concretamente: en la prevención de estabilidad de talúdes y aflamamientos de zonas adyacentes al sitio de desplante.

Es necesario conocer las velocidades de las ondas elásticas longitudinales y transversales, obtenidas por refracción, para determinar los módulos elásticos del terreno, con las cuales y basados en una geometría convenientemente elegida, estamos en condiciones de utilizar el algoritmo incluido en este trabajo con los detalles de operación necesarios, para generar los valores de los campos de deformación, de desplazamiento y de esfuerzos del terreno, con y sin acumulación de cargas iniciales, que los ingenieros proyectistas necesitan para el diseño de su obra.

Hasta el momento el ingeniero geofísico en la C.F.E., sólo interpola en forma cualitativa la distribución de estos esfuerzos a partir de los módulos elásticos que obtienen de sus resultados sísmicos de refracción. El ingeniero civil

por su parte requiere de estos datos para elaborar el análisis numérico de esta distribución. El presente trabajo sintetiza por un lado el desarrollo de campo que nos corresponde y por otro el consecuente análisis cuantitativo que también es de nuestra competencia pues se trata de la evaluación de una propiedad física del terreno.

I.3 Breve Reseña Histórica.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff (ref. 1), publicado en 1941, y el segundo a Mchenry publicado en 1943 (ref. 2), en ambos trabajos se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidimensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de métodos numéricos (ref. 3), presenta los métodos de Hrenikoff y Mchenry. Sin embargo, el crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp (ref. 4), y no es, sino hasta 1960 con Clough (ref. 5), que nace por primera vez el nombre de "Elemento Finito", derivando básicamente las propiedades del elemento triangular y cuadrangular (ver Apén. C) y el hecho de que al mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva que conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elásticos lineales complejos, en los cuales una solución analítica no es posible.

El campo de desplazamiento en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual (ver pág. 12) y se identifica este proceso con el de minimizar la energía potencial total. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la mecánica de sólidos y posteriormente Zienkiewics -

(ref. 6) y Wilson (ref. 7), lo aplican en mecánica de fluidos y en problemas de análisis de conducción de calor. En la actualidad existen miles de artículos de investigación y de informes, así como varias notas para cursos, memorias de congresos, tesis y libros de texto. (ver pág. 245)

1.4 Principio de los Trabajos Virtuales.

Consideremos el campo de esfuerzos, σ_{ij} , en equilibrio, de un cuerpo sólido deformable solicitado por fuerzas de cuerpo x_i por unidad de masa y tensiones en su contorno \bar{T}_i . Sus ecuaciones de equilibrio son de la forma (I.4.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \tag{I.4.1}$$

Las tensiones internas T_i en la frontera serán iguales -- a las \bar{T}_i . De donde :

$$T_i - \bar{T}_i = 0 \tag{I.4.2}$$

Introduzcamos en este cuerpo un sistema arbitrario de pequeños desplazamientos virtuales δu_i , compatibles con las condiciones de frontera, es decir, y refiriéndonos al problema presentado en la fig. (I.4.1), $\delta u_i = 0$ en la porción S_1 del borde donde se especifiquen los desplazamientos.

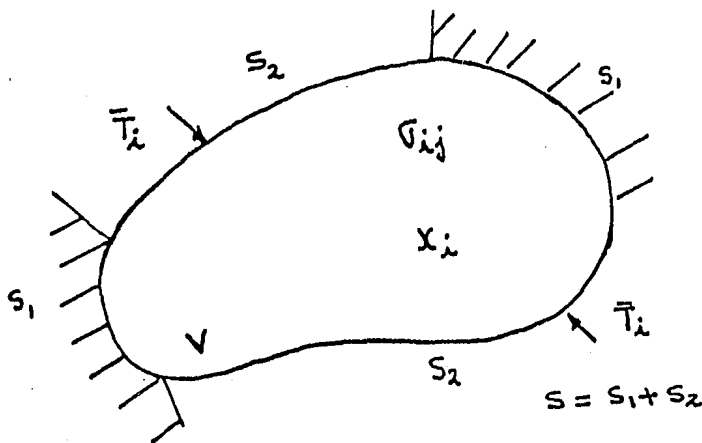


Fig. (I.4.1). Cuerpo sólido en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores y condiciones de sustentación en sus bordes S_1 .

Multipliquemos el conjunto de ecuaciones (I.4.1) e (I.4.2) por los desplazamientos virtuales δu_i e integremos en el volumen $V^{(1)}$.

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dv + \int_V X_i \delta u_i dv - \int_{S_2} (T_i - \bar{T}_i) \delta u_i ds = 0 \quad (I.4.3)$$

donde :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i = \frac{\partial (\sigma_{ij} \delta u_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \delta \frac{(\partial u_i)}{\partial x_j} \quad (I.4.4)$$

Debido a la propiedad de intercambialidad del operador parcial $(\frac{\partial}{\partial x})$ y variación (δ) .

Introduciendo (I.4.4) en (I.4.3) y haciendo uso del Teorema de la divergencia⁽²⁾ obtenemos.

(1) La conveniencia de utilizar formulaciones integrales radica en la posibilidad de descomponer estas integrales sobre un dominio en suma de integrales extendidas sobre subdominios (*elementos finitos*), que en conjunto constituyan el dominio total.

(2) $\int_V \text{div } \bar{A} dv = \int_S \bar{A} \cdot \underline{n} ds$ o bien $\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dv = \int_S A_i n_i ds$

$$\int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds - \int_V \sigma_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dv + \int_V X_i \delta u_i dv - \int_{S_2} (T_i - \bar{T}_i) \delta u_i ds = 0$$

(I.4.5)

La Integral sobre S de primer término de la ecuación anterior puede suponerse actuando sobre S₂ pues el sistema de desplazamientos virtuales elegido satisfacía δu_i = 0 en S₁. Por otra parte, en la frontera :

$$\sigma_{ij} n_j = T_j \quad (I.4.6)$$

Entonces la Ec. (I.4.5) nos queda :

$$-\int_V \sigma_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dv + \int_V X_i \delta u_i dv + \int_{S_2} \bar{T}_i \delta u_i ds = 0 \quad (I.4.7)$$

Es conveniente para los desarrollos posteriores utilizar una notación vectorial donde los tensores de esfuerzo y deformación se considerarán simétricos en un espacio carteciano de tres dimensiones con 6 componentes independientes únicamente. De esta forma :

$$\sigma^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}) = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$$

(I.4.8)

$$\underline{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$$

$$= (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

(I.4.9)

y la Ec. (I.4.7) nos queda :

$$\int \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv = \int \delta \underline{u}^T \underline{x} dv + \int \delta \underline{u}^T \underline{\bar{T}} ds \quad (I.4.10)$$

Que constituye la expresión matemática del principio de los trabajos virtuales, que puede enunciarse de la siguiente manera:

Si un campo de esfuerzos $\underline{\sigma}$ se encuentra en equilibrio bajo la acción de fuerzas de cuerpo y tensiones en el contorno $\underline{\bar{T}}$, el trabajo producido por las fuerzas internas como resultado de la aplicación de un campo virtual y compatible de desplazamientos $\delta \underline{u}$ (y por consiguiente de deformaciones $\delta \underline{\varepsilon}$) es igual al trabajo efectuado por las fuerzas externas bajo este mismo campo virtual de desplazamiento.

Discretización del principio de los trabajos virtuales.

Con el fin de obtener la solución aproximada podemos expresar los desplazamientos u_k en función de los parámetros $a_i^{(k)}$, de

la manera siguiente :

$$u_1 = N_1^{(1)}(x_1, x_2, x_3)a_1^{(1)} + N_2^{(1)}(x_1, x_2, x_3)a_2^{(1)} + \dots + N_n^{(1)}(x_1, x_2, x_3)a_n^{(1)}$$

$$u_2 = N_1^{(2)}(x_1, x_2, x_3)a_1^{(2)} + N_2^{(2)}(x_1, x_2, x_3)a_2^{(2)} + \dots + N_n^{(2)}(x_1, x_2, x_3)a_n^{(2)}$$

$$u_3 = N_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3)a_1^{(3)} + N_2^{(3)}(x_1, x_2, x_3)a_2^{(3)} + \dots + N_n^{(3)}(x_1, x_2, x_3)a_n^{(3)}$$

(I.4.11. a, b, c)

Esto es :

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (I.4.12)$$

donde :

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & 0 & 0 & N_2^{(1)} & 0 & 0 & N_3^{(1)} & 0 & 0 & \dots & N_n^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(2)} & 0 & 0 & N_2^{(2)} & 0 & 0 & N_3^{(2)} & 0 & \dots & 0 & N_n^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(3)} & 0 & 0 & N_2^{(3)} & 0 & 0 & N_3^{(3)} & \dots & 0 & 0 & N_n^{(3)} \end{bmatrix} \quad (I.4.13)$$

y

$$\underline{a}^T = (a_1^{(1)} \ a_1^{(2)} \ a_1^{(3)} \ a_2^{(1)} \ a_2^{(2)} \ a_2^{(3)} \ a_3^{(1)} \ a_3^{(2)} \ a_3^{(3)} \ \dots \ a_n^{(1)} \ a_n^{(2)} \ a_n^{(3)})$$

(I.4.14)

Es decir, la solución se desarrolla como combinación lineal - de unas ciertas funciones $N_i^{(k)}$ conocidas y elegidas con cierta

libertad llamadas funciones de forma. (Ver Apéndice C).

El principio de los trabajos virtuales, representado en (I.4.10) se utiliza con el fin de obtener una solución para los valores de \underline{a} . Para ello hemos de expresar $\underline{\epsilon}$ y $\underline{\sigma}$ en función de \underline{u} .

Partiendo de la hipótesis de que a pequeñas deformaciones, se verifica :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.4.15a})$$

De donde :

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad ; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad ; \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{I.4.15b})$$

$$2\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad ; \quad 2\epsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad ; \quad 2\epsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

Que en forma compacta (I.4.15b) podemos escribirla como :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.15c})$$

Esto es :

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (\text{I.4.16a})$$

donde podemos sustituir el valor de \underline{u} por la Ec. (I.4.12) para obtener.

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{a} = \underline{B} \underline{a} \quad (\text{I.4.16b})$$

y llamar \underline{L} al arreglo :

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.17a})$$

$$y \quad \underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (\text{I.4.17b})$$

Las variaciones de \underline{u} y $\underline{\epsilon}$ pueden escribirse a partir de (I.4.12) e (I.4.16b) como :

$$y \quad \delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (\text{I.4.18})$$

$$\delta \underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{N} \delta \underline{a} \quad (\text{I.4.19})$$

Con el objeto de expresar los esfuerzos $\underline{\sigma}$ en función de \underline{u} se utilizará la ley constitutiva de mecánica de materiales más simple, que constituye el caso de relacionar en forma lineal los esfuerzos con las deformaciones (elasticidad lineal)⁽³⁾.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (\text{I.4.20})$$

Donde \underline{D} que contiene los parámetros elásticos de un material es una matriz simétrica, de coeficientes constantes y dimensión - (6 x 6). En el caso bien conocido de la elasticidad lineal esta matriz se escribe :

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.21})$$

Siendo E el módulo de Young y ν la relación de Poisson. sustituyendo en (I.4.20) la expresión (I.4.16b) obtenemos.

(3) Teoría Válida en estructuras sólidas, elásticas, lineales e Isotrópicas.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{L} \underline{N} \underline{a} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} \quad (I.4.22)$$

donde

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (I.4.23)$$

A la matriz \underline{B} se le conoce con el nombre de matriz de deformaciones. Por último, sustituyendo (I.4.18), (I.4.19) e (I.4.22) en (I.4.10), se obtiene:

$$\int_v \delta \underline{a}^T \begin{matrix} \underline{N}^T \\ (1 \times 3n) \end{matrix} \begin{matrix} \underline{L}^T \\ (3n \times 3) \end{matrix} \begin{matrix} \underline{D} \\ (6 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \underline{B} \\ (6 \times 3n) \end{matrix} \underline{a} \, dv = \int_v \delta \underline{a}^T \begin{matrix} \underline{N}^T \\ (1 \times 3n) \end{matrix} \underline{x} \, dv +$$

$$+ \int_{S_2} \delta \underline{a}^T \begin{matrix} \underline{N}^T \\ (1 \times 3n) \end{matrix} \underline{T} \, ds$$

(I.4.24)

Simplificando:

$$\int_v \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{a} \, dv = \int_v \underline{N}^T \underline{x} \, dv + \int_{S_2} \underline{N}^T \underline{T} \, ds$$

(I.4.25)

que también puede escribirse:

$$\underline{k} \underline{a} = \underline{F} \quad (I.4.26)$$

con

$$\underline{k} = \int \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dv \quad (I.4.27)$$

y

$$\underline{F} = \int \underline{N}^T \underline{x} \, dv + \int \underline{N}^T \bar{\underline{T}} \, ds \quad (I.4.28)$$

La solución de (I.4.26) permite obtener el vector \underline{a} y con él, a través de (I.4.12), (I.4.16) e (I.4.22), el estado de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos dentro de un sólido.

Es el momento de especificar las ecuaciones anteriores para un subdominio (*elemento finito*) de cuerpo. Consideremos en la (fig. I.4.2) un dominio bidimensional aproximado por un conjunto de elementos cuadrangulares. Expresiones integrales como las desarrolladas anteriormente admiten ser calculadas elemento por elemento para sumar a continuación los resultados parciales y recuperar así el continuo global del sistema en estudio. En efecto, podemos escribir las Ec. (I.4.10) de la siguiente forma :

$$\sum_{e=1}^{\text{No. de elementos}} \int_{V_e} \delta \underline{\epsilon}^T \underline{e} \underline{\sigma}_e \, dv = \sum_{e=1}^{\text{No. de elementos}} \int_{V_e} \delta \underline{u}^T \underline{e} \underline{x}_e \, dv + \sum_{e=1}^{\text{No. de elementos}} \int_{S_{2e}} \delta \underline{u}_e^T \bar{\underline{T}}_e \, ds \quad (I.4.29)$$

Donde el subíndice e se refiere a un elemento genérico. Considerando entonces el desarrollo representado en la Ec. (I.4.25)

para un elemento esta se escribira como :

$$\int_{V_e} \underline{B}_e^T \underline{D} \underline{B}_e \underline{a}_e \, dv = \int_{V_e} \underline{N}_e^T \underline{x}_e \, dv + \int_{S_{2e}} \underline{N}_e^T \underline{T}_e \, ds \quad (I.4.30)$$

que también puede escribirse según las sustituciones hechas en -- las ecuaciones (I.4.27) e (I.4.28), como :

$$\underline{K}_e \underline{a}_e = \underline{f}_e \quad (I.4.31)$$

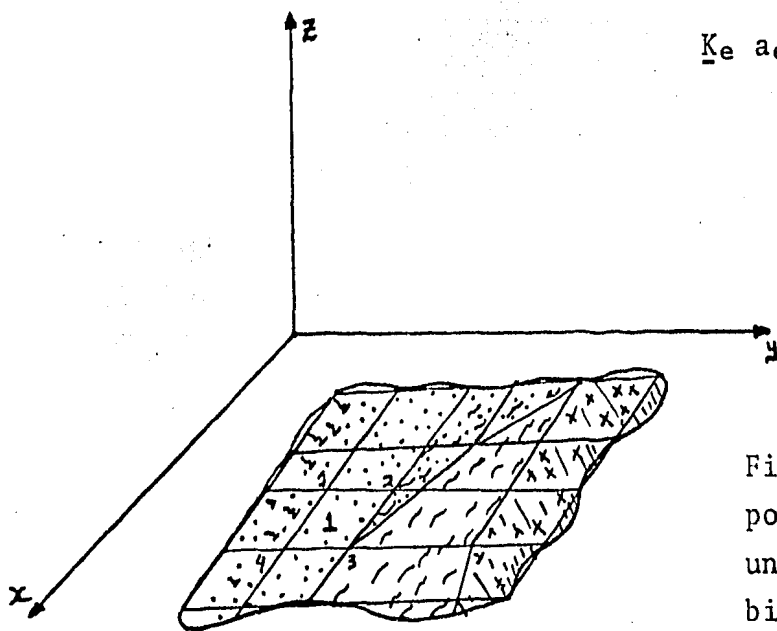


Fig. I.4.2. Aproximación por elementos finitos de -- una estructura geológica -- bidimensional en el plano - (x, y).

Donde como se trata de un estado plano de esfuerzo, la matriz de deformaciones nos queda como :

$$\underline{B}_e = \underline{L} \underline{N}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} (1) & & (1) & & (1) & & (1) \\ N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) & & (2) & & (2) & & (2) \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (I.4.32)$$

$$\underline{B}_e = \underline{L} \underline{N}_e = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{\frac{\partial N_1}{\partial x}} & 0 & \overset{(1)}{\frac{\partial N_2}{\partial x}} & 0 & \overset{(1)}{\frac{\partial N_3}{\partial x}} & 0 & \overset{(1)}{\frac{\partial N_4}{\partial x}} & 0 \\ 0 & \overset{(2)}{\frac{\partial N_1}{\partial y}} & 0 & \overset{(2)}{\frac{\partial N_2}{\partial y}} & 0 & \overset{(2)}{\frac{\partial N_3}{\partial y}} & 0 & \overset{(2)}{\frac{\partial N_4}{\partial y}} \\ \overset{(1)}{\frac{\partial N_1}{\partial y}} & \overset{(2)}{\frac{\partial N_1}{\partial x}} & \overset{(1)}{\frac{\partial N_2}{\partial y}} & \overset{(2)}{\frac{\partial N_2}{\partial x}} & \overset{(1)}{\frac{\partial N_3}{\partial x}} & \overset{(2)}{\frac{\partial N_3}{\partial y}} & \overset{(1)}{\frac{\partial N_4}{\partial y}} & \overset{(2)}{\frac{\partial N_4}{\partial x}} \end{bmatrix}$$

Y la matriz \underline{D} se escribe (Ver Apéndice F).

$$\underline{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (I.4.33)$$

Al vector \underline{f}_e en Ec (I.4.31) incluye las fuerzas de cuerpo en el elemento y eventualmente las cargas que por facilidad se consideran concentradas en los puntos nodales.

I.5 Ensamble de las Ecuaciones Elementales.

A través de la discretización del dominio de integración y de la aplicación de la formulación matemática del problema físico a

cada elemento se llegó a que :

$$\underline{K}_e \underline{a}_e = \underline{f}_e \quad (I.5.1)$$

Esta ecuación se ha calculado considerando aisladamente cada elemento. Para representar el problema general, han de sumarse todas las ecuaciones (I.5.1).

Esta suma, que es proceso sencillo, puede presentar problemas a la hora de automatizar el ensamblaje, por lo que es necesario de definir minuciosamente todos los elementos que contribuyen a cada nodo.

Este proceso de ensamble se comprenderá mejor con el siguiente ejemplo.

Supónganse dos elementos cuadrangulares adyacentes como muestra la (fig. I.5.1).

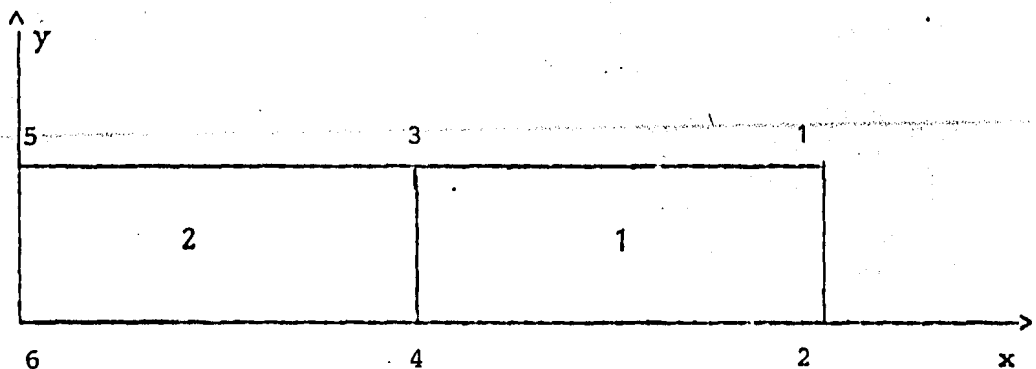


Fig. I.5.1 Malla de elementos finitos.

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (I.5.2)$$

Elemento 2

$$\begin{bmatrix} k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{bmatrix} \quad (I.5.3)$$

Al realizar la suma el sistema de ecuaciones definitivo será :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}+k'_{33} & k_{33}+k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43}+k'_{43} & k_{44}+k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ 0 & 0 & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & 0 & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

(I.5.4)

Que resuelto nos dará los valores de la función a en los nodos. Una manera sencilla (pero cara) de no equivocarse, es escribir cada matriz elemental k_e como una matriz de $n \times n$, donde n es el número de nodos del dominio. Para el ejemplo que venimos siguiendo implicaría almacenar las relaciones (I.5.2) e (I.5.3) de la siguiente forma :

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(I.5.5)

Elemento 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ 0 & 0 & k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ 0 & 0 & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & 0 & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

(I. 5.6)

utilizando esta técnica, el sistema final de ecuaciones

$$\underline{k}_e \underline{a}_e = \underline{f}_e \quad (I.5.7)$$

Podrá calcularse directamente como :

$$\sum_{e=1}^{\text{No. elementos}} (\underline{k}_e) \underline{a} = \sum_{e=1}^{\text{No. elementos}} \underline{f}^e \quad (I.5.8)$$

donde Σ representa en este caso una suma matricial elemento a elemento.

Es claro que esta última técnica resulta incosteable para desarrollar un algoritmo, la gran cantidad de ceros constituye un derroche de espacio en memoria que lo hacen en definitiva inaceptable. En este trabajo el proceso de ensamble utilizado en el algoritmo presentado en el siguiente capítulo es como se desarrollo al principio.

1.6 Funciones de Forma o Interpolación.

Como se indico en la sección anterior el paso más importante en el método del elemento finito consistió en la selección de las funciones de forma, ya que de ellas depende la mejor convergencia de la solución aproximada a la solución exacta de la ecuación diferencial en cuestión.

Desarrollar aquí al detalle la teoría que formalize los criterios que deben satisfacer este tipo de funciones resulta muy extenso para este trabajo, remitimos al lector a la consulta de -

las siguientes referencias (ref No. 8 cap. 3), (ref. No. 6 cap. 7) y (ref. No. 10 cap. 46). O si se prefiere consultar simplemente el apéndice C.

Baste mencionar aqui que para el elemento bidimensional el tipo de funciones de interpolación utilizada corresponde al de la familia "Serendipity" para elementos rectangulares lineales que requieren únicamente 4 puntos nodales sobre las esquinas y que se evalúan mediante la siguiente expresión :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

(I.6.1)

donde ξ, η corresponde a las llamadas coordenadas locales - que veremos más adelante (ver fig. II.2.1).

CAPITULO II

Métodos de cálculo por Computadora

II.1.- *Introducción.*

En este capítulo se presentan los algoritmos desarrollados para sistematizar el modelo obtenido en el capítulo anterior.

El programa que se presenta está diseñado para resolver problemas bidimensionales los cuales deben ser lineales.

En la práctica cada módulo puede ser complejo, en las siguientes secciones se describirá con detalle los aspectos de la programación de cada uno de los módulos que componen el programa.

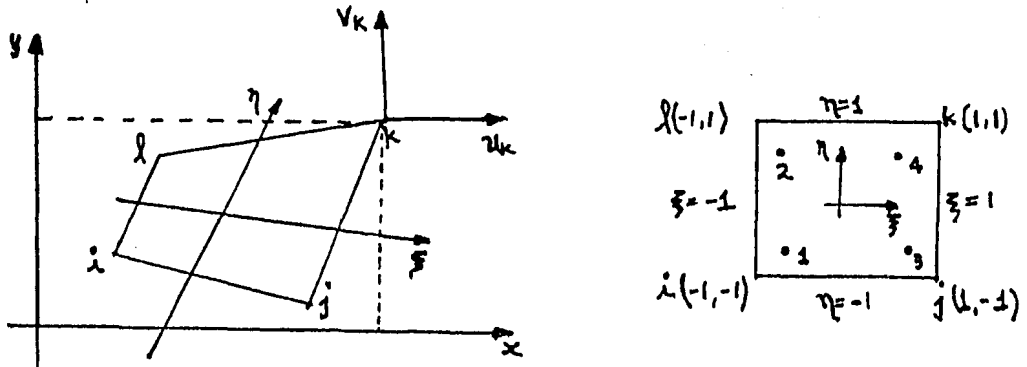
Para los interesados en utilizar el programa pueden pasar por alto estas secciones y remitirse directamente a la sección donde se indican los datos de entrada necesarios para su funcionamiento. (Cap. III, sec III.3).

El programa fue realizado en Fortran IV, en el sistema VAXII/780 del Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. (CECAFI), se hizo necesaria la apertura de espacio en disco, para evitar saturar la unidad de CPU con resultados parciales.

II.2.- *Formulación del Problema.*

El elemento finito utilizado es el cuadrilátero lineal con 4 puntos nodales (ver ref. No. 8 , pág. 104), debido a la geometría de la estructura utilizada los elementos finitos seleccionados resultan ser rectángulos y

para establecer sus ecuaciones de equilibrio, es necesario hacer referencia a un elemento tipo que a continuación se describe y se presenta en la figura. II.2.1.



a) Coordenadas Globales

b) Coordenadas Locales

Fig. II.2.1. Geometría de un elemento cuadrilátero lineal con 4 puntos nodales.

Vector de desplazamientos nodales \underline{a}_e .

De acuerdo a la ref. No. 8 , pág. 105 se puede escribir :

$$\underline{a}_e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \\ \underline{u}_e \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad \text{donde} \quad \underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

(II.2.1)

Funciones de Forma en Coordenadas Locales.

De acuerdo a la ref. citada y a la ecuación (I.6.1) evaluada en cada punto nodal de la referencia local obtenemos :

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \\ N_j &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_k &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \\ N_l &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \tag{II.2.2}$$

Coordenadas globales en función de las coordenadas locales.

De manera similar a la expansión en serie utilizada para aproximar los desplazamientos según la ecuación (I.4.11.a,b,c). Podemos relacionar las coordenadas globales con las locales a través de las siguientes ecuaciones :

$$\begin{aligned} x &= N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k + N_l x_l \\ y &= N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_l y_l \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

Aproximación de los desplazamientos en coordenadas locales.

Transformando al caso bidimensional las ecuaciones (I.4.11.abc) obtenemos que :

$$\begin{aligned} u_1 = u &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_l u_l \\ u_2 = v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_l v_l \end{aligned} \tag{II.2.4}$$

Que en forma matricial apoyados en (I.4.12) nos queda :

$$\underline{\dot{u}} = \underline{N} \underline{a_e} \tag{II.2.5}$$

donde :

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (\text{II.2.6})$$

y ,

$$\underline{a}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.7})$$

Tensor de deformaciones.

De acuerdo con la ecuación (I.4.16b), las deformaciones en puntos específicos de cada elemento se obtiene mediante.

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{a}^e \quad (\text{II.2.8})$$

donde la matriz de deformaciones \underline{B} resulta ser según la ec. (I.4.32) :

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_\ell}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_\ell}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_\ell}{\partial y} & \frac{\partial N_\ell}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 8}$$

(II.2.9.)

Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales.

Sabemos que para mapear una función de un sistema coordinado a otro podemos recurrir al operador Jacobiano que nos facilita el cálculo. Para nuestro caso y siguiendo el desarrollo presentado en la ref. No. 8 , pág. 80 sección 3.5.2, la regla de correspondencia entre los operadores derivados es la siguiente :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{(II.2.10)}$$

donde la matriz Jacobiana, \underline{J} , para el problema plano resulta ser :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix}$$

(II.2.11)

de donde por el método de la adjunta obtenemos :

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y, \eta & -y, \xi \\ -x, \eta & x, \xi \end{bmatrix}$$

(II.2.12)

y el Jacobiano de transformación, J , resulta ser :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = x, \xi y, \eta - x, \eta y, \xi$$

(II.2.13)

Sustituyendo (II.2.12) en (II.2.10), obtenemos :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(Y, \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - Y, \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(-x, \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + x, \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

(II.2.14a)

Entonces las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales se obtienen con las siguientes expresiones :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(y, \eta N_{i, \xi} - y, \xi N_{i, \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(-x, \eta N_{i, \xi} + x, \xi N_{i, \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(y, \eta N_{j, \xi} - y, \xi N_{j, \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(-x, \eta N_{j, \xi} + x, \xi N_{j, \eta} \right)$$

(II.2.14b)

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(y, \eta N_{k, \xi} - y, \xi N_{k, \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(-x, \eta N_{k, \xi} + x, \xi N_{k, \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(y, \eta N_{l, \xi} - y, \xi N_{l, \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(-x, \eta N_{l, \xi} + x, \xi N_{l, \eta} \right)$$

Que constituyen los elementos que conforman la matriz de deformaciones, según lo podemos observar en la ecuación (II.2.9).

Por otro lado, para tener bien definidas las ecuaciones (II.2.14b) se hace necesario obtener las expresiones que nos sirven para calcular las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas locales. Así como las expresiones de las derivadas de las coordenadas globales con respecto a las coordenadas locales.

De acuerdo con las expresiones dadas por las ecuaciones (II.2.2), tenemos que :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = N_{i,\xi} = -\frac{1}{4} (1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = N_{i,\eta} = -\frac{1}{4} (1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial \xi} = N_{j,\xi} = \frac{1}{4} (1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial \eta} = N_{j,\eta} = -\frac{1}{4} (1+\xi) \quad (II.2.15a)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial \xi} = N_{k,\xi} = \frac{1}{4} (1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial \eta} = N_{k,\eta} = \frac{1}{4} (1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial \xi} = N_{e,\xi} = -\frac{1}{4} (1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial \eta} = N_{e,\eta} = \frac{1}{4} (1-\xi)$$

De acuerdo con las expresiones dadas por las ecuaciones (II.2.3) se obtiene :

$$\begin{aligned}
 x, \xi &= N_i, \xi x_i + N_j, \xi x_j + N_k, \xi x_k + N_\ell, \xi x_\ell \\
 x, \eta &= N_i, \eta x_i + N_j, \eta x_j + N_k, \eta x_k + N_\ell, \eta x_\ell \\
 y, \xi &= N_i, \xi y_i + N_j, \xi y_j + N_k, \xi y_k + N_\ell, \xi y_\ell \\
 y, \eta &= N_i, \eta y_i + N_j, \eta y_j + N_k, \eta y_k + N_\ell, \eta y_\ell
 \end{aligned}
 \tag{II.2.15b}$$

Tensor de esfuerzo.

De acuerdo con (I.4.22), los esfuerzos en puntos específicos de cada elemento se obtiene mediante la siguiente expresión :

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{a}e
 \tag{II.2.16}$$

donde \underline{D} es la matriz de parámetros elásticos, como se menciona anteriormente, para el caso bidimensional de un estado de esfuerzos.

$$\underline{D}_{-3 \times 3} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix}
 \tag{II.2.17}$$

y \underline{B} es la matriz de deformaciones ya mencionada.

Para poder evaluar las ecuaciones (II.2.5), (II.2.8) y (II.2.16) a fin de obtener el estado cinemático formado por el vector de desplazamientos y el estado mecánico formado por los tensores de esfuerzos y deformaciones unitarios es absolutamente indispensable calcular el vector desplazamiento nodales \underline{a} de la estructura. Con la ecuación (I.5.8) :

$$\sum_{e=1}^n (k_e) \underline{a} = \sum_{e=1}^n \underline{f}_e \quad (\text{II.2.18})$$

en donde $\sum_{e=1}^n (k_e)$ constituye el ensamble de las matrices de rigideces de cada uno de los elementos que conforman la malla \underline{a} constituye el vector que contiene las dos posibilidades de desplazamiento en las direcciones x y y , para cada punto nodal que conforma la malla y \underline{f}_e constituye el vector de cargas globales que contiene las fuerzas de cuerpo y las fuerzas superficiales. De estas últimas sólo vamos a utilizar las que se conocen como cargas concentradas que consideraremos aplicadas único y exclusivamente en los puntos nodales.

Matriz de Rigideces.

La ecuación de la matriz de rigideces dada por (I.4.27) es :

$$k_e = \int_{V_e} \underline{B}_e^T \underline{D} \underline{B}_e \underline{a}_e \, dv \quad (\text{II.2.19})$$

Para un estado plano resulta ser.

$$k_e = t \int_{A_e} \underline{B}_e^T(x,y) \underline{D} \underline{B}_e(x,y) \, dA \quad (\text{II.2.20})$$

donde :

t resulta ser el espesor de la estructura

Al tomar en cuenta la transformación de variables :

$$\underline{k}_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J(\xi, \eta) \underline{B}^T(\xi, \eta) \underline{D} \underline{B}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{II.2.21})$$

Que en forma discreta nos queda :

$$\underline{k}_e = t \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N H_m H_n J(\xi_m, \eta_n) \underline{B}^T(\xi_m, \eta_n) \underline{D} \underline{B}(\xi_m, \eta_n) \quad (\text{II.2.22})$$

$\begin{matrix} 8 \times 8 & & & & 8 \times 3 & & 3 \times 8 \end{matrix}$

donde :

H_m, H_n , son los coeficientes de peso para la cuadratura de Gauss, con $M = N = 2$. (Ver Apéndice E).

ξ_m, η_n , son las coordenadas locales de los puntos gaussianos - en donde se van a evaluar todas las ecuaciones. Ver en la figura II.2.1b los puntos 1, 2, 3, 4.

Si $M = N = 2$, la ecuación anterior se puede escribir como :

$$\underline{k}_e = t \left[H_1^2 J(\xi_1, \eta_1) \underline{B}^T(\xi_1, \eta_1) \underline{D} \underline{B}(\xi_1, \eta_1) + H_1 H_2 J(\xi_1, \eta_2) \underline{B}^T(\xi_1, \eta_2) \right. \\ \left. + H_2 H_1 J(\xi_2, \eta_1) \underline{B}^T(\xi_2, \eta_1) \underline{D} \underline{B}(\xi_2, \eta_1) + H_2^2 J(\xi_2, \eta_2) \underline{B}^T(\xi_2, \eta_2) \underline{D} \underline{B}(\xi_2, \eta_2) \right] \quad (\text{II.2.23})$$

Cada producto de los arreglos anteriores representa el valor de la matriz de rigideces evaluada en los puntos de coordenadas (ξ_i, η_i) de cada elemento. Por tanto en forma condensada podemos representarlo como :

$$\underline{k}_e = \underline{k}_{11} + \underline{k}_{12} + \underline{k}_{21} + \underline{k}_{22} \quad (\text{II.2.24})$$

8x8

Vector de Cargas.

De acuerdo a la ecuación (I.3.28) el vector de cargas es :

$$\int_{V_e} \underline{N}^T \underline{x} \, dv + \rho \int_{A^e} \underline{N}^T \bar{\underline{T}} \, ds \quad (\text{II.2.25})$$

Para este problema, se tiene que :

$$\int_{A^e} \underline{N}^T \bar{\underline{T}} \, ds = 0 \quad (\text{II.2.26})$$

y

$$\rho \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{x} \, dv = t \int_{A^e} \rho \underline{N}^T \underline{x} \, dA \quad (\text{II.2.27})$$

Puesto que \underline{x} es el vector fuerza por unidad de masa, el producto de la densidad ρ y el vector \underline{x} ($\rho \underline{x}$) es un vector de fuerza por unidad de volumen, que se puede representar en sus componentes x, y de un sistema ortogonal de referencia como :

$$\rho \underline{x} = P_V \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.28})$$

donde :

ρ_V , es el peso volumétrico que obtuvimos de multiplicar, $\rho \underline{x}$.
 α es la dirección del vector peso de la estructura en cada elemento con respecto a un sistema ortogonal de referencia.

Por tanto la ecuación (II.2.25) en forma discreta nos quedaría como :

$$\underline{f}_e = t \begin{bmatrix} M & N \\ \sum_{m=1}^M & \sum_{n=1}^N H_m H_n J(\xi_m, \eta_n) \underline{N}^T(\xi_m, \eta_n) \\ 8 \times 1 & 8 \times 2 \end{bmatrix} \rho \underline{x} \quad 2 \times 1 \quad (\text{II.2.29})$$

si $M = N = 2$, la ecuación anterior se puede escribir como :

$$\underline{k}_e = t \left[H_1^2 J(\xi_1, \eta_1) \underline{N}^T(\xi_1, \eta_1) + H_1 H_2 J(\xi_1, \eta_2) \underline{N}^T(\xi_1, \eta_2) + \right. \\ \left. + H_2 H_1 J(\xi_2, \eta_1) \underline{N}^T(\xi_2, \eta_1) + H_2^2 J(\xi_2, \eta_2) \underline{N}^T(\xi_2, \eta_2) \right] \begin{bmatrix} P_V \cos \alpha \\ P_V \text{sen } \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.30})$$

Ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio de la estructura.

Este ordenamiento de las ecuaciones, se hace con la finalidad de realizar el ensamble de las ecuaciones elementales (ver sección I.5) una vez encontradas las matrices de rigideces y los vectores de cargas de cada uno de los elementos en que se discretizo la estructura. El ordenamiento depende de la numeración de los puntos nodales, que puede ser arbitraria. La localización de los coeficientes de la matriz de rigideces, depende de esta numeración. La que se recomienda es la que provoca que tales coeficientes queden lo más cercanos a la diagonal principal.

Una vez definida la numeración de los puntos nodales, se procede a obtener el ordenamiento de los grados de libertad de la siguiente manera.

- a) Se le asocia a cada punto nodal un indicador de grado de libertad. Este indicador es nulo si el punto nodal tiene libertad de moverse en la dirección considerada y vale 1 si su desplazamiento es nulo. Este arreglo se representa con $ID(NGL, NPE)$, donde NGL es el número de grados de libertad por punto nodal, para nuestro caso es 2, asociado a las direcciones x y y , y respectivamente NPE es el número de puntos nodales requeridos para construir la malla.

Si tratáramos de ordenar las ecuaciones elementales de la estructura mostrada en la figura, obtendríamos el siguiente arreglo :

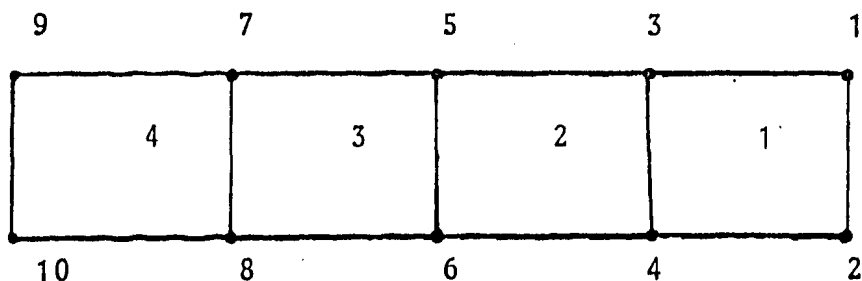


Fig. II.2.2 Numeración de los puntos nodales y elementos finitos.

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(II.2.31)

A continuación se procede a la numeración de los grados de libertad de los puntos nodales. Esto se hace en el mismo arreglo matricial, ID recorriéndolo por columnas de la siguiente manera :

b) Si es uno se sustituye por un cero.

c) Si es un cero, y si es el primero, se sustituye por el número uno que es la primera ecuación de equilibrio; a partir del segundo cero en adelante, se sustituye por el número de la ecuación de equilibrio anterior más uno. Para nuestro ejemplo - tendríamos entonces :

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(II.2.32)

Para conocer los grados de libertad de cada elemento finito, es necesario saber cuales son los valores de los puntos nodales i, j, k & de la referencia local (Fig. II.2.1).

Una vez hecho esto es conveniente construir un arreglo vectorial, IE , con $NGL * NPN$ elementos, donde NPN es el número de puntos nodales del elemento. Para el ejemplo este vector se construye como se indica :

$$\begin{array}{l} IE^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad IE^{(2)} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \quad IE^{(3)} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 11 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \quad IE^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 16 \\ 13 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(II.2.33)

De 2 en 2 renglones se va colocando el número de ecuaciones que corresponden a cada nodo en el orden mencionado, por ejemplo, para el punto nodal i del primer elemento es el nodo 4, si lo buscamos en la columna 4 del arreglo ID , tendremos las ecuaciones 7 y 8 que controlan los 2 grados de libertad de ese nodo, y así sucesivamente para el nodo j del mismo elemento que es 2 tendremos las ecuaciones 3 y 4 etc.

Y en general el arreglo IE para fines del algoritmo quedaría representado como :

$$\text{IE}^{(e)} = \begin{bmatrix} \text{ID}(1, i) \\ \text{ID}(2, i) \\ \text{ID}(1, j) \\ \text{ID}(2, j) \\ \text{ID}(1, k) \\ \text{ID}(2, k) \\ \text{ID}(1, l) \\ \text{ID}(2, l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{IE}^e(1) \\ \text{IE}^e(2) \\ \text{IE}^e(3) \\ \text{IE}^e(4) \\ \text{IE}^e(5) \\ \text{IE}^e(6) \\ \text{IE}^e(7) \\ \text{IE}^e(8) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.34})$$

Ensamble de la matriz de rigideces.

De acuerdo al ordenamiento de las ecuaciones de cada elemento finito, la forma de llevar a cabo la sumatoria que aparecen en la ecuación (I.5.8) se muestra esquemáticamente en la siguiente ecuación :

$$\sum_e^n k^e = \begin{bmatrix} \text{IE}^e(1) & \text{IE}^e(2) & \text{IE}^e(3) & \text{IE}^e(4) & \text{IE}^e(5) & \text{IE}^e(6) & \text{IE}^e(7) & \text{IE}^e(8) \\ \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e & k_{17}^e & k_{18}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e & k_{27}^e & k_{28}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e & k_{37}^e & k_{38}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e & k_{45}^e & k_{46}^e & k_{47}^e & k_{48}^e \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e & k_{55}^e & k_{56}^e & k_{57}^e & k_{58}^e \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e & k_{65}^e & k_{66}^e & k_{67}^e & k_{68}^e \\ k_{71}^e & k_{72}^e & k_{73}^e & k_{74}^e & k_{75}^e & k_{76}^e & k_{77}^e & k_{78}^e \\ k_{81}^e & k_{82}^e & k_{83}^e & k_{84}^e & k_{85}^e & k_{86}^e & k_{87}^e & k_{88}^e \end{bmatrix} & \text{IE}^e(1) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(2) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(3) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(4) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(5) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(6) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(7) \\ & & & & & & & & \text{IE}^e(8) \end{bmatrix}$$

Este arreglo se interpreta de la siguiente manera. Por ejemplo, el elemento K_{43}^e de la matriz de rigideces K^e del elemento finito e , debe sumarse al elemento $k(IE^e(4), IE^e(3))$ de la matriz de rigideces k de la estructura.

Ensamble del vector de cargas.

La forma de llevar a cabo la ecuación (II.2.25), según la restricción impuesta por la ecuación (II.2.26) se muestra esquemáticamente en la siguiente ecuación :

$$\sum_e \underline{f}^e = \begin{bmatrix} f_1^e & IE^e(1) \\ f_2^e & IE^e(2) \\ f_3^e & IE^e(3) \\ f_4^e & IE^e(4) \\ f_5^e & IE^e(5) \\ f_6^e & IE^e(6) \\ f_7^e & IE^e(7) \\ f_8^e & IE^e(8) \end{bmatrix} \quad (II.2.36)$$

Que se interpreta de la siguiente forma. Por ejemplo, el elemento f_3^e del vector de cargas \underline{f}^e del elemento finito debe sumarse al elemento $f(IE^e(3))$ del vector de cargas \underline{F} de la estructura.

El algoritmo puede trabajar también con cargas concentradas que son un caso particular de las cargas de superficie, para lo cual la ecuación (II.2.26) no va ser nula, y tampoco va ser necesario realizar su integración ya que vamos a considerarlas concentradas en los nodos.

Al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas representado en la ecuación (I.5.8), se obtiene el vector de desplazamientos de los puntos nodales.

Conocido el vector \underline{a} se puede calcular los correspondientes vectores de desplazamiento de los elementos finitos... \underline{a}^e , como se indica a continuación :

$$\underline{a}^e = \begin{bmatrix} u(IE^e(1)) \\ u(IE^e(2)) \\ u(IE^e(3)) \\ u(IE^e(4)) \\ u(IE^e(5)) \\ u(IE^e(6)) \\ u(IE^e(7)) \\ u(IE^e(8)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \\ u_7^e \\ u_8^e \end{bmatrix} \quad (II.2.37)$$

Para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales a las que se llega finalmente, se propone el método de triangulación Cholesky, debido a las características de simetría que presenta la matriz global de rigideces (ver ref. No. 9, pág 157).

II.3.- Aspectos Generales del Algoritmo.

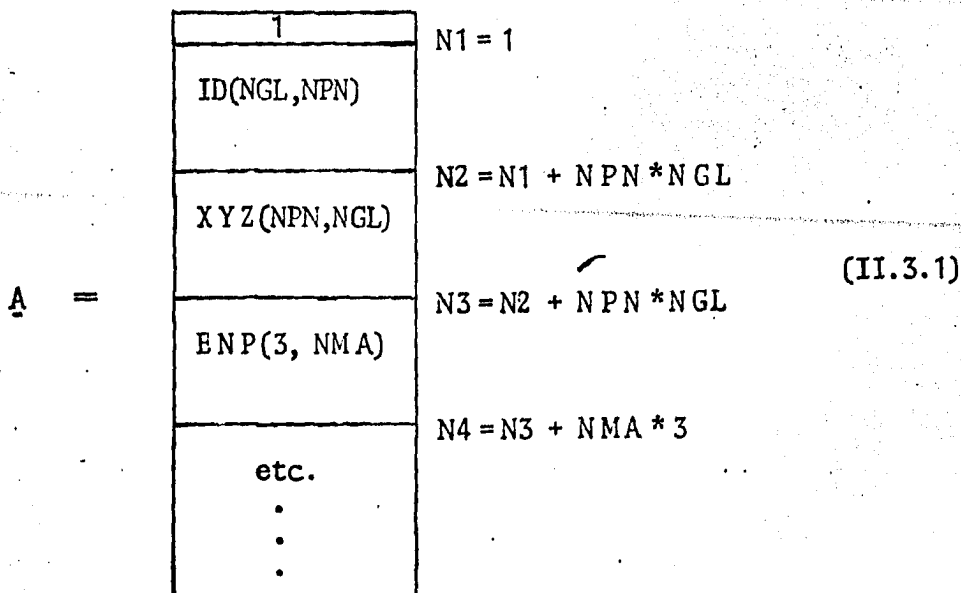
Conociendo los mecanismos que se pretenden automatizar resulta conveniente presentar el diagrama de flujo del programa, mencionando para que sirve cada subrutina, ver la figura II.2.3, los detalles se mencionan a continuación:

Programa Principal.- Controla las subrutinas de manera independiente.

CONTRA :

Controla la memoria utilizada en cada corrida.
Menciona donde nos hizo falta espacio en memoria.

Una ventaja que ofrece el algoritmo es que almacena los datos y resultados necesarios en un sólo vector - A(10000) y delimita por medio de etiquetas (N1, N2, N3, etc.) el espacio de cada arreglo a fin de localizarlo cuando sea necesario.



Los arreglos que forman la ecuación global de equilibrio de la estructura son las más grandes, tenemos que en ambos su tamaño depende del número de puntos nodales, por ejemplo, para el caso de la matriz global de rigideces tenemos que su dimensión es igual a: dos veces el número de puntos nodales para los renglones y lo mismo para las columnas porque constituyen un arreglo cuadrado, el dos se debe a que estamos trabajando en un plano bidimensional y atribuimos a cada nodo dos grados de libertad.

Para el caso del vector de cargas su dimensión es igual a: dos veces el número de puntos nodales.

Por último cabe decir que todos los demás arreglos que se generan son borrados una vez que ya no se les necesita o se mandan a almacenar a un disco, con la finalidad de no saturar el espacio en memoria asignado.

Por tanto para realizar una corrida satisfactoria se debe reservar un espacio en memoria en el vector A de por lo menos :

$2 * NPN * 2 * NPN$ Dim. de la matriz global de Rigideces.

+ $2 * NPN$ Dim. del vector global de cargas.

$2 * NPN$ Dim. del vector desplazamiento.

Dim. mínima del vector A

CORCA :

Lee las coordenadas cartesianas de los puntos nodales.

NUMEC :

Numera las ecuaciones de equilibrio de cada elemento finito para formarse el arreglo ID.

MATHOK :

Lee los datos de los parámetros elásticos de cada material (E, Nu, Pv)

ELEFIN :

Establece las ecuaciones de equilibrio de cada elemento finito (K_e , F_e). Para lo cual.

MACEPE :

Calcula la matriz de parámetros elásticos.

MABNCL :

Controla las subrutinas para obtener lo necesario para calcular la matriz B . Para lo cual.

FUFCL :

Calcula las funciones de forma.

DFUF :

Calcula las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas locales.

DFUFCL :

Calcula las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales, el Jacobiano de transformación y las derivadas de las coordenadas globales con respecto a las locales.

MATBCL :

Calcula la matriz de deformaciones B_e

COXYC :

Calcula las coordenadas globales en los puntos gaussianos o puntos de integración de cada elemento (ξ, η) .

VEICL :

Forma el vector indicador de ecuaciones de cada elemento. $IE^e ()$.

GUADIS :

Almacena en disco el vector $IE^e ()$ de cada elemento.

MARIEP :

Ensambla las ecuaciones elementales k_e , para formar la matriz global k de la estructura. Para lo cual.

CEROSM :

Forma una matriz nula de dimensión dada.

LEEDIS :

Lee los vectores $IE^e ()$ almacenados en disco.

TCHCUA :

Trianguliza la matriz global de rigideces por el método de Cholesky.

VECPEC :

Ensambla las ecuaciones elementales f_e , para formar el vector global F de la estructura. Para lo cual.

CEROSV :

Formar un vector nulo de dimensión dada.

LEEDIS :

Lee los vectores $IE^e ()$ almacenados en disco.

FUEXPU :

Lee las fuerzas concentradas externas que se aplican en los puntos nodales.

SCHCUA :

Resuelve el sistema algebraico resultante $\underline{k} \underline{a} = \underline{F}$.
Por medio de la sustitución por renglones del método de Cholesky.

DESMOND :

Imprime los desplazamientos nodales obtenidos.

ESFUCL :

Cálcula los esfuerzos, principales y las direcciones - principales en los puntos gaussianos de cada elemento.
Para lo cual.

LEEDIS :

Lee el vector $IE^e ()$ y $JE^e ()$ almacenados en disco.

MUMAVE :

Desarrolla la multiplicación de una matriz por un - vector $\underline{DB} \cdot \underline{ae}$.

GUADIS :

Guarda en disco los esfuerzos calculados para cada elemento, ES^e ().

LEEDIS :

Lee el vector JE^e () y el vector ES^e () de cada elemento.

ESFPCL :

Calcula los esfuerzos y las direcciones principales en los puntos gaussianos de cada elemento.

DEFUCL :

Calcula las deformaciones unitarias y las deformaciones máximas y mínimas en los puntos gaussianos de cada elemento. Para lo cual.

LEEDIS :

Lee el vector IE^e (), JE^e (), ES (), almacenados en disco.

TEDFCL :

Calcula las deformaciones unitarias E_{xx} , E_{yy} y E_{zz} en los puntos gaussianos de cada elemento.

ESFPCL :

Calcula las deformaciones máximas y mínimas haciendo una sustitución de variables.

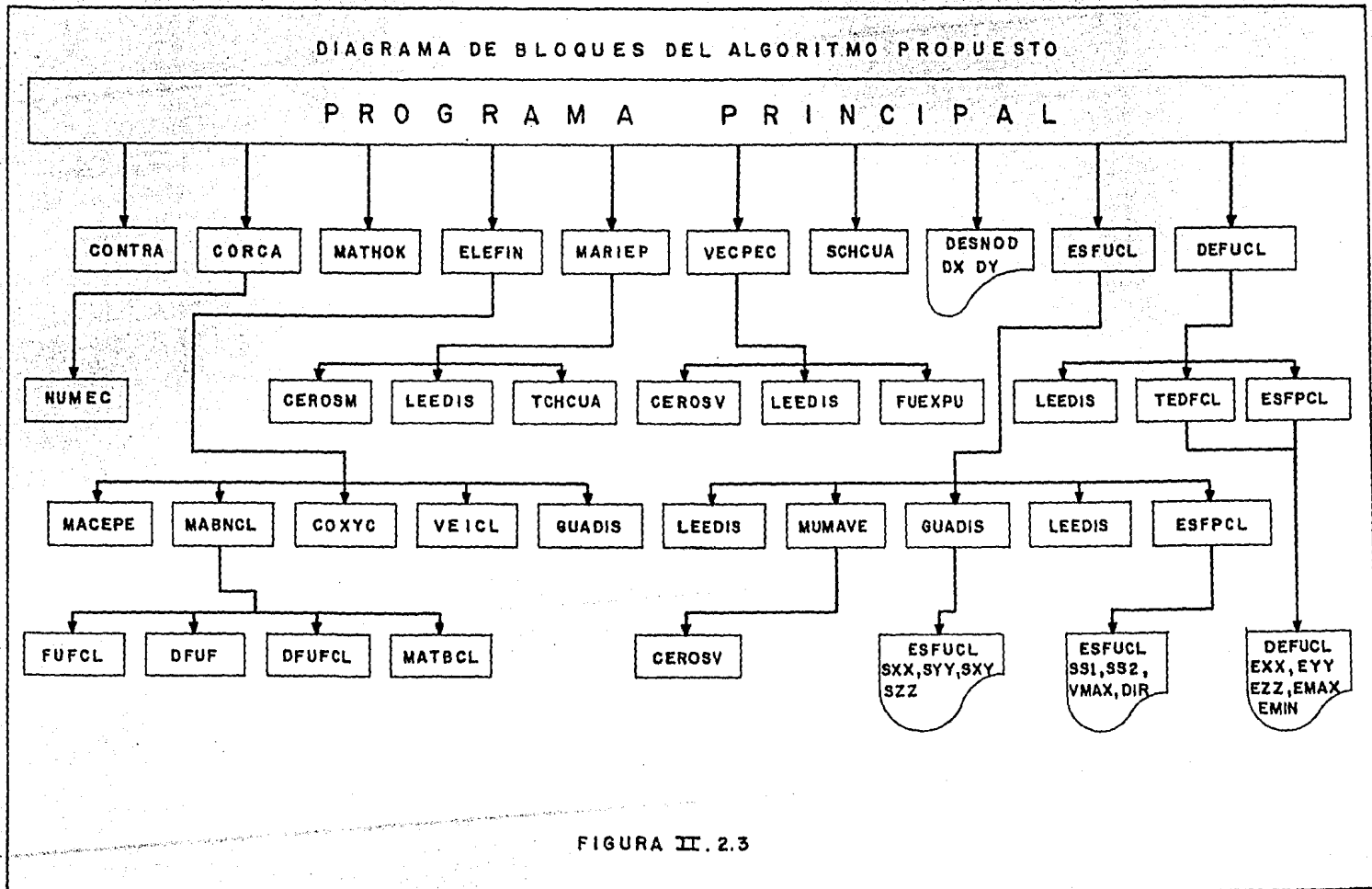


FIGURA II. 2.3

II.4.- Especificación de Variables.

- NEF.- Número de elementos finitos.
- NPN.- Número de puntos nodales.
- NMA.- Número de materiales que forman la estructura.
- NCC.- Número de condiciones de carga.
- NCP.- Número de coordenadas por punto.
- NGL.- Número de grados de libertad de cada punto nodal.
- NEC.- Número de ecuaciones.
- NEN.- Número de ecuaciones con desplazamiento nulo.
- NEP.- Número de ecuaciones con desplazamiento prescrito.
- NEAA.- Número de elementos del arreglo A.
- ENP.- Características del material (E, ν, P_v)
- IPI.- Indicador de los puntos de integración.
- IMA.- Indicador del material.
- IE.- Indicador de ecuación.
- IEJ.- Indicador de ejecución.
- IFC.- Indicador de las fuerzas concentradas.
- ID.- Indicador de los grados de libertad de cada nodo.
- IP.- Indicador del problema.
- XYZ.- Matriz de coordenadas cartesianas de los puntos nodales.
- EFCL.- Matriz de esfuerzos del cuadrilatero lineal.
- RG.- Matriz de rigideces del elemento finito.
- RGC.- Matriz de rigideces de la estructura.
- FC.- Vector de fuerzas de cuerpo del E.F.

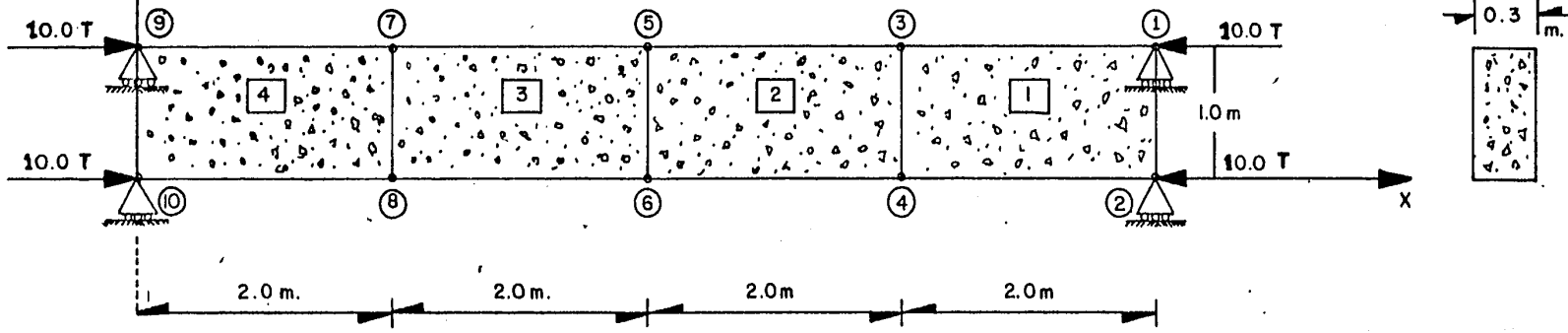
- FCC.- Vector de fuerzas de cuerpo de la estructura.
- NOD.- Vector de desplazamientos nodales de la estructura.
- D .- Matriz de parámetros elásticos.
- B .- Matriz de deformaciones.
- FN .- Funciones de forma.
- A .- Arreglo de los puntos gaussianos.
- W .- Arreglo de los pesos en la integración gaussiana.
- ANG.- Angulo de inclinación del vector peso de la estructura con respecto a un sistema cartesiano de referencia.
- ESP.- Espesor de la estructura.
- CA .- Coseno de la ANG para obtener las comp. del peso. en la dirección x.
- SA .- Seno de ANG para obtener las comp. del peso en la dirección y.

El listado del programa se encuentra al final del trabajo, apéndice A .

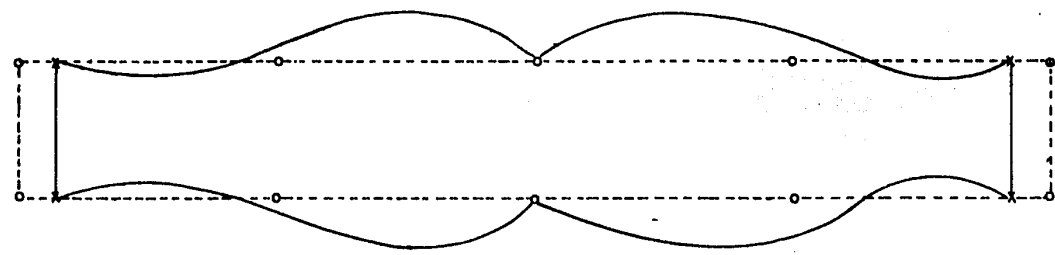
A continuación se muestran varios ejemplos que han sido procesados por el algoritmo descrito, con la información de sus parámetros elásticos y su geometría. Los resultados se muestran a una escala vertical exagerada; el campo de desplazamiento desarrollado de la aplicación de un sistema de cargas, así como también los valores de esfuerzo acumulado evaluados en los puntos gaussianos de la estructura. El acuerdo convencional que sigue este algoritmo es: Compresiones, Negativos, Tensiones Positivas.

ESFUERZOS Y DIRECCIONES PRINCIPALES

ELEMENTO NO.	COORDENADAS		SS1	SS2	VMAX	DIR
	X	Y				
1	6.42	0.21	0.01061	-65.68081	32.84571	-0.873304
1	6.42	0.79	0.01061	-65.68081	32.84571	0.873305
1	7.58	0.21	-9.99841	-67.68517	28.84337	-0.994531
1	7.58	0.79	-9.99841	-67.68517	28.84338	0.994533
2	4.42	0.21	-0.52486	-66.95626	33.21570	0.248698
2	4.42	0.79	-0.52486	-66.95625	33.21569	-0.248697
2	5.58	0.21	2.35857	-66.37952	34.36904	0.240349
2	5.58	0.79	2.35857	-66.37951	34.36904	-0.240349
3	2.42	0.21	2.35857	-66.37952	34.36904	-0.240354
3	2.42	0.79	2.35857	-66.37952	34.36905	0.240348
3	3.58	0.21	-0.52486	-66.95625	33.21570	-0.248697
3	3.58	0.79	-0.52486	-66.95626	33.21570	0.248698
4	0.42	0.21	-9.99842	-67.68517	28.84338	0.994551
4	0.42	0.79	-9.99841	-67.68515	28.84337	-0.994514
4	1.58	0.21	0.01061	-65.68082	32.84571	0.873302
4	1.58	0.79	0.01062	-65.68079	32.84571	-0.873306



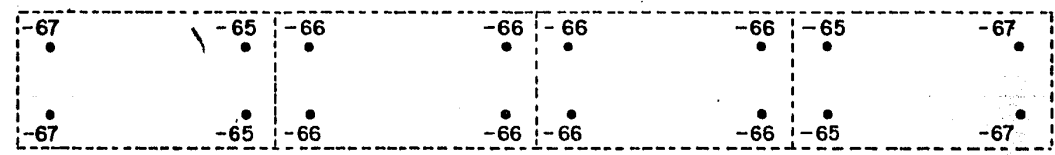
CAMPO DE DESPLAZAMIENTO NODAL



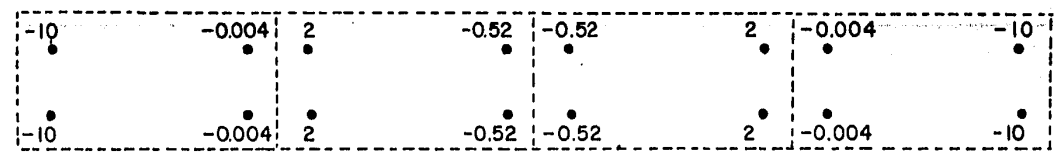
DESPLAZAMIENTOS NODALES (m)

No. NODO	$D_x \times 10^{-5}$	$D_y \times 10^{-5}$
1	-13.5329	0.0
2	-13.5329	0.0
3	-6.9664	0.4162
4	-6.9664	-0.4162
5	-0.2815	0.2963
6	-0.2815	-0.2963
7	6.4035	0.4162
8	6.4035	-0.4162
9	12.9700	0.0
10	12.9700	0.0

CAMPO DE LA COMPONENTE v_{xx} EN (T/m^2)



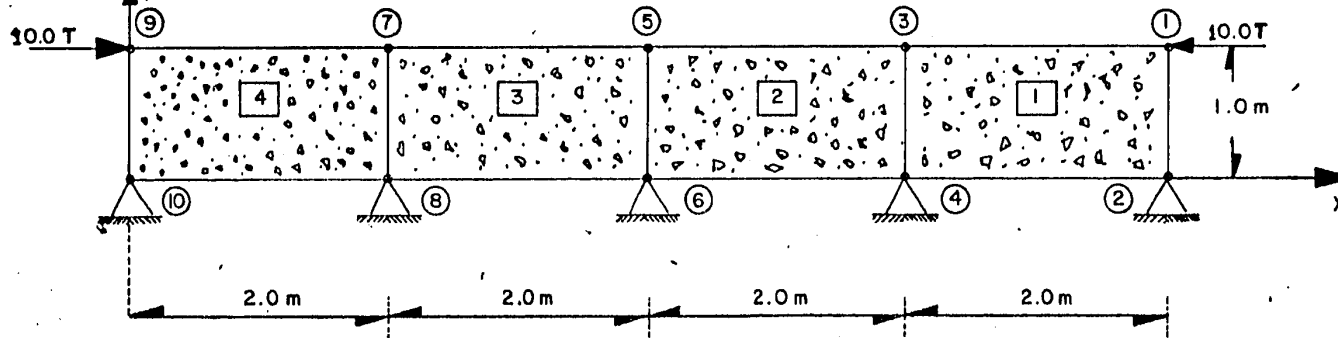
CAMPO DE LA COMPONENTE v_{yy} EN (T/m^2)



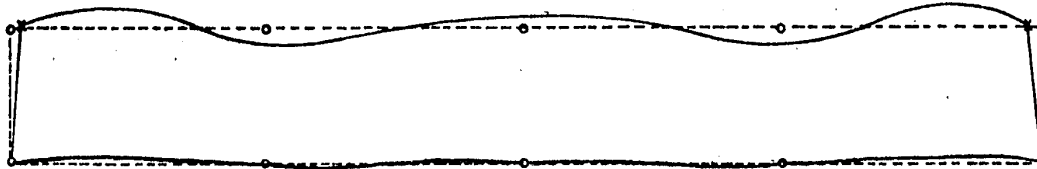
$E = 2 \times 10^6 \text{ T/m}^2$
 $\nu = 0.2$
 $P_v = 2.4 \text{ T/m}^3$
 $\text{Esc. } 1.5 \times 10^{-5} \text{ (m)}$

EDO. PLANO DE ESFUEROS

EJEMPLO No 1
(SIN CONSIDERAR LAS FUERZAS DE CUERPO)



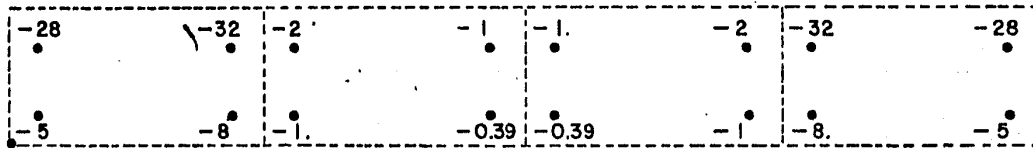
CAMPO DE DESPLAZAMIENTO NODAL



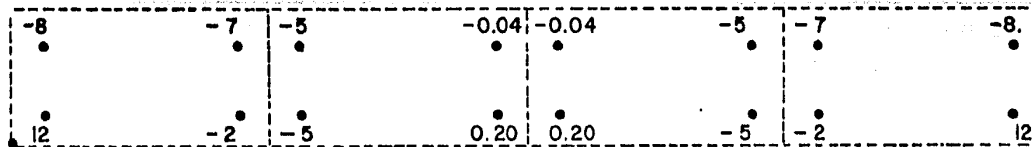
DESPLAZAMIENTOS NODALES (m)

No. NODOS	$D_x \times 10^{-5}$	$D_y \times 10^{-5}$
1	-4.0831	-0.9713
2	0.0	0.0
3	-0.2069	-0.3354
4	0.0	0.0
5	0.0	0.1079
6	0.0	0.0
7	0.2069	-0.3354
8	0.0	0.0
9	4.0831	0.9713
10	0.0	0.0

$\bar{\sigma}_{xx}$ [T/m²]



$\bar{\sigma}_{yy}$ [T/m²]



$E = 2.0 \times 10^6 \text{ T/m}^2$

$\nu = 0.2$

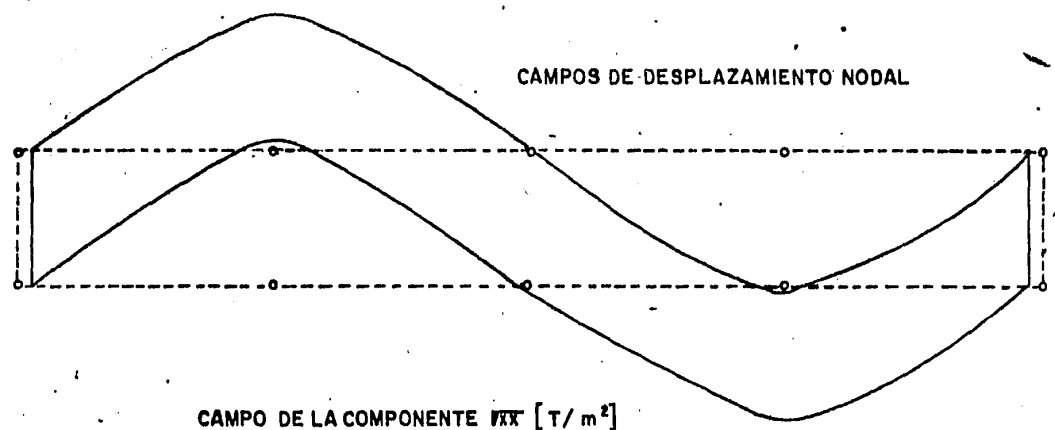
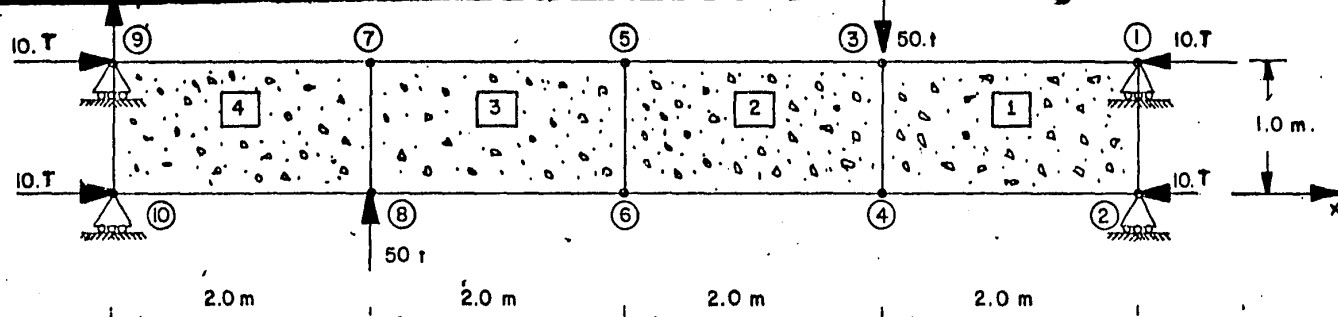
$PV = 2.4 \text{ T/m}^3$

Esc. $15 \times 10^{-5} \text{ (m)}$

EJEMPLO No. 2

(SIN CONSIDERAR LAS FUERZAS DE CUERPO)

EDO. PLANO DE ESFUERZOS



-44	-44	-45	-43	-87	-89	-88	-89
-89	-88	-89	-87	-43	-45	-44	-44

CAMPO DE LA COMPONENTE σ_{yy} [T/m²]

-8	-6	-2	6	-2	-11	-15	-17
-17	-15	-11	-2	6	-2	-6	-8

DESPLAZAMIENTOS NODALES (m)

No. NODOS	$D_x \times 10^{-5}$	$D_y \times 10^{-5}$
1	-18.9755	0.0
2	-11.5909	0.0
3	-8.8507	-11.3034
4	-8.8508	-11.4657
5	1.4525	0.4463
6	-5.9322	-0.4460
7	4.3710	11.4659
8	4.3711	11.3036
9	7.1112	0.0
10	14.4958	0.0

$E = 2.0 \times 10^6 \text{ T/m}^2$
 $\nu = 0.2$
 $P_v = 2.4 \text{ T/m}^3$
 Esc. $15 \times 10^{-5} \text{ (m)}$

EJEMPLO No. 3
(SIN CONSIDERAR LAS FUERZAS DE CUERPO)

EDO. PLANO DE ESFUEROS

CAPITULO III

APLICACIONES EN LA RESOLUCION DE UN PROBLEMA.

III.1.- *Introducción.*

En este capítulo se da una aplicación al MEF en el campo de la Geofísica.

Se trata de analizar la distribución de esfuerzos sobre la línea 6 margen derecha del Proyecto Hidroeléctrico Aguamilpa Alternativa Colorines ubicada a lo largo del eje de la cortina del anteproyecto de concreto gravedad (Ver ref. 11, Cáp. IV y V).

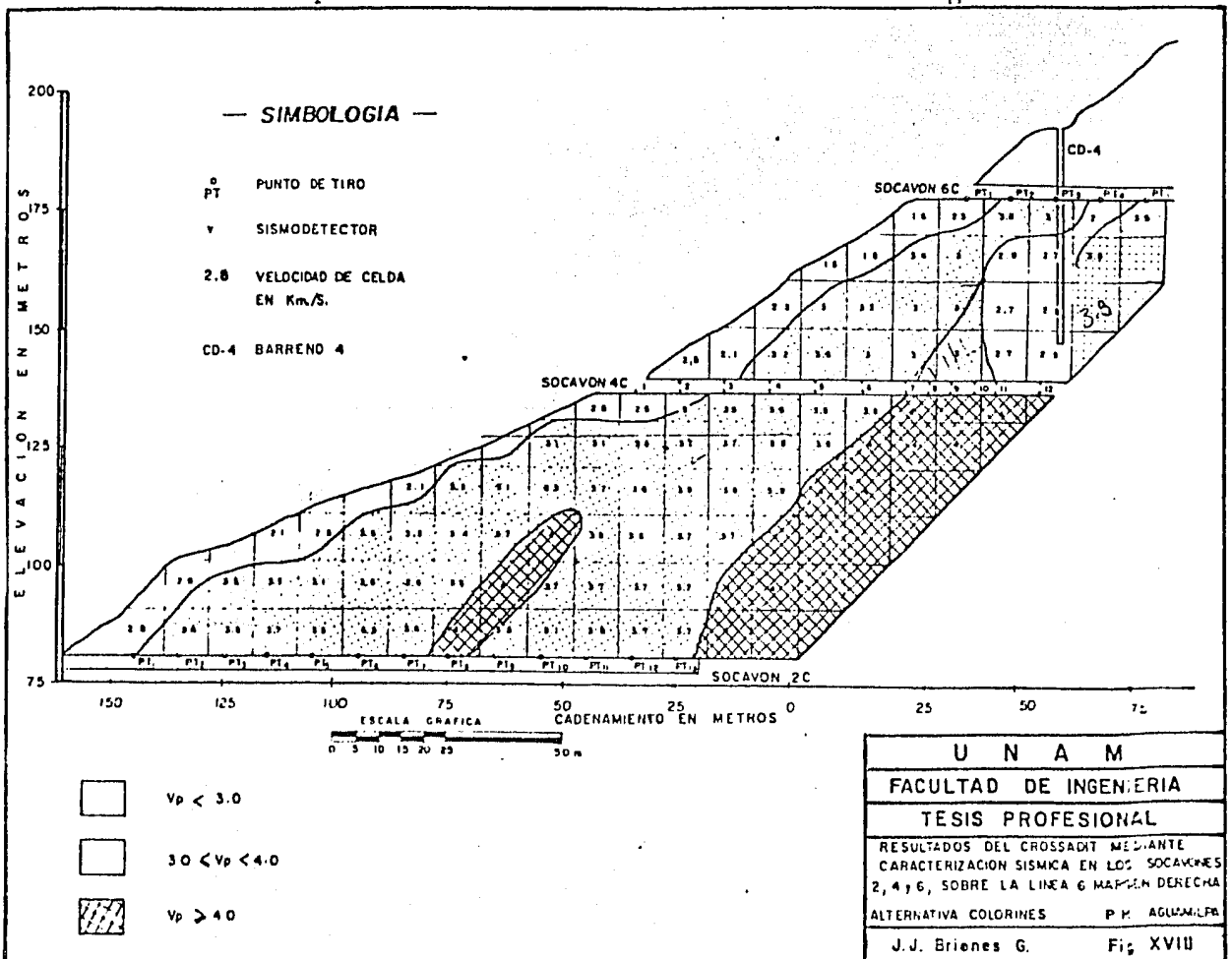
En un trabajo de factibilidad de una obra civil, el ingeniero geofísico interviene en la obtención e interpretación de las propiedades físicas del terreno en las que el ingeniero proyectista se basa para el diseño de sus estructuras. Este trabajo va dirigido a los geofísicos interesados en los desarrollos del área de geotecnia para que con ello se logre obtener una pequeña participación más en este campo.

III.2.- *Método de Crossadit.*

Esta técnica numérica (Ver ref. 11, Pág. 40), divide en celdas cuadrangulares el medio continuo en estudio. Asigna un valor inicial de velocidades a cada una. Calcula los tiempos teóricos de arribo y los compara con los valores --

obtenidos en campo a través de tendidos cortos situados en las paredes de socavones que llevan una alineación más o menos paralela, en uno de los cuales, se colocan los puntos de tiro y en el otro se detectan los frentes de onda y de acuerdo al error entre el modelo propuesto y el obtenido con los datos de campo, se modifican las velocidades de modo iterativos, de manera que la diferencia entre los tiempos reales y teóricos disminuya en cada iteración hasta lograr el mejor ajuste de velocidad de cada celda. (Ver ref. 12, págs. 969-988).

En base a esto si hacemos coincidir la malla presentada en la ref. 11, fig. XVIII con la propuesta para resolver nuestro problema estaremos dando continuidad a la Teoría desarrollada en la ref. 12 en el campo de la elasticidad lineal. Ver fig. XVIII⁽⁴⁾.



(4) reproducción íntegra hecha con autorización del autor.

Por otro lado sabemos que existen diferentes técnicas geofísicas para determinar las propiedades elásticas de un material (ver ref. 13), pero en base a que tenemos las velocidades sísmicas en cada celda y a que sólo nos interesa conocer el módulo de elasticidad (E) y la relación de Poisson (ν) en cada elemento finito utilizaremos las ecuaciones convencionales desarrolladas para un material homogéneo e isotrópico (ver ref. 11, pág. 38) que nos permiten relacionar las velocidades longitudinal y transversal con los parámetros elásticos mencionados. De la siguiente manera:

$$V_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}} \quad (\text{ km/seg }) \quad (\text{III.2.1})$$

$$V_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (\text{ Km/seg }) \quad (\text{III.2.2})$$

donde :

ρ representa la densidad del material contenido en cada elemento finito, en (kg/m^3) (de laboratorio ó registros gama-gama) V_T representa la velocidad de las ondas trasversales.

V_L representa la velocidad de las ondas longitudinales.

Por tanto :

$$E = 2\rho V_T^2 (1 + \nu) \quad (\text{ T/m}^2) \quad (\text{III.2.3})$$

y

$$v = \frac{1/2 \left(\frac{V_L}{V_T} \right)^2 - 1}{\left(\frac{V_L}{V_T} \right) - 1} \quad (\text{adimensional}) \quad (\text{III.2.4})$$

Para el caso de no haber tomado en campo los tiempos de arriba de la onda transversal puede considerarse la aproximación siguiente siempre y cuando la precisión del trabajo lo permitan.

$$V_T = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad (\text{Km/seg}) \quad (\text{III.2.5})$$

Evaluando las ecuaciones (III.2.4) y (III.2.3) con los valores de velocidades que se presentan en la fig. XVIII podemos encontrar los parámetros elásticos característicos de cada elemento finito, necesarios para nuestro algoritmo. La tabla III.2.1 contiene los resultados obtenidos.

TABLA III.2.1

Elemento No.	V_L (Km/seg)	V_T (Km/seg)	P_V (T/m ³)	v	E (T/m ²)
1	2.8	1.6	2.66	0.71	2.374x10 ⁶
2	3.8	2.2	2.80	0.68	4.642x10 ⁶
3	3.8	2.2	2.80	0.68	4.642x10 ⁶
.
.
.

III.3.- Aplicación del Método del Elemento Finito a Problemas Geoestructurales.

Hipótesis del Método de Análisis.

- 1.- Se supone un campo de desplazamientos de variación li -
neal para cada elemento finito.
- 2.- Las únicas fuerzas que actúan, son producidas por el pe-
so propio.
- 3.- La base de la sección 6 es rígida.

Malla de Elementos Finitos.

En la figura III.3.1 se muestra la malla utilizada - en el análisis indicando la numeración de cada uno de - los puntos nodales que forman la estructura, esta cons- tituida por 124 elementos repartido en dos mallas; una de 89 y la otra de 35 elementos limitadas por 106 y 45 puntos nodales respectivamente.

Programa de Computadora.

A) Propósito

Determinar mediante un método de análisis de aproxima - ción el problema elástico de distribución de esfuerzos-

en un macizo rocoso. A manera de ejemplo se propone el presentado en el margen derecho de la figura XVIII.

B) Entrada de Datos.

- 1.- Encabezado de 20 espacios como máximo que se almacena en la variable alfanumérica:

N O M E S

- 2.- Información General.

NEF, NPN, NMA, NCC, NCP, NGL, IEJ, IP. En donde, con:

IEJ.- Indicamos si queremos que nos escriba algunos resultados parciales.

IP.- Indicamos si queremos analizar un estado plano de esfuerzos ($IP = 0$), ó un estado plano de deformación ($IP = 1$).

La especificación de las variables restantes se encuentran en el apartado II.4. pag. 51.

- 3.- Coordenadas Cartesianas de los puntos nodales de la malla.

N, X, Y, ID(1), ID(2). En donde, con:

N.- Indicamos el número del punto nodal.

X.- Su coordenada en x.

Y.- Su coordenada en y.

ID(i).- Indicamos los grados de libertad de cada punto nodal. (ID(1) en la dirección x, ID(2) en la dirección y) con el número 0 si existe desplazamiento en esa dirección y con 1 si no existe.

4.- Datos de los parámetros elásticos de los materiales.

N, E, v, P_v. En donde, con :

N .- Indicamos el número del material que forman la malla.

E .- Indicamos el módulo de elasticidad o módulo de Young expresando en Ton/m².

v .- Indicamos la relación de Poisson.

P_v .- Indicamos el peso por unidad de volumen de cada material.

5.- Datos del Problema.

ANG, ESP. En donde, con :

ANG.- Indicamos el ángulo que forma el vector peso del maso rocoso contenido en cada elemento finito, con respecto a un sistema de referencia determinado.

ESP.- Es el espesor de la estructura, que para el caso de deformación plana, este siempre es unitario.

6.- Datos de los Elementos Finitos.

N, I, J, K, L, IPI, IMA. En donde, con :

N.- Indicamos el número de elemento de la malla.

I, J, K, L.- Indicamos el número con el cual nombramos los nodos que delimitan cada elemento finito.

IPI .- Indicamos el número de puntos de integración en los que evaluamos las ecuaciones de equilibrio de cada elemento.

Ejemplo: Si ponemos IPI = 2, estaremos indicando que haga la evaluación en cuatro puntos de cada elemento. Dos en la dirección ξ y dos en la dirección η .

IMA .- Indicamos con un número los diferentes materiales que componen la estructura.

7.- Nombre de las Condiciones de Carga.

COCAR

N NC, KFC

NC, Fx, Fy

En donde, con :

COCAR.- Indicamos en un encabezado de un máximo de 20 espacios, el tipo de cargas que estamos considerando (Fuerzas de cuerpo y/o cargas concen-

tradas en los nodos).

- NNC.- Indicamos el número de nodos que se encuentran cargados.
- KFC.- Indicamos si queremos considerar las fuerzas de cuerpo (KFC = 0, no se consideran y KFC = 1, si se consideran).
- NC.- Indicamos el número de nodos que se encuentran cargados.
- Fx, Fy.- Indicamos la magnitud de la carga en x, y en y (en toneladas) que se aplican al nodo cargado.

c) Almacenamiento de Datos.

Los datos anteriores se recomienda almacenarlos en un archivo de datos en el Orden presentado.

El formato de entrada es libre para todos. Por tanto este archivo de datos debe quedar de la siguiente forma :

NOMES

NEF, NPN, NMA, NCC, NCP, NGL, IEJ, IP

N, X, Y, ID(1), ID(2)

N, E, MU, Pv

ANG, ESP

N, I, J, K, L, IPI, IMA

COCAR
NNC, KFG
NC, Fx, Fy

D) *Resultados*

Para cada corrida el programa Imprime :

- 1.- El vector de desplazamientos nodales.
- 2.- El vector de esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} .
- 3.- El arreglo de los esfuerzos y direcciones principales, SS1, SS2, V MAX, DIR.
- 4.- El arreglo de deformaciones unitarias ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} , ϵ_{zz} y las deformaciones máximos y mínimos, EMAX, EMIN.

E) *Limitaciones.*

- 1.- El vector A del programa principal que controla la memoria estará sujeto a la capacidad de cada máquina.
- 2.- Será necesario que la máquina cuente con una unidad de disco para poder almacenar resultados parciales que en general consumen mucho espacio en memoria independientemente del mínimo requerido por el vector A.
- 3.- La malla debe diseñarse previamente, con todas las consideraciones geométricas necesarias. De

este ordenamiento de puntos nodales y elementos finitos dependerá la aproximación del método. La ref. 6 cap. 4 y 11 menciona algunos criterios para el diseño de mallas.

- 4.- El programa sólo calcula valores numéricos de los tensores de deformación y esfuerzo, no presenta ninguna gráfica de contornos o perfiles a partir de los cuales sería mucho más sencillo su análisis e interpretación pudiéndose hacer las modificaciones pertinentes en pantalla.

Resultados.

Desplazamientos Nodales.

En la fig. II.3.2 se presenta la configuración de la malla debida a los desplazamientos nodales que produce el peso propio de la estructura. Puede apreciarse que la tendencia general es hacia abajo y hacia su parte de mayor volumen.

Se observa que los máximos desplazamientos verticales para esta condición de carga ocurren en los elementos de las capas inferiores con una magnitud superior a los 0.17 m.

El modelo adaptado para representar el comportamiento del material es elástico no tanto porque dicho modelo represente realmente la forma de comportarse de los materiales que componen el masaso, sino más bien porque con ello se representa satisfactoriamente el comportamiento de todo el conjunto, es decir de la estructura

en si. Por tanto, los resultados obtenidos deben considerarse únicamente representativos del orden de magnitud y de distribución en las capas y no como un resultado de exactitud matemática sujeto a comprobación experimentada.

Distribución de Esfuerzo.

En la fig. III.3.3 se muestra la magnitud y distribución de los esfuerzos cortantes máximos correspondientes a la condición de carga de gravedad. Se puede observar que en general, para un mismo nivel los esfuerzos son mayores en la zona del material de mayor rigidez.

Existe una zona de concentración de esfuerzos en la parte baja de la estructura, con tendencia a incrementar la magnitud del valor del esfuerzo en la parte expuesta a la presión hidrostática.

La distribución de esfuerzos en la arcilla varía notablemente para un mismo nivel obteniéndose en este caso mayor contraste en aquellas capas con mayor índice de saturación de agua.

En las figuras III.3.4 y III.3.5 se presentan las magnitudes y distribuciones de los esfuerzos máximos y mínimos respectivamente.

Todos los valores de los esfuerzos principales máximos contenidos en las zonas centrales de las mallas analizadas son de compresión* a excepción de los contornos comprendidos por el talúd del masiso y las paredes de los socavones que muestran en estado de tensión con tendencia a incrementar su valor en la parte superior del socavón 2c.

*Pese a que el algoritmo provee a las compresiones de signos negativos nosotros al momento de hacer la interpretación en las figuras siguientes adoptamos lo expuesto en el apéndice F. Es decir, lo contrario.

Para el caso de los esfuerzos principales máximos de tensión localizadas en las partes próximas al pozo CD 4 y en base a los bajos valores obtenidos de esfuerzos cortantes en esas zonas se pueden delimitar posibles franjas de fallas asociadas al Proceso de perforación.

En las figuras III.3.6 y III.3.7 se muestran los resultados del análisis de carga de gravedad en los cuales se observan las distribuciones de los esfuerzos asociados a las direcciones x y y de un sistema ortogonal de referencia.

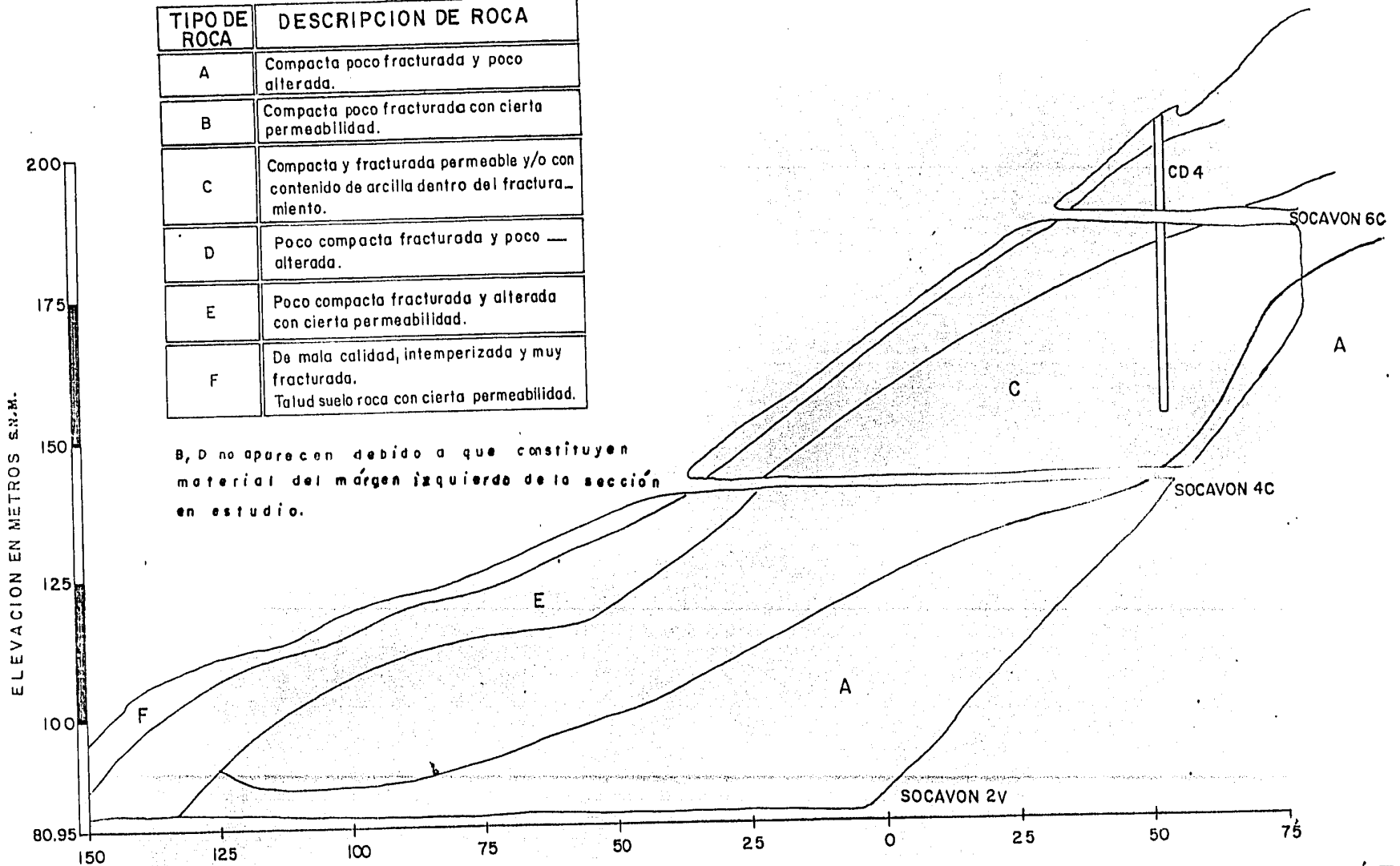
Se observa la presencia de concentraciones de ambos esfuerzos en la base de la cortina.

Los esfuerzos acumulados horizontales y verticales máximos se presentan en el tercio superior de la estructura en el material arcilloso.

Existen franjas de tensión en el talúd principal, siendo ligeramente mayores los valores del esfuerzo conforme nos acercamos a la base debido a la presión hidrostática.

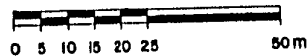
TIPO DE ROCA	DESCRIPCION DE ROCA
A	Compacta poco fracturada y poco alterada.
B	Compacta poco fracturada con cierta permeabilidad.
C	Compacta y fracturada permeable y/o con contenido de arcilla dentro del fracturamiento.
D	Poco compacta fracturada y poco alterada.
E	Poco compacta fracturada y alterada con cierta permeabilidad.
F	De mala calidad, intemperizada y muy fracturada. Talud suelo roca con cierta permeabilidad.

B, D no aparecen debido a que constituyen material del margen izquierdo de la sección en estudio.



CADENAMIENTO EN METROS

ESCALA GRAFICA



UNAM

FACULTAD DE INGENIERIA

PERFIL DE CALIDAD DE ROCA

Ricardo O. Vázquez Romero

FIG. XXI

MALLA Y NUMERACION DE LOS PUNTOS NODALES EN LA APLICACION DEL ELEMENTO FINITO

NOTAS:

La primera malla esta dividida en 89 elementos y por 106 puntos nodales.


La segunda malla esta dividida en 35 elementos y por 45 puntos nodales.

Los números encerrados en círculo se refieren a un elemento.

Los números solo se refieren a los puntos nodales.

SIMBOLOGIA:

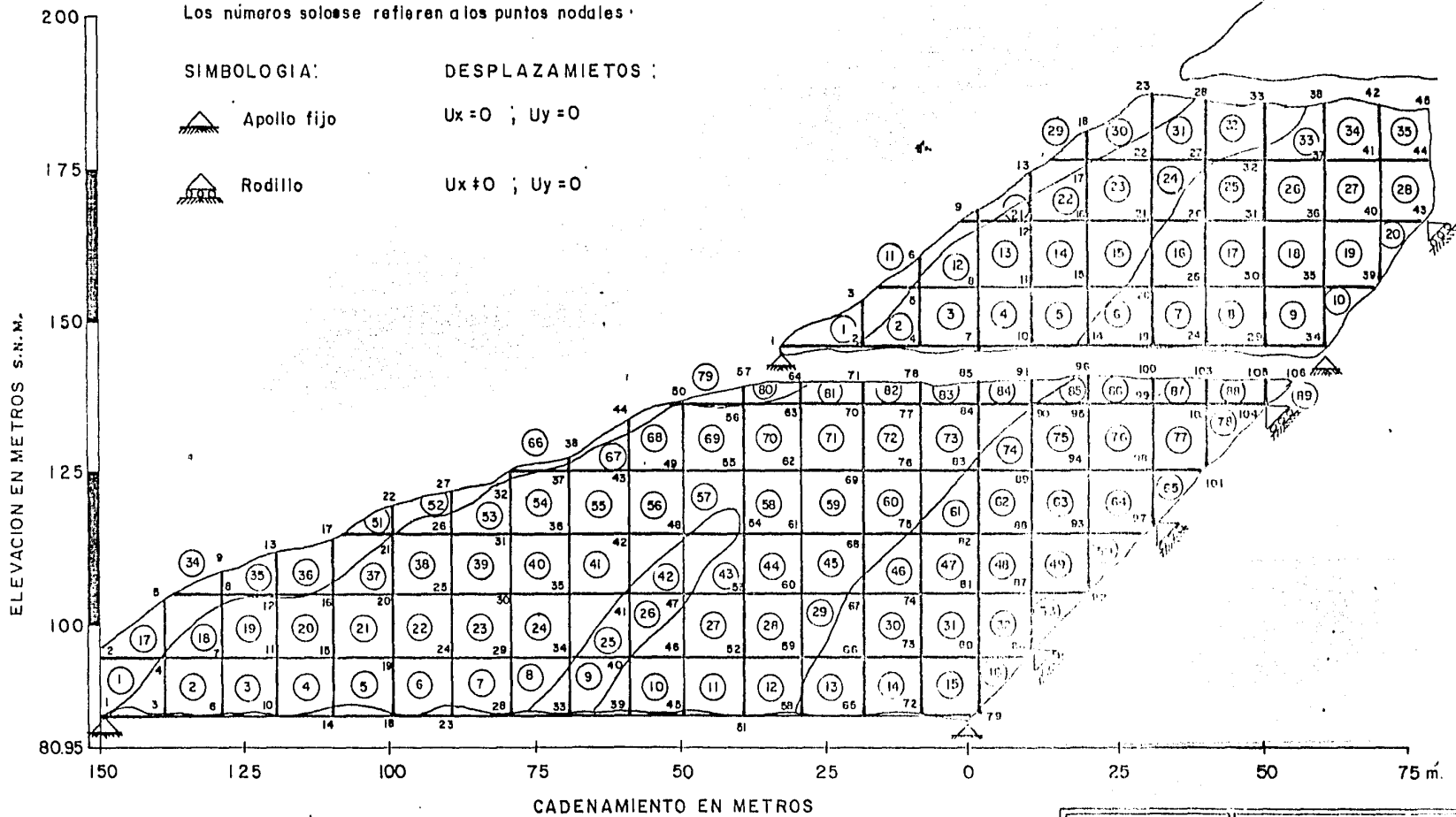
 Apoyo fijo

 Rodillo

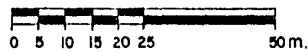
DESPLAZAMIENTOS:

$U_x = 0 ; U_y = 0$

$U_x \neq 0 ; U_y = 0$



ESCALA GRAFICA

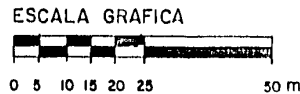
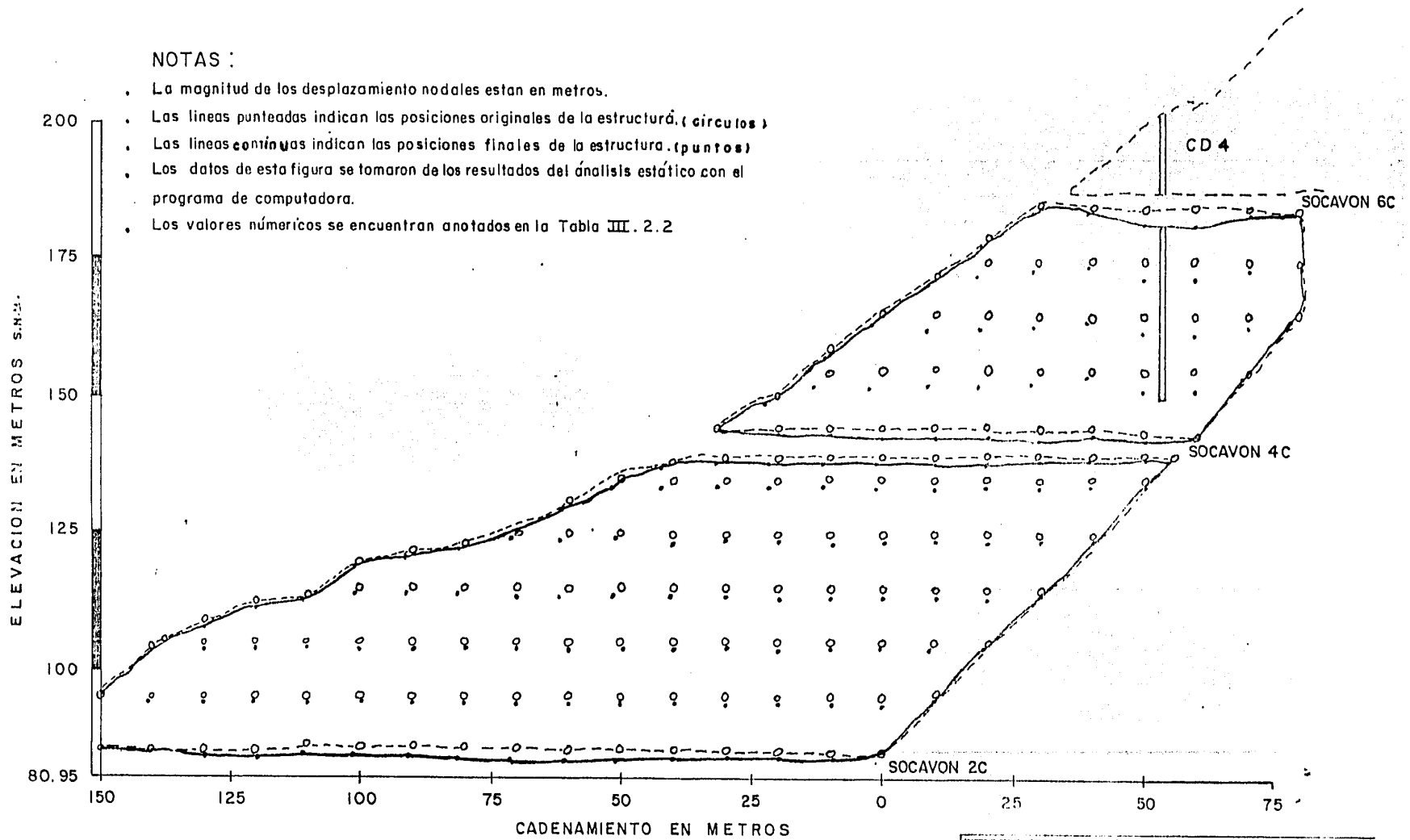


UNAM	FACULTAD DE INGENIERIA
MALLA Y NUMERACION DE LOS PUNTOS NODALES EN LA APLICACION DEL ELEMENTO FINITO	
Ricardo O. Vázquez Romero	FIG. III. 3.1

DESPLAZAMIENTOS ORIGINADOS POR EL PESO PROPIO DE LA ESTRUCTURA

NOTAS :

- La magnitud de los desplazamiento nodales estan en metros.
- Las líneas punteadas indican las posiciones originales de la estructura. (círculos)
- Las líneas continuas indican las posiciones finales de la estructura. (puntos)
- Los datos de esta figura se tomaron de los resultados del análisis estático con el programa de computadora.
- Los valores numéricos se encuentran anotados en la Tabla III. 2.2

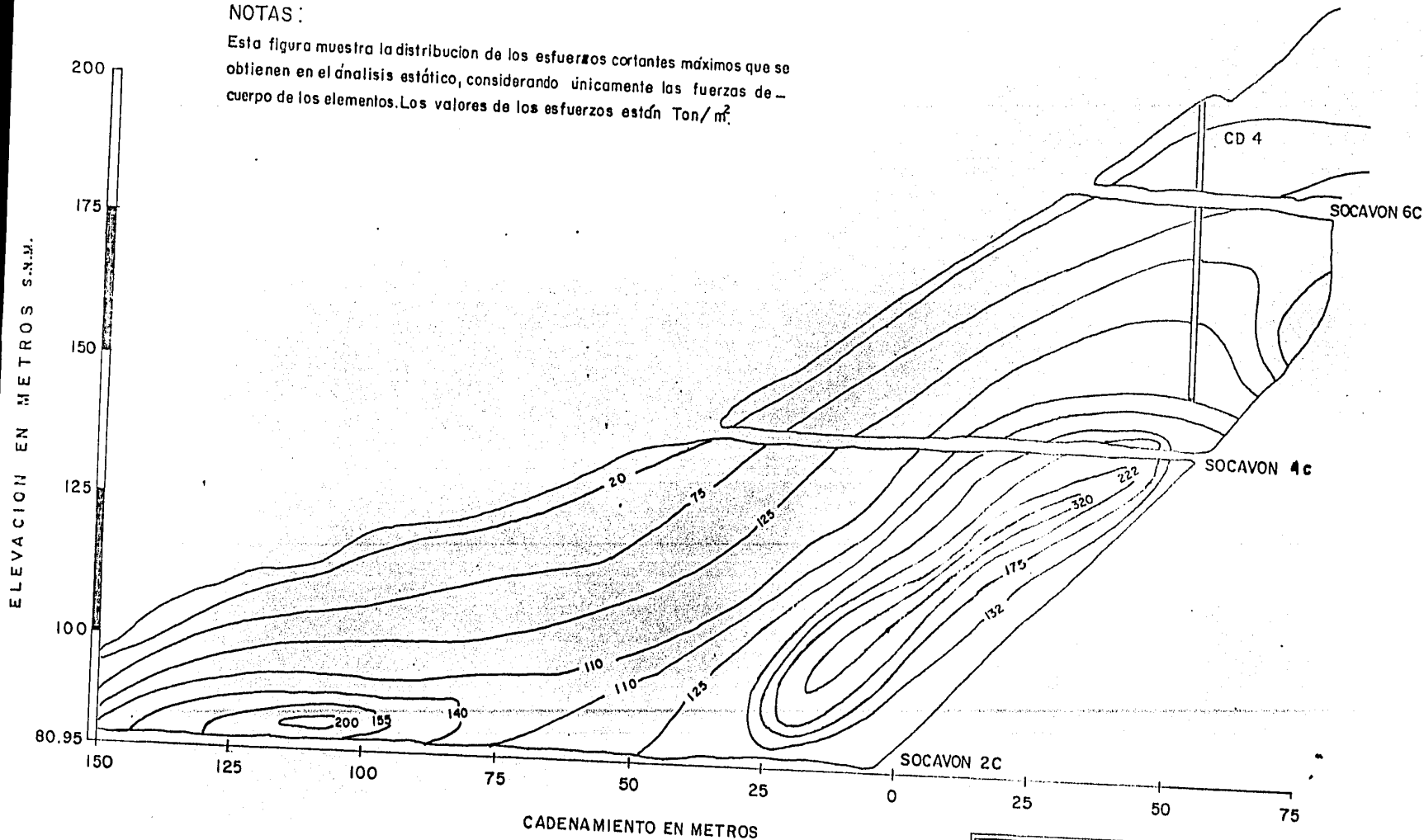


UNAM	FACULTAD DE INGENIERIA
DESPLAZAMIENTOS ORIGINADOS POR EL PESO PROPIO DE LA ESTRUCTURA	
Ricardo O. Vázquez Romero.	FIG. III. 3.2

ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS DEL ANALISIS ESTATICO

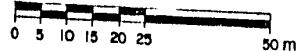
NOTAS:

Esta figura muestra la distribución de los esfuerzos cortantes máximos que se obtienen en el análisis estático, considerando únicamente las fuerzas de cuerpo de los elementos. Los valores de los esfuerzos están Ton/m^2 .



CADENAMIENTO EN METROS

ESCALA GRAFICA



UNAM

FACULTAD DE
INGENIERIA

ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS
DEL ANALISIS ESTATICO

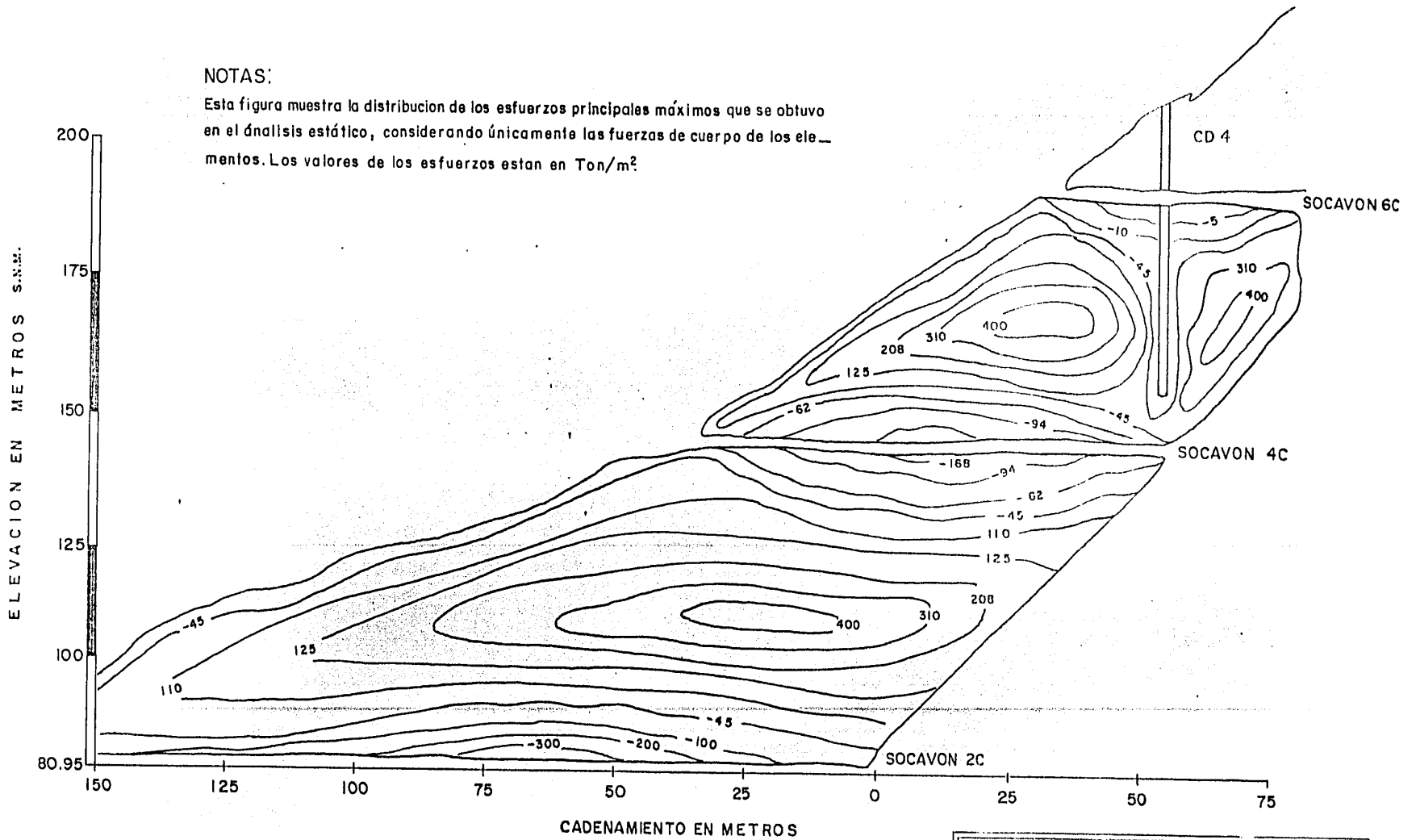
Ricardo O. Vázquez Romero

FIG. III. 3.3

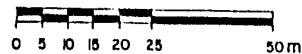
ESFUERZOS PRINCIPALES MAXIMOS DEL ANALISIS ESTATICO

NOTAS:

Esta figura muestra la distribución de los esfuerzos principales máximos que se obtuvo en el análisis estático, considerando únicamente las fuerzas de cuerpo de los elementos. Los valores de los esfuerzos están en Ton/m².



ESCALA GRAFICA



UNAM FACULTAD DE INGENIERIA

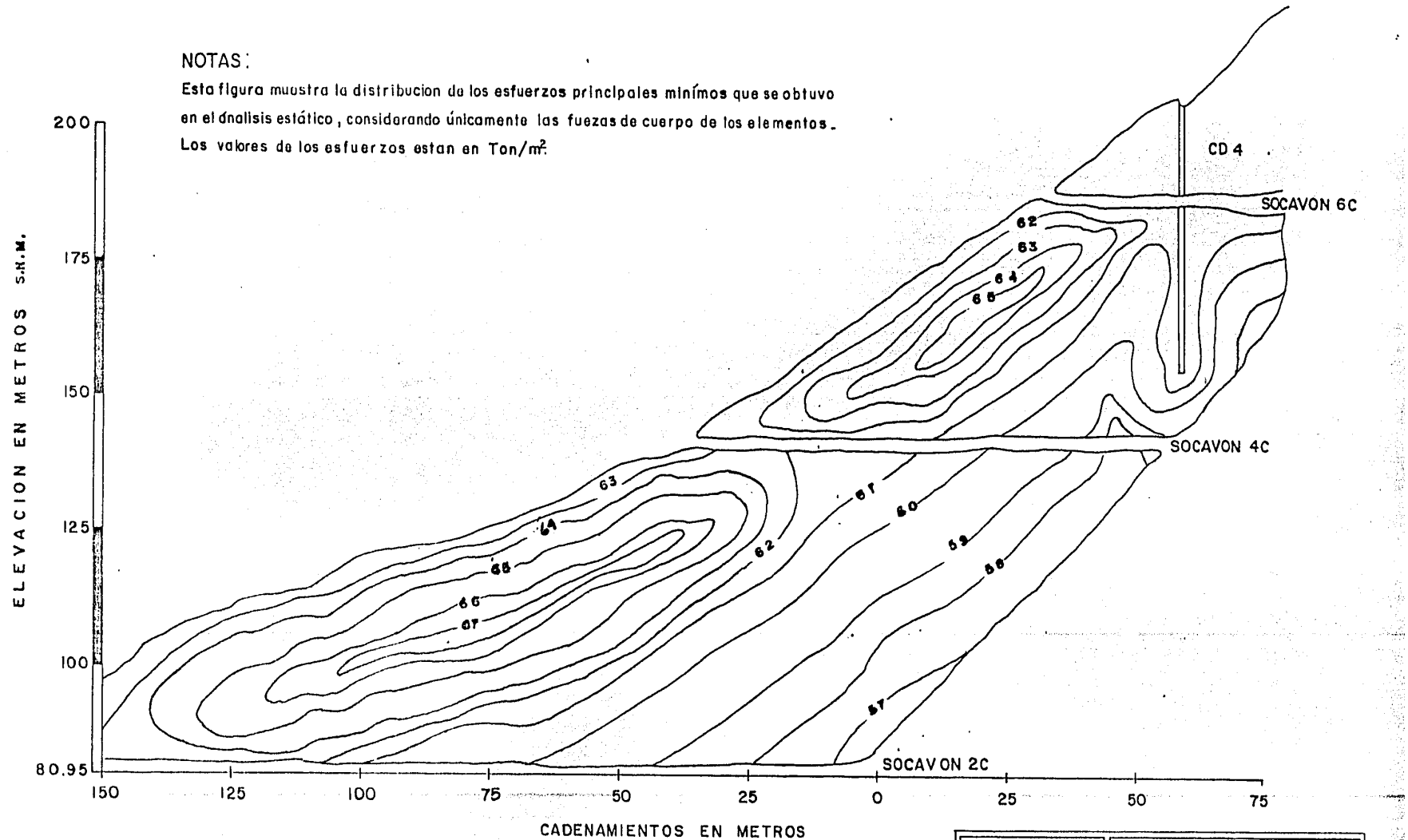
ESFUERZOS PRINCIPALES MAXIMOS DEL ANALISIS ESTATICO

Ricardo O. Vázquez Romero FIG. III. 3.4

ESFUERZOS PRINCIPALES MINIMOS DEL ANALISIS ESTATICO

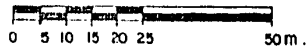
NOTAS:

Esta figura muestra la distribución de los esfuerzos principales mínimos que se obtuvo en el análisis estático, considerando únicamente las fuerzas de cuerpo de los elementos. Los valores de los esfuerzos están en Ton/m².



CADENAMIENTOS EN METROS

ESCALA GRAFICA



UNAM	FACULTAD DE INGENIERIA
ESFUERZOS PRINCIPALES MINIMOS DEL ANALISIS ESTATICO	
Ricardo O. Vazquez Romero.	FIG. III. 3.5

III.4.- Aplicación del Método del Elemento Finito a problemas de distribución del potencial eléctrico en el subsuelo.

Partiendo de lo anterior en esta sección presento una aplicación más del método a la geofísica, con la finalidad de respaldar la utilidad que nos brinda.

Se advierte que la moderación que se usa en esta sección es la matemática y consiste en expresar el fenómeno en el dominio del elemento finito, de esta forma quedan susceptibles a automatizarse mediante un algoritmo similar al propuesto anteriormente.

Siguiendo la secuencia esquemática presentada al principio del capítulo I, una vez discretizado el continuo en un número finito de elementos interconectados mediante puntos nodales se procede como segundo paso a la obtención de la ley de comportamiento de cada elemento, tomando en consideración la formulación variacional que la Teoría electromagnética nos ofrece en el principio de Hamilton el cual nos dice: La energía por unidad de tiempo (potencia electromagnética) disipada por un volumen dado es mínima.

Esto es, para el caso de una señal continua, la potencia electromagnética (ψ_T) en un medio bidimensional (Consultar Apéndice G) es:

$$\psi_T = \int_v [\sigma (\nabla\phi)^2 - 2I \delta(x-x') \delta(z-z') \phi] dv \quad (\text{III.4.1})$$

Donde:

$\phi(x, z)$.- representa la función de potencial eléctrico ($\vec{E} = -\nabla\phi$), en el dominio de la frecuencia.

σ .- representa la conductividad del material.

I .- representa la intensidad de corriente que se inyecta al medio.

δ .- Es la función delta de Dirac
(x', z').- Son las coordenadas de la fuente excitadora -
dentro del medio.

El gradiente al cuadrado nos proporciona un valor -
escalar, de acuerdo al siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}(\nabla\phi)^2 &= \nabla\phi \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial z}, K\phi\right) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial z}, K\phi\right) \\(\nabla\phi)^2 &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + (K\phi)^2\end{aligned}\quad (\text{III.4.1a})$$

K ; Variable de Transformación en el Dominio de Fourier.

Minimizando la ecuación (III.4.1), de acuerdo al prin-
cipio de Hamilton, se obtiene:

$$\Delta\psi_T = \Delta \int_v \left[\sigma(\nabla\phi)^2 - 2I \delta(x-x') \delta(z-z') \phi \right] dv = 0 \quad (\text{III.4.2})$$

Donde, Δ significa la primera variación que opera so-
bre la función de potencial que constituye nuestra varia-
ble independiente.

DISCRETIZACION DEL PRINCIPIO VARIACIONAL PROPUESTO.

con la finalidad de establecer la solución aproximada, -
podemos expresar los potenciales ϕ en función de los -
valores que esta función adopta en los puntos nodales de
interés, para este punto ya debemos tener elegida la geo-
metría del elemento utilizado para la discretización.
Siguiendo el desarrollo del problema anterior en esta sec-
ción también se utiliza el cuadrilátero lineal como ele-
mento genérico del continuo global, con nodos en sus 4 -
vértices denotados por los subíndices (i, j, k, l), tal
como se presenta en la figura II.2.1. De esta forma la
expansión al valor de la función de potencial se lleva a
cabo a través de una aproximación lineal del tipo.

$$\phi(x, z) \approx N_i(x, z)\phi_i + N_j(x, z)\phi_j + N_k(x, z)\phi_k + N_l(x, z)\phi_l \quad (\text{III.4.3})$$

Donde:

Las funciones N , son las funciones de forma referidas anteriormente (en el dominio espacial) y las ϕ_n son los valores que adopta la función de potencial en los puntos nodales del elemento de tal forma que sus valores quedan fijos en el dominio espacial y solo dependen de los valores que adopta la corriente eléctrica y la conductividad en los materiales.

Ordenando en forma de vector la ecuación (III.4.3) nos queda:

$$\phi_e = \underline{N} \underline{\phi}_e \quad (\text{III.4.4})$$

Donde :

$$\underline{N} = [N_i \quad N_j \quad N_k \quad N_l] \quad (\text{III.4.5})$$

$$y \quad \underline{\phi}_e^T = [\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_k \quad \phi_l] \quad (\text{III.4.6})$$

Descomponiendo la integral (III.4.2), en una suma de integrales definidas en subdominios (elementos finitos) de tal forma que el conjunto recupere completamente el dominio total de la ecuación original. De esta forma podemos expresar la ecuación (III.4.1) como:

$$\int_V [\sigma \Delta(\nabla\phi)^2 - 2I \delta(x-x')(z-z')\Delta\phi] dv = \sum_{e=1}^n \int_{V_e} [\sigma_e \Delta(\nabla\phi_e)^2 - 2I_e \delta(x-x')\delta(z-z') \Delta\phi_e] dv = 0 \quad (\text{III.4.7})$$

Donde :

e representa un elemento genérico de la malla.

Para un elemento finito la ecuación (III.4.7) se representa -
como :

$$\int_{V_e} [\sigma_e \Delta (\nabla \phi_e)^2 - 2I_e \delta(x-x') \delta(z-z') \Delta \phi_e] dv = 0 \quad (\text{III.4.8})$$

sust. la ec. (III.4.4) en la ec. (III.4.1a), se obtiene para el dominio del elemento finito

$$(\nabla \phi_e)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{N} \phi_e \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \underline{N} \phi_e \right)^2 + (K \underline{N} \phi_e)^2 \quad (\text{III.4.9})$$

Como el potencial eléctrico en los puntos nodales es independiente de las coordenadas espaciales, el operador diferencial solo queda aplicado sobre el vector \underline{N} , de esta forma tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\underline{N} \phi_e) = \underline{B_x} \phi_e \quad (\text{III.4.10})$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z} (\underline{N} \phi_e) = \underline{B_z} \phi_e \quad (\text{III.4.11})$$

Donde :

$$\underline{B_x} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad \frac{\partial N_k}{\partial x} \quad \frac{\partial N_l}{\partial x} \right] \quad (\text{III.4.12})$$

y

$$\underline{B_z} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial z} \quad \frac{\partial N_j}{\partial z} \quad \frac{\partial N_k}{\partial z} \quad \frac{\partial N_l}{\partial z} \right]$$

Son vectores cuyos componentes resultan de la aplicación del operador diferencial sobre las funciones de forma ya conocidas. Se puede apreciar que la forma de estos vectores es similar a la presentada por la matriz de deformaciones del problema estructural. La diferencia de las dimensiones se debe a que para este caso la función sobre la que venimos operando (función de potencial eléctrico) genera rangos escalares mientras que la función del problema anterior generaba rangos vectoriales (componente de desplazamiento en x y en y).

Sust. las ecs. (III.4.10) y (III.4.11) en la ec. (III.4.9) obtenemos:

$$(\nabla\phi_e)^2 = (\underline{B}_x \phi_e)^2 + (\underline{B}_z \phi_e)^2 + (K \underline{N} \phi_e)^2 \quad (\text{III.4.13})$$

Sust. las ecs. (III.4.4) y (III.4.13) en la ec. (III.4.8) se obtiene:

$$\int_{V_e} \left\{ \sigma^e \left[\frac{\partial}{\partial \phi_e} (\underline{B}_x \phi_e)^2 + \frac{\partial}{\partial \phi_e} (\underline{B}_z \phi_e)^2 + (K \underline{N} \phi_e)^2 \right] - 2I \delta(x-x') \delta(z-z') \underline{N} \right\} dv = 0 \quad (\text{II.4.14})$$

aplicando el operador diferencial y reordenando, obtenemos:

$$\int_{V_e} 2\sigma^e (\underline{B}_x \phi_e \underline{B}_x + \underline{B}_z \phi_e \underline{B}_z + K^2 \underline{N} \phi_e \underline{N}) dv = \int_{V_e} 2I \delta(x-x') \delta(z-z') \underline{N} dv \quad (\text{III.4.15})$$

Como ϕ_e no depende de las coordenadas espaciales, puede salir del integrando:

$$\left(\int_{V_e} \sigma^e (\underline{B}_x \underline{B}_x^T + \underline{B}_z \underline{B}_z^T + K^2 \underline{N} \underline{N}^T) dv \right) \phi_e^T = \int_{V_e} I \delta(x-x') \delta(z-z') \underline{N} dv \quad (\text{III.4.16})$$

la ec. (III.4.16) expresada en columna nos queda:

$$\left(\int_{V_e} \sigma_e (\underline{B}_x \underline{B}_x^T + \underline{B}_z \underline{B}_z^T + K^2 \underline{N} \underline{N}^T) dv \right) \underline{\phi}_e = \int_{V_e} I \delta(x-x') \delta(z-z') \underline{N}^T dv$$

(III.4.17)

Donde el valor de la integral en el segundo miembro solo se evalua en los puntos de coordenadas (x^1, z^1) debido a la función delta de Dirac. De esta forma su valor es igual a cero si el elemento en cuestión no tiene en su interior una fuente excitadora.

Simplificando la ecuación (III.4.17), obtenemos :

$$\underline{k}_e \underline{\phi}_e = \underline{F}_e$$

(III.4.18)

Donde :

$$\underline{k}_e = \int_{V_e} \sigma_e (\underline{B}_x \underline{B}_x^T + \underline{B}_z \underline{B}_z^T + K^2 \underline{N} \underline{N}^T) dv$$

y

$$\underline{F}_e = \int_{V_e} I \delta(x-x') \delta(z-z') \underline{N}^T dv$$

(III.4.19)

para recuperar el continuo global, sumamos las contribuciones que aporta cada elemento a cada nodo. Estas sumas deben de finirse en el programa minuciosamente a fin de considerar todos los elementos finitos que contribuyen en cada nodo. Para tener una idea particular de esto, ver las subrutinas de ensamble que se utilizaron para resolver el problema estructural para formar

la matriz global de rigideces y el vector global de cargas. Sin olvidar que para este caso estamos trabajando con funciones escalares que resultan más sencillas de tratar. De esta forma la ecuación que caracteriza el sistema queda representada mediante:

$$\underline{K} \phi = F \quad (\text{III.4.20})$$

Donde :

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^n k_e \quad (\text{III.4.21})$$

$$F = \sum_{e=1}^n F_e$$

y $\phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_n]$ n = número de puntos nodales.

El sistema expresado por la ec. (III.4.20), es del tipo lineal que resulta más sencillo de resolver que el sistema original expresado por la ec. (III.4.2).

Finalmente una vez obtenidos los valores del potencial en los nodos de la malla, estamos en condiciones de aproximar la distribución de ϕ , a través de la ec. (III.4.3) en cualquier punto del espacio incluido por la malla.

El siguiente paso consiste en calcular el parámetro conocido como resistividad aparente y compararlo con las curvas de resistividad aparente obtenidas a partir de mediciones de campo, modificando como es usual la distribución bidimensional de conductividades y recalculando la distribución de potenciales eléctricos, hasta lograr el ajuste conveniente entre el modelo teórico y el real.

Para esto debemos considerar que la solución del sistema matricial (III.4.20) proporciona los valores del potencial transformado a diferentes números de onda K , para cada uno de los nodos de la malla.

El valor del potencial ϕ en el espacio real, para un punto de la malla, se obtiene haciendo una transformación inversa de Fourier, de la siguiente forma :

$$\hat{\phi}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, K, z) \cos (Ky) dk \quad (\text{III.4.22})$$

La figura siguiente muestra la distribución de potencial transformado para un punto de la malla.

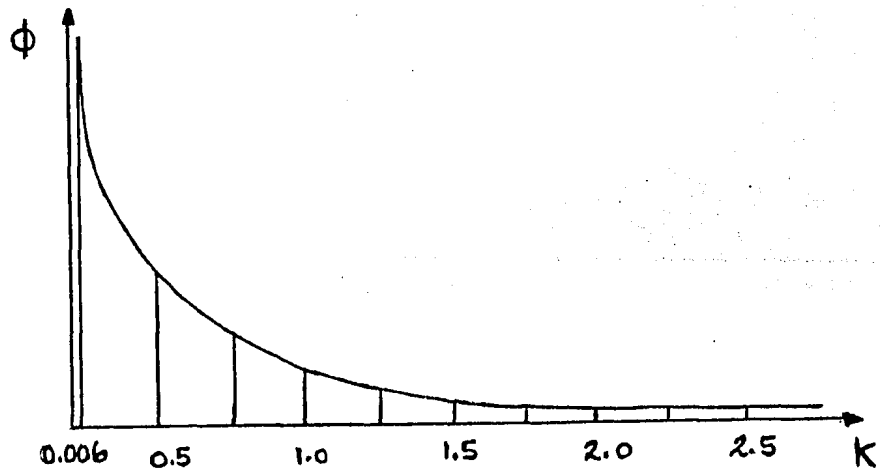


Fig. III.4.1 Representación de los potenciales transformados.

Para efectuar la transformación inversa de Fourier, es necesario ajustar una curva que facilite el cálculo de la integral de transformación. La solución analítica en el espacio transfor

mado para un semiespacio homogéneo con fuentes internas, es una suma de K_0 (funciones modificadas de Bessel de orden cero). Esto es :

$$\phi(x,K,z) = aK_0(K \sqrt{(x-x'_1)^2 + (z-z'_1)^2}) + bK_0(K \sqrt{(x-x'_2)^2 + (z-z'_2)^2})$$

(III.4.23)

donde a y b son los coeficientes del ajuste, x y z la posición del punto a transformar, (x'_1, z'_1) , (x'_2, z'_2) las posiciones de la fuente y sumidero y K el valor de la variable de transformación de Fourier.

El valor del potencial ϕ en el dominio del espacio se calcula integrando la ecuación (III.4.23), como se indica en la ecuación (III.4.22), el resultado de la operación nos indica que :

$$\hat{\phi}(x,0,z) = a/\sqrt{(x-x'_1)^2 + (z-z'_1)^2} - b/\sqrt{(x-x'_2)^2 + (z-z'_2)^2}$$

(III.4.24)

Con la cual podremos evaluar el potencial eléctrico en el dominio del espacio en cualquier punto de la malla en que se discretiza nuestro modelo.

Ahora bien, debido a que en los métodos de exploración Geoelectrica el valor de las potenciales se toman solo en la superficie del terreno el proceso de transformación inversa de los potenciales obtenidos por medio de esta teoría solo se debe aplicar en los nodos de la malla que se encuentren en la superficie, produciendo así un considerable ahorro de tiempo. Finalmente los valores de potencial obtenidos mediante la ecuación (III.4.24) se pueden utilizar para evaluar uno de los parámetros fundamentales en la --

interpretación de los datos de campo en la prospección Geoelectrica: la resistividad aparente del modelo propuesto.

En el marco de los desarrollos de esta teoría, la resistividad aparente debe obtenerse mediante el método de las imágenes de la teoría electromagnética, debido a que las fuentes de corriente se suponen localizadas a cierta profundidad. Esto es ver la siguiente figura :

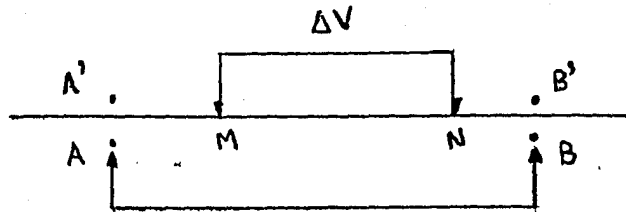


Fig. III.4.2 Arreglo electródico colineal de campo.

donde A y B son las posiciones de los electrodos de corriente, A' y B' son las posiciones de las imágenes de las fuentes de corriente y, M y N son las posiciones de los electrodos de potencial.

De acuerdo a la geometría del dispositivo anterior la resistividad aparente queda representada como :

$$\rho_A = 4\pi \left[\frac{1}{MA} + \frac{1}{MA'} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{MB'} - \frac{1}{NA} - \frac{1}{NA'} + \frac{1}{NB} + \frac{1}{NB'} \right]^{-1} \frac{\Delta V_{MN}}{I_{AB}} \quad (\text{III.4.25})$$

Si consideramos superficies de interfases planas en la figura III.4.2 se puede apreciar que las distancias de los elec-

todos de potencial a las fuentes y fuentes imagen son iguales entre sí, de donde la ecuación (III.4.25) se reduce a :

$$\rho_A = 2\pi \left[1/\overline{MA} - 1/\overline{MB} - 1/\overline{NA} + 1/\overline{NB} \right]^{-1} \Delta V_{MN} / I_{AB}$$

(III.4.26)

con la que podemos evaluar las curvas de resistividades apa - rentes en sondeos electricos verticales (SEV).

III,5.- APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO A PROBLEMAS DE FLUJO EN MEDIOS POROSOS

Como se puede consultar en el apéndice H, al final de este trabajo, la fórmula de *Darcy* describe el flujo de un fluido cuando este se desplaza a bajas velocidades de tal modo que, las fuerzas inerciales pueden ser omitidas sin pérdida sensible en la exactitud de los cálculos. Como en el caso del flujo de filtración las potenciales se suelen dar en términos de cargas hidráulicas, entonces con el propósito de particularizar la notación de hará uso de la siguiente nomenclatura :

z = Elevación sobre el nivel de referencia.

γ = Peso unitario del fluido.

$h = \phi = \frac{p}{\gamma} + z$ Carga hidráulica.

$\frac{\partial h}{\partial x}$ = Componente del gradiente hidráulico en la dirección del eje x .

$\frac{\partial h}{\partial y}$ = Componente del gradiente hidráulico en la dirección del eje y .

K_x = Componente principal de la elipse de direcciones dirigida según el eje x .

K_y = Componente principal de la elipse de direcciones dirigida según el eje y .

V_x = Componente de la velocidad del flujo o gasto por unidad de área en la dirección x .

V_y = Componente de la velocidad del flujo o gasto por unidad de área en la dirección y .

La ecuación a resolver, para ciertas condiciones de frontera dadas (ver apéndice H), es la ecuación (H.12.8)

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x T \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y T \frac{\partial h}{\partial y}) = W(x,y)$$

Ahora bien, si el flujo toma lugar en el espacio tridimensional, se acostumbra tomar una sección recta tal que $T=1$ y la ecuación anterior se transforma en :

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial h}{\partial y}) = w(x,y) \quad \text{(III.5.1)}$$

Donde $W(x,y)$ es la potencia de la fuente o del sumidero - en unidades de gasto por unidades de área por unidad de longitud.

Si, además, el medio es isotrópico, entonces :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{W(x,y)}{k} \quad \text{(III.5.2)}$$

Donde k es la constante de permeabilidad. En caso de -
trabajarse problemas que preservan la simetría respecto a un -
eje central conviene usar coordenadas cilíndricas (r, z) y la
ecuación a trabajar será :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k_r r \frac{\partial h}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial h}{\partial z}) = 0 \quad (\text{III.5.3})$$

Se hace notar que no se requiere mantener constante las --
direcciones de los ejes x e y en el dominio donde el flujo se
presenta, lo que si se requiere es que dichas direcciones se manan --
tengan constantes en cada uno de los elementos en los cuales se
subdividió el dominio.

ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES :

Si bien es cierto que el planteamiento teórico aquí desa -
rollado permite evaluar el gasto para el flujo de filtración en
medios isotrópicos y anisotrópicos, como se verá, esto se puede
lograr bajo el simple artificio de considerar, en los elementos
finitos, constantes a los parámetros que aparecen en (III.5.1),
así pues, de acuerdo a esto es suficiente tomar a (III.5.1) --
como una ecuación diferencial parcial de segundo orden con coefi
cientes constantes.

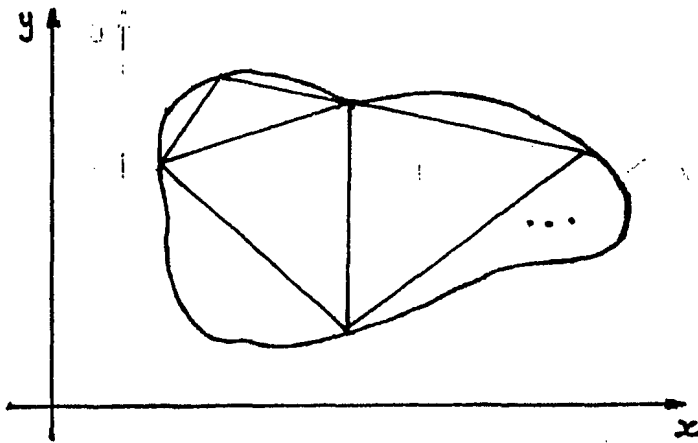
Con el propósito de exáminar, por el momento, el caso gene
ral atiéndase la siguiente ecuación donde se busca la solución
 u :

$$-\frac{\partial}{\partial x} (a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) + a_{00} u - f = 0 \quad (\text{III.5.4})$$

y son dadas las constantes a_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$, la función f y las condiciones de frontera.

El método en cuestión está basado en sustituir la región Ω por una malla de figuras planas, en nuestro caso, triángulos o rectángulos, que la aproximen tal y como se muestra en la figura III.5.1 :

Fig. III.5.1



Tómese ahora Ω^e un elemento arbitrario de la malla en cuestión (Véase la Figura III.5.2):

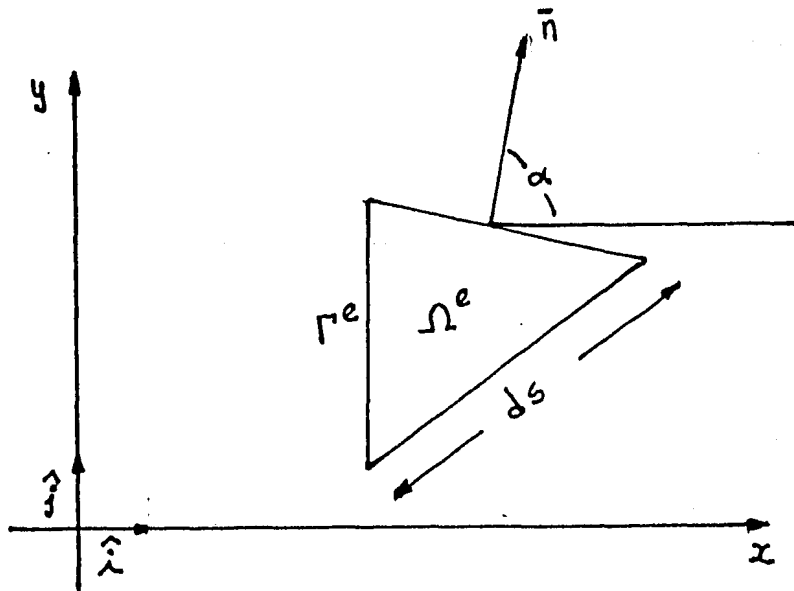


Fig. III.5.2

Tomando ahora :

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{III.5.5.5a})$$

$$F_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{III.5.5b})$$

entonces la forma variacional de (III.5.4) limitada al elemento Ω^e es :

$$0 = \int_{\Omega^e} v \left[- \frac{\partial}{\partial x} (F_1) - \frac{\partial}{\partial y} (F_2) + a_{00} u - f \right] dx dy$$

(III.5.6)

atendiendo seguidamente a los dos primeros términos del integrando :

$$- v \frac{\partial F_1}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (v F_1) + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 \quad (\text{III.5.7a})$$

$$- v \frac{\partial F_2}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} (v F_2) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2 \quad (\text{III.5.7b})$$

Si ahora se toma :

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} = \cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{j} \quad (\text{III.5.8})$$

entonces de acuerdo al Teorema de la Divergencia se tiene :

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} (vF_1) dx dy = \int_{\Gamma^e} vF_1 n_x ds \quad (\text{III.5.9a})$$

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} (vF_2) dx dy = \int_{\Gamma^e} vF_2 n_y ds \quad (\text{III.5.9b})$$

mediante (III.5.7) y (III.5.9) la fórmula (III.5.6) adquiere la siguiente presentación cuando se evalúa el elemento Ω^e

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} (a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial v}{\partial y} (a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) + a_{00} vu - vf \right] dx dy =$$

$$- \int_{\Gamma^e} v \left[n_x (a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) + n_y (a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) \right] ds$$

(III.5.10)

En ésta última ecuación, al observar el término correspondiente a la integral sobre la frontera, se infiere que la condición natural de frontera es :

$$q_n = n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

(III.5.11)

en otras palabras, u es la variable primaria y q es la variable secundaria.

Así pues, la expresión variacional correspondiente a (III.5.4) es :

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} vu - vf \right] dx dy -$$

$$\int_{\Gamma^e} v q_n ds \quad (III.5.12)$$

APROXIMACION DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

A efecto de aproximar la variable u , la forma variacional -

(III.5.7) hace ver por lo menos dicha variable u debe ser bilineal en x e y . Sea así :

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (\text{III.5.13})$$

donde u_j da el valor de u en el punto (x_j, y_j) y ψ_j son funciones lineales de interpolación tales que :

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (\text{III.5.14})$$

La forma específica de ψ_j se presentará un poco más adelante, y en este trabajo se tomará exclusivamente en concordancia con elementos triangulares y rectangulares.

Si ahora se sustituye u por (III.5.13) y v por ψ_i en la presentación variacional (III.5.12) se obtiene :

$$0 = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} (a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} (a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] u_j \, dx dy \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega^e} f \psi_i \, dx dy - \int_{\Gamma^e} \psi_i q_n \, ds \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.5.15})$$

a fin de compactar la notación, sean :

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy \quad (\text{III.5.16})$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy + \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds \quad (\text{III.5.17})$$

así, mediante estas dos últimas ecuaciones (III.5.15) deviene :

$$\sum_{j=1}^n k_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.5.18})$$

se observa que cuando $a_{12} = a_{21}$, $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$

FUNCIONES DE INTERPOLACION PARA ELEMENTOS TRIANGULARES

Como se mencionó en el párrafo anterior, las funciones ψ_i deben ser al menos funciones bilineales en x e y , así pues se tomará al conjunto $\{ 1, x, y \}$ como conjunto generador de las funciones u :

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y. \quad (\text{III.5.19})$$

esta ecuación tiene tres términos linealmente independientes y es lineal tanto en x como en y . Para evaluar a los c parámetros se requiere un elemento con tres nodos, es decir un triángulo. En la figura III.5.3 se muestra un elemento triangular arbitrario donde los nodos aparecen numerados en sentido arbitrario:

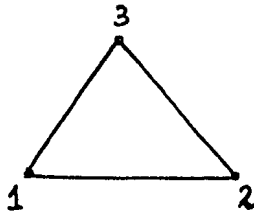


Fig. III.5.3

seguidamente a la aproximación de u por (III.5.19) se le impone la condición :

$$u(x_i, y_i) = u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.5.20})$$

donde la pareja (x_i, y_i) denota a las coordenadas globales de los respectivos vértices de los triángulos. Este artificio permite evaluar a las constantes c_i de (III.5.19) en términos de u_i :

$$u_1 = u(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1$$

$$u_2 = u(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \quad (\text{III.5.21})$$

$$u_3 = u(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3$$

En forma matricial :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Ahora se hace :

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

donde A_e es el área del triángulo, los valores c_i están dados por :

$$c_1 = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

$$c_2 = \frac{1}{2A_e} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_3)] \quad (\text{III.5.21})$$

$$c_3 = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]$$

si los nodos del triángulo se numeran siguiendo el sentido horario, el determinante invierte su signo :

Sustituyendo las ecuaciones (III.5.21) en (III.5.19) se obtiene :

$$u(x,y) = u_1 \psi_1(x,y) + u_2 \psi_2(x,y) + u_3 \psi_3(x,y) = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i^{(e)} \quad (\text{III.5.22})$$

donde las funciones $\psi_i^{(e)}$ son las funciones de interpolación del elemento triangular :

$$\psi_i^{(e)} = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.5.23})$$

siendo α_i , β_i y γ_i constantes :

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_j - y_k \quad (\text{III.5.24})$$

$$\gamma_i = x_k - x_j$$

con $i \neq j \neq k$ y permutando i, j, k cíclicamente las funciones ψ_i presentan las dos siguientes propiedades :

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{III.5.25a})$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i = 1 \quad (\text{III.5.25b})$$

En síntesis, la expresión (III.5.22) representa un plano el cual pasa por u_1, u_2, u_3 de aquí que la aproximación de u mediante las funciones lineales de interpolación ψ_i del triángulo aproximen a la superficie $u(x, y)$ mediante el plano:

$$\sum_{i=1}^3 u_i \psi_i \quad (\text{III.5.26})$$

" FUNCIONES DE INTERPOLACION PARA ELEMENTOS RECTANGULARES "

En este caso se aproxima a la función u por :

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \quad (\text{III.5.27})$$

expresión que contiene cuatro términos linealmente independientes y que continua siendo lineal tanto en x como en y . Se decide usar un elemento rectangular tal y como se muestra en la figura III.5.4. En obvio de dificultades se elige un sistema local de coordenadas (ξ, η) a efecto de deducir las funciones de interpolación :

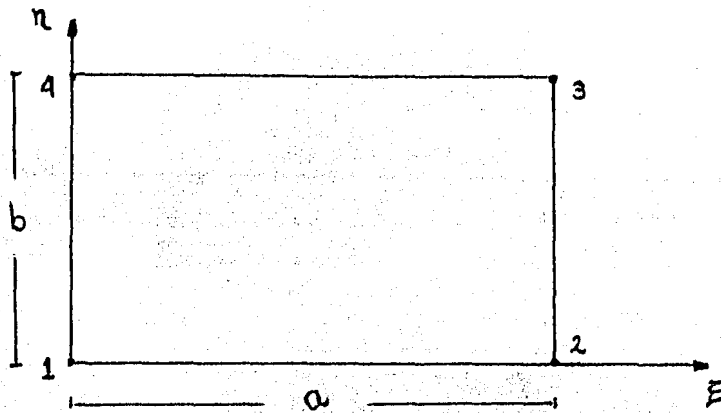


Fig. III.5.4

Sea :

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta \quad (\text{III.5.28})$$

donde se requiere :

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0, 0) = c_1 \\ u_2 &= u(a, 0) = c_1 + c_2a \\ u_3 &= u(a, b) = c_1 + c_2a + c_3b + c_4ab \\ u_4 &= u(0, b) = c_1 + c_3b \end{aligned} \quad (\text{III.5.29})$$

Resolviendo las constantes c_i ($i=1, 2, 3, 4$) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

(III.5.30)

sustituyendo (III.5.30) en (III.5.28) se obtiene :

$$u(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi \eta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^4 u_i \psi_i(\xi, \eta) \quad \text{(III.5.31)}$$

donde :

$$\psi_1(\xi, \eta) = \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \left(1 - \frac{\eta}{b}\right)$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{\xi}{a} \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \quad (\text{III.5.32})$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{\xi}{a} \frac{\eta}{b}$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \frac{\eta}{b}$$

aquí de nuevo las funciones de interpolación presentan las dos siguientes propiedades :

$$\psi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

(III.5.33)

$$\sum_{i=1}^4 \psi_i = 1$$

EVALUACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

La evaluación mediante integración de los elementos de las matrices $[K^{(e)}]$ y $[F^{(e)}]$ que figuran en las ecuaciones (III.5.18) generalmente no es cómoda de hacer, empero dado el caso de ser a_{ij} , a_{00} y f constantes, el problema se simplifica cuando se emplean elementos triangulares o elementos rectangulares.

A tal efecto se expresa $[K^{(e)}]$ como la suma de cinco matrices: cuatro matrices básicas $[S^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) y la matriz $[s]$

$$[K^{(e)}] = a_{11} [S^{11}] + a_{12} [S^{12}] + a_{21} [S^{21}] + a_{22} [S^{22}] + a_{00} [S]$$

(III.5.34)

donde :

$$S_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy$$

$$S_{ij}^{12} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy$$

$$S_{ij}^{22} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy \quad (\text{III.5.35})$$

$$S_{ij} = \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dy$$

Sea, además :

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy$$

(III.5.36)

$$Q_i^{(e)} = \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds$$

Evaluación de las matrices mediante elementos triangulares.

Cuando se emplean elementos triangulares, mediante el siguiente artificio, se pueden determinar las integrales en cuestión, si se define :

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (\text{III.5.37})$$

entonces ocurre que :

$$I_{00} = A \quad (\text{área del triángulo})$$

$$I_{10} = A \cdot \bar{x} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i$$

$$I_{01} = A \cdot \bar{y} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i \quad (\text{III.5.38})$$

$$I_{11} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + \dots \right)$$

$$I_{20} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i + 9 \bar{x}^2 \right)$$

$$I_{02} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i + 9 \bar{y}^2 \right)$$

Ahora bien, al emplear las funciones lineales de interpolación (III.5.23) en las ecuaciones (III.5.35) y (III.5.36) y observando que :

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A_e}$$

(III.5.39)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A_e}$$

Se obtienen :

$$S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A_e} \beta_i \beta_j$$

$$S_{ij}^{12} = \frac{1}{4A_e} \beta_i \gamma_j$$

$$S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A_e} \gamma_i \gamma_j$$

$$S_{ij} = \frac{1}{4A_e} [\alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \bar{y}] + \\ + \frac{1}{A_e} [I_{20} \beta_i \beta_j + I_{11} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) + I_{02} \gamma_i \gamma_j]$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y} = \frac{2A_e}{3}$ se infiere que :

$$f_i^{(e)} = \frac{f}{2} (\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = \frac{fA_e}{3} \quad \text{III.5.40b)}$$

o sea, una vez determinada las coordenadas globales de los nodos,

mediante las ecuaciones (III.5.24) se determinan los valores de los parámetros α_i , β_i y γ_i , mismos que al ser sustituidos en las fórmulas (III.5.40a) y (III.5.40b) permiten la obtención de las matrices $[K^{(e)}]$ y $[F^{(e)}]$.

Evaluación de las matrices mediante elementos rectangulares.

Bajo el supuesto de ser a_{00} , a_{ij} y f constantes y usando las funciones de interpolación (III.5.32) cuando las variables ξ y η han sido sustituidas, respectivamente, por x e y se tiene que :

$$[S^{11}] = \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[S^{12}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.41})$$

$$[S^{22}] = \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.42})$$

Evaluación de las integrales en la frontera.

Las integrales en la frontera son de la forma :

$$Q_i^{(e)} = \int_{\Gamma^e} q_n^{(e)} \psi_i^{(e)}(s) ds$$

donde $q_n^{(e)}$ es una cierta función conocida de parámetro s , va -
riando con la longitud de la frontera Γ^e . Obviamente no es ne-
cesario determinar dichas integrales sobre aquellas porciones de
 Γ^e ubicadas en el interior del dominio en cuestión.

Como la frontera del elemento Γ^e es una línea, se empleara
rán al efecto funciones de interpolación lineales, esto es :

$$\int_0^h q_n(s) \psi_i(s) ds = Q_i \quad \text{(III.5.43)}$$

determina la contribución de q_n sobre el nodo i . Aquí h de-
nota la longitud del lado sujeto al término forzante q_n y las -

funciones ψ_i son las funciones lineales de interpolación dadas por :

$$\psi_1 = 1 - \frac{s}{h}$$

$$\psi_2 = \frac{s}{h}$$

Así :

$$Q_i = \frac{q_n h}{2} \quad (\text{III.5.44})$$

pues como se dijo, q_n se considera constante en Γ_e .

ARMADO DE LAS MATRICES

Sin pérdida de generalidad, el armado de las matrices será ilustrado mediante la consideración de la siguiente malla construida por un elemento triangular y un elemento rectan-

gular (Ver la figura III.5.5) :

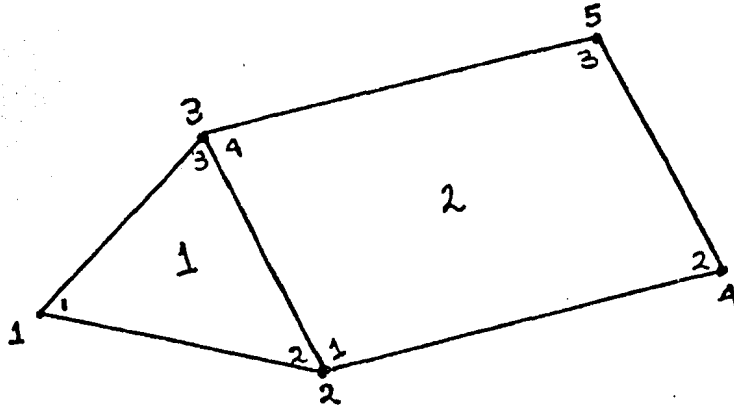


Figura III.5.5

Si $K_{ij}^{(1)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) denotan los términos

de la matriz en cuestión correspondiente al elemento triangular

$K_{ij}^{(2)}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) denotan los términos correspondientes

al cuadrilátero, entonces se observa la siguiente correspondien-

cia entre los valores globales y locales :

$$u_1 = u_1^{(1)}$$

$$u_2 = u_2^{(1)} = u_1^{(2)}$$

$$u_3 = u_3^{(1)} = u_4^{(2)}$$

$$u_4 = u_2^{(2)} \quad (\text{III.5.45})$$

$$u_5 = u_3^{(2)}$$

T E R M I N O S

G L O B A L :

K_{11}

K_{12}

K_{22}

K_{14}

K_{15}

K_{23}

L O C A L :

$K_{11}^{(1)}$

$K_{12}^{(1)}$

$K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}$

0

0

$K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)}$

Así pues, las condiciones (III.5.45) permiten ensamblar la matriz como se muestra seguidamente :

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\
 K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{44}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} \\
 0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\
 0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1^{(1)} \\
 F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\
 F_3^{(1)} + F_4^{(2)} \\
 F_2^{(2)} \\
 F_3^{(2)}
 \end{bmatrix}$$

(III.5.46)

Se observa que la matriz obtenida en términos globales se deduce a partir de las matrices elementales, correspondientes al elemento triangular y al cuadrilátero, cuando los términos correspondientes a los nodos compartido por dichos elementos se suman.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.

Mediante el desarrollo de esta tesis se pretende determinar la instrumentación que servirá para evaluar no sólo el comportamiento mecánico de la estructura, sino para definir los métodos de análisis sobre la estabilidad y diseño de estructuras cíviles en aquellos elementos de interés tales como las paredes de los socavones y las laderas que conforman el talúd principal de la margen derecha de la sección que venimos trabajando. Con esto se cumple uno de los principales objetivos mencionados al iniciar este trabajo, acerca de la estabilidad de taludes.

El análisis realizado por medio del método del elemento finito, representa un modelo de comportamiento de una estructura geológica en la que la complejidad de los factores que integran la respuesta estructural estriba básicamente en la reacción del material que constituye el macizo rocoso de estudio. Es por consiguiente de importancia principal que la determinación de las propiedades mecánicas de los materiales y las acciones que actúan sobre la estructura sean lo más representativas de las condiciones a que estaría sujeta la estructura. Todos los resultados obtenidos en este análisis se refieren a efectos de peso propio.

Se recomienda un estudio de optimización de espesores de capas tomando en cuenta que la respuesta de la estructura depende de la historia de las cargas, que la aproximación del método depende de lo pequeño que se elijan los incrementos de carga.

En base a los resultados del presente análisis sería conveniente considerar elementos de menor tamaño. Es necesario verificar la información referente de comportamiento de los materiales, es decir que las propiedades correspondan realmente a las condiciones de la estructura.

En zonas de transición de materiales, es conveniente utilizar elementos de menor tamaño a fin de obtener mayor información respecto a la distribución y magnitud de los esfuerzos en dichas zonas.

Se sugiere en estudios posteriores sobre el tema que se analice la posibilidad de incrementar el algoritmo presentando la anexión de subrutinas que permitan obtener los resultados en forma gráfica a fin de agilizar la interpretación de los diferentes modelos propuestos, así como también la de desarrollar criterios de interpolación bidimensional para lograr un ajuste de la mejormalla a la estructura en estudio en forma automática.

Es importante también, desarrollar más modelos matemáticos que regulan los potenciales naturales que se estudian en geofísica por medio de esta técnica numérica y a partir de esto formular los algoritmos necesarios para automatizar las funciones que nos resultarían de enorme utilidad en la prospección geofísica.

Es de suma trascendencia poder desarrollar estos algoritmos porque la teoría básica existe. Los modelos que describen el fenómeno se encuentran completamente desarrollados y por si esto fuera poco la discretización necesaria para la aplicación del método en la mayoría de los casos también existe o resulta sumamente sencillo realizarla una vez que se cuente con la expresión analítica que modele el fenómeno. Lo que no siempre se puede localizar en las obras de consulta es la codificación de algoritmo que nos permita resolver un problema particular.

Ahora bien los pocos existentes pretenden generalizar su aplicación a problemas muy diversos y han sido realizados en su mayoría por especialistas del área de computación y matemáticas sin profundizar en los problemas particulares de nuestra área. Por esto resulta de mayor provecho que se desarrollen programas para los diferentes problemas existentes en geofísica por personal familiarizado con estas aplicaciones.

Por último cabe señalar también la enorme necesidad - de desarrollar técnicas más eficientes de almacenamiento de datos debido a que este método genera enormes cantidades de datos que limitarían su uso a sistemas sofisticados que sin embargo podrían mejorarse con las técnicas de almacenamiento en banda o en silueta que ya han sido desarrollados y que nos producen un considerable ahorro de espacio en memoria. (ver ref. 8 pp 94-95).

A P E N D I C E A

P R O G R A M A P A R A R E S O L V E R L A
D I S T R I B U C I O N D E E S F U E R Z O S Y
D E F O R M A C I O N P O R M E D I O D E L E L E -
M E N T O F I N I T O .

C LISTADO DEL PROGRAMA
 C TESIS PROFESIONAL DE LA FACULTAD DE INGENIERIA GEOFISICA DE LA UNA
 C METODO DEL ELEMENTO FINITO EN EL ANALISIS DE PROBLEMAS
 C GEOESTRUCTURALES
 C RICARDO OCTAVIO VAZQUEZ ROMERO
 C

```

DIMENSION A(10000)
DIMENSION NOMES(20)
DATA IAL/5/, IAE/6/, IAD/9/, IADB/8/, IAESF/7/, IADU/10/
OPEN(UNIT=IAD, STATUS='NEW', DISPOSE='DELETE', FORM='UNFORMATTED')
OPEN(UNIT=IADB, STATUS='NEW', DISPOSE='DELETE', FORM='UNFORMATTED')
OPEN(UNIT=IAESF, STATUS='NEW', DISPOSE='DELETE', FORM='UNFORMATTED')
1 ED')
OPEN(UNIT=IADU, STATUS='NEW', DISPOSE='DELETE', FORM='UNFORMATTED')
NEAA=10000
READ(IAL, 5000)NOMES
WRITE(IAE, 6000)NOMES
READ(IAL, *)NEF, NPN, NMA, NCC, NCP, NGL, IEJ, IP
WRITE(IAE, 6100)NEF, NPN, NMA, NCC, NCP, NGL, IEJ, IP
N1=1
N2=N1+NPN*NGL
N3=N2+NPN*NCP
NEAT=N3-1
CALL CONTRA(NEAT, NEAA, 1)
CALL CORCA(NPN, A(N1), A(N2), NCP, NGL, NEC, NEN, NEP, IEJ)
N4=N3+NMA*3
NEAT=N4-1
CALL CONTRA(NEAT, NEAA, 2)
CALL MATHOK(NMA, A(N3))
CALL ELEFIN(NEF, A(N1), A(N2), A(N3), NGL, NCP, NMA, NPN, IAD, IEJ, IADB
1, IP)
A(N2)=A(N3)
DO 500 I=1, 3*NMA
A(N2+I)=A(N3+I)
500 CONTINUE
N3=N2+NMA*3
N4=N3+NEC*NEC
N5=N4+NEC
NEAT=N5-1
CALL CONTRA(NEAT, NEAA, 3)
CALL MARIEP(NEC, A(N3), IAD, NEF, IEJ)
DO 800 I=1, NCC
CALL VECPEC(NEC, IAD, NEF, A(N4), IEJ, A(N1), NGL, NPN)
CALL SCHCUA(A(N3), A(N4), NEC)
CALL DESNOD(A(N4), NPN, NGL, A(N1))
CALL ESFUCL(NEF, IADB, A(N4), NEC, IAESF, IAD, A(N2), NMA, IP)
CALL DEFOCL(NEF, NEC, IAESF, IADB, IAD, A(N2), NMA, IP, IADU)
800 CONTINUE
5000 FORMAT(20A4)
6000 FORMAT(20A4)
6100 FORMAT(///, 10X, 'INFORMACION GENERAL', //, 10X, 'NUMERO DE ELEMENTOS
1 FINITOS ', 12X, '=', I5, /, 10X, 'NUMERO DE PUNTOS NODALES', 15X, '=',
2I5, /, 10X, 'NUMERO DE MATERIALES UTILIZADOS ', I5, /, 10X,
3 'NUMERO DE CONDICIONES DE CARGA ', I5, /, 10X,
4 'DIMENSIONALIDAD', 24X, '=', I5, /, 10X, 'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

```

```

5 POR NUDO =',I5,/
610X,'INDICADOR DE EJECUCION',17X,'=',I5,,10X,'INDICADOR DE TIPO
7 DE PROBLEMA ',9X,'=',I5,,15X,'ESFUERZO PLANO =0',/,15X,
8'DEFORMACION PLANA =1')
END

```

C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE CONTRA(NEAT,NEAA,ILP)
CONTROLA LA MEMORIA UTILIZADA

DATA IAE/6/
IF(NEAT.LT.NEAA)GO TO 150
GO TO(100,200,300,200,200,200),ILP
100 CONTINUE
WRITE(IAE,6100)
WRITE(IAE,6000)NEAT,NEAA
CALL EXIT
200 CONTINUE
WRITE(IAE,6200)
WRITE(IAE,6000)NEAT,NEAA
CALL EXIT
300 CONTINUE
WRITE(IAE,6300)
WRITE(IAE,6000)NEAT,NEAA
CALL EXIT
150 RETURN
6000 FORMAT(//,10X,'MEMORIA UTILIZADA =',I6,,10X,'MEMORIA DISPONIBLE
1=',I6)
6100 FORMAT(///,10X,'CANTIDAD DE MEMORIA INSUFICIENTE',/,10X,
1'PARA ALMACENAR COORDENADAS DE LOS PUNTOS NODALES')
6200 FORMAT(///,10X,'CANTIDAD DE MEMORIA INSUFICIENTE',/,10X,
1'PARA ALMACENAR DATOS DE LOS MATERIALES')
6300 FORMAT(///,10X,'CANTIDAD DE MEMORIA INSUFICIENTE',/,10X,
1'PARA ALMACENAR LA MATRIZ DE RIGIDECES Y EL VECTOR DE CARGAS'
2,/,10X,'DE LA ESTRUCTURA')
END

```

C
C
C
C

```

SUBROUTINE CORCA(NPN, ID, XYZ, NCP, NGL, NEC, NEN, NEP, IEJ)

```

C
C
C

COORDENADAS CARTESIANAS Y NUMERACION DE LAS ECUACIONES

```

DIMENSION ID(NGL,NPN),XYZ(NPN,NCP)
DATA IAL/5/,IAE/6/
WRITE(IAE,6000)
DO 400 I=1,NPN
READ(IAL,*)N,(XYZ(N,K),K=1,NCP),(ID(K,N),K=1,NGL)
WRITE(IAE,6100)N,(XYZ(N,K),K=1,NCP),(ID(K,N),K=1,NGL)
400 CONTINUE
CALL NUMEC(NPN,ID,NEC,NEN,NEP,NGL,IEJ)
RETURN
6000 FORMAT(///,10X,'COORDENADAS DE LOS PUNTOS NODALES',//,10X,'PUNTO'
14X,'X',9X,'Y',9X,'Z',5X,'CONDICIONES DE FRONTERA',/,45X,
2'1 2 3 4 5 6')
6100 FORMAT(10X,I3,2F10.0,11X,I2,2X,I2)
END

```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE NUMEC(NPN, ID, NEC, NEN, NEP, NGL, IEJ)

NUMERACION DE LAS ECUACIONES

```

DIMENSION ID(NGL,NPN)
NEC=0
NEN=0
NEP=0
DO 600 J=1,NPN
DO 400 I=1,NGL
IF(ID(I,J))100,200,300
100 CONTINUE
NEP=NEP+1
ID(I,J)=-NEP
GO TO 400
200 CONTINUE
NEC=NEC+1
ID(I,J)=NEC
GO TO 400
300 CONTINUE
NEN=NEN+1
ID(I,J)=0
400 CONTINUE
600 CONTINUE
WRITE(6,10)NEC,NEN,NEP
10 FORMAT(//,10X,'NEC =',I5,10X,'(NUMERO DE ECUACIONES)',/,
110X,'NEN =',I5,10X,'(NUMERO DE ECUACIONES NULAS)',/,10X,
2'NEP =',I5,10X,'(NUMERO DE ECUACIONES PRESCRITAS)',/,10X)

```

```

IF(IEJ.EQ.0)RETURN
DO 11 I=1,NGL
DO 12 J=,NPN
WRITE(6,20)I,J, ID(I,J)
20 FORMAT(//,10X,'ID(',I5,I5,') =',I5)
12 CONTINUE
11 CONTINUE
15 RETURN
END

```

C
C
C
C

SUBROUTINE MATHOK(NMA,ENP)

DATOS DEL MATERIAL (E,NU,PV)

```

DIMENSION ENP(3,NMA)
DATA IAL/5/,IAE/6/
WRITE(IAE,6000)
DO 500 I=1,NMA
READ(IAL,*)N,ENP(1,N),ENP(2,N),ENP(3,N)
WRITE(IAE,6100)N,ENP(1,N),ENP(2,N),ENP(3,N)
500 CONTINUE
RETURN
6000 FORMAT(///,10X,, 'DATOS DE LOS MATERIALES',//,10X,'MATERIAL'
1,4X,'E',9X,'NU',8X,'PV')
6100 FORMAT(10X,I4,5X,F10.2,2X,F4.3,3X,F10,6)
END

```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE ELEFIN(NEF, ID, XYZ, ENP, NGL, NCP, NMA, NPN, IAD, IEJ, IADB
1, IP)

C
C
C

DETERMINACION PARA CADA ELEMENTO FINITO LAS MATRICES K, F

```

COMMON/EFCL/IE(8),RG(8,8),FC(8),X(4),Y(4),IMA
COMMON/DBCL/JE(8),DB(12,8),XYC(4,2)
DIMENSION NOD(4),D(3,3),B(3,8),FN(4),A(4,4),W(4,4)
DIMENSION ID(NGL,NPN),XYZ(NPN,NCP),ENP(3,NMA)
DATA IAL/5/,IAE/6/
DATA A/0.,-0.5773502691,-0.7745966692,-0.8611363115,0.,
10.5773502691,0.,-0.339810435,0.,0.,0.7745966692,-0.8611363115,
20.,0.,0.,0.3399810435/
DATA W/2.,1.,0.5555555555,0.3478548451,0.,1.,0.8888888888,
10.6521451548,0.,0.,0.5555555555,0.3478548451,0.,0.,0.,
20.6521451548/

```

```

    IF(IP.EQ.0)GO TO 15
    ESP=1.0
    READ(IAL,*)ANG
    GO TO 16
15  CONTINUE
    READ(IAL,*)ANG,ESP
16  CONTINUE
    WRITE(IAE,6500)ANG,ESP
    ANGR=ANG*3.1415927/180.
    CA=COS(ANGR)
    SA=SIN(ANGR)
    IF(IEJ.EQ.0)GO TO 5
    WRITE(IAE,4)CA,SA
4   FORMAT(//,10X,'COSENO=',F20.15,7X,'SENO=',F20.15,////)
5   REWIND IAD
    WRITE(IAE,6000)
    DO 800 I=1,NEF
    READ(IAL,*)N,NOD(1),NOD(2),NOD(3),NOD(4),IPI,IMA
    WRITE(IAE,6100)N,NOD(1),NOD(2),NOD(3),NOD(4),IPI,IMA
    CALL MACEPE(ENP(1,IMA),ID,IEJ,IP)
    DO 200 J=1,4
    K=NOD(J)
    X(J)=XYZ(K,1)
    Y(J)=XYZ(K,2)
    IF(IEJ.EQ.0)GO TO 200
    WRITE(6,11)J,X(J),J,Y(J)
11  FORMAT(//,10X,'X(',I3,')=',F15.7,5X,'Y(',I3,')=',F15.7)
200 CONTINUE
C   FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES
    CALL CEROSM(RG,8,8)
    CALL CEROSV(FC,8)
    DO 400 KI=1,IPI
    DO 300 KJ=1,IPI
    CALL MABNCL(B,FN,X,Y,A(IPI,KI),A(IPI,KJ),XJAC,IEJ)
    XX=W(IPI,KI)*W(IPI,KJ)*XJAC
    YY=XX*ENP(3,IMA)*ESP
    DO 500 L=1,8
    DB1=XX*(D(1,1)*B(1,L)+D(1,2)*B(2,L))
    DB2=XX*(D(2,1)*B(1,L)+D(2,2)*B(2,L))
    DB3=XX*(D(3,3)*B(3,L))
    DO 500 K=1,8
    RG(K,L)=RG(K,L)+(B(1,K)*DB1+B(2,K)*DB2+B(3,K)*DB3)*ESP
500 CONTINUE
C   FORMACION DEL VECTOR DE LAS FUERZAS DE CUERPO
    IF(ENP(3,IMA).LE.0)GO TO 300
    DO 550 II=1,4
    J=2*II
    K=J-1
    FC(K)=FC(K)+FN(II)*CA*YY
    FC(J)=FC(J)+FN(II)*SA*YY

```

550 CONTINUE
300 CONTINUE
400 CONTINUE

C FORMACION DEL ARREGLO DB PARA EL CALCULO DE ESFUERZOS

DO 120 KI=1,2
DO 110 KJ=1,2
CALL MABNCL(B, FN, X, Y, A(2, KI), A(2, KJ), XJAC, IEJ)
IR=1
IF(KI.EQ.1.AND.KJ.EQ.2)IR=4
IF(KI.EQ.2.AND.KJ.EQ.1)IR=7
IF(KI.EQ.2.AND.KJ.EQ.2)IR=10
DO 520 I=1,8
DB1=D(1,1)*B(1,L)+D(1,2)*B(2,L)
DB2=D(2,1)*B(1,L)+D(2,2)*B(2,L)
DB3=D(3,3)*B(3,L)
DB(IR,L)=DB1
DB(IR+1,L)=DB2
DB(IR+2,L)=DB3

520 CONTINUE

CALL COXYC(A(IPI, KI), A(IPI, KJ), X, Y, XYC, IR, FN, IEJ)

110 CONTINUE

120 CONTINUE

600 CONTINUE

IF(IEJ.EQ.0)GO TO 27

DO 25 III=1,8

DO 26 JJJ=I,8

WRITE(6,20)III, JJJ, RG(III, JJJ), III, FC(III)

20 FORMAT(//,10X,'RG(',I3,I3,')=' ,F20.7,10X,'FC(',I3,')=' ,F20.7)

26 CONTINUE

25 CONTINUE

27 CALL VEICL(IE, ID(1, NOD(1)), ID(1, NOD(2)), ID(1, NOD(3)), ID(1, NOD(4)))

CALL GUADIS(IE, 89, IAD)

DO 75 IJ=1,8

JE(IJ)=IE(IJ)

75 CONTINUE

CALL GUADIS(JE, 112, IADB)

800 CONTINUE

RETURN

6000 FORMAT(///,10X,'DATOS DE LOS ELEMENTOS',//,10X,'ELEMENTO',4X,
1'I',4X,'J',4X,'K',4X,'L',3X,'IPI',3X,'IMA')

6100 FORMAT(10X,I5,3X,6I5)

6500 FORMAT(////,10X,'ANGULO DE INCLINACION DE LA GRAVEDAD CON',/,1
1'RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA GLOBAL =',F15.7,/,10X,
2'ESPESOR DEL PROBLEMA =',F15.7)

END

C
C
C
C

SUBROUTINE VEICL(IE, NODI, NODJ, NODK, NODL)

```
C
C   FORMACION DEL VECTOR INDICADOR DE CADA ELEMENTO
C   ORDENAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA
C
```

```
    DIMENSION IE(8),NODI(2),NODJ(2),NODK(2),NODL(2)
    DO 400 I=1,2
      J=I+2
      K=J+2
      L=K+2
      IE(I)=NODI(I)
      IE(J)=NODJ(I)
      IE(K)=NODK(I)
      IE(L)=NODL(I)
400  CONTINUE
      IF(IEJ.EQ.0)GO TO 15
      DO 10 I=1,8
        WRITE(6,50)I,IE(I)
50   FORMAT(//,10X,'IE(',I3,')='I5)
10   CONTINUE
15   RETURN
    END
```

```
C
C
C   SUBROUTINE CEROSM(A,NC,NR)
C   HACE CEROS LA MATRIZ A(NC,NR)
C
```

```
    DIMENSION A(NC,NR)
    DO 200 I=1,NC
      DO 100 J=1,NR
        A(I,J)=0.0
100  CONTINUE
200  CONTINUE
    RETURN
    END
```

```
C
C
C   SUBROUTINE CEROSV(A,N)
C   HACE CEROS EL VECTOR A(N)
C
```

```
    DIMENSION A(N)
    DO 100 I=1,N
      A(I)=0.0
100  CONTINUE
    RETURN
```

END

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE MACEPE(ENP,D,IEJ,IP)

MATRIZ DE CONSTANTES ELASTICAS D

```
DIMENSION ENP(3),D(3,3)
IF(IP.EQ.0)GO TO 500
E=ENP(1)/(1.-ENP(2)*ENP(2))
XNU=ENP(2)/(1.-ENP(2))
GO TO 600
500 CONTINUE
E=ENP(1)
XNU=ENP(2)
600 CONTINUE
D1=E/(1.-XNU*XNU)
D(1,1)=D1
D(2,1)=XNU*D1
D(3,1)=0.
D(1,2)=D(2,1)
D(2,2)=D1
D(3,2)=0.
D(1,3)=0.
D(2,3)=0.
D(3,3)=0.5*(1.-XNU)*D1
IF(IEJ.EQ.0)RETURN
DO 100 I=1,3
DO 200 J=1,3
WRITE(6,60) I,J,D(I,J)
200 CONTINUE
100 CONTINUE
60 FORMAT(//,10X,'D(',I5,I5,') =',F15.7)
RETURN
END
```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE MABNCL(B, FN, X, Y, XS, ET, XJAC, IEJ)

CALCULA LA MATRIZ B Y N DEL CUADRILATERO LINEAL

```
DIMENSION B(3,8),FN(4),X(4),Y(4),FNXI(4),FNET(4),FNX(4),FNY(4)
CALL FUFCL(FN,XS,ET,IEJ)
```



```

CALL DFUF(FNXI,FNET,XS,ET)
CALL DFUFCL(FNXI,FNET,FNX,FNY,XJAC,X,Y,IEJ)
CALL MATEBCL(FNX,FNY,B,IEJ)
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE MATEBCL(FNX,FNY,B,IEJ)

```

```

FORMACION DE LA MATRIZ B

```

```

DIMENSION FN(4),FNY(4),B(3,8)
B(1,1)=FN(1)
B(2,1)=0.
B(3,1)=FNY(1)
B(1,2)=0.
B(2,2)=B(3,1)
B(3,2)=B(1,1)
B(1,3)=FN(2)
B(2,3)=0.
B(3,3)=FNY(2)
B(1,4)=0.
B(2,4)=B(3,3)
B(3,4)=B(1,3)
B(1,5)=FN(3)
B(2,5)=0.
B(3,5)=FNY(3)
B(1,6)=0.
B(2,6)=B(3,5)
B(3,6)=B(1,5)
B(1,7)=FN(4)
B(2,7)=0.
B(3,7)=FNY(4)
B(1,8)=0.
B(2,8)=B(3,7)
B(3,8)=B(1,7)
IF(IEJ.EQ.0)GO TO 300
DO 100 I=1,3
DO 200 J=1,8
WRITE(6,60)I,J,B(I,J)
60 FORMAT(//,10X,'B(',I5,I5...') =',F15.7)
200 CONTINUE
100 CONTINUE
300 RETURN
END

```

C
C
C

SUBROUTINE FUFCL(FN,XS,ET,IEJ)

C
C
C

FUNCIONES DE FORMA DEL CUADRILATERO LINEAL

C

DIMENSION FN(4)

FUNCIONES DE FORMA DE COORDENADAS LOCALES

FN(1)=(1.-XS)*(1.-ET)/4.

FN(2)=(1.+XS)*(1.-ET)/4.

FN(3)=(1.+XS)*(1.+ET)/4.

FN(4)=(1.-XS)*(1.+ET)/4.

IF(IEJ.EQ.0)GO TO 30

DO 10 I=1,4

WRITE(6,20)I, FN(I)

20 FORMAT(////,10X,'FN(',I3,')=',F15.7)

10 CONTINUE

30 RETURN

END

C
C
C
C

SUBROUTINE DFUF(FNXI,FNET,XS,ET)

C
C
C

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE FORMA EN COORDENADAS LOCALES

DIMENSION FNXI(4),FNET(4)

FNXI(1)=- (1.-ET)/4.

FNET(1)=- (1.-XS)/4.

FNXI(2)=-FNXI(1)

FNET(2)=- (1.+XS)/4.

FNXI(3)= (1.+ET)/4.

FNET(3)= (1.+XS)/4.

FNXI(4)=-FNXI(3)

FNET(4)=-FNET(1)

RETURN

END

C
C
C
C

SUBROUTINE DFUFCL(FNXI,FNET,FNX,FNY,XJAC,X,Y,IEJ)

```

C
C   DERIVADAS RESPECTO A X,Y DE LAS FUNCIONES DE FORMA Y JACOBIANO
C
      DIMENSION FNX(4),FNY(4),FNXI(4),FNET(4),X(4),Y(4)
C   DERIVADAS DE LAS COORDENADAS GLOBALES RESPECTO A LAS LOCALES
      XXI=FNXI(1)*X(1)+FNXI(2)*X(2)+FNXI(3)*X(3)+FNXI(4)*X(4)
      XET=FNET(1)*X(1)+FNET(2)*X(2)+FNET(3)*X(3)+FNET(4)*X(4)
      YXI=FNXI(1)*Y(1)+FNXI(2)*Y(2)+FNXI(3)*Y(3)+FNXI(4)*Y(4)
      YET=FNET(1)*Y(1)+FNET(2)*Y(2)+FNET(3)*Y(3)+FNET(4)*Y(4)
C   CALCULO DEL JACOBIANO DE LA TRANSFORMACION XJAC
      XJAC=XXI*YET-XET*YXI
      IF(IEJ.EQ.0)GO TO 20
      WRITE(6,10)XJAC
10  FORMAT(////,10X,'JACOBIANO=',F15.7)
20  CONTINUE
C   DERIVADAS RESPECTO A X,Y DE LAS FUNCIONES DE FORMA
      DO 700 I=1,4
      FNX(I)=(YET*FNX(I)-YXI*FNET(I))/XJAC
      FNY(I)=(-XET*FNXI(I)+XXI*FNET(I))/XJAC
      IF(IEJ.EQ.0)GO TO 700
11  FORMAT(////,10X,'FNX(',I3,')=',F15.7,5X,'FNY(',I3,')=',F15.7)
700 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C
C
C
C
C   SUBROUTINE GUADIS(A,NEA,IAD)
C
C   GUARDA EN DISCO IAD EL VECTOR A(NEA)
C
      DIMENSION A(NEA)
      WRITE(IAD)A
      RETURN
      END

```

```

C
C
C
C
C   SUBROUTINE LEEDIS(A,NEA,IAD)
C
C   LEE DE DISCO EL VECTOR A(NEA)
C

```

```

DIMENSION A(NEA)
READ(IAD)A
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE TCHCUA(A,N)
TRIANGULACION POR COLUMNAS USANDO EL METODO DE CHOLESKY

```

```

DIMENSION A(N,N)
IF(N.EQ.1)RETURN
A(1,1)=A(1,1)**0.5
DO 100 I=2,N
A(1,I)=A(I,1)/A(1,1)
100 CONTINUE
DO 200 J=2,N
I=J
XX=0.0
DO 300 K=1,J-1
XX=XX+A(K,J)*A(K,J)
300 CONTINUE
A(I,J)=(A(I,J)-XX)**0.5
IF(J+1.GT.N)GO TO 200
DO 500 I=J+1,N
XX=0.0
DO 600 K=1,J-1
XX=XX+A(K,I)*A(K,J)
600 CONTINUE
A(J,I)=(A(I,J)-XX)/A(J,J)
500 CONTINUE
200 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE SCHCUA(A,X,N)
SUSTITUCION POR RENGLONES USANDO EL METODO DE CHOLESKY

```

```

DIMENSION A(N,N),X(N)

```

```
DIMENSION A(NEA)
READ(IAD)A
RETURN
END
```

```
C
C
C
C
C
C
C
```

```
SUBROUTINE TCHCUA(A,N)
```

```
TRIANGULACION POR COLUMNAS USANDO EL METODO DE CHOLESKY
```

```
DIMENSION A(N,N)
IF(N.EQ.1)RETURN
A(1,1)=A(1,1)**0.5
DO 100 I=2,N
A(1,I)=A(I,1)/A(1,1)
100 CONTINUE
DO 200 J=2,N
I=J
XX=0.0
DO 300 K=1,J-1
XX=XX+A(K,J)*A(K,J)
300 CONTINUE
A(I,J)=(A(I,J)-XX)**0.5
IF(J+1.GT.N)GO TO 200
DO 500 I=J+1,N
XX=0.0
DO 600 K=1,J-1
XX=XX+A(K,I)*A(K,J)
600 CONTINUE
A(J,I)=(A(I,J)-XX)/A(J,J)
500 CONTINUE
200 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C
C
C
C
C
C
C
```

```
SUBROUTINE SCHCUA(A,X,N)
```

```
SUSTITUCION POR RENGLONES USANDO EL METODO DE CHOLESKY
```

```
DIMENSION A(N,N),X(N)
```

```

C   SUSTITUCION HACIA ADELANTE
      IF(N.GT.1)GO TO 150
      X(N)=X(N)/A(N,N)
      RETURN
150  CONTINUE
      X(1)=X(1)/A(1,1)
      DO 200 I=2,N
      XX=0.0
      DO 300 K=1,I-1
      XX=XX+A(K,I)*X(K)
300  CONTINUE
      X(I)=(X(I)-XX)/A(I,I)
200  CONTINUE
C   SUSTITUCION HACIA ATRAS
      X(N)=X(N)/A(N,N)
      DO 400 I=1,N-1
      IR=N-I
      XX=0.0
      DO 500 K=IR+1,N
      XX=XX+A(IR,K)*X(K)
500  CONTINUE
      X(IR)=(X(IR)-XX)/A(IR,IR)
400  CONTINUE
      RETURN
      END

```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE MARIEP(NEC,RGC,IAD,NEF,IEJ)

FORMA LA MATRIZ K DE LA ESTRUCTURA COMPLETA

```

COMMON/EFCL/IE(8),RG(8,8),FC(8),X(4),Y(4),IMA
DIMENSION RGC(NEC,NEC)
REWIND IAD
DATA IAL/5/,IAE/6/
CALL CEROSM(RGC,NEC,NEC)
DO 800 N=1,NEF
CALL LEEDIS(IE,89,IAD)
DO 600 I=1,8
K=IE(I)
IF(K.LE.0.0)GO TO 600
DO 400 J=1,8

L=IE(J)
IF(L.LE.0.0)GO TO 400
RGC(K,L)=RGC(K,L)+RG(I,J)

```

```

400 CONTINUE
600 CONTINUE
800 CONTINUE
  IF(IEJ.EQ.0)GO TO 40
  WRITE(IAE,15)
15  FORMAT(////,'  MATRIZ DE RIGIDECEC GLOBAL',////)
  DO 10 I=1,NEC
  DO 20 J=1,NEC
  WRITE(IAE,30)I,J,RGC(I,J)
30  FORMAT(10X,'RGC(' ,I3,I3,')=' ,F15.7)
20  CONTINUE
10  CONTINUE
40  CALL TCHCUA(RGC,NEC)
  RETURN
  END

```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE VECPEC(NEC, IAD, NEF, FCC, IEJ, ID, NGL, NPN)

OBTIENE EL VECTOR DE FUERZAS COMPLETO

```

COMMON/EFCL/IE(8),RG(8,8),FC(8),X(4),Y(4),IMA
DIMENSION FCC(NEC),ID(NGL,NPN),COCAR(20)
DATA IAL/5/,IAE/6/
READ(IAL,5000)COCAR
WRITE(IAE,6000)COCAR
READ(IAL,*)NNC,KFC
WRITE(IAE,6100)NNC,KFC
REWIND IAD
CALL CEROSV(FCC,NEC)
IF(KFC.EQ.0)GO TO 900
DO 800 I=1,NEF
CALL LEEDIS(IE,89,IAD)
DO 700 KK=1,8
  KKK=IE(KK)
  IF(KKK.EQ.0)GO TO 700
  FCC(KKK)=FCC(KKKK)+FC(KK)
700 CONTINUE
800 CONTINUE
900 CONTINUE
  CALL FUEXPU(NEC, ID, FCC, NPN, NNC, F)
  IF(IEJ.EQ.0)RETURN
  DO 10 I=1,NEC
  WRITE(6,15)I,FCC(I)

```

```

5000 FORMAT(20A4)
6000 FORMAT(///,10X,20A4)
6100 FORMAT(///,10X,'NUMERO DE NUDOS CARGADOS      =',I5,/,10X,
1'INDICADOR DE FUERZAS DE CUERPO =',I5,/,15X,'SI SE
CONSI-DERAN =1',2/,15X,'NO SE CONSIDERAN =0')
15 FORMAT(10X,'FCC(',I3,')=',F15.7)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE FUEXP(U, NEC, ID, FCC, NPN, NNC, NGL, F)

FUERZAS EXTERNAS PUNTUALES

```

DIMENSION ID(NGL,NPN), FCC(NEC), F(NGL)
DATA IAL/5/, IAE/6/
IF(NNC.EQ.0) RETURN
WRITE(IAE,6000)
DO 500 I=1,NNC
READ(IAL,*) NC,F(1),F(2)
WRITE(IAE,6100) NC,F(1),F(2)
DO 200 J=1,NGL
K=ID(J,NC)
IF(K.LE.0) GO TO 200
FCC(K)=FCC(K)+F(J)
200 CONTINUE
500 CONTINUE
6000 FORMAT(///,10X,'CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NUDOS',/,10X,
1'NO. NUDO',10X,'FX',10X,'FY')
6100 FORMAT(10X,I5,8X,F12.6,1X,F12.6)
RETURN
END

```

C
C
C
C

SUBROUTINE DESNOD(DESPL, NPN, , NGL, ID)

C
C
C
C

IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS NODALES DE LA ESTRUCTURA
REFERIDOS AL SISTEMA GLOBAL DE REFERENCIA.


```

DIMENSION DESP(NPN), ID(NGL,NPN)
DATA IAL/5/, IAE/6/
WRITE(IAE,6000)
DO 800 N=1,NPN
I=ID(I,N)
UX=0.
IF(I.NE.0)UX=DESP(I)
J=ID(2,N)
UY=0.
IF(J.NE.0)UY=DESP(J)
WRITE(IAE,6100)N,UX,UY
800 CONTINUE
6000 FORMAT(1H1,////,10X,'DESPLAZAMIENTOS NODALES',//,10X,
1' NO. NODOS',10X,'DX',12X,'DY',/)
6100 FORMAT(10X,I5,8X,F12.9,4X,F12.9)
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE COXYC(XS,ET,X,Y,XYC,IR,FN,IEJ)

```

CALCULA LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE INTEGRACION DE CADA ELEMENTO.

```

DIMENSION X(4),Y(4),XYC(4,2),FN(4)
CALL FUFCL(FN,XS,ET,IEJ)
IC=1
IF(IR.EQ.4)IC=2
IF(IR.EQ.7)IC=3
IF(IF.EQ.10)IC=4
XYC(IC,1)=X(1)*FN(1)+X(2)*FN(2)+X(3)*FN(3)+X(4)*FN(4)
XYC(IC,2)=Y(1)*FN(1)+Y(2)*FN(2)+Y(3)*FN(3)+Y(4)*FN(4)
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C
C
C

```

SUBROUTINE ESFUCL(NEF,IADB,UE,NEC,IADEF,IAD,ENP,NMA,IP)

```

CALCULA ESFUERZOS REFERIDOS A LAS COORDENADAS GLOBALES EN LOS PUNTOS GAUSSIANOS Y ESFUERZOS PRINCIPALES

```

COMMON/DBCL/JE(8),DB(12,8),XYC(4,2)
COMMON/EFCL/IE(8),RG(8,8),FC(8),X(4),Y(4),IMA

```

```

DIMENSION UB(8),UE(NEC),ES(48),ENP(3,NMA)
DATA IAL/5/,IAE/6/
REWIND IAD
REWIND IADB
REWIND IADEF
WRITE(IAE,6000)
DO 800 NE=1,NEF
CALL LEEDIS(IE,89,IAD)
CALL LEEDIS(JE,112,IADB)
DO 300 I=1,8
K=JE(I)
IF(K.GT.0)GO TO 200
UB(I)=0.
GO TO 300
200 CONTINUE
UB(I)=UE(K)
300 CONTINUE
50 CALL MUMAVE(DB,UB,ES,12,8)
CALL GUADIS(ES,12,IADEF)
IR=1
DO 700 I=1,4
IF(IP.EQ.0)GO TO 150
SZZ=(ES(IR)+ES(IR+1))*ENP(2,IMA)
150 CONTINUE
WRITE(IAE,6100)NE,XYC(I,1),XYC(I,2),ES(IR),ES(IR+1),
1ES(IR+2),SZZ
IR=I*3+1
700 CONTINUE
800 CONTINUE
WRITE(IAE,6200)
REWIND IADB
REWIND IADEF
DO 400 NE=1,NEF
CALL LEEDIS(JE,112,IADB)
CALL LEEDIS(ES,12,IADEF)
IR=1
DO 350 I=1,4
CALL ESFPC(ES(IR),SMAX,SMIN,VMAX,DIRR)
WRITE(IAE,6300)NE,XYC(I,1),XYC(I,2),SMAX,SMIN,VMAX,DIRR
IR=I*3+1
350 CONTINUE
400 CONTINUE
RETURN
6000 FORMAT(1H1,/////,10X,'ESFUERZOS ASOCIADOS AL SISTEMA GLOBAL',
1///,10X,'ELEMENTO',2X,'COORDENADAS',7X,'SXX',8X,'SYY',8X,'SXY'
28X,'SZZ',/,12X,'NO.',7X,'X',5X,'Y',/)
6100 FORMAT(10X,I5,5X,F5.2,1X,F5.2,3X,F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,
1F10.5)
6200 FORMAT(1H1,/////,10X,'ESFUERZOS Y DIRECCIONES PRINCIPALES',
1///,10X,'ELEMENTO',2X,'COORDENADAS',7X,'SS1',8X,'SS2',8X,
2'VMAX',8X,'DIR',/,12X,'NO.',7X,'X',5X,'Y',/)

```

```
6300 FORMAT(10X,I5,5X,F5.2,1X,F5.2,3X,F10.5,1X,F10.5,  
1X,F10.5,1X,F10.6)  
END
```

C
C
C
C
C
C

```
SUBROUTINE MUMAVE(A,B,C,IR,IC)
```

```
MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN VECTOR
```

```
DIMENSION A(IR,IC),B(IR),C(IR)  
CALL CEROSV(C,IR)  
DO 500 I=1,IR  
DO 400 J=1,IC  
C(I)=C(I)+A(I,J)*B(J)  
400 CONTINUE  
500 CONTINUE  
RETURN  
END
```

C
C
C
C
C
C
C

```
SUBROUTINE ESFPCL(ESF,SMAX,SMIN,VMAX,DIRR)
```

```
CALCULO DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES EN LOS PUNTOS GAUSSIANOS
```

```
DIMENSION ESF(3)  
Q=(ESF(1)-ESF(2))/2  
P=Q**2+ESF(3)**2  
RS=SQRT(P)  
PR=(ESF(1)+ESF(2))/2  
SMAX=PR+RS  
SMIN=PR-RS  
TU=ESF(3)/Q  
H=ATAN(TU)  
OP=H/2  
DIRR=OP*180/3.1415927  
VMAX=RS  
RETURN  
END
```

C
C
C
C

```
SUBROUTINE DEFOCL(NEF,NEC,IADESF,IADB,IAD,ENP,NMA,IP,IADU)
```

C
C
C
C

CALCULO DEL TENSOR DE DEFORMACIONES REFERENCIADAS A LOS EJES GLOBALES Y DEFORMACIONES PRINCIPALES

```

DATA IAL/5/,IAE/6/
COMMON /EFCL/IE(8),RG(8,8)FC(8),X(4),Y(4),IMA
COMMON /DBCL/JE(8),DB(12,8),XYC(4,2)
DIMENSION ES(12),TEXX(3),ENP(3,NMA)
REWIND IAD
REWIND IADB
REWIND IADEF
WRITE(IAE,6000)
DO 800 NE=1,NEF
CALL LEEDIS(IE,89,IAD)
CALL LEEDIS(JE,112,IADB)
CALL LEEDIS(ES,12,IADEF)
IR=1
DO 700 I=1,4
CALL TEDFCL(ES(IR),EXX,EYY,EXY,EZZ,IMA,ENP,NMA,IP)
TEXX(1)=EXX
TEXX(2)=EYY
TEXX(3)=EXY
CALL ESFPCL(TEXX,EMAX,EMIN,EG,DIR)
WRITE(IAE,6100)NE,XYC(I,1),XYC(I,2),EXX,EYY,EXY,EZZ,EMAX,EMIN
6100 FORMAT(10X,I5,5X,2F5.2,3X,6E10.3)
IR=I*3+1
700 CONTINUE
800 CONTINUE
RETURN
6000 FORMAT(1H1,////,10X,'DEFORMACIONES UNITARIAS',///,
110X,'ELEMENTO',2X,'COORDENADAS',7X,'EXX',8X,'EYY',8X,'EZZ',
28X,'EMAX',8X,'EMIN',/,12X,'NO.',7X,'X',5X,'Y',/)
END

```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE TEDFCL(ES,EXX,EYY,EXY,EZZ,IMA,ENP,NMA,IP)
CALCULA TENSOR DE DEFORMACIONES UNITARIAS

```

DIMENSION ES(3),ENP(3,NMA)
EXX=(ES(1)-ENP(2,IMA)*ES(2))/ENP(1,IMA)
EYY=(ES(2)-ENP(2,IMA)*ES(1))/ENP(1,IMA)
EXY=(1.+ENP(2,IMA)*ES(3))/ENP(1,IMA)

```

```
IF(IP.EQ.0)GO TO 100
EZZ=0.
RETURN
100 CONTINUE
EZZ=- (EXX+EYY)*ENP(2, IMA)/(1.-ENP(2, IMA))
RETURN
END
```

A P E N D I C E B

E S T A B I L I D A D Y C O N V E R G E N C I A
D E L M E T O D O D E L E L E M E N T O F I N I T O

B.1 FUENTES DE ERROR.

Las respuestas numéricas a problemas, contienen generalmente errores que se originan en dos áreas: aquellos inherentes en la formulación matemática del problema y aquellos en que se incurre en la determinación numérica de la solución. La primera categoría incluye el error en que se incurre cuando la proposición matemática del problema es únicamente una aproximación a la situación física. Tales errores son frecuentemente despreciados, como en el caso de despreciar los efectos relativistas en los problemas de mecánica clásica. Si no son despreciables, entonces habrá un error significativo en el resultado, sin importar que tan exactos hayan sido los cálculos numéricos. Otra fuente de error inherente es la falta de exactitud en los datos físicos. Tales errores son también generalmente despreciables cuando son causados por la falta de exactitud en las constantes físicas (por ejemplo la constante de gravitación). Pero, cuando son el resultado de errores en los datos empíricos, el mérito de una solución calculada debe ser cuidadosamente valorado en función de estos errores. Además, como tales errores son usualmente casuales o aleatorios, su tratamiento analítico puede resultar completamente difícil.

Existen tres fuentes principales de error de cómputo. El primero, familiar a todas las personas que usan calculadoras de escritorio o únicamente papel y lápiz, es el error craso o de "confusión". Las computadoras digitales han reducido enormemente la probabilidad de tales errores, pero cuando no pueden ser realmente verificada la exactitud de una solución, no debe ignorarse la posibilidad de que aparezca. Sin embargo, nos interesan particularmente dos fuentes de error de cómputo.

La primera de estas fuentes está en el hecho de no resolver el problema como fue formulado, sino obtener más bien una aproximación del mismo. Este usualmente es causado al sustituir un

proceso infinito (suma o integración), o un proceso infinitesimal (diferenciación), por una aproximación finita. Como ejemplos podemos mencionar:

1. El cálculo de una función elemental (por ejemplo $\sin x$), usando los primeros n términos de su desarrollo en serie infinita de Taylor.

2. La aproximación de la integral de una función por una suma finita de valores de una función, como en la regla trapezoidal.

3. La solución de una ecuación diferencial sustituyendo las derivadas por una aproximación de las mismas (por ejemplo, cocientes de diferencias).

4. La solución de la ecuación $f(x)=0$ por el método de Newton-Raphson, proceso que en general converge únicamente en el límite, cuando el número de iteraciones se hace infinito.

Denotaremos este tipo de error en todas sus variadas formas como error de truncamiento, ya que frecuentemente es el resultado del truncamiento de un proceso infinito para obtener un proceso finito.

La otra fuente de error de importancia, es el causado por el hecho de que los cálculos aritméticos casi nunca pueden llevarse a cabo con una completa exactitud. Muchos números que tienen representaciones decimales infinitas, deben ser redondeados. No obstante, aun si los datos de un problema pueden ser expresados por representaciones decimales finitas, la división puede introducir números que deben ser redondeados y la multiplicación puede producir más números que puedan ser razonablemente retenidos. El error de redondeo es el que estamos introduciendo y como en el caso de los errores en los datos empíricos, el error de redondeo tiene un carácter casual que lo hace difícil de tratar.

B.2 DEFINICIONES DE ERROR.

Las dos definiciones básicas son:

(1) Valor exacto = valor aproximado + error.

(2) Error relativo = $\left| \frac{\text{error}}{\text{valor exacto}} \right|$

B.3 ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA.

Se dice que existe convergencia en la aplicación de un método por aproximaciones en la medida en que obtenemos las aproximaciones, y los errores absoluto y relativo tienden a cero, o bien, al ser menores o iguales que cierta tolerancia dada, en caso contrario existirá divergencia.

Cada una de las aproximaciones que vamos obteniendo son, en realidad, una sucesión de números, si recordamos que una sucesión X_0, X_1, \dots, X_n de números converge a X , si para toda $\epsilon > 0$ existe un entero $n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|X - X_n| < \epsilon$

La estabilidad de los métodos numéricos esta íntimamente ligada con la convergencia de los propios métodos ya que en la medida que se tenga convergencia, la variación entre dos aproximaciones consecutivas será cada vez menor, en ese caso se dice que el método se comporta estable, en caso contrario se tendrá la inestabilidad del método.

B.4 PROPAGACIÓN DEL ERROR.

De mucha importancia en análisis numérico es la forma en que un error en algún punto de una computación se propaga, es decir, determinar si su efecto aumenta o disminuye al efectuar operaciones subsiguientes. La resta de dos cantidades aproximadamente iguales es un caso extremo: aunque los dos números tengan errores pequeños, el error relativo en la diferencia puede ser grande. Este error relativo grande será propagado por operaciones aritméticas posteriores.

En este importantísimo estudio lo primero es encontrar expresiones para el error absoluto y el error relativo en el resultado de cada una de las cuatro operaciones aritméticas en función de los operandos y sus errores. Posteriormente se presenta una técnica para determinar un límite al error total en un cálculo que contenga un número cualquiera de operaciones aritméticas.

Suma

Se tienen dos aproximaciones, \bar{x} y \bar{y} , a dos verdaderos valores, x y y , junto con sus errores respectivos, e_x y e_y . Tendremos entonces.

$$x+y = \bar{x} + e_x + \bar{y} + e_y = (\bar{x} + \bar{y}) + (e_x + e_y)$$

El error en la suma, que indicaremos mediante e_{x+y} , es por tanto.

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

Resta

De una manera semejante obtenemos.

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

Multiplicación

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\bar{x} + e_x) \cdot (\bar{y} + e_y) \\ &= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}e_y + \bar{y}e_x + e_x e_y \end{aligned}$$

Suponemos que los errores son mucho más pequeños que las aproximaciones, e ignoraremos el producto de los errores. Entonces.

$$x \cdot y \cong \bar{x}\bar{y} + \bar{x}e_y + \bar{y}e_x$$

y

$$e_{x \cdot y} \cong \bar{x}e_y + \bar{y}e_x$$

División

Tenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + e_x}{\bar{y} + e_y}$$

Multiplicando el denominador por \bar{y}/\bar{y} y reordenando términos obtenemos.

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + e_x}{\bar{y}} \cdot \left(\frac{1}{1 + e_y/\bar{y}} \right)$$

El factor que está en el paréntesis puede desarrollarse en serie mediante una división:

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + e_x}{\bar{y}} \cdot \left(1 - \frac{e_y}{\bar{y}} + \left(\frac{e_y}{\bar{y}} \right)^2 - \dots \right)$$

Efectuando la multiplicación y despreciando todos los términos que contienen productos y potencias de orden superior al primero de e_x y e_y , tenemos.

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{e_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} e_y$$

Por lo tanto

$$e_{x/y} \approx \frac{1}{\bar{y}} e_x - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} e_y$$

Para un ejemplo simple del significado de estas fórmulas, considérese la suma de dos logaritmos de cuatro cifras. Como podemos suponer que los logaritmos están correctos hasta la cuarta cifra, sabemos que el error en cada uno no es mayor que 0.00005. El error en la suma no puede ser mayor que 0.0001. Naturalmente, no sabemos que sea tan grande, sino que podría serlo.

Debe observarse que rara vez conocemos el signo de un error. Por ejemplo, no se debe inferir que la suma incrementa siempre el error y que la resta siempre lo disminuye simplemente porque los errores se suman en la adición y se restan en la sustracción. Si los errores tienen signos diferentes ocurrirá precisamente lo contrario.

Como tenemos ahora fórmulas para la propagación de los errores absolutos en las cuatro operaciones aritméticas básicas, podemos fácilmente dividir y obtener los errores relativos. Para la suma y la resta los resultados han sido acomodados para mostrar explícitamente el efecto de los errores en los operandos.

Suma

$$\frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}} \left(\frac{e_x}{\bar{x}} \right) + \frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}} \left(\frac{e_y}{\bar{y}} \right)$$

Resta

$$\frac{e_{x-y}}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}} \left(\frac{e_x}{\bar{x}} \right) - \frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}} \left(\frac{e_y}{\bar{y}} \right)$$

Multiplicación

$$\frac{e_{x \cdot y}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \frac{e_x}{\bar{x}} + \frac{e_y}{\bar{y}}$$

División

$$\frac{e_{x/y}}{\bar{x}/\bar{y}} = \frac{e_x}{\bar{x}} - \frac{e_y}{\bar{y}}$$

Es importante comprender claramente el significado de estas fórmulas de propagación. Partimos de dos valores aproximados, \bar{x} y \bar{y} , que contienen los errores e_x y e_y . Los errores pueden ser de cualquier tipo. Los valores de \bar{x} y \bar{y} pueden ser resultados experimentales que continen errores inherentes; pueden ser el resultado de algún cálculo previo efectuado mediante un proceso finito y por lo tanto pueden contener errores por truncamiento; pueden ser el resultado de operaciones aritméticas previas y por lo tanto contener errores por redondeo. También pueden con suma facilidad ser una combinación de los tres tipos que se han enumerado.

Entonces las fórmulas anteriores dan el error en el resultado de cada una de las operaciones aritméticas en función de \bar{x} , \bar{y} , e_x y e_y suponiendo que no hay error por redondeo en la operación. Si como ocurre con frecuencia queremos saber ahora como se propaga el error en este resultado a otras operaciones aritméticas, debemos agregar explícitamente el error por redondeo.

La situación anterior puede aclararse con un ejemplo. Supóngase que empezamos una computación con tres cantidades, x , y y z , y por simplicidad supongamos que son exactas, es decir, que no tienen errores de ninguna clase. Supóngase que calculamos.

$$u = (x + y) \cdot z$$

Por la forma en que se escribió la expresión, debe efectuarse primero la suma. Se supuso que ambos operandos no tienen error, así que error propagado por la suma es cero; sin embargo, al efectuar ésta se introduce un error por redondeo. Este error por redondeo puede considerarse como un error inherente en la suma cuando procedemos a ejecutar la multiplicación. Si acordamos llamar e_{x+y} al error total en la suma, incluyendo cualquier error propagado y el redondeo, se tiene:

$$\left| \frac{e_{x+y}}{x+y} \right| \leq 5 \cdot 10^{-L}$$

que es simplemente el límite en el error por redondeo en cualquier operación aritmética, suponiendo siempre redondeo simétrico. Nuevamente estamos suponiendo una computadora en la que los números de punto flotante tiene una parte fraccionaria que conste de L dígitos decimales.

Sabemos que el error relativo en un producto es la suma de los errores relativos de los dos factores, mas el error por redondeo que se traduce en la multiplicación. Como resultado de la multiplicación \bar{u} , es nuestra aproximación a u , podemos escribir.

$$\frac{e_u}{\bar{u}} = \frac{e_{x+y}}{x+y} + \frac{e_z}{z} + r_m$$

en que e_z/z es el error relativo en z , y r_m es el error por redondeo en la multiplicación. Como supusimos nulo el error en z , y como

$$\left| \frac{e_u}{\bar{u}} \right| = \left| \frac{e_{x+y}}{x+y} + r_m \right| \leq \left| \frac{e_{x+y}}{x+y} \right| + |r_m|$$

(La última desigualdad se denomina la desigualdad triangular: la igualdad se cumple si $e_{x+y}/(x+y)$ y r_m tiene signos iguales, y la desigualdad si tiene signos diferentes.) Entonces tenemos.

$$\left| \frac{e_u}{\bar{u}} \right| \leq 5 \cdot 10^{-L} + 5 \cdot 10^{-L}$$

$$|e_u| \leq \bar{u} \cdot 10^{-L+1} \quad \text{Que es el límite del error absoluto.}$$

B.5 GRAFICAS DE PROCESOS.

Tenemos expresiones que nos permiten conocer la propagación de los errores que existen en los operandos de las operaciones aritméticas, y vimos en un ejemplo la manera de determinar el error total en una computación. Necesitamos ahora una forma más conveniente de manejar el problema de la propagación de los errores en el cálculo completo.

Una gráfica de procesos es una representación gráfica de la secuencia en la que se efectúan las operaciones aritméticas en una computación de manera que sea fácil determinar el error total en el resultado final. El método también facilita determinar la contribución al error total de un error cualquiera en cualquier lugar de la secuencia.

La figura B.5.1 es la gráfica de proceso del ejemplo de la sección precedente, $u = (x+y) \cdot z$. Una gráfica de proceso debe leerse de abajo hacia arriba, siguiendo las flechas. Primero se efectúan todas las operaciones en un nivel horizontal dado, después todas las operaciones del nivel superior siguiente, y así sucesivamente. En esta figura se ve explícitamente que la suma de x y y se efectúa primero, y que el resultado se multiplica por z .

Hasta el momento tenemos sólo una representación pictórica del orden de las operaciones aritméticas, lo cual es interesante, pero no es el propósito principal. Agregamos ahora identificaciones a cada una de las flechas, de acuerdo con las reglas siguientes, para indicar la manera en que se propagan.

Suma

Considérese que las dos flechas que llegan a un círculo de adición provienen de dos círculos cuyos resultados son a_1 y a_2 , (Estos "resultados" pueden en efecto ser el resultado de otras operaciones, o pueden ser datos de entrada como en nuestro caso.) La flecha que va de a_1 a \oplus con la etiqueta $a_1/(a_1+a_2)$ y la flecha que va de a_2 a \oplus con la etiqueta $a_2/(a_1+a_2)$.

Resta

Si la operación es $a_1 - a_2$, las flechas correspondientes pueden identificarse como $a_1/(a_1 - a_2)$ y $-a_2/(a_1 - a_2)$.

Multiplicación

Las dos flechas que conducen a una multiplicación llevan la identificación +1.

División

Si la división es a_1/a_2 , la flecha que va de a_1 a \emptyset se identifica con +1, y la flecha que va de a_2 a \emptyset lleva la identificación -1.

El objeto de todo esto aparece en la regla siguiente: El error relativo en el resultado de cualquier operación (círculo) aparece en el resultado de la siguiente operación multiplicando por el término que identifica la flecha que une ambas operaciones.

Por ejemplo, considérese la figura B.5.2, que es igual a la figura B.5.1 pero con las flechas debidamente identificadas.

Supongamos ahora que las tres cantidades de la figura B.5.2 tiene errores inherentes relativos por redondeo llamados i_x , i_y , e i_z , y veamos cómo se aplica la regla. Considérese primeramente la suma. Tenemos un error relativo i_x en la cantidad x ; éste aparece en el resultado de la operación siguiente (la suma) multiplicando por el término que identifica la flecha que une \otimes con \oplus :

$$\frac{x}{x+y} i_x$$

Heimos omitido las barras en x y en y , pero sobrentendemos que éstas son aproximadamente iguales a los valores verdaderos. De la misma manera, el error en y , i_y , aparece en el resultado de la operación siguiente multiplicado por el término que identifica la flecha que une \odot con \oplus :

$$\frac{y}{x+y} i_y$$

Hay finalmente un error por redondeo en la suma, al que llamamos τ_1 , y el error relativo total en el resultado de la adición es

$$\frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{x}{x+y} i_x + \frac{y}{x+y} i_y + \tau_1$$

La regla puede aplicarse ahora a la multiplicación. Uno de los factores es la suma de x y y , que tiene un error que se acaba de indicar; éste aparece como error inherente en el resultado de la multiplicación, de acuerdo con la regla, multiplicando por $+1$. El error inherente por redondeo en z , i_z , aparece en el resultado de la multiplicación multiplicándolo también por $+1$. La multiplicación tendrá un error por redondeo que llamamos τ_2 y el error total después de efectuar la multiplicación, que es el error total en u , es

$$\frac{e_u}{u} = \frac{x}{x+y} i_x \cdot 1 + \frac{y}{x+y} i_y \cdot 1 + \tau_1 \cdot 1 + i_z \cdot 1 + \tau_2$$

Si todos los resultados están correctamente redondeados (de acuerdo con el método de redondeo convenido), Ninguno de los errores por redondeo será mayor que 5×10^{-t} . Entonces tenemos.

$$\left| \frac{e_u}{u} \right| \leq \left(\left| \frac{x}{x+y} \right| + \left| \frac{y}{x+y} \right| + 3 \right) \times 5 \cdot 10^{-t}$$

Si tanto x como y no son negativos, entonces:

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| + \left| \frac{y}{x+y} \right|$$

no puede ser mayor que 1, y finalmente tenemos

$$\left| \frac{e_u}{u} \right| \leq 20 \cdot 10^{-t} = 2 \cdot 10^{-t+1}$$

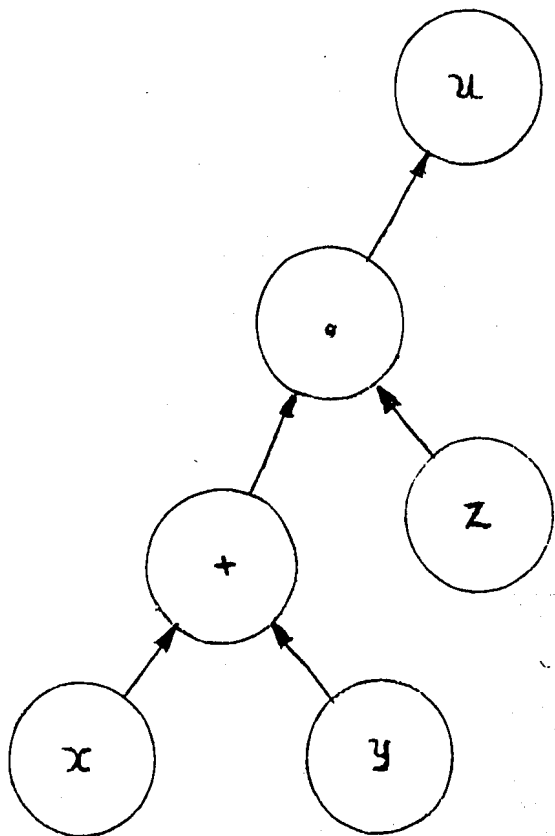


Fig. B.5.1

$$u = (x + y) \cdot z$$

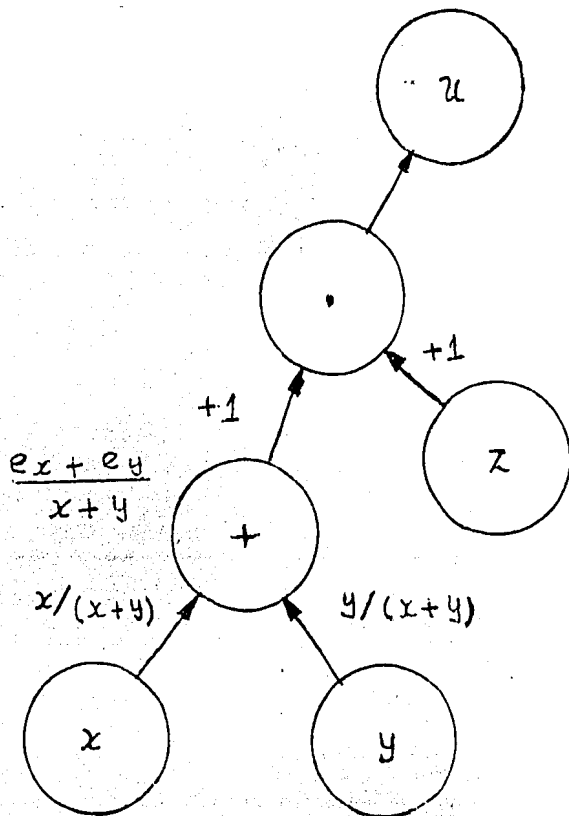


Fig. B.5.2

B.6 CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Las funciones de forma supuestas reducen los infinitos grados de libertad del sistema con lo que es posible que nunca obtengamos el verdadero valor mínimo de la energía (para los diferentes casos estudiados), independientemente de lo tupida que sea la subdivisión. Para asegurar la convergencia hacia el resultado correcto han de cumplirse determinadas condiciones. Por ejemplo es obvio que una función de desplazamiento ha de ser capaz de representar la distribución real de los desplazamientos tan aproximadamente como sea posible. Veremos que esto no ocurre cuando las funciones que hayamos elegido sean tales que se produzcan deformaciones en algún elemento cuando éste se someta a los desplazamientos propios de un cuerpo rígido. Así pues, el primer criterio que una función de desplazamientos debe satisfacer es el siguiente:

Criterio 1^o. Toda función de desplazamiento debe elegirse de tal manera que no permita deformaciones de un elemento cuando los desplazamientos nodales se deban a un desplazamiento del conjunto como cuerpo rígido.

Esta condición, evidente por sí misma, puede violarse fácilmente si se emplean ciertos tipos de funciones; por consiguiente, ha de ponerse cuidado al elegir las funciones de desplazamientos.

Un segundo criterio se deriva de los mismos razonamientos anteriores. Es evidente que a medida que los elementos se hacen más pequeños tanto más prevalecerán en ellos condiciones de deformación constante. Si de hecho existen dichas condiciones, será pues conveniente, escoger el tamaño de los elementos que las reproduzcan exactamente, para conseguir un buen grado de aproximación. Se pueden encontrar funciones que satisfagan el primer criterio, pero que requieran al mismo tiempo que las deformaciones varíen dentro del elemento, aun cuando los desplazamientos nodales sean compatibles con un estado de

deformaciones constantes. Dichas funciones no convergen bien en general hacia la solución exacta y no pueden, ni en el límite representar la distribución verdadera de deformaciones. Así pues, el segundo criterio se puede formular como sigue:

Criterio 2^o. Toda función de desplazamientos tiene que ser tal que si los desplazamientos nodales son compatibles con un estado de deformación constante, se obtenga realmente dicho estado de deformación constante.

Se habrá observado que el Criterio 2 incorpora de hecho las condiciones exigidas por el Criterio 1 ya que los desplazamientos de un cuerpo rígido son casos particulares de deformación constante nula. Este criterio fue establecido originalmente por Bazeley¹⁷ y otros en 1965. Estrictamente, ambos criterios sólo necesitan ser satisfechos en el límite cuando el tamaño del elemento tiende a cero. Sin embargo, al imponer estos criterios a elementos de tamaños finito se alcanza buen grado de precisión.

Finalmente, se ha supuesto que la contribución del trabajo realizado en los contornos de separación entre elementos al trabajo virtual total es nulo. Por consiguiente, para asegurarnos que se cumple esta condición es necesario incluir el criterio siguiente:

Criterio 3^o. Las funciones de desplazamientos deben elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de separación entre elementos sean finitas.

Este criterio implica la continuidad de los desplazamientos entre elementos. Si las deformaciones se definen mediante las derivadas primeras, como en el ejemplo de elasticidad plana citado aquí, sólo deberán ser continuos los desplazamientos. No obstante, si como ocurre en los problemas de placas y láminas, las deformaciones se definen mediante las derivadas segundas de los polos, deberán ser también continuas las derivadas primeras de éstas.

Matemáticamente, los criterios anteriores forman parte del enunciado de "funcional completo"; la discusión matemática debe buscarse en otros lugares. La demostración "heurística" de las condiciones de convergencia ofrecida aquí es suficiente a efectos prácticos, con excepción de los casos más patológicos

Error de discretización e índices de convergencia.

En lo dicho anteriormente hemos admitido que la aproximación a los desplazamientos representada por la ecuación :

$$u \approx \hat{u} = \sum N_i \alpha_i^e = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{\alpha}^e \quad (\text{B.6.1})$$

nos proporciona la solución exacta en el caso límite, si el tamaño h de los elementos se va haciendo cada vez más pequeño. Los argumentos para ello son sencillos: puesto que el desarrollo es capaz de reproducir en el límite cualquier distribución de desplazamientos concebible dentro del continuo, y además como la solución de cada aproximación es única, aquél debe proporcionar en el límite, cuando $h \rightarrow 0$, la solución exacta. Y lo cierto es que en algunos casos, dicha solución exacta puede alcanzarse con un número finito de subdivisiones (o incluso con un sólo elemento) si el desarrollo polinómico utilizado para ese elemento puede ajustarse exactamente a la solución correcta. Así por ejemplo, si la solución exacta es un polinomio de segundo grado y las funciones de forma incluyen todos los polinomios de ese grado, la aproximación nos proporcionará la solución exacta.

Este último argumento puede ayudarnos a determinar el grado de convergencia del método de los elementos finitos, puesto que la solución exacta puede siempre desarrollarse en serie polinómica en las proximidades de cualquier nodo i .

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i y + \dots \quad (\text{B.6.2})$$

Si en el interior de un elemento de "tamaño" h se emplea un desarrollo polinómico de grado p , éste podrá ajustarse localmente al desarrollo de Taylor hasta dicho grado y, como x e y son del orden de magnitud de h , el error en u será del orden $O(h^{p+1})$. Así, por ejemplo, en el problema de elasticidad plana discutido anteriormente hemos empleado un desarrollo lineal y $p=1$; por consiguiente debemos esperar un grado de convergencia del orden de $O(h^2)$, lo cual implica que el error en los desplazamientos se reducirá a $1/4$ si el tamaño de los elementos de la malla se reduce a la mitad.

Mediante un argumento similar, las deformaciones (o las tensiones) que vienen dadas por las derivadas m -ésimas de los desplazamientos, convergerían con un error de $O(h^{p+1-m})$; y para $m=1$ en el ejemplo anterior, tendríamos que el error de convergencia sería $O(h)$. La energía de deformación que viene dada por el cuadrado de las tensiones exhibirá un error de $O(h^{2(p+1-m)})$ u $O(h^2)$ para el ejemplo de tensión plana.

Desde el punto de vista matemático, estos argumentos pueden parecer quizá banalidades "heurísticas"; sin embargo, son ciertos y proporcionar correctamente el grado de convergencia. Frecuentemente, se ha desarrollado análisis matemático mucho más profundo no sólo para determinar el grado de convergencia sino también para establecer el límite superior del error. Ninguno de ellos ha resultado hasta hoy especialmente útil, ya que generalmente vienen expresados en función de cantidades desconocidas a priori. Más aún, la simple determinación del grado de convergencia basta a menudo para extrapolar la solución hasta el resultado correcto. Así por ejemplo, si los desplazamientos convergen con $O(h^2)$ y tenemos dos soluciones aproximadas u^1 y u^2 obtenidas con mallas de tamaños h y $h/2$, podemos escribir, siendo u la solución exacta.

$$\frac{u^1 - u}{u^2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4 \quad (\text{B.6.3})$$

y de esta ecuación podemos predecir una solución casi exacta para u . Tal extrapolación fue introducida originalmente por Richardson¹⁸ y es de gran utilidad si la convergencia es monótona.

El error de discretización no es el único posible en los cálculos por elementos finitos. Además de los errores obvios que se pueden producir cuando se manejan computadoras, los debidos al redondeo son siempre posibles (vea sección B.1). Como la computadora opera con números redondeados a un número finito de dígitos, cada vez que tenga lugar una sustracción de dos números parecidos se producirá una disminución del grado de precisión. En los procesos de resolución de sistemas de ecuaciones son necesarias muchas sustracciones y la precisión disminuye. También se incluye aquí los problemas de condicionamiento de la matriz y cuando se emplee el método de los elementos finitos se deberá ser conciente en todo momento de las limitaciones de precisión que impiden alcanzar la solución exacta. Afortunadamente, con los procesadores modernos, que admiten un gran número de cifras significativas, estos errores con frecuencia son pequeños.

En la sección siguiente mostraremos que los procedimientos desarrollados en éste no son sino un caso especial de discretización por elementos finitos, aplicado a las ecuaciones de equilibrio que gobiernan un sistema, sea este un campo de desplazamiento, un campo de potencial eléctrico o un campo de carga hidráulica, entre otros.

B.7 GENERALIZACIÓN DE LOS CRITERIOS

El problema que todavía no hemos planteado es el del grado de bondad de la aproximación y cómo podemos mejorarla sistemáticamente para acercarnos más a la solución exacta. La primera pregunta es casi imposible de contestar y presupone el conocimiento de la solución exacta. La segunda es más racional y puede contestarse si consideramos algún procedimiento sistemático según el cual pueda suponerse que tiene lugar el aumento del número

de parámetros α en la expresión general siguiente.

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^r N_i \alpha_i \quad (\text{B.7.1})$$

Hemos empleado funciones definidas localmente, siendo éstas fundamentales en el análisis mediante elementos finitos. En este caso, hemos supuesto tácitamente que se obtiene convergencia al disminuir el tamaño de los elementos, y por consiguiente al incrementar el número de parámetros nodales a . Es este tipo de convergencia la que nos importa. Evidentemente, tenemos que determinar ahora: a) que al aumentar el número de elementos, se puede aproximar las funciones incógnitas tanto como se desee y b) de qué forma disminuye el error con el tamaño h de las subdivisiones del dominio (h podría ser aquí alguna de las dimensiones más características de un elemento).

El primer problema se refiere a estudiar si el desarrollo es completo (en el sentido de los términos que contiene), y aquí supondremos que todas las funciones de prueba sean polinomios.

Si en cualquiera de los términos del principio variacional que modele nuestro problema, aparecen derivadas de orden m , será evidentemente necesario, para obtener en el límite dicho valor constante, que el polinomio definido localmente sea al menos de grado m .

Diremos pues que una condición necesaria para que el desarrollo sea convergente, es el criterio de desarrollo completo; si en la expresión integral aparecen derivadas m -ésimas, ha de ser alcanzable un valor constante, en el dominio del elemento, para la derivada m -ésima cuando el tamaño del elemento tienda a cero.

Este criterio se satisface automáticamente si los polinomios que aparecen en la función de forma N son completo hasta el grado m -ésimo.

Si el grado de un polinomio completo empleado en el desarrollo mediante elementos finitos es $p \gg m$, podrá averiguarse el orden de convergencia observando la aproximación con la cual dicho polinomio puede seguir el desarrollo en serie de Taylor local de la incógnita u .

Evidentemente, el orden del error será simplemente $O(h^{p+1})$ puesto que sólo podemos obtener correctamente términos hasta un grado p .

. El conocimiento del orden de convergencia es de gran ayuda para averiguar la bondad de la aproximación cuando se estudian diferentes mallas de tamaños decrecientes.

A P E N D I C E C

F U N C I O N E S D E F O R M A , A L G U N A S
F A M I L I A S G E N E R A L E S D E C O N T I N U I -
D A D C O .

FUNCIONES DE FORMA,
ALGUNAS FAMILIAS GENERALES
DE CONTINUIDAD C_0 .

C.1 Introducción.

Se verá más adelante que en realidad es posible programar un procesador para que procese una gran variedad de problemas especificando solamente las funciones de forma. La elección de éstas es, sin embargo, un punto en que se ha de aplicar el ingenio y en el que el factor humano es primordial. En este apéndice se presentan algunas reglas para generar distintas familias de elementos uni, bi, y tridimensionales .

Las funciones de forma que se utilizaron al formular los problemas de elasticidad por el método de los desplazamientos tenían que satisfacer los criterios de convergencia establecidos en el anexo anterior sección B.6 :

a) Las incógnitas han de presentar continuidad entre elementos (o sea, no se requiere la continuidad de las derivadas primeras), o continuidad C_0 .

b) La función ha de permitir la representación de cualquier forma lineal, de manera que se satisfaga el criterio de deformación constante (primera derivada constante).

Las funciones de forma que se describen en este momento sólo exigirán la satisfacción de estos dos criterios. Serán por tanto aplicables a todos los problemas de los desarrollados en esta tesis, así como también a cualquier otro que sólo requiera el cumplimiento de estas dos.

En la sección B.6 del anexo anterior hemos demostrado que el orden de error en la aproximación es $O(h^{p+1})$, donde h es el tamaño del elemento y p el grado del polinomio completo que aparece en el desarrollo. Evidentemente al aumentar el grado de las funciones de forma, aumentara también la potencia de error y la convergencia hacia la solución exacta se hace más rápida,

mientras que esto nada dice acerca de la magnitud del error para una subdivisión particular, es evidente que deben buscarse funciones de forma que contengan el polinomio completo de mayor grado posible para un número de grado de libertad dado.

C.2 ELEMENTOS BIDIMENSIONALES RECTANGULARES.

Conceptualmente (en especial si el lector está condicionado por su educación a pensar en el sistema de coordenadas cartesianas), la forma de elemento más sencilla es la de un rectángulo de lados paralelos a los ejes x e y . Consideremos por ejemplo un rectángulo como el representado en la figura C.2.1 con puntos nodales numerados de 1 a 8, en las posiciones indicadas y en donde los valores de la función incógnita ϕ forma los parámetros del elemento. ¿Cómo pueden determinarse funciones de forma adecuadas para este elemento?

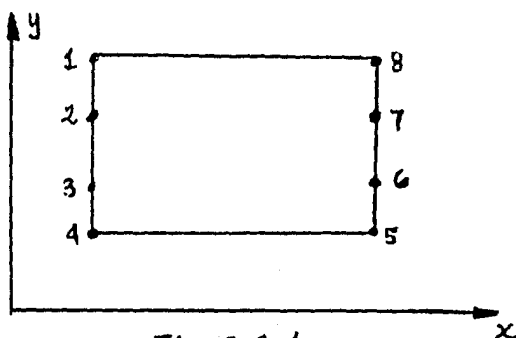


Fig. C.2.1

Supongamos en primer lugar que se expresen como forma polinómica en x e y . Para asegurar la continuidad de ϕ entre elementos a lo largo de los lados superior e inferior, la variación debe ser lineal. Los elementos que estén en contacto con el lado superior o inferior tendrán dos puntos comunes con dichos lados, y puesto que dos valores determinan una función lineal de manera única, queda asegurado que a lo largo de dichos lados las funciones correspondientes a elementos continuos serán iguales.

Similarmente, si suponemos que a lo largo de los lados verticales la variación es cúbica, aseguramos la continuidad en los mismos, puesto que cuatro valores determinan un polinomio de tercer grado de manera única. Se han obtenido pues las condiciones para que se satisfaga el primer criterio.

Para asegurar la existencia de valores arbitrarios de las derivadas primeras, todo lo necesario es que se conserven todos los términos lineales del desarrollo.

Finalmente, puesto que la variación de la función ha de venir determinado unívocamente por ocho puntos, sólo pueden retenerse ocho coeficientes del desarrollo y por consiguiente podemos escribir

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 xy^3 \quad (C.2.1)$$

Generalmente, se puede llevar a cabo la elección de forma unívoca reteniendo los términos del desarrollo del menor grado posible, aunque evidentemente en este caso no se presenta dicha situación.

Sustituyendo las coordenadas de los distintos nodos, se obtendrá un sistema de ecuaciones simultáneas.

Este puede escribirse de la siguiente manera.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x_1, y_1, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1^2, y_1^3, x_1 y_1^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (C.2.2)$$

o simplemente

$$\phi^e = \underline{C} \underline{\alpha} \quad (C.2.3)$$

Formalmente.

$$\underline{\alpha} = \underline{C}^{-1} \phi^e \quad (C.2.4)$$

y podríamos escribir (B.2.1) como

$$\underline{\phi} = \underline{P}\underline{\alpha} = \underline{P}\underline{C}^{-1}\underline{\phi}^e \quad (C.2.5)$$

en la que

$$\underline{P} = [1, x, y, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3] \quad (C.2.6)$$

Así pues, las funciones de forma del elemento definidas por

$$\underline{\phi} = \underline{N}\underline{\phi}^e = [N_1, N_2, \dots, N_8]\underline{\phi}^e \quad (C.2.7)$$

se pueden determinar a partir de

$$\underline{N} = \underline{P}\underline{C}^{-1} \quad (C.2.8)$$

Este procedimiento, muy utilizado en la práctica ya que no implica mucha ingeniosidad, presenta sin embargo algunas desventajas considerables. A veces puede que no exista la inversa de C y siempre se encuentra considerable dificultad algebraica en la obtención de una inversa adecuada, en términos generales, a todas las geometrías del elemento. Vale la pena, por tanto, considerar la posibilidad de escribir directamente las funciones de forma $N_i(x, y)$. Antes de ello, hemos de mencionar algunas propiedades generales de estas funciones.

Examinando la definición expresada en (C.2.7), observamos enseguida algunas características importantes. Primeramente, puesto que esta expresión es válida para todos los componentes de $\underline{\phi}^e$, será.

$$N_i = 1$$

en el nodo i , y nula en todos los demás nodos. Más aún, debe conservarse la forma básica de la variación a lo largo del contorno que haya sido definida, por razones de continuidad (como

en el ejemplo anterior, en que era lineal en x y cúbica en y). En la figura C.2.2 se representa isométricamente los aspectos de las funciones de forma de dos nodos típicos de elementos como los considerados. Es evidente que éstas podían haberse escrito directamente como producto de una función lineal x por una de tercer grado en y adecuadas. No siempre es tan fácil como en este caso encontrar una solución, pero se recomienda siempre que sea posible, tratar de deducir directamente las funciones de forma.

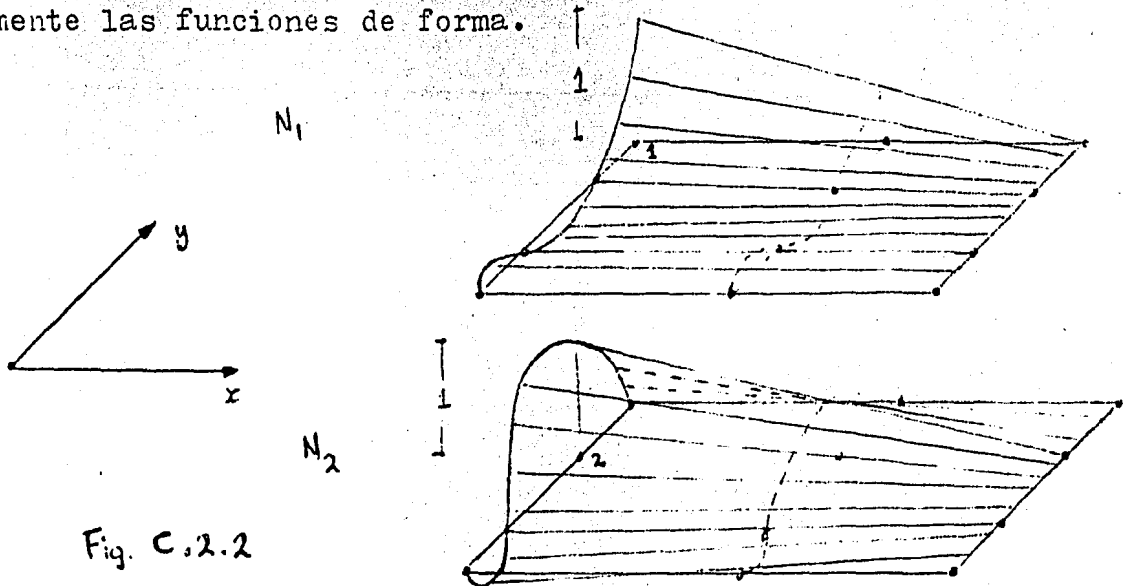


Fig. C.2.2

será conveniente para los razonamientos que siguen, utilizar coordenadas normalizadas. En la figura C.2.3 se muestran dichas coordenadas normalizadas elegidas de manera que en los lados del rectángulo toman los valores ± 1 .

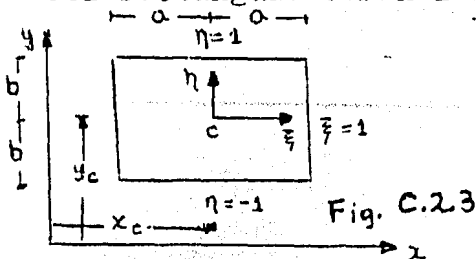


Fig. C.2.3

$$\xi = (x - x_c) / a, \quad d\xi = dx / a \quad (C.2.9)$$

$$\eta = (y - y_c) / b, \quad d\eta = dy / b$$

Una vez conocidas las funciones de forma en coordenadas normalizadas, es muy sencillo efectuar el cambio a coordenadas reales, así como transformar las distintas expresiones que aparecen, por ejemplo, en la deducción de la matriz de rigidez. Así, pues, podemos trabajar en coordenadas normalizadas.

Familia de Lagrange.

Se puede obtener un método fácil y sistemático para engendrar funciones de forma de cualquier grado mediante el simple producto de los polinomios apropiados en las dos coordenadas. Consideremos un elemento como el mostrado en la figura C.2.4, en el que se disponen una serie de nodos exteriores e interiores, formando una malla regular. Se desea determinar una función de forma para el punto indicado por el círculo más grande. Evidentemente el producto de un polinomio de quinto grado en ξ que toma el valor unidad en los puntos de la segunda columna de nodos y cero en todos los demás, por un polinomio de cuarto grado en η , -- que tome el valor unidad en la coordenada que corresponde a la fila de nodos superior y cero en todos los demás puntos, satisficará las condiciones de continuidad entre elementos y dará la unidad en el punto nodal en cuestión.

Los polinomios de una variable que presentan esta propiedad se conocen como polinomios de Lagrange y pueden escribirse directamente como sigue:

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)} \quad (C.2.10)$$

dando la unidad en ξ_i y pasando por n puntos.

Por tanto, si en dos dimensiones distinguimos cada nodo por su columna y su número nodal I, J ,

$$N_i \equiv N_{I,J} = L_I^n(\xi) L_J^m(\eta) \quad (C.2.11)$$

donde n y m representan el número de subdivisiones en cada dirección.

En la figura C.2.5 se muestran algunos miembros de esta ilimitada familia. Aunque fácil de generar, su utilidad es limitada, no sólo debido al gran número de nodos interiores que presenta, sino también a las escasas condiciones para ajuste de curvas que ofrecen los polinomios de grados elevados. Se advertirá que las expresiones de las funciones de forma contienen algunos términos de grado muy elevado, mientras que se prescinde

de algunos términos de grados inferiores.

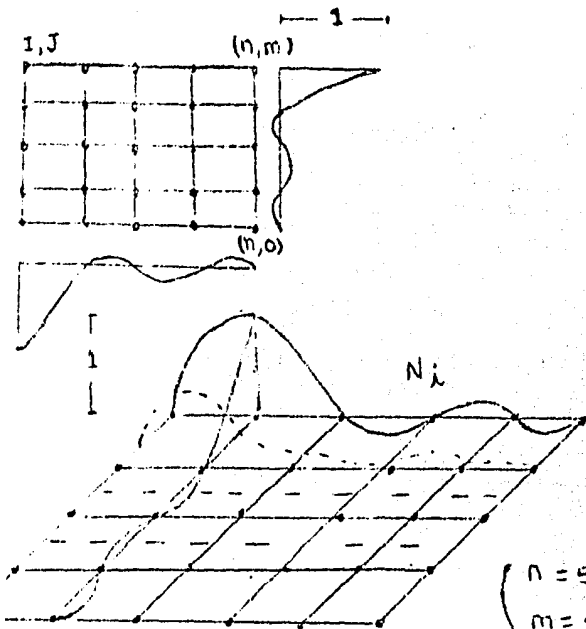


Fig C.2.4

$$\begin{pmatrix} n=5 & I=1 \\ m=4 & J=1 \end{pmatrix}$$

Familia Serendípita

Es con frecuencia muy conveniente hacer que las funciones dependan de valores nodales situados en el contorno. Consideremos por ejemplo, los tres primeros elementos de la figura C.2.6. En cada uno, el número de nodos aumenta gradualmente y hay el mismo número de nodos en cada lado. Para asegurar la continuidad, la variación de la función en cada lado es lineal, parabólica y cúbica respectivamente, según el número creciente de nodos de uno a otro elemento.

Para obtener la función de forma del primer elemento es evidente que un producto de la forma

$$\frac{1}{4}(\xi+1)(\eta+1) \tag{C.2.12}$$

toma el valor uno en el nodo superior derecho, donde $\xi = \eta = 1$, y cero en todos los demás. Además, la función de forma varía linealmente en todos los lados, y por tanto se satisface el criterio de continuidad. Este elemento es idéntico al lagrangiano de $n=1$.

Introduciendo las nuevas variables.

$$\xi_0 = \xi \xi_i \quad \eta_0 = \eta \eta_i \tag{C.2.13}$$

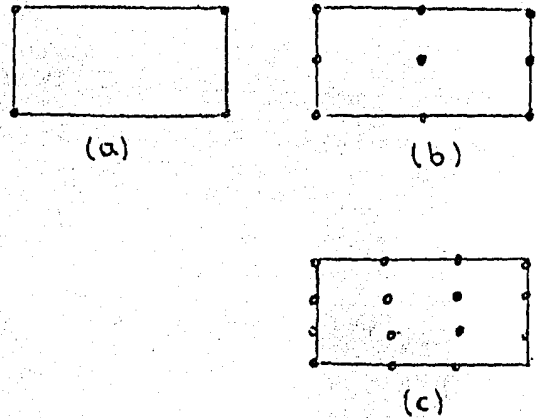


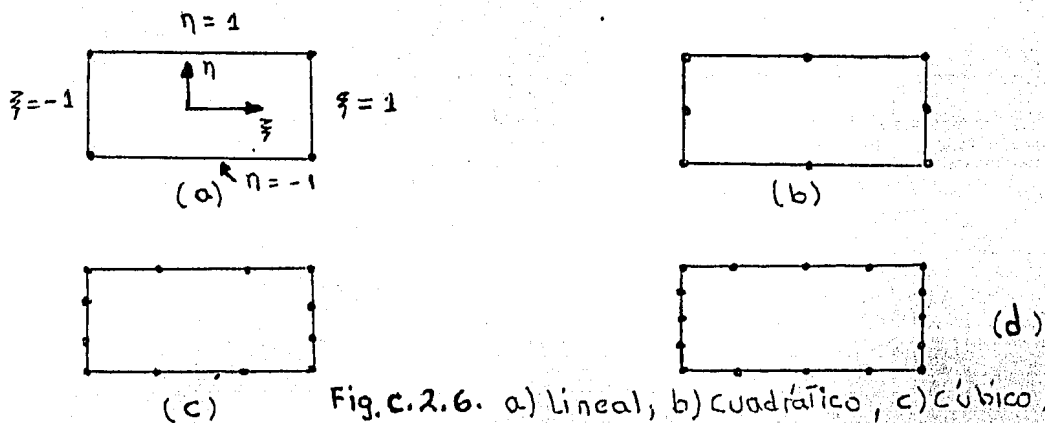
Fig. C.2.5, a) Lineal, b) Cuadrático, c) Cúbico.

la forma

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (C.2.14)$$

permite escribir todas las funciones de forma en una sola expresión.

Como una combinación lineal de estas funciones de forma proporciona cualquier variación lineal arbitraria de ϕ , el segundo criterio de convergencia queda satisfecho.



El lector puede verificar que las siguientes funciones satisfacen todos los criterios necesarios para los miembros de segundo y tercer orden de la familia.

Elemento cuadrático.

Nodos de vértice

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad (C.2.15)$$

Nodos laterales

$$\begin{aligned} \xi_i = 0, & \quad N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \\ \eta_i = 0, & \quad N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \end{aligned}$$

Elemento cúbico

Nodos de vértice

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)] \quad (C.2.16)$$

Nodos laterales

$$\xi_i = \pm 1 \quad \text{y} \quad \eta_i = \pm \frac{1}{3}$$
$$N_i = \frac{q}{27} (1 + \xi_i)(1 - \eta_i^2)(1 + 9\eta_i)$$

Obteniéndose las expresiones para los nodos restantes permutando las variables.

En el miembro siguiente de esta familia, de cuarto orden, se ha añadido un nodo central de manera que se obtengan todos los términos de un polinomio completo de cuarto grado. Este nodo central también introduce una función de forma $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$, que toma el valor cero en todos los contornos exteriores.

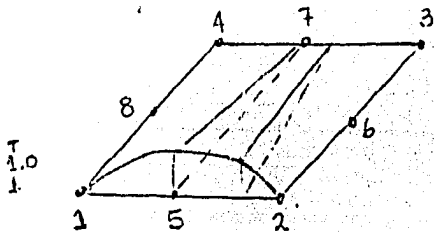
Las funciones anteriores fueron deducidas originalmente por mera observación, y su extensión a miembros de orden aún más elevado es difícil y requiere cierto ingenio. Fue por tanto apropiado llamar a esta familia "serendípita" por referencia al famoso Príncipe de Serendip, célebre por sus descubrimientos fortuitos (Horacio Walpole, 1754).

Puede establecerse, sin embargo, un procedimiento bastante sistemático para generar funciones de forma serendípitas, el cual resulta evidente en la figura C.2.7, donde se presenta la generación de una función de forma de segundo grado.

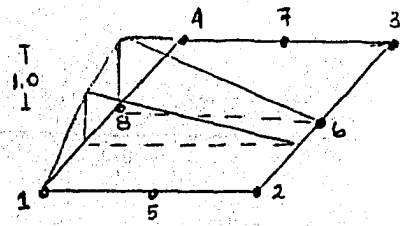
Para empezar, observamos que para los nodos laterales basta con una interpolación lagrangiana del tipo lineal de 2º grado para determinar N_i en los nodos 5 a 8. N_5 y N_8 se representan en la figura C.2.7(a) y (b). Para un nodo de vértice como el de la figura C.2.7(c), comenzamos con una \hat{N}_1 bilineal y advertimos inmediatamente que mientras $N = 1$ en el nodo 1, es distinta de cero en los nodos 5 u 8. Sustrayendo sucesivamente $1/2(N_5)$ (paso 2) y $1/2(N_8)$ (paso 3), aseguramos que se obtiene un valor nulo en dichos nodos. Se puede verificar que las expresiones obtenidas coinciden con las (C.2.15) y (C.2.16).

Ciertamente, debería ahora resultar evidente que para todos los elementos de orden más elevado, se pueden generar siguiendo un proceso idéntico para generar las funciones de forma para los nodos laterales y de vértice. Para las primeras basta con una

simple multiplicación de dos interpolaciones lagrangianas de grados m y n . Para las segundas es necesario la suma de las funciones bilineales de vértice junto con las fracciones apropiadas de las funciones de forma de los nodos laterales para asegurar la unidad en el nodo del vértice y la nulificación en los nodos restantes.

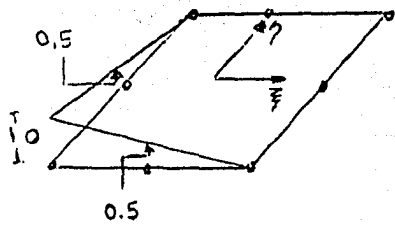


a) $N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$



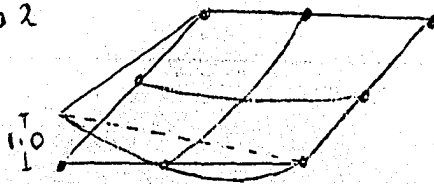
b) $N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

Paso 1



$\hat{N}_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4$

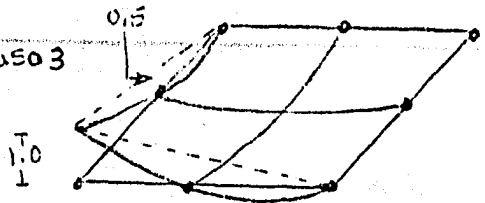
Paso 2



$\hat{N}_1 = \frac{1}{2}N_5$

c)

Paso 3



$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$

Fig. C.2.7.

APENDICE D

MODELACION MATEMATICA DE
SISTEMAS, INTRODUCCION AL CAL-
CULO VARIACIONAL.

MODELACION MATEMATICA DE
SISTEMAS, INTRODUCCION AL
CALCULO VARIACIONAL.

D.1 Introducción.

Existen una gran variedad de sistemas físicos que pueden ser descritos desde un punto de vista variacional y en este contexto, el manejo de cálculo de variaciones se considera como una herramienta matemática que permite la formulación de un sistema mediante conceptos matemáticos que pueden relacionarse directamente con aspectos físicos del mismo.

El problema clásico de cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un funcional el cual se define como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada y para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente ceda un valor extremo, es decir mínimo o máximo.

Sea el funcional I definido por:

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (D.1.1)$$

Cada función $F(x)$ que sea sustituida en esta ecuación resulta en un valor numérico de I diferente y aquella función $F^*(x)$ que resulte en un valor mínimo o máximo, hace el funcional I estacionario.

Es conveniente pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebraica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como

$$y = f(x) \quad (D.1.2)$$

ciertas condiciones deben ser satisfechas, como son que la función sea continua en el rango de interés, que sea derivable dos veces en dicho rango y que además la primera derivada de la fun-

ción con respecto a la variable sea cero en decir:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{D.1.3})$$

El resultado es un valor de la variable independiente por el cual la función $f(x)$ es estacionario.

Entonces, cuando se extremiza una función se encuentra un valor de la variable independiente, más cuando se extremiza un funcional se encuentra una función. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x) dx = 0 \quad (\text{D.1.4})$$

Esta condición es análoga a la condición de la ecuación (D.1.3). Un ejemplo de aplicación del concepto variacional es el problema de encontrar la trayectoria que debe seguir una partícula de masa m para moverse desde el punto A al punto B en un plano, bajo la acción de la gravedad de tal forma que el tiempo de recorrido sea mínimo. Figura D.1.1.

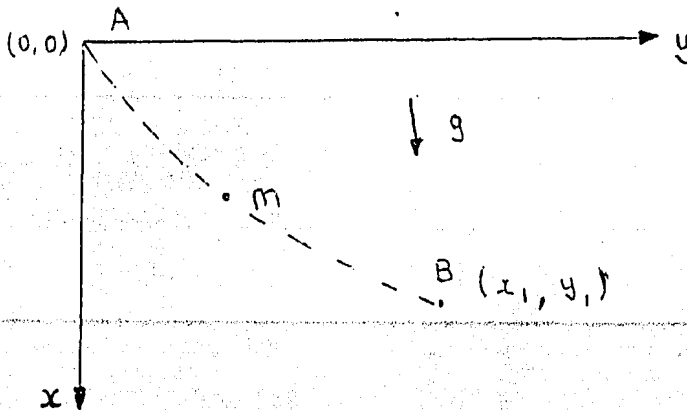


Fig. D.1.1

El funcional que se puede proponer par este problema es:

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v} \quad (\text{D.1.5})$$

en donde

$$ds = \pm \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{D.1.6})$$

y de consideraciones energéticas

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g x \quad (D.1.7)$$

entonces combinando las tres últimas ecuaciones se tiene que

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} dx \quad (D.1.8)$$

El problema consiste en encontrar una función $y=f(x)$ tal que el funcional t sea mínimo.

Antes de proseguir a formular la solución es necesario describir la forma general del problema clásico de cálculo de variaciones.

Sea el funcional Π definido por

$$\Pi = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (D.1.9)$$

en donde $y' = \frac{dy}{dx}$. El problema consiste en encontrar funciones $y=y(x)$ para las cuales pequeñas variaciones arbitrarias $\delta y(x)$, no cambien el valor de Π .

La condición suficiente y necesaria para encontrar un valor estacionario de Π es de acuerdo con la ecuación (D.1.4)

$$\delta \Pi = \int_a^b \delta F(x, y, y') dx = 0 \quad (D.1.10)$$

Tomando la variación de F resulta

$$\delta \Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (D.1.11)$$

en donde
$$\delta y' = \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (D.1.12)$$

Sustituyendo (D.1.12) en (D.1.11) e integrando por partes el resultado es:

$$\delta \Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = 0 \quad (D.1.13)$$

Entonces para que δy sea cero es necesario que:

$$y(a) = y(b) = \text{constante} \quad (\text{D.1.14})$$

y por lo tanto

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad (\text{D.1.15})$$

o en su defecto que los dos términos de la integral en la ecuación (D.1.13) sean cero, es decir

$$\frac{\partial F(a)}{\partial y'} = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} = 0 \quad (\text{D.1.16})$$

y

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (\text{D.1.17})$$

dado que δy es arbitraria entre los límites a y b y no necesariamente cero entonces.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{D.1.18})$$

Esta es la ecuación conocida como la ecuación Euler-Lagrange y aquella función $y(x)$ que satisfaga la ecuación (D.1.18) hace el funcional estacionario.

Regresando al problema del ejemplo, podemos identificar el integrando de las ecuaciones (D.1.8) y (D.1.9) es decir

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} \quad (\text{D.1.19})$$

y dado que y no aparece explícitamente en (D.1.19) entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{D.1.20})$$

que implica que el parentesis es igual a una constante

$$(\text{D.1.21})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{2gx(1+y'^2)} = c$$

despejando y' de (D.1.21) queda

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} \quad (\text{D.1.22})$$

de donde

$$y = \int \left(\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x} \right)^{1/2} dx \quad (\text{D.1.23})$$

La solución de esta integral a través de tablas de integración y algunas manipulaciones cede la siguiente solución.

$$y = \frac{1}{4gc^2} (\theta - \text{sen } \theta) \quad (\text{D.1.24})$$

en donde

$$\theta = \cos^{-1}(1-4gc^2x) \quad (\text{D.1.25})$$

Entonces sustituyendo la ecuación (D.1.22) en (D.1.8) se puede comprobar que el tiempo de recorrido es mínimo en comparación con cualquier otra trayectoria que pase por los puntos extremos de la curva.

D.2 FORMULACION VARIACIONAL DEL ELEMENTO FINITO.

El concepto fundamental del método del elemento finito (MEF) consiste en que cualquier función continua en un dominio dado, puede aproximarse mediante una selección de funciones que se definen en una serie de subdominios dentro de los cuales estas funciones son continuas y las cuales se interconectan para aproximar así la función dada.

Desde el punto de vista físico, el concepto fundamental del método del elemento finito consiste en que para resolver un sistema que representa una estructura física sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie

de puntos llamados nodos y cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en sí es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real.

Resumiendo, el procedimiento consiste en establecer un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma.

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx \quad (D.2.1)$$

en donde

$$y = y(x) \quad , \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \quad (D.2.2)$$

Una vez establecido este funcional se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir que cumpla con la condición de estacionariedad de una integral mediante:

$$\delta \Pi = 0 \quad (D.2.3)$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores mínimo o máximo de una función en cálculo diferencial, exepcto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace que el valor de dicha integral sea mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \dots + \int_{x_n}^{x_b} F(x, y, y') dx \quad (D.2.4)$$

o bien:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_n \quad (\text{D.2.5})$$

La integral total Π ahora consiste en varias integrales parciales Π_λ , cada una extendiéndose en los subdominios $(x_{\lambda-1}, x_\lambda)$

El concepto de discretizar la integral de la ecuación (D.2.1) puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de elementos a los cuales se asigna cada una de las integrales. La ventaja es que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica, etc.) para la función $y(x)$ en cada integral, es decir en cada elemento. Esto permite que el valor de cada función integral sea una función de los coeficientes utilizados en el polinomio de dicho elemento. Entonces la integral total Π es también una función de los coeficientes polinomiales usados en cada uno de los elementos y la condición de la ecuación (D.2.3) se satisface si

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{D.2.6})$$

donde las a_λ 's son el juego completo de coeficientes polinomiales usados en cada elemento.

Al sustituir la función $y(x)$ por una aproximación polinomial $y(x) \approx a_1 x + a_2 x^2 \dots$ el problema se reduce a encontrar los coeficiente de los polinomios usados en la aproximación.

Es decir, la solución directa de la ecuación (D.2.1) sujeta a las condiciones (D.2.2) puede ser bastante complicada y es necesario aplicar los conceptos de cálculo variacional, sin embargo el problema se puede formular mediante la ecuación (D.2.4) y al sustituir la aproximación polinomial el problema se puede resolver algebraicamente.

A P E N D I C E E

I N T E R P O L A C I O N E I N T E G R A C I O N

N U M E R I C A S

INTERPOLACION E
INTEGRACION NUMERICAS.

E.1 INTERPOLACION Y APROXIMACION DE LAS FUNCIONES.

Uno de los problemas fundamentales del análisis numérico es la interpolación de las funciones. Se requiere a menudo restablecer la función $f(x)$ para todos los valores de x en el segmento $a \leq x \leq b$, si están conocidos sus valores en cierto número finito de puntos del segmento mencionado. Dichos valores pueden ser determinados como resultado de las mediciones (observaciones) en un experimento natural, o bien como resultado de los cálculos. Además puede ocurrir que la función $f(x)$ viene definida por cierta fórmula y el cálculo de sus valores, rigiéndose por dicha fórmula, es muy engorroso, razón por la cual resulta deseable tener para la función otra fórmula, más simple, (menos engorrosa para los cálculos) que permitirá hallar valores aproximados de la función en consideración con una exactitud necesaria en cualquier punto del segmento. De resultas, surge el siguiente problema matemático.

Supongamos que en el segmento $a \leq x \leq b$ viene prefijada una red $\bar{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ y en los nodos de la red están definidos los valores de la función $y(x)$ iguales a $y(x_0) = y_0, \dots, y(x_i) = y_i, \dots, y(x_n) = y_n$. Se pide construir una interpolante, esto es, una función $f(x)$ que coincida con la función $y(x)$ en los nodos de la red:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (E.1.1)$$

El objetivo principal de la interpolación es obtener un algoritmo rápido (económico) para calcular los valores de $f(x)$ en aquellos puntos x que no están contenidos en la tabla de datos.

La cuestión principal es: cómo elegir la interpolante $f(x)$ y cómo estimar el error $y(x) - f(x)$. Las funciones interpoladoras $f(x)$ se construyen, como regla, en forma de las combinaciones lineales de ciertas funciones elementales:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i(x) \quad (E.1.2)$$

donde $\{\phi_k(x)\}$ son funciones linealmente independientes fijas; $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$, unos coeficiente hasta ahora desconocidos.

De las condiciones (E.1.1) obtenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones respecto a los coeficientes $\{c_k\}$:

$$\sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Supongamos que el sistema de funciones $\phi_k(x)$ es de tal índole que, cualquiera que sea la elección de los nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, queda distinto de cero el determinante del sistema.

$$\Delta(\phi) = \begin{vmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

En este caso los coeficientes c_k ($k=0, 1, \dots, n$) se determinan unívocamente según las y_i ($i=0, 1, \dots, n$) prefijadas.

A título de sistema de las funciones linealmente independientes $\{\phi_k(x)\}$ se elige más a menudo: funciones potenciales $\phi_k(x) = x^k$ (en este caso $f = P_n(x)$ es un polinomio de grado n); funciones trigonométricas $\{\phi_k(x) = \cos kx, \sin kx\}$ (f polinomio trigonométrico). Se emplean también funciones racionales.

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_p x^p}$$

y otros tipos de funciones interpoladoras.

E.2 INTERPOLACION POLINOMIAL.

Se conoce que cualquier función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, puede ser bien aproximada mediante un polinomio $P_n(x)$:

TEOREMA DE WEIERSTRASS. Para todo $\epsilon > 0$ existe tal polinomio $P_n(x)$ de grado $n=n(\epsilon)$ que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \epsilon$$

Sin embargo, este teorema no nos da la respuesta a la pregun-

ta sobre la existencia de un buen polinomio interpolador para el conjunto dado de puntos $\{(x_i, y_i)\}$.

Así pues, buscaremos el polinomio de interpolación en la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad (\text{E.2.1})$$

donde c_k son los coeficientes indeterminados. Suponiendo $f(x_i) = y_i$, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n = y_0$$

$$c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_1^n = y_1$$

$$\dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

$$c_0 + c_1 x_n + \dots + c_n x_n^n = y_n$$

El determinante de este sistema será determinante de Vandermonde distinto de cero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \geq k > m \geq 0} (x_k - x_m) \neq 0$$

De aquí proviene que el polinomio de interpolación (E.2.1) existe y es único.

A título de base de $\{\phi_k(x)\}$ hemos elegido una base compuesta por los monomios $1, x, x^2, \dots, x^n$. Para los cálculos resulta más cómoda la base de los polinomios de Lagrange $\{l_k(x)\}$ de grado n o bien de los coeficientes de Lagrange:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i=k \\ 0, & \text{si } i \neq k, \quad i, k = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

No es difícil ver que el polinomio de grado n

$$l_k(x) = \binom{n}{k} (x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

satisface estas condiciones. El polinomio $l_k(x)$ se define, evidentemente, del modo único. Efectivamente, supongamos que existe

un polinomio más $\bar{l}_k(x)$; entonces la diferencia entre ellos $\bar{l}_k(x)$
 $- \bar{l}_k(x) = q_n(x)$ es un polinomio de grado n que se reduce a cero en $n+1$
 puntos $x_i (i=0, 1, \dots, n)$. Esto será posible sólo cuando $\bar{l}_k(x)$
 $- \bar{l}_k(x) \equiv 0$. El polinomio $\bar{l}_k(x) y_k$ toma el valor y_k en el punto x_k y es nu-
 lo en todos los demás nodos x_j para $j \neq k$. De aquí se desprende
 que el polinomio de interpolación sea

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \bar{l}_k(x) y_k = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{l \neq k} \frac{x - x_l}{x_k - x_l} \quad (\text{E.2.2})$$

y que contenga un grado no superior a n y $P_n(x_i) = y_i$. La fórmula anterior lleva el nombre de Lagrange.

E.3 APLICACIONES DE LA INTERPOLACION.

La interpolación se aplica en varios problemas relacionados con los cálculos. Indiquemos aquí algunos de estos problemas.

La elaboración de un experimento físico consiste en la construcción de las fórmulas aproximadas para las magnitudes características según tabulares obtenidos en los experimentos.

La construcción de las fórmulas aproximadas a base de los datos de un experimento de cálculo. En este caso surgen problemas no típicos de interpolación, ya que, corrientemente, se escriben fórmulas cuya estructura sea cuanto más simple.

La subtabulación, o sea, el espesamiento de las tablas se usa en aquellos casos cuando el cálculo inmediato de las funciones resulta difícil, o cuando se tienen pocos datos experimentales. A la máquina electrónica se introduce una tabla pequeña, mientras que los valores de la función indispensables en los cálculos se hallan, cuando sea necesario, según la fórmula de interpolación.

La interpolación se aplica también en el problema de interpolación inversa: está dada la tabla $y_i = y(x_i)$; se pide hallar x como función de y_i . A título de ejemplo de interpolación inversa puede servir el problema de búsqueda de las raíces de una ecuación.

La fórmula de interpolación se emplea también al calcular integrales y al escribir aproximaciones de diferencias para las ecuaciones diferenciales a base de las identidades integrales.

E.4 VALUACION NUMERICA DE LAS INTEGRALES.

En casi todas las ramas de las matemáticas aplicadas se presentan problemas que requieren la valuación de integrales. Algunas veces es posible encontrar una fórmula cerrada, es decir, una función que pueda expresarse como una combinación de funciones algebraicas y trascendentes simples, las cuales pueden valuarse entre sus extremos de integración para determinar el valor de la integral.

Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, o bien no se pueden encontrar una fórmula cerrada, o bien, en caso de encontrarla es tan complicada que es más difícil valuarla que atacar directamente la integral por otros métodos. En tales casos recurrimos a diversos métodos de integración numérica, en los que partimos de la definición de una integral como el límite de una suma de áreas y trabajamos con métodos que aproximan el valor de esta suma con suficiente precisión.

Para hacer más concreta la explicación, vamos a enunciar el problema y las hipótesis con las que trabajaremos en esta Sección. Consideramos la valuación de una integral definida en un intervalo finito:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (E.4.1)$$

en que a y b son finitos y $f(x)$ es una función continua de x en el intervalo $a \leq x \leq b$,

Los casos en los que uno o ambos de los extremos de integración son infinitos son de interés en ocasiones, así como la integración de funciones que contienen singularidades (puntos en los que $f(x)$ se vuelve infinita) dentro del intervalo de integración o en los extremos del mismo. Con frecuencia estos casos pueden reducirse a la forma (E.4.1), la cual puede entonces integrarse mediante los métodos que vamos a presentar. Estos casos no se considerarán en este apéndice.

El camino que vamos a seguir consiste en lo siguiente. La integral definida I representa el área bajo la curva $y=f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$. Por lo tanto podemos calcular el valor de I dividiendo el intervalo de a a b en varios intervalos más pequeños, encontrando el área de cada una de las fajas así formadas y sumando sus áreas.

Las técnicas que pueden utilizarse caen en dos categorías:

1. Los intervalos se seleccionan por anticipado; generalmente se escogen iguales, y si el cálculo se va a efectuar "a mano", los intervalos se seleccionan de tal manera que los puntos extremos de cada uno correspondan a valores de x fácilmente calculables. Los métodos de esta categoría son por ejemplo la regla trapezoidal y la regla de Simpson.

2. Los intervalos y su ubicación están dictados por el análisis, de tal manera que nosotros requerimos primero de la máxima precisión con un número dado de intervalos, y permitimos que los intervalos queden determinados por este requisito previo. Un ejemplo de este método es la regla de Gauss.

CUADRATURA DE GAUSS.

El término cuadratura es una terminología alterna para decir "integración numérica", el uso común "regla de Simpson" en vez de "cuadratura de Simpson", es cuestión de costumbre. Demostraremos ahora que seleccionando adecuadamente la localización de dos ordenadas podemos obtener una fórmula exacta para integrar una ecuación cúbica (polinomio de tercer grado). Aunque no probaremos esto en forma general, es tal vez intuitivamente obvio que si el método de integración da un resultado exacto para un polinomio de mayor grado, es más preciso en general.

Primeramente para simplificar el análisis cambiaremos los límites de integración de a a b por los límites de -1 a $+1$. Definimos una nueva variable

$$\mu = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$$

de manera que

$$x = \frac{1}{2} (b-a)\mu + \frac{1}{2} (b+a)$$

Entonces la integral (E.4.2) se convierte en

$$I = \int_{-1}^{+1} \phi(\mu) d\mu \quad (\text{E.4.2})$$

en que

$$d\mu \phi(\mu) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot f\left[\frac{1}{2}(b-a)\mu + \frac{1}{2}(b+a)\right]$$

Esto significa que el cambio de variable reduce todas las integrales a la forma (E.4.2). ("todas" las integrales que cumplen con las restricciones supuestas, es decir: límites finitos e integrandos continuos).

Estamos aún tratando de ver qué podemos hacer con sólo dos ordenadas, lo cual significara que la curva de aproximación será una línea recta. En otras palabras, esperamos encontrar una función lineal.

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \mu$$

tal que

$$\int_{-1}^{+1} (\alpha_0 + \alpha_1 \mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} \phi(\mu) d\mu \quad (\text{E.4.3})$$

La integral del primer miembro es el área del trapecio mostrado en la figura E.4.1. Esta área será idéntica con el área bajo la curva $y = \phi(\mu)$

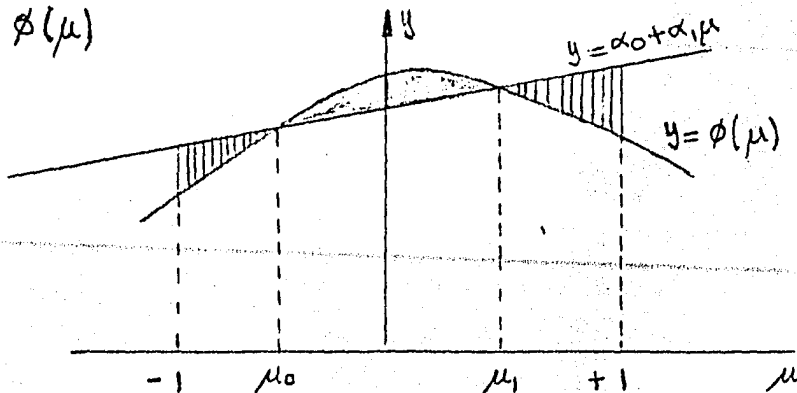


Fig. E.4.1

si las áreas con rayas verticales (entre -1 y μ_0 y entre μ_1 y $+1$) son precisamente iguales al área sombreada (comprendida entre μ_0 y μ_1). Evidentemente deseamos escoger la línea de tal modo que se logre esta concelación.

Con este fin, sea.

$$I_E = A_0 \phi(\mu_0) + A_1 \phi(\mu_1) \quad (\text{E.4.4})$$

en que deben seleccionarse A_0, A_1, μ_0 y μ_1 . Como hay cuatro parámetros es razonable esperar que pueden seleccionarse de tal manera que den una fórmula exacta para un integrando cúbico:

$$\phi(\mu) = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \alpha_3 \mu^3$$

Reescribimos esto en la forma

$$\phi(\mu) = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + (\mu - \mu_0)(\mu - \mu_1)(\beta_0 + \beta_1 \mu)$$

Si α_0 y α_1 van a satisfacer (E.4.3), entonces μ_0 y μ_1 deben escogerse de tal modo que

$$\int_{-1}^{+1} (\mu - \mu_0)(\mu - \mu_1)(\beta_0 + \beta_1 \mu) d\mu = 0$$

como esto debe ser cierto para cualquier selección de β_0 y β_1 , se deduce que debemos requerir que

$$\int_{-1}^{+1} (\mu - \mu_0)(\mu - \mu_1) d\mu = 0$$
$$\int_{-1}^{+1} \mu(\mu - \mu_0)(\mu - \mu_1) d\mu = 0$$

Después de integrar estas expresiones se convierten en

$$\frac{2}{3} + 2\mu_0\mu_1 = 0$$
$$\mu_0 + \mu_1 = 0$$

de lo cual se obtiene que

$$\mu_1 = -\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{E.4.5}$$

Necesitamos solamente determinar A_0 y A_1 en (E.4.4). Obsérvese que

$$\int_{-1}^{+1} \phi(\mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} (\alpha_0 + \alpha_1 \mu) d\mu = 2\alpha_0 \tag{E.4.6}$$

y de (E.4.4) y (E.4.5)

$$I_G = A_0(\alpha_0 + \alpha_1 \mu_0) + A_1(\alpha_0 + \alpha_1 \mu_1)$$
$$= \alpha_0(A_0 + A_1) - \alpha_1/\sqrt{3}(A_0 - A_1)$$

Como esto debe ser igual a la integral (E.4.6) para todos los valores de α_0 y α_1 ,

$$A_0 + A_1 = 2$$
$$A_0 - A_1 = 0$$

Entonces

$$A_0 = A_1 = 1 \quad (\text{E.4.7})$$

La ecuación (E.4.4) se convierte en

$$I_G = \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Esta es la fórmula de cuadratura de Gauss para dos puntos. El error por truncamiento en la integración de un polinomio de grado tres o de grado inferior es cero. Para polinomios de grado superior y para otras funciones el error por truncamiento puede esperarse que sea de la forma

$$e_T = K \phi^{(4)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1$$

en que

$$\int_{-1}^1 \phi(\mu) d\mu = I_G + e_T = \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + e_T \quad (\text{E.4.8})$$

Para determinar K, hagamos

$$\phi(\mu) = \mu^4$$

entonces

$$\phi^{(4)}(\mu) = 24$$

así que

$$e_T = 24K \quad (\text{E.4.9})$$

Pero

$$\int_{-1}^1 \phi(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 \mu^4 d\mu = 2/5$$

Y por otra parte, de (E.4.8) y (E.4.9) se tiene

$$\int_{-1}^1 \phi(\mu) d\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 24K$$

Por lo tanto

$$K = 1/135$$

y

$$e_T = \frac{\phi^{(4)}(\xi)}{135}, \quad -1 < \xi < 1$$

Utilizando más puntos y en general diferentes pesos (los A_i), se pueden encontrar fórmulas de cuadratura de Gauss de mayor orden:

$$\int_{-1}^1 \phi(\mu) d\mu = \sum_{i=0}^n A_i \phi(\mu_i) \tag{E.4.10}$$

En general, con $n+1$ puntos (como se muestra atrás), obtenemos una fórmula exacta para un polinomio de grado $2n+1$.

Los μ_i en (E.4.10) resultan ser las raíces del polinomio de Legendre de grado n . Por esta razón el método descrito anteriormente se denomina a menudo cuadratura de Legendre-Gauss. Los polinomios de Legendre $P_n(\mu)$ se pueden definir en forma recurrente como:

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1 \\ P_1(\mu) &= \mu \\ P_m(\mu) &= \frac{1}{m} [(2m-1)\mu P_{m-1}(\mu) - (m-1)P_{m-2}(\mu)] \end{aligned} \tag{E.4.11}$$

Por ejemplo, haciendo $m=2$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu \cdot \mu - 1 \cdot 1) = \frac{3\mu^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Obsérvese que las raíces de $P_2(\mu)$ son $\pm 1/\sqrt{3}$ como se encontró anteriormente.

Los pesos de (E.4.10) están dados por

$$A_i = \frac{2}{(1-\mu_i^2) [P_n'(\mu_i)]^2}$$

Por ejemplo considérese $n=2$, de tal modo que $\mu_0 = -1/\sqrt{3}$, $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$ $P' = 3$ entonces

$$A_0 = \frac{2}{(1-1/3) \cdot 3} = 1$$

y de la misma manera $A_1 = 1$ como se obtuvo anteriormente.

En el caso general el error por truncamiento ha quedado ya establecido por

$$e_T = \frac{\phi^{(2n)}(\xi)}{2n!} \left(\frac{2}{2n+1} - \sum_{i=0}^n A_i \mu_i^{2n} \right)$$

Una tabla de valores de μ_i y A_i para $n=2, \dots, 6$ se da en la siguiente hoja. Obsérvese que los μ_i son simétrico respecto al origen y que el coeficiente A_k para μ_k es el mismo que el coe-

ficiente para μ_k . Una tabla más completa con valores de n hasta 48 está dada por V.I. Krylov. "Approximate Calculation of Integrals", Apéndice A, Macmillan, 1962.

En resumen, la cuadratura de Gauss da mayor precisión que la regla de Simpson para el mismo número de ordenadas a expensas de una completa falta de control en la localización de los puntos.

Abcisas y coeficientes de la cuadratura de Gauss.

n=2	± 0.5773502692	1.00000 00000
n=3	$\pm 0.77459 66692$ 0.00000 00000	0.55555 55555 0.88888 88889
n=4	$\pm 0.86113 63116$ $\pm 0.33998 10436$	0.34785 48451 0.65214 51549
n=5	$\pm 0.90617 98459$ $\pm 0.53846 93101$ 0.00000 00000	0.23692 68851 0.47862 86705 0.56888 88889
n=6	$\pm 0.93246 95142$ $\pm 0.66120 93865$ $\pm 0.23861 91861$	0.17132 44924 0.36076 15730 0.46791 39346

A.P E N D I C E F

I N T R O D U C C I O N A L A T E O R I A D E
L A E L A S T I C I D A D L I N E A L .

RELACIONES ENTRE EL ESFUERZO
LA DEFORMACION Y EL DESPLAZAMIENTO.
EN LA TEORIA DE LA ELASTICIDAD LINEAL.

F.1 FUERZA Y ESFUERZO.

La fuerza se define por la segunda ley de Newton como lo que acelera una masa. La fuerza tiene magnitud y dirección y por lo tanto es una cantidad vectorial.

Si dos o más fuerzas están comprendidas de tal modo que la masa ni se acelera ni gira se dice que están en equilibrio, ver figura F.1.1. Ello requiere que la suma de las fuerzas y los momentos sea cero.

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \quad (F.1.1)$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

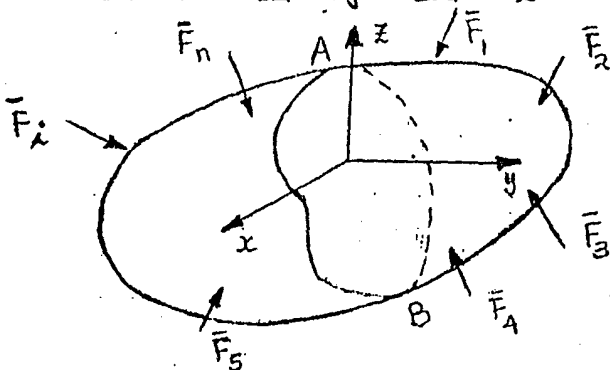


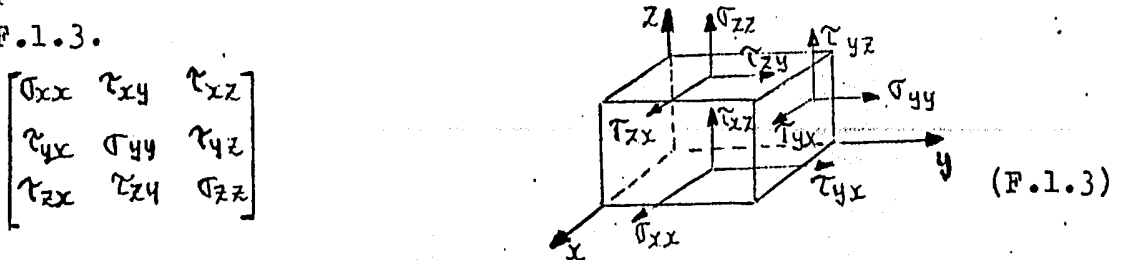
Fig F.1.1

En este caso, la acción de las fuerzas externas estará distribuida internamente. Esta acción se puede concebir en términos de fuerzas internas que actúan entre varias partes de la masa rocosa. Por ejemplo en la figura anterior se puede considerar que la mitad izquierda del cuerpo presiona la mitad derecha a través del plano AB. La magnitud de esta acción viene definida por su intensidad, es decir, por la cantidad de fuerza por unidad de área de la superficie en la cual actúa. Esta intensidad se llama esfuerzo. Generalmente el esfuerzo no será uniforme en toda la zona. Por consiguiente, es necesario definir el esfuerzo más rigurosamente como el valor límite de la razón fuerza-área a medida que el área se reduce, o sea

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (F.1.2)$$

El valor de S en la pequeña zona adyacente a algún punto se llama esfuerzo en ese punto fig. F.1.2a. La dirección de este esfuerzo es la dirección límite de la resultante de ΔF . Por lo general, estará inclinada respecto al área ΔA y tal esfuerzo suele descomponerse en dos componentes (Fig. F.1.2b): un esfuerzo normal (σ), perpendicular al área, y un esfuerzo de cizalla (τ) que actúa en el plano del área.

El esfuerzo dependerá tanto de la naturaleza del sistema de fuerzas aplicadas como de la posición y orientación de ΔA con respecto a este sistema. Es especialmente interesante la forma en que varía el esfuerzo en el punto O en función de la variación de orientación de ΔA . Para verlo conviene dar una notación a cada componente de esfuerzo que actúa sobre este plano en las direcciones de los ejes de coordenadas cartesianas: generalmente éstas serán σ_x , σ_y y σ_z . Pero si ΔA está orientado de modo que se encuentre en un plano de coordenadas, habrá componentes del esfuerzo de cizalla paralelas a dos de los ejes de coordenadas y una componente del esfuerzo normal paralela al tercero. Por ejemplo, si ΔA está en el plano xy (fig. F.1.2c,d), las componentes serán σ_{zz} , τ_{xy} y τ_{yx} . El primer sufijo de esta notación indica la dirección de la perpendicular a ΔA y el segundo la dirección en la cual actúa la componente del esfuerzo. Habrá componentes similares cuando ΔA sea paralelo a los otros dos planos de coordenadas. En conjunto, nueve de estas componentes del esfuerzo pueden estar asociadas a un punto cualquiera O vease la figura F.1.3.



Las componentes del esfuerzo de cizalla pueden representarse, y es lo que se suele hacer, por σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz} , sin que esta notación disminuya su significado. Pero el retener los sufijos dobles mantiene la simetría y sirve para pasar a una notación más general (notación indicial)

Por último se debe especificar los signos de las componentes

del esfuerzo. Desafortunadamente, no hay un acuerdo general convencional respecto a los signos. Lo más aceptado en ingeniería es que si la dirección de la fuerza coincide con la dirección de la normal al plano donde esta se aplica, el esfuerzo se considera positivo (es el caso de los esfuerzos que someten a una estructura a un estado de tensión), por otro lado si estas dos direcciones no coinciden el esfuerzo se considerará negativo y corresponde al caso de un estado de esfuerzos de compresión. Pero, en aquellas ramas específicas donde dominan los esfuerzos normales compresivos, como en los suelos, mecánica de rocas y geología estructural, conviene considerar exactamente lo contrario, de esta forma el acuerdo convencional que utilizaremos aquí será: Tensiones negativas. Compresiones positivas.

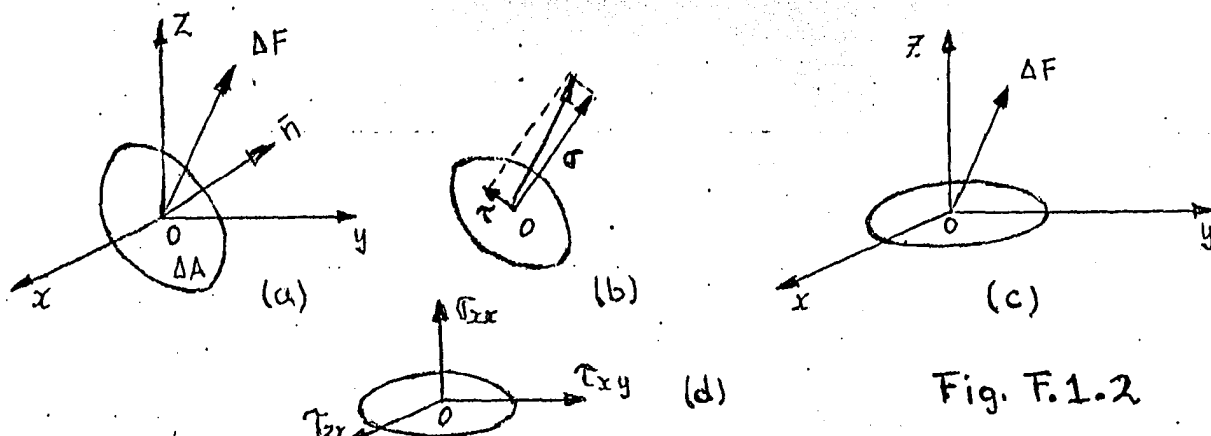


Fig. F.1.2

Aunque las unidades de esfuerzo y sus valores reales no influyan directamente en los aspectos geométricos del esfuerzo, son importantes en cualquier aplicación. En el Sistema Internacional de Unidades (designado SI en cualquier idioma), la unidad de presión o esfuerzo es por tanto el newton por metro cuadrado (N/m^2). Como $1 N/m^2$ es una presión muy pequeña, conviene utilizar un múltiplo de esta, $1 \times 10^5 N/m^2 = 1 \text{ bar}$ (o múltiplos de este).

F.2 ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

Se acostumbra denominar como ecuación constitutiva de un medio continuo aquellas que expresan las propiedades físicas del sistema.

La ecuación constitutiva que utilizaremos de la teoría de la elasticidad lineal es la conocida con el nombre de: ecuación de Hooke-Cauchy, ó simplemente "Ley generalizada de Hooke". La cual se expresa por la siguiente ecuación.

En notación indicial.

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (\text{F.2.1})$$

donde:

λ y μ son parámetros experimentales conocidos como "constantes de Lamé".

δ es la delta de Kronecker, definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (\text{F.2.2})$$

si ponemos $i = j = k$ en la ecuación (F.2.1), obtenemos que:

$$\sigma_{kk} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{kk} + 2\mu \epsilon_{kk}$$

donde

$$\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \quad ; \text{ debido a (F.2.2)}$$

por tanto:

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \epsilon_{kk} \quad (\text{F.2.3})$$

de donde

$$\epsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \quad (\text{F.2.3a})$$

Sustituyendo (F.2.3a) en (F.2.1) y resolviendo para ϵ_{ij} obtenemos que:

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \right) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\text{por tanto: } \epsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (\text{F.2.4})$$

Por otra parte, sabemos que las constantes de Lamé se encuen-

trán relacionadas con las constantes de laboratorio conocidas como: Módulo de Young o Elasticidad(E), y con la relación de Poisson ó resistencia al esfuerzo cortante(ν) mediante las siguientes expresiones.

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (F.2.5)$$

$$\nu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (F.2.5) en la ecuación (F.2.1), se tiene que:

$$\sigma_{ij} = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{ij}$$

por tanto

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \epsilon_{ij} + \nu \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (F.2.6)$$

La ecuación (F.2.6), se puede expresar en notación tradicional para cada una de sus componentes como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{zz} \right] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_{xx} - \nu \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{zz} \right] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{xx} + \nu (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right] \quad (F.2.6a)$$

en forma similar obtenemos.

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{yy} + \nu (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \right] \quad (F.2.6b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{zz} + \nu (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right] \quad (F.2.6c)$$

Para los esfuerzos cortantes tenemos que.

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \epsilon_{xy} \right] = \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{xy}$$

haciendo el siguiente cambio de variable.

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

tenemos que:

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (\text{F.2.6d})$$

en forma similar obtenemos.

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (\text{F.2.6e})$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (\text{F.2.6f})$$

Las ecuaciones de la (F.2.6a) a la (F.2.6f), se pueden ordenar en forma matricial de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.7})$$

que en forma condensada la podemos escribir como:

$$\sigma = D \epsilon \quad (\text{F.2.8})$$

donde resulta evidente el significado de cada término.

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier punto de una estructura tridimensional de forma arbitraria, modelada con la teoría de la elasticidad lineal (esto es, únicamente son válidas para materiales que hipotéticamente son elásticos, lineales e isótropos perfectos).

El caso particular que nos interese, es el de desarrollar las ecuaciones de equilibrio anteriores para un espacio bidimensional, debido a que este trabajo pretende evaluar la distribución de esfuerzos de un plano, nos conviene pues analizar las modificaciones que experimentan las ecuaciones de equilibrio vistas, con la finalidad de poder modelar este caso particular de estructuras.

En este sentido definamos dos tipos de estados planos.

El estado plano de deformaciones.

El cual es obtenido a partir de estructuras que idealmente corresponden a un cuerpo alarjado y prismático, de tal manera que para definir las basta con especificar una sección transversal a una de sus caras principales y las cargas que actúan a lo largo del cuerpo son tales que basta con definir las en la sección transversal referida anteriormente.

Debido a esto, la estructura se supone contenida en un plano de espesor unitario, cuya variación de cualquiera de sus propiedades en dirección perpendicular a la sección transversal referida es cero. Lo que implica para el caso del vector de desplazamiento que nos interese que sus componentes ortogonales sean de la forma siguiente:

$$u = u(x, y, z) \quad (F.2.9)$$

$$v = v(x, y, z)$$

$$w = 0$$

al considerar las restricciones expresadas en (F.2.9), las componentes de la ecuación (F.2.6) nos quedan:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} \right] \quad (F.2.10a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx} \right] \quad (F.2.10b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} \right] \quad (F.2.10c)$$

Sustituyendo las ecuaciones (F.2.5) en la ecuación (F.2.4), se tiene que:

$$\epsilon_{ij} = -\frac{E(1+\nu)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)(1+\nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\nu}{E} \frac{(1+\nu)(1+\nu)}{3\nu(1+\nu) + (1+\nu)(1-2\nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} \\
 &= -\frac{\nu}{E} \frac{(1+\nu)}{3\nu+1-2\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} \\
 &= \frac{1}{E} \left[-\nu \sigma_{kk} \delta_{ij} + (1+\nu) \sigma_{ij} \right] \\
 \epsilon_{ij} &= \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (F.2.10c')
 \end{aligned}$$

de donde para el caso de las componentes en xx y en yy tenemos:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (F.2.10c'')$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right]$$

Sustituyendo (F.2.10c'') en (F.2.10c) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (-2\nu^2 \sigma_{zz}) \\
 \left(1 + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \sigma_{zz} &= \frac{\nu(1-\nu)(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu) + 2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \sigma_{zz} = \frac{\nu(1-\nu)(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
 \sigma_{zz} &= \frac{\nu(1-\nu)(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{(1+\nu)(1-2\nu) + 2\nu^2} = \frac{\nu(1-\nu)(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{1-2\nu + \nu} \\
 \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad (F.2.10c''')
 \end{aligned}$$

Para en esfuerzo cortante

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (F.2.10d)$$

Las ecuaciones (F.2.10a), (F.2.10b) y (F.2.10d), se pueden ordenar en forma matricial de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (F.2.11)$$

con

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{F.2.12})$$

el arreglo (F.2.11), se puede expresar en forma condensada como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (\text{F.2.13})$$

donde:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.13a})$$

y

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.13b})$$

;denominada, matriz de parámetros elásticos para estados plano de deformaciones.

Estado plano de Esfuerzo.

Se calcula para estructuras que en vez de ser alargadas como las descritas en los estados planos de deformaciones, su espesor es infinitamente despreciable (estructuras delgadas) con respecto a sus demás dimensiones. En este sentido las componentes de esfuerzo asociadas a la dirección del espesor son nulas, esto es.

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (\text{F.2.14})$$

Considerando las restricción expresada en (F.2.14), las componentes de la ecuación (F.2.10c'), nos quedan:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \quad (\text{F.2.14a})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \quad (\text{F.2.14b})$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] \quad (\text{F.2.14c})$$

donde apartir de (F.2.6) obtenemos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})] \quad (\text{F.2.14c'})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz})] \quad (\text{F.2.14c''})$$

Sustituyendo (F.2.14c') y (F.2.14c'') en (F.2.14c), obtenemos.

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) - \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{zz})$$

$$\left(1 + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right) \epsilon_{zz} = -\frac{\nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu) + 2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right) \epsilon_{zz} = -\frac{\nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$(1-\nu) \epsilon_{zz} = -\nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

por lo tanto

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{(1-\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (\text{F.2.14c'''})$$

y

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{F.2.14d})$$

Para las componentes de esfuerzo en este estado, tenemos que, Apartir de la expresión (F.2.6), que se expresa para el caso de su componente σ_{xx} , como:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})]$$

sustituyendo el valor de ϵ_{zz} por el calculado en la ecuación (F.2.14c'''), de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\left(\epsilon_{yy} - \frac{\nu}{(1-\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\right) \right] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy} - \frac{\nu^2}{(1-\nu)} \epsilon_{xx} - \frac{\nu^2}{(1-\nu)} \epsilon_{yy} \right] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\left((1-\nu) - \frac{\nu^2}{(1-\nu)} \right) \epsilon_{xx} + \left(\nu - \frac{\nu^2}{(1-\nu)} \right) \epsilon_{yy} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{(1-\nu)^2 - \nu^2}{(1-\nu)} \epsilon_{xx} + \frac{\nu - \nu^2 - \nu^2}{(1-\nu)} \epsilon_{yy} \right]$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \frac{1}{(1-\nu)}$$

por lo tanto

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \quad (\text{F.2.14e})$$

procediendo en forma similar para σ_{yy} obtenemos

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \quad (\text{F.2.14f})$$

para el caso del esfuerzo cortante, tenemos que apartir de (F.2.6)

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{xy}$$

como

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

multiplicando y dividiendo simultaneamente el segundo miembro de la expresi3n anterior obtenemos que:

$$\sigma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-\nu)} \gamma_{xy}$$

por lo tanto

$$\sigma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \gamma_{xy} \quad (\text{F.2.14g})$$

Las ecuaciones (F.2.14e), (F.2.14f) y (F.2.14g) se pueden agrupar en un arreglo matricial de la forma.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.1 h})$$

que en forma condensada podemos expresar mediante:

donde

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.15a})$$

y

$$\underline{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.15b})$$

; denominada, matriz de parámetros elásticos para el estado plano de esfuerzos.

En este trabajo resolvemos nuestras ecuaciones para un estado plano de esfuerzos, por lo tanto empleamos la ecuación (F.2.14h) para determinar las tres componentes de esfuerzo desarrolladas en un plano. Para esto se determinan las componentes de deformación necesarias a partir de las ecuaciones (F.2.16) que sabemos que sólo son válidas para desplazamientos muy pequeños

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{F.2.16})$$

de donde para el caso bidimensional podemos hacer las siguientes sustituciones:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.16a})$$

Esto es:

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{u}$$

por otro lado, sabemos que para un cuadrilátero lineal, aproximamos:

$$u \approx N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v \approx N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

Esto es:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} ; \quad \underline{u} \approx \underline{N} \underline{u}^e \quad (\text{F.2.16b})$$

Sustituyendo (F.2.16b) en (F.2.16a):

$$\underline{\epsilon} \approx \underline{L} \underline{N} \underline{u}^e$$

$$\underline{\epsilon} \approx \underline{B} \underline{u}^e ; \text{ donde } \underline{B} = \underline{L} \underline{N}$$

Sustituyendo este último resultado en la ecuación (F.2.15), obtenemos la expresión que utilizamos en el algoritmo para obtener los esfuerzos

$$\underline{\sigma} \approx \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad (\text{F.2.17})$$

Una vez obtenidos estos, a través de las ecuaciones (F.2.14a) a la (F.2.14c''') podemos evaluar las tres componentes de deformación de un estado plano de esfuerzos. Es decir que

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}]$$

(F.2.18)

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{(1-\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

Por último las expresiones utilizadas para obtener los esfuerzos principales son:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\sigma_{xy})^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\sigma_{xy})^2} \quad (\text{F.2.19})$$

* obtenidas de la ref. 19 P.P.

y para las deformaciones las misma que las anteriores haciendo los siguientes cambios.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \epsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} &= \epsilon_{xy}\end{aligned}\tag{F.2.20}$$

Con estos últimos juegos de ecuaciones. De la (F.2.17) a la (F.2.20), resolvemos el estado cinemático y mecánico de una estructura geológica bidimensional.

A P E N D I C E G

I N T R O D U C C I O N A L A T E O R I A
E L E C T R O M A G N E T I C A

TEORIA ELECTROMAGNETICA (ANTECEDENTES).

G.1 ECUACIONES ELECTROMAGNETICAS.

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan los campos electromagnéticos están expresadas por las ecuaciones de Maxwell.

La primera, es la ley de Gauss, que establece que el flujo total de campo eléctrico \vec{E} (o de desplazamiento \vec{D}) en un volumen dado, es proporcional a la carga (fuente del campo) contenida dentro del mismo, esto es:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (G.1.1)$$

donde \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico y ρ es la densidad volumétrica de carga.

La segunda, es la ley de Ampere, que relaciona la intensidad del campo magnético \vec{H} en un punto de un material con la densidad de corriente eléctrica \vec{J} que pasa por conducción a través de él y la variación temporal del campo eléctrico (originadora de una corriente eléctrica de desplazamiento). Esta ley se expresa como sigue:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t \quad (G.1.2)$$

La tercera es la ley de Faraday, que relaciona la corriente eléctrica ($\nabla \times \vec{E}$), que circula en un circuito cerrado, con el campo magnético \vec{B} fluctuante en el tiempo que atraviesa dicho circuito. La relación matemática es:

$$\nabla \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0 \quad (G.1.3)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico

finalmente la cuarta expresa que no existen monopolos magnéticos al igualar la divergencia del campo magnético a cero:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (G.1.4)$$

Las relaciones que existen entre \bar{B} y \bar{H} , \bar{D} y \bar{E} , \bar{J} y \bar{E} están dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (G.1.5)$$

Donde μ , es la permeabilidad magnética, ϵ la permitividad eléctrica y σ , la conductividad eléctrica, son en general tensores dependientes del tiempo y la posición. Estos parámetros son propiamente los que contienen la información de las propiedades del medio, ya que son los factores que relacionan los campos fuera del medio y sus efectos dentro del mismo.

Dentro del marco de estas ecuaciones se hacen los desarrollos posteriores del presente trabajo.

G.2 ECUACIONES VARIACIONALES DE ENERGIA.

Para llegar a efectuar interpretaciones de datos de campo, provenientes de estudios geoelectricos, se eligió desarrollar un modelo de tipo variacional.

Para hacer el planteamiento de un problema variacional, se requiere una función que sea susceptible de maximizarse o minimizarse (ver apéndice C). En el caso del electromagnetismo esta función la provee el principio de Hamilton, que dice que la energía disipada en un volumen dado debe ser mínima.

La variación en el tiempo de la densidad volumétrica de energía del campo eléctrico ($\partial u / \partial t$) se puede expresar como la suma de un flujo de energía por unidad de tiempo y superficie a través de un medio ($\nabla \cdot \bar{S}$) mas el trabajo por unidad de tiempo y volumen que se realiza para pasar dicho medio ($\bar{E} \cdot \bar{J}$). Su expresión matemática es la siguiente:

$$-\partial u / \partial t = \nabla \cdot \bar{S} + \bar{E} \cdot \bar{J} \quad (G.2.1)$$

Utilizando las ecuaciones de Maxwell ecs (G.1.1) a (G.1.4) en la ecuación anterior, el vector \bar{S} , que expresa la densidad

superficial de flujo de energía por unidad de tiempo, puede expresarse como:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \quad (G.2.2)$$

que se conoce como vector de Poynting.

La cantidad de energía por unidad de tiempo (potencia electromagnética ψ') en un volumen, contenido en una superficie cerrada puede expresarse como la divergencia negativa del vector de Poynting:

$$\psi' = -\nabla \cdot \bar{S} = -\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = -(\nabla \times \bar{E}) \cdot \bar{H} + (\nabla \times \bar{H}) \cdot \bar{E} \quad (G.2.3)$$

y haciendo uso de las ecuaciones (G.1.2) y (G.1.3), la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\psi' = \bar{H} \cdot \partial \bar{B} / \partial t + \bar{J} \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \partial \bar{D} / \partial t \quad (G.2.4)$$

al considerar subdividido el volumen total de material estudiado en pequeños volúmenes, el medio puede ser considerado más prudentemente como homogéneo, isotrópico y lineal, de tal manera que esta restricción física obliga a que μ , ϵ y σ (ecuaciones G.1.5) sean consideradas únicamente como funciones escalares del tiempo, μ , ϵ y σ se convierten en escalares, que denotaremos por μ , ϵ y σ . Sustituyendo las relaciones constitutivas (G.1.5) en la ecuación (G.2.4) se obtiene:

$$\psi' = \mu/2 \partial(\bar{H}^2) / \partial t + \epsilon/2 \partial(\bar{E}^2) / \partial t + \sigma \bar{E}^2 \quad (G.2.5)$$

Para el caso en que la señal de excitación sea de corriente directa (campos independientes del tiempo), se parte de la ecuación anterior para considerar únicamente el último término, quedando de la siguiente forma:

$$\psi' = \sigma \bar{E}^2 \quad (G.2.6)$$

Para obtener la energía electromagnética Ψ por unidad de tiempo en un volumen dado V se integra la ecuación (G.2.6) respecto al volumen:

$$\Psi = \int_V \sigma \bar{E}^2 dV \quad (G.2.7)$$

A esta expresión se le agrega la energía de la fuente excitadora (para una fuente de corriente directa, según ref. 6).

$$U_T = \int_V \bar{J}_s \cdot \bar{E} dV \quad (G.2.8)$$

sumando las ecuaciones (G.2.7) y (G.2.8), la energía electromagnética por unidad de tiempo contenida en un volumen dado V con una fuente, puede escribirse como:

$$\Psi_T = \int_V (\sigma \bar{E}^2 + 2 \bar{J}_s \cdot \bar{E}) dV \quad (G.2.9)$$

simplificamos el problema si expresamos la ecuación anterior en términos del potencial eléctrico $\hat{\phi}$, que es una función escalar, que se relaciona con el campo eléctrico a través de la siguiente expresión:

$$\bar{E} = -\nabla \hat{\phi} \quad (G.2.10)$$

Sustituyendo la ecuación (G.2.10) en la ecuación (G.2.9) se llega a la expresión:

$$\Psi_T = \int_V (\sigma (\nabla \hat{\phi})^2 - 2 \bar{J}_s \cdot \nabla \hat{\phi}) dV \quad (G.2.11)$$

Si no existen fuentes de corriente en la superficie de frontera del volumen V una forma alternativa para expresar la ecuación (G.2.11) es:

$$\Psi_T = \int_V (\sigma (\nabla \hat{\phi})^2 + 2 \hat{\phi} \nabla \cdot \bar{J}_s) dV \quad (G.2.12)$$

Un caso de interés muy particular, es aquel en el que se tienen

una fuente puntual localizada en el punto (x', y', z') , dentro del medio. Para este caso se tiene que:

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = -I \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \quad (G.2.13)$$

Donde I es la magnitud de la corriente puntual inyectada en el punto (x', y', z') y δ es la función delta de Dirac. Sustituyendo la ecuación (G.2.13) en la ecuación (G.2.12) se tiene:

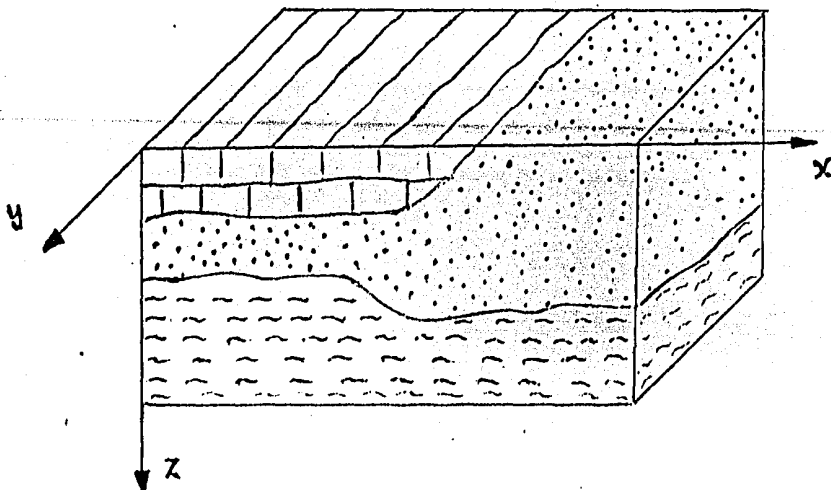
$$\psi_T = \int_V [\sigma(\nabla\phi)^2 - 2I\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\phi] dV \quad (G.2.14)$$

El modelo que se desarrollará aquí será de tipo bidimensional, es decir considerará variaciones de conductividad únicamente en dirección X y Z . En dirección del eje Y , se supondrá que el medio esta formado por prismas de longitud infinita en ambos sentidos del eje. Cada prisma se considerará homogéneo e isótropo respecto a su conductividad. Ver fig. 6.2.1.

Por último, el planteamiento variacional, de la ecuación (G.2.14) lleva a:

$$\Delta \psi_T = \Delta \int_V \sigma [(\nabla\phi)^2 - 2I\delta(x-x')\delta(z-z')\phi] dV = 0 \quad (G.2.15)$$

Ecuación de la cual partimos para hacer nuestro transformación al dominio del elemento finito..



APENDICE H
FLUJO DE FILTRACION

A.1 INTRODUCCION

En este apéndice se presentan algunos de los métodos empleados para estudiar el flujo del agua en el subsuelo. El análisis del problema se aborda atendiendo a la necesidad de predecir tanto el gasto del flujo de filtración como el dominio donde el fenómeno se presenta. Aún cuando los principios que gobiernan al flujo de filtración fueron establecidos hace casi 100 años, no ha sido sino hasta tiempos relativamente recientes cuando este tema ha sido abordado bajo un enfoque científico, por esta razón no causa sorpresa encontrar la literatura al respecto plagada de relaciones empíricas respecto a las cuales soluciones exactas pueden ser y han sido teóricamente cimentadas.

Actualmente se pueden considerar no tan sólo relaciones entre los parámetros que aparecen en las fórmulas, sino que además se cuenta con la posibilidad de acotar la incertidumbre en las evaluaciones de dichas magnitudes.

A.2 COEFICIENTE DE POROSIDAD

El agua que se encuentra en los poros del suelo se llama freática y generalmente se halla en movimiento, a este movimiento del agua al través de los poros se le llama infiltración. Los estratos se consideran medios continuos por cuyos huecos, interconectados entre si, circula el agua freática.

A efecto de simplificar la teoría los suelos se dividen en dos grandes grupos: arenosos y arcillosos. Los suelos arenosos se encuentran constituidos esencialmente por partículas macroscópicas que drenan rápidamente y cuando esto sucede no exhiben disminución sensible en su volumen, además su potencial capilar es prácticamente insignificante. En cambio los suelos arcillosos ofrecen notable resistencia a la infiltración, presentan potenciales capilares significativos y al ser drenados exhiben disminución sensible en su volumen. Así pues, los suelos arenosos asemejan medios porosos ideales y la teoría a desarrollar considerará este tipo de material. Y si bien es cierto que este enfoque limita la citada teoría, por otra parte no es menos cierto que la baja permeabilidad característica de los suelos arcillosos nos permite dar de lado a este tipo de suelos sin padecer notable menoscabo en las aplicaciones.

Evidentemente los granos de arena tienen las más variadas formas: angulares, redondeadas, etc., pero dado que en la infiltración no se presenta el flujo del agua a través de una cierta trayectoria particular, sino más bien se considera el flujo a través de una sección recta donde el fenómeno de infiltración se da simultáneamente en un gran número de poros, entonces bajo esta consideración se asume que los granos de arena son de forma esférica y de dimensiones iguales. A efecto de estimar numéricamente las propiedades del suelo se dan los dos siguientes parámetros:

Porosidad es la relación de vacíos V_v al volumen total en cuestión:

$$n = \frac{V_v}{V}$$

(H.2.1)

y la razón de vacíos es

$$e = \frac{V_v}{V - V_v}$$

(H.2.2)

cuando los granos de arena presentan un arreglo cúbico la porosidad es.

$$n = 1 - \frac{\pi}{6} = 0.476$$

Seguidamente se dan algunos valores de la porosidad correspondientes a distintos suelos.

T A B L A H.2.1

DESCRIPCION	POROSIDAD
Arena	46
Arena Compacta	34
Arcilla	55-37
Arcilla Orgánica	75
Bentonita	84

H.3 VELOCIDAD DE FILTRACION Y GASTO

En los cálculos prácticos de flujo de filtración figuran esencialmente dos magnitudes, a saber: la velocidad de filtración \bar{v} y el gasto Q .

Dado que el flujo ocurre en los suelos saturados a través de múltiples poros interconectados, no queda más remedio que considerar a la velocidad bajo promedios obtenidos de la siguiente manera:

Sea A el área de la sección recta a través de la cual se estima la velocidad y sea A_p el área ocupada en la misma sección recta por los poros, se define a la razón

$$m = \frac{A_p}{A}$$

y al gasto

$$Q = mA\bar{v}$$

la magnitud \bar{v} es llamada velocidad de filtración.

A efecto de analizar las particularidades de la razón m considérese un cilindro circular recto de altura h y base A el cual en la altura z tiene una sección recta cuya área de poros es $A_p(z)$, así pues

$$m(z) = \frac{A_p}{A} \quad (\text{H.3.1})$$

y tomando el promedio sobre el cilindro de altura h

$$m = \frac{1}{h} \int_0^h m(z) dz \quad (\text{H.3.2})$$

y de aquí

$$m = \frac{1}{Ah} \int_0^h A_p(z) dz = \frac{1}{v} \int_0^h A_p(z) dz \quad (\text{H.3.3})$$

y como V es el volumen total del cilindro y la integral evalúa el volumen de vacíos, se deduce que el promedio m es el valor de la porosidad n.

H.4 FORMULA DE DARCY

La fórmula de Bernoulli establecida para el estudio del flujo estacionario de fluidos incomprensibles no viscosos establece que

$$\frac{p}{\gamma_w} + z + \frac{\bar{v}^2}{2g} = h \quad (h \text{ es constante}) \quad (H.4.1)$$

donde

p = presión (fuerza/área)

γ_w = peso específico del fluido (fuerza/volumen)

\bar{v} = velocidad del flujo de filtración (longitud/tiempo)

g = aceleración debida a la gravedad (longitud/tiempo²)

h = carga total (longitud)

El primer término de la ecuación $\frac{p}{\gamma_w}$ se conoce como la altura piezométrica en la sección dada, el segundo término z como la altura geométrica de posición de la sección sobre el plano de comparación y por último $\frac{\bar{v}^2}{2g}$ se llama a la altura debida a la velocidad o carga debida a la velocidad. Así pues la ecuación de Bernoulli establece que la suma de las alturas geométrica, piezométrica y la carga debida a la velocidad es una magnitud constante llamada carga total.

Para el flujo de filtración y en virtud de las pérdidas de energía ocasionadas por la resistencia al movimiento a través de los poros del suelo, la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$\frac{p_A}{\gamma_w} + z_A + \frac{\bar{v}_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma_w} + z_B + \frac{\bar{v}_B^2}{2g} + \Delta h \quad (\text{H. 4.2})$$

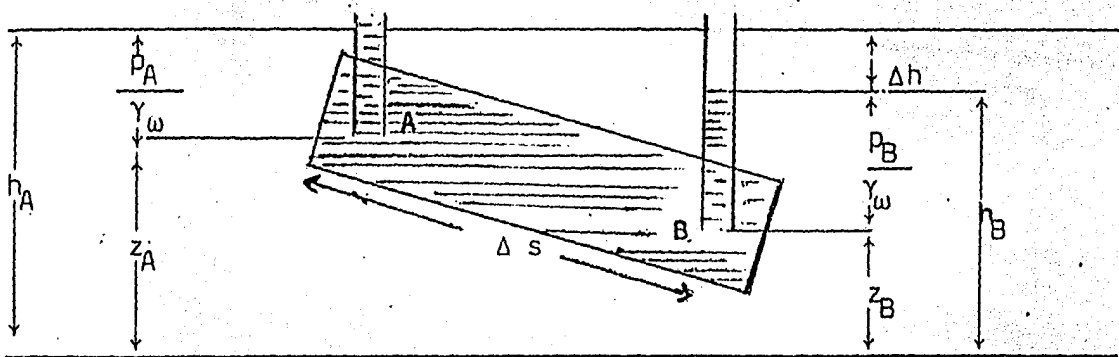


Fig. H.4.1

Δh representa la pérdida de carga del fluido en cuestión al recorrer éste la distancia Δs

La razón

$$i = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = -\frac{dh}{ds} \quad (\text{H. 4.3})$$

se llama gradiente hidráulico e indica la razón de pérdida de energía por unidad de peso del fluido en la unidad de longitud medida según la dirección de la velocidad.

Como la carga de velocidad en el fenómeno de fil

tración es, obviamente, pequeña será omitida, así pues la fórmula (H.4.2) toma la forma

$$\frac{P_A}{\gamma_w} + z_A = \frac{P_B}{\gamma_w} + z_B + \Delta h \quad (\text{H.4.4})$$

En el año de 1856 Henry Darcy demostró experimentalmente que la velocidad de un flujo de filtración es proporcional al gradiente hidráulico

$$v = ki = -k \frac{dh}{ds} \quad (\text{H.4.5})$$

El análisis de esta fórmula caracteriza al coeficiente k , llamado coeficiente de filtración, como la velocidad del flujo de filtración en una pendiente igual a la unidad, así pues k tiene las dimensiones de la velocidad.

En este punto es pertinente aclarar que la fórmula de Darcy es la expresión macroscópica estadísticamente equivalente a las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo viscoso en suelos. Es precisamente esta equivalencia la que hace posible el desarrollo subsecuente de la teoría dentro del marco del potencial del flujo. En otras palabras, al quedar cuantificados, en la fórmula de Darcy, los efectos debidos a la viscosidad, el flujo puede ser considerado como no viscoso.

H.5 LIMITES DE APLICABILIDAD DE LA FORMULA DE DARCY

El movimiento de un flujo subterráneo se produce por lo general en las condiciones de corriente laminar. Las fórmulas (H.4.4) y (H.4.5) son aplicables en esas condiciones. No obstante puede haber casos cuando el flujo de filtración tenga una velocidad considerable y el movimiento será turbulento y casos cuando la velocidad de filtración sea tan insignificante que las fuerzas decisivas serán no las fuerzas de gravedad, sino las fuerzas debidas a la interacción molecular de las partículas del líquido con las del suelo.

El número de Reynolds establece un criterio para determinar el rango de las velocidades del flujo de filtración bajo el cual se obtiene un flujo laminar, este número se define por

$$R = \frac{vD\rho}{\mu} \quad (H.5.1)$$

donde

v = Velocidad del flujo de filtración (cms/seg)

D = Diámetro promedio de las partículas del suelo (cms)

ρ = Densidad del fluido (gr/cms³)

μ = Coeficiente de viscosidad (gr-seg/cms²)

Mediante experimentación se ha encontrado que el valor crítico del número de Reynolds al cual el flujo en suelos pasa de laminar a turbulento es el número 1. Así pues se trabajará con la fórmula de Darcy considerando

$$\frac{vD}{\mu} \leq 1$$

(H.5.2)

Al sustituir en (H.5.2) los valores correspondientes a los parámetros ρ y μ del agua y considerando conservadamente el valor $v = \frac{1}{2}$ cms/seg, se encuentra que $D = 0.4$ mm, lo que corresponde a la dimensión promedio del diámetro promedio de los granos de la arena gruesa. Así pues, al tomarse dicho límite superior para el número de Reynolds, el manejo de la fórmula de Darcy corresponderá adecuadamente a situaciones reales del flujo del agua en suelos arenosos.

H.6 COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD

Siendo, como se dijo, la fórmula de Darcy

$$v = -k \frac{dh}{ds} \quad (H.6.1)$$

donde k es el coeficiente de permeabilidad, fácilmente se entiende que dicho coeficiente varía dependiendo de la influencia con la cual se manifiestan tanto la densidad como la viscosidad del fluido en los poros del suelo. Así pues en un intento de aislar por un lado la parte de k que depende de las propiedades del suelo y por otro la parte que depende de las propiedades del fluido se introduce el parámetro k_0 llamado permeabilidad física, así se tiene que

$$k = k_0 \frac{\gamma_w}{\mu} \quad (H.6.2)$$

donde γ_w es el peso unitario del fluido y μ es el coeficiente de viscosidad. Sustituyendo (H.6.2) en (H.6.1) se llega a

$$v = -k_o \frac{\gamma_w}{\mu} \frac{dh}{ds} \quad (\text{H.6.3})$$

donde se muestra que la velocidad es inversamente proporcional a la viscosidad. Esta última expresión permite manejar la fórmula de Darcy cuando se presentan cambios de temperatura o se tiene más de un tipo de fluido, sin embargo estando en una gran parte los problemas de aplicación dirigidos al estudio de flujos de fluidos de un sólo tipo y sujetos a insignificantes variaciones de temperatura, se concretará a evaluar la Ley de Darcy mediante el parámetro k . Seguidamente se da una tabla de valores del coeficiente de permeabilidad correspondiente a diferentes tipos de suelos.

TABLA H.6.1

TIPO DE SUELO	COEF. DE PERMEABILIDAD k (cms/seg)
Grava limpia	1.0 (o mayor)
Arena gruesa limpia	1.0 a 0.01
Arena	0.01 a 0.005
Arena fina	0.05 a 0.001
Arena y sedimentos	0.002 a 0.0001
Sedimentos	0.0005 a 0.00001
Arcilla	0.000001 (o menor)

H.7 ECUACIONES GENERALES DE LA HIDRODINAMICA

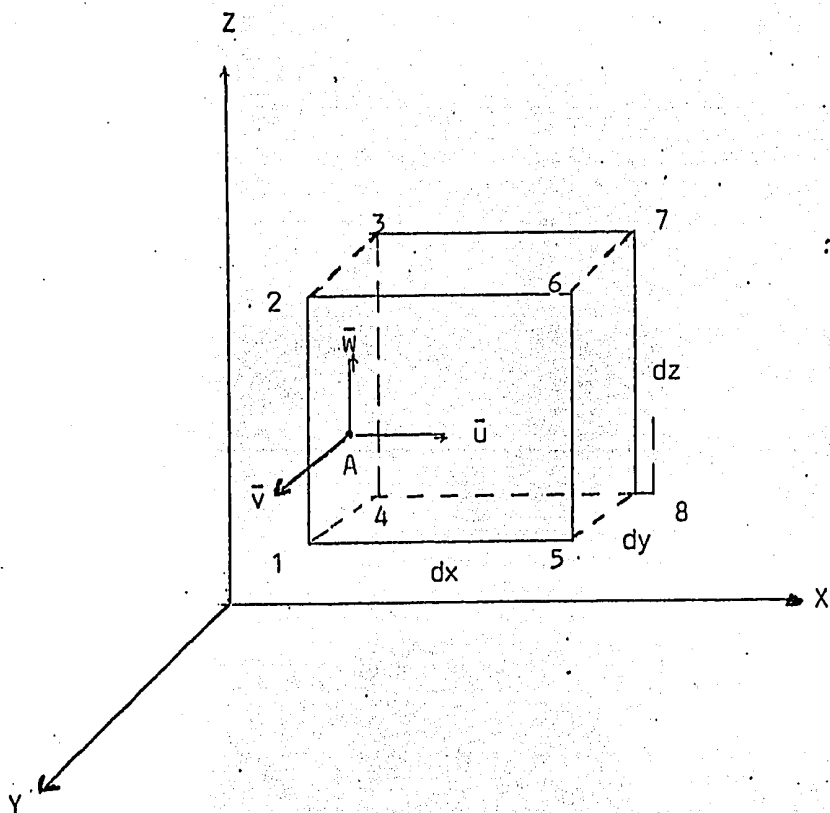


Fig. H.7.1

Sean \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} las componentes de la velocidad de filtración de un fluido en el punto $A(x,y,z)$ en el instante t . Así pues, durante el intervalo δt el punto A se habrá trasladado a la posición $(x+\bar{u}\delta t, y+\bar{v}\delta t, z+\bar{w}\delta t)$. La razón de cambio respecto al tiempo de la componente de la velocidad \bar{u} es $\delta\bar{u}/\delta t$, o sea

$$\frac{\delta\bar{u}}{\delta t} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

si δt se hace tender a cero, entonces

$$\bar{u} = \frac{dx}{dt}, \quad \bar{v} = \frac{dy}{dt}, \quad \bar{w} = \frac{dz}{dt}$$

y la aceleración en la dirección del eje X es

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (\text{H.7.1})$$

Análogamente se obtienen las aceleraciones en las direcciones Y y Z.

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (\text{H.7.2})$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (\text{H.7.3})$$

Sean p la presión y ρ la densidad del fluido en el punto $A(x,y,z)$ en el instante t y sean, además X, Y y Z las fuerzas por unidad de masa en las direcciones respectivas de los ejes.

Como en el flujo subterráneo la única fuerza actuante es la debida a la gravedad, la fuerza presente en el lado 1-2-3-4 de la figura H.7.1 es

$$(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$$

y en la cara opuesta es

$$(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$$

y de aquí según la segunda ley de Newton

$$\rho dx dy dz \frac{d\bar{u}}{dt} = (\rho - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx) dy dz - (\rho + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx) dy dz + \rho x dx dy dz$$

mediante (H.7.1) de obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{H.7.4})$$

Análogamente se obtienen

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (\text{H.7.5})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - g \quad (\text{H.7.6})$$

Estas tres últimas ecuaciones son las ecuaciones de Euler para el caso del flujo no viscoso. Ahora bien, si el flujo es laminar, entonces tanto las componentes de la velocidad como sus derivadas espaciales son pequeñas y de aquí que su producto - pueda ser omitido

$$\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial t} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{H.7.7})$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (\text{H.7.8})$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial w}{\partial t} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - g \quad (\text{H.7.9})$$

Obsérvese que las componentes de la velocidad sin barra indican la velocidad de gasto. Para n y g tomaremos conservadoramente los valores $n = \frac{1}{2}$ y $g = 1000 \text{ cms/seg}^2$.

Si el flujo es independiente del tiempo, entonces se tiene

$$X = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{H.7.10})$$

y al sustituir p por $h = \frac{\rho}{\gamma_w} + z_0$ se obtiene

$$X = g \frac{\partial h}{\partial x} = -gi \quad (\text{H.7.11})$$

donde i es el gradiente hidráulico. Si aplicamos ahora la fórmula de Darcy

$$X = -\frac{qu}{k} \quad (\text{H.7.12})$$

análogamente

$$Y = -\frac{qv}{k} \quad (\text{H.7.13})$$

$$Z = -\frac{qw}{k} \quad (\text{H.7.14})$$

Sustituyendo estas tres últimas fórmulas en (H.7.7), (H.7.8) y (H.7.9) respectivamente se tiene que

$$\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{qu}{k} \quad (\text{H.7.15})$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{qv}{k} \quad (\text{H.7.16})$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{qw}{k} \quad (\text{H.7.17})$$

Para el caso del flujo estacionario, estas fórmulas se reducen, de acuerdo a la expresión vectorial de la ley de Darcy

$$\vec{v} = - k \cdot \text{grad } h \quad (\text{H.7.18})$$

Seguidamente se pasa a justificar la simplificación de las expresiones (H.7.15)-(H.7.17).

Estas tres igualdades presentan la siguiente forma común

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = g_i - \frac{qv}{h}$$

y de aquí, mediante el siguiente cambio de variable

$$v = v_* + ki \quad (\text{H.7.19})$$

se obtiene

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v_*}{\partial t} = - \frac{k}{n} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{qv_*}{h}$$

Con el propósito de cuantificar los coeficientes de esta expresión se toma $k = 0.1$ cms/seg, valor de permeabilidad bastante conservador ya que corresponde a suelos constituidos con arena gruesa

$$\frac{\partial v_*}{\partial t} = -1 \cdot 10^{-1} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot 10^4 v_* \quad (\text{H.7.20})$$

comparando los órdenes de las magnitudes se ve que a menos de presentarse una variación excesiva de la razón del gradiente hidráulico respecto al tiempo, el término correspondiente a $\frac{\partial i}{\partial t}$ puede ser omitido sin pérdida sensible en la exactitud de los cálculos. Aún más, el número de Reynolds el cual limita la validez de la ley de Darcy garantiza que siendo baja la velocidad del flujo el cambio en el momentum es pequeño cuando se compara con las resistencias al flujo ocasionadas por la viscosidad. Así pues, (H.7.20) queda reducido así

$$\frac{dv_*}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot 10^4 v_*$$

e integrando

$$v_* = v_{*0} \exp(-\frac{1}{2} \cdot 10^4 t)$$

término que tiende rápidamente a cero, así pues al tomarse $v_{*0} = 0$ se obtiene (H.7.18).

La ecuación (H.7.18) muestra cuatro incógnitas, a

saber: u, v, w y h , luego a efecto de determinarlas se ha menester otra ecuación, esta se puede obtener a partir de considerar al fluido continuo en el espacio y en el tiempo.

La cantidad de fluido que pasa a través de la cara -- 1-2-3-4 del elemento mostrado en la figura H.7.1 es

$$n\bar{u}dydz$$

y en la cara opuesta 5-6-7-8 es

$$\left[n\bar{u} + \frac{\partial}{\partial x}(n\bar{u})dx \right] dydz$$

y el incremento del fluido por unidad de tiempo en la dirección del eje X es

$$\frac{\partial}{\partial x}(n\bar{u})dx dydz$$

análogamente se obtienen las siguientes ecuaciones según las direcciones de los ejes Y y Z respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial y}(n\bar{v})dx dydz$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(n\bar{w})dx dydz$$

Si el fluido es incomprensible, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}(n\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(n\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(n\bar{w}) = 0 \quad (\text{H.7.21})$$

o sea

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{H.7.22})$$

Esta expresión se conoce como ecuación de continuidad.

Como es bien sabido, en el estudio de campos vectoriales ciertas dificultades se pueden soslayar cuando aquellos se presentan en términos de potenciales, de aquí que se defina el potencial de velocidad φ por

$$\varphi(x,y,z) = -k\left(\frac{D}{\omega} + z\right) + c = -kh + c \quad (\text{H.7.23})$$

donde c es una constante arbitraria.

En otros términos

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.7.24})$$

Las ecuaciones (H.7.23) y (H.7.24) generalizan la fórmula de Darcy dentro del esquema dinámico necesario para el estudio del flujo en el subsuelo.

Mediante simple sustitución se obtiene a partir de -

(H.7.23) y (H.7.24) la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{H.7.25})$$

la que al ser resuelta bajo condiciones de frontera específicas determina el flujo estacionario y laminar de filtración.

H.8 FLUJO BIDIMENSIONAL

En muchas ocasiones el flujo de un fluido es sustancialmente el mismo en ciertos planos paralelos y por esta razón el flujo se puede considerar bidimensional, simplificándose así notablemente el trabajo necesario en esta clase de estudios.

Las ecuaciones básicas del flujo bidimensional en el plano X-Y son

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.8.1})$$

y si se conviene en tomar el eje Y dirigido verticalmente hacia arriba mientras que el eje X permanece horizontal se tiene que

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + y \quad (\text{H.8.2})$$

$$\phi = -k \left(\frac{p}{\gamma_w} + y \right) + c \quad (\text{H.8.3})$$

siendo así que la correspondiente ecuación de Lapla

ce es

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{H.8.4})$$

y la ecuación de continuidad adquiere la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{H.8.5})$$

Como es sabido, la ecuación de Laplace es satisfecha por funciones armónicas conjugadas $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ tales que las trayectorias $\varphi(x,y) = \text{cte}$ y $\psi(x,y) = \text{cte}$ son ortogonales.

La función $\psi(x,y)$ es llamada función de corriente y se define por

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{H.8.6})$$

cuando se sustituyen estas ecuaciones en la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

igualando los potenciales y las funciones de corriente se llega a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.8.7})$$

En otras palabras, la función $\psi(x,y)$ satisface tanto a la ecuación de continuidad como a las condiciones de Cauchy-Riemann, luego también satisface a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{H.8.8})$$

H.9 LINEAS DE CORRIENTE Y LINEAS EQUIPOTENCIALES.

Consideremos una partícula de fluido la cual en el punto $P(x,y)$ tiene una velocidad tangencial $v=(u,v)$, luego

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} = \tan \phi$$

donde ϕ es el ángulo que forma la tangente a la trayectoria en el punto P y el eje X , luego

$$v dx - u dy = 0 \quad (\text{H.9.1})$$

al sustituir las ecuaciones (H.8.6) en esta ecuación se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

siendo la diferencial total $d\psi = 0$, y de aquí

$$\psi = \text{constante} \quad (\text{H.9.2})$$

o sea, al tomar las curvas $\Psi(x,y) = \text{cte}$ se obtienen las llamadas líneas de flujo.

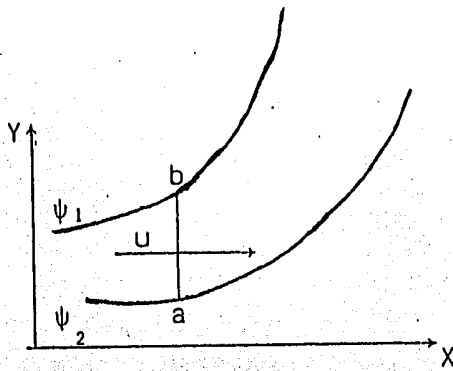


Fig. H.9.1

Considérese ahora el flujo entre las líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 como se muestra en la figura H.9.1. Sea q el gasto por unidad de longitud a través de la recta ab , así.

$$q = \int_{\psi_2}^{\psi_1} u dy = \int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_1 - \psi_2 \quad (\text{H.9.3})$$

este valor se llama flujo de canal y es constante. Por otra parte la interpretación física de la magnitud ϕ puede ser obtenida partiendo de consideraciones de tipo matemáticas, así pues la diferencial total de $\phi(x,y) = \text{cte}$ está dada por

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

y de aquí se deduce mediante (H.8.1)

$$u dx + v dy = 0$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad (\text{H.9.4})$$

Las líneas $\varphi(x,y) = \text{cte}$ son llamadas líneas equipotenciales las que, por supuesto, son ortogonales a las líneas de flujo. Al dibujarse estos dos tipos de líneas se obtiene la malla de flujo.

Si ahora se atiende a la diferencial total

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

se ve que en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtienen las siguientes expresiones

$$\psi = \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \right) \quad (\text{H.9.5})$$

y

$$\varphi = \int \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dx + \frac{\partial\psi}{\partial x}dy \right) \quad (\text{H.9.6})$$

El llamado potencial complejo se define por

$$w = \varphi + i\psi \quad (\text{H.9.7})$$

siendo de particular interés la expresión

$$\nabla^2 w = \nabla^2 \varphi + i \nabla^2 \psi = 0$$

la que verifica a las ecuaciones (H.8.6)

H.10 CONDICIONES DE FRONTERA

Para el flujo estacionario subterráneo en suelos homogéneos se consideran cuatro tipos diferentes de frontera:

I FRONTERA IMPERMEABLE

Dado que el fluido no puede pasar a través de una frontera impermeable, la componente normal de la velocidad a la frontera en cualquier punto se anula; y por otra parte, dado que el fluido se considera no sujeto a esfuerzos de fricción, no se consideran, en consecuencia, restricciones según las componentes tangenciales. Si \bar{n} y \bar{t} denotan respectivamente las direcciones normales y tangenciales en un cierto punto de la frontera, de -- (H.8.7) se deduce

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \psi = \text{constante}$$

de aquí que una frontera impermeable pueda ser considerada como el lugar geométrico de una línea de corriente. Generalmente se consideran dos tipos de fronteras impermeables: la primera es la parte superior del manto impermeable donde el coeficiente de permeabilidad es insignificante cuando se compara con el coeficiente del

del suelo ubicado arriba de él, es en esta frontera donde se presenta la línea de corriente inferior; y el segundo tipo de frontera es aquel donde se da la línea de corriente superior, correspondiendo generalmente a la parte inferior de una estructura impermeable tal como una presa de concreto, etc.

II FRONTERAS EN DEPOSITOS

A lo largo de la frontera de los embalses la distribución de presiones puede considerarse constante, sea por ejemplo - el punto M sobre la frontera AD presentada en la figura H.10.1, la presión hidrostática es

$$p = \gamma_w (h_1 - y) \quad (\text{H.10.1})$$

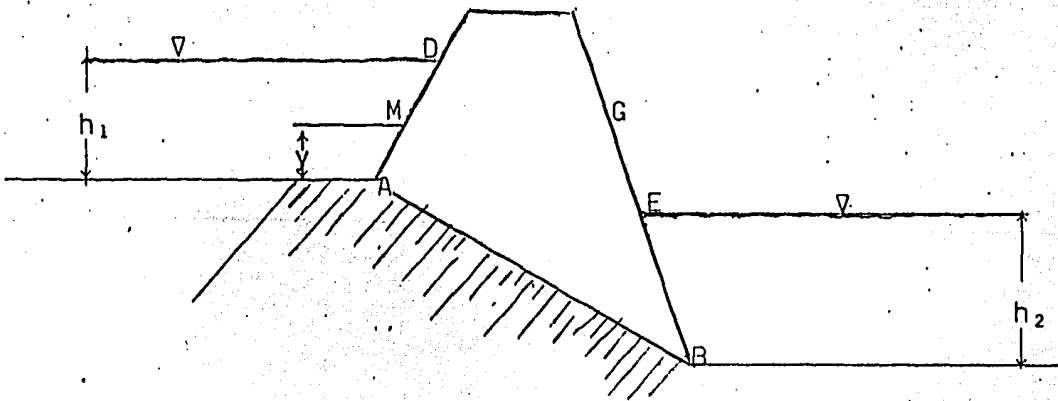


Fig. H.10.1

y de aquí y de (H.8.3) se obtiene

$$\varphi = -kh_1 + c \quad (\text{H.10.2})$$

donde k , h y c son constantes, luego

$$\phi = \text{constante} \quad (\text{H.10.3})$$

o sea que en la frontera del depósito tanto AD como EB son líneas equipotenciales.

III SUPERFICIE DE FILTRACION

La superficie de filtración, en la figura H.10.1 la línea GE, es aquella donde el flujo de filtración desemboca en una región libre tanto del material del suelo como del líquido, siendo la presión sobre esta frontera constante e igual a la presión atmosférica y como esta superficie no es ni una línea equipotencial ni una línea de corriente, se tiene

$$\phi = -\frac{kp}{\gamma_w} - ky + c$$

y de aquí

$$\phi + ky = \text{constante} \quad (\text{H.10.4})$$

IV LINEAS DE FILTRACION (SUPERFICIE LIBRE)

La línea de filtración es la línea de corriente que aparece un un dominio del flujo como línea superior, ésta línea - separa la región del suelo saturada de aquella en la cual no ocurre el flujo. En la figura H.10.1 esta línea esta representada por la curva DG. La determinación de esta línea suele ser una de las principales metas del estudio de las corrientes subterráneas. Obviamente, como en el caso de cualquier otra línea de filtración,

el valor de ψ debe ser constante, pero ahora, además, se sabe que la presión en cualesquiera de sus puntos es constante e igual a la presión atmosférica, o sea que a lo largo de esta línea se tiene

$$\varphi + ky = \text{constante} \quad (\text{H.10.5})$$

y de aquí que el potencial de la velocidad evaluado sobre dicha curva varíe linealmente con la carga.

H.11 ANISOTROPIA

Cuando el coeficiente de permeabilidad es independiente de la dirección de la velocidad del flujo de filtración se dice que el flujo ocurre en un medio isotrópico. Además, si el suelo tiene el mismo coeficiente de permeabilidad en todos los puntos, se dice que el medio es homogéneo e isotrópico. Pero si el coeficiente de permeabilidad depende de la dirección de la velocidad del flujo se dice que el medio es anisotrópico. En un suelo homogéneo y anisotrópico el coeficiente de permeabilidad depende de la dirección de la velocidad pero es independiente de las coordenadas espaciales.

En algún grado todos los suelos son anisotrópicos. Generalmente en los depósitos naturales el coeficiente de permeabilidad en la dirección horizontal es mayor que el coeficiente en la dirección vertical, pero también existen excepciones donde el coeficiente de permeabilidad según la dirección vertical es mayor que el horizontal. A efecto de generalizar la Ley de Darcy de

acuerdo a lo expuesto en este párrafo, ahora se toma

$$\bar{v}_n = -k_n \text{grad}_n h \quad (\text{H.11.1})$$

donde k_n es el coeficiente de permeabilidad en la dirección n , mientras que \bar{v}_n y $\text{grad}_n h$ son las componentes, respectivamente, de velocidad y del gradiente hidráulico en dicha dirección. Para el flujo bidimensional en el plano X-Y se tienen

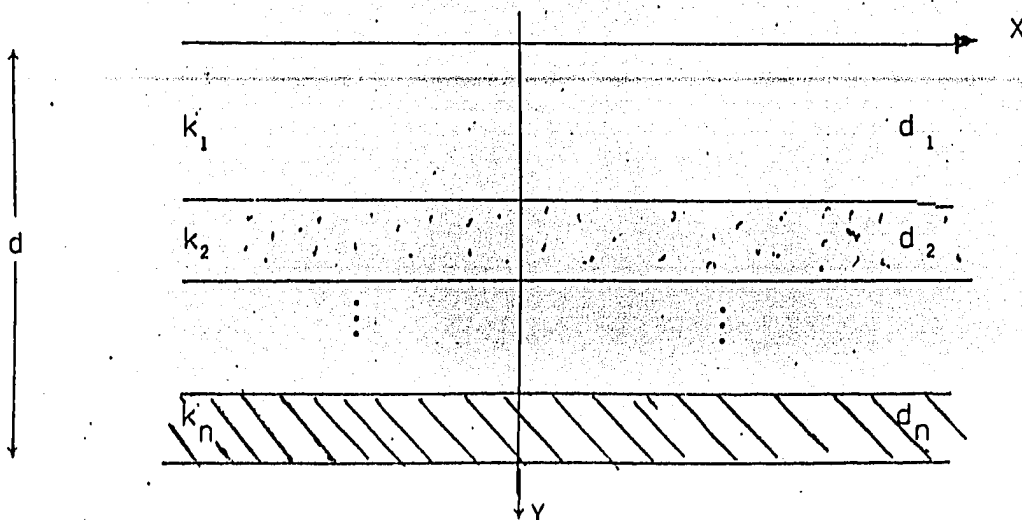
$$u = -k_x \text{grad}_x h = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{H.11.2})$$

$$v = -k_y \text{grad}_y h = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{H.11.3})$$

Seguidamente se hacen cuatro consideraciones generales a efecto de simplificar los cálculos.

I.- Un suelo constituido por distintos estratos delgados, cada uno de ellos homogéneo e isotrópico, puede ser transformado en un suelo equivalente e isotrópico.

Fig. H.11.1



En la figura H.11.1 se presenta una sección vertical de un suelo compuesto por n capas delgadas, de alturas respectivas d_1, \dots, d_n siendo, correspondientemente, sus coeficientes de permeabilidad k_1, \dots, k_n . Evidentemente el flujo total en dirección horizontal es igual a la suma del gasto que aportan cada una de las capas en cuestión, así pues

$$q = \sum_{m=1}^n k_m d_m \frac{h_1 - h_2}{L}$$

donde $h_1 - h_2$ es la pérdida de carga en la distancia L . Consecuentemente la velocidad del flujo en la dirección X es

$$u = \sum_{m=1}^n \frac{k_m d_m}{d} \frac{h_1 - h_2}{L}$$

y de aquí se obtiene un coeficiente de permeabilidad en la dirección X

$$k_x = \sum_{m=1}^n \frac{k_m d_m}{d} \tag{H.11.4}$$

Considerando ahora el flujo en dirección vertical, la ecuación de continuidad $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ muestra que la velocidad del flujo en dicha dirección es la misma para todos los estratos, o sea

$$v = k_y i = k_1 i_1 = k_2 i_2 = \dots = k_n i_n \tag{H.11.5}$$

aquí se considera a i como el gradiente hidráulico evaluado al

través de las n capas. Además la pérdida total de carga es igual a la suma de las pérdidas de carga en cada uno de los estratos

$$i d = i_1 d_1 + i_2 d_2 + \dots + i_n d_n$$

y de aquí se obtiene

$$k_y = \frac{d}{\sum_{m=1}^n \frac{d_m}{k_m}} \quad (\text{H.11.6})$$

De las ecuaciones (H.11.4) y (H.11.5) se deduce que $k_x > k_y$. En obvio de dificultades se hace la demostración para $n=2$. Sean $\frac{d_1}{d_2} > \delta$ y $k_x > k_y$, luego esta última desigualdad toma la forma

$$\frac{k_1 \delta + k_2}{1 + \delta} > \frac{(\delta + 1) k_1 k_2}{\delta k_2 + k_1} \quad (\text{H.11.7})$$

la que se reduce a

$$\delta(k_1 - k_2)^2 > 0 \quad (\text{H.11.8})$$

siendo esta última desigualdad siempre verdadera.

II.- En la figura H.11.2, el vector \bar{s} indica la dirección de la normal a la líneas equipotencial. En un medio isotrópico las líneas de flujo y las equipotenciales forman una red

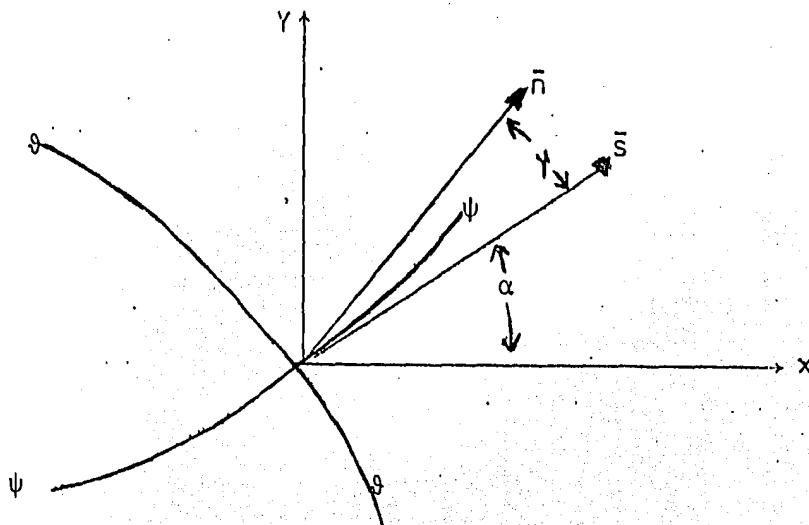


Fig. H.11.2

ortogonal siendo así que los vectores \bar{s} y \bar{n} tienen la misma dirección, pero en un medio anisotrópico la dirección de las líneas de corriente no coinciden con la dirección de la normal a las líneas equipotenciales.

La componente de la velocidad a lo largo de la línea de corriente es

$$v_s = -k_s \frac{\partial h}{\partial s} \quad (\text{H.11.9})$$

siendo así que las componentes en las direcciones X e Y son

$$u = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} = v_s \cos \alpha \quad (\text{H.11.10})$$

$$v = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} = v_s \text{ sen} \alpha \quad (\text{H.11.11})$$

pero como

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

de esta última ecuación y de las ecuaciones (H.11.9) y (H.11.11) se obtiene

$$\frac{1}{k_s} = \frac{\cos^2 \alpha}{k_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{k_y} \quad (\text{H.11.12})$$

o sea

$$k_s = \frac{k_x k_y}{k_x \sin^2 \alpha + k_y \cos^2 \alpha} \quad (\text{H.11.13})$$

Sean ahora

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

luego (H.11.12) se transforma en

$$\frac{r^2}{k_s} = \frac{x^2}{k_x} + \frac{y^2}{k_y} \quad (\text{H.11.14})$$

la cual es la ecuación de una elipse cuyos semiejes mayor y menor son $k_x^{\frac{1}{2}}$ y $k_y^{\frac{1}{2}}$. Si se tiene que $k_x = k_{\max}$ y $k_y = k_{\min}$, como en el caso de suelos estratificados cuyas capas están dirigidas según el

eje X, el coeficiente de permeabilidad en una dirección cualquiera se puede obtener gráficamente mediante la construcción llamada elipse de direcciones

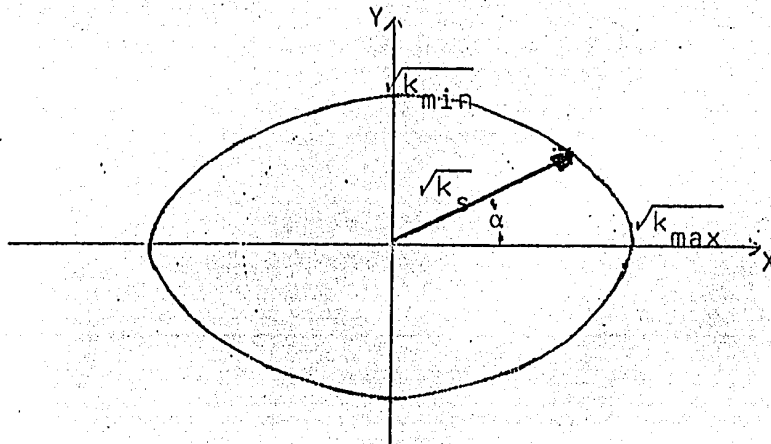


Fig. H.11.3

Resulta conveniente hacer notar que aún cuando no se ha dado una demostración generalizada de la ley de Darcy para flujos en medios anisotrópicos, los resultados experimentales validan las fórmulas presentadas.

III.- Tanto la ecuación (H.11.14) como la figura H.11.3 muestran como mediante la transformación $X = x \left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}}$ la elipse de direcciones puede ser transformada en un círculo, este hecho será usado para resolver los problemas que al respecto presentan los estratos homogéneos anisotrópicos. Así pues considérese la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

al sustituir u y v de acuerdo a (H.11.10) y (H.11.11) se obtiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \left[\left(\frac{k_y}{k_x} \right) x^2 \right]} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

si se hace ahora $X = x \left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}}$ se llega a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{H.11.15})$$

obviamente, se puede obtener una transformación análoga para la variable y.

Estos resultados muestran como mediante una simple expansión o contracción de las coordenadas espaciales, un flujo en un medio homogéneo y anisotrópico puede ser considerado como un flujo en una región isotrópica, en la cual siendo válida la ecuación de Laplace, los resultados teóricos del estudio del potencial son aplicables también. Este último dominio se conoce como sección transformada. El coeficiente de permeabilidad para una sección homogénea y anisotrópica es

$$k = \sqrt{k_{\max} k_{\min}} \quad (\text{H.11.16})$$

el porque de esta fórmula se explica seguidamente.

En la figura H.11.4 se presentan los cuadrados curv

líneos acotados por las líneas equipotenciales φ_1 y φ_2 y las líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 de una sección transformada. En la figura H.11.5 se representa la misma sección a escala natural.

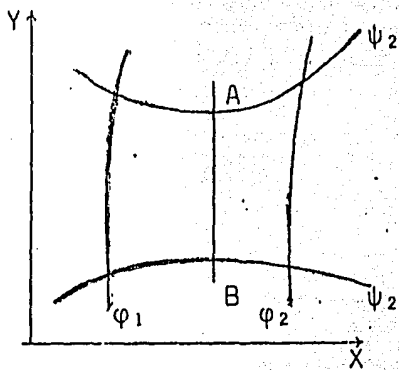


Fig. H.11.4

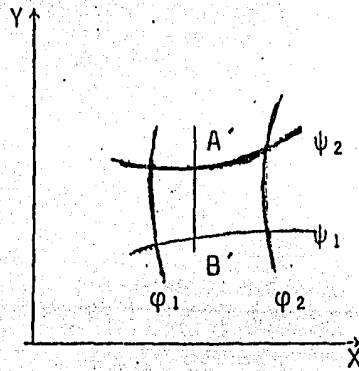


Fig. H.11.5

La recta vertical AB, paralela al eje Y, en la sección transformada deviene en $A'B' = AB \left(\frac{k_{\min}}{k_{\max}} \right)^{\frac{1}{2}}$ en la sección a escala natural, luego el flujo a través de la sección AB es igual al flujo a través de A'B', así que en la sección transformada ocurre que

$$q = AB \cdot k \cdot \text{grad}(h)$$

y como a escala natural, el coeficiente de permeabilidad en la dirección X es k_{\max} , se tiene que

$$q = A'B' \cdot k_{\max} \cdot \text{grad}(h) = k_{\max} \sqrt{\frac{k_{\min}}{k_{\max}}} \cdot AB \cdot \text{grad}(h)$$

y de aquí es inmediata la fórmula (H.11.16).

Considérese ahora la naturaleza del flujo a través de la frontera AB que divide a dos tipos de suelos isotrópicos de per

meabilidades respectivas k_1 y k_2 tal y como se muestra en la figura H.11.6.

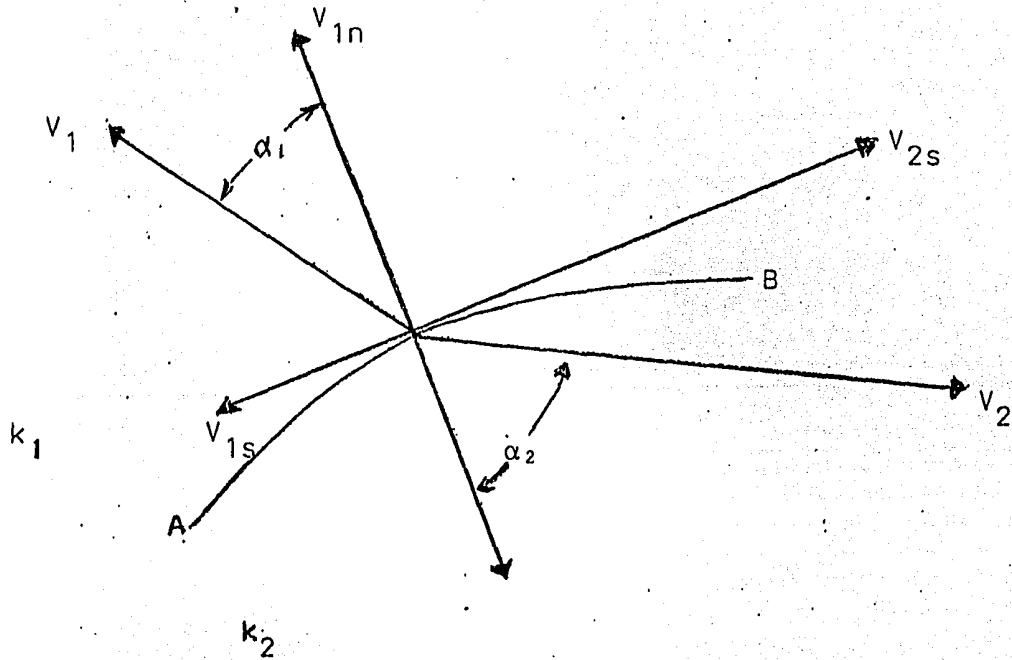


Fig. H.11.6

Los potenciales de las respectivas zonas son

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -k_1 \left(\frac{\rho}{\gamma \omega} + y_1 \right) \\ \varphi_2 &= -k_2 \left(\frac{\rho}{\gamma \omega} + y_2 \right)\end{aligned}$$

y en los puntos de la frontera obviamente ocurre que $p_1 = p_2$ y $y_1 = y_2$ estos es

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} \quad (\text{H.11.17})$$

y como según la ecuación de continuidad la componentes normales a la frontera AB deben ser iguales.

$$v_{1n} = v_{2n} \quad (\text{H.11.18})$$

Derivando ahora (H.11.18) respecto al parámetro s , la longitud del arco AB, y dividiendo entre (H.11.18) se llega a

$$\frac{v_{1s}}{v_{1n} k_1} = \frac{v_{2s}}{v_{2n} k_2}$$

y haciendo $\frac{v_s}{v_n} = \text{tang} \alpha$ se obtiene

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\text{tang} \alpha_1}{\text{tang} \alpha_2} \quad (\text{H.11.19})$$

La semejanza entre esta última fórmula y la ley de incidencia y refracción de la óptica es obvia.

Analizando la ecuación (H.11.17) se observa que la separación relativa de la líneas equipotenciales en dos zonas adya--centes varia en razón directa a sus respectivas permeabilidades.

IV. Por último, suele ocurrir que algunos suelos mues--tran una gran diferencia, por zonas, en lo que a su homogeneidad se refiere, de modo tal que la evaluación mediante transformaciones de los correspondientes coeficientes de permeabilidad se vuelve poco práctica. En tales casos queda el recurso de despreciar algunas de las variaciones locales con el propósito de soslayar dicha proble-

mática. Al respecto se establece el siguiente criterio, el que con las reservas del caso, suele usarse. Si la razón de las permeabilidades de dos tipos de suelos contiguos es mayor que 1:10, el suelo de menor permeabilidad puede ser considerado como impermeable y así las contribuciones al flujo de este estrato se consideran nulas.

También se pueden agrupar los distintos tipos de suelos en regiones mayores, las que se trabajan de conformidad a las transformaciones ya citadas. Desde luego, no pueden darse reglas precisas al respecto, y las simplificaciones del caso quedan sujetas al criterio del investigador.

H.12 FILTRACION EN POZOS

Como ya se vió, la ecuación que gobierna el flujo estacionario bidimensional es

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

la que en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{H.12.1})$$

donde

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \arctang \frac{y}{x}$$

Si el flujo toma lugar en un plano horizontal variando únicamente en función de r , se tiene el llamado flujo radial bidimensional. En este supuesto, la variable $z=x+iy=r\exp(i\theta)$ no varia cuando θ lo hace, y de aquí que (H.12.1) se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{H.12.2})$$

También se tiene

$$\phi = c_1 \ln r + c_2 \quad (\text{H.12.3})$$

Considérese ahora el flujo de filtración en un pozo ubicado en un estrato permeable homogéneo de espesor igual a T y sean

r_w = radio del pozo

R = radio de influencia

h = pérdida de carga

con

$r = r_w$ cuando $\phi = 0$

$r = R$ cuando $\phi = kh$

De (H.12.3) se deduce.

$$\phi = \frac{kh}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \ln \frac{r}{r_w} \quad (\text{H.12.4})$$

siendo la velocidad radial

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{kh}{r \ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

Evidentemente el gasto a la distancia r del centro del pozo es

$$Q = T \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi Tkh}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (\text{H. 12.5})$$

De (H.12.4) y (H.12.5) se obtiene ahora

$$\phi = \frac{Q}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (\text{H. 12.6})$$

y la función de corriente asociada a este potencial es

$$\psi = \frac{Q}{2\pi T} \theta$$

o sea

$$\omega = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi T} \ln z + c \quad (\text{H. 12.7})$$

aquí se dice que el flujo tiene una fuente cuando $Q > 0$ y un sumidero cuando $Q < 0$. El término $\frac{Q}{2\pi T}$ con $T=1$ se llama potencia de la fuente (o sumidero).

CONSIDERACIONES GENERALES

Con el propósito de resolver problemas relativos al flujo de filtración, ya sean bidimensionales o simétricos respecto a un cierto eje, en medios anisotrópicos de configuración prácticamente arbitraria, se propone resolver numéricamente las ecuaciones básicas mediante el Método del Elemento Finito. La siguiente discusión pretende delinear dicho método.

Dadas las condiciones de frontera, específicas para el problema en consideración, la ecuación básica a resolver es, según se vió en la sección anterior, la ecuación (H.8.4) y si esta se aplica a un medio de espesor T , entonces toma la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x T \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y T \frac{\partial \phi}{\partial y}) = W(x,y) \quad (\text{H.12.8})$$

Ahora bien, si se tiene bajo consideración una sección recta con $T = 1$, entonces la ecuación anterior adquiere la siguiente presentación

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) = W(x,y) \quad (\text{H.12.9})$$

donde ahora $W(x,y)$ da la potencia de la fuente o del sumidero por unidad de área.

Si el medio es isotrópico, entonces

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{W(x,y)}{k} \quad (\text{H.12.10})$$

REFERENCIAS CITADAS

- (1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the Framework method", J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.
- (2) McHenry, D., "A Lattice analogy for the solution of plane stress problems", J. Inst. Civ. Eng. 21, 59-82, 1943.
- (3) Newmark, N.M., "Numerical methods of analysis in Engineering", edited by L.E. Grinter, MacMillan, 1949.
- (4) Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., and Topp, L.J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956.
- (5) Clough, R. W., "The finite element in planes stress analysis", Proc. 2nd. ASCE conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- (6) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite Elements in the solution of fields problems", Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.
- (7) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis", Nuclear Eng. and Desing 3, 1-II, 1966.
- (8) Cervantes, B. R., y Porras, S. V., "Introducción al Método del Elemento Finito".
- (9) Carbo, C. R., y Hernández, B.J.A., "Introducción a la Teoría de Matrices", 1976.
- (10) Pede Agreda A, y Castelerio M., "Introducción al Método de Elementos Finitos Principios Generales y Formulación", Nov. 1979.
- (11) Briones, G.J.J., "Empleo de Métodos Geofísicos en los estudios de factibilidad del Proyecto Hidroeléctrico "Aguamilpa" (alternativa Colorines), Edo. de Nayarit", Tesis Profesional - 1984.
- (12) Ivansson, S., "A study of methods for tomographic velocity-estimation in the presence of low-velocity zones", Geophysics, Vol. 50, No. 6 (June 1985).
- (13) Devenport, Maldonado y Negrillo, "Técnicas Geofísicas para la determinación de propiedades elásticas". Div. Educ. Cont. Fac. Ing. UNAM., 1980.

- (14) Mc Cracken, D.D. and Dorn, W.S., "Numerical Methods and - FORTRAN Programming". 1964 by John Wiley and Sons Inc.
- (15) Ragan, D.M., "Structural Geology An Introduction to geometrical Techniques". 2 nd. edition, 1973 by John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto.
- (16) Peralta, R.E. y Valdés R., "Modelado Bidimensional por - elementos Finitos para la interpretación de datos de Georesistividad en exploraciones Geofísicas". 1983, Tesis - Profesional Facultad de Ciencias, U.N.A.M.
- (17) Bazeley, D.E. and et, "Numerical methods of analysis en - Engineering". Conf. on Solution of Problems in elasticity. Sept. 1962. ASCE.
- (18) Richarson. J.O., "Programming the Finite Element Method - with application to fluid Dinamies". Conf. on Application of finite element method, Nov. 1962. ASCE.
- (19) Gere, J.M. and Timoshenko, S.P., "Mechanics of Materials". 2 and edición, 1984 by PWS copyright.

CONSULTA RECOMENDADA

- 1.- I.M. Smith, Programming the Finite Element Method with Application to Geomechanics, John Wiley, 1981.
- 2.- G.F. Pinder and W.G. Gray, Finite Elements in Subsurface Hidrology, Academic Press, 1977.
- 3.- J.J. Connor and C.A. Brebbia, Finite Element Techniques for fluid flow, Butterworths, 1976.
- 4.- T.J. Chung, Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, Mc. Graw-Hill, 1978.
- 5.- H.M. Bibby, Direct Current Resistivity Modeling for Axially Symmetric Bodies using the Finite Element Method, Geophysics, Vol. 43, No. 3 (April 1978) PP 550-562.
- 6.- J. H. Coggon, Electromagnetic and Eletrical Modeling by the Finite Element Method, Geophysics, Vol. 36, No. 1 (Febrero-1971), PP. 132-155.
- 7.- R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor y O.C. Zienwiewicz, Finite Elements in Fluid, 2 Vol., Willey London, 1975.
- 8.- J.I. Oden and J.N. Reddy, An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Element, John Wiley, 1976.
- 9.- C.S. Desai y J.F. Abel, Introduction to the Finite Element-Method. Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
- 10.- H.C. Martin y G.F. Carey, Introduction to Finite Element Analysis, Mc Graw Hill, New York, 1973.
- 11.- F.G. Hildebrand, Introduction to Numerical Analysis Mc. Graw Hill, New York, 1974.
- 12.- B. Carnahan, H.A. Wilkes y J.O. Huther, Applied Numerical Methods, John Wiley, New York, 1969.
- 13.- P.J. Davis y P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration. Academic Press, New York, 1975.
- 14.- P.C. Hammer y A.H. Stroud, Numerical Evaluation of Multiple Integrals, MTAC 12, 272-280, 1958.
- 15.- B.A. Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York, 1972.

- 16.- I. Herrera, Métodos Variacionales para aplicaciones en Ingeniería y Física (parte 1). Instituto de Ingeniería, UNAM, 1975 pp 68.
- 17.- O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, 1971.
- 18.- T. R. Fenner, Finite Element Methods for Engineers, The Macmillan Press L.T.D., Dublin, 1975.
- 19.- S.D. Conte and C. de Boor, Elementary Numerical Analysis.
- 20.- A. Ralston, A First Course in Numerical Analysis, by Mc Graw-Hill, Inc.
- 21.- W.D. Means, Stress and Strain, Basic Concepts of continuum Mechanics for Geologists. Springer-Verlag, 1969 by New York, Heidelberg, Berlín.
- 22.- J.G. Ramsay, Folding and Fracturing of Rocks, 1967, Mc Graw-Hill, New York.
- 23.- S.C. Galindo, Aspectos Teóricos del Modelado de Resistividades para Cuerpos simétricamente Axiales Aplicando el Método del Elemento Finito. 1983, Tesis Profesional Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.