Universidad Nacional Autónoma de México

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONALES
Y DE POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS APLICADAS
Y EN SISTEMAS.

DESARROLLOS PARA LA APLICACION DE EFECTOS FACTORIALES.

TESIS

Que para obtener el Grado de
M. EN C. CON ESPECIALIDAD EN ESTADISTICA
E INVESTIGACION DE OPERACIONES

p r e s e n t a

LUIS FERNANDO RAMIREZ CENTENO

MEXICO, D. F. 1982

C O N T E N I D O

Resumen:

Capítulo 1.- Desarrollos Para la Aplicación de Efectos Factoriales

		Pag.
1.1.	Introducción	1
1.2.	Ventajas de los Diseños Factoriales	3
1.3.	La Hipótesis de Normalidad	4
1.4.	Ortogonalidad	5
1.5.	Aleatorización	7
1.6.	Diseño Experimental	8
1.7.	Otros Aspectos del Diseño Factorial	8

Capítulo 2.- El Experimento Factorial 2^n

2.1.	Introducción	10
2.2.	Notación Para Totales	11
2.2.1.	En un Diseño Factorial 2^2	11
2.2.2.	En un Diseño Factorial 2^3	12
2.3.	Efectos Principales e Interacciones	13
2.4.	Suma de Cuadrados (SC)	14
2.5.	Cálculo del Efecto Factorial Total	18
2.5.1.	Método de Yates	19
2.5.2.	Tabla Para Obtener los Totales de los Efectos Principales e Interacciones	21
2.5.3.	Tablas de Doble, Triple y Cuadruple Entrada Para Obtener los Efectos Principales e Interacciones	23

2.6. Factorial 2^n Para n=2,3,4 31
2.6.1. Factorial 2^2 con Bloques al Azar 31
2.6.2. Factorial 2^3 con Bloques al Azar 32
2.6.3. Factorial 2^4 con Bloques al Azar 33

Capítulo 3.- Confusión en experimentos factoriales 2^n (experimentos factoriales en bloques incompletos)

3.1. Introducción 35
3.2. Factorial 2^5 en 4 bloques con confusión total de BCDE y ABCD 40
3.3. Planes experimentales 60
3.3.1. Factorial 2^4 en bloques de 2 u.e. con confusión total de AB, AC, (BC), AD (BD, CD; ABCD) 60
3.3.2. Factorial 2^5 en 4 bloques de 8 u.e. con confusión total de ABC, CDE (ABDE) 62
3.3.3. Factorial 2^5 en bloques de 4 u.e con confusión total de AB, CD, (ABCD) BDE (ADE, BCE; ACE) 63
3.3.4. Factorial 2^6 en bloques de 16 u.e. con confusión total de ABCD, ABEF, (CDEF) 66
3.3.5. Factorial 2^6 en bloques de 8 u.e. con confusión total de ACE, BDE, (ABCD) BCF, (ABEF, CDEF; ADF) 68
3.3.6 Factorial 2^7 en bloques de 8 u.e. con confusión total de ABD, ACE, BCF, ABCG, y sus interacciones generalizadas 71

Capítulo 4.- Confusión Parcial en el Diseño 2^n

4.1. Introducción 75
4.1.1. Factorial 2^5 en bloques de 8 unidades experimentales 79
4.2 Indice de planes experimentales 82
4.2.1 Factorial 2^4 82
4.2.2. Factorial 2^5 85
4.2.3. Factorial 2^6 88

Capítulo 5.- Factorial 3^n

5.1. Introducción 95
5.2. Sumas de Cuadrados 99
5.3. Ejemplo de un factorial 3^2 102
5.4. Diseño factorial 3^3 112

Capítulo 6.- Confusión en diseños factoriales 3^n

6.1. Introducción 114
6.2. Confusión en un factorial 3^2 115
6.3. Confusión en un diseño factorial 3^3 118
6.3.1. Factorial 3^3 en bloques de 9 u.e. 119
6.3.2. Ejemplo 122
6.3.3. Factorial 3^3 en bloques de 3 u.e. 132
6.4. Confusión en el diseño 3^4 135
6.4.1. Factorial 3^4 en bloques de 27 u.e. 135
6.4.2. Factorial 3^4 en bloques de 9 u.e. 137
6.4.3. Factorial 3^4 en bloques de 3 u.e. 143

Capítulo 7.- Conceptos Básicos de Teoría de Grupos y su Relación con el Diseño de Experimentos

7.1.	Introducción	148
7.2.	Algunos resultados en teoría de grupos	148
7.3.	Relación de grupos con diseños factoriales	154
7.4.	Un principio de enumeración en grupos	157
7.5.	Subgrupos normales y grupos cocientes	158
7.6.	Relación de grupos con diseños factoriales (continuación)	161
7.7.	Homomorfismos	165
7.8.	Relación entre grupos y diseños factoriales (continuación)	170
7.9.	Grupos finitos. Los teoremas de Sylow	171
7.10.	Relación entre grupos y diseños factoriales (continuación)	174

Capítulo 8.- Diseño Factorial p^n (p un número primo)

8.1.	Introducción	175
8.2.	Diseño factorial 5^2	177
8.3.	Factorial 5^3	178
8.4.	Confusión en el diseño factorial p^n (p un número primo)	180
	8.4.1. Dos ejemplos	
	Primero	183
	Segundo	187

Capítulo 9.- Aspectos Teóricos para la construcción de factoriales s^n con $s=p^m$ y p un número primo

9.1.	Anillo y Campo	189
9.2.	Anillo de Polinomios	193

9.3.	Relación entre Anillos y Campos	195
9.4.	Homomorfismo, Isomorfismo, la característica de un anillo	196
9.5.	Característica de un campo	197
9.6.	Extensiones Algebráicas	197
9.7.	Campos Finitos	203
9.8.	El Campo Ciclotómico	204
9.9.	Relación de Campos de Galois	207
9.10.	Diseño Factorial 4^2	212
9.11.	Polinomios Mínimos para la Construcción de los Campos de Galois de orden p^m	215
9.12.	Construcción de los Campos de Galois de orden p^m	217
9.13.	El Campo de Galois de orden 8 $CG(2^3)$	220
9.14.	El Campo de Galois de orden 9 $CG(3^2)$	223
9.15.	Geometría de los Campos de Galois de orden p^m	225
	9.15.1. El Campo de Galois de orden 4 $CG(2^2)$	226
	9.15.2. El Campo de Galois de orden 8 $CG(2^3)$	227
	9.15.3. El Campo de Galois de orden 9 $CG(3^2)$	229
	9.15.4. Conclusión	
9.16.	Análisis del Diseño Factorial s^n ($s=p^m$ y p un número primo)	231
9.17.	Diseño Factorial 4^3	233
9.18.	Confusión en el Diseño Factorial s^n ($s=p^m$ y p un número primo)	238

Capítulo 10.- Experimentos Factoriales Fraccionales

10.1.	Introducción	244
10.2.	Alias y Relación de Definición	245
10.3.	Resoluciones	250
10.4.	Diseños 2^n de Resolución III	251
	10.4.1. Factorial Fraccional 2^{7-4}_{III}	252
	10.4.2. Factorial Fraccional 2^{15-11}_{III}	254
10.5.	Relación con Teoría de Grupos	255
10.6.	Otros Diseños de Resolución III	257
10.7.	Diseños de Resolución IV	258
	10.7.1. Diseño Factorial Fraccional 2^{4-1}_{IV}	258
	10.7.2. Diseño Factorial Fraccional 2^{8-4}_{IV}	259
10.8.	Otros Diseños Factoriales Fraccionales de Resolución IV	261
10.9.	Diseños de Resolución V	263
	10.9.1. Factorial Fraccional 2^{5-1}_{V}	265
	10.9.2. Factorial Fraccional 2^{6-1}_{V}	266
	10.9.3. Factorial Fraccional 2^{7-1}_{V}	267
	10.9.4. Factorial Fraccional 2^{8-2}_{V}	271
	10.9.5. Factorial Fraccional 2^{9-2}_{V}	273
	10.9.6. Factorial Fraccional 2^{10-3}_{V}	276
	10.9.7. Factorial Fraccional 2^{11-4}_{V}	280
10.10.	Experimentos Factoriales 3^n en Repetición Fraccionada	284
10.11.	El Diseño Factorial Fraccional 3^{n-p}	284
10.12.	Factorial Fraccional 3^{3-1}	290

Apéndice I.	293
Apéndice II.	294
Apéndice III.	296

R E S U M E N

Se dan las definiciones fundamentales de factor, niveles, diseños balanceados y completos. Se dan reglas para el análisis de diseños balanceados y completos, incluyendo la obtención de esperanzas de cuadrados medios. Se resume cuales son las ventajas de los experimentos factoriales. Todos los capítulos considerados se les da un enfoque de "Teoría de Grupos". Se enfatiza la diferencia entre diseño experimental respecto a diseño de tratamientos.

En el capítulo 2, se analiza el diseño factorial 2^n, se consideran métodos tradicionales para su estudio como lo es el de Yates o con una tabla que resumelos cálculos, se agrega una forma que no se incluye en los textos, mediante tablas de doble y triple entrada y se da un ejemplo.

En el capítulo 3, se analiza la confusión en experimentos factoriales 2^n, se tratan las interacciones generalizadas, se incluye un ejemplo que se resuelve mediante el uso de tablas de doble, triple y cuadruple entrada, se da un resumen de planes experimentales.

En el capítulo 4, se analiza la confusión parcial en el diseño factorial 2^n en si se discuten los principios generales para efectuar la partición del conjunto de tratamientos en subconjuntos, para colocarlos en bloques incompletos, de tal manera que la perdida de información sea mínima en cuanto a las inferencias relativas a tratamientos. Se da un resumen de planes experimentales.

En el capítulo 5, se estudia el diseño factorial 3^n, se analiza como "manejar" los datos por medio de tablas de doble entrada que en si es una generalización de lo hecho con los diseños factoriales 2^n.

En el capítulo 6, se estudia la confusión total y parcial en diseños factoriales 3^n. Se presenta la idea básica de la confusión, que consiste en efectuar la partición de manera que queden confundidos con bloques, totalmente o parcialmente los efectos de interacciones de varios factores. Nuevamente se manejan los datos por medio de tablas de doble entrada. Se da un resumen de planes experimentales.

En el capítulo 7, se da un resumen de conceptos relativos a la teoría de grupos y se analiza la relación con diseños experimentales. Se enfatiza la estructura de grupo que tienen los bloques en un diseño factorial con confusión.

En el capítulo 8, se considera el diseño p^n, con p un número primo, como una generalización de los disenos factoriales 2^n y 3^n. Se presentan teoremas que nos indican como obtener el número total de sistemas de confusión en un experimento factorial p en bloques al azar sin confundir efectos principales ni interacciones.

En el capítulo 9, se consideran aspectos de gran interés matemático y su aplicación en la estadística como son:

i) Se da un resumen de conceptos relativos a la teoría de anillos, de campos y de Teoría de Galois, los cuales son fundamentales para desarrollar los campos de orden p^n con p un número primo, estos campos reciben el nombre de Campos de Galois, se dan reglas para su construcción.

ii) Se da a los Campos de Galois "propiedades geométricas" que permiten efectuar la suma y el producto de los elementos del campo, de una manera versatil. Este es un resultado original del trabajo de investigación. Se construyen varias tablas de adición y multiplicación.

iii) En base a los campos de Galois se da a las combinaciones de tratamientos un orden ciclico, lo cual es un resultado original que facilita la obtención de la partición que se requiere hacer a las combinaciones de tratamientos para hacer el análisis del diseño factorial s^n.

iv) Se dan las bases matemáticas para la construcción de "polinomios mínimos o irreducibles" que son fundamentales en el desarrollo del diseño factorial s^n con $s=p^m$ y p un número primo. Se dan ejemplos de dicha construcción y una tabla de dichos polinomios.

v) Se analiza en forma conveniente la idea de confusión de los diseños factoriales s^n.

En el capítulo 10, se discute la generación de fracciones de un diseño factorial señalando cuál es la estructura en la estimación de los efectos principales e interacciones. Se analiza cuales son los grupos de efectos confundidos o grupos de "alias". Se enfatiza el manejo de tratamientos 2^n y 3^n con diferente grado de fraccionalidad. Se da un resumen de planes experimentales.

CAPITULO I

DESARROLLOS PARA LA APLICACION DE EFECTOS FACTORIALES

I.1 Introducción.

En muchas situaciones experimentales se requiere el análisis de los efectos variando dos o más factores. Se ha demostrado que un análisis completo de tal situación no es suficiente cuando se varía unicamente un factor, que en si es más conveniente considerar todas las combinaciones de los diferentes niveles de cada factor, examinarlos y determinar el efecto de cada factor y la forma como cada factor puede ser modificado por la variación de los otros factores. Para el estudio de la variación producida por medio de cambios deliberados en las condiciones experimentales, usualmente se usa la técnica que es dada por los Experimentos Factoriales. Consideraremos los principios básicos de esta clase de diseños y en los últimos capítulos se considerarán diseños más complejos.

En el análisis de los resultados experimentales el efecto de cada factor puede ser determinado con la misma precisión como si solamente este factor fuese el que variara, con la ventaja adicional de que los efectos de interacción entre los diferentes factores también pueden ser evaluada. Consideraremos experimentos en los que cada factor es probado en 2 ó más niveles.

Se considera que los parámetros en los modelos son constantes desconocidas (efectos fijos) y el análisis de los datos se hace en base a Teoría de Grupos.

Para familiarizarnos en la terminología que se usará, considere mos algunas definiciones de Mexas [22] y Davies [6].

Un factor de clasificación es una partición del conjunto de datos en subconjuntos ajenos dos a dos y no vacios. En si, el termino factor es usado en sentido general para denotar cualquier característica de las condiciones experimentales las cuales pueden ser asignadas de un ensayo a otro. Pueden representar, por ejemplo, la temperatura, presión, o la velocidad con la que es llevada a cabo cierta reacción química, también pueden ser las diferentes piezas de una planta, operadores diferentes, días distintos, turnos distintos, lotes de materia prima diferentes, etc. Hay dos tipos de factores: Cualitativo y Cuantitativo. Un factor cualitativo es aquel en el cual los niveles diferentes no pueden ser ordenados conforme a su magnitud. Un factor cuantitativo es aquel cuyos valores pueden arreglarse en orden de magnitud.

Los subconjuntos correspondientes a la partición definida por un factor se llaman niveles del factor. En si los niveles son los valores diferentes de un factor examinado en un experimento.

Una selección de un nivel de cada uno de los factores de cualquier subconjunto de factores se llama combinación de ese subconjunto. También recibe el nombre tratamiento o combinación de tratamientos.

Una combinación de todos los factores también recibe el nombre de celda.

Se dice que una combinación ocurre si el conjunto de datos contiene por lo menos una observación de esa combinación.

Si para cualquier subconjunto de una colección de factores, toda combinación posible ocurre, se dice que el conjunto de datos es completo.

Si para cualquier subconjunto de un colección de factores, toda combinación que ocurre contiene el mismo número de observaciones, se dice que el conjunto de datos es balanceado.

El resultado numérico de un ensayo en base a un tratamiento es llamada la respuesta correspondiente a ese tratamiento. Por ejemplo, la respuesta puede ser, la producción de un proceso, la pureza de alguna substancia química, en general será una expresión cuantitativa que dé el resultado de un experimento.

El efecto de un factor es el cambio en la respuesta producido por un cambio en los niveles de un factor.

El efecto promedió es llamado el efecto principal de un factor, y si el efecto de un factor es distinto en diferentes niveles de otro factòr se dice que hay interacción entre los dos factores.

I.2 Ventajas de los Diseños Factoriales.

El objetivo que se pretende y que se logra con los diseños factoriales es el de tener un método eficiente, en el sentido de obtener la información que se necesite con la presición requerida y con un mínimo de esfuerzo.

Cuando no hay interacciones, con el experimento factorial se puede obtener un buen ahorro de tiempo y de material usado en el experimento debido a que:

1o) Los efectos principales son las únicas cantidades necesarias para describir completamente las consecuencias que provoca la variación de un factor, 2o) En un experimento factorial, cada efecto principal es estimado con mayor presición como cuando el experimento es desarrollado con un solo factor totalmente a igual número de repeticiones por tratamiento.

Cuando hay interacción entre los factores, también hay ventajas debido a que:

1o) La naturaleza de las interacciones es desconocida así, un diseño factorial es conveniente para evitar conclusiones equivocadas. Ya que el efecto simple de un factor varía de acuerdo a la particular combinación de los otros factores con los cuales se está efectuando, así el experimento no factorial revela el efecto de un factor para esa particular combinación de los otros factores, pero no nos proporciona información para predecir el efecto de ese factor cuando cambiamos la combinación de los otros factores.

Ahora haya o no haya interacción con un experimento factorial los efectos de un factor se estiman con otras combinaciones de los demás factores en el experimento; así las conclusiones que se obtienen están sobre un amplio rango de condiciones.

En si, estas condiciones se cumplen cuando hay dos o más factores involucrados.

I.3 La Hipótesis de Normalidad.

Los niveles de significancia tabulados para las pruebas usadas en el análisis de variancia - las pruebas F y t - estan hechas en base a la hipótesis de que las respuestas observadas en diferentes ensayos de una combinación de tratamientos están distribuídas normalmente con variancia común σ_o^2.

I.4 Ortogonalidad.

Es deseable al hacer un experimento simétrico que al probar todos los factores, todas las combinaciones de tratamientos posibles, se utilicen el mismo número de veces, esto simplifica los cálculos y la interpretación de los resultados, además de que tienen mayor eficiencia. La propiedad que a los diseños da estas ventajas es conocida como Ortogonalidad.

Consideraremos experimentos en los cuales cualquier combinación de tratamientos es probada el mismo número de veces, es decir, experimentos factoriales completos con o sin repetición. La ortogonalidad nos asegura que todos los efectos principales y las interacciones pueden ser estimadas en forma independiente sin embrollo.

Considere dos funciones lineales de las observaciones $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$:

$$E_1 = a_1x_1+a_2x_2+ \ldots\ldots +a_nx_n$$
$$E_2 = b_1x_1+b_2x_2+ \ldots\ldots +b_nx_n \qquad (1)$$

donde las a's y las b's toman cualquier valor, no todos cero. Un efecto principal o interacción es calculado de los datos en el sentido de que es un conjunto de combinaciones lineales de las observaciones con coeficientes $\pm$ 1. Una condición necesaria y suficiente para que dos funciones lineales sean ortogonales entre si es

$$\Sigma\, a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0 \qquad (2)$$

Veamos que las funcipnes utilizadas para medir los efectos en el análisis de un experimento factorial son ortogonales entre si. Las funciones que miden los efectos están sujetos a otra condición. Uno de esos efectos es la media y como todas las funciones que miden los efectos son ortogonales entre si, deberán ser ortogonales a la media. Esto significa que si hacemos una codificación de los datos para simplificar los calculos de los efectos diferentes de la media, estos permanecen inalterados. La media general es

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\,(x_1+x_2+\;.....\;+\;x_n)$$

Cada coeficiente es $\frac{1}{n}$, esto es, comparando $\overline{X}$ con E_1 y usando la condición (2)

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \;.....\; + \frac{a_n}{n} = 0$$

$\therefore\ \Sigma\ a_i = 0$ analogamente $\Sigma\ b_i = 0$

Es claro que cualquier función en un conjunto ortogonal puede ser multiplicada por una constante arbitraria sin afectar su ortogonalidad.

La implicación física de la ortogonalidad es que la estimación de cualquier efecto permanece inalterada por cambios en uno o más de los efectos. La independiencia de los efectos en un experimento ortogonal podemos mostrarla para un diseño 2^2 por medio de la siguiente tabla de respuestas:

Y_{00}	Y_{10}
Y_{01}	Y_{11}

Los efectos principales e interacciones estan dadas por

$$A = -Y_{00}+Y_{10}-Y_{01}+Y_{11}$$
$$B = -Y_{00}-Y_{10}+Y_{01}+Y_{11}$$
$$AB = Y_{00}+Y_{10}-Y_{01}+Y_{11}$$

Supongamos que el efecto principal A es incrementado en una cantidad f y el de B en una cantidad g, es decir que las respuestas con nivel alto de A son incrementadas en f y las de nivel alto de B en g, así, las respuestas son

Y_{00}	$Y_{10}+f$
$Y_{01}+g$	$Y_{11}+f+g$

Los efectos totales calculados como antes son

$$A_1 = A + 2f$$
$$B_1 = B + 2g$$
$$A_1B_1 = AB$$

Los cambios en el efecto de A no afecta el computo del efecto de B, y viceversa. La interacción permanece inalterada. Esto es verdadero para todos los experimentos factoriales balanceados y completos.

I.5 Aleatorización.

En cualquier experimento los factores que causan variación en los resultados son de dos tipos.

a) Aquellos que varían deliberadamente
b) Aquellos que no pueden ser controlados y los cuales dan lugar a una variancia residual, o error experimental.

El error o variación no controlada, es tratada como una variable aleatoria, suponemos que esta incorrelacionada con cualquiera de las variaciones controladas.

Cuando los datos deben de quedar dispersos en el tiempo o en el espacio una precaución prudente para distribuirlos al azar en el tiempo y en lugares es mediante el uso de digitos aleatorios. Si el experimento se repite debe aleatorizarse nuevamente, pues si el plan es copiado del experimento previo se pierde la aleatorización.

I.6 Diseño Experimental.

Es conveniente enfatizar que para hacer el análisis de un diseño factorial se requiere primero el diseño de tratamientos que es la especificación acerca de como se constituyen las combinaciones de tratamientos, en otros terminos, es dar la selección de niveles de cada uno de los factores que forman cada tratamiento que se considera en el diseño. Así hablaremos de un diseño factorial p^n (p=2,3,5,7, etc.). Posteriormente, se considera el Diseño experimental que es la especificación de como se asignan los tratamientos a las unidades experimentales. Así hablaremos que el diseño de tratamientos es completamente al azar, en bloques al azar, con confusión total o parcial, etc.

I.7 Otros Aspectos del Diseño Factorial.

Cuando en un diseño factorial se investigan 3 ó más efectos simultaneamente, el diseño factorial puede ser grande, de tal manera que sea difícil tener condiciones uniformes, digamos una colección homogenea de materia prima, mismas condiciones climatológicas, etc. Describiremos la manera más conveniente de manejar situación, la cuál es en si el dividir los datos experimentales en bloques en una forma conveniente, de tal manera que los efectos principales y sus interacciones más importantes sean investigadas bajo condiciones homogeneas. Mientras que la heterogeneidad introducida como consecuencia de el tamaño del experimento afecte solo a las interacciones que no tienen importancia. Los experimentos que tienen este objetivo son los diseños factoriales con confusión total o parcial de algunos de sus efectos.

El diseño factorial completo, es aquel en el cuál todas las posibles combinaciones de tratamientos de todos los niveles de los diferentes factores son investigados. Además de que se requiere una gran cantidad de unidades experimentales, incluye un buen número de pruebas cuando el número de factores es mayor o igual a 5. Veremos que es posible investigar los efectos principales, de los factores y de sus más importantes interacciones con solo una fracción de el número total de u.e.* requeridas para el experimento factorial completo.

u.e.* Unidades experimentales.

CAPITULO 2

EL EXPERIMENTO FACTORIAL 2^n

2.1 Introducción.

Consideremos n factores, todos a dos niveles, habrá $\binom{n}{1} = n$ efectos principales , $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ interacciones de dos factores ,.....

$$\ldots, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)} \text{ interacciones de k factores } (0 \leqslant k \leqslant n,\ n \geqslant 1)$$

En este tipo de experimento son usuales dos notaciones .

1o) La de Yates, que utiliza letras minúsculas.
2o) La de números, que nos proporciona una estructura matemá tica conocida como Teoría de Grupos.

Así en el factorial 2^2 se consideran dos factores llamemoslos A y B cada uno a dos niveles, que se denotan por 0 ó nivel bajo 1 ó nivel alto que se cambian formando cuatro tratamientos los cuales se denotan por cualquiera de los dos siguientes símbolos

Tratamiento	Notación de Yates	Notación Numérica	Factor A a su nivel	Factor B a su nivel
1	(1)	00	Bajo	Bajo
2	a	10	Alto	Bajo
3	b	01	Bajo	Alto
4	ab	11	Alto	Alto

Los ocho tratamientos de un factorial 2^3 reciben las siguientes notaciones

Tratamiento	Notación de Yates	Notación Numérica A B C
1	(1)	0 0 0
2	a	1 0 0
3	b	0 1 0
4	ab	1 1 0
5	c	0 0 1
6	ac	1 0 1
7	bc	0 1 1
8	abc	1 1 1

Las ideas del factorial 2^2 y 2^3 se extienden para el caso general. Las letras A, B, C.,,, denotan los factores. En la notación de Yates las letras a, b, c,... denotan el segundo nivel (también llamado nivel alto) en el cuál el factor correspondiente ocurre. El primer nivel (o nivel bajo) se denota por la ausencia de las letras correspondientes. En la notación numérica, los tratamientos se denotan por una sucesión de ceros y unos, el orden en el que aparescan tales números nos indica el nivel del factor al que corresponde, por ejemplo, 0110 nos indica que en este tratamiento se combinan el nivel bajo de A, alto de B, alto de C y bajo de D.

2.2 Notaciones para Totales.

2.2.1 En un diseño factorial 2^2. El símbolo 00 ó el (1) denota el total de todas las unidades experimentales que reciben el tratamiento 00 ó (1). Observece que la notación que se usa para un tratamiento es la misma que se usa para su total. Así los totales de los otros tratamientos se denotan por 10. ó (a), 01 ó (b), 11 ó (ab) respectivamente.

Los efectos se definen en base a totales de tratamientos

$(A)_o = (A)_{i=o} = (b) + (1) = 01+00$: total del tratamiento A a su nivel bajo

$(A)_1 = (A)_{i=1} = (a) + (ab) = 10+11$

$(B)_{j=o} = (a) + (1) = 10+00$

$(B)_{j=1} = (b) + (ab) = 01+11$

$(AB)_{i+j=o} = (1) + (ab) = 00+11$

$(AB)_{i+j=1} = (a) + (b) = 10+01$

donde la suma i+j se toma en base a modulo 2(∴ se toma el residuo al dividir i+j entre 2)

2.2.2 En un 2^3

El símbolo 001 ó (c) denota el total de todas las unidades experimentales que reciben el tratamiento 001 ó (c). En forma análoga se denotan los totales de los siete tratamientos restantes. Los efectos principales e interacciones se definen en base a las siguientes sumas de totales de tratamientos. Las sumas de los indices es módulo 2.

$(A)_{i=o} = (1)+(b)+(c)+(bc) = 000+010+001+011$

$(A)_{i=1} = (a)+(ab)+(ac)+(abc) = 100+110+101+111$

$(B)_{j=o} = (1)+(a)+(c)+(ac) = 000+100+001+101$

$(B)_{j=1} = (b)+(ab)+(bc)+(abc) = 010+110+011+111$

$(AB)_{i+j=o} = (1)+(ab)+(c)+(abc) = 000+110+001+111$

$(AB)_{i+j=1} = (a)+(b)+(ac)+(bc) = 100+010+101+011$

$(C)_{k=o} = (1)+(a)+(b)+(ab) = 000+100+010+110$

$(C)_{k=1} = (c)+(ac)+(bc)+(abc) = 001+101+011+111$

$(AC)_{i+k=0} = (1)+(b)+(ac)+(abc) = 000+010+101+111$

$(AC)_{i+j=1} = (a)+(ab)+(c)+(bc) = 100+110+001+011$

$(BC)_{j+k=0} = (1)+(a)+(bc)+(abc) = 000+100+011+111$

$(BC)_{j+k=1} = (b)+(ab)+(c)+(ac) = 010+110+001+101$

$(ABC)_{i+j+k=0} = (1)+(ab)+(ac)+(bc) = 000+110+101+011$

$(ABC)_{i+j+k=1} = (a)+(b)+(c)+(abc) = 100+010+001+111$

Para un factorial 2^n , se extiende la idea del factorial 2^2 y 2^3.

2.3 Efectos Principales e Interacciones.

En general se obtienen por medio de diferencias de dos totales. Así el efecto del factor A cuando se consideran r repeticiones es

$$A = \frac{1}{2^{n-1}r} [(A)_{i=1} - (A)_{i=0}]$$

Se supone que cada tratamiento se observa o se estudia en r unidades experimentales, una por cada repetición. Así el número total de unidades experimentales es $2^n r$. Los n-1 efectos principales restantes se definen de manera semejante.

Las $\binom{n}{2}$ interacciones de dos factores se obtienen en forma semejante a la de AB y CD que se describe a continuación

$$AB = \frac{1}{2^{n-1}r} \left[(AB)_{i+j=0} - (AB)_{i+j=1} \right]$$

$$CD = \frac{1}{2^{n-1}r} \left[(CD)_{k+l=0} - (CD)_{k+l=1} \right]$$

Donde $(AB)_{i+j=0}$ es el total de tratamientos donde i+j=0 módulo 2.

Las $\binom{n}{3}$ interacciones de 3 factores tienen efectos semejantes al de ABC dado por

$$ABC = \frac{1}{2^{n-1}r} \left[(ABC)_{i+j+k=1} - (ABC)_{i+j+k=0} \right]$$

Las $\binom{n}{4}$ interacciones de 4 factores tienen efectos semejantes al de ACDZ dado por

$$ACDZ = \frac{1}{2^{n-1}r} \left[(ACDZ)_0 - (ACDZ)_1 \right]$$

Observece que si el número de factores es impar la diferencia que se debe considerar es $(\ )_1 - (\ )_0$, mientras que si el número de factores es par es $(\ )_0 - (\ )_1$.

Observece además que la suma de indices es suma módulo 2, que la notación que se usa para una combinación de tratamientos es la misma que se utiliza para el total de ellos.

2.4 Suma de Cuadrados. (SC).

Hay varias formas de obtener la suma de cuadrados el procedimiento más rápido es el de contrastes

Algunos ejemplos son:

$$SC_A = \frac{1}{2^n\ r} \left[(A)_1 - (A)_0 \right]^2 \qquad SC_{ACF} = \frac{1}{2^n\ r} \left[(ACF)_1 - (ACF)_0 \right]^2$$

$$SC_{AC} = \frac{1}{2^n r} \left[(AC)_0 - (AC)_1 \right]^2 \qquad SC_{ACEZ} = \frac{1}{2^n r} \left[(ACEZ)_0 - (ACEZ)_1 \right]$$

La suma de cuadrados del total se obtiene por medio de las "reglas"*. Esta suma tendrá $2^n r-1$ grados de libertad, veamos algunos ejemplos

Para un 2^2 el Modelo es $Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + E_{ijk}$ $\quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad k=1,2,\ldots r$

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{r} Y^2_{ijk} - \frac{Y^2_{\cdots}}{4r}$$

Para un 2^3 el modelo es

$$Y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + C_k + (AC)_{ik} + (BC)_{jk} + (ABC)_{ijk} + E_{ijkl} \qquad i=1,2 \quad j=1,2 \quad k=1,2 \quad l=1,2,\ldots r$$

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{r} Y^2_{ijkl} - \frac{Y^2_{\cdots}}{8r}$$

La suma de cuadrados de tratamientos tiene 2^n-1 g.1. se descompone en 2^n-1 sumas de cuadrados con 1 g.1 cada una atribuibles a los diferentes efectos de factores. Esta descomposición es independiente del diseño experimental. Suponiendo un diseño experimental en bloques al azar, la tabla de A.de V. queda de la siguiente manera.

* Se dan en el apendice

TABLA 2.1 A. de V. Diseño 2^n en Bloques al Azar

F.V.		g.l.	SUMA DE CUADRADOS
Bloques		$r-1$	SCBLOQUES
Tratamientos		2^n-1	SCT
	A	1	SCA
C	B	1	SCB
	C	1	SCC
n Efectos Principales	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	Z	1	SCZ
	AB	1	SC(AB)
$\binom{n}{2}$ Interacciones de dos factores	AC	1	SC(AC)
	..	.	.
	..	.	.
	...	.	.
.. ..	...	.	.
	...	.	.
$\binom{n}{n-1}$ Interacciones n-1 factores	.....	.	.
	.....	.	.
	.....	.	.
Interacción ABC....Z		1	
Error		$(2^n-1)(r-1)$	
Total		$2^n r-1$	

Si todos los efectos son fijos, los CM, se prueban contra el CM del error. En caso de tener efectos aleatorios es necesario recurrir a las reglas de E(CM)* y en base a ellas planear las pruebas de hipótesis.

Ejemplifiquemos las ideas anteriores con un factorial 2^4 en donde se considera los rendimientos por parcela (en Kg por surgo de 3 mts., de un total de 6 cosechas). Los factores que se consideran son

a=Estiercol (abono), n=Nitrógeno, f=Fósforo, p=Potasio

Se hicieron cuatro repeticiones aleatorizadas (Bloques), los datos [Cochran [ ] pag. 188] codificados son los siguientes.

TABLA 2.2 Rendimiento por Parcela.

	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Total	
(1)	-18	-7	-23	-31	-79	$Y_{0000\cdot}$
a	- 3	-9	- 2	- 5	-19	$Y_{1000\cdot}$
n	-24	-14	-26	-32	-96	$Y_{0100\cdot}$
an	11	26	6	14	57	$Y_{1100\cdot}$
f	-21	-11	-23	-22	-77	$Y_{0010\cdot}$
af	1	-16	-10	- 2	-27	$Y_{1010\cdot}$
nf	-14	-19	-18	-20	-71	$Y_{0110\cdot}$
anf	26	15	20	13	74	$Y_{1110\cdot}$
p	-15	- 8	6	-15	-32	$Y_{0001\cdot}$
ap	13	- 9	10	3	17	$Y_{1001\cdot}$
np	30	18	25	17	90	$Y_{0101\cdot}$
anp	50	18	37	16	121	$Y_{1101\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

* Se dan en el apendice.

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
fp	-10	-6	3	-14	-27	$Y_{0011\cdot}$
afp	14	-11	25	22	50	$Y_{1011\cdot}$
nfp	55	49	24	23	151	$Y_{0111\cdot}$
anfp	40	32	39	51	162	$Y_{1111\cdot}$

Con estos datos se efectúa el análisis de variancia usual del diseño completamente al azar con 16 tratamientos y cuatro repeticiones. El efecto de tratamientos se descompone en 15 contrastes ortogonales cada un grado de libertad, representando a los efectos principales y a sus interacciones.

2.5 Cálculo del Efecto Factorial Total.

Para obtener los totales de los efectos se consideran tres formas de hacerlo

I) El método de Yates. Con el cual podemos calcular los efectos factoriales sin necesidad de escribir sus expresiones matemáticas. Este método es conveniente cuando se tiene interés en estudiar la mayor parte de los efectos factoriales. Si solamente interesa una minoría de tales efectos, en cálculo por separado podría ahorrar tiempo.

II) Mediante una tabla que resume los cálculos para los 15 contrastes que se consideraran.

III) Mediante tablas de doble y triple entrada, en donde se obtienen los totales para las combinaciones de tratamientos considerados. Es importante notar que la idea que se utiliza para obtener dichos totales se puede extender a diseños factoriales de orden mayor.

Es conveniente observar que basta una de estas tres formas de obtener los efectos totales, pero que en este trabajo se hacen las tres para ejemplificar dichas formas de hacerlo.

2.5.1 Método de Yates.

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla.

TABLA 2.3 Método de Yates.

	Total de Tratamientos	(1)	(2)	(3)	Efecto Total (4)	
(1)	-79	-98	-137	-238	294	T
a	-19	-39	-101	532	576	A
n	-96	-104	196	408	682	N
an	57	3	336	168	104	AN
f	-77	-15	213	166	176	F
af	-27	211	195	516	- 10	AF
nf	-71	23	80	188	112	NF
anf	74	313	88	-84	- 46	ANF
Total	-	294	870	1656	5088	
p	-32	60	59	36	770	P
ap	17	153	107	140	-240	AP
np	90	50	226	-18	350	NP
anp	121	145	290	8	-272	ANP
fp	-27	49	93	48	104	FP
afp	50	31	95	64	26	AFP
nfp	151	77	-18	2	16	NFP
anfp	162	11	-66	-48	-50	ANFP
Impares	-141	42	712	592	5704	
Pares	435	828	944	1296	88	
Total	294	870	1656	1888	1792	

En esta tabla se aplica el método de Yates bajo los siguientes pasos

1. Se escriben los tratamientos en orden sistemático ∴ las letras a,n,f,p son consideradas en este orden, al introducir cualquier letra, esta va seguida de las combinaciones de los tratamientos previos, así p va seguido de ap, np, fp, anfp.

2. En la columna de "total de tratamientos", agrupe los datos por parejas. En la tabla quedarán 8 parejas (-79, -19) (-96, 57) .... (151, 162). La parte superior de la columna (1) se obtiene sumando estas parejas.
   -98=-79+(-19) -39=-96+57 . etc.

Para obtener la parte inferior de la columna (1), al segundo término de cada pareja restele el primero.
   60=-19-(-79) 159=57-(-96)

3. Con el mismo procedimiento aplicado a la columna (1) obtenga la columna (2); de la columna (2) obtenga la (3) y finalmente de la (3) obtenga la (4), la cual contiene el efecto factorial total. El primer número de la columna (4) es el gran total T, con n factores elproceso continúa hasta la columna (n).

Comprobación.

La suma de cuadrados de los totales de los efectos factoriales dividida entre $2^n r$, deberá ser igual a la suma de cuadrados de tratamientos calculados en la forma usual dada por las reglas*

Comprobaciones intermedias. En la columna de "Totales de tratamientos" sume separadamente los términos impares y los térmi

* Se dan en el apendice

nos pares.

Impares	-79+(-96)+.....+151 = -141
Pares	-19+57+........+162 = +435

En la columna (1) sume su parte superior. Este total da 294 el cual es el total de la columna previa1

Una segunda comprobación es dado por

Total de col. (1) - Total de la parte superior de la col. (1) = Pares - Impares de la col. de "totales de tratamientos"

$\therefore$ 870 - 294 = 435 - (-141)

Analogamente, la columna (2) comprueba a la col. (1) y la (3) a la (4)

2.5.2 La siguiente tabla resume los calculos para obtener los totales de los efectos principales y sus interacciones.

TABLA 2.4

	-79	-32	-77	-27	-96	90	-71	-151	-19	17	-27	50	57	121	74	162			
Efecto	$Y_{0000\cdot}$	$Y_{0001\cdot}$	$Y_{0010\cdot}$	$Y_{0011\cdot}$	$Y_{0100\cdot}$	$Y_{0101\cdot}$	$Y_{0110\cdot}$	$Y_{0111\cdot}$	$Y_{1000\cdot}$	$Y_{1001\cdot}$	$Y_{1010\cdot}$	$Y_{1011\cdot}$	$Y_{1100\cdot}$	$Y_{1101\cdot}$	$Y_{1110\cdot}$	$Y_{1111\cdot}$	Suma de +	Suma de -	Efecto Total
Total	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	294	0	294
A	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	435	-141	576
N	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	488	-194	682
AN	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	199	95	104
F	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	235	59	176
AF	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	142	152	-10
NF	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	203	91	112
ANF	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	124	170	-46
P	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	532	-238	770
AP	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	27	267	-240
NP	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	322	-28	350
ANP	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	11	283	-272
FP	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	199	95	104
AFP	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	160	134	26
NFP	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	155	139	16
ANFP	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	122	172	-50

2.5.3 Las siguientes tablas de doble, triple y cuadruple entrada resumen los calculos para obtener los totales de los efectos principales y sus interacciones.

2.5.3.1 Interacción ANFP

Para calcular el efecto total de la interacción ANFP consideremos la tabla 2.5

TABLA 2.5 Interacción ANFP

	P											
	0						1					
F	0			1			0			1		
N	N			N			N			N		
A	j=0	j=1	$(ANFP)^1_1 = 115$	j=0	j=1	$(ANFP)^2_0 = 98$	j=0	j=1	$(ANFP)^3_0 = 107$	j=0	j=1	$(ANFP)^4_1 = 201$
i=0	-79	-96	-175	-77	-71	-148	-32	90	58	-27	151	124
i=1	-19	57	38	-27	74	47	17	121	138	50	162	212
	-98	-39	$= -22$ $(ANFP)^1_0$	-104	3	$= -3$ $(ANFP)^2_1$	-15	211	$=89$ $(ANFP)^3_1$	23	313	$=135$ $(ANFP)^4_0$

$(ANFP)_0 = (ANFP)^1_0 + (ANFP)^2_0 + (ANFP)^3_0 + (ANFP)^4_0 = -22-98+107+135 = 122$
$(ANFP)_1 = -115-3+89+201 = 172$

Efecto total de ANFP $= (ANFP)_0 - (ANFP)_1 = 122-172 = -50$

Observemos que los efectos entran a la tabla en orden sistemático, es decir, en el orden ANFP. Esto nos permite acomodar los 16 datos de la tabla 2.2 en forma de "sierra". La tabla tiene cuatro cuadros, analicemos el primero el cual contiene a los datos $Y_{0000\cdot}$, $Y_{1000\cdot}$, $Y_{0100\cdot}$, $Y_{1100\cdot}$.

0000	0100
1000	1100

En los elementos de la diagonal principal, es claro que i+j+k+l=0 mod(2), es decir son términos que contribuyen al efecto total de $(ANFP)_0$, por este motivo lo denotamos $(ANFP)_0^1$ efecto total de $(ANFP)_0$, en el primer cuadro, que en este caso toma el valor de -79+57=22. Analogamente, en la diagonal secundaria i+j+k+l=1 mod(2), así $(ANFP)_1^1$ = -19-96=-115.

Los restantes tres cuadros tienen una interpretación semejante.

2.5.3.2 Interacción NFP. En la tabla 2.5, si sumamos sobre los niveles de A (sobre las columnas) obtenemos los totales que necesitamos para la interacción NFP. Observemos que nuevamente acomodamos los 8 subtotales en forma de "sierra".

P / F / N	P: l=0, F: k=0	k=1		P: l=1, F: k=0	k=1	
	k=0	k=1	$(NFP)_1^1$=-143	k=0	k=1	$(NFP)_0^2$=234
j=0	-98	-104		-15	25	
j=1	-39	3		221	313	
			$(NFP)_0^1$=-95			$(NFP)_1^2$=298

$(NFP)_0$=-95+234 = 139
$(NFP)_1$=-143+298= 155
Efecto total de NFP = (NFP) - (NFP) = 155-139 = 16

<u>2.5.3.3 Interacción AFP.</u> En la tabla 2.5, si sumamos sobre los niveles de N (∴ sobre los renglones de cada cuadro) obtenemos los totales que necesitamos para la interacción AFP. Nuevamente los datos se acomodan en forma de "sierra"

TABLA 2.6 Interacción AFP

P	l=0					
F	F			F		
A	k=0	k=1	$(AFP)_1^1=-110$	k=0	k=1	$(AFP)_0^2=262$
i=0	-175	-148		58	124	
i=1	38	47		138	212	
			$(AFP)_0^1=-128$			$(AFP)_1^2=270$

$(AFP)_0 = -128+262 = 134$
$(AFP)_1 = -110+270 = 160$
Efecto total de AFP = $(AFP)_1-(AFP)_0=160-134=26$

<u>2.5.3.4. Interacción ANP.</u> En la tabla 2.5, sumemós sobre los niveles de F. Así -79-77=-156,....., 67=17+50, etc.

Estos datos los resumimos en la tabla 2.7

TABLA 2.7 Interacción ANP

P	P					
	l=0			l=1		
	N			N		
A	j=0	j=1	$(ANP)_1^1=-213$	j=0	j=1	$(ANP)_0^2=308$
i=0	-156	-167		-59	241	
i=1	-46	131		67	283	
			$(ANP)_0^1=-25$			$(ANP)_1^2=224$

$(ANP)_0 = -25+308 = 283$
$(ANP)_1 = -213+224= 11$
Efecto total de ANP = $(ANP)_1-(ANP)_0 = -272$

2.5.3.5 Interacción ANF. En la tabla 2.5, sumemos sobre los niveles de P. Así -79-32 = -11,...,-27+50=23, etc.

TABLA 2.8 Interacción ANF

N	F					
	k=0			k=1		
	N			N		
A	j=0	j=1	$(ANF)^1_1=-8$	j=0	j=1	$(ANF)^2_0=103$
i=0	-111	-6		-104	80	
i=1	-2	178		23	236	
			$(ANF)^1_0=67$			$(ANF)^2_1=132$

$(ANF)_0=170$
$(ANF)_1=124$

2.5.3.6 Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos las tablas para las interacciones de dos factores, que a su vez nos sirven para obtener los totales de los efectos principales.

TABLA 2.9 Calculo del efecto total de efectos principales e interacciones de 2 factores

A, N y su interacción AN

A \ N	j=0	j=1	$(AN)_1=95$
i=0	-215	74	$(A)_o=-141$
i=1	21	414	$(A)_1=435$
	-194	488	
	$(N)_o$	$(N)_1$	$(AN)_o=199$

A, F y su interacción AF

A \ F	k=0	k=1	$(AF)_1=152$
i=0	-117	-24	$(A)_o=-141$
i=1	176	259	$(A)_1=435$
	59	235	
	$(F)_o$	$(F)_1$	$(AF)_o=142$

A, P y su interacción AP

A \ P	l=0	l=1	$(AP)_1=267$
i=0	-323	182	$(A)_o=-141$
i=1	85	350	$(A)_1=435$
	-238	532	
	$(P)_o$	$(P)_1$	$(AP)_o=27$

N, F y su interacción NF

N \ F	k=0	k=1	$(NF)_1=91$
j=0	-113	-81	$(N)_o=-194$
j=1	172	316	$(N)_1=488$
	59	235	
	$(F)_o$	$(F)_1$	$(NF)_o=203$

N, P y su interacción NP

N \ P	l=0	l=1	$(NP)_1=28$
j=0	-202	8	$(N)_o=-194$
j=1	-36	524	$(N)_1=488$
	-238	532	
	$(P)_o$	$(P)_1$	$(NP)_o=322$

F, P y su interacción FP

F \ P	l=0	l=1	$(FP)_1=95$
k=0	-137	196	$(F)_o=59$
k=1	-101	336	$(F)_1=235$
	-238	532	
	$(P)_o$	$(P)_1$	$(FP)_o=199$

De los cuadros de la tabla 2.9 obtenemos sus efectos totales

Efecto o Interacción	Efecto Total
A	$576=(A)_1-(A)_0=435-(-141)$
N	$682=(N)_1-(N)_0=488-(-194)$
AN	$104=(AN)_0-(AN)_1=199-95$
F	$176=(F)_1-(F)_0=235-59$
AF	$-10=(AF)_0-(AF)_1=142-152$
NF	$112=(NF)_0-(NF)_1=203-91$
P	$770=(P)_1-(P)_0=532-(-238)$
AP	$-240=(AP)_0-(AP)_1=27-267$
NP	$350=(NP)_0-(NP)_1=322-(-28)$
FP	$104=(FP)_0-(FP)_1=199-95$

Así pues, teniendo los efectos totales por cualquiera de las tres formas indicadas anteriormente, pasemos a

La Suma de cuadrados de los efectos

Por el método de contrastes, algunos ejemplos son

$$SC_A = \frac{((A)_1-(A)_0)^2}{2^n r} = \frac{(576)^2}{64} = 5184$$

$$SC_{NP} = \frac{((NP)_0-(NP)_1)^2}{2^n r} = \frac{(350)^2}{64} = 1914.0625$$

$$SC_{FP} = \frac{((FP)_0-(FP)_1)^2}{2^n r} = \frac{(104)^2}{64} = 169$$

$$SC_{ANF} = \frac{((ANF)_1-(ANF)_0)^2}{2^n r} = \frac{(-46)^2}{64} = 33.0625$$

$$SC_{ANFP} = \frac{((ANFP)_0-(ANFP)_1)^2}{2^n r} = \frac{(-50)^2}{64} = 39.0625$$

En la forma análoga se calculan las S.C. de los efectos restantes. Sumando estas 15 SC de los efectos, obtenemos la S.C. de tratamientos:

$$SC_{Trat} = SC_A+SC_N+\ldots+SC_{ANFP} = 26,791.9375$$

Las sumas de cuadrados del total de los bloques se obtienen por las "reglas".

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\sum_{r=1}^{4} Y^2_{ijklr} - \frac{T^2}{2^n r} =$$

$$= (-18)^2+(-3)^2+(-24)^2+\ldots+23^2+51^2-\frac{(294)^2}{64} = 31,359.4$$

$$SC_{BLOQUES} = \sum_{r=1}^{4} \frac{Y^2_{\ldots\ldots r}}{2^n} - \frac{T^2}{2^n r} = \sum_{r=1}^{4} R_r^2 - \frac{T^2}{2^n r}$$

donde $R_r = Y_{\ldots\ldots r}$ = total de la repetición r, r=1,2,3,4.

$$SC_{BLOQUES} = \frac{1}{16}(135^2+48^2+93^2+18^2) - \frac{294^2}{64} = 495.3$$

La SC del error la obtenemos por diferencia.

$$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_{TRAT} - SC_{BLO} = 4074.2$$

Todo esto se resume en la siguiente

TABLA 2.10 Análisis de Variancia para el diseño Factorial 2^4 de fertilizantes

F.V.	G.L.	SC	CM	
Repeticiones	3	495.3		
Tratamientos	15	26,791.9375	6.576	
A	1	5184	5184	**
N	1	7267.5625	7267.5625	**
AN	1	169	169	
F	1	484	484	*
AF	1	1.5625	1.5625	
NF	1	196	196	
ANF	1	33.0625	33.0625	
P	1	9264.0625	9264.0625	**
AP	1	900	900	**
NP	1	1914.0625	1914.0625	**
ANP	1	1156	1156	**
FP	1	169	169	
AFP	1	10.5625	10.5625	
NFP	1	4	4	
ANFP	1	39.0625	39.0625	
Error	45	4074.2		
Total	63	31359.4		

* Denota significancia con un nivel de 5%

** Denota significancia con un nivel de 1%

2.6 Factorial 2^n n=2,3,4

Analicemos el modelo, la distribución de las observaciones y el análisis de variancia para el diseño factorial 2^n, n=2,3,4. en bloques al azar.

2.6.1 Factorial 2^2 en bloques al azar

Modelo $$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_i + (AB)_{ij} + \beta_k + E_{ijk}$$

Donde A_i efecto del factor A, i=1,2
B_j efecto del factor B, j=1,2
$(AB)_{ij}$ efecto de la interacción entre A y B
β_k efecto del bloque k=1,2,3,...,r.

Repetición I (Bloque I)

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Análisis de variancia para el factorial 2^2 en bloques (repeticiones) al azar

F.V.	G.L.	SC	CM
Tratamientos	3		
A	1	SC_A	
B	1	SC_B	
AB	1	SC_{AB}	
Bloques	r-1		
Error	3(r-1)		
Total	4r-1		

2.6.2 Factorial 2^3 en bloques al azar

Modelo

$Y_{ijkl} = \mu+A_i+B_j+(AB)_{ij}+C_k+(AC)_{ik}+(BC)_{jk}+(ABC)_{ijk}+\beta_l+E_{ijkl}$

donde $i,j,k\epsilon\{0,1\}$ $l=1,2,3,\ldots n$

A_i, B_j, C_k denotan el efecto del factor A, B y C respectiva, mente; $(AB)_{ij}$, $(AC)_{ik}$, $(BC)_{jk}$ denotan el efecto de interacción entre los factores A y B, A y C, B y C respectivamente, β_l denota el efecto de bloque y E_{ijkl} el error de medición.

Repetición I (Bloque I) (8 observaciones)

ABC
000
001
010
011
100
101
110
111

Análisis de variancia para un factorial 2^3 en bloques al azar

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.
Tratamientos	7		
A	1	SC_A	
B	1	SC_B	
C	1	SC_C	
AB	1	SC_{AB}	
AC	1	SC_{AC}	
BC	1	SC_{BC}	
ABC	1	SC_{ABC}	
⋮	⋮	⋮	

⋮	⋮	⋮
Bloques	r-1	
Error	7(r-1)	
Total	8r-1	

2.6.3 Factorial 2^4 en bloques al azar

Modelo

$$Y_{ijklm} = \mu + A_i + B_j + C_k + D_l + (AB)_{ij} + (AC)_{ik} + (AD)_{il} + (BC)_{jk} + (BD)_{jl} + (CD)_{kl}$$
$$+ (ABC)_{ijk} + (ABD)_{ijl} + (ACD)_{ikl} + (BCD)_{jkl} + (ABCD)_{ijkl} + \beta_m + E_{ijklm}$$

Donde $i,j,k,l \in \{0,1\}$ $m=1,2,\ldots n.$

A_i, B_j, C_k, D_l denotan el efecto del factor A,B,C,D respectivamente, los elementos encerrados en paréntesis denotan el efecto de interacción de los factores considerados; β_m el efecto del bloque y E_{ijklm} el error de medición

Repetición I (Bloque I. consta de 16 u.e*)

ABCD	ABCD
0000	1000
0001	1001
0010	1010
0011	1011
0100	1100
0101	1101
0110	1110
0111	1111

*u.e. unidades experimentales

Análisis de variancia para un factorial 2^4 en bloques al azar

F.V.	G.L.
Tratamientos	15
A	1
B	1
C	1
D	1
AB	1
AC	1
AD	1
BC	1
BD	1
CD	1
ABC	1
ABD	1
ACD	1
BCD	1
ABCD	1
Bloques	r-1
Error	15(r-1)
Total	16r-1

CAPITULO 3

CONFUSION EN EXPERIMENTOS FACTORIALES 2.
(experimentos factoriales en bloques incompletos)

3.1 Introducción.

Para un experimento 2^n es común usar un diseño con 2^p bloques (con p<n) cuando las 2^n combinaciones de tratamientos no pueden aplicarse bajo condiciones homogeneas. Al formar estos bloques ciertos efectos se sacrifican completamente, su número depende de la cantidad de bloques requeridos. Por ejemplo en un factorial 2^3 si no es factible hacer bloques de 8 u.e.* homogeneas, pero si lo es de 4 u.e. un arreglo posible es el siguiente.

TABLA 3.1 Confusión de la interacción ABC en un diseño factorial 2^3

BLOQUE I		BLOQUE II	
0 0 0		1 0 0	
1 1 0	$(ABC)_0$	0 1 0	$(ABC)_1$
1 0 1		0 0 1	
0 1 1		1 1 1	

El esquema se puede repetir, digamos r veces, se generan 2r bloques, aleatorizando los tratamientos en los bloques. El modelo usual es el de bloques al azar.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + E_{ij}$$

Si suponemos efecto aditivo en el modelo, este efecto se cancela cuando formamos todos los contrastes** de todos los efec

* Unidades Experimentales

** Un contraste C_m es una combinación lineal de totales de tratamientos como sigue. $C_m = \Sigma c_{jm} Y_{j\cdot}$ donde $\Sigma c_{jm} = 0$

tos, excepto en ABC. Para ilustrar consideremos el siguiente ejemplo, sea x la contribución a los tratamientos debida a la diferencia entre bloques. Escribamos los tratamientos como se indica en la tabla 3.1

TABLA 3.2

BLOQUE I
0 0 0
1 1 0
1 0 1
0 1 1

BLOQUE II
1 0 0 + x
0 1 0 + x
0 0 1 + x
1 1 1 + x

Observemos que el contraste ABC (o efecto total de ABC) es también el contraste que compara los dos bloques y es dado por

$$(100+x)+(010+x)+(001+x)+(111+x)-000-110-101-011 =$$
$$= (ABC)_1-(ABC)_0+4x = (ABC)+4x$$

Así pues, medimos el efecto ABC más el efecto de bloque y no hay manera de separar el efecto de la interacción ABC de bloques. Decimos que la interacción ABC está completamente confundida con bloques. Así la información sobre ABC es sacrificada.

El efecto de bloques se cancela al formarse los totales de los otros efectos. Así el efecto total de A esta dado por

$$(111+x)+(100+x)+110+101-(010+x)-(001+x)-011-000 = (A)_1-(A)_0 = (A).$$

como en el caso del diseño completamente al azar. Así pues, el efecto total de A no se ve afectado por el hecho de tener bloques incompletos esto es la ortogonalidad entre el efecto A y el efecto ABC que se confundió con bloques. De manera analoga B, C, AB, AC, BC son ortogonales con ABC y por lo tanto con bloques. Cuando se usan dos bloques, un efecto, usualmente una interacción de alto orden, se selecciona para confundirla con bloques.

Los efectos totales de A, B, C, AB, AC y BC y sus sumas de cuadrados son calculados en la forma usual (vista en Cap. 2) ignorando los bloques. Los datos pueden manejarse por cualquiera de los tres métodos descritos en la sección 2.1 para obtener el efecto total de cada tratamiento, y a partir de ellos hacer el análisis de variancia.

TABLA 3.3 A. de V. Factorial 2^3 con confusión total de ABC, r repeticiones.

F.V.	G.L.	
Bloques	2r-1	
Tratamientos ajustados por bloques	6	
A		1
B		1
AB		1
C		1
AC		1
BC		1
Error intrabloque	6(r-1)	
Total	8r-1	

Los calculos de las sumas de cuadrados se hacen en la forma usual, describamos algunos

$$SC_{TOTAL} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} Y_{ijkl}^2 - \frac{T^2}{8r}$$

$$SC_{BLOQUES} = \sum_{i=1}^{2r} \beta_i^2 - \frac{T^2}{8r} \qquad \beta_i = \text{Total del bloque i}$$

$$SC_A = \frac{[(A)_1 - (A)_0]^2}{2^3 r} \qquad SC_B = \frac{[(B)_1 - (B)_0]^2}{2^3 r} \qquad SC_C = \frac{[(C)_1 - (C)_0]^2}{2^3 r}$$

$$SC_{AB} = \frac{[(AB)_0 - (AB)_1]^2}{2^3 r} \quad \text{, etc.}$$

SC_{ERROR} : se obtiene por diferencia.

El bloque conteniendo la combinación de tratamientos 000 es llamado el bloque principal ó subgrupo intrabloque , porque forma un grupo algebráico con respecto a la suma modulo 2, de los números considerados en cada tratamiento. Por ejemplo la posibilidad de cerradura se cumple ya que

(110)+(011) = 121 = 101, (110)+(110) = 220 = 000, etc.

Si el investigador requiere distribuir las combinaciones de los tratamientos en cuatro bloques, debe seleccionar dos efectos. Automáticamente un tercer efecto conocido como su interacción generalizada queda confundida con bloques.

En un factorial 2^n la interacción generalizada se obtiene aplicando la operación binaria, suma de exponentes modulo 2. La media general se denota por $I=A^2=B^2=A^2C^2$ etc.

Por ejemplo, consideremos varias interacciones generalizadas en un 2^4

la de AB y BCD es $AB * BCD = AB^2CD = ACD$
la de AC y ABCD es $AC * ABCD = A^2BC^2D = BD$
la de BCD y ABC es $BCD * ABC = AB^2C^2D = AD$

Estos resultados pueden resumirse de la siguiente manera: "si una repetición de un factorial 2^n se arregla con 4 bloques de 2^{n-2} unidades, se confunden con bloques tres efectos factoriales, de los cuales dos pueden escogerse arbitrariamente, el tercero es su interacción generalizada."

En general, si una repetición de un factorial 2^n se divide en 2^k bloques cada uno con 2^{n-k} unidades. Se deben seleccionar k tratamientos sujetos a la restricción de que ninguno de ellos debe ser interacción generalizada de cualquier grupo de los restantes, habrá (2^k-k-1) efectos adicionales que son las interacciones generalizadas del grupo de efectos seleccionados que también se confunden con bloques. Es usual buscar esquemas de confusión en las que las interacciones de alto orden queden confundidas con bloques.

Para generar los tratamientos que van a los bloques, se construye el bloque principal, que es el bloque donde esta el tratamiento (1) [00 en un 2^2, 000 en un 2^3, 0000 en un 2^4, etc.] A partir de el se construyen los restantes bloques, como se muestra en el siguiente ejemplo.

3.2. Factorial 2^5 en 4 bloques con confusión total de BCDE y ABCD (AE) con 8 u.e. por bloque

Nota. La interacción generalizada es $BCDE*ABCD=AB^2C^2D^2E=AE$ esta anotada entre paréntesis.

TABLA 3.4 Factorial 2^5 con confusión total de BCDE, ABCD (AE)

Bloque I

Subgrupo Intrabloque

$(ABCD)_0$

$(BCDE)_0$

A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Bloque II

$(ABCD)_0$

$(BCDE)_1$

Sume 1 a la posición de E

A	B	C	D	E
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Bloque III

$(ABDE)_1$

$(BCDE)_0$

Sume 1 a la posición de A

A	B	C	D	E
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1

Bloque IV

$(ABCD)_1$

$(BCDE)_1$

Sume 1 a la posición de C

A	B	C	D	E
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1
1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Consideremos i, j, k, l, m = 0,1, que denotan el nivel bajo o nivel alto de A, B, C, D, E respectivamente. Para generar el subgrupo intrabloque construimos un 2^3 sobre A, B y C . (entre lineas punteadas). La columna de D la construimos de tal manera que $i+j+k+l=0 \bmod 2$ [∴ que resulte ser una combinación de tratamientos que sea un sumando del efecto total de $(ABCD)_0$] Finalmente, la columna de E la construimos de tal manera que $j+k+l+m=0 \bmod 2$, observece que las combinaciones de tratamientos cumplen $i+m=0 \bmod 2$ ∴ son sumandos para el efecto total de $(AE)_0$

Desde luego el bloque III también se puede obtener del subgrupo intrabloque sumando 1 a la posición de B (o a la de D, pero no a ambas a la vez).

Ilustremos las ideas anteriores mediante el siguiente ejemplo

2.2.1 Suponga nos interesa estudiar el efecto de cinco factores sobre alguna respuesta con la hipótesis de que las interacciones incluyendo tres, cuatro y cinco factores son negligibles. Dividamos las 32 combinaciones de tratamientos en cuatro bloques en los que confundiremos las combinaciones de tratamientos BCDE y ABCD (y su interacción generalizada BCDE*ABCD=AE). El diseño experimental y las observaciones son dadas en la siguiente tabla.

TABLA 3.5 Datos codificados para un experimento factorial 2^3 en cuatro bloques con confusión total de BCDE, ABCD (AE)

Bloque I	Bloque II
Subgrupo Intrabloque	
$(ABDE)_0$	$(ABCD)_0$
$(BCDE)_0$	$(BCDE)_1$
⋮	⋮

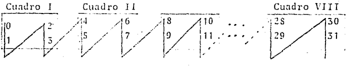
⋮	⋮		⋮
00000	0.6	00001	.7
00110	1.5	00111	1.8
01010	2.4	01011	2.2
01100	1.5	01101	1.7
10011	2.4	10010	2.2
10101	2.1	10100	3.1
11001	2.8	11000	2.0
11111	1.8	11110	2.3

Bloque III $(ABCD)_1$ $(BCDE)_0$		Bloque IV $(ABCD)_1$ $(BCDE)_1$	
10000	2.4	00100	1.9
10110	5.3	00010	3.3
11010	2.1	01110	3.0
11100	2.4	01000	2.6
00011	3.4	10111	5.0
00101	2.7	10001	2.0
01001	1.5	11101	3.1
01111	2.9	11011	2.9

Desde luego, se aleatorizan las u.e. que corresponden a las combinaciones de tratamientos dentro de bloques. El término correspondiente al error lo obtenemos fusionando las interacciones no confundidas de tres, cuatro y cinco factores.

Los efectos totales de cada una de las 31 combinaciones de tratamientos puede obtenerse por cualquiera de los métodos considerados en la sección 2.5. Obtengamoslas por tablas de doble, triple y cuádruple entrada.

Los 32 datos podemos acomodarlos de la siguiente manera: Pensemos en los numeros 0,1,2,3,..., 30,31, acomodados de 4 en 4 en 8 cuadros en forma de "sierra" ∴.



Cualquier combinación de tratamientos es de la forma (i,j,k,l, m) asociemosle el número $i.2^0+ j.2^1+k.2^2+l.2^3+m.2^4$ por ejemplo al $(1,0,1,0,1) \rightarrow 1+2^2+2^4=21$ lo cual quiere decir que al dato 2.1 lo coloquemos en el lugar 21. Una forma más simple de hacer la colocación de los datos y completamente equivalente es la siguiente; usando la notación numérica un 1 en el 5° lugar (m=1) significa que el dato es uno en los cuatro últimos cuadros, un 0 (m=0) en los cuatro primeros cuadros, para esos cuatro cuadors, un 1(0) en el 4° lugar (l=1,(0)), significa que el dato esta en los últimos (primeros) dos cuadros, de ellos, un 1(0) en el 3er lugar (k=1(0)) significa que el dato esta en el segundo (primer) cuadro, en el, un 1(0) en el 2° lugar (j=1(0)) significa que el dato es de los que estan a la derecha (izquierda) finalmente 1(0) en el primer lugar, significa que el dato es el de abajo (arriba).

Ejemplifiquemos nuevamente con (1,0,1,0,1) que toma el valor 2.1

el 1 en el quinto lugar nos dice que esta en cuadros 5,6,7 ó 8
el 0 en el cuarto lugar nos dice que esta en cuadros 5 ó 6
el 1 en el tercer lugar nos dice que esta en el <u>cuadro 6</u>
el 0 en el segundo lugar nos dice que esta <u>en la izquierda</u>
el 1 en el primer lugar nos dice que queda <u>abajo</u>.

Este procedimiento nos permite ir colocando los datos en el lugar que les corresponde, sin importar la aleatorización que se haya hecho sobre ellos.

Para obtener el efecto total de los cinco factores sumemos todas las diagonales en los cuadros. En el primer cuadro, los datos son

00000	01000		00100	01100
10000	11000		10100	11100

1er. cuadro　　　　　　　　　　2° cuadro

Observece que los elementos de la diagonal principal son parte del efecto de $(ABCDE)_1$, llamemos a su suma $(ABCDE)_1^1$ la cual toma el valor de 5 el índice superior indica primer cuadro análogamente $(ABCDE)_0^1 = 2.6$

El segundo cuadro, comparado con el primero, cambia el nivel de C en cada combinación esto hace que los elementos de la diagonal principal sean parte del efecto de $(ABCDE)_0$ así $(ABCDE)_0^2 = 4.6$ y $(ABCDE)_1^2 = 4.3$ (ya que i+j+k+l+m se incrementa en 1)

Los cuadros tres y cuatro son similares al uno y dos, cambiando el nivel de D, es decir de l=0 a l=1 esto nos dice que i+j+k+l+m se incrementa en 1, lo cual nos indica que donde había $(ABCDE)_0$ cambiarlo por $(ABCDE)_1$ e inversamente.

Finalmente los últimos cuatro cuadros son similares a los cuatro primeros, cambiando el nivel de E, es decir, de m=0 a m=1, entonces i+j+k+l+m se incrementa en 1, lo cual nos indica que hay que intercambiar $(ABCDE)_0$ y $(ABCDE)_1$

TABLA 3.6 Interacción ABCDE para el ejemplo 2.2.1

Nivel del factor												
E	E: m=0											
D	D: l=0						D: l=1					
C	C: k=0			C: k=1			C: k=0			C: k=1		
B	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^1_1$	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^2_0$	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^3_0$	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^4_1$
A			5.0			4.6			4.6			8.3
i=0	0.6	2.6	3.2	1.9	1.5	3.4	3.3	2.4	5.7	1.5	3.0	4.5
i=1	2.4	2.0	4.4	3.1	2.4	5.5	2.2	2.1	4.3	5.3	2.3	7.6
	3.0	4.6	2.6	5.0	3.9	4.3	5.5	4.5	5.4	6.8	5.3	3.8
			$(ABCDE)^1_0$			$(ABCDE)^2_1$			$(ABCDE)^3_1$			$(ABCDE)^4_0$

Nivel del factor												
E	E: m=1											
D	D: l=0						D: l=1					
C	C: k=0			C: k=1			C: k=0			C: k=1		
B	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^5_0$	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^6_1$	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^7_1$	B: j=0	j=1	$(ABCDE)^8_0$
A			3.5			3.8			4.6			7.9
i=0	.7	1.5	2.2	2.7	1.7	4.4	3.4	2.2	5.6	1.8	2.9	4.7
i=1	2.0	2.8	4.8	2.1	3.1	5.2	2.4	2.9	5.3	5.0	1.8	6.8
	2.7	4.3	3.5	4.8	4.9	5.8	5.8	5.1	6.3	6.8	4.7	3.6
			$(ABCDE)^5_1$			$(ABCDE)^6_0$			$(ABCDE)^7_0$			$(ABCDE)^8_1$

Así

$(ABCDE)_0 = \sum_{n=1}^{8} (ABCDE)_0^n = 2.6+4.6+4.6+3.8+3.5+5.8+6.3+7.9 = 39.1$

y $(ABCDE)_1 = \sum_{n=1}^{8} (ABCDE)_1^n = 5.0+4.3+5.4+8.3+3.5+3.8+4.6+3.6 = 38.5$

$(ABCDE) = (ABCDE)_1 - (ABCDE)_0 = -0.6$

Sumemos ahora los renglones y columnas en cada cuadro cuyos totales nos sirven para construir las tablas 3.7 y 3.8 de las cuales podemos obtener los efectos totales de las interacciones ACDE y BCDE respectivamente, observece que nuevamente los datos se "acomodan" en forma de sierra.

TABLA 3.7 Interacción ACDE

E / D / C	E: m=0						E: m=1					
	D: l=0			D: l=1			D: l=0			D: l=1		
	C: k=0	k=1	$(ACDE)_1^1$	C: k=0	k=1	$(ACDE)_0^2$	C: k=0	k=1	$(ACDE)_0^3$	C: k=0	k=1	$(ACDE)_1^4$
A			7.8			8.8			9.2			10.0
i=0	3.2	3.4	6.6	5.7	4.5	10.2	2.2	4.4	6.6	5.6	4.7	10.3
i=1	4.4	5.5	9.9	4.3	7.6	11.9	4.8	5.2	10.0	5.3	6.8	12.1
	7.6	8.9	8.7	10.0	12.4	13.3	7.0	9.6	7.4	10.9	11.5	12.4
			$(ACDE)_0^1$			$(ACDE)_1^2$			$(ACDE)_1^3$			$(ACDE)_0^4$

Así

$(ACDE)_0 = \sum_{n=1}^{4} (ACDE)_0^n = 8.7+8.9+9.2+12.4 = 39.1$

$(ACDE)_1 = \sum_{n=1}^{4} (ACDE)_1^n = 7.8+13.3+7.4+10.0 = 38.5$

$(ACDE) = (ACDE)_0 - (ACDE)_1 = 0.6$

TABLA 3.8 Interacción BCDE

E	m=0						m=1					
D	l=0			l=1			l=0			l=1		
C	C			C			C			C		
B	k=0	k=1	(BCDE)	k=0	k=1	$(BCDE)^2_0$	k=0	k=1	$(BCDE)^3_0$	k=0	k=1	$(BCDE)^4_1$
			9.6			11.3			9.1			11.9
j=0	3.0	5.0	8.0	5.5	6.8	12.3	2.7	4.8	7.5	5.8	6.8	12.6
j=1	4.6	3.9	8.5	4.5	5.3	9.3	4.3	4.8	9.1	5.1	4.7	9.8
	7.6	8.9	6.9	10.0	12.1	10.8	7.0	9.6	7.5	10.9	11.5	10.5
			$(BCDE)^1_0$			$(BCDE)^2_1$			$(BCDE)^3_1$			$(BCDE)^4_0$

Así

$$(BCDE)_0 = \sum_{n=1}^{4} (BCDE)_0^n = 6.9+11.3+9.1+10.5 = 37.8$$

$$(BCDE)_1 = \sum_{n=1}^{4} (BCDE)_1^n = 9.6+10.8+7.5+11.9 = 39.8$$

$$(BCDE) = (BCDE)_0 - (BCDE)_1 = -2.0$$

Para obtener el efecto total de la interacción ABCD sumemos sobre m, es decir a cada elemento de los primeros cuadro cuadros de la tabla ... sumemosle el correspondiente elemento de los cuatro últimos cuadros, con ellos construimos la siguiente.

TABLA 3.9 Interacción ABCD

	D											
C	l=0						l=1					
	C						C					
B	k=0			k=1			k=0			k=1		
	B		$(ABCD)_1^1$	B		$(ABCD)_0^2$	B		$(ABCD)_0^3$	B		$(ABCD)_1^4$
A	j=0	j=1	8.5	j=0	j=1	8.4	j=0	j=1	9.2	j=0	j=1	16.2
i=0	1.3	4.1	5.4	4.6	3.2	7.8	6.7	4.6	11.3	3.3	5.9	9.2
i=1	4.4	4.8	9.2	5.2	5.5	10.7	4.6	5.0	9.6	10.3	4.1	14.1
	5.7	8.9	6.1	9.8	8.7	10.1	11.3	9.6	11.7	13.6	10.0	7.4
			$(ABCD)_0^1$			$(ABCD)_1^2$			$(ABCD)_1^3$			$(ABCD)_0^4$

$$(ABCD)_0 = \sum_{n=1}^{4} (ABCD)_0^n = 6.1+8.4+9.2+7.4 = 31.1$$

$$(ABCD)_1 = \sum_{n=1}^{4} (ABCD)_1^n = 8.5+10.1+11.7+16.2 = 46.5$$

$$(ABCD) = (ABCD)_0 - (ABCD)_1 = -15.4$$

Para obtener el efecto total de la interacción ABCE, sumemos sobre l*, es decir a cada elemento de los dos primeros (terceros) cuadros de la tabla 3.6 sumemosle el correspondiente elemento de los dos segundos (cuatro) cuadros para construir la siguiente.

*l= ele

TABLA 3.10 Interacción ABCE

Nivel del factor: E, C, B / A	E: m=0						E: m=1					
	C: k=0			C: k=1			C: k=0			C: k=1		
	B: j=0	j=1	$(ABCE)_1^1$	B: j=0	j=1	$(ABCE)_0^2$	B: j=0	j=1	$(ABCE)_0^3$	B: j=0	j=1	$(ABCE)_1^4$
A			9.6			12.9			8.1			11.7
i=0	3.9	5.0	8.9	3.4	4.5	7.9	4.1	3.7	7.8	4.5	4.6	9.1
i=1	4.6	4.1	8.7	8.4	4.7	13.1	4.4	5.7	10.1	7.1	4.9	12.0
	8.5	9.1	8.0	11.8	9.2	8.1	8.5	9.4	9.8	11.6	9.5	9.4
			$(ABCE)_0^1$			$(ABCE)_1^2$			$(ABCE)_1^3$			$(ABCE)_0^4$

$$(ABCE)_0 = \sum_{n=1}^{4} (ABCE)_0^n = 8.0+12.9+8.1+9.4 = 38.4$$

$$(ABCE)_1 = \sum_{n=1}^{4} (ABCE)_1^n = 9.6+8.1+9.8+11.7 = 39.2$$

$$(ABCE) = (ABCE)_0 - (ABCE)_1 = -0.8$$

Para obtener el efecto total de la interacción ABDE, sumemos sobre k, es decir a cada elemento del primer (tercer, quinto, septimo) cuadro, de la tabla 3.6, le sumamos el correspondiente elemento de el segundo (cuarto, sexto, octavo) cuadro respectivamente, así construimos la siguiente.

TABLA 3.11 Interacción ABDE

E	m=0						m=1					
D	l=0			l=1			l=0			l=1		
B	j=0	j=1	$(ABDE)^1_1$	j=0	j=1	$(ABDE)^2_0$	j=0	j=1	$(ABDE)^3_0$	j=0	j=1	$(ABDE)^4_1$
A			9.6			12.9			7.3			12.5
i=0	2.5	4.1	6.6	4.8	5.4	10.2	3.4	3.2	6.6	5.2	5.1	10.3
i=1	5.5	4.4	9.9	7.5	4.4	11.9	4.1	5.9	10.0	7.4	4.7	12.1
	8.0	8.5	6.9	12.3	9.8	9.2	7.5	9.1	9.3	12.6	9.8	9.9
			$(ABDE)^1_0$			$(ABDE)^2_1$			$(ABDE)^3_1$			$(ABDE)^4_0$

$$(ABDE)_0 = \sum_{n=1}^{4} (ABDE)^n_0 = 6.9+12.9+7.3+9.9 = 37.0$$

$$(ABDE)_1 = \sum_{n=1}^{4} (ABDE)^n_1 = 9.6+9.2+9.3+12.5 = 40.6$$

$$(ABDE) = (ABDE)_0 - (ABDE)_1 = -3.6$$

De manera analoga, de las tablas de interacción de cuatro factores construimos las tablas de interacciones de tres factores.

TABLA 3.12 Interacciones de 3 factores

Interacción ABC

	C: k=0, B: j=0	C: k=0, B: j=1	$(ABC)^1_1$ / $(ABC)^1_0$	C: k=1, B: j=0	C: k=1, B: j=1	$(ABC)^2_0$ / $(ABC)^2_1$
A	j=0	j=1	17.7	j=0	j=1	24.6
i=0	8.0	8.7	16.7	7.9	9.1	17.0
i=1	9.0	9.8	18.8	15.5	9.6	15.1
	17.0	18.5	17.8	23.4	18.7	17.5

Interacción ABD

	D: l=0, B: j=0	D: l=0, B: j=1	$(ABD)^1_1$ / $(ABD)^1_0$	D: l=1, B: j=0	D: l=1, B: j=1	$(ABD)^2_0$ / $(ABD)^2_1$
A	j=0	j=1	16.9	j=0	j=1	25.4
i=0	5.9	7.3	13.2	10.0	10.5	25.4
i=1	9.6	10.3	19.9	14.9	9.1	24.0
	15.5	17.6	16.2	24.9	19.6	19.1

Interacción ABE

	E					
	m=0			m=0		
	B		$(ABE)^1_1$	B		$(ABE)^2_0$
A	j=0	j=1	22.5	j=0	j=1	19.8
i=0	7.5	9.5	16.8	8.6	8.5	16.9
i=0	15.0	8.3	21.8	11.5	10.6	22.1
	20.5	18.3	16.1	20.1	18.9	19.2
			$(ABE)^1_0$			$(ABE)^2_1$

Interacción ACD

	D					
	l=0			l=1		
	C		$(ACD)^1_1$	C		$(ACD)^2_0$
A	k=0	k=1	17.0	k=0	k=1	18.8
i=0	5.4	7.8	13.2	11.3	9.2	20.5
i=1	9.2	10.7	19.9	9.6	14.4	24.0
	14.6	18.5	16.1	10.9	23.6	25.7
			$(ACD)^1_0$			$(ACD)^2_1$

Interacción ACE

	E					
	m=0			m=1		
	C		$(ACE)^1_1$	C		$(ACE)^2_0$
A	k=0	k=1	16.6	k=0	k=1	19.2
i=0	8.9	7.9	16.8	7.8	9.1	16.9
i=1	8.7	13.1	21.8	10.1	12.0	22.1
	17.6	21.0	22.0	17.9	21.1	19.8
			$(ACE)^1_0$			$(ACE)^2_1$

Interacción ADE

	E					
	m=0			m=1		
	D		$(ADE)^1_1$	D		$(ADE)^2_0$
A	l=0	l=1	20.1	l=0	l=1	20.3
i=0	6.6	10.2	16.8	6.6	10.3	16.9
i=1	9.9	11.9	21.8	10.0	12.1	22.1
	16.5	22.1	18.5	16.6	22.4	18.7
			$(ADE)^1_0$			$(ADE)^2_1$

Interacción BCD

	D					
	l=0			l=1		
	C		$(BCD)^1_1$	C		$(BCD)^2_0$
B	k=0	k=1	18.7	k=0	k=1	23.2
j=0	5.7	9.8	15.5	11.3	13.6	24.9
j=1	8.9	8.7	17.6	9.6	10.0	19.6
	14.6	18.5	14.4	20.9	23.6	21.3
			$(BCD)^1_0$			$(BCD)^2_1$

Interacción BCE

	E					
	m=0			m=1		
	C		$(BCE)^1_1$	C		$(BCE)^2_0$
B	k=0	k=1	20.9	k=0	k=1	21.0
j=0	8.5	11.8	20.3	8.5	11.6	20.1
j=1	9.1	9.2	18.3	9.4	9.5	18.9
	17.6	21.0	17.7	17.9	21.1	18.0
			$(BCE)^1_0$			$(BCE)^2_1$

Interacción BDE

	E: m=0, D: l=0	l=1	$(BDE)^1_1$	E: m=1, D: l=0	l=1	$(BDE)^2_0$
B			20.8			21.7
j=0	8.0	12.3	20.3	7.5	12.6	20.1
j=1	8.5	9.8	18.3	9.1	9.8	18.9
	16.5	22.1	17.8	16.6	22.4	17.3
			$(BDE)^1_0$			$(BDE)^2_1$

Interacción CDE

	E: m=0, D: l=0	l=1	$(CDE)^1_1$	E: m=1, D: l=0	l=1	$(CDE)^2_0$
C			18.9			20.5
k=0	7.6	10.0	17.6	7.0	10.9	17.9
k=1	8.9	12.1	21.0	9.6	11.5	21.1
	16.5	22.1	19.7	16.6	22.4	18.5
			$(CDE)^1_0$			$(CDE)^2_1$

Así

$$(ABC)_1 = (ABC)^1_1 + (ABC)^2_1 = 17.7+17.5 = 35.2$$
$$(ABC)_0 = (ABC)^1_0 + (ABC)^2_0 = 17.8+24.6 = 42.4$$
$$(ABC) = (ABC)_1 - (ABC)_0 = 35.2-42.4 = -7.2$$

Analogamente
$$(ABD) = (ABD)_1-(ABD)_0 = 36.0-41.6 = -5.6$$
$$(ABE) = (ABE)_1-(ABE)_0 = 41.7-35.9 = 5.8$$
$$(ACD) = (ACD)_1-(ACD)_0 = 42.7-34.9 = 7.8$$
$$(ACE) = (ACE)_1-(ACE)_0 = 36.4-41.2 = -4.8$$
$$(ADE) = (ADE)_1-(ADE)_0 = 38.8-38.8 = 0.0$$
$$(BCD) = (BCD)_1-(BCD)_0 = 40.0-37.6 = 2.4$$
$$(BCE) = (BCE)_1-(BCE)_0 = 38.9-38.7 = 0.2$$
$$(BDE) = (BDE)_1-(BDE)_0 = 38.1-39.5 = -1.4$$
$$(CDE) = (CDE)_1-(CDE)_0 = 37.4-40.2 = -2.8$$

Las tablas para obtener los efectos totales de las interacciones de dos factores y de efectos principales son las siguientes

TABLA 3.13 Interacciones de 2 factores

Interacción AB

A	B: j=0	B: j=1	$(AB)_1$
			42.3
i=0	15.9	17.8	33.7
i=1	24.5	19.4	43.9
	40.4	37.2	35.3
			$(AB)_0$

Interacción AC

A	C: k=0	C: k=1	$(AC)_1$
			35.8
i=0	16.7	17.0	33.7
i=1	18.8	25.1	43.9
	35.5	42.1	41.8
			$(AC)_0$

Interacción AD

A	D: l=0	D: l=1	$(AD)_1$
			40.4
i=0	13.2	20.5	33.7
i=1	19.9	24.0	43.9
	33.1	44.5	37.2
			$(AD)_0$

Interacción AE

A	D: m=0	D: m=1	$(AE)_1$
			38.7
i=0	16.8	16.9	33.7
i=1	21.8	22.1	43.9
	38.6	39.0	38.9
			$(AE)_0$

Interacción BC

B	C: k=0	C: k=1	$(BC)_1$
			41.9
j=0	17.0	23.4	40.4
j=1	18.5	18.7	37.2
	35.5	42.1	35.7
			$(BC)_0$

Interacción BD

B	D: l=0	D: l=1	$(BD)_1$
			42.5
j=0	15.5	24.9	40.4
j=1	17.6	19.6	37.2
	33.1	44.5	35.1
			$(BD)_0$

Interacción BE

B	E: m=0	E: m=1	$(BE)_1$
			38.4
j=0	20.3	20.1	40.4
j=1	18.3	18.9	37.2
	38.6	39.0	39.2
			$(BE)_0$

Interacción CD

C	D: l=0	D: l=1	$(CD)_1$
			39.4
k=0	14.6	20.9	35.5
k=1	18.5	23.6	42.1
	33.1	44.5	38.2
			$(CD)_0$

Interacción CE

C	E: m=0	E: m=1	$(CE)_1$
			38.9
k=0	17.6	17.9	35.5
k=1	21.0	21.1	42.1
	38.6	39.0	38.7
			$(CE)_0$

Interacción DE

D	E: m=0	E: m=1	$(DE)_1$
			38.7
l=0	16.5	16.6	33.1
l=1	22.1	22.4	44.5
	38.6	39.0	38.9
			$(DE)_0$

Así, los efectos totales y las sumas de cuadrados son

$(A) = (A)_1 - (A)_0 = 43.9 - 33.7 = 10.2 \qquad SCA = \dfrac{[(A)_1 - (A)_0]^2}{2^5} = \dfrac{10.2^2}{32} = 3.25125$

$(B) = 37.2 - 40.4 = -3.2 \qquad SCB = (-3.2)^2/32 = 0.32$

$(C) = 42.1 - 35.5 = 6.6 \qquad SCC = (6.6)^2/32 = 1.36125$

$(D) = 44.5 - 33.1 = 11.4 \qquad SCD = (11.4)^2/32 = 4.06125$

$(E) = 39.0 - 38.6 = 0.4 \qquad SCE = (0.4)^2/32 = 0.005$

$(AB) = (AB)_0 - (AB)_1 = 35.3 - 42.3 = -7.0 \qquad SC(AB) = \dfrac{[(AB)_0 - (AB)_1]^2}{32} = \dfrac{(-7.0)^2}{32} = 1.53125$

. . . . .

$$SC(ABC) = \frac{[(ABC)_1 - (ABC)_0]^2}{32} = \frac{[35.2 - 42.4]^2}{32} = \frac{-7.2}{32} = 1.62$$

. . . . .

$$SC(ABCDE) = \frac{[(ABCDE)_1 - (ABCDE)_0]^2}{32} = \frac{(-1.6)^2}{32} = 0.08$$

SC(Bloques) = SC(ABCD)+SC(BCDE)+SC(AE) = 7.5375

La SCERROR la obtenemos fusionando las SC de las interacciones no confundidas de tres cuatro y cinco factores.

Un resumen de los resultados anteriores nos lo da la tabla 3.14

TABLA 3.14 Análisis de Varianza

Fuente de Variación	S.C.	G.L.	C.M.	f Calculada
A	3.25125	1	3.25125	6.3153
B	0.32000	1	0.32000	0.6216
C	1.36125	1	1.36125	2.6441
D	4.06125	1	4.06125	7.8887
E	0.00500	1	0.00500	0.0097
Interacciones de dos factores no confundidos				
AB	1.53125	1	1.53125	2.9743
AC	1.12500	1	1.12500	2.1852
AD	0.32000	1	0.32000	0.6216
BC	1.20125	1	1.20125	2.3333
BD	1.71125	1	1.71125	3.3240
BE	0.02000	1	0.02000	0.0388
CD	0.04500	1	0.04500	0.0874
CE	0.00125	1	0.00125	0.0024
DE	0.00125	1	0.00125	0.0024
Bloques (ABCD,BCDE(AE))	7.53750	3	2.5135	4.8823
Error	7.2075	14	0.51482	

Ninguna de las interacciones de dos factores es significativa al nivel $\alpha=0.05$ cuando se comparan con $f_{0.05}(1,14)=4.60$

Los efectos principales A y D son significativos y ambos dan un efecto positivo a la variable de respuesta cuando se va del nivel bajo al nivel alto. Observemos que el efecto de bloques es significativo cuando se compara con $f_{0.05}(3,14)=3.34$ sin embargo no hay manera de determinar si el efecto de bloque significativo es debido a las diferencias entre los bloques o quizá debida a alguna interacción que se confundió con bloques.

3.3 Planes experimentales.

Consideremos los diseños 2^n $(n=4,5,6)$ con confusión total, de uso más frecuente. Las interacciones generalizadas estan indicadas entre paréntesis.

Se pueden utilizar cualquier número de repeticiones, aquí se describe una de ellas. Cuando se considere un número de repeticiones mayor, el investigador debe duplicar la repetición I con una nueva aleatorización, las veces que sean necesarias.

3.3.1 Factorial 2^4 en bloques de 2 u.e. con confusión total de AB, AC, (BC), AD, (BD), CD; ABCD)

Repetición I (8 bloques)

Bloque I	Bloque II	Bloque III
$(AB)_0$ $(AC)_0$ $(AD)_0$	$(AB)_0$ $(AC)_0$ $(AD)_1$	$(AB)_0$ $(AC)_1$ $(AD)_0$
0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 1 0
1 1 1 1	1 1 1 0	1 1 0 0

Bloque IV	Bloque V	Bloque VI
$(AB)_o$ $(AC)_1$ $(AD)_1$	$(AB)_1$ $(AC)_o$ $(AD)_o$	$(AB)_1$ $(AC)_o$ $(AD)_1$
0 0 1 1	0 1 0 0	0 1 0 1
1 1 0 0	1 0 1 1	1 0 1 0

Bloque VII	Bloque VIII
$(AB)_1$ $(AC)_1$ $(AD)_o$	$(AB)_1$ $(AC)_1$ $(AD)_1$
0 1 1 0	0 1 1 1
1 0 0 1	1 0 0 0

Análisis de Variancia

F.V.	G.L.	S.C
Tratamientos ajustados por bloques	8	
A	1	
B	1	
C	1	
D	1	
ABC	1	r=2,3,4,5.........
ABD	1	
ACD	1	
BCD	1	
Bloques	8r-1	
Error	8(r-1)	
Total	16r-1	

3.32 Factorial 2^5 en bloques de 8 u.e. con confusión total de ABC, CDE, (ABDE)

Repetición I (4 bloques)

Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV
$(ABC)_0$ $(CDE)_0$	$(ABC)_0$ $(CDE)_1$	$(ABC)_1$ $(CDE)_0$	$(ABC)_1$ $(CDE)_1$
0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 1	0 0 0 1 0	0 1 0 1 1	0 0 1 1 1
0 1 1 0 1	0 1 1 0 0	0 0 1 0 1	0 1 0 0 1
0 1 1 1 0	0 1 1 1 1	0 0 1 1 0	0 1 0 1 0
1 0 1 0 1	1 0 1 0 0	1 1 1 0 1	1 0 0 0 1
1 0 1 1 0	1 0 1 1 1	1 1 1 1 0	1 0 0 1 0
1 1 0 0 0	1 1 0 0 1	1 0 0 0 0	1 1 1 0 0
1 1 0 1 1	1 1 0 1 0	1 0 0 1 1	1 1 1 1 1

Análisis de Variancia

F.V.		G.L.	S.C.
Tratamientos ajustados por bloques		28	
5 efectos principales	A	1	
	B	1	
	C	1	
	D	1	
	E	1	
10 interacciones de dos factores	AB	1	
	AC	1	
	⋮	⋮	
	DE	1	r=2,3,4....
	⋮	⋮	

	⋮		⋮
8 interacciones de tres factores no confundidos	ABD		1
	ABE		1
	ACD		1
	ACE		1
	ADE		1
	BCD		1
	BCE		1
	BDE		1
4 interacciones de 4 factores no confundidos	ABCD		1
	ABCE		1
	ACDE		1
	BCDE		1
	ABCDE		1
Bloques		4r-1	
Error		28(r-1)	
Total		32r-1	

3.3.3 Factorial 2^5 en bloques de 4 u.e con confusión total de AB, CD, (ABCD), BDE (ADE, BCE; ACE)

Repetición I (8 bloques)

Bloque I $(AB)_0$ $(CD)_0$ $(BDE)_0$	Bloque II $(AB)_0$ $(CD)_0$ $(BDE)_1$	Bloque III $(AB)_0$ $(CD)_1$ $(BDE)_0$
A B C D E	A B C D E	A B C D E
0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 1 0 0
0 0 1 1 1	0 0 1 1 0	0 0 0 1 1
1 1 0 0 1	1 1 0 0 0	1 1 1 0 1
1 1 1 1 0	1 1 1 1 1	1 1 0 1 0

Bloque IV	Bloque V	Bloque VI
$(AB)_0$ $(CD)_1$ $(BDE)_1$	$(AB)_1$ $(CD)_0$ $(BDE)_0$	$(AB)_1$ $(CD)_0$ $(BDE)_1$
A B C D E	A B C D E	A B C D E
0 0 0 1 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 1
0 0 1 0 1	1 0 1 1 1	1 0 1 1 0
1 1 0 1 1	0 1 0 0 1	0 1 0 0 0
1 1 1 0 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 1

Bloque VII	Bloque VIII
$(AB)_0$ $(CD)_1$ $(BDE)_1$	$(AB)_1$ $(CD)_1$ $(BDE)_1$
A B C D E	A B C D E
1 0 1 0 0	1 0 0 1 0
1 0 0 1 1	1 0 1 0 1
0 1 1 0 1	0 1 0 1 1
0 1 0 1 0	0 1 1 0 0

Análisis de Variancia

Fuente de Variación		G.L.	S.C.
Tratamientos ajustados por bloques		24	
5 efectos principales	A	1	
	B	1	
	C	1	
	D	1	
	E	1	
8 interacciones de dos factores no confundidas	AC	1	
	AD	1	
	AE	1	
	BC	1	
	BD	1	
	BE	1	
	CE	1	
	DE	1	
	⋮	⋮	

	⋮		⋮
6 interacciones de 3 factores no confundidos	ABC		1
	ABD		1
	ABE		1
	ACD		1
	BCD		1
	CDE		1
4 interacciones de 4 factores no confundidos	ABCE		1
	ACDE		1
	ABDE		1
	BCDE		1
Interacción de 5 factores	ABCDE		1
Bloques		8r-1	
Error		24(r-1)	
Total		32r-1	

3.34 Factorial 2^6 en bloques de 16 unidades con confusión total de ABCD, ABEF, (CDEF)

Repetición I (4 bloques)

Bloque I (ABCD) (ABEF)	Bloque II (ABCD) (ABEF)	Bloque III (ABCD) (ABEF)	Bloque IV (ABCD) (ABEF)
A B C D E F	A B C D E F	A B C D E F	A B C D E F
0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 1	0 0 0 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1
0 0 1 1 0 0	0 0 1 1 0 1	0 1 1 1 0 0	0 0 0 1 0 0
0 0 1 1 1 1	0 0 1 1 1 0	0 1 1 1 1 1	0 0 0 1 1 1
0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 0	0 0 0 1 0 1	0 1 1 1 0 1
0 1 0 1 1 0	0 1 0 1 1 1	0 0 0 1 1 0	0 1 1 1 1 0
0 1 1 0 0 1	0 1 1 0 0 0	0 0 1 0 0 1	0 1 0 0 0 1
0 1 1 0 1 0	0 1 1 0 1 1	0 0 1 0 1 0	0 1 0 0 1 0
1 0 0 1 0 1	1 0 0 1 0 0	1 1 0 1 0 1	1 0 1 1 0 1
1 0 0 1 1 0	1 0 0 1 1 1	1 1 0 1 1 0	1 0 1 1 1 0
1 0 1 0 0 1	1 0 1 0 0 0	1 1 1 0 0 1	1 0 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0	1 0 1 0 1 1	1 1 1 0 1 0	1 0 0 0 1 0
1 1 0 0 0 0	1 1 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0	1 1 1 0 0 0
1 1 0 0 1 1	1 1 0 0 1 0	1 0 0 0 1 1	1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 0 0	1 1 1 1 0 1	1 0 1 1 0 0	1 1 0 1 0 0
1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 0	1 0 1 1 1 1	1 1 0 1 1 1

Análisis de Variancia (r>1)

F.V.		G.L.	
Tratamientos ajustados por bloques		60	
6 efectos principales	A		1
	B		1
	C		1
	D		1
	E		1
	F		1

15 interacciones de dos factores	AB : EF	1 : 1
20 interacciones de tres factores	ABC : DEF	1 : 1
12 interacciones de 4 factores no confundidos	ABCF : BDEF	1 : 1
6 interacciones de 5 factores	: :	: :
Interacción de 6 factores	ABCDEF	1
Bloques		4r-1
Error		60(r-1)
Total		64r-1

Se muestra una repetición con confusión de ABCD, ABEF y ACDE, etc. puede usarse para todas las repeticiones aleatorizando las combinaciones de tratamientos en cada una de ellas. Las tres interacciones mencionadas estan completamente confundidas con bloques y por ello su SC se omite en el análisis de variancia r=1.

Cuando se considera solamente <u>una repetición</u>, la SC del error debe de estimarse de las interacciones no confundidas de cuatro, cinco y seis factores, estas interacciones contribuyen con 22 g.l. de ellas 3 estan confundidas con bloques, así pues, quedan 19 g.l. para la estimación del error. Así al hacer solo una repetición los 63 g.l. quedarán distribuidos de la siguiente forma.

F.V.	G.L.
Bloques	3
Efectos principales	6
Interacciones dobles	15
Interacciones triples	20
Error (de las interacciones no confundidas de 4 ó más factores)	19
Total	63

3.35 Factorial 2^6 en bloques de 8 u.e. con confusión total de ACE, BDE, (ABCD), BCF, (ABEF, CDEF; ADF)

Repetición I (8 bloques)

Bloque I $(ACE)_0$ $(BDE)_0$ $(BCF)_0$

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Bloque II $(ACE)_0$ $(BDE)_0$ $(BCF)_1$

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1

Bloque III $(ACE)_0$ $(BDE)_1$ $(BCF)_0$

A	B	C	D	E	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Bloque IV $(ACE)_0$ $(BDE)_1$ $(BCF)_1$

A	B	C	D	E	F
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0

Bloque V $(ACE)_1$ $(BDE)_0$ $(BCF)_0$

A	B	C	D	E	F
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0

Bloque VI $(ACE)_1$ $(BDE)_0$ $(BCF)_1$

A	B	C	D	E	F
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1

Bloque VII					
$(ACE)_1$	$(BDE)_1$	$(BCF)_0$			
A	B	C	D	E	F
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0

Bloque VIII					
$(ACE)_1$	$(BDE)_1$	$(BCF)_1$			
A	B	C	D	E	F
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0

Análisis de Variancia $(r>1)$

Fuente de Variación	G.L.
Tratamientos ajustados por bloques	56
6 efectos principales	6
15 interacciones de dos factores	15
16 interacciones de tres factores no confundidos	16
12 interacciones de 4 factores no confundidos	12
6 interacciones de 5 factores no confundidos	6
Interacciones de 6 facto res	1
Bloques	$8r-1$
Error	$56(r-1)$
Total	$64r-1$

Si solamente se considera una repetición, la SC del error puede estimarse por medio de las interacciones no confundidas de cuatro, cinco y seis factores, estas interacciones contribuyen con 22 g.l. de ellas 7 estan totalmente confundidas con bloques, así pues el error tendrá 15 g.l.

Tomando solamente una repetición, los 63 g.l quedan distribuidos de la siguiente manera.

F.V.	G.L.
Bloques	7
Efectos principales	6
Interacción de 2 factores	15
Interacción de 3 factores no confundidos	16
Error (de las interacciones no confundidas de 4 ó más factores	19
Total	63

3.36 Factorial 2^7 en bloques de 8 u.e. con confusión total de ABD, ACE, BCF, ABCG y de sus interacciones generalizadas las cuales son BCDE, ACDF, CDG, ABEF, BEG, AFG, DEF, ADEG, BDFG, CEFG y ABCDEFG

Repetición I (16 bloques)

Subgrupo Intrablock

$(ABD)_0$ $(BCE)_0$

$(BCF)_0$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Bloque II

$(ABD)_0$ $(ACE)_0$

$(BCF)_0$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

+1aG

Bloque III

$(ABD)_0$ $(ACE)_0$

$(BCF)_1$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

+1aF

Bloque IV

$(ABD)_0$ $(ACE)_0$

$(BCF)_1$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

+1aF 1aG

Bloque V

$(ABD)_0$ $(ACE)_1$

$(BCF)_0$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

1aE

Bloque VI

$(ABD)_0$ $(ACE)_1$

$(BCF)_0$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

1aE 1aG

Bloque VII

$(ABD)_0$ $(ACE)_1$
$(BCF)_1$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1

1aE 1aF

Bloque VIII

$(ABD)_0$ $(ACE)_1$
$(BCF)_1$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0

1aE 1aF 1aG

Bloque IX

$(ABD)_1$ $(ACE)_0$
$(BCF)_0$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1

1aD

Bloque X

$(ABD)_1$ $(ACE)_0$
$(BCF)_0$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

1aD 1aG

Bloque XI

$(ABD)_1$ $(ACE)_0$
$(BCF)_1$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

1aD 1aF

Bloque XII

$(ABD)_1$ $(ACE)_0$
$(BCF)_1$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0

1aD 1aF 1aG

Bloquo XIII

$(ABD)_1$ $(ACE)_1$ $(BCF)_0$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1

laD laF

Bloque XIV

$(ABD)_1$ $(ACE)_1$ $(BCF)_0$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

laD laE laG

Bloque XV

$(ABD)_1$ $(ACE)_1$ $(BCF)_1$ $(ABCG)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

laD laE laF

Bloque XVI

$(ABD)_1$ $(ACE)_1$ $(BCF)_1$ $(ABCG)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

laD laF laG laG

Análisis de Variancia (r>1)

F.V.	G.L.
Tratamientos ajustados por bloques	115
7 efectos principales	7
28 interacciones de 2 factores	28
28 interacciones de 3 factores no confundidos	28
28 interacciones de 4 factores no confundidos	28
35 interacciones de 5 factores	35
7 interacciones de 6 factores	7
Bloques	16r-1
Error	
Total	128r-1

CAPITULO 4

CONFUSION PARCIAL EN EL DISEÑO FACTORIAL 2^n

4.1 Introducción.

4.1. Consideremos el experimento factorial 2^3 en dos bloques de cuatro observaciones, si se consideran varias repeticiones y se usan diseños con confusión, el investigador es libre de confundir cualquier efecto en cualquier repetición. No es necesario confundir la misma interacción en todas las repeticiones. Si utilizamos dos repeticiones, la interacción ABC puede estar confundida en la primera y una interacción diferente, digamos, AB, en la segunda. De la primer repetición, podemos estimar la interacción AB ya que no esta confundida en la repetición y de la segunda repetición podemos estimar la interacción ABC.

Los efectos restantes podemos estimarlos de las dos repeticiones, de esta forma recobramos información sobre las interacciones confundidas en las repeticiones. Cuando una interacción esta confundida en alguna(s) repetición(es) y en otra(s) no lo está, se dice que el experimento tiene confusión parcial, ya que solo parte de las observaciones se utilizan para estimar las interacciones parcialmente confundidas, las cuales son determinadas con un grado de precisión menor al de los restantes efectos. Hay cuatro interacciones, AB, AC, BC, ABC, en un diseño factorial 2^3, así para obtener un diseño completo, balanceado, con confusión parcial, de todas las interacciones con el mismo nivel de información, se requiere usar cuatro repeticiones o multiplos de cuatro y confundir ABC en una, AB en otra y AC y BC en las otras dos. El diseño se muestra en la siguiente tabla.

TABLA 4.1 Factorial 2 . Confusión parcial de ABC,AB,AC y BC

Repetición	I		II		III		IV	
Interacción Confundida	ABC		AC		BC		AB	
Bloque	1 $(ABC)_o$	2 $(ABC)_1$	3 $(AC)_1$	4 $(AC)_o$	5 $(BC)_o$	6 $(BC)_1$	7 $(AB)_c$	8 $(AB)_1$
Combinación de Tratamientos	000 011 101 110	001 010 100 111	001 011 100 110	000 010 101 111	000 011 100 111	001 010 101 110	000 001 110 111	010 011 100 101

El analisis es diferente al de un diseño factorial 2^3 con cuatro o multiplos de cuatro repeticiones solo en el cálculo de las interacciones parcialmente confundidas, estas son calculadas de las 3 repeticiones en la cual la interacción dada no está confundida.

Todos los efectos principales son ortogonales a bloques, consecuentemente su suma de cuadrados es calculada en la forma usual que se utiliza en un diseño factorial 2^3.

Así, si se utilizan r=4k (k=1,2,3,...) repeticiones

$(A)_1$ = suma de las 4x4k=16k observaciones conteniendo $\underline{a}$(i=1) y
$(A)_o$ = suma de la 16k observaciones que no contienen $\underline{a}$(i=0)
entonces
el efecto total de $A = (A) = (A)_1 - (A)_o$

Suma de cuadrados de A = SCA $= \frac{[(A)_1 - (A)_o]^2}{2^3 r} = \frac{[(A)_1 - (A)_o]^2}{2^5 k} = \frac{[(A)_1 - (A)_o]^2}{32k}$

De manera analoga se calculan los efectos totales y suma de cuadrados de B y de C.

El siguiente paso es obtener un estimador de las magnitudes de las interacciones que estan parcialmente confundidas y calcular su suma de cuadrados. Consideremos primero las cuatro repeticiones (r=4 k=1) de la tabla 4.1, observemos que la interacción de tres factores ABC esta confundida en la primer repetición, pero no en las otras tres, así ABC puede ser calculada de las repeticiones II, III y IV como sigue: (la prima denota confusión parcial)

$(ABC)'_1 = (ABC)_1^{II,\ III,\ IV}$

= suma de las 4x3=12 observaciones de las repeticiones II, III y IV conteniendo i+j+k=1 mod 2.

$(ABC)'_0 = (ABC)_0^{II,\ III,\ IV}$

= suma de las 12 observaciones de las repeticiones II, III, y IV conteniendo i+j+k=0 mod 2.

Así, el efecto total de ABC, no confundido es

$$(ABC)' = (ABC)'_1 - (ABC)'_0 = (ABC)_1 - (ABC)_0 - [(ABC)_1^{IV} - (ABC)_0^{IV}]$$

donde $(ABC)_1$ = suma de los 4x4=16 observaciones conteniendo i+j+k=1 mod 2, etc.

De manera analoga se calcula (AB)' de las repeticiones I, II y III AC de la I, III y IV, y BC de la I, II y IV.

Para las SC hay que modificar los divisores ya que provienen de menos observaciones; de la siguiente manera.

$$SC(AB)' = \frac{[(AB)'_0 - (AB)'_1]^2}{2^3 . 3} \qquad SC(AC)' = \frac{[(AC)'_0 - (AC)'_1]^2}{8(3)}$$

$$SC(BC)' = \frac{[(BC)'_0 - (BC)'_1]^2}{24} \qquad SC(ABC)' = \frac{[(ABC)'_1 - (ABC)'_0]^2}{24}$$

Si hay r=4k (k=1,2,3,...) repeticiones, para obtener información sobre las interacciones se usaran únicamente los 3 ó múltiplos de 3 repeticiones en donde cada interacción no este confundida Así

$$SC(AB)' = \frac{[(AB)'_0 - (BC)'_1]^2}{2\ (3k)} = \frac{[(AB)'_0 - (AB)'_1]^2}{24k}$$

De manera analoga se calculan SC(AC)', SC(BC)' y SC(ABC)'.

La suma de cuadrados de bloques, se obtendrán de manera usual, es decir

$$\text{SC bloques sin ajustar} = \frac{\sum_{i=1}^{2r} (T\ B_i)^2}{4} - \frac{T^2}{8r}$$

Donde TB_i es el total del bloque i, T es el gran total

La SC de error intrabloque se obtiene por direrencia, restando a la SC total todas las otras SC.

La tabla de analisis de variancia toma la siguiente forma.

TABLA 4.2 A. de V. del diseño factorial 2^3 con confusión parcial de las interacciones con r=4k repeticiones [k=1,2,3, -]

F. V.	g.l	SC
Bloques	2r-1	
Efectos parciales		
A	1	
B	1	
C	1	
Interacciones		
AB	1'	
AC	1'	
BC	1'	
ABC	1'	
Error interbloque	6r-7	
Total	8r-7	

Observvece que cuando se calculan los efectos principales se utilizan todas las 8r=32k observaciones mientras que en el calculo de las interacciones solo se incluyen 8(3k)=24k observaciones, es decir tres cuartos del total de observaciones. Así los efectos principales son determinados con mayor presición que el de las interacciones, la razón es 4:3. El número 3/4 recibe el nombre de información relativa.

Cuando se utiliza un esquema con confusión total, los efectos, totalmente confundidos, no se pueden estudiar. Una solución para estudiar todos los efectos, aunque algunos con menor presición es la confusión parcial.

4.11.- Factorial 2^5 en bloques de 8 unidades experimentales.

Por ejemplo, consideremos el factorial 2^5 en 4 bloques de $2^3=8$ unidades. Cada repetición tendrá tres efectos confundidos. Consideremos cuatro repeticiones, confundamos.

ABC y ADE (BCDE) en la 1a. repetición
ABD y BCE (ACDE) en la 2a. repetición
ACD y BDE (ABCE) en la 3a. repetición
ACE y BCD (ABDE) en la 4a. repetición

Entre parentesis se considera la interacción generalizada de los efectos considerados, las tres interacciones quedan confundidas con bloques en cada repetición. Observece que los efectos principales, las interacciones de dos factores, así como los efectos ABE, CDE, ABCD y ABCDE no estan confundidos con bloques, los efectos confundidos con bloques están parcialmente confundidos con una información relativa de 3/4.

Cada repetición se construye, formando el bloque principal que definen los efectos a nivel cero. Por ejemplo en la primera repetición $(ABC)_0$ y $(ADE)_0$ definen el subgrupo intrabloque. Los bloques de cada repetición son analogos a los bloques que se muestran en las primeras 4 repeticiones de la sección 4.22 que se da posteriormente.

Las sumas de cuadrados para los efectos no confundidos se calculan en la forma usual. Por ejemplo

$$SCA = \frac{[(A)_1 - (A)_2]^2}{2^5 . 4} \quad ; \quad SC(AB) = \frac{[(AB)_0 - (AB)_1]^2}{2^5 . 4}$$

De manera analoga se calcula la SC de los restantes efectos no confundidos.

La suma de cuadrados de los efectos confundidos, se calcula de las tres repeticiones en donde el efecto considerado no este confundido. Por ejemplo.

$$SC(ABC)' = \frac{[(ABC)_1' - (ABC)_0']^2}{2^5.3} \qquad SC(ABCE)' = \frac{[(ABCE)_0 - (ABCE)_1']^2}{2^5.3}$$

$(ABC)_1' = (ABC)_1^{I,III,IV}$ = suma de las $2^4 x 3k = 48k$ observaciones de las repeticiones tipo II, III y IV conteniendo $i+j+k=1 \mod 2$

De manera analoga se calculan las restantes SC de los efectos parcialmente confundidos. El análisis de varianza tendrá la si guiente forma.

TABLA 4.3 A.De V. para el diseño factorial 2^5 en bloques de 8 u.e. con confusión parcial

FV	GL.		
Bloques	15		Confusión parcial de
Efectos principales	5	31	ABC ADE (BCDE)
Interacciones 2 factores	10		ABD BCE (ACDE).
ABE	1		ACD BDE (ABCE)
CDE	1		ACE BCE (ABDE)
ABCD	1		Con información relati va de 3/4
ABCDE	1		
Efectos parcialmente confundi dos	12'		
Error	81		
Total	127		

La suma de cuadrados de bloques y del total se obtienen de manera usual. Los g.l. y la SC del error se obtiene por diferencia.

4.2. Indice de Planes Experimentales. Consideremos los diseños 2^n (n=4,5,6). con confusión parcial, balanceados de uso más frecuente.

4.2.1. Factorial 2^4 balanceado, el cual consta de 16 tratamien tos, consideraremos 6 repeticiones, cada una consta de 4 bloques, cada uno con 4 u.e. con todas las interacciones de dos factores confundidas parcialmente con información relativa de 5/6 y todas las interacciones de 3 factores confundidos con una información relativa de 1/2. La interacción generalizada, entre paréntesis.

Repetición I (4 bloques) Confusión de AB, ACD, (BCD)				Repetición II (4 bloques) Confusión de AC, ABD (BCD)			
Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Bloque VI	Bloque VII	Bloque VIII
$(AB)_0$	$(AB)_0$	$(AB)_1$	$(AB)_1$	$(AC)_0$	$(AC)_0$	$(AC)_1$	$(AC)_1$
$(ACD)_0$	$(ACD)_1$	$(ACD)_0$	$(ACD)_1$	$(ABD)_0$	$(ABD)_1$	$(ABD)_0$	$(ABD)_1$
ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCE	ABCD	ABCD	ABCD
0000	0001	0100	1000	0000	0001	0010	1000
0011	0010	0111	1011	0101	0100	0111	1101
1101	1100	1001	0101	1011	1010	1001	0011
1110	1111	1010	0110	1110	1111	1100	0110

Repetición III Confusión de AD, ABC, (BCD)				Repetición IV Confusión de BC, ABD, (ACD)			
Bloque IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
$(AD)_0$	$(AD)_0$	$(AD)_1$	$(AD)_1$	$(BC)_0$	$(BC)_0$	$(BC)_1$	$(BC)_1$
$(ABC)_0$	$(ABC)_1$	$(ABC)_0$	$(ABC)_1$	$(ABD)_0$	$(ABD)_1$	$(ABD)_0$	$(ABD)_1$
ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD
0000	0010	0001	1000	0000	0001	0010	0100
0110	0100	0111	1110	1001	1000	1011	1101
1011	1001	1010	0011	0111	0110	0101	0011
1101	1111	1100	0101	1110	1111	1100	1010

Repetición V Confusión de BD, ABC, (ACD)				Repetición VI Confusión de CD, ABC, (ABD)			
XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV
$(BD)_0$	$(BD)_0$	$(BD)_1$	$(BD)_1$	$(CD)_0$	$(CD)_0$	$(CD)_1$	$(CD)_1$
$(ABC)_0$	$(ABC)_1$	$(ABC)_0$	$(ABC)_1$	$(ABC)_0$	$(ABC)_1$	$(ABC)_0$	$(ABC)_1$
ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD
0000	0010	0001	0100	0000	0100	0001	0010
0111	0101	0110	0011	0111	0011	0110	0101
1010	1000	1011	1110	1011	1111	1010	1001
1101	1111	1100	1001	1100	1000	1101	1110

Análisis de la variancia

F.V.	GL.
Tratamientos	15
A	1
B	1
C	1
D	1
AB	1'
AC	1'
AD	1'
BC	1'
BD	1'
CD	1'
ABC	1'
ABD	1'
ACD	1'
BCD	1'
ABCD	1'
Bloques	23
Error	57
Total	95

El diseño balanceado requiere 6 (o multiplos de 6) repeticiones.

Se puede utilizar un número más pequeño de repeticiones, dependiendo de las interacciones que el investigador desee confundir.

En cada repetición se confunde una interacción de dos factores, así, si se desease confundir AC y BD deberán seleccionarse las re peticiones II y V, en este arreglo tendremos una información relativa de 1/2 sobre las interacciones dobles AC y BD y sobre las interacciones triples ABC, BCD, ABC, ACD. Las restantes están libres de bloques.

4.22.- Factorial 2^5, balanceado, en bloques de 8 unidades experimentales con confusión parcial de las interacciones de 3 y cuatro unidades con una información relativa de 4/5. Se consideran 5 repeticiones. Las interacciones generalizadas se dan entre paréntesis.

Repetición I (4 bloques)		confusión de ABC, ADE (BCDE)	
Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV
$(ABC)_0$	$(ABC)_0$	$(ABC)_1$	$(ABC)_1$
$(ADE)_0$	$(ADE)_1$	$(ADE)_0$	$(ADE)_1$
ABCDE	ABCDE	ABCDE	ABCDE
00000	00001	00100	10000
00011	00010	00111	10011
01100	01101	01000	11100
01111	01110	01011	11111
10101	10100	10001	00101
10110	10111	10010	00110
11001	11000	11101	01001
11010	11011	11110	01010

Repetición II	(4 bloques)	confusión de ABD, BCE, (ACDE)	
$(ABD)_0$	$(ABD)_0$	$(ABD)_1$	$(ABD)_1$
$(BCE)_0$	$(BCE)_1$	$(BCE)_0$	$(BCE)_1$
ABCDE	ABCDE	ABCDE	ABCDE
00000	00001	00010	01000
00101	00100	00111	01101
01011	01010	01001	00011
01110	01111	01100	00110
10010	10011	10000	11010
10111	10110	10101	11111
11001	11000	11011	10001
11100	11101	11110	10100

Repetición III (4 bloques) confusión de ACD, BDE, (ABCE)

$(ACD)_0$ $(BDE)_0$	$(ACD)_0$ $(BDE)_1$	$(ACD)_1$ $(BDE)_0$	$(ACD)_1$ $(BDE)_1$
ABCDE	ABCDE	ABCDE	ABCDE
00000	00001	00100	00010
00111	00110	00011	00101
01001	01000	01101	01011
01110	01111	01010	01100
10011	10010	10111	10001
10100	10101	10000	10110
11010	11011	11110	11000
11101	11100	11001	11111

Repetición IV (4 bloques) confusión de ACE, BCD, (ABDE)

$(ACE)_0$ $(BCD)_0$	$(ACE)_0$ $(BCD)_1$	$(ACE)_1$ $(BCD)_0$	$(ACE)_1$ $(BCD)_1$
ABCDE	ABCDE	ABCDE	ABCDE
00000	00010	00001	00100
00111	00101	00110	00011
01010	01000	01011	01110
01101	01111	01100	01001
10001	10011	10000	10101
10110	10100	10111	10010
11011	11001	11010	11111
11100	11110	11101	11000

Repetición V (4 bloques) confusión de ABE, CDE, (ABCD)

$(ABE)_0$ $(CDE)_0$	$(ABE)_0$ $(CDE)_1$	$(ABE)_1$ $(CDE)_0$	$(ABE)_1$ $(CDE)_1$
ABCDE	ABCDE	ABCDE	ABCDE
00000	00010	01000	00001
00110	00100	01110	00111
01011	01001	00011	01010
01101	01111	00101	01100
10011	10001	11011	10010
10101	10111	11101	10100
11000	11010	10000	11001
11110	11100	10110	11111

Análisis de Varianza

F.V.	G.L
Efectos principales	5
Interacciones de dos factores	10
Interacciones de tres factores (parcialmente confundidos)	10'
Interacciones de 4 factores (parcialmente confundidos)	10'
Interacción de 5 factores	1
Bloques	20
Error	104
Total	160

El número de repeticiones para un diseño balanceado es de 5 ó múltiplos de 5

Cuando se utilicen menos de 5 repeticiones

Se pueden confundir completamente dos interacciones triples y una interacción de 4 factores. Por ejemplo si la repetición 1 se repite el número de veces que sea necesario, este sería un esquema con confusión total, su análisis es en la forma considerada anteriormente.

Si además se desea información parcial sobre todos los tratamientos pueden utilizarse dos, o tres o cuatro repeticiones. Por ejemplo con las repeticiones 1 y 2 las interacciones ABC, ADE, ABD, BCE, BCDE y ACDE quedan parcialmente confundidas con una información relativa de 1/2

4.23.- Factorial 2^6 balanceado, en bloques de 8 u.e. con confusión parcial de todas las interacciones de 3 y 4 factores con una información relativa de 4/5. Las interacciones generalizadas se dan, entre parentesis.

Repetición I (8 bloques)

Confusión de ABC, CDE, (ABDE), ADF, (BCDF, ACEF; BEF)

Subgrupo Intrablok: $(ABC)_0$, $(CDE)_0$, $(ADF)_0$

Para la construcción de los otros 7 bloques, al subgrupo intrablok de esta repetición sumale 1 módulo 2 a el(los) tratamiento(s) que se indique (equivalente, intercambie los 1's con los 0's) a los restantes tratamientos repitalos como estan. (no los altere)

ABCDEF							
000000	$(ABC)_0$ $(CDE)_0$ $(ADF)_1$	$(ABC)_0$ $(CDE)_1$ $(ADF)_0$	$(ABC)_0$ $(CDE)_1$ $(ADF)_1$	$(ABC)_1$ $(CDE)_0$ $(ADF)_0$	$(ABC)_1$ $(CDE)_0$ $(ADF)_1$	$(ABC)_1$ $(CDE)_1$ $(ADF)_0$	$(ABC)_1$ $(CDE)_1$ $(ADF)_1$
000111							
011010							
011101	+1aF	+1aE	+1aD	+1aB	+1aA	+1aC	+1aA +1aE
101011							
101100							
110001							
110110							

Repetición II (8 bloques)

Confusión de ABD, DEF, (ABEF), BCF, (ACDF, BCDE, ACE)

Subgrupo Intrablok: $(ABD)_0$, $(DEF)_0$, $(BCF)_0$

ABCDEF							
	$(ABD)_0$ $(DEF)_0$ $(BCF)_1$	$(ABD)_0$ $(DEF)_1$ $(BCF)_0$	$(ABD)_0$ $(DEF)_1$ $(BCF)_1$	$(ABD)_1$ $(DEF)_0$ $(BCF)_0$	$(ABD)_1$ $(DEF)_0$ $(BCF)_1$	$(ABD)_1$ $(DEF)_1$ $(BCF)_0$	$(ABD)_1$ $(DEF)_1$ $(BCF)_1$
000000	+1aC	+1aE	+1aF	+1aA	+1aB	+1aD	+1aA +1aF
001011							
010101							
011110							
100110							
101101							
110011							
111000							

Repetición III

Confusión de ABE, BDF (ADEF) ACD (BCDE, ABCF, CEF)

Subgrupo Intrablok							
$(ABE)_0$ $(BDF)_0$ $(ACD)_0$	$(ABE)_0$ $(BDF)_0$ $(ACD)_1$	$(ABE)_0$ $(BDF)_1$ $(ACD)_0$	$(ABE)_0$ $(BDF)_1$ $(ACD)_1$	$(ABE)_1$ $(BDF)_0$ $(ACD)_0$	$(ABE)_1$ $(BDF)_0$ $(ACD)_1$	$(ABE)_1$ $(BDF)_1$ $(ACD)_0$	$(ABE)_1$ $(BDF)_0$ $(ACD)_1$
ABCDEF	+1aC	+1aF	+1aD	+1aB	+1aA	+1aB	+1aA +1aF
000000							
001101							
010011							
011110							
100111							
101010							
110100							
111001							

Repetición IV

Confusión de ABF, CDF (ABCD), ADE (BDEF, ACEF, BCE)

Subgrupo Intrablok							
$(ABF)_0$ $(CDF)_0$ $(ADE)_0$	$(ABF)_0$ $(CDF)_0$ $(ADE)_1$	$(ABF)_0$ $(CDF)_1$ $(ADE)_0$	$(ABF)_0$ $(CDF)_1$ $(ADE)_1$	$(ABF)_1$ $(CDF)_0$ $(ADE)_0$	$(ABF)_1$ $(CDF)_0$ $(ADE)_1$	$(ABF)_1$ $(CDF)_1$ $(ADE)_0$	$(ABF)_1$ $(CDF)_1$ $(ADE)_1$
ABCDEF	+1aE	+1aC	+1aD	+1aB	+1aA	+1aF	+1aA +1aC
000000							
001110							
010111							
011001							
100101							
101011							
110010							
111100							

Repetición V

Confusión de ACF, BCD, (ABDF), ADE, (CDEF, ABCE, BEF)

Subgrupo

Intrablok							
$(ACF)_0$ $(BCD)_0$ $(ADE)_0$	$(ACF)_0$ $(BCD)_0$ $(ADE)_1$	$(ACF)_0$ $(BCD)_1$ $(ADE)_0$	$(ACF)_0$ $(BCD)_1$ $(ADE)_1$	$(ACF)_1$ $(BCD)_0$ $(ADE)_0$	$(ACF)_1$ $(BCD)_0$ $(ADE)_1$	$(ACF)_1$ $(BCD)_1$ $(ADE)_0$	$(ACF)_1$ $(BCD)_1$ $(ADE)_1$
ABCDEF	+1aE	+1aB	+1aD	+1aF	+1aA	+1aC	+1aA +1aB
000000							
001111							
010110							
011001							
100011							
101100							
110101							
111010							

Repetición VI

Confusión de ABC, BDE, (ACDE), ADF, (BCDF, ABEF, CEF)

Subgrupo Intrabloque

$(ABC)_0$ $(BDE)_0$ $(ADF)_0$	$(ABC)_0$ $(BDE)_0$ $(ADF)_1$	$(ABC)_0$ $(BDE)_1$ $(ADF)_0$	$(ABC)_0$ $(BDE)_1$ $(ADF)_1$	$(ABC)_1$ $(BDE)_0$ $(ADF)_0$	$(ABC)_1$ $(BDE)_0$ $(ADF)_1$	$(ABC)_1$ $(BDE)_1$ $(ADF)_0$	$(ABC)_1$ $(BDE)_1$ $(ADF)_1$
ABCDEF							
000000							
000111	+1aF	+1aE	+1aD	+1aC	+1aA	+1aB	+1aA +1aE
011010							
011101							
101001							
101110							
110011							
110100							

Repetición VII

Confusión de ABF, DEF, (ABDE), BCD, (ACDF, BCEF, ACE)

Subgrupo Intrablok

$(ABF)_0$							
$(DEF)_0$							
$(BCD)_0$							
ABCDEF	$(ABF)_0$	$(ABF)_0$	$(ABF)_0$	$(ABF)_1$	$(ABF)_1$	$(ABF)_1$	$(ABF)_1$
000000	$(DEF)_0$	$(DEF)_1$	$(DEF)_1$	$(DEF)_0$	$(DEF)_0$	$(DEF)_1$	$(DEF)_1$
001110	$(BCD)_1$	$(BCD)_0$	$(BCD)_1$	$(BCD)_0$	$(BCD)_1$	$(BCD)_0$	$(BCD)_1$
010101							
011011	+1aC	+1aE	+1aD	+1aA	+1aB	+1aF	+1aA
100011							+1aD
101101							
110110							
111000							

Repetición VIII

Confusión de ABE, BDF, (ADEF), CDE (ABCD, BCEF, ACF)

Subgrupo Intrablok

$(ABE)_0$	$(ABE)_0$	$(ABE)_0$	$(ABE)_0$	$(ABE)_1$	$(ABE)_1$	$(ABE)_1$	$(ABE)_1$
$(BDF)_0$	$(BDF)_0$	$(BDF)_1$	$(BDF)_1$	$(BDF)_0$	$(BDF)_0$	$(BDF)_1$	$(BDF)_1$
$(CDE)_0$	$(CDE)_1$	$(CDE)_0$	$(CDE)_1$	$(CDE)_0$	$(CDE)_1$	$(CDE)_0$	$(CDE)_1$
ABCDEF							
000000							
001101	+1aC	+1aF	+1aD	+1aA	+1aE	+1aB	+1aA
010110							+1aD
011011							
100111							
101010							
110001							
111100							

Repetición IX

Confusión de ABD, CDF, (ABCF), AEF, (BDEF, ACDE, BCE)

Subgrupo Intrablok

(ABD) (CDF) (AEF)	$(ABD)_0$ $(CDF)_0$ $(AEF)_1$	$(ABD)_0$ $(CDF)_1$ $(AEF)_0$	$(ABD)_0$ $(CDF)_1$ $(AEF)_1$	$(ABD)_1$ $(CDF)_0$ $(AEF)_0$	$(ABD)_1$ $(CDF)_0$ $(AEF)_1$	$(ABD)_1$ $(CDF)_1$ $(AEF)_0$	$(ABD)_1$ $(CDF)_1$ $(AEF)_1$
ABCDEF							
000000	+1aE	+1aC	+1aF	+1aB	+1aA	+1aD	+1aA +1aC
001011							
010111							
011100							
100101							
101110							
110010							
111001							

Repetición X

Confusión de AEF, BDE (ABDF), ACD, (CDEF, ABCE, BCF)

Subgrupo Intrablok

(AEF) (BDE) (ACD)	$(AEF)_0$ $(BDE)_0$ $(ACD)_1$	$(AEF)_0$ $(BDE)_1$ $(ACD)_0$	$(AEF)_0$ $(BDE)_1$ $(ACD)_1$	$(AEF)_1$ $(BDE)_0$ $(ACD)_0$	$(AEF)_1$ $(BDE)_0$ $(ACD)_1$	$(AEF)_1$ $(BDE)_1$ $(ACD)_0$	$(AEF)_1$ $(BDE)_1$ $(ACD)_1$
ABCDEF							
000000	+1aC	+1aB	+1aD	+1aF	+1aA	+1aE	+1aA +1aB
001111							
010011							
011100							
100110							
101001							
110101							
111010							

Esquema del análisis de Variancia

F.V.	G.L.
Bloques	80
Efectos principales	6
Interacciones de dos factores	15
Interacciones de tres factores	20'
Interacciones de cuatro factores	15'
Interacciones de cinco factores	6
Interacciones de seis factores	1
Error	496
Total	639

En este experimento, en cada repetición no se confunde ningún efecto principal, ni ninguna interacción de dos factores, se confunden cuatro de las 20 interacciones de tres factores y tres de las 15 interacciones de cuatro factores. El diseño balanceado requiere de 10 repeticiones es decir de $2^6 \times 10 = 640$ unidades experimentales el cual es un número bastante grande.

Con una sola repetición se tendrá un esquema con confusión total de los efectos considerados en el, los 63 g.l. quedan distribuídos de la siguiente manera.

F.V.	G.L.
Bloques	7
Efectos principales	6
Interacciones de dos factores	15
Interacciones de tres factores (no confundidas)	16
Error (de las interacciones de más de tres factores no confundidas)	19
Total	64

CAPITULO 5

FACTORIAL 3^n

5.1 Introducción.

Consideramos n factores a 3 niveles cada uno, a los cuales denotaremos por 0 o nivel bajo, 1 o nivel medio, 2 o nivel alto. Analizaremos los datos por medio de la teoria de Grupos.

En un factorial 3^2 el número de tratamientos es 9, los representaremos por (i,j) $i,j=0,1,2$

$(A)_0$ constituye el total de tres tratamientos para los cuales $i=0$ modulo (3)

$\therefore (A)_0 = 00+01+02$

Analogamente $(A)_1 = 10+11+12$ $\quad (A)_2 = 20+21+22$

$(B)_0 = 00+10+20 \quad (B)_1 = 01+11+21 \quad (B)_2 = 02+12+22$

El efecto principal de A es la variación entre los totales $(A)_0$ $(A)_1$ y $(A)_2$. La interacción entre dos factores, se descompone en la variación dentro de 2 conjuntos de tres totales, se estudia como sigue:

$(A^1B^1)_0$ constituye el total de tres tratamientos para los cuales $1i+1j= i+j= 0$ modulo 3

$\therefore (A^1B^1)_0 = 00+12+21$

Analogamente $(A^1B^1)_1 = 01+10+22$, $\quad (A^1B^1)_2 = 02+20+11$

$(A^1B^2)_k$ constituye el total de tres tratamientos para los cuales $1i+2j = i+2j = k$ modulo 3, $k=0,1,2$.

La composición de estos 3 totales queda de la siguiente manera.

Subgrupo Intrablock $(A^1B^2)_0$	$i+2j=1 \mod(3)$ $(A^1B^2)_1$	$i+2j=2 \mod(3)$ $(A^1B^2)_2$
00	10	20
11	21	01
22	02	12

Observece que basta sumar 1 y 2 a i en el subgrupo intrablock para pasar de $(A^1B^2)_0$ a $(A^1B^2)_1$ y $(A^1B^2)_2$ respectivamente.

En general al conjunto donde esten todos los factores a su nivel mas bajo se le llamará "Subgrupo Intrabloque".

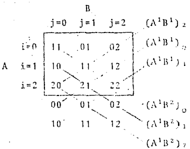
Una manera de manejar los datos, es la que se describe a continuación.

Tabla 5.1 Efectos principales

		B			
		j=1	j=1	j=2	
A	i=0	00	01	02	$(A)_0$
	i=1	10	11	12	$(A)_1$
	i=2	20	21	22	$(A)_2$
		$(B)_0$	$(B)_1$	$(B)_2$	

∴ Sumando sobre renglones obtenemos los totales $(A)_0$, $(A)_1$ y $(A)_2$ y sumando sobre columnas obtenemos los totales $(B)_0$, $(B)_1$ y $(B)_2$

Tabla 5.2 Interacciones



∴ Agregamos los dos primeros renglones y sumando en diagonales, en un sentido obtenemos los totales para A^1B^1, en el otro sentido los totales para A^1B^2.

Estas ideas se generalizan a factoriales 3^n (lo veremos en un ejemplo más adelante)

En general, en un diseño factorial 3^n, los efectos principales, constituyen la variación en un conjunto de 3 totales, por ejemplo; el efecto A es la variación entre $(A)_0$, $(A)_1$ y $(A)_2$ donde $(A)_i$ denota el total de tratamientos en los que el efecto A su nivel i $(i=0,1,2)$

Las interacciones de dos factores se forman por la variación entre tres totales, cada una con dos g.l.

Así, el efecto AB se descompone en A^1B^1 y A^1B^2 los cuales constan de 3 totales que son $(A^1B^1)_0$, $(A^1B^1)_1$, $(A^1B^1)_2$ y $(A^1B^2)_0$, $(A^1B^2)_1$, $(A^1B^2)_2$ respectivamente. Donde $(A^1B^1)_0$ constituye el total de tratamientos en los que $i+j=0$ mod(3).

Ejemplifiquemos la construcción de A^1B^2 en un factorial 2^3

Subgrupo Intrabloque A^1B^2 $i+2j=0 \mod(3)$ $(A^1B^2)_0$	$i+2j=1 \mod(3)$ $(A^1B^2)_1$	$i+2j=2 \mod(3)$ $(A^1B^2)_2$
000	100	200
001	101	201
002	102	202
110	210	010
111	211	011
112	212	012
220	020	120
221	021	121
222	022	122

Observe que basta sumar 1 a i mod(3) en $(A^1B^2)_0$ para pasar a $(A^1B^2)_1$, de manera analoga se pasa de $(A^1B^2)_1$ a $(A^1B^2)_2$.

En general, a partir del subgrupo intrabloque podemos generar los otros conjuntos.

Las interacciones de tres factores se forman por la variación entre 3 totales de 4 subconjuntos, cada una con dos g.l.

Asi, el efecto ABC se descompone en $A^1B^1C^1$, $A^1B^1C^2$, $A^1B^2C^1$ y $A^1B^2C^2$, cada uno de ellos consta de tres totales, por ejemplo:

$A^1B^1C^2$ consta de $(A^1B^1C^2)_0$, $(A^1B^1C^2)_1$, $(A^1B^1C^2)_2$ donde

$(A^1B^1C^2)_m$ constituye el total de tratamientos en los que $i+j+2k=m \mod(3)$. $m=0,1,2$

Observe que A siempre tiene exponente 1.

Las interacciones de k factores se forman por la variación entre 3 totales de 2^{k-1} subconjuntos, cada una con dos g.l. construídos en forma analoga.

5.2 Sumas de cuadrados. Usando la teoria de grupos una forma de obtenerla es

$$SC_A = \frac{[(A)_{i=0}]^2 + [(A)_{i=1}]^2 + [(A)_{i=2}]^2}{3^{n-1} r} - \frac{T^2}{3^n r}$$

Cada $(A)_i$ consta de la suma de 3^{n-1} elementos, la S.C. es la variación entre los totales generados por i ∴ por $(A)_0$, $(A)_1$ y $(A)_2$, la cuál tiene 2 g.l., se consideran r repeticiones y que T es el gran total.

La SC para una interacción tiene 4 g.l. esta se descompone en dos SC. cada una con dos g.l. de la siguiente manera :

$$SC_{AB} = SC_{A^1B^1} + SC_{A^1B^2}$$

donde

$$SC_{A^1B^1} = \frac{[(A^1B^1)\, i+j=0]^2 + [(A^1B^1)\, i+j=1]^2 + [(A^1B^1)\, i+j=2]^2}{3^{n-1}\; r} - \frac{T^2}{3^n r}$$

que es la variación entre los totales generados por i+j=0,1,2 mod3 y

$$SC_{A^1B^2} = \frac{[(A^1B^2)\, i+2j=0]^2 + [(A^1B^2)\, i+2j=1]^2 + [(A^1B^2)\, i+2j=2]^2}{3^{n-1}\; r} - \frac{T^2}{3^n r}$$

la cuál es la variación entre los totales generados por i+2j=0,1,2 mod.3

La SC para una interacción de 3 factores tiene 8 g.l. se descompone en la variación dentro de 4 subconjuntos cada uno de ellos tiene 2 g.l. y consta de 3 totales.

Estos subconjuntos los obtenemos de la siguiente forma con $i+j+k=0,1,2 \bmod(3)$ generamos un grupo de 3 totales su SC se denota por $SC_{A^1B^1C^1}$ con 2 g.l.

$i+j+2k = 0,1,2$ con $SC_{A^1B^1C^2}$ y 2 g.l.
$i+2j+k = 0,1,2$ con $SC_{A^1B^2C^1}$ y 2 g.l.
$i+2j+2k = 0,1,2$ con $SC_{A^1B^2C^2}$ y 2 g.l.

Ejemplifiquemos una de estas SC.

$$SC_{A^1B^2C^2} = \frac{[(A^1B^2C^2)_{i+2j+2k=0}]^2 + [(A^1B^2C^2)_{i+2j+2k=1}]^2 + \dots}{3^{n-1}r}$$

$$\dots \frac{+[(A^1B^2C^2)_{i+2j+2k=2}]^2}{} - \frac{T^2}{3^n r}$$

De manera analoga se obtienen la SC para interacciones de más de 3 factores.

Así en un factorial 3^3 con r repeticiones que esta en un diseño en bloques al azar el A. de V. es

TABLA 5.3 A. de V. para un diseño factorial 3^3 en bloques de azar

F.V.	g.l.	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio
Bloques (repeticiones)	r-1		
Tratamientos	26	SCT	S_0^2
A	2	SCA	S_1^2
B	2	SCB	S_2^2
AB	4	SC(AB)	S_3^2
A^1B^1	2	$SC(A^1B^1)$	
A^1B^2	2	$SC(A^1B^2)$	
C	2	SCC	S_4^2
AC	4	SC(AC)	S_5^2
A^1C^1	2	$SC(A^1C^1)$	
A^1C^2	2	$SC(A^1C^2)$	
BC	4	SC(BC)	S_6^2
B^1C^1	2	$SC(B^1C^1)$	
B^1C^2	2	$SC(B^1C^2)$	
ABC	8	SC(ABC)	S_7^2
$A^1B^1C^1$	2	$SC(A^1B^1C^1)$	
$A^1B^1C^2$	2	$SC(A^1B^1C^2)$	
$A^1B^2C^1$	2	$SC(A^1B^2C^1)$	
$A^1B^2C^2$	2	$SC(A^1B^2C^2)$	
Error	26(r-1)	SCE	
Total	27r-1	SCT	

r>1. Si r=1 y la interacción de tres factores es negligible esta se puede tomar, para estimar el error. Si todos los efectos son fijos, todos los CM se prueban contra el CM del error. En caso de tener efectos aleatorios es necesario recurrir a las reglas de E(CM)* y en base a ellas planear las pruebas de hipótesis.

* se dan en el apendice.

5.3. Ejemplo de un factorial 3^3 en donde el análisis se presenta en base a teoría de grupos.

En la producción de cierto material se consideran tres variables de interés: O el efecto de operador (tres operadores) C el catalizador usado en el experimento (tres catalizadores), y T el tiempo de lavado de el producto siguiendo un proceso de enfriamiento (15, 17.5 y 20 minutos).

El diseño experimental fue completamente al azar y los factores se consideraron fijos. Se hicieron 3 repeticiónes de cada uno de los veintisiete tratamientos. Los datos codificados son los siguientes.

TABLA 5.4 Factorial 3^3 en diseño completamente al azar. (3 repeticiones)

	Tiempo de lavado (T_k)								
	15 minutos (k=0)			17.5 minutos (k=1)			20 minutos (k=2)		
	Catalizador (C_j)								
Operador	0	1	2	0	1	2	0	1	2
	-0.3	-0.7	0.2	-0.2	-0.5	0.5	-0.1	-0.5	1.2
i=0	-0.2	-0.8	0.6	0.6	0.1	0.6	1.1	1.1	0.7
	0.3	-0.3	1.0	0.4	-0.6	0.7	0.5	-0.7	0.0
	0.4	-0.8	-0.3	-0.2	0.9	-0.1	-1.2	1.6	-0.2
i=1	0,8	-0.1	-0.5	0.6	-1.9	-0.6	0.3	-3.5	-0.8
	0.5	-0.5	-0.5	0.0	-0.8	0.1	-0.1	-1.1	0.5
	2.6	1.0	0.1	1.3	-0.1	0.5	-0.3	-0.3	0.9
i=2	3.1	0,6	0.0	1.5	0.5	0.4	0.7	0.5	0.6
	3.5	0,5	0.5	2.1	0.2	0.8	1.7	-0.1	1.2

Modelo para los datos del factorial 3^3

$$Y_{ikjr} = \mu+O_i+C_j+T_k+(OC)_{ij}+(OT)_{ij}+(CT)_{jk}+(OCT)_{ijk}+E_r(ijk)$$

$$i,j,k,r = 1,2,3.$$

donde y_{ijkr} es la r -esima observación del tratamiento (ijk)

O_i es el efecto del operador i. $i=0,1,2$

C_j es el efecto del catalizador j. $j=0,1,2$

T_k es el efecto del tiempo de lavado k. $k=0,1,2$

$(OC)_{ij}$, $(OT)_{ik}$, $(CT)_{jk}$ son los efectos de interacción del operador i con el catalizador j; del operador i con el tiempo de lavado k; y del catalizador j con el tiempo de lavado k, respectivamente $(OCT)_{ijk}$ es el efecto de interacción de los tres factores $E_{r(ijk)}$ es el error experimental, se supone $E_{e(ijk)} \sim N(0,\sigma^2)$

Para obtener los totales que corresponden a los efectos principales e interacciones, resumamos los calculos en las siguientes tablas de doble y de triple entrada.

Para el cálculo de los totales que le corresponden a la interacción OCT, primero sumamos sobre repeticiones en la tabla 5.4, con ello obtenemos los datos que se muestran en cuadro punteado en la tabla 5.5, en segundo lugar, agreguemos los 2 primeros renglones de cada cuadro como se muestra en la tabla 5.5.

Sumemos todas las diagonales en los cuadros. En el primer cuadro los datos son

```
                  I
000 010 020       II
100 110 120       III
200 210 220
-----------
000 010 020       IV
100 110 120       V
                  VI
```

Observece que obtenemos seis diagonales.

Sea $X \equiv i+j+k$
$Y \equiv i+j+2k$
$Z \equiv i+2j+k$
$W \equiv i+2j+2k$

Las combinaciones de tratamientos que estan sobre la diagonal I cumplen con X=2 mod 3, Y=2 mod 3, en diagonal II, X=0, Y=0 y en diagonal 3, X=1, Y=1, en IV, Z=0, W=0 en V, Z=1, W=1, en VI Z=2, W=2.

En el segundo (tercer) cuadro, con respecto al primero, difieren en que k=0 en 1er. cuadro y k=1 (k=2) en el 2o. (3er) cuadro, esto hace que con un ordenamiento similar en las diagonales XyZ se incremente en 1 mod 3 (en 2 mod 3) y que YyW se incremente en 2 mod 3 (en 1 mod 3).

TABLA 5.5 Interacción OCT

O	T: k=0, C: j=0	j=1	j=2			T: k=1, C: j=0	j=1	j=2			T: k=2, C: j=0	j=1	j=2		
				9.6	X=2, Y=2				4.9	X=0, Y=1				1.0	X=1, Y=0
i=0	-0.2	-2.0	1.8	0.3	X=0, Y=0	0.8	-1.0	1.8	0.8	X=1, Y=2	1.5	-0.1	1.9	0.6	X=2, Y=1
i=1	1.7	-1.4	-1.6	0.3	X=1, Y=1	0.4	-1.8	-0.6	1.1	X=2, Y=0	-1.0	-3.0	-0.5	1.6	X=0, Y=2
i=2	9.2	2.1	0.6			4.9	0.6	1.7			2.1	-0.4	2.7		
i=0	-0.2	-2.0	1.8	-1.0	Z=0, W=0	0.8	-1.0	1.8	0.7	Z=1, W=2	1.5	-0.1	1.9	1.2	Z=2, W=1
i=1	1.7	-1.4	-1.6	5.6	Z=1, W=1	0.4	-1.8	-0.6	2.8	Z=2, W=0	-1.0	-3.0	-0.5	0.5	Z=0, W=2
				5.6	Z=2, W=2				3.3	Z=0, W=1				1.5	Z=1, W=0

$X = i + j + k$
$Y = i + j + 2k$
$Z = i + 2j + k$
$W = i + 2j + 2k$

Sumando los totales donde X=0,1,2 respectivamente, obtenemos

$(O^1C^1T^2)_0 = 0.3+4.9+1.6=6.8$
$(O^1C^1T^2)_1 = 0.3+0.8+1.0=2.1$
$(O^1C^1T^2)_2 = 9.6+1.1+0.6=11.3$

Sumando los totales donde Y=0,1,2 respectivamente obtenemos

$(O^1C^1T^2)_0 = 0.3+1.1+1.0=2.4$
$(O^1C^1T^2)_1 = 0.3+4.9+0.6=5.8$
$(O^1C^1T^2)_2 = 9.6+0.8+1.6=12.0$

$(O^1C^2T^1) = -1.0+3.3+0.5=2.8$
$(O^1C^2T^1) = 5.6+0.7+1.5=7.8$
$(O^1C^2T^1) = 5.6+2.8+1.2=9.6$

$(O^1C^2T^2) = -1.0+2.8+1.5=3.3$
$(O^1C^2T^2) = 5.6+3.3+1.2=10.1$
$(O^1C^2T^2) = 5.6+0.7+0.5=6.8$

T=20.2

Con los datos de la tabla 5.5 podemos obtener los totales de la interacción OC, sumando sobre k; de la interacción OT sumando sobre j; y de la interacción CT sumando sobre i. Agregando los dos primeros renglones y sumando sobre las diagonales, obtenemos los datos que se muestran en la tabla 5.6.

TABLA 5.6 Interacciones de 2 factores

a) Interacción OC

O \ C	0	1	2	
				$(O^1C^1)_2 = 15.5$
0	2.1	-3.1	5.5	$(O^1C^1)_0 = 1.7$
1	1.1	-6.2	-2.7	$(O^1C^1)_1 = 3.0$
2	16.2	2.3	5.0	
0	2.1	-3.1	5.5	$(O^1C^2)_0 = 0.9$
1	1.1	-6.2	-2.7	$(O^1C^2)_1 = 8.9$
				$(O^1C^2)_2 = 10.4$

b) Interacción OT

O \ T	0	1	2	
				$(O^1T^1)_2 = 13.2$
0	-0.4	1.6	3.3	$(O^1T^1)_0 = 2.3$
1	-1.3	-2.0	-1.5	$(O^1T^1)_1 = 4.7$
2	11.9	7.2	4.4	
0	-0.4	1.6	3.3	$(O^1T^2)_0 = 2.0$
1	-1.3	-2.0	-1.5	$(O^1T^2)_1 = 9.2$
				$(O^1T^2)_2 = 9.0$

c) Interacción CT

C \ T	0	1	2	
				$(C^1T^1)_2 = 1.2$
0	10.7	6.1	2.6	$(C^1T^1)_0 = 10.1$
1	-1.3	-2.2	-3.5	$(C^1T^1)_1 = 8.9$
2	0.8	2.9	4.1	
0	10.7	6.1	2.6	$(C^1T^2)_0 = 12.6$
1	-1.3	-2.2	-3.5	$(C^1T^2)_1 = 4.2$
				$(C^1T^2)_2 = 3.4$

Tomando los 3 primeros renglones de cada cuadro de la tabla 5.6, podemos formar los cuadros para calcular los totales con los que medimos la variación de cada efecto principal, estos cuadros se resumen en la tabla 5.7.

TABLA 5.7 Totales para efectos principales

a) Efecto de O y C

O \ C	0	1	2	Totales
0	2.1	-3.1	5.5	$4.5=O_0$
1	1.1	-6.2	-2.7	$-7.8=O_1$
2	16.2	2.3	5.0	$23.5=O_2$
Totales	19.4	-7.0	7.8	20.2
	C_0	C_1	C_2	

b) Efecto de O y de T

O \ T	0	1	2	Totales
0	-0.4	1.6	3.3	4.5=O_0
1	-1.3	-2.0	-4.5	-7.8=O_1
2	11.9	7.2	4.4	23.5=O_2
Totales	10.2	6.8	3.2	20.2=T
	T_0	T_1	T_2	

c) Efecto de C y T

C \ T	0	1	2	Totales
0	10.7	6.1	2.6	19.4=C_0
1	-1.3	-2.2	-3.5	-7.0=C_1
2	0.8	2.9	4.1	7.8=C_2
Totales	10.2	6.8	3.2	20.2
	T_0	T_1	T_2	

Así, con las tablas 5.5, 5.6 y 5.7 obtenemos los totales que se requieren para calcular la variación de cualquier efecto o interacción, esto lo llevaremos a cabo mediante el calculo de las S.C.

Sumas de cuadrados

$$SCO=\frac{(0)_0^2+(0)_1^2+(0)_2^2}{3^2r}-\frac{T^2}{3^3r}=\frac{4.5^2+(-7.8)^2+(23.5)^2}{27}-\frac{(20.2)^2}{81}=18.4195$$

$$SCT=\frac{10.2^2+6.8^2+3.2^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=5.9452-5.0375=0.90765$$

$$SCC=\frac{19.4^2+(-7)^2+7.8^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=18.0074-5.0375=12.9699$$

$$SC(O^1C^1)=\frac{1.7^2+3^2+15.5^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=9.3385-5.0375=4.3010$$

$$SC(O^1C^2)=\frac{0.9^2+8.9^2+10.4^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=6.9696-5.0375=1.9321$$

$$SC(OC)=SC(O^1C^1)+SC(O^1C^2)=6.2331$$

$$SC(O^1T^1)=\frac{2.3^2+4.7^2+13.2^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=7.4674-5.0375=2.4299$$

$$SC(O^1T^2)=\frac{2^2+9.2^2+9^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=6.2830-5.0375=1.2454$$

$$SC(OT)=SC(O^1T^1)+SC(O^1T^2)=3.6753$$

$$SC(C^1T^1)=\frac{10.1^2+8.9^2+1.2^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=6.7652-5.0375=1.7276$$

$$SC(C^1T^2)=\frac{12.6^2+4.2^2+3.4^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=6.9615-5.0375=1.9239$$

$$SC(CT)=SC(C^1T^2)+SC(C^1T^2)=3.6516$$

$$SC(O^1C^1T^1)=\frac{6.8^2+2.1^2+11.3^2}{27}-\frac{20.2^2}{81}=6.6052-5.0375=1.5676$$

$$SC(O^1C^1T^2) = \frac{2.4^2+5.8^2+12^2}{27} - \frac{20.2^2}{81} = 6,7926-5,0375=1.7551$$

$$SC(O^1C^2T^1) = \frac{2.8^2+7.8^2+9.6^2}{27} - \frac{20.2^2}{81} = 5.9570-5.0375=0.9195$$

$$SC(O^1C^2T^2) = \frac{3.3^2+10.1^2+6.8^2}{27} - \frac{20.2^2}{81} = 5.8941-5.0375=0.8554$$

$$SC(OCT) = SC(O^1C^1T^1)+SC(O^1C^1T^2)+SC(O^1C^2T^1)+SC(O^1C^2T^2) = 5.0988$$

$$SC_{tratamientos} = SCO+SCC+SCT+SC(OC)+ --- + SC(OCT) =$$
$$= 18.4195+12.9699+0.90765 + --- + 5.0988 =$$
$$= 50.95582$$

$$SC_{total} = \sum_r \sum_i \sum_j \sum_k Y^2_{ijkr} - \frac{T^2}{81} = 167.98-5.03755=162.9425$$

$$SC_{bloques} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{Y^2_{ijk}}{3} - \frac{T^2}{81} = \frac{10.2^2+6.8^2+3.2^2}{3} - 5.0375$$

$$= 53.5067-5.0375=48.4691$$

$$SC_{error} = SC_{total}-SC_{trat}-SC_{blo} = 162.9425-50.95582-48.4691$$

$$= 63.5178$$

Los resultados anteriores quedan resumidos en la siguiente tabla de A. de V.

TABLA 5.8 Análisis de Variancia del Factorial 3^3

F.V	G.L	S.C	C.M	F
Bloques	2	48.4691	24.23455	19.84005
Tratamientos	26	50.95582	1.95983	1.60446
O	2	18.4195	9.20975	7.53973**
C	2	12.9699	6.48495	5.30902**
T	2	0.90765	0.45382	0.371532
OC	4	6.2331	1.558275	1.27571
O^1C^2	2	4.3010	2.1505	1.7605
O^1C^2	2	1.9321	0.96605	0.79087
OT	4	3.6753	0.918825	0.752212
O^1T^1	2	2.4299	1.21495	0.99464
O^1T^2	2	1.2454	0.6227	0.50978
CT	4	3.6516	0.9129	0.717362
C^1T^1	2	1.7276	0.86383	0.70719
C^1T^2	2	1.9239	0.96195	0.78752
OCT	8	5.0988	1.2747	1.043556
$O^1C^1T^1$	2	1.5676	0.7838	0.641672
$O^1C^1T^2$	2	1.7551	0.8755	0.718422
$O^1C^2T^1$	2	0.9195	0.45975	0.376382
$O^1C^2T^2$	2	0.8554	0.4277	0.350144
Error	52	63.5178	1.221496	
Total	80	162.9425		

** Denota significancia a un nivel de 1%.

5.4. Diseño factorial 3^3

La constitución de los bloques y el análisis de variancia cuando se consideran r bloques (repeticiones) se da a continuación.

Factorial 3^3 en bloques al azar (usando grupos)

Bloque I (27 u.e.)

000	100	200
001	101	201
002	102	202
010	110	210
011	111	211
012	112	212
020	120	220
021	121	221
022	122	222

Tabla 5.9 A de V para un factorial 3 en bloques de azar

F.V.	G.L.	
Tratamientos	26	
A	2	
B	2	
AB	4	
A^1B^1		2
A^1B^2		2
C	2	
AC	4	
A^1C^1		2
A^1C^2		2
BC	4	
⋮	⋮	

⋮	⋮
B^1C^1	2
B^1C^2	2
ABC	8
$A^1B^1C^1$	2
$A^1B^1C^2$	2
$A^1B^2C^1$	2
$A^1B^2C^2$	2
Bloques	r-1
Error	26(r-1)
Total	27r-1

CAPITULO 6

CONFUSION EN DISEÑOS FACTORIALES 3^n.

6.1 Introducción.

Los principios básicos de confusión en diseños factoriales 3^n son similares a los utilizados para los diseños 2^n, tratados en el capítulo anterior, con cierta diferencia en el procedimiento debido a que hay un número más grande de niveles por factor. Como cada factor tiene tres niveles, el número de bloques deberá ser 3,9,27,...., en general 3^p bloques con $1 \leq p \leq n$.

En experimentos factoriales 3^n la SC. de tratamientos (tiene $3^n - 1$ g.l.) se puede descomponer en $(3^n - 1)/2$ efectos con 2 g.l. cada uno. Observemos que la interacción de dos efectos consiste de 2 pares de g.l.; así la interacción de A y B consta de A^1B^1 y A^1B^2 cada una con dos g.l. Cuando se confundan con bloques dos o más efectos también se confundirán sus interacciones generalizadas.

Así en un factorial 3^n si se confunde un efecto X con bloques, cada uno de ellos tendrá 3^{n-1} u.e. Si además se confunde otro efecto Y diferente, también se confundirán con bloques sus interacciones generalizadas las cuales son XY y XY^2, donde los exponentes se evalúan módulo 3, así quedarán confundidos los efectos X, Y, XY, XY^2 con bloques, cada uno de ellos tendrá 3^{n-2} u.e.

Si confundimos además otro efecto W diferente de los cuatro anteriores, también se confundirán con bloques sus interacciones generalizadas las cuales son XW, XW^2, YW, YW^2, XYW, XYW^2, XY^2W, y XY^2W^2, los exponentes se evalúan módulo 3.

Adoptamos la regla de que, en cualquier símbolo el exponente de la primer letra es la unidad. Si se toman en orden diferente dos efectos aparece una ambiguedad no existente porque en un efecto o interacción dada, la comparación entre combinaciones de tratamientos dada por $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots = 0, 1, 2$ es equivalente a la comparación entre combinaciones dada por $2a_1x_1+2a_2x_2+2a_3x_3+\ldots = 0, 2, 1.$ Así adoptando esta regla en A^2BC^2D tendremos $A^2BC^2D = (A^2BC^2D)^2 = A^4B^2C^4D^2 = AB^2CD^2$. De esta forma damos una especificación completa y única de todos los efectos e interacciones.

El bloque que contiene a la combinación de tratamientos (0,0,...0) (n ceros) es llamado el bloque principal o subgrupo intrabloque debido a la estructura matemática que en el se forma mediante la suma módulo 3 de las componentes respectivas.

6.2 Confusión en un factorial 3^2

El diseño más simple es el del factorial 3^2, en este caso los efectos son A, B, A^1B^1, A^1B^2, como antes, deseamos que los efectos principales queden libres de bloques, como una repetición consta de 9 combinaciones de tratamientos y 3 es el único factor de 9, el tamaño del bloque incompleto es de 3 unidades experimentales, por ejemplo si se desea confundir con bloques el efecto A^1B^2 (Plan 1) o el efecto A^1B^1 (Plan 2) la distribución de los efectos debe ser

TABLA 6.1 Diseño Factorial 3^2 con AB parcialmente confundida

Plan 1		
$(A^1B^2)_0$	$(A^1B^2)_1$	$(A^1B^2)_2$
00	10	20
11	21	01
22	02	12
A^1B^2 confundido		

Plan 2		
$(A^1B^1)_0$	$(A^1B^1)_1$	$(A^1B^1)_2$
00	01	02
12	10	11
21	22	20
A^1B^1 confundido		

Hay dos posibilidades, en el plan 1 las componentes de A^1B^2 estan totalmente confundidas con los bloques incompletos, ya que los totales de bloques son iguales a los totales de A^1B^2, los efectos principales y la componente A^1B^1 no se confunden con bloques, en el plan 2 las componentes de A^1B^1 estan totalmente confundidas con bloques. Si el esquema de confusión del plan 1 (plan 2) se repite, aleatorizando los bloques en cada repetición y tres tratamientos dentro de cada bloque se tendrá un diseño con confusión total de A^1B^2 (A^1B^1).

Si el número de repeticiones en el experimento es par, podemos usar la mitad de las repeticiones con el plan 1, y la otra mitad con el plan 2. Con ello, el efecto A^1B^2 puede ser estimado (libre del efecto de bloques) de las repeticiones en donde el plan 2 es utilizado, recíprocamente el efecto A^1B^1 se estima de las repeticiones en donde el plan 1 es utilizado. Este par de efectos tienen así una información relativa de 1/2. Se dice que la confusión es <u>balanceada</u> con respecto a AB, lo cual es conveniente ya que no hay razón para confundir más A^1B^2 que A^1B^1.

Las sumas de cuadrados se calculan de manera usual para los efectos principales y bloques $\therefore$ si hay $n = 2k$ repeticiones

$$SCA = \frac{(A)_0^2 + (A)_1^2 + (A)_2^2}{3r} - \frac{T^2}{9r}$$

$$SCB = \frac{(B)_0^2 + (B)_1^2 + (B)_2^2}{3r} - \frac{T^2}{9r}$$

Donde $(A)_i$ es la suma de los 3r elementos donde el índice del efecto A es i (i=0,1,2).

$(B)_j$ es la suma de los 3r elementos donde el índice del efecto B es j (j=0,1,2). T: es el gran total ∴ la suma de los 9r datos.

Por ejemplo $(A)_1 = (10 + 11 + 12)$

Para el cálculo de la SC de los efectos confundidos se utilizan las repeticiones en las que el efecto confundido no lo este. Así por ejemplo.

$$SC(A^1B^1) = \frac{(A^1B^1)_0^2 + (A^1B^1)_1^2 + (A^1B^1)_2^2}{3k} - \frac{(T')^2}{9k}$$

donde $(A^1B^1)_m$ es la suma de los 3k elementos del plan 1 donde i+j=m mod 3.

T' es la suma de los 9k elementos del plan 1. De manera analoga se calcula $(A^1B^2)_m$ con los elementos del plan 2.

La tabla de análisis de variancia es la siguiente.

TABLA 6.2 A. de V. para el diseño factorial 3^2 con confusión parcial de A^1B^1 y A^1B^2

F.V.	G.L.	
A	2	
B	2	
A^1B^1	2'	$r = 2k \quad k = 1,2,2,\ldots$
A^1B^2	2'	
Bloques	3r-1	
Error	6r-8	
Total	9r-1	

6.3 Confusión en el Diseño Factorial 3^3

En este diseño hay, 27 combinaciones de tratamientos, se utiliza la misma notación, así 021 denota la combinación de los tratamientos donde A esta su nivel bajo, B a su nivel alto, y C a su nivel medio. Confundiendo un (dos) efecto(s) con bloques se pueden usar bloques incompletos de tamaño 9(3). Nuevamente lo más conveniente es confundir las interacciones de alto orden, la interacción ABC con 8 g.l. se descompone en los efectos $A^1B^1C^1$, $A^1B^1C^2$, $A^1B^2C^1$ y $A^1B^2C^2$ cada una con 2 g.l. Se pueden confundir k (k=1,2,3,4) efectos que forman ABC. Para el calculo de las SC de los efectos no confundidos se utilizan todas las observaciones, mientras que el de los efectos confundidos solo utilizan las repeticiones en las que el efecto confundido no lo este.

6.3.1 Factorial 3^3 en bloques de 9 u.e. Cuando se quiere utilizar bloques de 9 u.e. es común utilizar r=4k(k=1,2,3)repeticiones confundiendo en cada una $A^1B^1C^1$, $A^1B^1C^2$, $A^1B^2C^1$ $A^1B^2C^2$ respectivamente. Así, se tendrá una información completa de los efectos principales y de las interacciones de dos factores y una información relativa de 3/4 para la interacción de 3 factores.

Las sumas de cuadrados se calculan de la manera usual para los efectos principales, interacciones dobles, y bloques. Así, por ejemplo si hay r=4k repeticiones

$$SCA = \frac{(A)_0^2 + (A)_1^2 + (A)_2^2}{3^2.r} - \frac{T^2}{3^3.r} \quad ;$$

$$SC(BC) = \frac{(BC)_0^2 + (BC)_1^2 + (BC)_2^2}{3^2.r} - \frac{T^2}{3^3.r}$$

donde

$(A)_i$ suma de los 3^2r elementos donde el índice del efecto A es i (i=0,1,2) etc., de manera analoga se calculan las SC de los otros efectos principales e interacciones dobles.

Para la interacción triple, la SC de cada una de sus cuatro componentes con dos g.l. se calcula de las 3k repeticiones en donde no esta confundido así por ejemplo

$$SC(A^1B^1C^2) = \frac{(A^1B^1C^2)_0^2 + (A^1B^1C^2)_1^2 + (A^1B^1C^2)_2^2}{3^2.(3k)} - \frac{(T')^2}{3^3(3k)}$$

De manera analoga se calculan las SC de las otras componentes. El diseño se describe en la tabla 6.3

TABLA 6.3. Factorial 3^3 balanceado en bloques de 9 unidades, con confusión parcial de $A^1B^1C^1$, $A^1B^2C^1$, $A^1B^2C^1$, $A^1B^2C^2$ con información relativa de 3/4.

Repetición I

Confusión de $A^1B^1C^1$

$(A^1B^1C^1)_0$	$(A^1B^1C^1)_1$	$(A^1B^1C^1)_2$
0 0 0	0 0 1	0 0 2
0 1 2	0 1 0	0 1 1
0 2 1	0 2 2	0 2 0
1 0 2	1 0 0	1 0 1
1 1 1	1 1 2	1 1 0
1 2 0	1 2 1	1 2 2
2 0 1	2 0 2	2 0 0
2 1 0	2 1 1	2 1 2
2 2 2	2 2 0	2 2 1

Repetición II

Confusión de $A^1B^1C^2$

$(A^1B^1C^2)_0$	$(A^1B^1C^2)_1$	$(A^1B^1C^2)_2$
0 0 0	0 1 0	0 2 0
0 1 1	0 2 1	0 0 1
0 2 2	0 0 2	0 1 2
1 0 1	1 1 1	1 2 1
1 1 2	1 2 2	1 0 2
1 2 0	1 0 0	1 1 0
2 0 2	2 1 2	2 2 2
2 1 0	2 2 0	2 0 0
2 2 1	2 0 1	2 1 2

Repetición III

Confusión de $A^1B^2C^1$

$(A^1B^2C^1)_0$	$(A^1B^2C^1)_1$	$(A^1B^2C^1)_2$
0 0 0	0 0 1	0 0 2
0 1 1	0 1 2	0 1 0
0 2 2	0 2 0	0 2 1
1 0 2	1 0 0	1 0 1
1 1 0	1 1 1	1 1 2
1 2 1	1 2 2	1 2 0
2 0 1	2 0 2	2 0 0
2 1 2	2 1 0	2 1 1
2 2 0	2 2 1	2 2 2

Repetición IV

Confusión de $A^1B^2C^2$

$(A^1B^2C^2)_0$	$(A^1B^2C^2)_1$	$(A^1B^2C^2)_2$
0 0 0	0 0 2	0 0 1
0 1 2	0 1 1	0 1 0
0 2 1	0 2 0	0 2 2
1 0 1	1 0 0	1 0 2
1 1 0	1 1 2	1 1 1
1 2 2	1 2 1	1 2 0
2 0 2	2 0 1	2 0 0
2 1 1	2 1 0	2 1 2
2 2 0	2 2 2	2 2 1

Si se consideran r=4k (k=1,2,3..) repeticiones de estas cuatro replicas, la partición de los grados de libertad en el análisis de variancia es mostrado en la tabla 6.4.

TABLA 6.4 Análisis de variancia para el diseño factorial 3 balanceado con confusión parcial de interacciones de 3 factores

F.V.	G.L.	
Bloques	3r-1	
Repeticiones	r-1	
Bloques dentro de repeticiones	2r	r=4k
Efectos principales	6	k=1,2,3...
Interacciones de dos factores	12	
Interacciones de tres factores	8	
Error	24r-26	
Total	27r-1	

En este diseño, dos de los ocho g.l. de ABC estan completamente confundidos en cada repetición, así el diseño balanceado requiere de cuatro repeticiones, la información relativa sobre ABC es de 3/4. Si por alguna razón, se sabe que las interacciones triples son despreciables, en este caso, es conveniente seleccionar en sucesión el número necesario de repeticiones del diseño. Así si se consideran 3 repeticiones se tendría una información relativa de 2/3 sobre 6 de los 8 g.l. de la interacción y la información total sobre los dos g.l. restantes.

Si se considerara solo una repetición, usando a la interacción de tres factores como error, los 26 g.l. se distribuyen de la siguiente manera.

Bloques	2
Efectos principales	6
Interacciones de dos factores	12
Error	6
Total	26

6.3.2 Ejemplo.- Se efectuó un experimento en el laboratorio de semillas Iowa State College, probando los efectos de 3 niveles de nitrógeno (factor N), 3 de fósforo (factor P) y 3 de potasio (factor K) para la germinación de semillas de lechuga. Se mezclaron las semillas y se dividieron en 108 muestras de 60 semillas cada una. Cada muestra fue plantada en una caja de cobre de dimensiones apropiadas en una mezcla de tierra y arena. Las cajas se colocaron en un germinador, a una temperatura de 32°C. Al final de 5 a 7 días las semillas fueron clasificadas como normales, anormales, difícil o muerta. Se tomaron cuatro repeticiones, cada una se colocó en una repisa diferente en el germinador. Sobre la repisa, las cajas son colocadas en tres columnas de 9 cajas cada una, cada columna forma un bloque incompleto. Los datos son mostrados en la tabla 6.5, nos muestra el número de plantas de lechuga (datos codificados, tomados de Cochran [ ] pag. 196-203)

TABLA 6.5. Datos codificados para el experimento de plantas de lechuga.

Repetición 1

$N^1P^2K^2$ confundido

$(N^1P^2K^2)_0$		$(N^1P^2K^2)_1$		$(N^1P^2K^2)$	
0 0 0	11	1 0 0	31	2 0 0	2
0 1 2	-19	1 1 2	9	2 1 2	7
0 2 1	0	1 2 1	-10	2 2 1	28
1 0 1	-19	2 0 1	12	0 0 1	23
1 1 0	-9	2 1 0	-6	0 1 0	24
1 2 2	-19	2 2 2	16	0 2 2	11
2 0 2	-18	0 0 2	10	1 0 2	18
2 1 1	-9	0 1 1	8	1 1 1	16
2 2 0	-17	0 2 0	14	1 2 0	-5
	-99		84		124
					109

Repetición 2

$N^1P^2C^1$ confundido

$(N^1P^2K^1)_0$		$(N^1P^2K^1)$		$(N^1P^2K^1)_2$	
0 0 0	10	0 0 1	0	0 0 2	-14
0 1 1	5	0 1 2	7	0 1 0	-4
0 2 2	1	0 2 0	-9	0 2 1	-17
1 0 2	1	1 0 0	2	1 0 1	-16
1 1 0	8	1 1 1	-18	1 1 2	-11
1 2 1	9	1 2 2	-8	1 2 0	-14
2 0 1	4	2 0 2	-3	2 0 0	-24
2 1 2	-4	2 1 0	7	2 1 1	-18
2 2 0	4	2 2 1	3	2 2 2	-18
	38		-19		-136
					-117

Repetición 3

$N^1P^1K^2$ confundido

$(N^1P^1K^2)_0$		$(N^1P^1K^2)_2$		$(N^1P^1K^2)_1$	
0 0 0	8	0 0 1	10	0 0 2	-1
0 1 1	-11	0 1 2	0	0 1 0	6
0 2 2	-16	0 2 0	-11	0 2 1	-3
1 0 1	-4	1 0 2	-2	1 0 0	12
1 1 2	-8	1 1 0	-3	1 1 1	7
1 2 0	-12	1 2 1	-12	1 2 2	-11
2 0 2	-8	2 0 0	-5	2 0 1	-19
2 1 0	-13	2 1 1	-5	2 1 2	-17
2 2 1	-9	2 2 2	-10	2 2 0	-11
	-73		-38		-37
					-148

Repetición 4

$N^1P^1K^1$ confundido

$(N^1P^1K^1)_0$		$(N^1P^1K^1)_1$		$(N^1P^1K^1)_2$	
0 0 0	22	0 0 1	7	0 0 2	3
0 1 2	11	0 1 0	14	0 1 1	8
0 2 1	-1	0 2 2	-5	0 2 0	17
1 0 2	20	1 0 0	9	1 0 1	1
1 1 1	-2	1 1 2	7	1 1 0	2
1 2 0	0	1 2 1	1	1 2 2	-1
2 0 1	12	2 0 2	5	2 0 0	8
2 1 0	-6	2 1 1	-2	2 1 2	-3
2 2 2	-15	2 2 0	-4	2 2 1	-15
	41		32		20
					93

T: Gran Total $T = 109 + (-117) + (-148) + 93 = -63$

Los calculos son como sigue.

1. Forme los totales de bloque, de repetición y el gran total (se muestran en la tabla 6.5), también forme los totales de cada combinación de tratamientos que sirve para el calculo de la interacción NPK y las tablas de doble entrada para obtener los efectos de interacción de dos factores y de efectos principales (se muestran en tabla 6.6).

   Observece que se vuelven a agregar los dos primeros renglones y se suman los datos en forma diagonal. A partir de ellas se forman las componentes de NPK por ejemplo.

   $(N^1P^2K^2)_c = \Sigma W_o = 21 + (-93) + (-64) = -136$

   De manera análoga se calculan los otros totales.

2. Calcule las SC. Los calculos se muestran posteriormente, las SC de los efectos no confundidos, de bloques y del total requieren de todas las observaciones, las SC de las componentes NPK estan confundidas con bloques, su calculo se simplifica si se usan los componentes de NPK (ver tabla 6.6) por ejemplo

   $(N^1P^2K^2)_c = \Sigma W_o = 21 + (-93) + (-64) = -136$

TABLA 6.6. Resumen de totales

6.6a Totales de tratamientos

K_0

	P_0	P_1	P_2	
				$-10=X_2=Y_2$
				$2=X_0=Y_0$
N_0	54	40	11	$66=X_1=Y_1$
N_1	54	-2	-31	
N_2	-19	-18	-28	
	51	40	11	$21=Z_0=W_0$
	54	-2	-31	$47=Z_1=W_1$
				$-10=Z_2=W_2$

K_1

	P_0	P_1	P_2	
				$-9=X_0=Y_1$
				$-6=X_1=Y_2$
N_0	40	10	-21	$-21=X_2=Y_0$
N_1	-38	3	-12	
N_2	9	-34	7	
	40	10	-21	$50=Z_1=W_2$
	-38	-3	-12	$-93=Z_2=W_0$
				$7=Z_0=W_1$

K_2

	P_0	P_1	P_2	
				$-36=X_1=Y_0$
				$-58=X_2=Y_1$
N_0	-2	-1	-9	$9=X_0=Y_2$
N_1	37	-3	-39	
N_2	-24	-17	-27	
	-2	-1	-9	$-32=Z_2=W_1$
	37	-3	-39	$11=Z_0=W_2$
				$-64=Z_1=W_0$

Donde

$X = N^1p^1K^1$

$Y = N^1p^1K^2$

$Z = N^1p^2K^1$

$W = N^1p^2K^2$

Así

$(N^1p^1K^1)_0 = \Sigma X_0 = 2+(-9)+9=2$

$(N^1p^1K^1)_1 = \Sigma X_1 = 66-6-36=24$

$(N^1p^1K^1)_2 = \Sigma X_2 = -10-21-58=-89$

Analogamente

$(N^1p^1K^2)_0 = \Sigma Y_0 = -55$

$(N^1p^1K^2)_1 = -1$

$(N^1p^1K^2)_2 = -7$

$(N^1p^2K^1)_0 = 39$

$(N^1p^2K^1)_1 = 33$

$(N^1p^2K^1)_2 = -135$

$(N^2p^2K^2)_0 = -136$

$(N^1p^2K^2)_1 = 22$

$(N^1p^2K^2)_2 = 51$

6.6b Efectos principales e interacciones de dos factores

	P_o	P_1	P_2	
N_o	89	49	-19	$119=N_o$
N_1	53	-2	-82	$-31=N_1$
N_2	-34	-69	-48	$-151=N_2$
	89	49	-19	-63
	53	-2	-82	

$(N^1P^1)_2=-55$
$(N^1P^1)_o=-62$
$(N^1P^1)_1=\underline{54}$
-63

$39=(N^1P^2)_o$
$-35=(N^1P^2)_1$
$\underline{-67}=(N^1P^2)_2$
-63

	K_o	K_1	K_2	
N_o	102	29	-12	$119=N_o$
N_1	21	-47	-5	$-31=N_1$
N_2	-65	-18	-68	$-151=N_2$
	102	29	-12	-63
	21	-47	-5	

$(N^1K^1)_2=-124$
$(N^1K^1)_o=79$
$(N^1K^1)_1=\underline{-18}$
-63

$-13=(N^1K^2)_o$
$-9=(N^1K^2)_1$
$\underline{-41}=(N^1K^2)_2$
63

$K_o=58 \quad K_1=-36 \quad K_2=-85$

	K_o	K_1	K_2	
P_o	86	11	11	$108=P_o$
P_1	20	-21	-21	$-22=P_1$
P_2	-48	-26	-75	$-149=P_2$
	86	11	11	-63
	20	-21	-21	

$(P^1K^1)_2=-58$
$(P^1K^1)_o=39$
$(P^1K^1)_1=\underline{-44}$
$=-63$

$-10=(P^1K^2)_o$
$5=(P^1K^2)_1$
$\underline{-58}=(P^1K^2)_2$
-63

Donde $X = N^1P^1K^1$ $Y = N^1P^1K^2$ $Z = N^1P^2K^1$ $W = N^1P^2K^2$

6.6c Componentes de N P K

	$(N^1P^2K^2)_0$	$(N^1P^2K^2)_1$	$(N^1P^2K^2)_2$	Total
Del total de tratamientos	-136	22	51	-63
De la repetición 1	-99	84	124	109
Diferencia	-37	-62	-73	-172

	$(N^1P^2K^1)_0$	$(N^1P^2K^1)_1$	$(N^1P^2K^2)_2$	
Del total de tratamientos	39	33	-135	-63
De la repetición 2	38	-19	-136	-117
Diferencia	1	52	1	54

	$(N^1P^1K^2)_0$	$(N^1P^1K^2)_1$	$(N^1P^1K^2)_2$	
Del total de tratamientos	-55	-1	-7	-63
De la repetición 3	-73	-37	-38	-148
Diferencia	18	36	31	85

	$(N^1P^1K^1)_0$	$(N^1P^1K^1)_1$	$(N^1P^1K^1)_2$	
Del total de tratamientos	2	24	-89	-63
De la repetición 4	41	32	20	93
Diferencia	-39	-8	-109	-156

Sumas de cuadrados. Los calculos son los siguientes

$$SCN = \frac{(N_0)^2 + (N_1)^2 + (N_2)^2}{3^2 . r} - \frac{T^2}{3^3 . r} = \frac{119^2+(-31)^2+(-151)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 1016.667$$

$$SCP = \frac{(P_0)^2 + (P_1)^2 + (P_2)^2}{3^2\ r} - \frac{T^2}{3^2\ r} = \frac{108^2+(-22)^2+(-149)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 917.389$$

$$SCK = \frac{(58)^2 + (-36)^2 + (-85)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 295.389$$

$$SC(N^1P^1) = \frac{(N^1P^1)_0^2 + (N^1P^1)_1^2 + (N^1P^1)_2^2}{3^2 r} - \frac{T^2}{3^3 r} = \frac{(-62)^2+(54)^2+(55)^2}{36}$$

$$- \frac{(-63)^2}{108} = 235.056$$

$$SC(N^1P^2) = \frac{(39)^2 + (-35)^2 + (-67)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 164.222$$

$$SC(NP) = SC(N^1P^1) + SC(N^1P^2) = 235.056+164.222 = 399.278$$

$$SC(N^1K^1) = \frac{79^2+(-18)^2+(-124)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 572.722\ ;\ SC(N^1K^2) = \frac{(-13)^2+(-9)^2+(-41)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 16.889$$

$$SC(P^1K^1) = \frac{39+(-44)^2+(-58)^2}{36} - \frac{(63)^2}{108} = 152.722\ ;\ SC(P^1K^2) = \frac{(-10)^2+5^2+(-58)^2}{36} - \frac{(-63)^2}{108} = 60.167$$

$SC(NK) = SC(N^1K^1) + SC(N^1K^2) = 589.611 \quad SC(PK) = SC(P^1K^1) + SC(P^1K^2) = 212.889$

$$SC(N^1P^1K^1) = \frac{[(N^1P^1K^1)_0^1]^2 + [(N^1P^1K^1)_1^1]^2 + [(N^1P^1K^1)_2^1]^2}{3^2.3} - \frac{[T^1]^2}{3^3.3} =$$

$$= \frac{(-39)^2 + (-8)^2 + (-109)^2}{27} - \frac{(-156)^2}{81} = 198.296$$

Analogamente

$$SC(N^1P^1K^2)' = \frac{18^2 + 36^2 + 31^2}{27} - \frac{85^2}{81} = 6.395$$

$$SC(N^1P^2K^1)' = \frac{1^2 + 52^2 + 1^2}{27} - \frac{54^2}{81} = 64.222$$

$$SC(N^1P^2K^2)' = \frac{(-37)^2 + (-62)^2 + (-73)^2}{27} - \frac{(-172)^2}{81} = 25.210$$

$SC(NPK) = SC(N^1P^1K^1) + SC(N^1P^1K^2) + SC(N^1P^2K^1) + SC(N^1P^2K^2) = 294.123$

$$SCT = \Sigma\, Y_{ijkl}^2 - \frac{T^2}{3^3r} = (11)^2 + (-19)^2 + (0)^2 + \cdots + (-3)^2 + (-15)^2 - \frac{(-63)^2}{108} = 14920.25$$

$$\text{SC Bloques} = \frac{\Sigma\beta_i^2}{9} - \frac{T^2}{3^3 r} = \frac{(-99)^2+84^2+\ldots+32^2+20^2}{9} - \frac{(-63)^2}{108} = 7050.028$$

$$\text{SC Repeticiones} = \frac{\Sigma R_i^2}{27} - \frac{T^2}{3^2 r} = \frac{109^2+(-117)^2+(-148)^2+93^2}{27} - \frac{(-63)^2}{108} = 2041.879$$

$$\text{SC Bloques dentro de rep.} = SC_{Bl} - SC_{Rep} = 5{,}008.148$$

Observece que también puede calcularse de la siguiente forma.

$$\text{SC Bloques dentro de rep.} = \frac{\Sigma\beta_i^2}{9} - \frac{\Sigma R_i^2}{27} = \frac{(-99)^2+84^2+\cdots+32^2+20^2}{9}$$

$$- \frac{109^2+(-117)^2+(-148)^2+93^2}{27} = 5008.148$$

La SC del error la obtenemos por diferencia

$$\begin{aligned} SC_{\text{ ERROR}} &= SCT - SCN - SCP - SCK ----- - SC(NPK) - SC(\text{Bloques}) \\ &= 14920.25 - 1016.667 - 917.389 ----- 294.123 - 7050.28 \\ &= 4146.876 \end{aligned}$$

Todos estos calculos pueden resumirse a la tabla 6.7

TABLA 6.7 Análisis de variancia para el diseño 3^3 factorial del experimento de semillas

FV	G.L.	S.C.	C.M	F
Bloques	11	7050.028	640.912	10.82
Repeticiones	3	2041.879	680.626	11.49
Bloques dentro de repeticiones	8	5008.148	626.018	10.57
N	2	1016.667	508.333	8.58**
P	2	917.389	458.695	7.74**
K	2	293.389	146.695	2.48
NP	4	399.278	99.819	1.68
N^1P^1	2	235.056	117.528	1.98
N^1P^2	2	164.222	82.111	1.39
NK	4	589.611	147.402	2.49
N^1K^1	2	572.722	286.361	4.83*
N^1K^2	2	16.889	8.444	0.14
PK	4	212.889	53.222	0.90
P^1K^1	2	152.722	76.361	1.29
P^1K^2	2	60.167	30.083	0.51
NPK Confundido	8	294.123	36.765	0.62
$N^1P^1K^1$	2'	198.296	99.148	1,67
$N^1P^1K^2$	2'	6.395	3.197	0.054
$N^1P^2K^1$	2'	64.222	32.111	0.54
$N^1P^2K^2$	2'	25.210	12.605	0.21
Error	70	4146.376	59.241	
Total	107	14920.25		

* Significancia a un nivel de 5%

** Significancia a un nivel de 1%

Los principales resultados fueron que cada fertilizante produjó una disminución en el número de semillas que nacieron.

6.3.3. <u>Factorial 3^3 en bloques de 3 unidades.</u> En un experimento factorial 3^3 en bloque de 3 u.e. lo más conveniente es confundir los siguientes efectos.

Repetición I	A^1B^1, A^1C^1,	$(A^1B^2C^2,\ B^1C^2)$
Repetición II	A^1B^2, A^1C^1,	$(A^1B^1C^2,\ B^1C^1)$
Repetición III	A^1B^1, A^1C^2,	$(A^1B^2C^1,\ B^1C^1)$
Repetición IV	A^1B^2, A^1C^2,	$(A^1B^1C^1,\ B^1C^2)$

Las interacciones generalizadas estan indicadas entre paréntesis. La descripción del diseño se da en la tabla 6.8

TABLA 6.8. Factorial 3^3 en bloques de 3 unidades con confusión parcial de todas las interacciones de dos y tres factores, con una información relativa de 1/2 y 3/4 respectivamente. Las interacciones generalizadas estan indicadas entre paréntesis.

Repetición I Confución de A^1B^1, A^1C^1, $(A^1B^2C^2,\ B^1C^2)$ (9 bloques)

$(A^1B^1)_0$ $(A^1C^1)_0$	$(A^1B^1)_0$ $(A^1C^1)_1$	$(A^1B^1)_0$ $(A^1C^1)_2$	$(A^1B^1)_1$ $(A^1C^1)_0$	$(A^1B^1)_1$ $(A^1C^1)_1$	$(A^1B^1)_1$ $(A^1C^1)_2$	$(A^1B^1)_2$ $(A^1C^1)_0$	$(A^1B^1)_2$ $(A^1C^1)_1$	(A^1B^1) (A^1C^1)
000	001	002	010	011	012	020	021	022
122	120	121	102	100	101	112	110	111
211	212	210	221	222	220	201	202	200

Repetición II   Confusión de A^1B^2, A^1C^1 $(A^1B^1C^2,\ B^1C^1)$

$(A^1B^2)_0$ $(A^1C^1)_0$	$(A^1B^2)_0$ $(A^1C^1)_1$	$(A^1B^2)_0$ $(A^1C^1)_2$	$(A^1B^2)_1$ $(A^1C^1)_0$	$(A^1B^2)_1$ $(A^1C^1)_1$	$(A^1B^2)_1$ $(A^1C^1)_2$	$(A^1B^2)_2$ $(A^1C^1)_0$	$(A^1B^2)_2$ $(A^1C^1)_1$	$(A^1B^2)_2$ $(A^1C^1)_2$
000	001	002	020	021	022	010	011	012
112	110	111	102	100	101	122	120	121
221	222	220	211	212	210	201	202	200

Repetición III   Confusión de A^1B^1, A^1C^2 $(A^1B^2C^1,\ B^1C^1)$

$(A^1B^1)_0$ $(A^1C^2)_0$	$(A^1B^1)_0$ $(A^1C^2)_1$	$(A^1B^1)_0$ $(A^1C^2)_2$	$(A^1B^1)_1$ $(A^1C^2)_0$	$(A^1B^1)_1$ $(A^1C^2)_1$	$(A^1B^1)_1$ $(A^1C^2)_2$	$(A^1B^1)_2$ $(A^1C^2)_0$	$(A^1B^1)_2$ $(A^1C^2)_1$	$(A^1B^1)_2$ $(A^1C^2)_2$
000	002	001	010	012	011	020	022	021
121	120	122	101	100	102	111	110	112
212	211	210	222	221	220	202	201	200

Repetición IV   Confusión de A^1B^2, A^1C^2 $(A^1B^1C^1,\ B^1C^2)$

$(A^1B^2)_0$ $(A^1C^2)_0$	$(A^1B^2)_0$ $(A^1C^2)_1$	$(A^1B^2)_0$ $(A^1C^2)_2$	$(A^1B^2)_1$ $(A^1C^2)_0$	$(A^1B^2)_1$ $(A^1C^2)_1$	$(A^1B^2)_1$ $(A^1C^2)_2$	$(A^1B^2)_2$ $(A^1C^2)_0$	$(A^1B^2)_2$ $(A^1C^2)_1$	$(A^1B^2)_2$ $(A^1C^2)_2$
000	002	001	020	022	021	010	012	011
111	110	112	101	100	102	121	120	122
222	221	220	212	211	210	202	201	200

Con r=4K (K=1,2,3...) repeticiones de estas 4 replicas, la partición de los grados de libertad en el análisis de variancia se muestra en la tabla 6.9.

TABLA 6.9 A. de V. para el diseño factorial 3^3 con confusión parcial de todas las interacciones de 2 y 3 factores

F.V.	G.L.	
Bloques	9r-1	
Repeticiones	r-1	
Bloques dentro de repeticiones	8r	r=4k
Efectos principales	6	k=1,2,3,...
A^1B^1, A^1B^2, A^1C^1, A^1C^2, B^1C^1, B^1C^2	12'	
$A^1B^1C^1$, $A^1B^1C^2$, $A^1B^2C^1$, $A^1B^2C^2$	8'	
Error	18r-26	
Total	27r-1	

Las sumas de cuadrados se calculan de manera usual, usando todas las observaciones para los efectos no confundidos, para los efectos confundidos se usan las observaciones de las repeticiones en las que el efecto confundido no lo este. Algunos ejemplos son

$$SC(A) = \frac{(A)_0^2 + (A)_1^2 + (A)_2^2}{9r} - \frac{T^2}{27r}$$ Utilice todas las observaciones

$$SC(B^1C^2) = \frac{(B^1C^2)_0^2 + (B^1C^2)_1^2 + (B^1C^2)_2^2}{9(2k)} - \frac{(T')^2}{27(2k)}$$ Utilice repeticiones tipo II y III

$$SC(A^1B^2C^2) = \frac{(A^1B^2C^2)_0^2 + (A^1B^2C^2)_1^2 + (A^1B^2C^2)_2^2}{9(3k)} - \frac{(T')^2}{27(3k)}$$ Utilice repeticiones tipo II, III, IV

Las SC de bloques y del total se calculan en forma normal, la del error por diferencia.

6.4. Confusión en el diseño 3^4.

6.4.1. Factorial 3^4 en bloques de 27 u.c. Con 4 factores cada uno a 3 niveles en bloques de 27 u.c es conveniente confundir la interacción ABCD. El diseño balanceado requiere r=8k (k=1,2,3,....) repeticiones, confundiendo los efectos $A^1B^1C^1D^1$, $A^1B^1C^1D^2$, $A^1B^1C^2D^1$, $A^1B^1C^2D^2$, $A^1B^2C^1D^1$, $A^1B^2C^1D^2$, $A^1B^2C^2D^1$, y $A^1B^2C^2D^2$ respectivamente con dos grados de libertad cada uno.

La descripción del diseño se simplifica si se usa teoría de grupos, es decir, usamos ecuaciones lineales para definir las interacciones. Por ejemplo, construyamos la repetición donde se confunda el efecto $A^1B^2C^2D^1$, el subgrupo intrabloque consiste de las combinaciones de tratamientos $a_xb_yc_zd_w$ donde x, y, z, w satisfacen la ecuación.

$$x + 2y + 2z + w = 0 \mod 3$$

para construirlo formemos un 3^3 sobre ABC (en tabla 6.10 esto se muestra entre lineas punteadas en el bloque 1) y, se agrega el otro factor de tal manera que se satisfaga la ecuación anterior. Por ejemplo en $(A^1B^2C^2D^1)_5$ si $(x,y,z,w) =$ $= (1, 2, 1, w)$ entonces

$$1 + 2(2) + 2(1) + w = 0 \mod 3 \Rightarrow 7 + w = 0 \mod 3 \Rightarrow w = 2$$

Los otros dos bloques se obtienen de manera analoga substituyendo en la ecuación anterior el 0 por 1 y 2 respectivamente. Una forma de lograr esto es sumar un 1 (un dos) mod 3 a w en todas las observaciones del subgrupo intrabloque. La descripción de esta repetición se da en la tabla 6.10.

TABLA 6.10. Confusión del efecto $A^1B^2C^2D^1$ en un diseño factorial 3^4

Bloque 1 $(A^1B^2C^2D^1)_0$			Bloque 2 $(A^1B^2C^2D^1)_1$			Bloque 3 $(A^1B^2C^2D^1)_2$		
0000	1002	2001	0001	1000	2002	0002	1001	2000
0011	1010	2012	0012	1011	2010	0010	1012	2011
0022	1021	2020	0020	1022	2021	0021	1020	2022
0101	1100	2102	0102	1101	2100	0100	1102	2101
0112	1111	2110	0110	1112	2111	0111	1110	2112
0120	1122	2121	0121	1120	2122	0122	1121	2120
0202	1201	2200	0200	1202	2201	0201	1200	2202
0210	1212	2211	0211	1210	2212	0212	1211	2210
0221	1220	2222	0222	1221	2220	0220	1222	2221

Con $r=8k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ repeticiones de estas 8 replicas, la partición de los grados de libertad se muestra en la tabla 6.11. Las repeticiones en donde se confunden los otros bloques se construyen de manera analoga, donde

$A^1B^1C^1D^1$ satisface la ecuación $x + y + z + w = k \bmod 3 \quad k = 0,1,2$
$A^1B^1C^1D^2$ satisface la ecuación $x + y + z + 2w = k \bmod 3$.
etc.

TABLA 6.11 A de V. del Factorial 3^4 con confusión parcial de la interacción de 4 factores.

F.V.	G.L.	
Bloques	3r - 1	
Repeticiones	r-1	
Bloques dentro de repeticiones	2r	
Efectos principales	8	r=8k
Interacciones de 2 factores	24	k=1,2,3,...
Interacciones de 3 factores	32	
Interacción de 4 factores	16'	
Error	78r - 80	
Total	81r - 1	

En este caso se tendrá una información relativa de 7/8 para la interacción ABCD. Las sumas de cuadrados se calculan en la forma anteriormente mencionada.

6.4.2 Factorial 3^4 en bloques de 9 unidades. Los 130 sistemas de confusión son de los siguientes tipos.

$A,\ B,\ AB,\ AB^2$
$A,\ BC,\ ABC,\ AB^2C^2$
$AB,\ AC,\ AB^2C^2,\ BC^2$
$AB,\ ACD,\ AB^2C^2D^2,\ BC^2D^2$
$ABD,\ ACD^2,\ AB^2C^2,\ BC^2D^2$

Uno de los más convenientes es el que confunde las interacciones de tres factores. Por ejemplo, la repetición en donde se confunden los efectos $A^1B^1C^2$ y $A^1B^2D^1$, en ella también se confunden los efectos que resultan ser sus interacciones generalizadas las cuales son $A^1C^1D^2$ y $B^1C^1D^1$, su subgrupo intrabloque consiste de las combinaciones de tratamientos $a_x b_y c_z d_w$ donde x, y, z, w satisfacen las ecuaciones

$$x + y + 2z \quad = 0 \bmod 3$$
$$x + 2y \quad + w \quad = 0 \bmod 3$$

así si $(x,y) = (1,1)$ la primer ecuación nos dice $2 + 2z = 0 \bmod 3$ $\Rightarrow z=2$ la segunda ecuación nos dice $w=0$ luego la combinación $(1,1,2,0)$ esta en el subgrupo intrabloque.

A partir del subgrupo intrabloque se pueden construir los otros bloques sumando uno 1 ó un 2 a alguna (s) de sus componentes (en la construcción que se da más adelante se indica a cual en la parte inferior de cada bloque).

El modelo balanceado requiere $r=4k$ $(k=1,2,3,..)$ repeticiones confundiendo $A^1B^1C^1$ y $A^1B^2D^2$; $A^1B^1C^2$ y $A^1B^2D^1$; $A^1B^2C^2$ y $A^1B^1D^2$; $A^1B^2C^1$ y $A^1B^1C^1$ aleatoriamente cada cuatro repeticiones. La descripción de estas repeticiones se da en la tabla 6.12.

Tabla 6.12 Factorial 3^4 balanceado en bloques de 9 u.e. con confusión parcial de las interacciones de 3 factores, con información relativa de 3/4. Las interacciones generalizadas se muestran entre paréntesis.

Repetición I Confusión de $A^1B^1C^1$, $A^1B^2D^2$, $(A^1C^2D^1$, $B^1C^2D^2)$

Consta de 9 bloques, el primero de ellos es el subgrupo intrabloque

$(A^1B^1C^1)_0$	$(A^1B^1C^1)_0$	$(A^1B^1C^1)_0$	$(A^1B^1C^1)_1$	$(A^1B^1C^1)_1$	$(A^1B^1C^1)_1$	$(A^1B^1C^1)_2$	$(A^1B^1C^1)_2$	$(A^1B^1C^1)_2$
$(A^1B^2D^2)_0$	$(A^1B^2D^2)_1$	$(A^1B^2D^2)_2$	$(A^1B^2D^2)_0$	$(A^1B^2D^2)_1$	$(A^1B^2D^2)_2$	$(A^1B^2D^2)_0$	$(A^1B^2D^2)_1$	$(A^1B^2D^2)_2$
0000	0002	0001	0010	1000	0100	0020	0200	2000
0122	0121	0120	0102	1122	0222	0112	0022	2122
0211	0210	0212	0221	1211	0011	0201	0111	2211
1021	1020	1022	1001	2021	1121	1011	1221	0021
1110	1112	1111	1120	2110	1210	1100	1010	0110
1202	1201	1200	1212	2202	1002	1222	1102	0202
2012	2011	2010	2022	0012	2112	2002	2212	1012
2101	2100	2102	2111	0101	2201	2121	2001	1101
2220	2222	2221	2200	0220	2020	2210	2120	1220
	+2aD	+1aD	+1aC	+1aA	+1aB	+2aC	+2aB	+2aA

Repetición II Confusión de $A^1B^1C^2$, $A^1B^2D^1$, $(A^1C^1D^2$, $B^1C^1D^1)$

El primer bloque es el subgrupo intrabloque

$(A^1B^1C^2)_0$	$(A^1B^1C^2)_0$	$(A^1B^1C^2)_0$	$(A^1B^1C^2)_1$	$(A^1B^1C^2)_1$	$(A^1B^1C^2)_1$	$(A^1B^1C^2)_2$	$(A^1B^1C^2)_2$	$(A^1B^1C^2)_2$
$(A^1B^2D^1)_0$	$(A^1B^2D^1)_1$	$(A^1B^2D^1)_2$	$(A^1B^2D^1)_0$	$(A^1B^2D^1)_1$	$(A^1B^2D^1)_2$	$(A^1B^2D^1)_0$	$(A^1B^2D^1)_1$	$(A^1B^2D^1)_2$
0000	0001	0002	0020	0100	0022	0010	0200	2000
0111	0112	0110	0101	0211	0100	0121	0011	2111
0222	0220	0221	0212	0022	0211	0202	0122	2222
1012	1010	1011	1002	1112	1001	1022	1212	0012
1120	1121	1122	1110	1220	1112	1100	1020	0120
1201	1202	1200	1221	1001	1220	1211	1101	0201

⋮			⋮			⋮		⋮
2021	2022	2020	2011	2121	2010	2001	2221	1021
2102	2100	2101	2122	2202	2121	2112	2002	1102
2210	2211	2212	2200	2010	2202	2220	2110	1210
	+1aD	+2aD	+2aC	+1aB	+2aC +2aD	+1aC	+2aB	+2aA

Repetición III Confusión de $A^1B^2C^2$, $A^1B^1D^2$ $(A^1C^1D^1,\ B^1C^2D^1)$

El primer bloque es el subgrupo intrabloque

$(A^1B^2C^2)_0$ $(A^1B^1D^2)_0$	$(A^1B^2C^2)_0$ $(A^1B^1D^2)_1$	$(A^1B^2C^2)_0$ $(A^1B^1D^2)_2$	$(A^1B^2C^2)_1$ $(A^1B^1D^2)_0$	$(A^1B^2C^2)_1$ $(A^1B^1D^2)_1$	$(A^1B^2C^2)_1$ $(A^1B^1D^2)_2$	$(A^1B^2C^2)_2$ $(A^1B^1D^2)_0$	$(A^1B^2C^2)_2$ $(A^1B^1D^2)_1$	$(A^1B^2C^2)_2$ $(A^1B^1D^2)_2$
0000	0002	0001	0020	1000	0200	0010	0100	2000
0121	0120	0122	0111	1121	0021	0101	0221	2121
0212	0211	0210	0202	1212	0112	0222	0012	2212
1011	1010	1012	1001	2011	1211	1021	1111	0011
1102	1101	1100	1122	2102	1002	1112	1202	0102
1220	1222	1221	1210	2220	1120	1200	1020	0220
2022	2021	2020	2012	0022	2222	2002	2122	1022
2110	2112	2111	2100	0110	2010	2120	2210	1110
2201	2200	2202	2221	0201	2101	2211	2001	1201
	+2aD	+1aD	+2aC	+1aA	+2aB	+1aC	+1aB	+2aA

Repetición IV Confusión de $A^1B^2C^1$, $A^1B^1D^1$ $(A^1C^2D^2,\ B^1C^1D^2)$

El primer bloque es el subgrupo intrabloque

$(A^1B^2C^1)_0$ $(A^1B^1D^1)_0$	$(A^1B^2C^1)_0$ $(A^1B^1C^1)_1$	$(A^1B^2C^1)_0$ $(A^1B^1D^1)_2$	$(A^1B^2C^1)_1$ $(A^1B^1D^1)_0$	$(A^1B^2C^1)_1$ $(A^1B^1D^1)_1$	$(A^1B^2C^1)_1$ $(A^1B^1D^1)_2$	$(A^1B^2C^1)_2$ $(A^1B^1D^1)_0$	$(A^1B^2C^1)_2$ $(A^1B^1D^1)_1$	$(A^1B^2C^1)_2$ $(A^1B^1D^1)_2$
0000	0001	0002	0010	1000	0200	0020	0100	2000
0112	0110	0111	0122	1112	0012	0102	0212	2112
0221	0222	0220	0201	1221	0121	0211	0021	2221
1022	1020	1021	1002	2022	1222	1012	1122	0022
⋮		⋮		⋮				⋮

⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
1101	1102	1100	1111	2101	1001	1121	1201	0101
1210	1211	1212	1220	2210	1110	1200	1010	0210
2011	2012	2010	2021	0011	2211	2001	2111	1011
2120	2121	2122	2100	0120	2020	2110	2220	1120
2202	2200	2201	2212	0202	2102	2222	2002	1202
	+1aD	+2aD	+1aC	+1aA	+2aB	+2aC	+1aB	+2aA

Así con r=4k (k=1,2,3,...) repeticiones de estas cuatro replicas la partición de los grados de libertad se muestra en la tabla 6.13.

TABLA 6.13 A de V. Factorial 3^4, confusión parcial de interacciones de 3 factores.

F. V.	G.L.	
Bloques	9r-1	
Repeticiones	r-1	
Bloques dentro de repeticiones	8r	r=4k
Efectos principales	8	k=1,2,3,...
Interacciones de 2 factores	24	
Interacciones de 3 factores	32	
Interacción de 4 factores	16	
Error	72r-80	
Total	81r-1	

Algunos ejemplos para el calculo de las sumas de cuadrados son;

$$SC(B) = \frac{(B)_0^2 + (B)_1^2 + (B)_2^2}{27r} - \frac{T^2}{81r}$$ Todas las observaciones

$$SC(A^1C^2) = \frac{(A^1C^2)_0^2+(A^1C^2)_1^2+(A^1C^2)_2^2}{27r} - \frac{T^2}{81r}$$ Todas las observaciones

$$SC(A^1C^2D^1) = \frac{(A^1C^2D^1)_0^2+(A^1C^2D^1)_1^2+(A^1C^2D^1)_2^2}{27(3k)} - \frac{(T')^2}{81(3k)}$$ Utilice observaciones de repeticiones tipo II, III, IV

$$SC(A^1B^1C^2D^1) = \frac{(A^1B^1C^2D^1)_0^2+ (A^1B^1C^2D^1)_1^2+ (A^1B^1C^2D^1)_2^2}{27r} - \frac{T^2}{81r}$$ Utilice todas las Observaciones

Las SC de bloques, repeticiones, bloques dentro de repeticiones se calculan en la forma usual, la del error por diferencia.

Si solo se considera una repetición, los grados de libertad quedan distribuidos de la siguiente manera

F.V.	g.l.
Bloques	8
Efectos principales	8
Interacciones de dos factores	24
Error (de las interacciones de tres y cuatro factores no confundidas)	40
Total	80

6.4.3. Factorial 3^4 en bloques de 3 unidades. Resulta tedioso y laborioso el enumerar todos los posibles sistemas de confusión en este caso. Es imposible el evitar confundir un efecto principal, así pues un sistema que puede utilizarse es el siguiente conjunto de cuatro replicas con confusión de los efectos que se describen (las interacciones generalizadas se dan entre paréntesis)

I	A, B^1C^1, $(A^1B^1C^1, A^1B^2C^2)$, B^1D^1, $(A^1B^1D^1, A^1B^2D^2, B^1C^2D^2, C^1D^2)$
II	B, A^1C^1, $(A^1B^1C^1, A^1B^2C^1)$, A^1D^2, $(A^1B^1D^2, A^1B^2D^2, A^1C^2D^1, C^1D^1)$
III	C, A^1B^1, $(A^1B^1C^1, A^1B^1C^2)$, A^1D^1, $(A^1C^1D^1, A^1C^2D^1, A^1B^2C^2, B^1D^2)$
IV	D, A^1B^2, $(A^1B^2D^1, A^1B^2D^2)$, A^1C^2, $(A^1C^2D^1, A^1C^2D^2, A^1B^1C^1, B^1C^2)$

El subgrupo intrabloque de la repetición I, consiste de las combinaciones de tratamientos $a_x b_y c_z d_w$ donde x, y, z, w satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 0 \bmod 3 \\ y + z \qquad &= 0 \bmod 3 \\ y \qquad + w &= 0 \bmod 3 \end{aligned}$$

Las soluciones son (0,0,0,0) (0,1,2,2) (0,2,1,1)

A partir de el subgrupo intrabloque se pueden generar los otros bloques sumando un 1 ó un 2 a alguna (s) de sus componentes, esto se indica en la construcción de la repetición I que se da a continuación en la parte inferior de cada bloque.

TABLA 6.14. Repetición 1 del diseño factorial 3^4 en bloques de 3 unidades, en donde se confunden los efectos A, B^1C^1, B^1D^1 y sus interacciones generalizadas (27 bloques)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$	$(A)_0$
$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_2$	$(B^1C^1)_2$	$(B^1C^1)_2$
$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$	$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$	$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$
0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022
0122	0120	0121	0102	0100	0101	0112	0110	0111
0211	0212	0210	0221	0222	0220	0201	0202	0200
	+1aD	+2aD	+1aC	+1aC	+1aC	+2aC	+2aC	+2aC
				+1aD	+2aD		+1aD	+2aD

X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$	$(A)_1$
$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_2$	$(B^1C^1)_2$	$(B^1C^1)_2$
$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$	$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$	$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
1122	1120	1121	1102	1100	1101	1112	1110	1111
1211	1212	1210	1221	1222	1220	1201	1202	1200
+1aA	+1aA	+1aA	+1aA	+1aA	+1aA	+1aA	+1aA	+1aA
	+1aD	+2aD	+1aC	+1aC	+1aC	+2aC	+2aC	+2aC
				+1aD	+2aD		+1aD	+2aD

XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII
$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$	$(A)_2$
$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_0$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_1$	$(B^1C^1)_2$	$(B^1C^1)_2$	$(B^1C^1)_2$
$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$	$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$	$(B^1D^1)_0$	$(B^1D^1)_1$	$(B^1D^1)_2$
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
2122	2120	2121	2102	2100	2101	2112	2110	2111
2211	2212	2210	2221	2222	2220	2201	2202	2200
+2aA	+2aA	+2aA	+2aA	+2aA	+2aA	+2aA	+2aA	+2aA
	+1aD	+2aD	+1aC	+1aC	+1aC	+2aC	+2aC	+2aC
				+1aD	+2aD		+1aD	+2aD

Las otras repeticiones se construyen de manera analoga. El modelo requiere r=4k (k=1,2,3,...) repeticiones,el diseño resulta con una información relativa de 3/4 para los efectos principales y para las interacciones de 2 factores. La partición de los grados de libertad queda de la siguiente manera.

TABLA 6.15 A. de V. para el diseño 3^4 en bloques de 3 unidades experimentales

F.V.	G.L.	
Bloques	27r-1	
Repeticiones	r-1	
Bloques dentro de repeticiones	26r	r=4k
Efectos principales	8'	k=1,2,3,4,...
Interacciones de 2 factores	24'	
Interacciones de 3 factores no confundidos	28'	
Interacciones de 4 factores	16	
Error	54r-76	
Total	81r-1	

Observese que los g.l. de las interacciones de 3 factores son en total 32 menos 4 igual a 28 g.l. ya que los efectos $A^1B^1C^1$ y $A^1B^2D^2$ cada uno con 2 g.l. estan totalmente confundidos con bloques. Algunos ejemplos de las sumas de cuadrados son

$$SCD = \frac{(D)_0^2 + (D)_1^2 + (D)_2^2}{27(3k)} - \frac{(T')^2}{81(3k)}$$ Utilice repeticiones tipo I, II, III

$$SC(B^1D^2) = \frac{(B^1D^2)_0^2 + (B^1D^2)_1^2 + (B^1D^2)_2^2}{27(3k)} - \frac{(T')^2}{81(3k)}$$ Utilice repeticiones tipo I, II, IV

Las restantes SC de efectos principales y de interacción de 2 factotes se calculan de manera analoga, utilizando las tres repeticiones en las que el efecto considerado no este confundido para las SC de las 14 combinaciones de tratamientos con 2 g.1. cada una, no confundidas con bloques que corresponden a la interacción de 3 factores hay que manejarlas con mayor cuidado pues tienen diferente nivel de información relativa.

Así, las combinaciones $A^1C^1D^1$, $A^1C^2D^1$, $B^1C^1D^1$, $B^1C^1D^2$, $B^1C^2D^1$ no estan confundidas en ninguna repetición, es decir son ortogonales a bloques, así, una SC es

$$SC(A^1C^2D^1) = \frac{(A^1C^2D^1)_0 + (A^1C^2D^1)_1^2 + (A^1C^2D^1)_2^2}{27r} - \frac{T^2}{81r}$$

Las SC de las otras 4 combinaciones indicadas se calculan de manera analoga. Las combinaciones $A^1B^2C^2$, $A^1B^1D^1$, $B^1C^2D^2$ estan confundidas unicamente en la repetición I; $A^1B^2C^1$ y $A^1B^2C^2$ estan confundidas unicamente en la repetición II; $A^1B^1C^2$, $A^1C^1D^1$ estan confundidas unicamente en la repetición III y $A^1B^2D^2$ esta confundida solamente en la repetición IV, estas 8 combinaciones tienen una información relativa de 3/4, así una SC es

$$SC(A^1B^2D^2) = \frac{(A^1B^2D^2)_0^2 + (A^1B^2D^2)_1^2 + (A^1B^2D^2)_2^2}{27(3k)} - \frac{(T')^2}{81(3k)}$$ Utilice repeticiones tipo I, II, IV

Las restantes SC de las otras 7 combinaciones indicadas se calculan de manera analoga utilizando las repeticiones en las que el efecto considerado no este confundido.

La combinación de tratamientos $A^1C^2D^1$ se encuentra confundida en repeticiones II, III y IV, tiene una información relativa de 1/4 y su SC es

$$SC(A^1C^2D^1) = \frac{(A^1C^2D^1)_0^2 + (A^1C^2D^1)_1^2 + (A^1C^2D^1)_2^2}{27k} - \frac{(T')^2}{81k}$$

Utilice observaciones de las repeticiones tipo I

Para la interacción de 4 factores que se descompone en 8 combinaciones de tratamientos con 2 g.l. cada uno, son ortogonales a bloques, así

$$SC(A^1B^2C^2D^1) = \frac{(A^1B^2C^2D^1)_0^2 + (A^1B^2C^2D^1)_1^2 + (A^1B^2C^2D^1)_2^2}{27r} - \frac{T^2}{81r}$$

Se utilizan todas las observaciones. De manera analoga se calculan las de las otras 7 combinaciones que forman la interacción de 4 factores.

La SC del total se calcula en la forma usual y la del error por diferencia.

CAPITULO 7

CONCEPTOS BASICOS DE TEORIA DE GRUPOS Y SU RELACION CON EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

7.1 Introducción.

Aplicaremos las ideas de grupo a las combinaciones de tratamientos que genera un diseño factorial 2^n ó 3^n , en si al diseño factorial p^n con p un número primo.

7.2 Algunos resultados en teoría de grupos. En si, se dará la definición de grupo, y de resultados concernientes a ellos cuya demostración se puede encontrar en textos como el Herstein ( ) y otros, y traducir estos resultados a los diseños factoriales.

1. Definición de grupo.- Un conjunto no vació de elementos G, se dice forma un grupo, si en G está definida una operación binaria denotada por *, que satisface los siguientes exiomas.
   1. (Cerradura) Si $a, b \in G$, entonces $a*b \in G$
   2. (Ley asociativa) Si $a,b,c \in G$ entonces $$(a*b)*c = a*(b*c)$$
   3. (Existe un elemento identidad). Existe un elemento $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$ para toda $a \in G$
   4. (Existe el inverso en G). Para cada elemento $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

2. Definición. Se dice que un grupo G es conmutativo o abeliano si $a*b = b*a \quad \forall a,b \in G$

El número de elementos de G, denotado por $|G|$, es el orden del grupo. Existen grupos de orden finito, en este caso se dice que G es un grupo finito. También hay grupos de orden infinito.

Algunos ejemplos de grupos.

Ejemplo 1.- $G = Z = \{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$ ∴ Los enteros con la operación usual de suma de enteros ∴ $a,b\in G$ entonces $a*b=a+b$ es fácil verificar que G es un grupo abeliano infinito en el cual $e=0$, $a^{-1}=-a$.

Ejemplo 2.- $G = 2^n = \{(a_1,a_2, \quad , a_n)\; a_i \in\{0,1\} \quad , i=1,2, \quad n\}$ la operación binaria es la suma de elemento a elemento evaluada. modulo 2. Con esta notación y tomando n=4.

$(0,1,1,0) * (1,1,0,1) = (1,2,1,1) = (1,0,1,1)$
$(1,0,0,1) * (1,1,0,0) = (2,1,0,1) = (0,1,0,1)$
$(1,1,0,0) * (1,0,1,0) = (2,1,1,0) = (0,1,1,0)$
$(0,0,0,0)$ es el elemento identidad
cada elemento es inverso de sí mismo
$G=2^n$ es un grupo abeliano finito de orden 2^n.

Ejemplo 3.- $G = 3^n = \{(b_1,b_2,\ldots,b_n)\mid b_j\in\{0,1,2\} \quad j=1,2,\ldots n\}$ la operación binaria es la suma de elemento a elemento evaluada módulo 3. Con esta notación y tomando n=3

$(0,1,2) * (1,2,1) = (1,3,4) = (1,0,1)$
$(2,2,2) * (2,0,1) = (4,2,3) = (1,2,0)$
$(1,2,0) * (2,2,2) = (3,4,2) = (0,1,2)$
$(0,0,0)$ es el elemento identidad
$G=3^n$ es un grupo abeliano de orden 3^n

Teorema 1.- Si G es un grupo, entonces
a) El elemento identidad de G es único.
b) Cada $a\in G$, tiene un único inverso en G.
c) Para cualquier $a\in G$ $(a^{-1})^{-1}= a$.
c) Para todo $a,b\in G$ $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

Teorema 2.- Dados a,b en un grupo G, entonces las ecuaciones $a*X=b$ & $Y*a=b$ tienen solución única para X & Y en G. En particular se cumplen las dos leyes de cancelación en G dadas por.

$a*u = a*w$ implica $u=w$

y $u*a = w*a$ implica $u=w$

Subgrupos.-

Definición 3. Un subconjunto no vacío H de un grupo G, es un subgrupo de G si la operación *, restringida a H, es a su vez, una operación binaria en H que hace de H un grupo.

El siguiente teorema nos da un criterio para decidir cuando un subconjunto de un grupo es un subgrupo.

Teorema 3.- Un subconjunto no vacío H de un grupo G, es un subgrupo de G.

<=> 1) si $a,b\in H$ entonces $a*b\in H$
2) si $a\in H$ entonces $a^{-1}\in H$

<=> 3) si $a,b\in H$ entonces $a*b^{-1}\in H$

Ejemplo 4.- Sea $G=Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ bajo la suma. Sea H el subconjunto que consiste de los multiplos de 6. Es fácil que H es un subgrupo.

Ejemplo 5.- Cualquier subgrupo intrabloque* de un 2^n es un subgrupo. Veamos esta idea en un 2^4 con

$$H=(ABC)_c = \{(i,j,k,e)\in 2^4 \mid i+j+k=0 \text{ mod } 2\}$$

*ver sección 3.1

= { 0000
0001
0110
0111
1010
1011
1100
1101 }

Con el resultado del ejemplo 2 y por medio del teorema 3 es fácil verificar que H es un subgrupo

Ejemplo 6.- Cualquier subgrupo intrabloque** es un 3^n es un subgrupo. Veamos esta idea en un 3^3 con

$$H=(A^1B^2C^3)_0 = \{(i,j,k) \in 3^3 \mid i+2j+k=0 \bmod 3\}$$

{ 000
012
021
102
111
120
201
210
222 }

Con el ejemplo 3 y por medio del teorema 3 es fácil verificar que H es un subgrupo.

Ejemplo 7.- Sea G cualquier grupo, $a \in G$. Sea $(a)=\{a^i : i=0 \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ (a) es un subgrupo de G, es llamado el <u>subgrupo cíclico</u> generado por a. Si para alguna elección de a $G=(a)$, entonces se dice que G es un grupo cíclico. Tales grupos son muy especiales y juegan un papel importante en la teoría de grupos, especialmente en la parte que trata con grupos abelianos. Desde luego, los grupos cíclicos son abelianos, el inverso es falso.

**ver sección 6.1

En un 2^n, es decir, con las combinaciones de tratamientos que genera un diseño factorial 2^n, sea $a\varepsilon 2^n a\neq e=(0,0,\ldots,0)\Rightarrow(a) = \{e,a\}$ $\therefore$ cada combinación de tratamientos genera un subgrupo cíclico de orden 2. En total hay 2^n-1 cíclicos diferentes. En diseño factorial 3^n, sea $a\varepsilon 3^n a\neq e=(0,0,\ldots 0)\Rightarrow(a) = \{e,a,a^{-1}\}$ $\therefore$ cada combinación de tratamientos genera un subgrupo cíclico de orden 3 en total hay $(3^n-1)/2$ subgrupos cíclicos diferentes.

Definición 4.- La relación binaria, $\mathcal{R}$, sobre un conjunto A se dice que es una relación de equivalencia sobre A, si para todo a,b,c en A

1) $a\,\mathcal{R}\,a$	(Prop. reflexiva)
2) Si $a\mathcal{R}b$, entonces $b\mathcal{R}a$	(Prop. simétrica)
3) Si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{R}c$	(Prop. transitiva)

Definición 5.- Si A es un conjunto y si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia entonces la clase de equivalencia de $a\varepsilon A$ es el conjunto $(a) \equiv \{X\varepsilon A \mid X\mathcal{R}a\}$

Teorema 4.- Las distintas clases de equivalencia de una relación de equivalencia sobre A, nos dan una partición de A, como una unión de subconjuntos no vacíos, disjuntos a pares. Recíprocamente dada una descomposición de A como una unión de subconjuntos no vacios, disjuntos a pares, podemos definir una relación de equivalencia sobre A para la cual esos subconjuntos son las clases de equivalencia diferentes.

Definición 6.- Sea G un grupo, H un subgrupo de G, para $a,b\varepsilon G$ decimos que $\underline{a}$ es congruente con $\underline{b}$ mod. H, escribimos $a\equiv b$ mod H si $a*b^{-1}\varepsilon H$.

Teorema 5.- La relación $a \equiv b \mod H$ es una relación de equivalencia.

Definición 7.- Si H es un subgrupo de G, $a \in G \Rightarrow Ha = \{h*a \mid h \in H\}$ Ha es llamado el <u>lateral derecho</u> (o trasladado a la derecha) de H en G.

Teorema 6.- Para toda a G

$Ha = \{X \in G \mid a \equiv X \mod H\}$

De acuerdo al teorema 5, $cl(a)=Ha$, es la clase de equivalencia de, a en G, estas clases de equivalencia nos dan una descomposición de G en subconjuntos disjuntos. Así cualquiera dos laterales derechos de H en G o son idénticos o no tienen elementos en común.

Teorema 7.- Existe una correspondencia 1-1 entre cualesquiera dos laterales derechos de H en G.

El teorema 7 tiene mayor importancia cuando H es un grupo finito, en este caso cualesquiera dos laterales derechos de H tienen el mismo número de elementos. ¿Cuántos elementos tiene un lateral derecho de H?.

Observemos que $H=H_e$, $\therefore$ es en si mismo un lateral derecho de H así cualquier lateral derecho de H en G tiene $|H|$ elementos.

Supongamos ahora que G es un grupo finito, sea K el número de laterales derechos de H en G diferentes. Los teoremas 6 y 7 nos aseguran que cualquiera dos laterales derechos distintos no tienen elementos en común, y cada uno tiene $|H|$ elementos, además cualquier elemento $a \in G$ esta en un único lateral derecho Ha y la unión de laterales derechos es todo G. Así si K representa el número de laterales derechos de H en G diferentes, tendremos que $K|H| = |G|$. Hemos probado el siguiente teorema debido a Lagrange.

Teorema 8.- Si G es un grupo finito y H es un subgrupo de G entonces $|H|$ es un divisor de $|G|$.

Definición 8.- Si H es un subgrupo de G, el índice de H en G es el número de laterales de H en G diferentes

Denotemoslo por $i_G(H)$. Si G es un grupo finito, $i_G(H)=\frac{|G|}{|H|}$

Definición 9.- Si G es un grupo y $a\epsilon G$, el <u>orden</u> o <u>período</u> de a es el mínimo entero positivo tal que $a^m = e$. Si tal entero no existe decimos que a es de orden infinito.

El teorema de lenguaje tiene algunos corolarios importantes

Corolario 1.- Si G es un grupo finito y $a\epsilon G$ entonces $|(a)|\,\big|\,|G|$*
Corolario 2.- Si G es un grupo finito y a G^*entonces $a^{|G|} = e$.

7.3. <u>Relación de grupos con diseños factoriales</u>
Veamos que nos dicen los teoremas anteriores con respecto a las combinaciones de tratamientos en un diseño factorial 2^n y 3^n, p^n, p número primo.

1. Las combinaciones de tratamientos de un diseño factorial p^n ($p=2,3,5,\ldots \therefore p = n^{\circ}$ entero primo), bajo la operación binaria formada por la suma de componente a componente evaluada modulo p, es un grupo abeliano finito de orden p^n . El elemento identidad es $e = (0,0,0,\ldots 0)$.

2. Cualquier subgrupo intrabloque de un factorial p^n es en realidad un subgrupo del grupo p^n.

* u/v dice u es divisor de v

3. En un diseño factorial p^n sea $a\varepsilon p^n$ $a\neq e$ [∴ a es una de las p^n-1 combinaciones de tratamientos que se forman en una repetición de un diseño factorial p^n diferente de la (000...0)] genera el subgrupo ciclico $(a)=\{e,a,a^2,..\ a^{p-1}\}$ de orden p. En total hay $\frac{1}{p-1}(p^n-1)$ subgrupos ciclicos diferentes.

4. En un diseño factorial p^n con confusión. Sea H el subgrupo intrabloque en una repetición del diseño. La relación de equivalencia $a\equiv b$ mod H nos da una partición de $G = p^n$ donde sus clases de equivalencia son los laterales derechos de H en G y que comunmente en el diseño los conocemos con el nombre de bloques y que en cualquiera de ellos $a*b^{-1}\varepsilon H$.

5. Todos los laterales derechos de H en G ∴ todos los bloques, tienen el mismo número de elementos, son de la forma $Ha = \{h*a \mid h\varepsilon H\}$, el cual es un conjunto que comunmente formamos diciendo "en el grupo intrabloque sume 1 a la componente X"

6. El teorema de Lagrange nos asigna que $|H|$ el orden del subgrupo intrabloque divide a $|G|$ el orden de el diseño factorial ∴ a p^n.

7. Existe una correspondencia 1-1 entre cualesquiera dos bloques en un diseño factorial con esquema de confusión.

8. El indice de H en $G=p^n$ es número de bloques diferentes en el diseño y este esta dado por $i_G(H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{p^n}{|H|}$

9. Cualquier combinación de tratamientos en un diseño factorial p^n diferente de $e=(0,0,...0)$ tiene período p.

Ejemplifiquemos los resultados anteriores.

Ejemplo 8.- Consideremos el factorial 2^5 el cual consta de 32 combinaciones de tratamientos, que bajo la operación suma de componentes módulo 2 forman un grupo abeliano, denotemoslo por G.

$$G = \{(a,b,c,d,e) \mid a,b,c,d,e \in \{0,1\}\}$$

su "producto" es la suma de componentes respectivos, modulo 2, por ejemplo

$$(1,0,0,1,1) * (0,1,0,1,0) = (1,1,0,2,1) = (1,1,0,0,1)$$

En $G=2^5$ consideremos la confusión completa de BCDE y ABCD (y por lo tanto la de su interacción generalizada que es AE). Sea β_1 el subgrupo intrabloque, el cual esta generado por las combinaciones de tratamiento que estan en $(BCDE)_0$ y $(ABCD)_0$, es decir las combinaciones de tratamientos $(a,b,c,d,e) \in G$ que satisfacen las ecuaciones $b+c+d+e = 0 \bmod 2$ y $a+b+c+d = 0 \bmod 2$ y que son las 8 siguientes

β_1

00000
00110
01010
01100
10011
10101
11001
11111

Si consideramos un producto de dos elementos de β_1 el resultado es un elemento dentro de β_1 por ejemplo.

$$(0,1,1,0,0) * (1,1,0,0,1) = (1,0,1,0,1)$$

Cualquier elemento es inverso de si mismo.

Los laterales derechos de $H=\beta_1$ en G son los 3 bloques siguientes

$B_2 = H\cdot(0,0,0,0,1) = \{(ABCD)_0,\ (BCDE)_1\}$
$B_3 = H\cdot(1,0,0,0,0) = \{(ABCD)_1,\ (BCDE)_0\}$
$B_4 = H\cdot(0,0,1,0,0) = \{(ABCD)_1,\ (BCDE)_1\}$

Las combinaciones de tratamientos que les corresponden estan dadas explicitamente en la sección 3.2

El teorema de Lagrange nos dice $\frac{|G|}{|H|} = \frac{32}{8} = 4$ que es el indice de H en G y que corresponde al número de bloques en el diseño, en este caso son 4.

Cualquier elemento tiene orden 2, es decir cualquier elemento genera un subgrupo ciclico de orden 2.

7.4. Un principio de enumeración en grupos.

Definición 10.- Sean H y K subgrupos de un grupo G, entonces

$$HK = \{X \in G \mid X = h * k,\ h \in H,\ k \in K\}$$

En general HK no es un subgrupo de G, el siguiente teorema nos da una condición para que lo sea.

Teorema 9.- HK es un subgrupo de G si y solo si HK=KH

Corolario. Si H y K son subgrupos de un grupo abeliano G, entonces HK es un subgrupo de G.

Así el subconjunto HK puede o no ser subgrupo de G, la pregunta de ¿Cuántos elementos tiene el subconjunto HK? la contesta el siguiente.

Teorema 10.- Si H y K son subgrupos finitos de G de orden |H| y |K|, respectivamente, entonces

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

Ahora supongamos que H y K son subgrupos de un grupo finito G y que $|H| > \sqrt{|G|}$ y $|K| > \sqrt{|G|}$. Como $HK \subset G$, $|HK| < |G|$

Así pues $|G| > |HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} > \dfrac{\sqrt{|G|}\sqrt{|G|}}{|H \cap K|} = \dfrac{|G|}{|H \cap K|}$ entonces $|H \cap K| > 1$

por lo tanto $H \cap K \neq \{e\}$. Este resultado se resume en el siguiente

Corolorio.- Si H y K son subgrupo de un grupo finito G y $|H| > \sqrt{|G|}$ $|K| > \sqrt{|G|}$ entonces $H \cap K \neq \{e\}$.

7.5. Subgrupos normales y grupos cocientes.

Notación:- De esta sección en adelante haremos $a * b = a \cdot b = ab$ y la llamaremos multiplicación de a y b.

Si H es un subgrupo de un grupo G los laterales derechos y los laterales izquierdos en general no coinciden. Con frecuencia, en matemáticas el problema crucial es el organizar y descubrir conceptos relevantes que ha la vez se utilicen en más de una cosa. Así Galois organizó los subgrupos para los cuales los laterales derechos e izquierdos coinciden.

Definición 11.- Un subgrupo N de G se dice es un <u>subgrupo normal</u> (o invariante) de G si para toda $g \in G$ y $n \in N$, $gng^{-1} \in N$

Equivalentemente, sea $gNg^{-1} = \{gng^{-1} \in G \mid n \in N\}$ entonces N es un subgrupo normal de G si y solo si $gNg^{-1} \subset N$ para toda $g \in G$.

Teorema 11.- N es un subgrupo normal de G si y solo si $gNg^{-1} = N$ para toda $g \in G$.

Teorema 12.- El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G si y solo si cualquier lateral derecho de N en G es un lateral izquierdo de N en G. Equivalentemente, $gN = gN \ \forall g \in G$.

El concepto de lateral de lugar algunas veces a un nuevo grupo. Esto ocurre cuando y sólo cuando el grupo es normal. Anteriormente definimos HK, cuando H y K son subgrupos de G. Extendamos esta definición a subconjuntos arbitrarios.

Definición 12.- Si A y B son subconjuntos da un grupo G $A \cdot B \equiv \{X \in G \mid X = ab,\ a \in A,\ b \in B\}$

En particular si $A=B=H$, H subgrupo de G así, $HH = \{h_1 h_2 \mid h_1, h_2 \in H\} \subset H$ ya que H es cerrada bajo la multiplicación.. Pero $H = He = \subset HH$ ya que $e \in H$. Entonces $HH = H$.

Sea N un subgrupo normal de G, y sean $a, b \in G$. Consideremos $(Na)(Nb)$; como N es normal en G, $aN = Na$ y con ello

$$Na\ Nb = N(aN)b = N(Na)b = Nab$$

Registremos este resultado como el.

Teorema 13.- Un subgrupo N de G es un subgrupo normal de G si y solo si el producto de dos laterales derechos de N en G es un lateral derecho de N en G.

El producto de dos laterales esta definido de manera única por la formula $NaNb=Nab$ cuando N es subgrupo normal de G. Mostremos esta afirmación, si $Na_1=Na$ y $Nb_1=Nb$, entonces $a_1=na$ y $b_1=mb$ para alguna n y $m \in N$. En consecuencia

$$a_1b_1 = namb = n(ama^{-1})ab = kab$$

donde $k=n(ama^{-1})$. Como N es subgrupo normal de G, $ama^{-1}\in N$ y de ahí, $k\in N$. Así $a_1b_2\in Nab$. Como los transladados forman una partición, se sigue que $Na_1b_1 = Nab$ que es lo que queríamos demostrar. Este producto hace que la colección de laterales derechos sea un grupo.

Sea G/N la colección de laterales derechos de N en G. Con el producto de laterales, se satisface.

i) Si $X, Y \in G/N$ entonces $XY\in G/N$; es decir, $X=Na$, $Y=Nb$ para alguna $a,b\in G$, y $XY=NaNb=Nab\in G/N$.

ii) Si $X,Y,Z\in G/N$, entonces $X=Na$, $Y=Nb$, $Z=Nc$ con $a,b,c\in G$ y $(XY)Z = (NaNb)Nc=N(ab)Nc=N(ab)c$ (como G es asociativo) $= Na(bc) = NaN(bc) = Na(NbNc) = X(YZ)$. Así, el producto en G/N satisface la ley asociativa.

iii) $N=Ne\in G/N$. Si $X\in G/N$, $X=Na$, $a\in G$, así $XN=NaNe=Nae=Na=X$ similarmente $NX=X$. Consecuentemente Ne es el elemento identidad de G/N.

iv) Sea $X=Na$ G/N, $a\in G$, así $Na^{-1}\in G/N$ y $NaNa^{-1}=Naa^{-1}=Ne$. Similarmente $Na^{-1}Na=Ne$. Entonces Na^{-1} es el inverso de Na en G/N.

Pero un sistema que satisface i, ii, iii y iv es un grupo lo cual resumimos en el siguiente.

Teorema 14.- Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G entonces G/N es también un grupo el cual es llamado el <u>grupo cociente</u> o <u>grupo factor</u> de G entre N

Como los elementos de G/N son los laterales derechos de G en N y hay $i_G(N) = \frac{|G|}{|H|}$ de ellos, tenemos

Teorema 15.- Si G es un grupo finito y N es un subgrupo normal de G entonces $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$.

Nuevamente veamos la relación entre grupos y los diseños factoriales.

7.6. Relación de grupos con diseños factoriales (continuación)

Aplicando los teoremas del 9 al 13 al grupo que forman las combinaciones de tratamientos de un diseño factorial p^n obtenemos los siguientes resultados

10. Si H y K son dos subgrupos intrabloque de un factorial p^n diferentes entonces HK es otro subgrupo intrabloque del factorial p^n

11. El número de elementos de HK es $|HK| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$

12. Si H y K son subgrupos intrabloques de un factorial p^n y $|H| > \sqrt{p^n}$ y $|K| > \sqrt{p^n}$ entonces $H \cap K \neq \{(0,0,\ldots 0) = e\}$

13. Cualquier subgrupo intrabloque de un factorial p^n es un subgrupo normal.

14. Los bloques en un factorial p^n forman grupo, en si es el gru

po cociente G/H donde G es el grupo p^n y H cualquier subgrupo intrabloque.

15. En diseños factoriales fraccionales* se investiga el uso de un solo bloque B.

i) B es una clase lateral de un subgrupo intrabloque H.
ii) El subgrupo intrabloque H esta generado por los efectos que determinan la relación de definición asignandoles signo - .
iii) $B \in G/H$ ∴ B es un elemento del grupo cociente G/H.
iv) Existe $b \in B$ tal que $B = Hb$
v) $H = B\,b^{-1}$ es un subgrupo normal del grupo p^n
vi) La fracción principal F es un bloque ∴ es una clase lateral de H ∴ es un elemento del grupo cociente G/H en el cual todos los efectos que determinan la relación de definición tienen signo + . Es más, existe $f \in F$ tal que $F = Hf$.

Ejemplo 9. Continuando con el problema del factorial 2^5 ejemplificamos los resultados anteriores.

En el factorial 2^5 sea $H = (ABCD)_0$, es un subgrupo intrabloque que consta de 16 elementos (los del bloque I y II en la sección 5.2), Sea $K = (BCDE)_0$, es otro subgrupo intrabloque que también consta de 16 elementos (los del bloque I y III en la misma sección 5.2). Su intersección $H \cap K$ consta de 8 elementos (los del bloque I). Su producto HK genera un grupo, el cual tiene orden

$$|HK| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|} = \frac{16 \times 16}{8} = 32$$

es decir genera al grupo $G=2^5$, esto se puede verificar facilmente.

Observece que $|H| = 16 > \sqrt{32}$ y $|K| = 16 > \sqrt{32}$ lo cual nos asegura que $H \cap K \neq \{e\}$.

* Se estudian en el capítulo 10.

Si G es igual al grupo 2^5 y H es el subgrupo intrabloque $\beta_1 = \{(ABCD)_o, (BCDE)_o\}$ el subgrupo cociente G/H consta de los cuatro bloques (dados en la sección 3.2). El elemento neutro esta dado, por el bloque $I = \beta_1$, cada bloque es inverso de si mismo, un producto es

$$\beta_2 \cdot \beta_3 = [\beta_1(0,0,0,0,1)] \cdot [\beta_1(1,0,0,0,0)] = \beta_1[(0,0,0,0,1)(1,0,0,0,0)] = \beta_1(1,0,0,0,1) = \beta_1(0,0,1,0,0) = \beta_4$$

resumiendo, ~~la~~ tabla de multiplicar es

$\times$	β_1	β_2	β_3	β_4
β_1	β_1	β_2	β_3	β_4
β_2	β_2	β_1	β_4	β_3
β_3	β_3	β_4	β_1	β_2
β_4	β_4	β_3	β_2	β_1

Consideremos otro ejemplo:

Si G es el grupo 2^7 y H es el subgrupo intrabloque $H = \beta_1 = \{(ABD)_o (ACE)_o (BCF)_o (ABCD)_o\}$ el subgrupo cociente G/H consta de 16 elementos (bloques, se dan en la sección 3.36) el elemento neutro es el subgrupo intrabloque β_1, observece que en su parte inferior tienen una indicación, por ejemplo el bloque VII, β_7 tiene 1aE, 1aF lo cual nos indica que

$$\beta_7 = \beta_1 \ (0,0,0,0,1,1,0)$$

de la misma forma $\beta_{10} = \beta_1 \ (0,0,0,1,0,0,1)$

los bloques restantes se obtienen en forma similar un producto es

$$\beta_6 \cdot \beta_{12} = [\beta_1(0,0,0,0,1,0,1)][\beta_1(0,0,0,1,0,1,1)] = \beta_1[(0,0,0,0,1,0,1)(0,0,0,1,0,1,1)] = \beta_1(0,0,0,1,1,1,0) = \beta_{15}$$

Resumiendo la tabla de multiplicar es

$\times$	β_{1}	β_{2}	β_{3}	β_{4}	β_{5}	β_{6}	β_{7}	β_{8}	β_{9}	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}
β_{1}	β_{1}	β_{2}	β_{3}	β_{4}	β_{5}	β_{6}	β_{7}	β_{8}	β_{9}	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}
β_{2}	β_{2}	β_{1}	β_{4}	β_{3}	β_{6}	β_{5}	β_{8}	β_{7}	β_{10}	β_{9}	β_{12}	β_{11}	β_{14}	β_{13}	β_{16}	β_{15}
β_{3}	β_{3}	β_{4}	β_{1}	β_{2}	β_{7}	β_{8}	β_{5}	β_{6}	β_{11}	β_{12}	β_{9}	β_{10}	β_{15}	β_{16}	β_{13}	β_{14}
β_{4}	β_{4}	β_{3}	β_{2}	β_{1}	β_{8}	β_{7}	β_{6}	β_{5}	β_{12}	β_{11}	β_{10}	β_{9}	β_{16}	β_{15}	β_{14}	β_{13}
β_{5}	β_{5}	β_{6}	β_{7}	β_{8}	β_{1}	β_{2}	β_{3}	β_{4}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{9}	β_{10}	β_{11}	β_{12}
β_{6}	β_{6}	β_{5}	β_{8}	β_{7}	β_{2}	β_{1}	β_{4}	β_{3}	β_{14}	β_{13}	β_{16}	β_{15}	β_{10}	β_{9}	β_{12}	β_{11}
β_{7}	β_{7}	β_{8}	β_{5}	β_{6}	β_{3}	β_{4}	β_{1}	β_{2}	β_{15}	β_{16}	β_{13}	β_{14}	β_{11}	β_{12}	β_{9}	β_{10}
β_{8}	β_{8}	β_{7}	β_{6}	β_{5}	β_{4}	β_{3}	β_{2}	β_{1}	β_{16}	β_{15}	β_{14}	β_{13}	β_{12}	β_{11}	β_{10}	β_{9}
β_{9}	β_{9}	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{1}	β_{2}	β_{3}	β_{4}	β_{5}	β_{6}	β_{7}	β_{8}
β_{10}	β_{10}	β_{9}	β_{12}	β_{11}	β_{14}	β_{13}	β_{16}	β_{15}	β_{2}	β_{1}	β_{4}	β_{3}	β_{6}	β_{5}	β_{8}	β_{7}
β_{11}	β_{11}	β_{12}	β_{9}	β_{10}	β_{15}	β_{16}	β_{13}	β_{14}	β_{3}	β_{4}	β_{1}	β_{2}	β_{7}	β_{8}	β_{5}	β_{6}
β_{12}	β_{12}	β_{11}	β_{10}	β_{9}	β_{16}	β_{15}	β_{14}	β_{13}	β_{4}	β_{3}	β_{2}	β_{1}	β_{8}	β_{7}	β_{6}	β_{5}
β_{13}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{9}	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{5}	β_{6}	β_{7}	β_{8}	β_{1}	β_{2}	β_{3}	β_{4}
β_{14}	β_{14}	β_{13}	β_{16}	β_{15}	β_{10}	β_{9}	β_{12}	β_{11}	β_{6}	β_{5}	β_{8}	β_{7}	β_{2}	β_{1}	β_{4}	β_{3}
β_{15}	β_{15}	β_{16}	β_{13}	β_{14}	β_{11}	β_{12}	β_{9}	β_{10}	β_{7}	β_{8}	β_{5}	β_{6}	β_{3}	β_{4}	β_{1}	β_{2}
β_{16}	β_{16}	β_{15}	β_{14}	β_{13}	β_{12}	β_{11}	β_{10}	β_{9}	β_{8}	β_{7}	β_{6}	β_{5}	β_{4}	β_{3}	β_{2}	β_{1}

7.7. Homomorfismos.- Consideraremos transformaciones de un sistema algebraico (grupo) a otro sistema algebraico (otro grupo) el cual preserva la estructura matemática.

Definición 13.- Una transformación ϕ de un grupo G en un grupo G* es un homorfismo si para toda $a,b\varepsilon G$ $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$.

Ejemplo 10.- Sea G el grupo de los enteros bajo adición G* el grupo de los enteros bajo adición modulo n. Definamos $\phi(X)$ = residuo de X en la división por n. Mostremos que Y es un homorfismo. Sean X, Y ε G, por el algoritmo Euclidiano de la división $X=kn+a$ $0\leq a<n$ $Y=hn+b$ $0\leq b<n$ $a+b=mn+c$ $0\leq c<n$

$\Rightarrow$ $X+Y = n(k+1+m) + c$

Así $\phi(X+Y) = c$ $0\leq c<n$

y $\phi(X) + \phi(Y) = (a+b) \bmod n = c$

luego $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$

Definición 14.- Una transformación $g:S\to T$ se dice es sobre si dado $t\varepsilon T$, existe un elemento $s\varepsilon S$ tal que $g(s)=t$.

Definición 15.- Una transformación $g:S\to T$ se dice es uno a uno si cuando $s_1\neq s_2$, entonces $g(s_1)\neq g(s_2)$

Teorema 15.- Sea G un grupo, N un subgrupo normal de G sea g la transformación de G en G/N dada por $g(x)=Nx$ para todo $x\varepsilon G$. Entonces g es un homomorfismo de G sobre G/N.

Demostración.

ϕ es sobre, ya que si $X\varepsilon G/N$ es de la forma $X=Ny$, $y\varepsilon G$ así $X=g(y)$. Para ver que g es un homomorfismo, necesitamos verificar la propiedad multiplicativa, así, si $x,y\varepsilon G$ $g(xy)=Nxy=NxNy=g(x)\cdot g(y)$

g recibe el nombre de homomorfismo natural de G sobre su grupo cociente G/N.

Definición 16.- Si g es un homomorfismo de G en G, el núcleo de g, K_g es definido por $K_g = \{x \epsilon G \mid \phi(x) = e^* =$ elemento identidad de $G^*\}$

Teorema 16.- Si g es un homomorfismo de G en G* entonces

1) $g(e) = e^*$, el elemento identidad en G*
2) $g(x^{-1}) = [g(x)]^{-1}$ para todo $x \epsilon G$

Teorema 17.- Si g es un homomorfismo de G en G* con nucleo K entonces K es un subgrupo normal de G.

Teorema 18.- Si g es un homomorfismo de G sobre G* con núcleo K, entonces el conjunto de imagenes inversas de $h \epsilon G^*$ esta dadas por Kx donde x es cualquier imagen inversa de h en G.

Si K = {e} , entonces cualquier $h \epsilon G^*$ tiene exactamente una imagen inversa, es decir g es una transformación uno a uno. (no necesariamente sobre).

Definición 17.- Un homomorfismo g de G en G* se dice que es un isomorfismo si g es uno a uno.

Definición 18.- Dos grupos G, G* se dice son isomorfos si existe un isomorfismo de G sobre G* , escribimos $G \simeq G^*$

En este caso tenemos 1) $G \simeq G$, 2) Si $G \simeq G^*$ entonces $G^* \simeq G$ 3) Si $G \simeq G^*$ y $G^* \simeq G^{**}$ entonces $G \simeq G^{**}$. Esto quiere decir que los grupos isomorfos son, esencialmente, iguales excepto en los nombres de sus elementos.

Así, bajo isomorfismo, si se quiere la imagen de $a \cdot b$ en G^*, se puede encontrar directamente o primero encontrar la imagen de a y la de b y efectuar sobre ellas la multiplicación en G^*, en si, bajo isomorfismo es indiferente el orden en el que se aplique la operación binaria y la transformación.

Corolario.- Un homomorfismo g de G en G^* con núcleo K_g es un isomorfismo de G en G^* si y solo si $K_g = \{e\}$

Así para ver si dos grupos son isomorfos, primero hay que encontrar un homomorfismo de uno sobre el otro y después probar que el núcleo del homomorfismo es $\{e\}$.

Teorema 19.- (Teorema del isomorfismo o primer teorema del isomorfismo)

Si g es un homomorfismo de G sobre G^* con núcleo K. Entonces $G/K \simeq G^*$.

El teorema 19 es importante, ya que nos indica que grupos puede esperarse que surgan como imagen homomorfa de un grupo dado. El teorema nos asegura que deberá poder expresarse en la forma G/K, donde K es normal en G. Pero por el teorema 15, para cualquier subgrupo normal N de G, G/N es una imagen homomorfa de G. Así existe una correspondencia uno a uno entre imagenes homomorfas de G y subgrupos normales. Así, encontrando todos los subgrupos normales N de G y construyendo todos los grupos G/N, podemos ver todas las imagenes homomorfas de G (bajo isomorfismo).

Teorema 20.- (Teorema de Cauchy para grupos abelianos)

Suponga que G es un grupo abeliano finito y que $p \mid |G|$ donde p es un número primo. Entonces existe un elemento $a \neq e \in G$ tal que $a^p = e$.

Teorema 21.- (Teorema de Sylow para grupos abelianos).

Si G es un grupo abeliano de orden $|G|$ y si p es un número primo tal que $p^{\alpha}\,\big|\,|G|$ y $p^{\alpha+1}\nmid|G|$ entonces G tiene un subgrupo de orden p^{α}.

Corolario.- Si G es un grupo abeliano de orden $|G|$ y $p^{\alpha}\,\big|\,|G|$, $p^{\alpha+1}\nmid|G|$, entonces existe un único subgrupo de G de orden p^{α}

Sea $g:G\to G^*$ un homomorfismo de G sobre G*. Si H es un subgrupo de G entonces su imagen homomorfa $g(H) = H^*$ es un subgrupo de G*. Si H es normal en G, g(H) es normal en G*. La pregunta sobre que podemos decir del recíproco, nos la contesta el siguiente teorema

Teorema 22.- (Teorema de Correspondencia)

Sea g un homomorfismo de G sobre G* con núcleo K. Para H* un subgrupo de G* definamos $H=\{x\in G|g(x)\in H^*\}$. Entonces H es un subgrupo de G y $H\supset K$; si, H* es normal en G* entonces H es normal en G. Además, esta asociación de conjuntos forma una transformación uno a uno entre el conjunto de todos los subgrupos de G* sobre el conjunto de todos los subgrupos de G que contienen a K.

Corolario.- Sea g un homomorfismo de G sobre G*. Sea H* un subgrupo de G* de índice $n<\infty$. Sea H la contraimagen de H*. Entonces H es de índice n en G.

Corolario.- Sea N un subgrupo normal de G. Sea L un subgrupo de G/N. Entonces podemos escribir $L=H/N$ donde H es un subgrupo de G que contiene a N. Si L es subgrupo normal de G/N entonces H es subgrupo normal de G. Además si $H_1/N=H/N$ donde H_1 y H son subgrupos de G que contienen a N, entonces $H_1=H$.

En el teorema del homomorfismo, establecimos que la imagen de un homomorfismo $g:G\to K$, es esencialmente un grupo factor de G. ¿Cuál es el efecto de g sobre los sugrupos? la respuesta nos la da el siguiente.

Teorema 23.- (Teorema del isomorfismo de subgrupo o segundo teorema del isomorfismo)

Sea N un subgrupo normal de G y sea H un subgrupo de G. Entonces $H\cap N$ es un subgrupo normal de H, HG es un subgrupo de G y

$$H / (H\cap N) \approx HN / N$$

Que sucede cuando tomamos un grupo factor de un grupo factor. La respuesta nos la da el siguiente.

Teorema 24.- (Teorema del factor de un factor o tercer teorema de isomorfismo)

Sea g un homomorfismo de G sobre G^* con núcleo K y sea N^* un subgrupo normal de G^*, $N=\{x\in G \mid g(x)\in N^*\}$. Entonces G/N es isomorfo a G^*/N^*.
Equivalentemente $G/N \approx (G/K)/(N/K)$

Forma alternativa.- Si en el grupo factor G/N existe un subgrupo M/N, $M\supseteq N$ entonces M es subgrupo normal de G y

$$G/M \approx (G/N)/(M/N)$$

Hemos considerado isomorfismo de un grupo a otro. Un caso especial es cuando el isomorfismo es de un grupo <u>en</u> si mismo (no necesariamente sobre). Y es de gran interés cuando el isomorfismo es de un grupo <u>sobre</u> si mismo.

Definición 19.- Un automorfismo de un grupo G, es un isomorfismo de G sobre si mismo.

Obviamente $I:G\to G$ dado por $I(x)=x$ es un automorfismo de G.

Teorema 25.- Si G es un grupo, entonces $a(G)$, el conjunto de automorfismos de G es también un grupo.

Teorema 26.- Sea G un grupo y g un automorfismo de G. Si $a\varepsilon G$ es de orden $|(a)|>0$, entonces $|g(a)| = |(a)|$.

7.8. Continuemos con la relación entre grupos y diseños factoriales.

16. La notación de Fisher y Yates y la notación numerica que hemos utilizado para las combinaciones de tratamientos determinan grupos isomorfos. Esto nos indica que son esencialmente iguales ambas notaciones.

17. Todas las imagenes homomorfas de el grupo de tratamientos de un factorial p^n, las podemos obtener (bajo isomorfismo) encontrando todos los subgrupos normales N del grupo p^n y construyendo todos los grupos cociente p^n/N.

    En el teorema de Couchy nos indica que en un grupo p^n existe un elemento $a \neq e$ tal que $a^p = e$. pero

18. todos los elementos distintos de e de un grupo p^n son de orden p es decir $a^p = e \ \forall a\varepsilon p^n \ a \neq e$.

    El teorema de correspondencia nos indica

19. Existe una correspondencia 1-1 entre bloques y subgrupos de p^n que contienen a el subgrupo intrabloque.

20. El teorema de Sylow nos dice que el grupo p^n es un subgrupo de si mismo.

Si en el factorial p^n, la media general se representa en I los efectos principales por A,B,C,..., las interacciones por A^1B^1, A^1B^2, ... A^1B^{p-1}, A^1C^1, ... $A^1B^1C^1D^1$, $A^1B^1C^1D^2$,... etc. bajo la operación, suma de exponentes modulo p, entonces estos símbolos forman un grupo abeliano finito de orden p^n, observamos que $A^p = B^p = \ldots = I$ el elemento identidad, así.

21. El grupo de tratamientos y el grupo de efectos son isomorfos.

7.9. Grupos finitos. Los teoremas de Sylow.

El teorema de Lagrange nos dice que el orden de un subgrupo divide al orden de un grupo finito. El inverso en general es falso pero el teorema que sigue nos asegura la existencia de aquellos subgrupos cuyo orden es una potencia de un número primo.

Teorema 27.- (Primer teorema de Sylow)

Sea G un grupo finito, p un primo y p^r la mayor potencia de p que divide al orden de G. Entonces existe un subgrupo de orden p^r.

Definición 20.- Un grupo cuyo orden es una potencia de un primo es un p-grupo. Un p-subgrupo de Sylow H de un grupo G es un p-grupo maximal de G ∴ si $H \subseteq F \subseteq G$ donde F es un p grupo entonces F=H.

El teorema 27 nos asegura que todo grupo finito tiene al menos un p-subgrupo de Sylow.

Teorema 28.- (Segundo teorema de Sylow)

Si H es un subgrupo de un grupo finito G y H es un p-grupo, entonces H está contenido en un p-subgrupo de Sylow de G.

Definición 21.- Dos subgrupos S y T de un grupo G son conjugados si existe un $g\epsilon G$ tal que $g^{-1}Sg=T$

Teorema 29.- (Tercer teorema de Sylow)

Dos p-subgrupos de Sylow cualesquiera de un grupo finito G son conjugados. El número S_p de distintos p-subgrupos de Sylow de G es congruente con 1 mod p y además S_p divide a $|G|$ (S_p es congruente con 1 módulo p si existe $K\epsilon Z$) $S_p-1=kp$).

El estudio de los p-grupos es importante ya que la estructura de los p-subgrupos de Sylow determina parcialmente la estructura de G.

Definición 22.- Si G es un grupo, el centro de G es

$$Z(G) = \{Z \epsilon G \mid \text{para todo } g\epsilon G, \quad gZ=Zg\}$$

Teorema 30.- Si $G \neq \{e\}$ y G es un p-grupo finito, entonces Z(G) el centro de G, es de orden mayor que uno.

Corolario.- Si G es un grupo de orden p^r, $r\geq 1$, entonces G tiene un subgrupo normal de orden p^{r-1}.

Es claro que aplicando varias veces este corolario podemos obtener una sucesión de subgrupos de G.

$$\{1\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_{r-1} \subseteq H_r = G$$

donde H_i es un subgrupo normal de H_{i+1} y $|H_i|=p^i$ $i=0,1,2...r$.

Productos directos de grupos.

Definición 23.- El producto cortesiano de dos conjuntos H y K es $HxK = \{(h,k) | h\varepsilon H$ y $k\varepsilon K\}$.

Si H y K son grupos, definamos una multiplicación de elementos en HxK. Sean (h_1, K_1), $(h_2, k_2) \varepsilon HxK$ definase

$$(h_1, k_1)\cdot(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2) \qquad (A)$$

donde h_1h_2 y k_1k_2 son los productos obtenidos en los grupos H y K respectivamente.

Teorema 30.- Si H y K son grupos, el conjunto HxK dotado de la operación binaria definida en (A) es un grupo.

El elemento identidad es $(1,1)$, el inverso de (h,k) es (h^{-1},k^{-1})

Teorema 31.- Si G=HxK es el producto directo de los grupos H y K entonces los conjuntos

$\hat{H} = \{(h,1)\ |h\varepsilon H$, 1 es el elemento identidad en K$\}$

$\hat{K} = \{(1,k)\ |k\varepsilon K$, 1 es el elemento identidad en H$\}$

Son subgrupos de G. Además $H\approx\hat{H}$, $K\approx\hat{K}$ y si $\hat{a}\varepsilon\hat{H}$ y $\hat{b}\varepsilon\hat{K}$ $\hat{a}\hat{b}=\hat{b}\hat{a}$. Finalmente $G=\hat{H}\hat{K}$ y $\hat{H}\cap\hat{K}=\{(1,1)\}$.

Como recíproco tenemos

Teorema 32.- Sea G un grupo con dos subgrupos H y K tales que $H\cap K = \{e\}$ y los elementos de H conmuten con los de K y HK=G. Entonces G=HxK.

Finalmente con un importante teorema.

Teorema 33.- (Teorema de Cayley)

Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.

7.10. Relación entre grupos y diseños factoriales.

22. El primer teorema de Sylow nos dice que el conjunto de combinaciones de tratamientos de un diseño factorial p^n es un p-grupo de Sylow de orden p^n.

23. Cualquier subgrupo intrablock es un p-grupo.

24. No hay subgrupos conjugados en un diseño factorial p^n.

25. El tercer teorema de Sylow nos dice que existe un único p-subgrupo de Sylow. (Todo el diseño factorial p^n).

26. El centro de un diseño factorial p^n es todo p^n.

27. Podemos obtener una sucesión de subgrupos de un diseño factorial p^n

$$\{I\}=H_0 \subseteq \{H_1\} \subseteq \{H_2\} \subseteq \ldots \subseteq H_{r-1} \subseteq H_n = \text{Diseño } p^n$$

donde H_i es subgrupo normal de H_{i+1} y $|H_i| = p^i$ $i=0,1,2..n$.

28. El conjunto de combinaciones de tratamientos de un diseño factorial es isomorfo a un grupo de permutaciones.

CAPITULO 8

DISEÑO FACTORIAL p^n

(p un número primo)

8.1 Introducción.

Se hará una generalización de los factoriales 2^n y 3^n extendiendo las ideas que en ellos se consideraron, para hacer el análisis de factoriales p^n cuando p es un número primo.

En un factorial p^n las combinaciones de tratamientos se representan por $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. $0 \leq j_i \leq p-1$; $i=1,2,\ldots n$. j_i representa el nivel que toma el i-esimo factor en la combinación de tratamientos considerada. El conjunto de tratamientos que describe el factorial p^n forma un grupo abeliano finito de orden p^n, donde la operación binaria está definida por la suma de índices correspondientes evaluada módulo p.

Los $p^n - 1$ grados de libertad para tratamientos se pueden descomponer en $(p^n-1)/(p-1)$ conjuntos de totales con $(p-1)$ g.l. cada uno y una suma de cuadrados asociada a cada conjunto, las cuales son ortogonales entre si, es decir, tienen distribuciones "j_i" cuadrada independientes y sus sumas son nuevas sumas de cuadrados con distribución "j_i" cuadrada con un número de grados de libertad igual a la suma de los grados de libertad de los que proviene.

Esos $(p^n-1)/(p-1)$ conjuntos son los efectos que genera el factorial p^n. Así si consideramos el efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots Z^{\alpha_n}$, el símbolo $(A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} \ldots Z^{\alpha_n})_k$ corresponde al total de los p^{n-1} tratamientos que satisfacen la ecuación

$$\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \ldots\ldots + \alpha_n j_n = k \bmod p$$

variando k de 0 a p-1 construimos un conjunto de p totales, donde cada total está constituído por la suma de p^{n-1} combinaciones de tratamientos epecificados por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 j_1+\alpha_2 j_2+\dots\dots+\alpha_n j_n = 0 \\ \alpha_1 j_1+\alpha_2 j_2+\dots\dots+\alpha_n j_n = 1 \\ \vdots \\ \alpha_1 j_1+\alpha_2 j_2+\dots\dots+\alpha_n j_n = p-1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{Módulo p} \\ 0\leq\alpha_i\leq p-1 \\ \text{La primera } \alpha_i \neq 0 \text{ es } \alpha_i = 1 \end{array} \qquad (8.1)$$

Los coeficientes $\alpha_i^{\prime}s$ de estas ecuaciones son números enteros entre 0 y p-1, no todos cero, y por unicidad de la enumeración la primer α_i diferente de cero toma el valor 1. Ya que el conjunto de ecuaciones $\lambda(\Sigma\alpha_i j_i) = K \bmod p$, donde $k=0,1,2,\dots p-1$, y λ es un número entero entre 1 y p-1 genera el mismo conjunto que el dado por

$$\Sigma\alpha_i j_i = h \bmod p$$

pero en diferente orden ya que existe una solución h única para la ecuación.

$$\lambda h = K \bmod p.$$

De esta manera, la variación entre los p totales que se generan por medio de las ecuaciones (8,1) nos da la variación que tiene el efecto $A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\dots Z^{\alpha_n}$ y se mide por una suma de cuadros de la siguiente manera

$$SC_{A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\dots Z^{\alpha_n}} = \frac{(A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\dots Z^{\alpha_n})_0^2+(A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\dots Z^{\alpha_n})_1^2+\dots+(A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\dots Z^{\alpha_n})_{p-1}^2}{r\ p^{n-1}} - \frac{T}{r\ p^n} \qquad (8,2)$$

donde r es el número de repeticiones de cada tratamiento, T es el total de todas las observaciones en el experimento.

Por ejemplo consideremos el análisis del

8.2. Diseño Factorial 5^2

Enumeremos los $6 (= \frac{5^2 - 1}{5 - 1})$ conjuntos de $4(=p-1)$ grados de libertad, cada uno para el diseño factorial 5^2 con factores a y b

$$A,\ B,\ A^1B^1,\ A^1B^2,\ A^1B^3,\ A^1B^4$$

El subgrupo intrabloque $(A^1B^4)_0$ está formado por $(A^1B^4)_0 = [\text{Total de tratamientos con } j_1+4j_2=0 \bmod 5] = [00+11+22+33+44]$

Observece que j_1 denota el nivel de A y j_2 el de B y que estos tratamientos forman un subgrupo, que además aparecen los 5 niveles de cada factor una vez, esto imprime ortogonalidad al conjunto de efectos que generan las ecuaciones (8.1)

$(A^1B^4)_3$ se obtiene sumando 3 mod 5 a j_1 en los tratamientos que forman el sugbrupo intrabloque $(A^1B^4)_0$, así

$$(A^1B^4)_3 = [(30) + (41) + (02) + (13) + (24)]$$

De manera similar se obtienen los demás totales.

Las sumas de cuadrados se calculan de la siguiente forma

$$SC_A = \frac{(A)_0^2+(A)_1^2+(A)_2^2+(A)_3^2+(A)_4^2}{5r} - \frac{T^2}{25r}$$

$$SC_{A^1B^4} = \frac{(A^1B^4)_0^2+(A^1B^4)_1^2+(A^1B^4)_2^2+(A^1B^4)_3^2+(A^1B^4)_4^2}{5r} - \frac{T^2}{25r}$$

El análisis de variancia se da en la tabla 8.1

Tabla 8.1 A. de V. para el diseño factorial 5^2 en bloques al azar

F.V.	g.l	SC
Bloques	r-1	
Tratamientos	24	
A	4	
B	4	
A x B	16	
A^1B^1	4	
A^1B^2	4	
A^1B^3	4	
A^1B^4	4	
Error	24(r-1)	
Total	25r-1	

8.3 Factorial 5^3

Los 31($=5^3-1$)/(5-1)) conjuntos de 4(=5-1) grados de libertad para el diseño factorial 5^3 con factores a,b y c son

Efectos principales: A, B, C

Interacciones de 2 factores: A^1B^1, A^1B^2, A^1B^3, A^1B^4; A^1C^1, A^1C^2, A^1C^3, A^1C^4, B^1C^1, B^1C^2, B^1C^3, B^1C^4

Interacciones de 3 factores: $A^1B^1C^1$, $A^1B^1C^2$, $A^1B^1C^3$, $A^1B^1C^4$; $A^1B^2C^1$, $A^1B^2C^2$, $A^1B^2C^3$, $A^1B^2C^4$; $A^1B^3C^1$, $A^1B^3C^2$, $A^1B^3C^3$, $A^1B^3C^4$; $A^1B^4C^1$, $A^1B^4C^2$, $A^1B^4C^3$, $A^1B^4C^4$.

El subgrupo "intrabloque" $(A^1B^2C^2)_o$ está generado por las 25 combinaciones de tratamientos que cumplen

$$j_1+2j_2+2j_3 = 0 \bmod 5$$

que explicitamente son:

TABLA 8.2 Las 25 combinaciones de tratamientos que forman $(A^1B^2C^2)_o$

000	102	204	301	403
014	111	213	310	412
023	120	222	324	421
032	134	231	333	430
041	143	240	342	444

por ejemplo, $(A^1B^2C^2)_o$ se obtiene sumando 3 mod 5 a j_1 en las combinaciones de tratamientos que forman el subgrupo intrabloque $(A^1B^2C^2)_o$.

Analogamente se obtienen los demás totales

Las SC se calculan de la siguente forma

$$SC_B = \frac{(B)_0^2+(B)_1^2+(B)_2^2+(B)_3^2+(B)_4^2}{25r} - \frac{T^2}{125r}$$

$$SC_{B^1C^1} = \frac{(B^1C^1)_0^2+(B^1C^1)_1^2+(B^1C^1)_2^2+(B^1C^1)_3^2+(B^1C^1)_4^2}{25r} - \frac{T^2}{125r}$$

$$SC_{A^1B^2C^2} = \frac{(A^1B^2C^2)^2 + (A^1B^2C^2)^2 + (A^1B^2C^2)^2 + (A^1B^2C^2)^2 + (A^1B^2C^2)^2}{25r} - \frac{T^2}{125r}$$

De manera análoga se calculan las restantes sumas de cuadrados.

El análisis de variancia se da en la tabla 8.3.

TABLA 8.3 A. de V. para el diseño factorial 5^3 en bloques al azar

F.V	G.L.
Bloques	r-1
Tratamientos	124
Efectos principales	12
Interacciones de dos factores	48
Interacción de tres factores	64
Error	124(r-1)
Total	125(r-1)

8.4 Confusión en el diseño factorial p^n (p número primo)

Los únicos divisores de p^n son potencias de p con exponente s<n. La regla, para obtener las interacciones generalizadas es una extensión de la regla dada para el caso de p=2 y p=3, queda enunciada de la siguiente manera:

Si dos efectos o interacciones X, Y están completamente confundidos con bloques, también lo estan sus interacciones generalizadas las cuales son XY, XY^2, XY^3, ..., XY^{p-1}, donde estos símbolos se escriben en términos de las letras ABC, etc., y la suma de exponentes es suma modulo p. Mostremos este hecho.

Consideremos el efecto $X = A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\ldots Z^{\alpha_n}$, le corresponden las ecuaciones.

$$\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \ldots + \alpha_n j_n = k \bmod p \; ; \; k = 0,1,2,\ldots p-1. \quad (8.3)$$

y el efecto $Y = A^{\beta_1}B^{\beta_2}\ldots Z^{\beta_n}$, al cual le corresponden las ecuaciones

$$\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2 + \ldots + \beta_n j_n = h \bmod p \quad h = 0,1,2,\ldots.p-1. \quad (8.4)$$

Como X y Y estan completamente confundidas con bloques las combinaciones de tratamientos de cualquier bloque deben de satisfacer las ecuaciones (8.3) y (8.4) y por lo tanto también la ecuación.

$$(\alpha_1 + \lambda\beta_1)j_1 + (\alpha_2 + \lambda\beta_2)j_2 + \ldots + (\alpha_n + \lambda\beta_n)j_n = (k + \lambda h) \bmod p; \lambda = 0,1,2..,p-1 \quad (8.5)$$

los coeficientes de ambos miembros de la ecuación (8.5) se suman mod p., y corresponden el simbolo XY^{λ} dado anteriormente. Así, las observaciones de cualquier bloque toman un valor constante para cualquiera de las ecuaciones correspondientes XY^{λ}, donde $1 \leq \lambda \leq p-1$. El efecto o interacción XY^{λ} esta entonces confundido con bloques para esos valores de λ, este hecho se utiliza para mostrar el siguiente.

Teorema 1. El número total de sistemas de confusión de un experimento factorial p^n en p^{n-s} bloques de p^s unidades experimentales es igual a

$$\frac{(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\ldots(p^n-p^{n-s-1})}{(p^{n-s}-1)(p^{n-s}-p)\ldots\ldots..(p^{n-s}-p^{n-s-1})}$$

Demostración.

Observemos que los efectos e interacciones confundidas son (n-s) efectos independientes, en el sentido de que ninguno de ellos debe ser interacción generalizada de los restantes. Y que el número total de efectos que deben considerarse es: n efectos principales $+\binom{n}{2}(p-1)$ interacciones de dos factores $+\binom{n}{3}(p-1)^2$ interacciones de 3 factores + ... $+\binom{n}{n}(p-1)^{n-1}$ interacciones de n factores.

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^{k-1} = (p-1)^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^{k}\cdot 1^{n-k} - 1\right] =$$

$$= \frac{p^n-1}{p-1} \text{ efectos, cada uno con } p-1 \text{ g.l.}$$

Así, el primero lo podemos seleccionar de $\frac{p^n-1}{p-1}$ maneras el segundo de $\frac{p^n-1}{p-1} - 1 = \frac{p^n-p}{p-1}$ maneras.

El tercero tiene que ser diferente del primero, del segundo y de sus interacciones generalizadas, y lo podemos seleccionar de

$$\frac{p^n-p}{p-1} - (p-1) - 1 = \frac{p^n-p}{p-1} - p = \frac{p^n-p^2}{p-1} \text{ etc.}$$

Esto nos da $\left(\frac{p^n-1}{p-1}\right)\left(\frac{p^n-p}{p-1}\right)\ldots\left(\frac{p^n-p^{n-s-1}}{p-1}\right)$ número total de maneras de generar el sistema de confusión (se está considerando orden, y este no importa). Ahora, cualquier sistema de estos puede enumerarse de

$$\left(\frac{p^{n-s}-1}{p-1}\right)\cdot\left(\frac{p^{n-s}-p}{p-1}\right)\cdot\left(\frac{p^{n-2}-p^2}{p-1}\right)\ldots\left(\frac{p^{n-s}-p^{n-s-1}}{p-1}\right) \quad \text{formas diferentes}$$

así pues el número total de sistemas diferentes es el enunciado en el teorema 1. #

El teorema de Fisher (ver capítulo sección pág) puede extenderse para factoriales, p^n con p-nº primo o potencia de primo. En 1945 Fisher probó el siguiente teorema.

Teorema 2. Confusión mínima en factoriales p^n

Un diseño factorial p^n puede arreglarse en p^{n-s} bloques de p^s u.e. cada uno sin confundir efectos principales ni interacciones de dos factores.

$$\text{-Si} \quad n \leq \frac{p^s-1}{p-1}$$

El principal uso del teorema es generar diseños con confusión total o parcial de las interacciones de tres o más factores. Por ejemplo en un diseño factorial $4^3=p^n$, n=3, si usamos 4 bloques de tamaño $16=4^2=p^s$, s=2 entonces

$$3 \leq \frac{4^2-1}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$$

Esto nos dice que: si se puede generar este diseño, sin confundir efectos principales, ni interacciones de dos factores.

8.41 Consideremos dos ejemplos.

Primero, consideremos el experimento factorial 5^2 en 5 bloques de 5 unidades cada uno. El número total de sistemas para confusión son

$$\frac{5^2-1}{5-1} = 6$$

y son, la confusión de $A, B, A^1B^1, A^1B^2, A^1B^3, A^1B^4$ respectivamente. Una forma conveniente de realizar este experimento consiste en tomar 4 repeticiones y confundir A^1B^1, A^1B^2, A^1B^3 y A^1B^4 respectivamente en cada una de ellas. El diseño se describe en la tabla 8.4

Tabla 8.4 Diseño factorial 5^2 en 5 bloques de 5 u.e. con confusión parcial de A^1B^1, A^1B^2, A^1B^3, A^1B^4 con información relativa de 3/4 .

Repetición I

Confusión de A^1B^1

I $(A^1B^1)_0$	II $(A^1B^1)_1$	III $(A^1B^1)_2$	IV $(A^1B^1)_3$	V $(A^1B^1)_4$
00	01	02	03	04
14	10	11	12	13
23	24	20	21	22
32	33	34	30	31
41	42	43	44	40

Repetición II

Confusión de A^1B^2

VI $(A^1B^2)_0$	VII $(A^1B^2)_1$	VIII $(A^1B^2)_2$	IX $(A^1B^2)_3$	X $(A^1B^2)_4$
00	03	01	04	02
12	10	13	11	14
24	22	20	23	21
31	34	32	30	33
43	41	44	42	40

Repetición III

Confusión de A^1B^3

XI $(A^1B^3)_0$	XII $(A^1B^3)_1$	XIII $(A^1B^3)_2$	XIV $(A^1B^3)_3$	XV $(A^1B^3)_4$
00	02	04	01	03
13	10	12	14	11
21	23	20	22	24
34	31	33	30	32
42	44	41	43	40

Repetición IV

Confusión de A^1B^4

XVI $(A^1B^4)_0$	XVII $(A^1B^4)_1$	XVIII $(A^1B^4)_2$	XIX $(A^1B^4)_3$	XX $(A^1B^4)_4$
00	04	03	02	01
11	10	14	13	12
22	21	20	24	23
33	32	31	30	34
44	43	42	41	40

Con r=4k (k=1,2,3,...) repeticiones de estas 4 replicas la partición de los grados de libertad se muestra en la tabla 8.5.

TABLA 8.5. A. de V. Factorial 5^2 , confusión de A^1B^1, A^1B^2, A^1B^3, A^1B^4

F.V.	G.L.	
Bloques	5r-1	
Repeticiones	r-1	
Bloques dentro de repeticiones	4r	r=4k k=1,2,3,...
Efectos principales	8	
Interacción de 2 factores	16	
Error	20r-24	
Total	25r-1	

Algunos ejemplos para el calculo de las sumas de cuadrados son:

$$SC(B)=\frac{(B)_0^2+(B)_1^2+(B)_2^2+(B)_3^2+(B)_4^2}{5r}-\frac{T^2}{25r}$$ Utilice todas las observaciones

$$SC(A^1B^2)=\frac{(A^1B^2)_0^2+(A^1B^2)_1^2+(A^1B^2)_2^2+(A^1B^2)_3^2+(A^1B^2)_4^2}{5(3k)}-\frac{(T')^2}{25(3k)}$$

en $SC(A^1B^2)$ utilice observaciones de repeticones tipo I, III, IV.

Segundo, consideremos el diseño factorial 5^3 en 25 bloques de 5 unidades (n=3, s=1). El número de tales sistemas es

$$\frac{(5^3-1)(5^3-5)}{(5^2-1)(5^2-5)} = \frac{124(5)(24)}{24(5)(4)} = 31$$

Consideremos el diseño factorial 5^3 con confusión parcial de A^1B^1, B^1C^1 (interacciones generalizadas $A^1B^2C^1$, $A^1B^3C^2$, $A^1B^4C^3$ y A^1C^4) en una repetición y A^1B^3, B^1C^1 ($A^1B^4C^1$, A^1C^2, $A^1B^1C^3$, $A^1B^2C^4$) en la otra repetición.

Para construir los bloques de la repetición I (II) es convenien te obtener el subgrupo intrabloque

Subgrupo intrabloque de la repetición

I	II
$(A^1B^1)_0$ $(B^1C^1)_0$	$(A^1B^3)_0$ $(B^1C^1)_0$
000	000
141	132
232	214
323	341
414	423

Sumando k mod 5 [$1 \leq k \leq 4$] a alguna (s) de las componentes generamos los demás bloques. Por ejemplo, el bloque [$(A^1B^1)_2$, $(B^1C^1)_4$] con +2aB y +2aC. Así este bloque estará constituido por las combinaciones de tratamientos 022, 113, 204, 340, 431. De manera analoga se construyen los otros bloques. Este diseño experimental nos da.

Información completa sobre los efectos principales
$\frac{1}{2}$ de información de A^1B^1, A^1B^3, A^1C^2, A^1C^4
Nada de información de B^1C^1
Información completa sobre las restantes interacciones de 2 factores
$\frac{1}{2}$ de información de $A^1B^2C^1$, $A^1B^3C^2$, $A^1B^4C^3$, $A^1B^4C^1$, $A^1B^1C^3$, $A^1B^2C^4$
Información completa sobre las restantes interacciones de 3 factores.

Así pues, con r=2k (k=1,2,3...) repeticiones de estas 2 replicas la partición de los grados de libertad se muestra en la tabla.

TABLA 8.6 A. de V. Factorial 5^3 con confusión parcial de A^1B^1, A^1B^3, A^1C^2, A^1C^4, $A^1B^2C^1$, $A^1B^3C^2$, $A^1B^4C^3$, $A^1B^4C^1$, $A^1B^1C^3$, $A^1B^2C^4$ con información relativa de $\frac{1}{2}$, y confusión total de B^1C^1.

F.V.	G.L.	
Bloques	25r-1	
Repeticiones		r-1
Bloques dentro de repeticiones		24r
Efectos principales	12	
Interacción de 2 factores	44	
-No confundida		24
-Parcialmente confundida		16'
Interacción de 3 factores	64	
-No confundida		40
-Parcialmente confundida		24'
Error	100r-120	
Total	125r-1	

CAPITULO 9

Aspectos teóricos para la construcción de factoriales s^n con $s = p^m$ y p un número primo.

Para desarrollar las ideas de factoriales s^n, con $s = p^m$ y p primo veamos primero las bases teóricas en las que se basan

9.1 Anillo y Campo

Definición 1. Un conjunto no vacio R se dice que es un anillo si en R hay definidas dos operaciones binarias denotadas por + (adición) y · (multiplicación) tales que para todo a, b, c $\in \mathbb{R}$

A) $(R, +)$ es un grupo abeliano	(ver sección 7.1)
M1) $a \cdot b \in R$	(Cerradura multiplicativa)
M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(Asociatividad multiplicativa)
D1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	(Leyes distributivas)
D2) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

Ocurre a menudo, pero no siempre, que existe un elemento $1 \in R$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $\forall a \in R$. En tal caso, se dice que R es un anillo con elemento unidad. Si la multiplicación es tal que $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a, b \in R$, entonces se dice que R es un anillo conmutativo.

Algunos ejemplos de anillos son:

1) Si R es el conjunto de los enteros, positivos, negativos y 0; si + es la adición usual y · la multiplicación usual. Entonces R es un anillo conmutativo con elemento unidad.

2) Si R es el conjunto, de números racionales bajo las operaciones de adición y multiplicación usuales en los racionales. R es un anillo conmutativo con elemento unidad. Pero aún más, observemos que los elementos de R diferentes de cero forman un grupo abeliano bajo la multiplicación. Un anillo con esta última propiedad es llamado un campo.

Campo.

Definición 2.- Un campo F se define como un sistema $F=\{F;+,\cdot\}$ con dos operaciones binarias que satisfacen los siguientes 3 axiomas.

1) El sistema $\{F, +\}$ es un grupo abeliano y su elemento identidad se denota por 0.

2) El sistema $\{F_o, \cdot\}$ es un grupo abeliano y su elemento identidad se denota por 1. Donde $F_o = \{x\in F \mid x\neq 0\}$

3) La operación multiplicación $(\cdot)$ es distributiva sobre la operación de adición $(+)$.

Una relación que ya hemos utilizado, y que es un caso particular de la definición de "congruencia" (ver definición 6 sección 7.1) que es la siguiente.

Definición 3. Sea $n>0$ un entero fijo. Decimos, a es congruente a b módulo n si a-b es dividible por n. Lo denotamos por $a\equiv b$ mod n. n es llamado el módulo de la relación. Así $73\equiv 4$ mod 23.

Esta relación de congruencia tiene las siguientes propiedades básicas.

Teorema 1.

1) La relación, congruencia modulo n, define una relación de equivalencia sobre el conjunto de los enteros.

2) Esta relación de equivalencia tiene n clases de equivalencia diferentes, denotadas por $\{[0], [1], [2], \ldots [n-2], [n-1]\} = Z_n$

3) Si a≡b mod n y c≡d mod n entonces a±c≡b±d mod n y ac≡bd mod n

4) Si ab≡ac mod n y a es primo relativo a n, entonces b≡c mod n

En si, el teorema nos dice que la congruencia módulo n se puede manejar como una ecuación en las que respecta a adición, substracción y multiplicación. Es decir, si a≡b mod n y c≡d mod n, entonces a±c≡b±c mod n, a±c≡b±d mod n, ac≡bd mod.

Con respecto a división no funcionan como ecuaciones así ac≡bc mod n no implica a≡b mod n, pero si implica a≡b mod (n/d) donde d es el máximo común divisor de n y c.

Ejemplo 3. Sea R el conjunto de los enteros módulo 7 ∴ $R=Z_7$, bajo la adición y multiplicación mod 7. Esto es los elementos de R son los siete símbolos [0], [2], [3], [4], [5], [6] donde:
(1) [i] + [j] = [k] donde k es el residuo de i+j cuando se divide por 7 (así [4]+[6]=[3] ya que 4+6=10, el cual cuando se divide por 7 su residuo es 3).

(2). $[i]\cdot[j] = [m]$ donde m es el residuo de $i\cdot j$ cuando se divide por 7 (así $[4]\cdot[6]=[3]$ ya que $4\cdot 6=24$ que tiene residuo 3 cuando se divide por 7).

Es fácil verificar que R es un anillo conmutativo con elemento unidad. Sin embargo podemos mostrar más, puesto que

$$[1]\cdot[1]=[2]\cdot[4]=[3]\cdot[5]=[4]\cdot[2]=[5]\cdot[3]=[6]\cdot[6]=[1]$$

es decir, los elementos no cero de R forman un grupo abeliano bajo la multiplicación. Así R es un campo. Como solo tiene un número finito de elementos es llamado un campo finito (o campo de Galois) de orden 7, notación $Z_7=CG(7)$

Los números racionales, reales y complejos, son ejemplos de campos. Un campo puede tener un número de elementos finito o infinito. Los campos finitos también se llaman campos de Galois. El número de elementos de un campo finito es un número primo o potencia de un primo. Este resultado se prueba en textos de algebra moderna como Mann (1949) o Herstein (1964 pag. 314).

El conjunto $Z_n = \{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$ juega un papel importante en algebra, en teoría de números y en diseños experimentales, es llamado el conjunto de los enteros mod n. Observe que

$$[0]=[n]=[2n]= \ldots\ ; \ [1]=[n+1]=[2n+1]= \ldots \quad \text{etc.}$$

Dados los elementos $[a]$ y $[b]$ en Z_n definimos

1) Su suma por $[a]+[b]=[a+b]$
2) Su producto por $[a][b]=[ab]$

Es fácil verificar que esta "suma" y este producto estan bien definidos es decir si $[i]=[i']$ y $[j]=[j']$ entonces $[i]+[j]=[i+j]=[i'+j']=[i']+[j']$ y $[i][j]=[i']\cdot[j']$

Ademáz Z_n tiene las siguientes propiedades

1) $\{Z_n;+\}$ es un grupo abeliano
2) $\{Z_n;+,\cdot\}$ es un anillo conmutativo, con elemento unidad

Si $[a]\neq[0]$ es un elemento de Z_n, entonces existe un elemento $[b]$ en Z_n tal que $[a]\cdot[b]=1$ ($\therefore$ $[b]$ es el inverso multiplicativo de $[a]$) si y solo si n=p un número primo, Así.

3) $\{Z_p;+,\cdot\}$ p-primo es un campo finito $\therefore$ un campo de Galois. de orden p notación $Z_p=CG(p)$

9.2 Anillo de polinomios.

En nuestros diferentes niveles de escuela por los que hemos pasado, los polinomios han aparecido de diferentes maneras. Como funciones, que toman valores, nos han interesado ciertas propiedades como son su continuidad, sus derivadas, sus integrales, sus máximos y mínimos, etc. Veamoslo desde un nuevo punto de vista, como elementos de un anillo del cual nos interesan sus propiedades algebraicas.

Definición 4. Sea F un campo, por el anillo de polinomios $F[x]$ en indeterminada x, entenderemos el conjunto de símbolos $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ son elementos de F.

Definición 5. Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ y $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ son elementos de $F[x]$. Entonces

1) $p(x)=q(x)$ si y solo si $a_i=b_i$ $\forall$ $i=0,1,2,3,4.......$
2) $p(x)+q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+.....+c_tx^t$ donde $c_i=a_i+b_i$ $i\geq 0$
3) $p(x)\cdot q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+.....+c_tx^t$ donde $c_i=a_ib_0+a_{i-1}b_1+$ $+a_{i-2}b_2+.....+a_0b_i$ $i\geq 0$

Así, dos polinomios son iguales si y solo si sus correspondientes coeficientes son iguales, el sumar dos polinomios es en si sumar los coeficientes de los terminos correspondientes.

Se puede mostrar que $F[x]$ con estas dos operaciones es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Definición 6. Si $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n\neq 0$ y $a_n\neq 0$ entonces el grado de $f(x)$, denotado por gra $f(x)$, es n. El término a_nx^n es llamado el término principal, a_n su coeficiente principal y si $a_n=1$ se dice que el polinomio es monico

Teorema 2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son elementos no cero de $F[x]$ entonces gra $(f(x)g(x))$ = gra $f(x)$ + gra $g(x)$.

Corolario. Si $f(x)$ y $g(x)$ son elementos no cero de $F[x]$ entonces gra $f(x)\leq$fra$(f(x)g(x))$.

Teorema 3. (El algorithmo de la división). Dados dos polinomios $f(x)$ y $g(x)\neq 0$ en $F[x]$, entonces existen dos polinomios $t(x)$ y $r(x)$ en $F[x]$ tales que $f(x)=t(x)\cdot g(x)+r(x)$ donde $r(x)=0$ ó gra $r(x)<$gra $g(x)$.

¿A qué corresponden los elementos primos?

Definición 7. Un polinomio $p(x)$ en $F[x]$ se dice que es irreducible sobre F si cuando $p(x)=a(x)\ b(x)$ con $a(x)$ y $b(x)$ en $F[x]$ entonces al menos uno de $a(x)$ o $b(x)$ es de grado cero (es decir, una constante).

Irreducible, es una propiedad que depende del campo, así x^2+1 es irreducible sobre el campo de los reales, pero no lo es sobre el campo de los complejos, pues $x^2+1=(x-i)(x-i)$ donde $i^2=-1$.

Teorema 4. (Teorema de Factorización Única) Cualquier polinomio en $F[x]$ puede ser expresado como un producto de polinomios irreducibles en $F[x]$. Esta expresión es única, excepto por el orden en el cual son expresados los factores.

Teorema 5. Un polinomio cuadrático o cúbico $p(x)$ en $F[x]$ es irreducible sobre el campo F, a menos que exista $c\in F$ tal que $p(c)=0$

9.3. Relación entre anillos y campos.

En anillos puede suceder que $a\cdot b=0$ aún cuando ni a ni b sean 0 [por ejemplo en Z_6, $[2]\cdot[3]=[0]$ o que $a\cdot b \neq b\cdot a$ [por ejemplo, las matrices 2x2].

Definición 8. Si R es un anillo conmutativo, entonces $a\neq 0\in R$ se dice que es un divisor de cero si existe un $b\in R$, $b\neq 0$ tal que $ab=0$.

Definición 9. Un anillo conmutativo es un dominio entero si no tiene divisores de cero.

Definición 10. Un anillo se dice que es un anillo de división si sus elementos no cero forman un grupo bajo la multiplicación.

Teorema 6. Un anillo de división conmutativo es un campo.

Teorema 7. Un dominio entero finito es un campo.

9.4. Homomorfismo, Isomorfismo, la característica de un anillo.

Cualquier anillo R puede ser considerado como un grupo aditivo abeliano.

Definición 11. El m-esimo múltiplo natural de $a \in R$, $m \in Z$ es $m \cdot a = a+a+ \ldots + a$ (m sumandos).

El subgrupo ciclico generado por $a \in R$ consiste de todos los múltiplos de a.

Definición 12. Una transformación ϕ de un anillo R en un anillo R' es un homomorfismo si

1) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$
2) $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$

Definición 13. Un homomorfismo de R en R' se dice es un isomorfismo si la transformación es uno a uno.

Definición 14. Se dice que dos anillos son isomorfos si existe un isomorfismo de uno sobre el otro.

En si, esta definición nos dice que dos anillos isomorfos son practicamente iguales.

Teorema 8. La transformación $m \longrightarrow m \cdot 1$ es un homomorfismo del anillo Z en R, para cualquier anillo R.

Corolario 1. El conjunto de múltiplos naturales de 1 en cualquier anillo R, es un subanillo isomorfo a Z o a Z_n para algún entero $m>1$.

Definición 15. La característica de un anillo R es el número m de diferentes múltiplos naturales $m \cdot 1$ de su elemento unidad d.

Corolario 2. En el grupo aditivo de un dominio entero D todos los elementos no cero tienen el mismo orden nombrandolo, la característica de D.

El dominio Z de todos los enteros tiene característica ∞, mientras que el dominio Z_p tiene característica p, p-número primo.

Teorema 9. La característica de un dominio entero o es ∞ o es un número primo positivo p.

Corolario. En cualquier dominio entero el subgrupo aditivo generado por el elemento unidad es un subdominio isomorfo a Z o a Z_p.

9.5 Característica de un campo.

Como un campo es un dominio entero en el cual la división (excepto por cero) es posible, la discusión de característica se aplica también a campos. Así, si un campo tiene característica p, el subgrupo aditivo de F generado por su elemento unidad es un subcampo y es isomorfo a Z_p el campo finito compuesto por los enteros módulo p si el campo tiene característica ∞ entonces.

Teorema 10. En un campo de característica , el subcampo generado por el elemento unidad es isomorfo al campo Q de los números racionales.

9.6 Extensiones Algebráicas.

Consideraremos algunas ideas brillantes debidas al genio de matemático francés Evariste Galois, en las que se desarrolla el albegra de hoy en día. Así, consideraremos las relaciones de un campo fijo F con respecto a otro.

Definición 16. Sea F un campo; se dice que un campo K es una extensión de F si K contiene a F. Equivalentemente K es una extensión de F si F es un subcampo de K.

Otro punto de vista es el siguiente, si K es una extensión de F, entonces bajo las operaciones ordinarias en K, K es un espacio vectorial sobre el campo F. Como tal, podemos hablar de dependencia lineal, base, dimensión, etc. La dimensión es llamada el grado de K sobre F y se denota por $[K:F]$, es de gran interés cuando esta dimensión es finita.

Teorema 11. Si L es una extensión de F y K es una extensión de F Entonces L es una extensión de F. Además $[L:F] = [L:K][K:F]$

Corolario. Si L es una extensión finita de F y K es un subcampo de L el cual contiene a F entonces $[K:F] | [L:F]$*

Si K es una extensión finita de F y si $a_1, a_2, \dots, a_n$ es una base de K sobre F entonces cualquier elemento de K puede escribirse como

$$\sum_{i}^{n} b_i a_i \ , \ b_1, b_2, \dots\dots, b_n \in F$$

El conjunto de estas combinaciones lineales lo denotamos por $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ así tenemos que $K=F(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Definición 17. Una extensión K de F es llamada extensión simple de F si $K=F(a)$ para algún $a \in K$.

* $a|b$ significa a divide a b

Con ello, cualquier extensión finita de F puede obtenerse por medio de una sucesión de extensiones simples. Si $K=F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ definimos a $K_0=F$ y $K_i=K_{i-1}(a_i)$ para $i=1,2,\ldots n$ entonces $K_n=K$.

Definición 18. Sea K una extensión de F, $a\varepsilon K$. Decimos que a es un elemento algebráico sobre F si existe un polinomio no cero $f(x)\varepsilon F[x]$ tal que $f(a)=0$ $\therefore$ tal que a es raíz del polinomio $f(x)$. Si $a\varepsilon K$ es un elemento no algebráico sobre F, decimos que es transcedental sobre F. La extensión K de F es llamada extensión algebráica si cada elemento de K es algebráico sobre F. De otra manera, si al menos un elemento de K es transcendental sobre F, se dice que K es una extensión trascendental de F.

Si deseamos expresar el hecho de que "K es una extensión de F" para hacerlo nos referimos a "la extensión K/F". Similarmente podemos decir que "K/F es algebráica" cuando entendemos que "K es una extensión algebráica de F", etc.

Teorema 12. Si K es una extensión finita de F, entoces K es una extensión algebráica de F.

Teorema 13. Si K es una extensión de F y $a\varepsilon K$ es algebraico sobre F. Entonces existe un único polinomio monico irreducible $p(x)$ ε $F[x]$ tal que $p(a)=0$. Si $g(x)$ es cualquier polinomio en $F[x]$ tal que $g(a)=0$ entonces $p(x)$ divide a $g(x)$. Además $F(a) = F[a]$ y de hecho cualquier elemento de $F(a)$ puede escribirse de manera única en la forma $r(a)$ donde $r(x)\varepsilon F[x]$ y $r(x)=0$ ó gra $r(x) <$ gra $p(x)$

Si $f(x)\varepsilon F[x]$ y si a es un elemento de alguna extensión de F, tal que $f(a)=0$, entonces el elemento a es llamado una raiz de $f(x)$. El único polinomio monico irreducible en $F[x]$ teniendo al elemento a como raiz es denotado por irr (F,a)

Corolario 1. Sea K una extensión de F y sea $a \varepsilon K$. Si a es algebraico sobre F, entonces $f(a)/F$ es finita y además es algebráica. De hecho $[F(a):F]$ = gra Irr (F,a) y los elementos $1,a,a^2,\ldots,a^{n-1}$ forman una base de $F(a)$ sobre F.

Corolario 2. Sea K una extensión de F y supongamos que $a_1,a_2,\ldots$ $\ldots a_n \varepsilon K$ son algebráicos sobre F. Entonces $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)/F$ es finita y además es algebráica.

Corolario 3. Sea K una extensión de F y sean $a,b \varepsilon K$ algebráicos sobre F. Entonces $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b (cuando $b \neq 0$) son algebráicos sobre F.

Corolario 4. Si el elemento u tiene grado n sobre el campo F entonces $a_o+a_1u+a_2u^2+\ldots+a_{n-1}u^{n-1}= 0$ si y solo si $a_o=a_1=a_2=\ldots$ $=a_{a-1} = 0$.

Teorema 14. Si F es un campo y p un polinomio irreducible sobre F, entonces existe un campo $K \cong F[x]/(p)$ ($\cong$ isomorfo) el cual es una extensión algebráica de F generada por una raíz u de $p(x)$.

Teorema 15. Si los campos $F(u)$ y $F(v)$ son extensiones simples algebráicas de algún campo F, generadas respectivamente por las raíces u y v de el mismo polinomio p irreducible sobre F, entonces $F(u)$ y $F(v)$ son isomorfos. Especificamente, existe un isomorfismo de $F(u)$ a $F(v)$ en el cual a u le corresponde v y cada elemento de F se corresponde a si mismo.

En si el teorema 14 es el que utilizaremos para construir los campos finitos en los que se basa el desarrollo de los diseños factoriales S^n ($S=p^m$ p primo). Por ejemplo consideremos al campo Z_3 de enteros modulo 3. El polinomio x^2-x-1 no es un cero para los elementos 0,1,2 entonces es irreducible en $Z_3[x]$.

Entonces el anillo de cocientes $Z_3[X] / (x^2-x-1)$ es un campo k, el cual es una extensión algebráica de $F=Z_3$ generada por una raíz u de p(x).

Además, como $[F(u):F] = 2$ cualquier elemento de este campo K puede escribirse de manera única como a+bu con $a,b\epsilon Z_3$, así K tiene exactamente $9=3^2$ elementos.

La suma de dos elementos esta dada por la regla

$$(a+bu) + (c+bu) = (a+c) + (b+d)\ u$$

Para calcular un producto de dos elementos de este tipo "multipliquemos por fuera" en la forma natural y simplifiquemos con la ecuación propuesta $u^2=u+1$, (ya que u es raiz de $p(x)=x^2-x-1$ es decir $p(u)=0 \therefore u^2=u+1$).

Esto da el siguiente resultado.

$$\begin{aligned}(a+bu)(c+du) &= ac + (ad+bc)u + bdu^2 \\ &= (ac+bd) + (ad+bc+bd)u\end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que los nueve elementos a+bu ($a, b\epsilon Z_3$) bajo estas dos operaciones, satisfacen los postulados de un campo. En particular, los inversos multiplicativos de los elementos no cero estan dados por

1	2	u	2u	1+u	1+2u	2+u	2+2u
1	2	2+u	1+2u	2+2u	2u	u	1+u

Por construcción, este campo es obviamente el campo $Z_3(u)$, el cual es una extensión algebráica del campo Z_3, generada por una raiz u del polinomio $p(x)=x^2-x-1$, por el teorema 14, este campo es isomorfo a las clases de equivalencia que generan los elementos de $Z_3[X]$ modulo $p(x)$.

$$\therefore\ Z_3(u) \cong Z_3[x]/(p(x))$$

Si $F=Z_p$ de enteros modulo p y si $p(x)$ es algún polinomio irreducible sobre F de grado n la construcción anterior nos lleva a encontrar un campo consistiendo de elementos de la forma $a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots+a_{n-1}u^{n-1}$. Solamente existe un número finito p de posibles elecciones de cada coeficiente a_i; entonces el campo así construído es un campo finito de p^n elementos.

El resultado anterior se puede generalizar si consideramos a la extensión simple $F(u)$ como un espacio vectorial sobre F.

<u>Teorema 16.</u> El grado de un elemento algebráico u sobre un campo F es igual a la dimensión de la extensión $F(u)$, considerada como un espacio vectorial sobre F. Este espacio vectorial tiene como base a los elementos $1, u, u^2, \ldots u^{n-1}$.

<u>Corolario.</u> Si dos elementos algebráicos u y v sobre un campo F generan la misma extensión $F(u)=F(v)$ entonces u y v tienen el mismo grado sobre F.

<u>Definición 19.</u> Una extensión N de F es un campo de raices de un polinomio $f(x)$ de grado $n\geq 1$ con coeficientes en F cuando (i) $f(x)$ puede factorizarce en factores lineales $f(x)=c(x-u_1)(x-u_2)\ldots(x-u_n)$ en N; (ii) N es generado sobre F por las raices de $f(x)$ como $N=F(u_1, u_2, \ldots u_n)$.

<u>Teorema 17.</u> Cualquier polinomio sobre cualquier campo tiene un campo de raices.

9.7. Campos finitos.

Teorema 18. Sea F un campo finito; entonces F tiene p^n elementos donde el número primo p es la característica de F.

Teorema 19. Cualesquiera dos campos finitos con el mismo número de elementos son isomorfos.

Teorema 20. El polinomio $x^q - x$ ($q=p^n$ p-primo) tiene q factores lineales distintos en su campo de raíces.

Teorema 21. Para cualquier número primo p y cualquier entero positivo n, existe un campo finito con $p^n=q$ elementos, a saber: el campo de raices de $x^q = x$ sobre Z_p.

Los teoremas 19 y 21 nos dicen que esencialmente solo existe un campo con p^n elementos. Este campo es llamado el campo de Galois de orden p^n, y es denotado por $CG(p^n)$. La estructura del grupo multiplicativo de este campo nos la describe el siguiente.

Teorema 22. En cualquier campo finito F, el grupo multiplicativo de todos los elementos no cero es cíclico.

Teorema 23. Cualquier campo finito de característica p tiene un automorfismo dado por $a \mapsto a^p$.

Corolario. En un campo finito de característica p cualquier elemento tiene raiz de orden p.

Teorema 24. (Teorema del residuo) Si $p(x) \in F[x]$ y si K es una extensión de F, entonces para cualquier elemento $b \in K$, $p(x) = (x-b) \cdot q(x) + p(b)$ donde $q(x) \in K[x]$ y donde gra $q(x) \leq$ gra $p(x)-1$.

Corolario. Si $a\epsilon K$ es una raiz de $p(x)\epsilon F[x]$ donde $F\subset K$, entonces en $K[x]$, $(x-a)|p(x)$.

9.8 El campo ciclotomico.

Definición 20. Sea n un entero positivo. Una raiz primitiva de orden n de la unidad es un generador de el grupo ciclico de todas las raices complejas de orden n de la unidad.

El número complejo

$$\xi = \exp(2\Pi i/n)=\cos(2\Pi/n)+ i \text{ sen } (2\Pi/n)$$

Es una raiz primitiva de orden n de la unidad ya que ξ genera un grupo ciclico de orden n, las otras raices primitivas de orden n de la unidad con los números complejos ξ^h donde $1\leq h\leq n$ y $(d,n) = 1$*. Además, el número de raices primitivas de orden n de la unidad esta dado por la función de Euler $\phi(n)$, donde

$\phi(n)$=nº de enteros h tales que $1\leq h\leq n$ y $(h,n)=1$ ∴ nº de enteros positivos menores que n y primos relativos a n.

Esta función tiene, entre otras, las siguientes propiedades.

1) $\phi(mn) = \phi(m)\,\phi(n)$ si $(m,n) = 1$
2) $\sum_{d|h} \phi(d) = n$
3) $\phi(n) = \sum_{d|n} d\,\mu\,(n/d)$ donde μ es la función de Mobius definida por

* (d,n) = mínimo común multiplo de los números d y n.

$$\mu(n) \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ (-1)^t & \text{si } n=p_1p_2 \ldots p_t \text{ donde } p_i \text{ son primos distintos} \\ 0 & \text{demás} \end{cases}$$

4) $\phi(n) = n \prod\limits_{\substack{p|n \\ p>o \\ p\text{-primos}}} (1-p^{-1})$

Por ejemplo para:

n=7 los enteros h tales que $1 \leq h \leq 7$ y $(h,7)=1$ son 1,2,3,4,5 y 6 así $\phi(7)=6$

de otra forma $\phi(7)=7 \prod\limits_{\substack{p|7 \\ p>1 \text{ primos}}} (1-p^{-1}) = 7(1-\frac{1}{7})=7\frac{6}{7}=6$

Para n=8 $h=1,3,5,7 \Rightarrow \phi(8)=4$

También $\phi(8) = 8 \prod\limits_{p|8} (1-p^{-1}) = 8(1-\frac{1}{2}) = 8\frac{1}{2} = 4$

<u>Definición 21</u>. El n-esimo polinomio ciclotómico $F_n(x)$ es el polinomio monico cuyas raices son las $\phi(n)$ raices complejas de orden n de la unidad, es decir

$$F_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq h \leq n \\ (h,n)=1}} (x-\zeta^h) \qquad \zeta = \exp(2\pi i/n)$$

Algunos ejemplos son los siguientes.

$F_1(x) = (x-\exp(2\Pi i)) = x-1$
$F_2(x) = (x-\exp(\Pi i)) = x+1$
$F_3(x) = (x-\exp(2\Pi i/3)(x-\exp(4\Pi i/3)) = x^2 - x(\exp(2\Pi i/3) + \exp(4\Pi i/3)) + \exp(2\Pi i) = x^2+x+1$
$F_4(x) = (x-\exp(\Pi i/2))(x-\exp(3\Pi i/2)) = (x-i)(x+i) = x^2-i^2 = x^2+1$

Para n=5 sea $\xi = \exp\left(\frac{2\Pi i}{5}\right) = \cos\frac{2\Pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\Pi}{5}$

entonces $F_5(x) = \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant 5 \\ (h,5)=1}} (x-\xi^h) = (x-\xi)(x-\xi^2)(x-\xi^3)(x-\xi^4)$

$= x^4 - (\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4)x^3 + (2\xi^5+\xi^6+\xi^7+\xi^8+\xi^9)x^2 - (\xi^6+\xi^7+\xi^8+\xi^9)x + \xi^{10} =$

así $F_5(x) = x^4 + 2x^2+1$

Para n=6 sea $\xi = \exp\left(\frac{2\Pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{\Pi i}{3}\right)$

entonces $F_6(x) = \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant 6 \\ (h,6)=1}} (x-\xi^h) = (x-\xi)(x-\xi^5) = x^2 - (\xi+\xi^5)x + \xi^6$
$= x^6 - x + 1$

Para n=7 sea $\xi = \exp\left(\frac{2\Pi i}{7}\right)$

entonces $F_7(x) \quad \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant 7 \\ (h,7)=1}} (x-\xi\ ) = (x-\xi)(x-\xi^2)(x-\xi^3)(x-\xi^4)(x-\xi^5)(x-\xi^6) =$

haciendo el desarrollo y reduciendo se obtiene

$F_7(x) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Definición 22. El campo de raices del polinomio $F_n(x) \varepsilon Q[x]$ es llamado el campo ciclotómico de orden n. Lo denotaremos por k_n.

Teorema 25. Si d varía sobre todos los divisores positivos de n y para cada d, tomamos q variando sobre los $\phi(n/d)$ enteros positivos $\leq n/d$ tales que $(q, n/d) = 1$, entonces los enteros qd son precisamente los enteros $1, 2, 3, 4, \ldots, n$, sin repetición.

Teorema 26. Para cualquier entero positivo n.

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} F_d(x)$$

por ejemplo

$$x^3 - 1 = \prod_{d|3} F_d(x) = F_1(x)\ F_3(x) = (x-1)\ (x^2+x+1)$$

$$x^4 - 1 = \prod_{d|4} F_d(x) = F_1(x)\ F_2(x)\ F_4(x) = (x-1)\ (x+1)(x^2+1)$$

las cuales son correctas

Teorema 27. Para cualquier entero positivo n, $F_n(x)$ tiene coeficientes enteros.

Teorema 28. Para cualquier entero positivo n, $F_n(x)$ es irreducible en $Q[x]$.

9.9 Relación con Campos de Galois.

En general, la existencia del campo de Galois $CG(p^m)$ con p^m elementos, nos la asegura el teorema 21.

Kempthorne [12] en su libro "Desing and Analysis of Experiments" (1967) nos da las ideas para la construcción de los campos de Galois de orden p^m para lo cual nos dice:

Sea P(x) cualquier polinomio dado en x de grado m con coeficientes dentro de Z_p ($\therefore P(x) \varepsilon Z_p[x]$) y sea F(x) cualquier polinomio en x con coeficientes enteros.

Por el algoritmo de la división (teorema 3), F(x) puede expresar se como

$$F(x) = f(x) + p\cdot q(x) + P(x)\cdot Q(x) \qquad 9.1$$

donde $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}$ 9.2

$a_i \varepsilon Z_p \quad i = 1,2,3,\ldots, m-1. \quad \therefore \quad f(x) \varepsilon Z_p[x]$

La ecuación 1 también puede escribirse como

$$F(x) = f(x) \bmod \{p, P(x)\} \ldots \qquad 9.3$$

Se dice que f(x) es el residuo de F(x) modulo p y P(x).

En un intento de ordenar estas brillantes ideas, hayamos los siguientes comentarios de lo que significa en si cada punto.

1°) Debe tomarse un polinomio $P(x) \varepsilon Z_p[x]$ monico irreducible de grado m . El cual recibe el nombre de <u>polinomio mínimo</u>. En la sección 9.11 se analiza con más detalle como se construyen y se da una tabla de polinomios mínimos para los casos más comunes.

2°) Al tomar cualquier polinomio $F(x)$ con coeficientes en el campo Z_p podemos aplicarle el algoritmo de la división (teorema 3) así $F(x)$ puede expresarse de la siguiente manera

$$F(x) = Q(x)\ P(x) + f(x)$$

donde $Q(x)$, $f(x) \in Z_p\ (x)$ y $f(x) = 0$ ó grado $f(x) <$ grado $P(x)$ Así los polinomios $F(x)$ y $f(x) \in Z_p(x)$ y diremos que $F(x) = f(x)$ mod $P(x)$.

En si, el campo de Galois $GG(p^m)$ es una extensión algebraica finita de orden m del campo Z_p. Para construirlo se aplicará el teorema 14 con el campo Z_p y con $P(x)$ un polinomio mínimo seleccionado convenientemente, así, el campo de Galois de orden p^m es de la forma

$$Z_p[u] \simeq Z_p[x]/_{P(x)}$$

El cual es una extensión algebráica de Z_p generada por una raiz de $p(x)$ que es isomorfo a las clases que forman los polinomios en $Z_p[x]$ módulo $P(x)$. Si hacemos que varíe $f(x)$ ($f(x)$ es de grado $\leq m-1$) manteniendo fijo a $P(x)$ se forman p^m clases ya que cada coeficiente de $f(x)$ puede tomar cualquiera de los p valores de Z_p.

Apliquemos los resultados anteriores de la siguiente manera:

Consideremos el campo $F = Z_p$ con p primo, el número u una raiz primitiva de orden p^m-1 de la unidad, entonces $K = F(u)$ es una extensión de F, el número u es algebráico (ya que satisface la ecuación ciclotomica $x^{p^m-1} - 1 = 0$). El teorema 13 nos asegura que existe un polinomio mónico irreducible $p(x) \in F[x]$, así $p(x)$

será una función mínima que en general no es única (en $Q[x]$ esta ecuación es irreducible y de orden $\phi(p^m-1)$ por teorema 28) en $F[x]$, $p(x)$ tendrá grado menor o igual a $\phi(p^m-1)$.

Si en el polinomio irreducible en $Q[x]$, reemplazamos cada coeficiente por su residuo menor diferente de cero módulo p obtenemos una ecuación ciclotomica de orden $\phi(p^m-1)$ en $Z_p[x]$ que no necesariamente es irreducible en Z_p.

Sea $P(x)$ un factor irreducible de este polinomio, el cual es una función mínima entonces por el teorema 14 existe un campo $H \cong F[x]/(P(x))$ que será el campo de Galois $CG(p^m)$ que nos interesa.

Así nuestro primer problema es encontrar el polinomio mínimo $P(x)$ y a partir de él generar el campo de Gálois $CG(p^m)$.

Por ejemplo si p=2 y m=2 la ec. ciclotomica es

$$x^{p^m-1}-1 = x^3-1 = F_1(x)F_3(x) = (x-1)(x^2+x+1)$$

así

$$P(x) = x^2+x+1 \quad \text{en } Z_2 \text{ es irreducible (por teorema 3)}$$

Entonces el anillo de cocientes $Z_2[x]/(x^2+x+1)$ es un campo $H=CG(2^2)$, donde cualquier elemento puede escribirse como $a+bu$ con $a,b\in Z_2$ y con u una raiz primitiva de la unidad de orden 3 $\therefore u^2+u+1=0 \quad \therefore u^2=u+1$ en Z_2 así este campo tiene $2^2=4$ elementos.

Su suma cumple

$$(a+bu) + (c+du) = (a+c) + (b+d)u$$

entonces la tabla de adición es

TABLA 9.1 Adición para CG(2^2)

+	α_0	α_1	α_2	α_3
$\alpha_0=0$	α_0	α_1	α_2	α_3
$\alpha_1=u$	α_1	α_0	α_3	α_2
$\alpha_2=u^2=1+u$	α_2	α_3	α_0	α_1
$\alpha_3=u^3=1$	α_3	α_2	α_1	α_0

Para el producto, "multipliquemos por fuera" en forma natural y simplifiquemos con la ecuación u^2+u+1, así

$$\begin{aligned}(a+bu)(c+du) &= ac+(ad+bc)u+bdu^2= \\ &= (ac+bd)+(ac+bc+bd)u\end{aligned}$$

Entonces la tabla de multiplicar para los elementos distintos de cero es.

TABLA 9.2 Multiplicación en CG(2^2)

$$P(u) = u^2+u+1 = 0$$

$\cdot$	α_1	α_2	α_3
α_1	α_2	α_3	α_1
α_2	α_3	α_1	α_2
α_3	α_1	α_2	α_3

por ejemplo $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = u(1+u) = u+u^2=u+1+u = 1+2u=1 = \alpha_3$

Así, con las tablas de adición y multiplicación en CG(4) analicemos el:

9.10 Diseño Factorial 4^2

Lo primero que debemos hacer es obtener los conjuntos de (s-1) (=3) grados de libertad, formando las particiones de las 16 combinaciones en 4 conjuntos de 4 combinaciones como se indica en la tabla 9.3.

TABLA 9.3 Cálculo de la partición para efectos e interacciones para el diseño factorial 4^2.

		Efecto del factor 1	Efecto del factor 2	Interacción A^1B^1	A^1B^2	A^1B^3
x	y	α_x	α_y	$\alpha_1\alpha_x+\alpha_1\alpha_y$	$\alpha_1\alpha_x+\alpha_2\alpha_y$	$\alpha_1\alpha_x+\alpha_3\alpha_y$
0	0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0
0	1	α_0	α_1	α_2	α_3	α_1
0	2	α_0	α_2	α_3	α_1	α_2
0	3	α_0	α_3	α_1	α_2	α_3
1	0	α_1	α_0	α_2	α_2	α_2
1	1	α_1	α_1	α_0	α_1	α_3
1	2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_0
1	3	α_1	α_3	α_3	α_0	α_1
2	0	α_2	α_0	α_3	α_3	α_3
2	1	α_2	α_1	α_1	α_0	α_2
2	2	α_2	α_2	α_0	α_2	α_1
2	3	α_2	α_3	α_2	α_1	α_0
3	0	α_3	α_0	α_1	α_1	α_1
3	1	α_3	α_1	α_3	α_2	α_0
3	2	α_3	α_2	α_2	α_0	α_3
3	3	α_3	α_3	α_0	α_3	α_2

Por ejemplo, con x=2 y y=3, de las tablas de adición y multiplicación se sigue que:

$$\alpha_1\alpha_x+\alpha_1\alpha_y = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3 = \alpha_3+\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\alpha_1\alpha_x+\alpha_2\alpha_y = \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3+\alpha_2 = \alpha_1$$
$$\alpha_1\alpha_x+\alpha_3\alpha_y = \alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_3 = \alpha_3+\alpha_3 = \alpha_0$$

La tabla 9.3, de la partición de los 15 g.l. para el diseño factorial 4^2 en 2 efectos principales, cada uno con 3 g.l. y 3 conjuntos de interacciones cada uno con 3 g.l. si A, B denotan a los efectos principales, describamos algunas componentes, así.

$(A)_1 = 10+11+12+13$ $\qquad$ $(B)_2 = 02+12+22+32$
$(A^1B^1)_0 = 00+11+22+33$ $\qquad$ $(A^1B^2)_2 = 03+10+22+31$
$(A^1B^3)_3 = 03+11+20+32$ $\qquad$ $(A^1B^3)_1 = 01+13+22+30$

Como ejemplo, observece que las componentes de $(A^1B^3)_2$, son las soluciones de la ecuación

$$\alpha_1\cdot\alpha_x+\alpha_3\alpha_y = \alpha_2$$

estas se encuentran en la última columna de la tabla 9.3. Así, el símbolo $(A^1B^j)_k$ corresponde al total tratamientos (x,y) que emplean con

$$\alpha_1\alpha_x+\alpha_j\alpha_y = \alpha_k \qquad i,j \in \{0,1,2,3\}$$

La variación entre los 4 totales que se generan al variar k de 0 a 3 es el efecto A^1B^j y se mide por una suma de cuadrados, de la siguiente manera.

$$SC_{A^1B^j} = \frac{(A^1B^j)_0^2+(A^1B^j)_1^2+(A^1B^j)_2^2+(A^1B^j)_3^2}{r\cdot 4} - \frac{T^2}{r\cdot 4^2} \quad j=0,1,2,3$$

r es el número de repeticiones de cada tratamiento y T es el total de todas las observaciones del experimento.

Algunos ejemplos de las S.C. son

$$SC_A = \frac{(A)_0^2+(A)_1^2+(A)_2^2+(A)_3^2}{4r} - \frac{T^2}{16r}$$

$$SC_{A^1B^2} = \frac{(A^1B^2)_0^2+(A^1B^2)_1^2+(A^1B^2)_2^2+(A^1B^2)_3^2}{4r} - \frac{T^2}{16r}\ .$$

El A. de V. se da en la tabla

TABLA 9.4 A. de V. del diseño factorial 4^2 en bloques de azar

F.V.	G.L.
Bloques	r-1
Tratamientos	15
A	3
B	3
AB	9
A^1B^1	3
A^1B^2	3
A^1B^3	3
Error	15(r-1)
Total	16r-1

9.11 Polinomios mínimos para la construcción de los campos de Galois de orden p^m.

En general, para construir los campos de Galois $CG(p^m)$ es verdaderamente importante tener la función mínima $P(x)$ que cumple $P(u)=0$ con el número u que es una raíz primitiva de orden p^m-1 de la unidad, con ello los elementos del campo son de la forma $f(x)=a_o+a_1u+\ldots+a_{m-1}u^{m-1}$ con $a_i \varepsilon Z_p$.

Además $P(u)=0$ nos sirve para construir la tabla de multiplicación. Una tabla de funciones mínimas $P(x)$ tomadas del libro de Chakrabarti (1962) es la siguiente

TABLA 9.5 Funciones mínimas para la construcción de campos de Galois p^m para los casos más comunes en el diseño de experimentos.

m \ P	2	3	5	7	11	13
2	$x^2=x+1$	$x^2=2x+1$	$x^2=2x+2$	$x^2=x-3$	$x^2=4x-2$	$x^2=x+1$
3	$x^3=x+1$	$x^3=x+2$	$x^3=2x+3$	$x^3=x-2$		
4	$x^4=x+1$	$x^4=2x^2+2x^2+x+1$	$x^4=x^3+x+2$	$x^4=2x^3+2x+2$		
5	$x^5=x^2+1$	$x^5=x+2$	$x^5=x+2$	$x^5=6x+3$		
6	$x^6=x+1$	$x^6=x+1$	$x^6=x^5-x^4+x^3-2x+2$			
7	$x^7=x+1$					
8	$x^8=x^4+x^3+x+1$					
9	$x^9=x^8+x^4+x^3+x^2+x+1$					

Construyamos la función mínima para CG(8) así $p=2$, $m=3$ $p^m-1=7$, u es una raiz primitiva de la unidad de orden 7 es decir u satisface la ecuación $x^7-1=0$

Por el teorema 26

$$x^7-1 = \prod_{d|7} F_d(x) = F_1(x)\ F_6(x) =$$
$$= (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$F_1(x)$ y $F_6(x)$ son irreducibles en $Q[x]$, obviamente las raices primitivas de la unidad estan en $F_6(x)$, el cuál es reducible en $Z_2[x]$ pues

i) Si evaluamos en $x=0$ ó en $x=1$

$F_6(x) = 1 \bmod 2$

ii) Se puede ver facilmente que $F_6(x)$ no tiene factores lineales (ni factores de grado 5)

iii) Hay 4 polinomios mónicos en $Z_2[x]$ de grado 2 los cuales son x^2, x^2+1, x^2+x ,x^2+x+1 si dividimos $F_6(x)$ entre cualquiera de ellos hay residuo diferente de cero $\therefore$ $F_6(x)\varepsilon Z_2[x]$ no tiene factores cuadraticos (ni factores de grado 4)

iv) Hay 8 polinomios mónicos en $Z_2[x]$ de los cuales uno de ellos es $P(x) = x^3+x+1$ el cuál divide a $F_6(x)$ pues

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3+x^2+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x+1 & x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\
 & \underline{-x^6 \qquad -x^4-x^3} \\
 & x^5 \qquad +x^2+x+1 \\
 & \underline{-x^5-x^3\ -x^2} \\
 & x^3+x+1 \\
 & \underline{-x^3-x-1} \\
 & 0
\end{array}$$

entonces de los 8 polinomios monicos de grado 3, 2 de ellos dividen a $F_6(x) \in Z_2[x]$, así en un máximo de 7 divisiones encontramos estos dos factores así.

$$F_6(x) = p(x) \cdot q(x)$$

donde $p(x) = x^3+x+1$ y $q(x) = x^3+x^2+1$

ahora $p(x)=q(x) = 1 \bmod 2$ en $x=0,1$

por teorema 5, $p(x)$ son irreducibles en $Z_2[x]$. A cualquiera de los dos podemos tomarlo como el polinomio mínimo. En la tabla se puso a $p(x)$.

La idea desarrollada en el ejemplo es la que se utiliza para generar la tabla de funciones mínimas.

9.12 Construcción de los campos de Galois de orden p^m

La construcción de los campos de Galois de orden p^m $CG(p^m)$ salvo isomorfismo es bajo la siguiente idea:

para $m=1$ $CG(p) = Z_p$
para $m>1$ el campo de Galois $CG(p^m)$ se construye (salvo isomorfismo) como una extensión $Z_p(u)=CG(p^m)$ sobre Z_p donde u es una raiz primitiva de la unidad de orden p^m-1 $\therefore$ u es raiz de $f(x)=x^{p^m-1}-1$

Por el teorema 26 $x^{p^m-1}-1 = \prod_{d|p^m-1} F_d(x)$ donde

$F_d(x)$ es el d-esimo polinomio ciclotomico, mediante esta descomposición se encuentra el polinomio irreducible $Irr(Z_p, u)$ o polinomio mínimo, el cual resulta ser de grado m.

Así $[CG(p^m) : Z_p] = m$ y los elementos $1, u, u^2, \ldots u^{m-1}$ forman una base de $CG(p^m)$ sobre Z_p. Así $CG(p^m)$ tiene exactamente p^m elementos. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_h$ todos los elementos del $CG(p^m)$ donde $h=p^m-1$. El teorema 22 nos afirma que el grupo multiplicativo del $CG(p^m)$ es un campo finito, ciclico de orden p^m-1, por tanto $\alpha_i^h=1$ $i=0,1,\ldots h$. tal que $\alpha_i \neq 0$. Entonces $\alpha_i^{p^m}=\alpha_i$ para toda i. El polinomio $X^{p^m} - X \in Z_p[X]$ tiene p^m raices en $CG(p^m)$, es decir $CG(p^m)$ es el campo de raices de el polinomio $x^{p^m} - x$. Además por el teorema 14

$$Z_p[X]/\ Irr(Z_p,u) \simeq Z_p(u)$$

es decir los elementos de $Z_p(u)$ podemos verlos como clases de equivalencia, entonces para efectuar la adición de elementos es conveniente tomar a los representantes idoneos para efectuarla, lo mismo que para la multiplicación que no necesariamente son los mísmos representantes, pero que esten en la misma clase.

Así, utilizando la tabla 9.5 de funciones mínimas podemos construir los campos de Galois $CG(p^m)$ de la siguiente manera:

1. Tome la función mínima $P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}+x^m$ donde $a_i \in Z_p$. El número u es una raiz primitiva de la unidad que satisface la ecuación $P(u)=0$ es decir $u^m=-a_0-a_1x-a_2x^2 \ldots -a_{m-1}x^{m-1}$

2. El campo de Galois $CG(p^m) = Z_p(u)$ tiene p^m elementos, llamemosle $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ donde $h=p^m-1$

   a) Como el grupo multiplicativo de todos los elementos no cero es ciclico y la raiz primitiva de la unidad de orden p^m-1, u es un generador, así para efectuar la multiplicación en una forma agil es conveniente tomar

$\alpha_1 = u,\ \alpha_2 = u^2,\quad \alpha_3 = u^3,\ \ldots\ldots,\ \alpha_h = u^h \quad h=p^m-1$

Observece que $\alpha_h = u^h = u^{p^m-1} = 1$ ya que u es una raiz primitiva de la unidad de orden p -1 ∴ u satisface la ecuación $x^h - 1=0$. Así en este orden el "último" elemento es el 1 (el identico multiplicativo del campo).

b) Para efectuar la suma, es conveniente tomar

$\alpha_0=0 \quad \alpha_1=u_1 \quad \alpha_2=u^2 \qquad \alpha_{m-1}=u^{m-1}$

y los restantes elementos $\alpha_i=u^i \quad i=m,m+1,\ldots,p^m-1$. "reducirlos" a polinomios en indeterminada u de grado menor o igual a m-1 mediante el polinomio mínimo evaluando en u, es decir usando

$$P(x)=Irr(Z_p,u)=a_0+a_1u+a_2u^2+\ \ldots +a_{m-1}u^{m-1}+u^m=0$$

Con esta reducción, la adición de elementos es en si una suma de polinomios de orden menor que m.*
Así los p^m elementos del campo son los del conjunto

$\{c_0+c_1u+c_2u^2+\ \ldots\ +c_{m-1}u^{m-1} \mid c_i \in Z_p \quad i=0,1,2\ldots,m-1$ y u es una raiz primitiva de la unidad de orden $h=p^m-1$ ∴ $P(u)=0\}$

3. La suma de dos elementos esta dada por la regla

$$(a_0+a_1u+a_2u^2+\ \ldots+\ a_{m-1}u^{m-1}) + (b_0+b_1u+b_2u^2+\ldots+\ b_{m-1}u^{m-1}) =$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)u+(a_2+b_2)u^2+\ \ldots\ +\ (a_{m-1}+b_{m-1})u^{m-1}$$

donde la suma de a_i+b_i es modulo p, así, con esta regla se construye la tabla de adición.

* En la sección 9.10 Diseño 4° no se uso este procedimiento.

4. Si se definio $\alpha_0=0$ y $\alpha_i=u^i$, $i=1,2,3,\ldots,h$ donde $h=p^m-1$ como se indica en el punto 2a, los elementos diferentes de cero estan dados en orden ciclico, así el producto de dos elementos se obtiene de una manera más sencilla y resulta ser $\alpha_i\cdot\alpha_j = 0$ si α_i ó α_j son cero. Para elementos no cero

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \begin{cases} \alpha_{i+j} & \text{si} \quad i+j \leq h \\ \alpha_{i+j-h} & \text{si} \quad i+j > h \end{cases}$$

donde $h=p^m-1$. Pues

$$\alpha_i\cdot\alpha_j = \begin{cases} u^i\cdot u^j=u^{i+j}=\alpha_{i+j} & \text{Si } i+j \leq h \\ u^i\cdot u^j=u^{i+j}=u^h\cdot u^{i+j-h}=\alpha_h\cdot\alpha_{i+j-h}=\alpha_{i+j-h} & \text{Si } i+j > h \end{cases},$$

Si los elementos estan dados en forma polinomial como se indica en el punto 2b, el producto de dos elementos de este tipo se calcula "multiplicando por fuera" en forma natural y despuęs se simplifica usando la ecuación

$$P(u) = 0 \;\therefore\; u^m=-a_0-a_1u-a_2u^2-\ldots-a_{m-1}u^{m-1}$$

y reduciendo los coeficientes modulo p.

Veamos algunos ejemplos usando esta forma de construcción.

9.13 Campo de Galois de orden 8 CG(8)

En este caso $p=2$, $m=3$, $h=p^m-1=7$.

En la sección 9.11 vimos que la ecuación ciclotomica $x^7-1\varepsilon Z_2[x]$

la podemos expresar de la siguiente manera

$$x^7-1 = (x-1)(x^3+x^2+1)(x^3+x+1)$$

donde la suma de coeficientes es modulo 2. El polinomio mínimo puede ser x^3+x^2+1 o x^3+x+1. Tomemos $P(x)=x^3+x+1$, si u es raiz primitiva de la unidad de orden 7 de $P(x)$, entonces $P(u)=0$ $\therefore$ $u^3=u+1$ así los elementos de $CG(2^3)$ son:

$$\begin{array}{lll} \alpha_0=0 & \alpha_3=u^3=u+1 & \alpha_6=u^6=u^2+1 \\ \alpha_1=u & \alpha_4=u^4=u\cdot u^3=u^2+u & \alpha_7=u^7=1 \\ \alpha_2=u^2 & \alpha_5=u^5=u^2+u+1 & \end{array}$$

observece que se reduce tomando $u^3=u+1$ y la suma de coeficientes es módulo 2. Algunos ejemplos de suma y producto son:

$$\begin{array}{lllll} \alpha_2+\alpha_5 & = u^2+u^2+u+1 & = u+1 & = & \alpha_3 \\ \alpha_4+\alpha_6 & = u^2+u+u^2+1 & = u+1 & = & \alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_3 & = u+u+1 & = 1 & = & \alpha_7 \\ \alpha_5+\alpha_6 & = u^2+u+1+u^2+1 & = u & = & \alpha_1 \\ \alpha_i+\alpha_i & = \alpha_0 & & i=1,2,..,7. & \end{array}$$

$$\alpha_1\cdot\alpha_3 = u\cdot u^3 = u^4=\alpha_4$$

$$\alpha_4\cdot\alpha_6 \quad u^4\cdot u^6 = u^{10}=u^7\cdot u^3=1\cdot u^3=u^3=\alpha_3$$

observemos también que $\alpha_4\cdot\alpha_6=(u^2+u)(u^2+1)=u^4+u^3+u^2+u =$ $=u^2+u+u+1+u^2+u = 2u^2+3u+1 = u+1 = \alpha_3$

Así las tablas de adición y multiplicación son

Tabla 9.6 Adición para $CG(2^3)$, $u^3=u+1$

$+$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\alpha_0=0$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\alpha_1=u$	α_1	α_0	α_4	α_7	α_2	α_6	α_5	α_3
$\alpha_2=u^2$	α_2	α_4	α_0	α_5	α_1	α_3	α_7	α_6
$\alpha_3=1+u$	α_3	α_7	α_5	α_0	α_6	α_2	α_4	α_1
$\alpha_4=u+u^2$	α_4	α_2	α_1	α_6	α_0	α_7	α_3	α_5
$\alpha_5=1+u+u^2$	α_5	α_6	α_3	α_2	α_7	α_0	α_1	α_4
$\alpha_6=1+u^2$	α_6	α_5	α_7	α_4	α_3	α_1	α_0	α_2
$\alpha_7=1$	α_7	α_3	α_5	α_1	α_5	α_4	α_2	α_0

Tabla 9.7 Multiplicación en $CG(2^3)$ $P(x) = x^3+x+1$

$\times$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\alpha_0=0$	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0
$\alpha_1=u$	α_0	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_1
$\alpha_2=u^2$	α_0	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_1	α_2
$\alpha_3=u^3$	α_0	α_4	α_5	α_6	α_7	α_1	α_2	α_3
$\alpha_4=u^4$	α_0	α_5	α_6	α_7	α_1	α_2	α_3	α_4
$\alpha_5=u^5$	α_0	α_6	α_7	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$\alpha_6=u^6$	α_0	α_7	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$\alpha_7=1$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7

9.14 Campo de Galois de orden 9. $CG(3^2)$

La ecuación ciclotómica para CG(9) es x^8-1 que en los racionales se factoriza como

$$x^8-1 = \prod_{d|8} F_d(x) = F_1(x)F_2(x)F_4(x)F_8(x)$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

y cada factor es irreducible en el campo de los racionales, observece que las raices primitivas de la unidad estan en el término (x^4+1) el cual en el campo Z_3 se puede factorizar de la siguiente manera

$$x^4+1 = (x^2+x+2)\ (x^2+2x+2)$$

Entonces el polinomio mínimo $P(x)$ puede ser x^2+x+2 ó x^2+2x+2. Tomemos $P(x)=x^2+x+2$, si u es una raiz primitiva de la unidad de orden 8 satisfaciendo $P(x)$ $\therefore$ $P(u)=0$, entonces $u^2+u+2=0$ equivalentemente $u^2=-u-2=2u+1$ en el campo Z_3, así los elementos de $CG(3^2)$ son

$\alpha_0=0$	$\alpha_3=u^3=u\cdot u^2=u+2u^2=2+2u$	$\alpha_6=u^6=2+u$
$\alpha_1=u$	$\alpha_4=u^4=u\cdot u^3=2u+2u^2=2$	$\alpha_7=u^7=1+u$
$\alpha_2=u^2=1+2u$	$\alpha_5=u^5=u\cdot u^4=2u$	$\alpha_8=u^8=1$

Los productos se reducen utilizando $u^2=1+2u$, la suma de coeficientes es módulo 3. Algunos ejemplos de su suma y producto son.

$$\alpha_2+\alpha_6 = (1+2u) + (2+u) = 3+3u = 0 = \alpha_0$$
$$\alpha_4+\alpha_3 = (2) + (2+2u) = 4+2u = 1+2u = \alpha_2$$
$$\alpha_7+\alpha_2 = (1+u) + (1+2u) = 2+3u = 2 = \alpha_4$$

$$\alpha_2 \cdot \alpha_4 = u^2 \cdot u^4 = u^6 = \alpha_6$$
$$\alpha_5 \cdot \alpha_6 = u^5 \cdot u^6 = u^{11} = u^8 \cdot u^3 = 1 \cdot u^3 = u^3 = \alpha_3$$

Observe que también el producto se puede efectuar "reduciendo"
$\alpha_5 \cdot \alpha_6 = 2u(2+u) = 4u+2u^2 = u+2(1+2u) = u+2+4u = 2+2u = \alpha_3$
Así, las tablas de adición y multiplicación son:

TABLA 9.8 Adición para $CG(3^2)$ $u^2=1+2u$

$+$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$\alpha_0=0$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$\alpha_1=u$	α_1	α_5	α_8	α_4	α_6	α_0	α_3	α_2	α_7
$\alpha_2=1+2u$	α_2	α_8	α_5	α_1	α_5	α_7	α_0	α_4	α_3
$\alpha_3=2+2u$	α_3	α_4	α_1	α_7	α_2	α_6	α_8	α_0	α_5
$\alpha_4=2$	α_4	α_6	α_5	α_2	α_8	α_3	α_7	α_1	α_0
$\alpha_5=2u$	α_5	α_0	α_7	α_6	α_3	α_1	α_4	α_8	α_2
$\alpha_6=2+u$	α_6	α_3	α_0	α_8	α_7	α_4	α_2	α_5	α_1
$\alpha_7=1+u$	α_7	α_2	α_4	α_0	α_1	α_8	α_5	α_3	α_6
$\alpha_8=1$	α_8	α_7	α_3	α_5	α_0	α_2	α_1	α_6	α_4

Tabla 9.9 Producto para $CG(3^2)$ $u^2=1+2u$

$\times$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$\alpha_0=0$	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0	α_0
$\alpha_1=u$	α_0	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1
$\alpha_2=u^2$	α_0	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2
$\alpha_3=u^3$	α_0	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3
$\alpha_4=u^4$	α_0	α_5	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4
$\alpha_5=u^5$	α_0	α_6	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$\alpha_6=u^6$	α_0	α_7	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$\alpha_7=u^7$	α_0	α_8	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\alpha_8=1$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8

Estas tablas de adición y multiplicación nos permiten generar los grupos que se requieren para la obtención de las sumas de cuadrados en un factorial s^n ($s=p^m$, p-primo)

9.15 Geometría de los campos de Galois de orden p^m

Pensemos en los elementos de $CG(p^m)$ como números complejos, de tal manera que $\alpha_0=0=0+0_i$ y $\alpha_1=u$, raiz primitiva de la unidad de orden $h=p^m-1$, así $\alpha_{[illegible]}=\exp(\frac{2\pi}{h}i)$ $\alpha_1=\exp(\frac{2\pi}{h}i)=\cos\frac{2\pi}{h}+i\ \mathrm{sen}\ \frac{2\pi}{h}$ y en $\alpha_j=u^j$ $j=2,3,\ldots,p^m-1$, geométricamente α_0 es el origen y α_i esta sobre el círculo unitario, hagamos su descripción geométrica en el plano complejo.

9.15.1 El campo de Galois de orden 4 CG(4)

En este caso p=2, m=2, u=exp $(\frac{2}{3}\Pi_i)$ $P(u)=Irr(Z\ (u),\ u) =$ $= u^2+u+1$. Los elementos de CG(4) en orden cíclico (respecto al grupo multiplicativo) son

$\alpha_0=0$ $\qquad \alpha_1=u$ $\qquad \alpha_2=u=u+1$ $\qquad \alpha_3=u^3=u^2\cdot u=u^2\cdot u+u+1=1$

que geométricamente se ven en la posición marcada en la figura 1.

Figura 1.- Sumando α_0

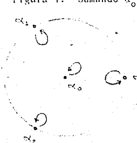


Figura 2.- Sumando α_1

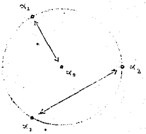


Figura 3.- Sumando α_2

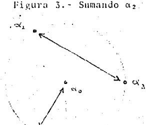
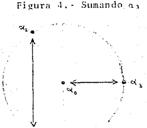


Figura 4.- Sumando α_3



La tabla de adición es la siguiente

$+$	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_0	α_3	α_2
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_2	α_1	α_0

Las figuras 1, 2, 3, 4 describen la translación que sufren los elementos al sumarles $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ y α_3 respectivamente, así por ejemplo si a α_1 le sumamos α_2, se translada a α_3 (ver figura 2), es decir $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$.

Para el grupo multiplicativo $\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\}$ al multiplicar por α_j $j=1,2,3$ se tendrían rotaciones de $\frac{2}{3}\pi j$ $j=1,2,3$.

9.15.2 <u>El campo de Galois de orden 8 CG(8)</u>

En este caso $p=2, m=3, u=\exp(\frac{2}{7}\pi i)$

$$P(u)=\mathrm{Irr}(Z_p(u),\ u) = u^3+u+1$$

Los elementos de CG(8) en orden cíclico (respecto al grupo multiplicativo) son

$\alpha_0=0$ $\quad \alpha_2=u^2$ $\quad \alpha_4=u^4=u^2+u$ $\quad \alpha_6=u^6=u^2+1$

$\alpha_1=u$ $\quad \alpha_3=u^3=u+1$ $\quad \alpha_5=u^5=u^2+u+1$ $\quad \alpha_7=u^7=1$

La tabla 9.6 nos indica como es la adición en CG(8).

Las figuras de la 5 a la 12 nos describen la translación que sufren los elementos al sumarles $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_7$ y α_0 respectivamente.

Figura 5
Sumando α_1

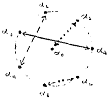


Figura 6
Sumando α_2

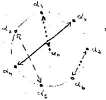


Figura 7
Sumando α_3

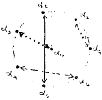


Figura 8
Sumando α_4

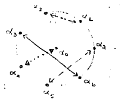


Figura 9
Sumando α_5

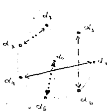


Figura 10
Sumando α_6

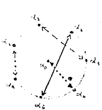
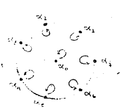


Figura 11
Sumando α_7

Figura 12
Sumando α_0



Observece que con rotaciones de $\frac{2\Pi}{7}$ obtenemos en si el mismo esquema.

Para el grupo multiplicativo $\{\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_7\}$ al multiplicar por α_j $j=1,2,..7$ se tendrían rotaciones de $\frac{2\Pi}{7}$ j, $j=1,2,-7$.

9.15.3 El campo de Galois de orden 9 CG(9)

En este caso p=3 m=2 $u=\exp(\frac{1}{4}\Pi i)$
$P(u) = Irr(Z_3(u),u) = u^2+u+2$

Los elementos del CG(9) en orden ciclico (respecto al grupo multiplicativo) son

$\alpha_o=0$	$\alpha_3=u^3=2+2u$	$\alpha_6=u^6=2+u$
$\alpha_1=u$	$\alpha_4=u^4=2$	$\alpha_7=u^7=1+u$
$\alpha_2=u^2=1+2u$	$u_5=u^5=2u$	$\alpha_8=u^8=1$

La tabla 9.8 nos indica como es la adición en CG(9).

Las figuras de la 12 a la 19 nos indican la translación que sufren los elementos al sumarles $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_8$ respectivamente.

Figura 13
Sumando α_1

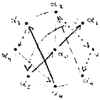


Figura 14
Sumando α_2

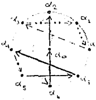


Figura 15
Sumando α_3

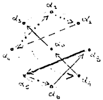


Figura 16
Sumando α_4

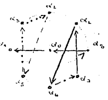


Figura 17
Sumando α_5

Figura 18
Sumando α_6

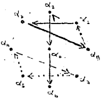


Figura 19
Sumando α_7

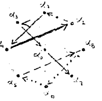
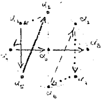


Figura 20
Sumando α_8



Observece que nuevamente, con rotaciones de $\frac{1}{4}\Pi$ obtenemos en si el mismo esquema.

Para el grupo multiplicativo $\{\alpha_1,\alpha_2,.,\alpha_8\}$ al multiplicar por α_j $j=1,2,\ldots,8$ se tendrían rotaciones de $\frac{1}{4}\Pi j$ $j=1,2,\ldots 8$.

9.15.4. Conclusión. Mediante estos diagramas, que en si es solo 1, puede reducirse el análisis de la partición de los efectos principales y de las interacciones, además de que facilitan el análisis en los diseños factoriales s^n con confusión.

9.16 Análisis del diseño factorial s^n ($s=p^m$, p-nº primo)

El análisis del diseño factorial s^n se basa en los campos de Galois de orden p^m, en si es una extensión de los desarrollos del capítulo 8, substituyendo p por p^m, efectuando las operaciones en el $CG(p^m)$. El análisis se puede efectuar de la siguiente manera:

1. Construya las tablas de adición y de multiplicación del campo de Galois de orden p^m, ∴ de $CG(p^m)$
2. Los niveles de cada factor con $s=p^m$ variantes se hacen equivalentes a los elementos del $CG(p^m)$. Lo más conveniente es tomar $a_i=i$ $(i=0,1,2,3,\ldots,s-1)$ ∴ tomarlos en orden cíclico.
3. Construya la tabla en donde se desarrollen los cálculos de la partición para efectos principales e interacciones que componen el diseño factorial s^n.

Para hacer la construcción de la tabla indicada en el paso 3, es conveniente notar que se generalizan las expresiones (8.1) substituyendo p por p^m (p-nº primo). Así, si consideramos el efecto $A^{\gamma_1}B^{\gamma_2}C^{\gamma_3}\ldots Z^{\gamma_n}$, donde γ_i, $i=1,2,\ldots,n$ es un número entero entre 0 y s-1, no todos cero, y por unicidad de la enumeración la primer γ_i diferente de cero, toma el valor de 1. Al símbolo $(A^{\gamma_1}B^{\gamma_2}C^{\gamma_3}\ldots Z^{\gamma_n})_k$ es el total de los s^{n-1} tratamientos de la forma $(\alpha_{x_1},\alpha_{x_2},\ldots\alpha_{x_n})$ que satisfacen la ecuación

$$\alpha_{\gamma_1}\alpha_{x_1}+\alpha_{\gamma_2}\alpha_{x_2}+\ldots\ldots+\alpha_{\gamma_n}\alpha_{x_n}=\alpha_k$$

Las sumas y productos se efectuan en $CG(p^m)$. Variando k de 0 a s-1 construímos un conjunto de s totales, cada total está constituído por la suma de s^{n-1} combinaciones de tratamientos específicados por las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \alpha_{y_1}\alpha_{x_1} + \alpha_{y_2}\alpha_{x_2} + \ldots\ldots + \alpha_{y_n}\alpha_{x_n} &= \alpha_0 \\ \alpha_{y_1}\alpha_{x_1} + \alpha_{y_2}\alpha_{x_2} + \ldots\ldots + \alpha_{y_n}\alpha_{x_n} &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{y_1}\alpha_{x_1} + \alpha_{y_2}\alpha_{x_2} + \ldots\ldots + \alpha_{y_n}\alpha_{x_n} &= \alpha_{s-1} \end{aligned} \qquad 9.4$$

los elementos $\alpha_y's$, $\alpha_y's$, las sumas y los productos son en $CG(p^m)$.

4. Sumas de cuadrados.- La variación entre los s totales que se generan por medio de las ecuaciones (9.4) nos la da la variación que tiene el efecto $A^{\gamma_1} B^{\gamma_2} C^{\gamma_3} \ldots Z^{\gamma_n}$, este, se mide por suma de cuadrados de la siguiente manera:

$$SC_{A^{\gamma_1}B^{\gamma_2}\ldots Z^{\gamma_n}} = \frac{(A^{\gamma_1}B^{\gamma_2}\ldots Z^{\gamma_n})_0^2 + (A^{\gamma_1}B^{\gamma_2}\ldots Z^{\gamma_n})_1^2 + \ldots\ldots + (A^{\gamma_1}B^{\gamma_2}\ldots Z^{\gamma_n})_{s-1}^2}{r\, s^{n-1}} - \frac{T^2}{r\, s^n} \qquad 9.5$$

Donde r es el número de repeticiones de cada tratamiento, T es el total de todas las observaciones del experimento.

Demos ahora unos ejemplos, el caso del diseño factorial 4^2 ya se trato anteriormente, tratemos ahora el

9.17 Diseño Factorial 4^3.

La adición y multiplicación del campo de Galois CG(4) estan dados en las tablas 9.1 y 9.2.

Obtengamos ahora los conjuntos de s-1=3 g.l. formando las particiones de las 64 combinaciones como se indica en la tabla 9.10 (observece que se efectúan pasos 2 y 3)

Las columnas de la tabla 9.10 se obtienen de la siguiente manera:

El efecto A tiene 4 niveles los cuales los denotamos por $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, cualquiera de ellos lo denotaremos por α_{x_1}, en la tabla se indica el valor del índice x_1. En forma analoga se indica el valor del indice de B por x_2 y el de C por x_3.

La columna A^1B^1 se obtiene mediante la suma $\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_1\alpha_{x_2}$ el cual denotaremos por $\alpha_{x_{110}}$, es decir $\alpha_{x_{110}}=\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_1\alpha_{x_2}$ se selecciono el índice 110 por ser el exponente de $A^1B^1 = A^1B^1C^0$ en la tabla se indica el valor del índice x_{110}.

La columna A^1B^2 se obtiene mediante la suma $\alpha_{120}=\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}$ se indica el valor del índice x_{120}.

En forma analoga se obtienen las otras columnas, por ejemplo

La columna B^1C^3 se obtiene mediante la suma $\alpha_{013}=\alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}$

La columna $A^1B^1C^1$ se obtiene mediante la suma $\alpha_{111}=\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_1\alpha_{x_3}$

La columna $A^1B^3C^2$ se obtiene mediante la suma $\alpha_{132}=\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}$

TABLA 9.10 Cálculo de la partición para efectos e interacciones para el diseño factorial 4^3

Efectos del factor			Interacción de 2 factores									Interacción de 3 factores								
A	B	C	A^1B^1	A^1B^2	A^1B^3	A^1C^1	A^1C^2	A^1C^3	B^1C^1	B^1C^2	B^1C^3	$A^1B^1C^1$	$A^1B^1C^2$	$A^1B^1C^3$	$A^1B^2C^1$	$A^1B^2C^2$	$A^1B^2C^3$	$A^1B^3C^1$	$A^1B^3C^2$	$A^1B^3C^3$
X_1	X_2	X_3	X_{110}	X_{120}	X_{130}	X_{101}	X_{102}	X_{103}	X_{011}	X_{012}	X_{013}	X_{111}	X_{112}	X_{113}	X_{121}	X_{122}	X_{123}	X_{131}	X_{132}	X_{133}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
0	0	2	0	0	0	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
0	0	3	0	0	0	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0	1	0	2	3	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
0	1	1	2	3	1	2	3	1	0	1	3	0	1	3	1	0	2	3	2	0
0	1	2	2	3	1	3	1	2	1	3	0	1	3	0	0	2	1	2	0	3
0	1	3	2	3	1	1	2	3	3	0	1	3	0	1	2	1	0	0	3	2
0	2	0	3	1	2	0	0	0	3	3	3	3	3	3	1	1	1	2	2	2
0	2	1	3	1	2	2	3	1	1	0	2	1	0	2	3	2	0	0	1	3
0	2	2	3	1	2	3	1	2	0	2	1	0	2	1	2	0	3	1	3	0
0	2	3	3	1	2	1	2	3	2	1	0	2	1	0	0	3	2	3	0	1
0	3	0	1	2	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
0	3	1	1	2	3	2	3	1	3	2	0	3	2	0	0	1	3	1	0	2
0	3	2	1	2	3	3	1	2	2	0	3	2	0	3	1	3	0	0	2	1
0	3	3	1	2	3	1	2	3	0	3	2	0	3	2	3	0	1	2	1	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	2	2	0	1	3	2	3	1	0	1	3	0	1	3	0	1	3
1	0	2	2	2	2	1	3	0	3	1	2	1	3	0	1	3	0	1	3	0
1	0	3	2	2	2	3	0	1	1	2	3	3	0	1	3	0	1	3	0	1
1	1	0	0	1	3	2	2	2	2	2	2	0	0	0	1	1	1	3	3	3
1	1	1	0	1	3	0	1	3	0	1	3	2	3	1	3	2	0	1	0	2
1	1	2	0	1	3	1	3	0	1	3	0	3	1	2	2	0	3	0	2	1
1	1	3	0	1	3	3	0	1	5	0	1	1	2	3	0	3	2	2	1	0
1	2	0	1	3	0	2	2	2	3	3	3	1	1	1	3	3	3	0	0	0
1	2	1	1	3	0	0	1	3	1	0	2	3	2	0	1	0	2	2	3	1
1	2	2	1	3	0	1	3	0	0	2	1	2	0	3	0	2	1	3	1	2
1	2	3	1	3	0	3	0	1	2	1	0	0	3	2	2	1	0	1	2	3
1	3	0	3	0	1	2	2	2	1	1	1	3	3	3	0	0	0	1	1	1
1	3	1	3	0	1	0	1	3	3	2	0	1	0	2	2	3	1	3	2	0
1	3	2	3	0	1	1	3	0	2	0	3	0	2	1	3	1	2	2	0	3
1	3	3	3	0	1	3	0	1	0	3	2	2	1	0	1	2	3	0	3	2

A	B	C	A^1B^1	A^1B^2	A^1B^3	A^1C^1	A^1C^2	A^1C^3	B^1C^1	B^1C^2	B^1C^3	$A^1B^1C^1$	$A^1B^1C^2$	$A^1B^1C^3$	$A^1B^2C^1$	$A^1B^2C^2$	$A^1B^2C^3$	$A^1B^3C^1$	$A^1B^3C^2$	$A^1B^3C^3$
X_1	X_2	X_3	X_{110}	X_{120}	X_{130}	X_{101}	X_{102}	X_{103}	X_{011}	X_{012}	X_{013}	X_{111}	X_{112}	X_{113}	X_{121}	X_{122}	X_{123}	X_{131}	X_{132}	X_{133}
2	0	0	3	3	3	3	3	3	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	1	3	3	3	1	0	2	2	3	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2
2	0	2	3	3	3	0	2	1	3	1	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	3	3	3	3	2	1	0	1	2	3	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	1	0	1	0	2	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	1	1	1	0	2	1	0	2	0	1	3	3	2	0	2	3	1	0	1	3
2	1	2	1	0	2	0	2	1	1	3	0	2	0	3	3	1	2	1	3	0
2	1	3	1	0	2	2	1	0	3	0	1	0	3	2	1	2	3	3	0	1
2	2	0	0	2	1	3	3	3	3	3	3	0	0	0	2	2	2	1	1	1
2	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	2	3	1	0	1	3	3	2	0
2	2	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	1	2	1	3	0	2	0	3
2	2	3	0	2	1	2	1	0	2	1	0	1	2	3	3	0	1	0	3	2
2	3	0	2	1	0	3	3	3	1	1	1	2	2	2	1	1	1	0	0	0
2	3	1	2	1	0	1	0	2	3	2	0	0	1	3	3	2	0	2	3	1
2	3	2	2	1	0	0	2	1	2	0	3	1	3	0	2	0	3	3	1	2
2	3	3	2	1	0	2	1	0	0	3	2	3	0	1	0	1	2	1	2	3
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	3	2	0	2	3	1	3	2	0	3	2	0	3	2	0
3	0	2	1	1	1	2	0	3	3	1	2	2	0	3	2	0	1	2	0	3
3	0	3	1	1	1	0	3	2	1	2	3	0	3	2	0	3	2	0	3	2
3	1	0	3	2	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	2	2	2	0	0	0
3	1	1	3	2	0	3	2	0	0	1	3	1	0	2	0	1	3	2	3	1
3	1	2	3	2	0	2	0	3	1	3	0	0	2	1	1	3	0	3	1	2
3	1	3	3	2	0	0	3	2	3	0	1	2	1	0	3	0	1	1	2	3
3	2	0	2	0	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2	0	0	0	3	3	3
3	2	1	2	0	3	3	2	0	1	0	2	0	1	3	2	3	1	1	0	2
3	2	2	2	0	3	2	0	3	0	2	1	1	3	0	3	1	2	0	2	1
3	2	3	2	0	3	0	3	2	2	1	0	3	0	1	1	2	3	2	1	0
3	3	0	0	3	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	3	3	3	2	2	2
3	3	1	0	3	2	3	2	0	3	2	0	2	3	1	1	0	2	0	1	3
3	3	2	0	3	2	2	0	3	2	0	3	3	1	2	0	2	1	1	3	0
3	3	3	0	3	2	0	3	2	0	3	2	1	2	3	2	1	0	3	0	1

Veamos algunos ejemplos de como se obtienen algunos valores de la tabla 9.10. Si $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2$, de las tablas de adición y de multiplicación, se sigue que

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}=\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_1=\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2 \qquad \text{(en columna } A^1B^2\text{)}$$

$$\alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}=\alpha_1\alpha_1+\alpha_3\alpha_2=\alpha_1+\alpha_1=\alpha_0 \qquad \text{(en columna } B^1C^2\text{)}$$

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2=(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1=\alpha_3+\alpha_1=\alpha_2 \qquad \alpha_2=x_{112}(3,1,2)$$

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_1+\alpha_2\alpha_2=(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_1=\alpha_2+\alpha_1=\alpha_3 \qquad \alpha_3=x_{122}(3,1,2)$$

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}=\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_3\alpha_2=(\alpha_1+\alpha_1)+\alpha_2=\alpha_0+\alpha_2=\alpha_2 \qquad \alpha_2=x_{133}(3,1,2)$$

Así, la tabla 9.10 da la partición de los 63 g.l. para el diseño factorial 4^3 en 3 efectos principales, cada uno con 3 g.l. y 18 conjuntos de interacciones cada uno con 3 g.l. Si A,B,C denotan los efectos principales, la descripción de algunas componentes son

$(B)_1$ = 010+011+012+013+110+111+112+113+210+211+212+213+310+311+312+313

$(B^1C^2)_1$ = 001+012+020+033+101+112+120+133+201+212+220+233+301+312+320+333

$(A^1B^1C^2)_1$ = 002+011+023+030+101+112+120+133+203+210+222+231+300++313+321+332

Observese que las componentes de $(A^1B^1C^2)_3$ son las soluciones de la ecuación.

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_3$$

las cuales se encuentran bajo la columna marcada $A^1B^1C^2$ de la tabla 9.10. En general el símbolo $(A^1B^jC^k)_r$ corresponde al total de tratamientos (X_1,X_2,X_3) que satisfacen la ecuación

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_j\alpha_{x_2}+\alpha_k\alpha_{x_3} = \alpha_r \qquad j,k,r \in \{0,1,2,3\}$$

La variación entre los 3 totales que se generan al variar r de 0 a 3 es el efecto de $A^1B^jC^k$ y se mide por una suma de cuadrados, de la siguiente forma.

$$SC_{A^1B^jC^k} = \frac{(A^1B^jC^k)_0^2+(A^1B^jC^k)_1^2+(A^1B^jC^k)_2^2+(A^1B^jC^k)_3^2}{16r} - \frac{T^2}{64r}$$

Donde r es el númeró de repeticiones de cada tratamiento y T es el total de todas las observaciones del experimento. El análisis de variancia se da en la siguiente tabla

TABLA 9.11 A.de V. del diseño factorial 4^3 en bloques de azar.

F.V.	G.L.	
Bloques	r-1	
Tratamientos	63	
A	3	
B	3	
C	3	
AB	9	
A^1B^1		3
A^1B^2		3
A^1B^3		3
AC	9	
A^1C^1		3
A^1C^2		3
A^1C^3		3
BC	9	
B^1C^1		3
B^1C^2		3
B^1C^3		3
⋮	⋮	⋮

⋮	⋮	⋮
ABC	27	
$A^1B^1C^1$		3
$A^1B^1C^2$		3
$A^1B^1C^3$		3
$A^1B^2C^1$		3
$A^1B^2C^2$		3
$A^1B^2C^3$		3
$A^1B^3C^1$		3
$A^1B^3C^2$		3
$A^1B^3C^3$		3
Error	63(r-1)	
Total	64r-1	

9.18 Confusión en el diseño factorial s^n ($s=p^m$ p-nº primo)

El desarrollo de este sistema con confusión lo ejemplificaremos con el diseño factorial 4^3 con factores A,B y C. - Los 63 grados de libertad pueden representarse por los símbolos:

Efectos principales: A, B, C

Interacciones de 2 factores: A^1B^1, A^1B^2, A^1B^3, A^1C^1, A^1C^2, A^1C^3, B^1C^1, B^1C^2, B^1C^3

Interacciones de 3 factores: $A^1B^1C^1$, $A^1B^1C^2$, $A^1B^1C^3$, $A^1B^2C^1$, $A^1B^2C^2$, $A^1B^2C^3$, $A^1B^3C^1$, $A^1B^3C^2$, $A^1B^3C^3$

Cada símbolo con 3 grados de libertad, así por ejemplo $A^1B^3C^2$ está dado por cuatro conjuntos que constan de las combinaciones de tratamientos que satisfacen las siguientes ecuaciones respectivamente.

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_0$$
$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_1$$
$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_2$$
$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_3$$

La regla para las interacciones generalizadas puede obtenerse observando que si algun(os) efecto(s) o interacción(es) al que les corresponden las ecuaciones con miembros izquierdos dados por

$$\alpha_i\alpha_{x_1}+\alpha_j\alpha_{x_2}+\alpha_k\alpha_{x_3}$$

y

$$\alpha_i'\alpha_{x_1}+\alpha_j'\alpha_{x_2}+\alpha_k'\alpha_{x_3}$$

estan completamente confundidos con bloques, entonces los efectos o interacciones dadas por las ecuaciones.

$$(\alpha_i+\lambda\alpha_i')\alpha_{x_1}+(\alpha_j+\lambda\alpha_j')\alpha_{x_2}+(\alpha_k+\lambda\alpha_k')\alpha_{x_3}$$

también estan confundidas con bloques λ es un elemento de $CG(4)$ Así por ejemplo, si $A^1B^1C^2$ (ecuación $\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}$) y $A^1B^3C^1$ (ecuación $\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_1\alpha_{x_3}$) estan confundidas con bloques entonces (tomando $\lambda=\alpha_1$)

$$(\alpha_1+\alpha_1\alpha_1)\alpha_{x_1}+(\alpha_1+\alpha_1\alpha_3)\alpha_{x_2}+(\alpha_2+\alpha_1\alpha_1)\alpha_{x_3}=\alpha_3\alpha_{x_1}+\alpha_0\alpha_{x_2}+\alpha_0\alpha_{x_3}$$

$$=\alpha_3\alpha_{x_1}=\alpha_{x_1}$$

$\therefore$ el efecto A también está confundido con bloques analogamente, con $\lambda=\alpha_2,\alpha_3$ obtenemos

$$(\alpha_1+\alpha_2\alpha_1)\alpha_{x_1}+(\alpha_1+\alpha_2\alpha_3)\alpha_{x_2}+(\alpha_2+\alpha_2\alpha_1)\alpha_{x_3}=\alpha_2\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_1\alpha_{x_3}$$

$$(\alpha_1+\alpha_3\alpha_1)\alpha_{x_1}+(\alpha_1+\alpha_3\alpha_3)\alpha_{x_2}+(\alpha_2+\alpha_3\alpha_1)\alpha_{x_3}=\alpha_0\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}=\alpha_2\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}$$

Multiplicando por α_2 ambas ecuaciones, se observa que son equivalentes a las ecuaciones

$$\alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3} \quad , \quad \alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}$$

que nos dicen que el efecto $A^1B^4C^3$ el efecto B^1C^4 también estan confundidos con bloques. Observece que el efecto principal A queda confundido con bloques.

Un diseño más conveniente es confundir $A^1B^1C^1$ y $A^1B^2C^3$, las interacciones generalizadas satisfacen la ecuación

$$(\alpha_1+\lambda\alpha_1)\alpha_{x_1}+(\alpha_1+\lambda\alpha_2)\alpha_{x_2}+(\alpha_1+\lambda\alpha_3)\alpha_{x_3}$$

Para $\lambda=\alpha_1$: $\quad \alpha_3\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}+\alpha_0\alpha_{x_3}=\alpha_3\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_2}$

Para $\lambda=\alpha_2$: $\quad \alpha_4\alpha_{x_1}+\alpha_0\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}=\alpha_2\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_3}$

Para $\lambda=\alpha_3$: $\quad \alpha_0\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}=\alpha_3\alpha_{x_2}+\alpha_2\alpha_{x_3}$

Multiplicando por α_1,α_2 y α_1 respectivamente se observa que son equivalentes a las ecuaciones

Para $\lambda=\alpha_1$: $\quad \alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_3\alpha_{x_2}$

Para $\lambda=\alpha_2$: $\quad \alpha_1\alpha_{x_1}+\alpha_2\alpha_{x_3}$

Para $\lambda=\alpha_3$: $\quad \alpha_1\alpha_{x_2}+\alpha_3\alpha_{x_3}$

Así pues A^1B^3, A^1C^2 y B^1C^3 son las interacciones generalizadas de los efectos $A^1B^1C^1$ y $A^1B^2C^3$, así estas 5 interacciones quedan confundidas con bloques. Cada repetición consta de 16 bloques y la distribución de las combinaciones de los tratamientos se muestra en la tabla 9.16.

TABLA 9.16 Diseño factorial 4^3, en bloques de 4 u.e. con confusión parcial de $A^1B^1C^1$, $A^1B^2C^3$ y sus interacciones generalizadas A^1B^3, A^1C^2 y B^1C^3

Repetición I

Subgrupo Intrabloque							
III	IV	II	IX	XI	XII	X	
$(A^1B^1C^1)_0$ $(A^1B^2C^3)_0$	$(A^1B^1C^1)_0$ $(A^1B^2C^3)_2$	$(A^1B^1C^1)_0$ $(A^1B^2C^3)_3$	$(A^1B^1C^1)_0$ $(A^1B^2C^3)_1$	$(A^1B^1C^1)_2$ $(A^1B^2C^3)_0$	$(A^1B^1C^1)_2$ $(A^1B^2C^3)_2$	$(A^1B^1C^1)_2$ $(A^1B^2C^3)_3$	$(A^1B^1C^1)_2$ $(A^1B^2C^3)_1$
000	011	022	033	032	023	010	001
123	132	101	110	111	100	133	122
231	220	213	202	203	212	221	230
312	303	330	321	320	331	302	313

XIII	XV	XVI	XIV	V	VII	VIII	VI
$(A^1B^1C^1)_3$ $(A^1B^2C^3)_0$	$(A^1B^1C^1)_3$ $(A^1B^2C^3)_2$	$(A^1B^1C^1)_3$ $(A^1B^2C^3)_3$	$(A^1B^1C^1)_3$ $(A^1B^2C^3)_1$	$(A^1B^1C^1)_1$ $(A^1B^2C^3)_0$	$(A^1B^1C^1)_1$ $(A^1B^2C^3)_2$	$(A^1B^1C^1)_1$ $(A^1B^2C^3)_3$	$(A^1B^1C^1)_1$ $(A^1B^2C^3)_1$
013	002	031	020	021	030	003	012
130	121	112	103	102	113	120	131
222	233	200	211	210	201	232	223
301	310	323	332	333	322	311	300

Si se consideran r repeticiones de este diseño el análisis de variancia se da en la tabla 9.17 las interacciones generalizadas se dan entre paréntesis.

TABLA 9.17 Análisis de Variancia del diseño factorial 4^3 tomando r repeticiones, con confusión parcial de las interacciones $A^1B^1C^1$, $A^1B^2C^3$, (B^1C^3, A^1B^2, A^1C^2) en bloques al azar.

F. V.	G.L.
Bloques	16r-1
Efectos principales	
A	3
B	3
C	3
Interacciones de 2 factores (no confundidas)	
A^1B^1	3
A^1B^3	3
A^1C^1	3
A^1C^3	3
B^1C^1	3
B^1C^2	3
Interacciones de 3 factores (no confundidas)	
$A^1B^1C^2$	3
$A^1B^1C^3$	3
$A^1B^2C^1$	3
$A^1B^2C^2$	3
$A^1B^3C^1$	3
$A^1B^3C^2$	3
$A^1B^3C^3$	3
Error	48(r-1)
Total	64r-1

Si se considera solamente una repetición (r=1) usando a la interacción de 3 factores (parte no confundida) como error, los 63 g.l. se distribuyen de la siguiente manera.

Bloques	15
A	3
B	3
C	3
A^1B^1	3
A^1B^3	3
A^1C^1	3
A^1C^3	3
B^1C^1	3
B^1C^2	3
Error	21
Total	63

CAPITULO 10

EXPERIMENTOS FACTORIALES FRACCIONALES

10.1 Introducción.

Cuando el número de factores que se consideran en un experimento factorial aumenta, el número de combinaciones de tratamientos aumenta muy rapidamente. Veremos que es posible investigar los efectos principales de los factores y sus interacciones más importantes en una fracción de una repetición de un experimento factorial completo, en este caso el diseño es llamado Factorial fraccional o de repetición fracionada. De hecho, un diseño factorial fraccional es equivalente a algún(os) bloque(s) en un sistema de confusión.

El uso de repeticiones completas, es un poco limitado porque si se consideran bastantes factores, esto provoca que se incremente el número de unidades experimentales, es por ello que conviene usar repeticiones fraccionadas.

Consideraremos dos enfoques para obtener en forma conveniente las combinaciones de tratamientos que corresponden a un diseño en repetición fracionada como parte de un diseño factorial 2^n. Primero, se empieza con un diseño factorial completo apropiado, con el número de factores que se desea investigar y confundiendo alguna(s) interacción(es) generalmente de alto orden y así llegar a un diseño en el cual todas (o casi todas) las comparaciones que se hacen sean importantes.

Una segunda forma es comenzar con un diseño factorial completo correspondiente a un número de factores pequeño que esten bajo estudio y agregar los factores restantes mediante comparaciones las cuales sea poco probable de ser apreciadas.

Los factoriales fraccionales se usan en los siguientes casos.

1) A priori se consideran negligibles algunas interacciones.
2) En experimentación secuencial, donde se van agregando nuevos tratamientos dependiendo de los resultados anteriores.
3) En procesos de filtrado de factores, es decir, tratar de ver cuales factores son importantes en un proceso y cuales otros son negligibles.
4) Si se tiene un grupo de factores importantes a los cuales se les llama factores mayores y otro grupo de factores de los que se espera tengan poco efecto, a estos se les llama factores menores.

<u>Definición</u>. Una repetición fraccional es simplemente un bloque de los que consta un diseño factorial que se efectúa en bloques al azar.

10.2 <u>Alias y relación de definición.</u>

Para ver como se genera una repetición fraccionada consideremos un caso simple, la del diseño factorial 2^3 (8 u.e). Consideremos como obtenemos $\frac{1}{2}$ repetición (4 u.e), lo cual puede ser explicado mediante un diseño 2^2.

Denotemos los factores por A y B, asignemos signo − al nivel bajo de cada factor y signo + al nivel alto, las cuatro combinaciones de los niveles de los factores constituyen un diseño completo,se resume en la tabla 10.1.

TABLA 10.1 Notación para un diseño 2^2

Combinación de Tratamientos	Nivel del Factor A	Nivel del Factor B	AB
00	−	−	+
01	−	+	−
10	+	−	−
11	+	+	+

los efectos son

$A = \frac{1}{2}\ [-00-01+10+11]$

$B = \frac{1}{2}\ [-00+01-10+11]$

$AB= \frac{1}{2}\ [\ 00-01-10+11]$

Si suponemos que los factores A y B no interactúan,la comparación que representa AB tomará el valor de cero, salvo error experimental. Así, es posible utilizar la comparación de AB para medir el efecto de un tercer factor C (suponiendo que este tercer factor no interactúa con A ni con B) igualando C con AB (ver tabla 10.2) el signo nos da el nivel del factor C. Estos resultados dan el diseño factorial 2^3 en $\frac{1}{2}$ repetición,las combinaciones de tratamientos se dan en la tabla 10.2

TABLA 10.2 Diseño factorial 2^3 en $\frac{1}{2}$ repetición

A	B	C(=AB)	Combinación de Tratamientos
−	−	+	001
−	+	−	010
+	−	−	100
+	+	+	111

En esta situación algunos de los efectos son

$B = \frac{1}{2} \quad (-001+010-100+111)$

$AC = \frac{1}{2} \quad (-001+010-100+111)$

Así, si usamos el signo de igualdad para denotar "esta completamente confundida con" obtenemos que $B = AC$, es decir, la combinación lineal que estima a B, es la misma que estima a AC. Analogamente $A = BC$ y $C = AB$. En general, dos o más efectos o interacciones las cuales son estimadas por la misma función lineal de las observaciones son llamadas alias.

Si además por conveniencia denotamos a la media general μ por I, se cumple que

$$I = ABC$$

A esta relación, se le llama la relación de identidad generadora, relación de definición o contraste de definición del diseño factorial 2^{3-1}. El exponente 3-1 indica 3 factores pero que se usan $2^{-1} = \frac{1}{2}$ de las combinaciones de los tratamientos.

Observemos que los 3 grupos de alias pueden ser obtenidos mediante la relación de definición I=ABC, utilizandola como una identidad algebraica y a I como la unidad al multiplicar por los efectos A,B,C con la regla de que la adición de exponentes es suma módulo 2. Así

$$A = A.I = A^2BC = A^0BC = I.BC = BC$$

amalogamente B=AC y C=AB

Existe otro diseño para el factorial 2^3 en 4u.e., el cuál es obtenido al hacer $C=-AB(I=C^2=-ABC)$. El diseño es similar al de la tabla 10.2 pero invirtiendo el signo de C. Ambos son diseños factoriales en $\frac{1}{2}$ repetición y los dos juntos forman el diseño 2^3 completo. Las combinaciones de tratamientos para los dos diseños son.

TABLA 10.3 Diseños para el factorial 2^3 en $\frac{1}{2}$ repetición.

Diseño I		Diseño II	
I=ABC		I=-ABC	
001		000	
010	$(ABC)_1$	011	$(ABC)_0$
100	Bloque I	101	Bloque II
111		110	

Es interesante observar que los dos diseños corresponden a los dos bloques de una repetición de un diseño factorial 2^3 con confusión total de ABC como se muestra en la misma tabla 10.3

Las cuatro combinaciones del diseño I, pueden ser utilizadas para estimar los tres efectos principales si se sabe que todas las interacciones son cero, o si se supone que son negligibles. En general los factores A, B y C pueden o no interactuar, como solamente hay 3 comparaciones independientes entre 4 u.e., estas se toman para estimar a A, B y C y cualquier interacción que exista entre ellas esta confundida de alguna manera con estos estimadores. En particular, la comparación que representa AB mide el efecto C si AB=0, pero si AB no es cero esta comparación mide C+AB y las otras comparaciones miden A+BC y B+AC respectivamente.

El análisis de esta media repetición de un diseño 2^3 se muestra en la tabla 10.4

TABLA 10.4 Análisis de varianza para un diseño factorial 2^3 en $\frac{1}{2}$ de repetición.

F.V.	G.L.
A+BC	1
B+AC	1
C+AB	1
Total	4

Analogamente las comparaciones que se consideran con las cuatro combinaciones del diseño II miden A-BC, B-AC y C-AB respectivamente.

En si, estas son las reglas que se aplican para generar los diseños factoriales 2^n en repetición fraccionada. Estas reglas con una ligera modificación sirven para generar el diseño factorial 3^n en repetición fraccionada.

10.3 Resoluciones.

Para generar fracciones de $\frac{1}{2^k}$ de un diseño 2^n, el cuál se denota por 2^{n-k} se requieren k efectos como generadores pero de tal manera que ninguno de ellos sea interacción generalizada de algún subconjunto de los efectos restantes además también son generadores, sus interacciones generalizadas y forman parte de la relación de definición. Los grupos de alias se obtienen tomando cada efecto y generando sus interacciones generalizadas con los efectos de la relación de definición. En si hay un total de k efectos generadores independientes los 2^k-k-1 efectos generadores restantes son las interacciones generalizadas.

Definición 1. La resolución de un diseño experimental es el mínimo número de factores (letras) en la "palabra"(que en si es un efecto principal o interacción) más corta en la relación de definición.

Los diseños más usuales son

1. Diseños de resolución III. Son los que satisfacen las siguientes condiciones:
    i) Ningún efecto principal es alias de otro efecto principal pero si puede ser alias de interacciones de 2 ó más factores
    ii) Las interacciones de dos factores son alias de interacciones de dos ó más factores.
    iii) La relación de definición consta de interacciones de 3 ó más factores.

2. Diseños de resolución IV. Son los que satisfacen las siguientes condiciones:

i) Ningún efecto principal es alias de algún otro efecto principal o de interacción de dos factores.

ii) Las interacciones de dos factores son alias de interacción de dos ó más factores.

iii) La relación de definición consta de interacciones de 4 ó más factores.

3. Diseños de resolución V. Son los que satisfacen las siguientes condiciones:

   i) Ningún efecto principal o interacción de dos factores es alias de algún otro efecto principal ni de alguna interacción de dos factores, pero si pueden serlo de interacciones de 3 ó más factores

   ii) Las interacciones de 3 ó más factores son alias de interacciones de 3 ó más factores

   iii) La relación de definición consta de interacciones de 5 ó más factores

10.4 Diseños 2^n de resolución III (Notación 2^{n-q}_{III})

Los casos más usuales son 2^{3-1}_{III}, 2^{7-4}_{III}, 2^{15-11}_{III}.

Los diseños fraccionales donde se estudian $k=N-1$ variables con N u.e se llaman saturados. Los 3 casos de diseños de resolución III antes mencionados son ejemplos de diseños fraccionales saturados, en si los diseños de la forma $2^{p_n-q_n}$ con $p_n=2^n-1$, $q_n=2^n-(n+1)$, $n\geq 2$ (es decir los diseños 2^{3-1}, 2^{7-4}, 2^{15-11}, 2^{31-26} 2^{63-57}, etc) son diseños fraccionales saturados. pues se estudian $k=p_n=2^n-1$ variables, con $N = 2^{p_n-q_n} = 2^{2^n-1-(2^n-n-1)} = 2^n$ u.e.

Si en la relación de definición todos los efectos tienen signo + a la fracción correspondiente se le llama fracción principal. Observece que en fraccionales 2^n la fracción principal siempre contiene a la combinación de tratamientos a su nivel alto, es decir la que consta de 1's.

El factorial fraccional 2^{3-1}_{III} es cualquiera de los dos diseños que se dan en la tabla 10.3, el diseño I es la fracción principal en este caso.

10.41 Factorial fraccional 2^{7-4}_{III}

Una forma de construcción la presentan Box y Hunter [27] la cual se puede generalizar para la construcción de los diseños saturados de resolución III anteriormente indicados, usando signo – para nivel bajo y signo + para nivel alto:

TABLA 10.5 Construcción del factorial fraccional 2^{7-4}_{III}

I = ABD = ACE = BCF = ABCG

A	B	C	D=AB	E=AC	F=BC	G=ABC	Tratamiento
–	–	–	+	+	+	–	0001110
+	–	–	–	–	+	+	1000011
–	+	–	–	+	–	+	0100101
+	+	–	+	–	–	–	1101000
–	–	+	+	–	–	+	0011001
+	–	+	–	+	–	–	1010100
–	+	+	–	–	+	–	0110010
+	+	+	+	+	+	+	1111111

= Subgrupo intrablock + (1111111), $(ABD)_1(ACE)_1(BCF)_1(ABCG)_0$

De la tabla 10.5 puede observarse que los generadores son ABD, ACE, BCF y ABCG, ya que los niveles de D, E, F y G se generan como función de AB, AC, BC y ABC respectivamente.

Al comparar con un diseño 2^7 de confusión total con 4 efectos confundidos en una repetición, podemos considerar que hay 7-4=3 factores independientes (A, B y C) los demás (es decir los efectos que quedarían confundidos, que en el caso del diseño fraccional son los que determinan la relación de definición) los generamos en orden sistemático, es decir consideramos los elementos del bloque $(ABD)_i$, $(ACE)_j$, $(BCF)_k$, $(ABCG)_l$, $i,j,k,l \in \{0,1\}$ y para generar la fracción principal tomamos $i=j=k=1$ y $l=0$ ya que la combinación 1111111 debe de estar en esta fracción. Así el "bloque" $(ABD)_1$ $(ACE)_1$ $(BCF)_1$ $(ABCG)_0$ corresponde a la fracción principal del diseño 2^{7-4}_{111} con relación de definición generada por

$$I = ABD = ACE = BCF = ABCG$$

la relación de definición completa la obtenemos agregando las interacciones generalizadas de los efectos que la generan, así obtenemos

$$I \stackrel{1}{=} ABD=ACE=BCF=ABCG \stackrel{2}{=} BCDE=ACDF=CDG=ABEF=BEG=AFG \stackrel{3}{=} DEF=ADEG=BDFG= \\ = CEFG \stackrel{4}{=} ABCDEFG$$

Los 4 primeros efectos indicados son los que generan la relación de definición (notación $\stackrel{1}{=}$) multiplicandolos de dos en dos (notación $\stackrel{2}{=}$) obtenemos los $\binom{4}{2}=6$ efectos siguientes, multiplicandolos de 3 en 3 (notación $\stackrel{3}{=}$) obtenemos los $\binom{4}{3}=4$ efectos siguientes y finalmente multiplicando las cuatro juntas (notación $\stackrel{4}{=}$) obtenemos la restante.

Esta relación nos indica como es la estructura de los 7 grupos de alias resultantes uno con cada uno de los efectos principales cada uno de ellos con 1 grado de libertad por ejemplo

B = AD=ABCE=CF=ACG=CDE=ABCDF=BCDG=AEF=EG=ABFG=BDEF=ABDEG=DFG= = BCEFG=ACDEFG

Los grados de libertad en el analisis de variancia son de 7 g.l. para los efectos principales e interacciones equivalentes los cuales a su vez son los del total

10.42 Factorial fraccional 2^{15-11}_{III}

Con la idea de confusión dada en la sección 10.41 hay 15-11=4 efectos libres (independientes) A,B,C y D los restantes los podemos obtener en orden sistemático (lexicográfico) de la siguiente manera $(ABE)_{i_1}$ $(ACF)_{i_2}$ $(ADG)_{i_3}$ $(BCH)_{i_4}$ $(BDI)_{i_5}$ $(CDJ)_{i_6}$ $(ABCK)_{i_7}$ $(ABDL)_{i_8}$ $(ACDM)_{i_9}$ $(BCDN)_{i_{10}}$ $(ABCDO)_{i_{11}}$ así la fracción principal es la que contiene las combinaciones de tratamientos dadas por el bloque $(ABE)_1$ $(ACF)_1$ $(ADG)_1$ $(BCH)_1$ $(BDI)_1$ $(CDJ)_1$ $(ABCK)_0$ $(ABDL)_0$ $(ACDM)_0$ $(BCDN)_0$ $(ABCDO)_1$, observece que si el número de efectos considerados es par el índice es 0 y si es impar el índice es 1, las combinaciones de tratamientos de los que consta esta fracción se dan en la tabla 10.6

TABLA 10.6 Fracción principal del factorial fraccional 2^{15-11}_{III} con relación de definición generada por-

$I \stackrel{1}{=}$ ABE=ACF=ADG=BCH=BDI=CDJ=ABCK=ABDL=ACDM=BCDN=ABCDO (+ interacciones generalizadas)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Hay 15 grupos de alias, uno con cada uno de los efectos principales cada uno de ellos con 1 g.l.

10.5 Relación con teoría de grupos.

En la sección 10.41 construimos el factorial fraccional 2^{7-4}_{III}

con relación de definición I=ABD=ACE=BCF=ABCG= (+ interacciones generalizadas) en si, esta repetición fraccional es un elemento del grupo cociente G/H donde G es el grupo 2^7 y H el subgrupo intrabloque $\beta_1 = \{(ABD)_0, (ACE)_0 (BCF)_0 (ABCG)_0\}$ (ver sección 5.36 y sección 7.6) Así la fracción principal de el diseño 2^{7-4}_{III} es el bloque $\beta_{15} = \beta_1(0,0,0,1,1,1,0)$
$=\beta_1(1,1,1,1,1,1,1)$

En notación de Addelman [1] la relación de definición es

$I = (ABD)_1 = (ACE)_1 = (BCF)_1 = (ABCG)_0 =$ (+ interacciones generalizadas)

así $(ABD)_1 = +ABD$, $(ABCG)_0 = +ABCG$ y en general si el número de factores considerados es impar estos tienen índice 1(0) si y solo si les corresponde signo + (−). Si el número de factores considerados es par estos tienen índice 1(0) si y solo si les corresponde signo − (+). Esta relación se resume en la tabla 10.6

TABLA 10.6 Relación entre índices y signos para la construcción del(os) bloque(s) de una repetición fraccionada

Número de Factores	Indice	$\Longleftrightarrow$	Signo
Par	0		+
	1		−
impar	0		−
	1		+

Con esta idea, en si podemos seleccionar cualquiera de los 16 elementos (bloques) de G/H como nuestra repetición fraccional, por ejemplo $\beta_8 = \beta_1(0,0,0,0,1,1,1)$ tiene relación de definición dada por

$$I = (ABD)_0 = (ACE)_1 = (BCF)_1 = (ABCG)_1 = \text{(+ interacciones generalizadas)}$$
$$= -ABD = ACE = BCF = -ABCG = +\text{(interacciones generalizadas)}.$$

10.6 Otros diseños de resolución III.

A partir de los diseños fraccionales saturados de resolución III obtenidos en forma sistemática eliminando uno o más de los últimos factores (de los no libres) y los correspondientes términos en la relación de definición, obtenemos otros diseños de resolución III. Por ejemplo si en un diseño fraccional 2^{7-4}_{III} eliminamos F y G o equivalentemente, no consideramos F y G en la construcción de el diseño fraccional 2^{7-4}_{III}, obtenemos el diseño fraccional 2^{5-2}_{III}, al cual le corresponden las combinaciones de tratamientos dados en la tabla 10.7.

TABLA 10.7 Fracción principal del factorial fraccional 2^{5-2} con relación de definición dada por

$$I \overset{1}{=} ABD = ACE \overset{2}{=} BCDE$$
$$\overset{1}{=} (ABD)_1 = (ACE)_1 \overset{2}{=} (BCDE)_0$$

Tratamiento				
A	B	C	D	E
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Con este procedimiento a partir del diseño factorial fraccional 2_{III}^{7-4} podemos general los diseños factoriales fraccionales 2_{III}^{4-1} 2_{III}^{5-2}, 2_{III}^{6-3}. De manera analoga a partir del diseño factorial fraccional 2_{III}^{15-11} podemos generar los diseños factoriales fraccionales $2_{III}^{(8+k)-(4+k)}$ $k=0,1,2...7$. En general con el diseño factorial fraccional saturado $2_{III}^{P_n-q_n}$ con $P_n = 2^n-1$, $q_n = 2^n-(n+1)$ podemos generar los diseños $2_{III}^{(P_n-k)-(q_n-k)}$ $k=0,1,2...2^{n-1}$

10.7 Diseños de resolución IV

Los casos más interesantes son 2_{IV}^{4-1} 2_{IV}^{8-4} 2_{IV}^{16-11} 2_{IV}^{32-26}, en general $2_{IV}^{P_n-q_n}$ donde $P_n=2^n$ y $q_n=2^n-(n+1)$ $n\geq 2$ porque corresponde a los diseños de resolución IV en donde se estudia un número máximo de factores con un número mínimo de u.e. A este tipo de diseño le llamaremos diseño saturado de resolución IV.

La forma de generar estas fracciones se simplifica si se consideran las primeras n variables libres, es decir generar un 2^n con ellas e introducir las siguientes variables como combinación de un número impar mayor o igual a tres de las variables libres en orden lexicográfico. Nótese que el proceso de construcción es en si una generalización del proceso de Box y Hunter [27,28] combinado con el de Addelman [1]

Consideremos los siguientes dos ejemplos

10.71 Diseño factorial fraccional 2_{IV}^{4-1}

Las variables libres son A, B, C. La variable D se introduce en la relación de definición como

$$I = (ABCD)_0 = + ABCD$$

Las combinaciones de tratamientos que corresponden a esta repetición fraccional se dan en la tabla 10.8.

TABLA 10.8 Fracción principal del factorial fraccional 2^{4-1}_{IV} con relación de definición $I=ABCD=(ABCD)_0$

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

La partición de los grados de libertad es de 4 g.l. en total, uno para cada efecto principal y sus alias.

10.72 Diseño factorial fraccional 2^{8-4}_{IV}

Hay 8-4=4 variables libres A,B,C,D. Los 4 factores restantes los introduciremos como combinación de tres de las cuatro variables libres, así E=ABC, F=ABD, G=ACD y H=BCD, con ello la relación de definición en la fracción principal es

$$I=(ABCE)_0=(ABDF)_0=(ACDG)_0=(BCDH)_0=(+\text{ interacciones generalizadas})$$

Las combinaciones de tratamientos que corresponden a esta fracción principal se dan en la tabla 10.9

TABLA 10.9 Fracción principal del factorial fraccional 2^{8-4}_{IV} con relación de definición dada por

$I \overset{1}{=} ABCE = ABDF = ACDG = BCDH \overset{2}{=} CDEF = BDEG = ADEH = BCFG = ACFH = ABGH \overset{3}{=} AEFG = BEFH = CEGH = DFGH \overset{4}{=} ABCDEFGH$

A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Observvece que las combinaciones de tratamiento de este diseño corresponden a las del bloque

$(ABCE)_0$
$(ABDF)_0$
$(ACDG)_0$
$(BCDH)_0$

10.8 Otros diseños factoriales fraccionales de resolución IV

Para generar el diseño 2^{16-11}_{IV} considerese 16-11=5 variables libres (independientes) A,B,C,D y E, con ellas se genera un 2^5. Los 11 factores restantes los introduciremos de la siguiente manera, a los 10 primeros como combinación de 3 de las 5 variables libres y al restante como combinación de las 5 variables libres es conveniente hacerlo en orden lexicográfico, de la siguiente manera.

F=ABC, G=ABD, H=ABE, I=ACD, J=ACE, K=ADE, L=BCD, M=BCE, N=BDE, O=CDE y P=ABCDE

La relación de definición de la fracción principal es

I=ABCF=ABDG=ABEH=ACDI=ACEJ=ADEK=BCDL=BCEM=BDEN=CDEO=ABCDEP= (+interacciones generalizadas)

Este diseño tiene 32 observaciones que son las del bloque generado por

$\{(ABCF)_0 \ (ABDG)_0 \ (ABEH)_0 \ (ACDI)_0 \ (ACEJ)_0 \ (ADEK)_0 \ (BCDL)_0 \ (BCEM)_0 \ (BDEN)_0 \ (CDEO)_0 \ (ABCDEP)_0\}$

Se pueden tener 32 combinaciones lineales que permiten estimar, si se consideran inexistentes las interacciones de 3 factores o más, los 16 efectos principales, 15 grupos de interacciones de 2 factores en forma de alias y la media general cada una con 1 g.l.

Este procedimiento sirve para generar cualquier otro diseño saturado con resolución IV y nuevamente a partir de ellos eliminando alguno(s) de los efectos no libres y los correspondientes términos en la relación de definición obtenemos otros diseños de resolución IV. Por ejemplo si en el diseño fraccional 2^{8-4}_{IV} eliminamos G y H obtenemos el diseño fraccional 2^{6-2}_{IV}, al cual le corresponden las combinaciones de tratamientos dados en la tabla 10.10

TABLA 10.10 Fracción principal del factorial fraccional 2^{6-2}_{IV} con relación de definición dada por

$I \stackrel{1}{=} ABCE = ABDF \stackrel{2}{=} CDEF$

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

En si es el bloque
$(ABCE)_o$
$(ABDF)_o$

Para efectuar el análisis de variancia si se consideran inexistentes las interacciones de 3 o más factores hay 32 combinaciones lineales cada una con 1 g.l. así la partición de los g.l. queda de la siguiente manera

Análisis de Variancia

F.V.	G.L.
Efectos principales	6
Interacciones de dos factores (en forma de alias)	7
Error	2
Total	15

Los 7 g.l. para las interacciones de 2 factores son los de los efectos

AB = CE = DF
AC = BE
AD = BF
AE = BC
AF = BD
CD = EF
CF = DE

10.9 Diseños de resolución V

Su relación de definición consta de interacciones de 5 ó más factores, permite estudiar efectos principales e interacciones de dos factores, si se considera que las interacciones de 3 ó más factores son negligibles. Estos diseños requieren más unidades experimentales que los diseños de resolución III ó IV por ello conviene confundir con bloques algunas de las interacciones de 3 factores.

La tabla 10.11 describe los casos de diseños de resolución 5 que se analizarán.

TABLA 10.11 Diseños de Resolución V más comunes

Número de Factores	Número de u.c.	Tipo de Fracción	Tipo de Diseño	Generadores	Tipo de Bloques	Generadores de efectos confundidos con Bloques
5	16	$\frac{1}{2}$	2_V^{5-1}	ABCDE		
6	32	$\frac{1}{2}$	2_V^{6-1}	ABCDEF	Dos bloques de 16 u.c	ABC
7	64	$\frac{1}{2}$	2_V^{7-1}	ABCDEFG	8 bloques de 8 g.1.	ACEG ABEF ABCD
8	64	$\frac{1}{4}$	2_V^{8-2}	ABCDG ABEFH	4 bloques de 16 u.c.	ACE CDH
9	128	$\frac{1}{4}$	2_V^{9-2}	ACDFGH BCEFGI	8 bloques de 16 u.c	ACH ABI GHI
10	128	$\frac{1}{8}$	2_V^{10-3}	ABCGH BCDEI ACDEJ	8 bloques de 16 u.c.	ADI ABJ HIJ
11	128	$\frac{1}{16}$	2_V^{11-4}	ABCGH BCDEI ACDEJ ABCDEFGK	8 bloques de 16 u.c	ADI ABJ HIJ

10.91 Factorial fraccional 2_V^{5-1} con relación de definición I=ABCDE

En si es el bloque (ABCDE)₁

A	B	C	D	E
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Construcción del bloque

1) Construya un 2^4 sobre ABCD
2) Agregue E de tal manera que sea un elemento de (ABCDE)₁

Algunos grupos de Alias

A = BCDE, B=ACDE, AB=CDE, ABC=DE, etc.

La descomposición de los grados de libertad se da en el análisis de variancia.

F.V.	G.L
Efectos principales	5
Interacciones de 2 factores	10
Total	15

10.92 Construcción del factorial fraccional 2_{V}^{6-1} con relación de definición I=ABCDEF en dos bloques de 16 u.e. con confusión de ABC=DEF,

$(ABC)_0$ (Bloque I)												
A	B	C	D	E	F=ABCDE	TRATAMIENTO						
						A	B	C	D	E	F
−	−	−	−	−	−	0	0	0	0	0	0
−	−	−	−	+	+	0	0	0	0	1	1
−	−	−	+	−	+	0	0	0	1	0	1
−	−	−	+	+	−	0	0	0	1	1	0
−	+	+	−	−	−	0	1	1	0	0	0
−	+	+	−	+	+	0	1	1	0	1	1
−	+	+	+	−	+	0	1	1	1	0	1
−	+	+	+	+	−	0	1	1	1	1	0
+	−	+	−	−	−	1	0	1	0	0	0
+	−	+	−	+	+	1	0	1	0	1	1
+	−	+	+	−	+	1	0	1	1	0	1
+	−	+	+	+	−	1	0	1	1	1	0
+	+	−	−	−	−	1	1	0	0	0	0
+	+	−	−	+	+	1	1	0	0	1	1
+	+	−	+	−	+	1	1	0	1	0	1
+	+	−	+	+	−	1	1	0	1	1	0

$(ABC)_1$ (Bloque II)												
A	B	C	D	E	F=ABCDE	TRATAMIENTO						
						A	B	C	D	E	F
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Construcción del bloque I

1) Construya un 2^4 con ABEF
2) Agrege C de tal manera que resulte en $(ABC)_0$
3) Agrege F de tal manera que resulte en $(ABCDEF)_0$

Para construir el bloque II se le suma 1 mod 2 a C [y 1 mod 2 a F].

Algunos grupos de Alias
A=BCDEF; B=ACDEF; C=ABDEF; AB=CDEF; ABD=CEF, etc.

Análisis de Variancia

F.V.	G.L.
Efectos principales	6
Interacciones de 2 factores	$15=\binom{6}{2}$
Bloques (efecto ABC)	1
Error (interacciones de 3 ó más factores no conf.)	9
Total	31

10.93 Construcción de la fracción principal del diseño.

Factorial fraccional 2_V^{7-1} con relación de definición I=ABCDEFG en 8 bloques de 8 u.e. con confusión de ACEG=BDF, ABEF=CDG, ABCD=EFG, BCFG=ADE, BDEG=ACF, CDEF=ABG, ADFG=BCE

Bloque I

$(ACEG)_0$ $(ABEF)_0$ $(ABCD)_0$

A	B	C	D	E	F	G=ABCDEF	A	B	C	D	E	F	G
−	−	−	−	+	+	+	0	0	0	0	1	1	1
−	−	+	+	−	−	+	0	0	1	1	0	0	1
−	+	−	+	−	+	−	0	1	0	1	0	1	0
−	+	+	−	+	−	−	0	1	1	0	1	0	0
+	−	−	+	+	−	−	1	0	0	1	1	0	0
+	−	+	−	−	+	−	1	0	1	0	0	1	0
+	+	−	−	−	−	+	1	1	0	0	0	0	1
+	+	+	+	+	+	+	1	1	1	1	1	1	1

Bloque II

Sumando $(ACEG)_0$

1 a A $(ABEF)_1$

(También a G) $(ABCD)_1$

A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0

Bloque III

+1 a B $(ACEG)_1$

+1 a G $(ABEF)_1$

$(ABCD)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0

Bloque IV

+1 a C $(ACEG)_0$

+1 a G $(ABEF)_0$

$(ABCD)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0

Bloque V
+1 a D $(ACEG)_1$
+1 a G $(ABEF)_0$
$(ABCD)_1$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0

Bloque VI
+1 a E $(ACEG)_0$
+1 a G $(ABEF)_1$
$(ABCD)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0

Bloque VII
+1 a F $(ACEG)_1$
+1 a G $(ABEF)_1$
$(ABCD)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Bloque VIII
+1 a C $(ACEG)_1$
+1 a D $(ABEF)_0$
$(ABCD)_0$

A	B	C	D	E	F	G
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Construcción del bloque I

1) 2^3 sobre ABC
2) Agregue D de tal manera que resulte en $(ABCD)_0$
3) Agregue E de tal manera que resulte en $(BCE)_1$ *
4) Agregue F de tal manera que resulte en $(ACF)_1$ *
5) Agregue G de tal manera que resulte en $(ABG)_1$ *
   A manera de comprobación observece que las combinaciones de tratamientos resultantes cumplen estar en $(ACEG)_0$ y en $(ABEF)_0$

Sumando 1 mod 2 a uno o mas efectos como se indica, se construyen los otros 7 bloques.

Algunos grupos de alias son

A = BCDEF   AB = CDEF   ACD = BEF
ADEF = BC   ACDEF = B

Con este diseño que tiene 64 observaciones se tienen 64 combinaciones lineales, si se consideran inexistentes las interacciones de 3 ó más factores la partición de los g.l. , queda de la siguiente forma.

F.V.	G.L.
Efectos principales	7
Interacciones de 2 factores	21
Bloques	7
Error	28
Total	63

* Los efectos BCE, ACF y ABG estan confundidos con bloques, y como se esta construyendo la fracción principal deben tener índice 1.

10.94. Construcción de la fracción principal del diseño factorial fraccional 2_V^{8-2} con relación de definición

I = ABCDG =ABEFH=CDEFGH en 4 bloques de 16 u.e. con confusión de ACE=BDEG=BCFH=ADFGH; CDH=ABGH=ABCDEF=EFG y de ADEH=BCEHG=BDF=ACFG

								Bloque I (ACE)$_0$ (CDH)$_0$ TRATAMIENTO	Bloque II +1 a E (ACE)$_1$ +1 a F (CDH)$_0$
A	B	C	D	E	F=ABEH	G=ABCD	H	A B C D E F G H	A B C D E F G H
−	−	−	−	−	+	+	−	0 0 0 0 0 1 1 0	0 0 0 0 1 0 1 0
−	−	−	+	−	−	−	+	0 0 0 1 0 0 0 1	0 0 0 1 1 1 0 1
−	−	+	−	+	+	−	+	0 0 1 0 1 1 0 1	0 0 1 0 0 0 0 1
−	−	+	+	+	−	+	−	0 0 1 1 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 1 0
−	+	−	−	−	−	−	−	0 1 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 1 1 0 0
−	+	−	+	−	+	+	+	0 1 0 1 0 1 1 1	0 1 0 1 1 0 1 1
−	+	+	−	+	−	+	+	0 1 1 0 1 0 1 1	0 1 1 0 0 1 1 1
−	+	+	+	+	+	−	−	0 1 1 1 1 1 0 0	0 1 1 1 0 0 0 0
+	−	−	−	+	+	−	−	1 0 0 0 1 1 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0
+	−	−	+	+	−	+	+	1 0 0 1 1 0 1 1	1 0 0 1 0 1 1 1
+	−	+	−	−	+	+	+	1 0 1 0 0 1 1 1	1 0 1 0 1 0 1 1
+	−	+	+	−	−	−	−	1 0 1 1 0 0 0 0	1 0 1 1 1 1 0 0
+	+	−	−	+	−	+	−	1 1 0 0 1 0 1 0	1 1 0 0 0 1 1 0
+	+	−	+	+	+	−	+	1 1 0 1 1 1 0 1	1 1 0 1 0 0 0 1
+	+	+	−	−	−	−	+	1 1 1 0 0 0 0 1	1 1 1 0 1 1 0 1
+	+	+	+	−	+	+	−	1 1 1 1 0 1 1 0	1 1 1 1 1 0 1 0

Bloque III

+1 a H $(ACE)_0$

+1 a F $(CDH)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Bloque IV

+1 a C $(ACE)_1$

+1 a G $(CDH)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0

Construcción del Bloque I

1) Construya un 2^4 sobre ABCD
2) Agregue E de tal manera que resulte en $(ACE)_0$
3) Agregue H de tal manera que resulte en $(CDH)_0$
4) Agregue F de tal manera que F = ABEH
5) Agregue G de tal manera que G = ABCD

Algunos grupos de alias son

A = BCDG=BEFH=ACDEFGH ; AB = CDG=EFH=ABCDEFGH

CDF = ABFG=ABCDEH=ECH, etc.

Si se considera que las interacciones de 3 ó más factores son negligibles la partición de los g.l. queda de la siguiente manera

F.V.	G.L.
Efectos principales	8
Interacciones de 2 factores	28
Bloques	3
Error	25
Total	64

10.9.5 Construcción de la fracción principal de diseño factorial fraccional 2_V^{9-2} con relación de definición I $\doteq$ ACDFGH= BCEFGI$\doteq$ABDEHI en 8 bloques de 16 u.e. con confusión de

ACH = DFG = ABEFGHI = BCDEI
ABI = BCDFGHI = ACEFG = DEH
GHI = ACDFI = BCEFH = ABDEG
BCHI = ABDFGI = EFGH = DEH
ACGI = DFHI = ABEF = ABDEG
ABGH = BCDF = ACEFHI = ACDEGHI
BCG = ABDFH = EFI = ACDEGHI

Bloque I $(ACH)_0$, $(ABI)_0$ $(GHI)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	Tratamiento A	B	C	D	E	F	G	H	I
−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−	−	−	+	+	+	−	−	−	0	0	0	1	1	1	0	0	0
−	−	+	−	+	+	+	+	−	0	0	1	0	1	1	1	1	0
−	−	+	+	−	−	+	+	−	0	0	1	1	0	0	1	1	0
−	+	−	−	−	+	+	−	+	0	1	0	0	0	1	1	0	1
−	+	−	+	+	−	+	−	+	0	1	0	1	1	0	1	0	1
−	+	+	−	+	−	−	+	+	0	1	1	0	1	0	0	1	1
−	+	+	+	−	+	−	+	+	0	1	1	1	0	1	0	1	1
+	−	−	−	+	−	−	+	+	1	0	0	0	1	0	0	1	1
+	−	−	+	−	+	−	+	+	1	0	0	1	0	1	0	1	1
+	−	+	−	−	+	+	−	+	1	0	1	0	0	1	1	0	1
+	−	+	+	+	−	+	−	+	1	0	1	1	1	0	1	0	1
+	+	−	−	+	+	+	+	−	1	1	0	0	1	1	1	1	0
+	+	−	+	−	−	+	+	−	1	1	0	1	0	0	1	1	0
+	+	+	−	−	−	−	−	−	1	1	1	0	0	0	0	0	0
+	+	+	+	+	+	−	−	−	1	1	1	1	1	1	0	0	0

+1 a I, G, F y a E

Bloque II $(ACH)_0(ABI)_1(GHI)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

+1 a H y a G y a E

Bloque III $(ACH)_1(ABI)_0(GHI)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0

1 a G y a F

Bloque IV $(ACH)_0(ABI)_0(GHI)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0

$(ACH)_1\,(ABI)_1\,(GHI)_0$

Bloque V

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1

$(ACH)_1\,(ABI)_1\,(GHI)_1$

Bloque VI

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

a Bloque II 1 a G (a F)

$(ACH)_0\,(ABI)_1\,(GHI)_1$

Bloque VII

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	0	1

a Bloque III 1 a G (F)

$(ACH)_1\,(ABI)_0\,(GHI)_1$

Bloque VIII

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0

Construcción del bloque I

1) Un 2^4 sobre ABCD
2) Agregue I de tal manera que resulte en $(ABI)_0$
3) Agregue H de tal manera que resulte en $(ACH)_0$
4) Agregue G de tal manera que resulte en $(GHI)_0$
5) Agregue F de tal manera que F = ACDGH
6) Agregue E de tal manera que E = BCEFGI

Algunos grupos de alias son

A = CDFGH = ABCEFGI = BDEHI
ACD = FGH = ABDEFGI = BCEHI
ABDE = BCEFGH = ACDFGI = HI

Si se considera que las interacciones de 3 o más factores son negligibles la partición de los g.l. queda de la siguiente manera

F.V.	G.L.
Efectos principales	9
Interacciones de 2 factores	32
Bloques	7
Error	79
Total	127

<u>10.96 Construcción de la fracción principal del diseño factorial fraccional 2_V^{10-3} con relación de definición $I \overset{1}{=} ABCGH=BCDEI=ACDFJ \overset{2}{=} ADEGHI=BDFGHJ=ABEFIJ \overset{3}{=} CEFGH$ con 8 bloques de 16 u.e. con confusión de los efectos ADI, ABJ, HIJ; BDIJ, ADHJ, ABHI; BDH y sus alias</u>

Construcción del bloque $(ADI)_o$, $(ABJ)_o$ $(HIJ)_o$

1) Construya un 2^4 sobre ABCD
2) Agrege I de tal manera que resulte en $(ADI)_o$
3) Agrege J de tal manera que resulte en $(ABJ)_o$
4) Agrege H de tal manera que resulte en $(HIJ)_o$
5) Agrege G de tal manera que cumpla G=ABCH
6) Agrege E de tal manera que cumpla E=BCDI
7) Agrege F de tal manera que cumpla F=ACDJ

Bloque I $(ADI)_o$, $(ABJ)_o$, $(HIJ)_o$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
−	−	−	−	+	+	+	−	−	−
−	−	−	+	+	−	−	+	+	−
−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
−	−	+	+	−	+	+	+	+	−
−	+	−	−	−	−	+	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	−	+	+
−	+	+	−	+	+	−	+	−	+
−	+	+	+	+	−	+	−	+	+
+	−	−	−	−	+	−	−	+	+
+	−	−	+	−	−	+	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−	+	+
+	−	+	+	+	+	−	+	−	+
+	+	−	−	+	−	−	+	+	−
+	+	−	+	+	+	+	−	−	−
+	+	+	−	−	+	+	+	+	−
+	+	+	+	−	−	−	−	−	−

Tratamiento

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Bloque II

+1 a J (ADI)$_0$(ABJ)$_1$(HIJ)$_1$

+1 a F

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0	0	1

Bloque III

+1 a E

(ADI)$_1$(ABJ)$_0$(HIJ)$_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0

+1 a H Bloque IV

+1 a G

(ADI)$_0$(ABJ)$_0$(HIJ)$_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0

+1 a D

+1 a E Bloque V

+1 a F

(ADI)$_1$ (ABJ)$_0$ (HIJ)$_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0

+1 a G <u>Bloque VI</u>

$(ADI)_0 (ABJ)_1 (HIJ)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0

+1 a G <u>Bloque VII</u>

+1 a F

$(ADI)_1 (ABJ)_1 (HIJ)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0

+1 a A

+1 a H <u>Bloque VIII</u>

+1 a F

$(ADI)_1 (ABJ)_1 (HIJ)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0

Algunos grupos de alias son

A = BCGH=ABCDEI=CDFJ=DEGHI=ABDFGHJ=ACEFGH

ADE = BCDEGH=ABCI=CEFJ=GHI=ABEFGHJ=BDFIJ=ACDFGH

Si se consideran inexistentes las interacciones de 3 ó mas factores la partición de los g.l. queda de la siguiente forma

F.V.	G.L.
Efectos principales	10
Interacciones 2 factores	45
Bloques	7
Error	66
Total	128

10.97 Construcción de la fracción principal del diseño factorial fraccional 2_V^{11-4} con relación de definición $I\overset{1}{=}$ABCGH=BCDEI=ACDFJ=ABCDEFGK$\overset{2}{=}$ADEGHI=BDFGHJ=DEFHK=ABEFIJ=AFGIK=BEGJK$\overset{3}{=}$CEFGHIJ=BCFHIK=ACEHJK=CDGIJK$\overset{4}{=}$ABDHIJK en 8 bloques de 16 u.e. con confusión de los efectos ADI, ABJ, HIJ; BDIJ, ADHJ, ABHI; BDH y de sus alias.

Construcción del bloque $(ADI)_0$, $(ABJ)_0$, $(HIJ)_0$

1) Construya un 2^4 sobre ABCD
2) Agrege I de tal manera que resulte en $(ADI)_0$
3) Agrege J de tal manera que resulte en $(ABJ)_0$
4) Agrege H de tal manera que resulte en $(HIJ)_0$
5) Agrege G de tal manera que se cumpla G=ABCH
6) Agrege E de tal manera que se cumpla E=BCDI
7) Agrege F de tal manera que se cumpla F=ACDJ
8) Agrege K de tal manera que se cumpla K=ABCDEFG

Bloque I $(ADI)_0\ (ABJ)_0\ (HIJ)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K		Tratamiento A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+		0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−		0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	+		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
−	−	+	+	−	+	+	+	+	−	−		0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
−	+	−	−	−	−	+	+	−	+	−		0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
−	+	−	+	−	+	−	−	+	+	+		0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
−	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−		0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
−	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+		0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
+	−	−	−	−	+	−	−	+	+	−		1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
+	−	−	+	−	−	+	+	−	+	+		1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−		1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
+	−	+	+	+	+	−	+	−	+	+		1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	+		1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
+	+	−	+	+	+	+	−	−	−	−		1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
+	+	+	−	−	+	+	+	+	−	+		1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−		1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

+1 a J y a F $(ADI)_0(ABJ)_1(HIJ)_1$

Bloque II

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1

+1 a I **Bloque III**

+1 a E

$(ADI)_1\ (ABJ)_0\ (HIJ)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	[illegible]
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	[illegible]
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	[illegible]

+1 a H **Bloque IV**

+1 a G

$(ADI)_0(ABJ)_0(HIJ)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0

Bloque V

+1 a A, D, F y G

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1

+1 a B, E, G y K **Bloque VI**

$(ADI)_1(ABJ)_0(HIJ)_1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1

+1 a A, F, G y K **Bloque VII**

$(ADI)_1(ABJ)_1(HIJ)_0$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1

+1 a A, F, H y K <u>Bloque VIII</u>
(ADI)₁(ABJ)₁(HIJ)₁

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1

Si se considera que las interacciones de 3 ó más factores son negligibles la partición de los grados de libertad queda de la siguiente manera

F.V.	G.L.
Efectos principales	11
Interacciones de 2 factores	55
Bloques	7
Error	54
Total	127

10.10 Experimentos factoriales 3^n en repetición fraccionada

Los experimentos factoriales en repetición fraccionada de mayor utilidad práctica son los que tienen factores a dos niveles. Sin embargo hay otros casos de utilidad, consideremos el caso del diseño de factores con 3 niveles.

10.11 El diseño factorial fraccional 3^{n-p}

Ilustremos el problema de su construcción con 1/3 de repetición de un diseño factorial 3^3. Notación 3^{3-1} . Para obtener 1/3 de repetición es conveniente tomar alguna componente de ABC como contraste de definición.

Sea $I=(A^1B^2C^2)_0$ nuestro contraste de definición. Cualquier conjunto de 2 g.l. X, esta completamente confundido con $(A^1B^2C^2)X^\lambda$ $\lambda=1,2$, en otras palabras este contraste de definición genera que los alias $\therefore$ los efectos que quedan confundidos sean

$$
\begin{aligned}
A &= A^1B^1C^1 = B^1C^1 \\
B &= A^1C^2 \quad\;\; = A^1B^1C^2 \\
C &= A^1B^2 \quad\;\; = A^1B^2C^1 \\
A^1B^1 &= A^1C^1 \quad\;\; = B^1C^2
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Las combinaciones de tratamientos que corresponden a este repetición fraccionada se dan en la tabla 10.11

TABLA 10.11 Diseño factorial fraccional 3^{3-1}, contraste de definición $I=(A^1B^2C^2)_0$

Bloque I $(A^1B^2C^2)_0$
A B C
0 0 0
0 1 2
0 2 1
1 0 1
1 1 0
1 2 2
2 0 2
2 1 1
2 2 0

De esta manera los 8 g.l. son repartidos en 4 conjuntos cada uno con 2 g.l. Cada linea de (1) corresponde a un conjunto con dos g.l. Obviamente este diseño no tiene un valor práctico a menos que las interacciones de 2 ó más factores sean negligibles.

La situación es similar si se considera 1/3 de repetición de un experimento 3^4 ∴ un 3^{4-1}.

En general para generar el diseño 3^{n-1} se define la relación de definición

$$I = (A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\ldots\ldots)_0$$

y el diseño tiene las siguientes propiedades

1. Las combinaciones de tratamientos $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ que forman la repetición fraccionada cumplen con la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i = 0 \bmod 3$$

2. Cualquier conjunto de 2 g.l. X, esta completamente confundida con $(A^{\beta_1} B^{\beta_2} \ldots) X^{\lambda} \quad \lambda = 1, 2$

Para cualquier selección particular de $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ hay p=3 diferentes repeticiones factorionadas 3^{n-1} determinadas por

$$\sum \beta_i X_i = k \bmod 3 \qquad k=0,1,2$$

que en si para fines prácticos son equivalentes.

10.12 Construccioñ del diseño factorial fraccional 3^{5-1} con relación de definición $I=A^1B^1C^1D^1E^1=(A^1B^1C^1D^1C^1)_0$ en 3 bloques de 27 u.e con confusión de $A^1B^1C^2=A^1B^1D^2E^2=C^1D^2E^2$

Para especificar el conjunto de combinaciones de tratamientos que constituyen esta repetición fraccionada, utilicemos el hecho de que el bloque que contiene el control sobre todos sus miembros, es el subgrupo intrabloque cualquier otro bloque puede obtenerse por multiplicación de el subgrupo intrabloque por cualquier combinación de tratamientos que ocurra en el experimento. El subgrupo intrabloque consiste de las combinaciones de tratamientos que satisfacen las ecuaciones

$$X_1+X_2+X_2+X_4+X_5 = 0 \bmod 3$$
$$X_1+X_2+2X_3 = 0 \bmod 3$$

Estas combinaciones de tratamientos forman un grupo pues si $(y_1,y_2,\ldots y_5)$ y $(Z_1,\ldots Z_5)$ satisfacen la ecuación, entonces $(y_1+\lambda Z_1,\ldots,Y_5+\lambda Z_5)$ donde $\lambda \in Z_3$ también las satisface, el control (0,0,0,0,0) sirve como elemento unidad, las operaciones son en el campo Z_3

Las combinaciones de tratamientos que satisfacen las ecuaciones anteriormente dadas se dan en la tabla 10.12

TABLA 10.12

Subgrupo intrabloque

Bloque I

$(A^1B^1C^1D^1E^1)_0$

$(A^1B^1C^2)_0$

A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	0	0	1	2
0	0	0	2	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	2	2
0	2	2	0	2
0	2	2	1	1
0	2	2	2	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	2	2
1	1	2	0	2
1	1	2	1	1
1	1	2	2	0
1	2	0	0	0
1	2	0	1	2
1	2	0	2	1
2	0	2	0	2
2	0	2	1	1
2	0	2	2	0
2	1	0	0	0
2	1	0	1	2
2	1	0	2	1
2	2	1	0	1
2	2	1	1	0
2	2	1	2	2

Bloque II

$(A^1B^1C^1D^1E^1)_0$

$(A^1B^1C^2)_1$

Multiplique el subgrupo intrabloque por (0,1,0,2,0)

[ejemplo (1,0,1,2,2)(0,1,0,2,0) = = (1+0,0+1,1+0,2+2,2+0) = (1,1,1,1,2)]

Bloque III

$(A^1B^1C^1D^1E^1)_0$

$(A^1B^1C^2)_2$

Multiplique el subgrupo intrabloque por (0,2,0,1,0)

[ejemplo (2,0,2,1,1)(0,2,0,1,0) = = (2,2,2,2,1)]

Observece que los elementos (0,0,0,0,0), (0,1,0,2,0) y (0,2,0,1,0) forman un grupo. El "producto" de este grupo con el subgrupo intrabloque nos da las combinaciones de tratamentos que constityen el diseño factorial fraccionado.

Desde el punto de vista de teoría de Grupos tenemos las siguientes observaciones

1) El conjunto de combinaciones de tratamientos de un diseño 3^5 forman un grupo G, bajo la operación de elementos que es la suma de componentes respectivas modulo 3.

2) El subgrupo intrabloque $H=\{(A^1B^1C^1D^1E^1)_0\ (A^1B^1C^2)_0\}$ formado por las combinaciones de tratamientos que se dan en la tabla 10.12 es en si un subgrupo normal de el grupo G.

3) El grupo cociente G/H tiene 9 elementos que en si son los 9 bloques de los que constaría el diseño 3^5 con confusión de $A^1B^1C^1D^1E^1$ y $A^1B^1C^2$ y sus interacciones generalizadas.

4) Cualquier diseño factorial fraccional es en si, isomorfo a un subgrupo del grupo cociente G/H

Regresemos a nuestro problema original.

Algunos grupos de alias son

$A = A^1B^2C^2D^2E^2$ $\qquad B = A^1B^2C^1D^1E^1$

$A^1B^2 = A^2C^2D^2E^2$ $\qquad A^1B^1C^2 = A^1B^1D^2E^2$

Si las interacciones de 3 ó más factores son despreciables la partición de los grados de libertad queda de la siguiente manera

F.V.	G.L.
Efectos principales	10
Interacciones de 2 factores	40
Bloques	2
Error	28
Total	80

10.13 Construcción del diseño factorial fraccional 3^{5-1} con relación de definición $I=A^1B^1C^1D^1E^1 = (A^1B^1C^1D^1E^1)_0$ en 9 bloques de 9 u.e. con confusión de $A^1B^1C^2 = A^1B^1D^2E^2 = C^1D^2E^2$ y de $A^1B^2D^1 = A^1C^2D^1E^2 = B^1C^2E^2$

El subgrupo intrabloque consiste de las combinaciones de tratamientos que satisfacen las ecuaciones.

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 = 0 \text{ mod } 3$$
$$X_1+X_2+2X_3 = 0 \text{ mod } 3$$
$$X_1+2X_2 \quad +X_4 = 0 \text{ mod } 3$$

Nuevamente estas combinaciones de tratamientos forman un grupo. Las combinaciones de tratamientos que satisfacen las ecuaciones dadas anteriormente estan dadas en la tabla 10.15.

TABLA 10.13

Subgrupo intrabloque
Bloque I
$(A^1B^1C^1D^1E^1)_o$
$(A^1B^1C^2)_o$
$(A^1B^2D^1)_o$

A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	2	2	2	0
1	0	1	2	2
1	1	2	0	2
1	2	0	1	2
2	0	2	1	1
2	1	0	2	1
2	2	1	0	1

Los otros 8 block se obetienen al multiplicar el subgrupo intrabloque por (0,0,2,0,1) (0,0,1,0,2) (0,0,0,2,1) (0,0,0,1,2) (0,0,2,2,2) (0,0,2,1,0) (0,0,1,2,0) (0,0,1,1,1) observece que si a estos 8 elementos le agregamos el (0,0,0,0,0) los 9 elementos restantes forman grupo.

Si las interacciones de 3 ó más factores son despreciables la partición de los grados de libertad queda de la siguiente forma

F.V.	G.L.
Efectos principales	10
Interacciones de 2 factores	40
Bloques	8
Error	22
Total	80

APENDICE

I.- Reglas para obtener grados de libertad y sumas de cuadrados para un modelo con factores fijos.

Estas reglas son válidas para el caso balanceado y completo. Con el objeto de ilustrarlas consideremos el modelo
$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$
donde i=1,2,...a, j=1,2,...b, k=1,2,...c.

Reglas (citadas por Méndez [13] pag. 10, 1978)

A) Para grados de libertad

R.1. Para cada término en el modelo habrá una hilera en la tabla de Análisis de Varianza (cuatro términos, cuatro hileras).

R.2. Para cada término en el modelo (hilera en la tabla A de V.) se determina su producto simbólico, que es el índice indicado en el término menos un uno (si este está solo) o el producto de los índices en el término; pero si un índice está fuera de paréntesis*, se le resta un uno. Para los términos del modelo, estos son i-1, j-1, (i-1)(j-1) (k-1)i·j respectivamente.

R.3. Para obtener los grados de libertad de un efecto o hilera en el A de V. substituyanse los índices en su producto simbólico por el número de niveles que tiene cada

*El paréntesis se usa para denotar que un factor es jerárquico o anidado en algun(os) otro(s). En este caso las observaciones están anidadas en cada celda ij, Así por ejemplo k=1 en celda 2,1 no tiene relación con k=1 en celda 1,3.

índice. Así, los g.l. correspondientes a los términos señadados son a-1, b-1, (a-1)(b-1) y (c-1)a·b

B) Para sumas de cuadrados

R.4. Para obtener sumas de cuadrados obténganse los productos simbólicos desarrollados, es decir, multiplíquense los índices, de manera que desaparezcan los paréntesis. El resultado es una suma o resta de grupos de índices. Para cada grupo de índices tómese el signo, fórmese los totales que quedan indexados por ese grupo de índices, elevese al cuadrado dichos totales, divídase entre el número de observaciones simples que integra cada total y súmese sobre los índices contenidos en el total.

Así las Sumas de Cuadrados del ejemplo citado son:

Para α : $\sum_i \frac{Y^2_{i..}}{bc} - \frac{Y^2_{...}}{abc}$

Para β $\sum_j \frac{Y^2_{.j.}}{a\ c} - \frac{Y^2_{...}}{abc}$

Interacción: $\sum_i \sum_j \frac{Y^2_{ij.}}{c} - \sum_i \frac{Y^2_{i..}}{bc} - \sum_j \frac{Y^2_{.j.}}{ac} + \frac{Y^2_{...}}{abc}$

Error: $\sum_i \sum_j \sum_k Y^2_{ijk} - \sum_i \sum_j \frac{Y^2_{ij.}}{c}$

II.- Reglas para Encontrar ECM en Diseños Completos Balanceados

Para facilitar el análisis de datos completos balanceados en cualquier tipo de modelo, se han desarrollado reglas para obtener las ECM, y con ellas efectuar las pruebas de hipótesis, estas reglas aparecen en textos como: Bennet y Franklin, Hicks, Johnson y Leone y otros. Las reglas presentan ciertas variaciones, pero las más compactas son las que se dan a continuación:

1. El error, considerado jerárquico dentro de los demás factores tendrá un componente de variancia $\sigma^2_{m(i,j,k,\ldots)} = \sigma^2_e = \sigma^2$ y es aleatorio, siempre.

2. En cada hilera del A. de V. escriba aquellos componentes de varianza de los términos del modelo que contienen <u>todos</u> los índices del factor bajo consideración (es decir del factor en la hilera)

3. Determine que índices no están presentes en cada componente de varianza. Multiplique el coeficiente de esa componente por el tamaño de la muestra (número de niveles) de los factores correspondientes a los índices faltantes.

4. Multiplique el componente por $(1-\frac{h}{H})$ donde H es el número de niveles de un factor y H es el tamaño de la población de efectos. Así para efectos fijos h=H y para efectos aleatorios H=∞, aunque puede ser simplemente h<H<∞ . El factor $(1-\frac{h}{H})$ multiplica a los componentes para cada factor H que esta en el índice del componente y que no aparece dentro de un paréntesis y/o no está en el encabezado de la hilera o excepto para σ^2_e.

Méndez [21] también da estas reglas y presenta ejemplos ilustrativos.

III. Referencia a los teoremas enunciados en el capítulo 9.

Esencialmente, los 28 teoremas de algebra enunciados en el capítulo 9 fueron tomados de los libros de Birkhoff & McLane [3], Herstein [8] y McCarthy [15].

No. del Teorema en el Cap. 9	Página en la que se encuentra la prueba en el libro de Birkhoff	Herstein	McCarthy
1	–	21	–
2	–	115	–
3	74	116	–
4	82	117	–
5	T R I V	I A L	–
6	–	89	–
7	–	90	–
8	416	–	–
9	417	–	–
10	419	–	–
11	433	168	1
12	–	–	3
13	–	–	4
14	426	–	–
15	426	–	–
16	429	–	4
17	453	–	–
18	456	314	19
19	457	315	19
20	457	315	–
21	457	315	–
22	458	317	20
23	458	–	–
24	75	179	–
25	–	–	40
26	–	–	40
27	–	–	40
28	–	–	41

BIBLIOGRAFIA

1.	Addelman, Sidney.	"Techniques for Constructing Fraccional Replicate Plans". American Statistical Association Journal, March 1962
2.	Bennett & Franklin	"Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry". John Wiley and Sons, (1954)
3.	Birkhoff & MacLane	"A Survey of Modern Algebra" Macmillan Publishing Co. Inc. 4th. Edition (1977)
4.	Chakrabarti, M.C.	"Mathematical of Desing and Analysis of Experiments" Asia Publishing House, Bombay, India (1962)
5.	Cochran, W.G & Cox, G.M.	"Experimental Desing" John Wiley and Sons.
6.	Davies, O.L.	"Desing and Analysis of Industrial Experiments" Edited by Davies Owen L. Authors: Box, G.E., Connors, L.R., Cousins, W.R., Davies, O.L., Himswort, F.R., Sillito, G.P. Oliver and Boyd (1963)
7.	Graybill, F.A.	"An Introduction to Linear Statistical Models" McGraw Hill
8.	Herstein, I.N.	Topis in Algebra Blaisdell Publishing Co. 1964
9.	Hicks, C.R.	Fundamental Concepts in the Desing of Experiments. Holt Rimhart and Wiston (1964)
10.	John J.A & Quenoville M.H.	"Experiments: Desing and Analysis" Charles Griffin & Co. L.T.D. 2nd. Edition (1977)

11. Johnson N.L. & Leone F.C. "Estatistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences" Vol. II John Wiley and Sons (1964)

12. Kempthorne O. "The Desing and Analysis of Experiments John Wiley and Sons (1967)

13. Manson R.A. "Notas del Curso" Advanced Topics in Construction and Analysis of Experimental Desings". Nort Carolina State University (1969)

14. Matafian, C. "Algebra II, Anillos, Campos y Teoría de Galois" CECSA (1980)

15. McCarthy Algebraic Extension of Fields. Blaisded Publishing Co.

16. Méndez, R.I. Análisis de Diseños Incompletos y Desbalanceados con Factores Fijos. Vol. 5, Serie Azul, Monografías No. 32 IIMAS-UNAM (1978)

17. Méndez, R.I. Experimentos Factoriales Balanceados y Completos. Vol. 3, Serie Azul, Monografías No. 23, IIMAS-UNAM (1976)

18. Méndez, R.I. Experimentos Factoriales Confundidos. Vol. 4, Serie Azul, Monografías No. 26 IIMAS-UNAM (1977)

19. Méndez, R.I. Experimentos Factoriales Fraccionales. Vol, 4, Serie Azul, Monografías No. 28 IIMAS-UNAM (1977)

20. Méndez, R.I. Márquez Landa J.A. Las Hipótesis que se prueban en Modelos Lineales con dos Criterios de Clasificación. Vol. 3, Serie Azul, Monografías No. 19 IIMAS-UNAM (1976)

21. Méndez, R.I. Modelos Mixtos y Aleatorios en el Diseño y Análisis de Experimentos. Vol. 4, Serie Azul, Monografías No. 31 IIMAS-UNAM (1977)

22. Mexas, A. Analisis de Datos de Clasificación con Medicina Arbitraria. Agrociencia, Serie A No. 6 (1971)

23. Radehacher, H. "Lectures Elementary Number Theory, New York. Blaisdell Publishing Co., (1964)

24. Raghavarao, D. Construction and Combinatorial Problems in Desing of Experiments. John Wiley and Sons Inc. (1971)

25. Searle, S.R. Linear Models. John Wiley and Sons Inc. (1971)

26. Walpole, R.E. & Myers, R.H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Macmillan Publishing Co. (1978)

27. Box G.E.P. Hunter J.S. The 2^{k-p} Fractional. Factorial Desing. Part I. Technometrics 1961

28. Box G.E.P. The 2^{k-p} Fractional. Factorial Desing. Part II. Technometrics 1961