

01176
1 Hoj.

U N A M
FACULTAD DE INGENIERIA

DIFRACCION DE ONDAS ELASTICAS P,
SV Y DE RAYLEIGH EN UN SEMIESPA-
CIO ELASTICO CON IRREGULARIDADES

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA TEORICA Y APLICADA)

P r e s e n t a

01176
1953

MIGUEL ANTONIO BRAVO DIAZ

MEXICO D.F.

1983





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ABSTRACT

RESUMEN

INDICE

1.	INTRODUCCION	1
2.	CONCEPTOS BASICOS DE ELASTICIDAD LINEAL	6
3.	FORMULACION DEL PROBLEMA	9
4.	SISTEMAS COMPLETOS DE SOLUCIONES	12
5.	METODO DE SOLUCION	16
6.	PROBLEMA DE PRUEBA	18
7.	RESULTADOS	20
	7.1. Comparación de algunos resultados	25
	7.2. Resultados para un cañón semicircular	25
	7.3. Resultados para un cañón semielíptico	25
	7.4. Resultados para un depósito semicircular	26
8.	DISCUSION Y CONCLUSIONES	27
	8.1. Cañón semicircular	28
	8.2. Cañón semielíptico	28
	8.3. Depósito semicircular	29
9.	REFERENCIAS	32

RECONOCIMIENTOS

36

FIGURAS

APENDICE A. EXPRESIONES DE ESFUERZO Y DESPLAZAMIENTO DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE. ONDAS P, SV Y DE RAYLEIGH.

APENDICE B. EXPRESIONES PARA DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS EN COORDENADAS POLARES.

APENDICE C. OPTIMACION DE LOS PARAMETROS QUE INTERVIENEN EN LA SOLUCION NUMERICA.

ABSTRACT

A boundary method is applied to solve the problem of diffraction of P, SV and Rayleigh waves by surface irregularities in an elastic, isotropic and homogeneous half-space.

The method consists in representing the diffracted fields by means of linear combinations of solutions which form complete families of Navier reduced equation. The indetermined coefficients that appear in such linear combinations are obtained by minimizing the mean square error in the boundary conditions of the irregularity and, on a finite interval of the half-space surface.

With this boundary method a contact problem is solved, which has been selected for calibration and comparison of results.

For a particular case, the convergence and stability of the numerical solution, is studied.

Results are shown for the cases of semi-circular and semi-ellip

tical canyons, and semi-circular alluvial valleys. The presented results are the displacement amplitudes, generated by incident P, SV and Rayleigh waves in the free surface of the half-space and the irregularity.

Some results are compared with those obtained with other technique; the results are briefly discussed.

RESUMEN

Se aplica un método de frontera en la solución del problema de difracción de ondas P, SV y de Rayleigh por irregularidades superficiales en un semiespacio elástico, isótropo y homogéneo.

Dicho método consiste en representar los campos difractados mediante combinaciones lineales de soluciones que forman familias completas de la ecuación reducida de Navier. Los coeficientes indeterminados que aparecen en las combinaciones lineales se obtienen minimizando el error cuadrático medio en las condiciones de frontera de la irregularidad y en un intervalo finito de la superficie del semiespacio.

Con este método de frontera se resuelve un problema de contacto, elegido para prueba y comparación de resultados.

Se estudia, para un caso particular, la convergencia y estabilidad de la solución numérica.

Se muestran los resultados para los casos de cañones semicircu

lar y semielíptico, y depósitos semicirculares. Los resultados que se presentan corresponden a las amplitudes de los desplazamientos, generados por la incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh en la superficie libre del semiespacio y la irregularidad.

Se comparan algunos resultados con los obtenidos por otra técnica; se discuten brevemente los resultados mostrados.

1. INTRODUCCION

El problema de amplificación de movimientos de tierra provocado por sismos es causa muy importante en la distribución de daños y su conocimiento es aun incipiente. La topografía y geología locales son factores que contribuyen a modificar la naturaleza de tales movimientos (Esteva, 1977; Ruiz, 1977). Por consiguiente, es de gran interés conocer la influencia de las condiciones locales en el fenómeno de amplificación dinámica, para el diseño de estructuras resistentes a los sismos y en los estudios de riesgo sísmico.

Es conveniente formular el problema de amplificación por irregularidades topográficas y geológicas como uno de difracción de ondas elásticas. El nombre difracción dado por F.M. Grimaldi al fenómeno de desviación ligera de un haz de luz al pasar por el borde de una abertura se aplica a todo fenómeno de propagación de ondas elásticas que no pueda interpretarse como reflexión o refracción.

Considérese la tierra como un semiespacio elástico lineal, homogéneo e isótropo; en un medio de esta naturaleza se pueden propagar dos tipos de ondas; las ondas P o de compresión y las ondas S o de cortante. Además, la existencia de la superficie libre implica un tercer tipo de ondas cuyo movimiento se confina a una zona cercana a la superficie libre y se conocen como ondas de Rayleigh.

Ante incidencia de estos tipos de ondas la presencia de una irregularidad en la superficie del semiespacio genera fenómenos adicionales a la reflexión y refracción de las ondas y se les denomina difracción. En la superficie libre lejos de la irregularidad las ondas incidentes y reflejadas interfieren para dar el movimiento en ausencia de irregularidad o de campo libre. Cerca de la irregularidad, el movimiento se deberá al de campo libre y al producido por las ondas reflejadas y difractadas por esta.

Considérese que la frontera libre del semiespacio es el plano xz como se muestra en la fig 1; supóngase además que las ondas se propagan en direcciones que están alojadas en el plano xy . Para describir el movimiento debido a ondas de cortante se introduce el concepto de planos de polarización. Así, este se descompone en la dirección de la coordenada z (ondas polarizadas horizontalmente o SH) y en la dirección perpendicular a la dirección de avance en el plano vertical xy (ondas polarizadas verticalmente o SV), como se observa en la fig 2.

El problema de difracción de ondas aquí considerado se limita al referente a ondas P, SV y de Rayleigh por irregularidades topográficas bidimensionales por lo que se formula como un problema de deformaciones planas.

Mediante el método de separación de variables se han obtenido

soluciones analíticas para estudiar la difracción de ondas SH (Trifunac, 1971, 1973; Wong y Trifunac, 1974 a, b) por difractores de geometría semicircular y semielíptica. Para este tipo de ondas y geometrías arbitrarias se han usado ecuaciones integrales (Wong y Jennings, 1975; Sills, 1978), métodos de frontera (Sánchez-Sesma y Rosenblueth, 1979; Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979, 1980; England *et al.*, 1980; Sánchez-Sesma, 1981; Sánchez-Sesma *et al.*, 1982 b) y elementos finitos (Smith, 1977; Aranda y Ayala, 1978).

Para incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh la solución es más complicada debido al acoplamiento de las condiciones de frontera que expresa matemáticamente la conversión de ondas P a SV y viceversa. Se han propuesto asimismo diversas técnicas para resolver este tipo de problemas. Para pequeñas irregularidades se ha utilizado el método de las perturbaciones (Herrera, 1964; Asano, 1966; Mc Ivor, 1969) y las expansiones asintóticas (Sabina y Willis, 1977). Suponiendo irregularidades periódicas y de pequeña pendiente se han obtenido soluciones para distintos difractores (Aki y Larner, 1970; Bouchon, 1973; Bouchon y Aki, 1977; Bard y Bouchon, 1980). También se ha utilizado el método de las diferencias finitas en este tipo de problemas (Boore, 1972; Boore *et al.*, 1981; Harmsen y Harding, 1981).

Además se han aplicado métodos de frontera en la solución de casos de incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh. Los métodos de frontera son procedimientos en los cuales una subregión o la región total se omite del tratamiento numérico mediante el uso de soluciones analíticas disponibles. Este método es particularmente adecuado en el tratamiento de regiones no acotadas ya que evita la introducción de fronteras ficticias y reduce el tamaño de la región discretizada, hecho que proporciona reducción en el trabajo numérico.

Una de las formulaciones con métodos de frontera del problema de difracción de ondas P y SV por irregularidades topográficas como cañones (Sánchez-Sesma, 1978; Wong, 1979, 1982) y depósitos aluviales (Dravinski, 1982), utiliza soluciones de fuentes puntuales discretas de ondas P y SV colocadas fuera de la región de interés para construir los campos difractados. Las condiciones de frontera se satisfacen en el sentido de mínimos cuadrados sobre la superficie de la irregularidad. Sin embargo, el uso de fuentes puntuales, calculadas aproximadamente a partir de las integrales de Lamb (1904), puede en algunos casos hacer impráctica esta aproximación debido al fuerte esfuerzo computacional requerido. Además, determinar el número y localización de las fuentes requiere el uso de criterios iterativos.

Aquí se utiliza un planteamiento diferente. En lugar de las fuentes de Lamb para construir el campo difractado se utilizan familias completas de funciones de onda obtenidas a partir de desarrollos multipolares de potenciales en términos de funciones de Hankel y de Bessel.

El método se basa en el uso de sistemas c-completos (Herrera, 1982), cuya noción guarda relación con las ideas presentadas por Trefftz (1926). Dicha noción y los resultados de una reciente teoría algebraica de problemas de valores en la frontera (Herrera, 1979, 1980 a, b) permiten una aplicación sistemática del método.

Los campos difractados se construyen mediante combinaciones lineales de soluciones de la ec de Navier, que formen un sistema c-completo. Dichas soluciones deben cumplir con la condición de radiación elástica de Sommerfeld-Kupradze (Sommerfeld, 1949; Kupradze, 1965). Los coeficientes se obtienen mediante el tratamiento, con mínimos cuadrados, de las condiciones de frontera (Sánchez-Sesma *et al.*, 1982 b), que para el problema que

aquí se trata, involucran la frontera de la irregularidad y una parte de la superficie del semiespacio.

La idea para tratar las condiciones de frontera en la superficie libre la da la solución de Domínguez (1978) al problema de vibración de cimentaciones, que hace ver que no es necesario considerar una parte muy extensa de la frontera libre para aproximar razonablemente la respuesta, al menos de manera local.

Para averiguar que longitud debería tener la parte de la frontera plana que se consideraría numéricamente se trató un problema auxiliar para el cual se conoce la solución analítica. Dicho problema es el de vibración vertical forzada de una placa rígida sin masa apoyada en la superficie de un semiespacio (Karasudhi et al., 1968).

Posteriormente se prueba la convergencia y estabilidad numérica de la solución, aplicándose a un caso particular.

Finalmente se estudia la difracción de ondas P, SV y de Rayleigh para distintos difractores, frecuencias y ángulos de incidencia; se comparan algunos resultados con los obtenidos mediante el método de las fuentes puntuales; se discuten brevemente los resultados presentados; y se presentan conclusiones.

2. CONCEPTOS BASICOS DE ELASTICIDAD LINEAL

Se presentan aquí algunos resultados elementales de la teoría de la elasticidad lineal, debido a que el semiespacio considerado se idealiza como un medio elástico lineal, homogéneo e isótropo.

La obtención de las ecuaciones de la teoría se basa en la descripción lagrangeana en términos de las coordenadas materiales de una partícula en el estado indeformado.

Las hipótesis consideradas son: *continuidad*, que implica que a nivel macroscópico el material no tiene fisuras o huecos y que sus propiedades se describen por funciones continuas; *homogeneidad*, que indica que las propiedades mecánicas del material no son funciones de las coordenadas espaciales; *isotropía*, que significa que las propiedades mecánicas son las mismas en todas direcciones y *elasticidad lineal*, que establece que no obstante que el medio se deforme proporcionalmente por efecto de fuerzas aplicadas, cualquier partícula del cuerpo regresará a su posi-

ción relativa original cuando las fuerzas se eliminan.

De las condiciones de equilibrio del cuerpo se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} ; \quad i, j = 1, 2, 3^* \quad (1)$$

donde σ_{ij} = componente del tensor de esfuerzos, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, x_j = coordenada material, b_i = fuerza de cuerpo, u_i = componente del vector de desplazamientos, ρ = densidad de masa del material, t = tiempo.

Con base en consideraciones puramente cinemáticas y considerando deformaciones infinitesimales se obtiene la ecuación

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

donde e_{ij} = componente del tensor de deformaciones infinitesimales, $e_{ij} = e_{ji}$.

La relación lineal de ambas ecuaciones viene dada por la ley de Hooke generalizada, que bajo las hipótesis de isotropía y homogeneidad da como resultado

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (3)$$

donde δ_{ij} = delta de Kronocker; λ, μ = constantes elásticas de Lamé.

* Solo en este capítulo se utilizará $i, j = 1, 2, 3$.

Las condiciones de frontera pueden ser:

1. Condiciones de frontera de desplazamientos, con las tres componentes u_i prescritas sobre la frontera.
2. Condiciones de frontera de tracciones, con las tres componentes de tracción $t_i = \sigma_{ji} n_j$ prescritas en la frontera, donde n_j es el vector unitario normal a la frontera.
3. Condiciones de frontera mixtas, que incluyen casos donde : (a) se prescriben condiciones de frontera de desplazamientos sobre una parte de ella, mientras que sobre la parte restante se prescriben condiciones de frontera de fracciones; o (b) en cada punto de la frontera se seleccionan ejes cartesianos rectangulares locales (usualmente con un eje a lo largo de la normal) y entonces se prescriben u_i o t_i .

La solución de un problema de valores en la frontera de esta magnitud (15 ecuaciones con 15 incógnitas) parece ser un trabajo formidable. Sin embargo, existen varias maneras de formular el problema en términos de menos incógnitas y ecuaciones. La forma más directa es expresar las ecs 1 en términos de las ecs 2 y 3, obteniéndose tres ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para las tres componentes de desplazamiento. El resultado es

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + b_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4)$$

que se conoce como ecuación de Navier.

3. FORMULACION DEL PROBLEMA

Considérese una irregularidad topográfica tal como una inclusión elástica en la superficie de un semiespacio, según se muestra en la fig 3. Se pretende encontrar el campo vectorial de desplazamientos, verticales y horizontales, en la superficie libre tanto del difractor como del semiespacio ante incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh. Los vectores de desplazamientos se denominarán como:

u_i^E = vector de desplazamientos en el semiespacio, denotándose este por E y

u_i^R = vector de desplazamientos en la inclusión, denotada por R.

Bajo la suposición de que las ondas son periódicas con dependencia del tiempo dada por $\exp(i\omega t)$, donde $i = \sqrt{-1}$, ω = frecuencia circular y t = tiempo, los vectores de desplazamientos u_i^E y u_i^R satisfacen la ec 4 en ausencia de fuerzas de cuerpo, conocida como ecuación reducida de Navier (Fung, 1965), que para el caso bidimensional con $i, j = 1, 2^*$ queda como

* En adelante se utilizará $i, j = x, y$

$$(\lambda_E + \mu_E) u_{j,ji}^E + \mu_E u_{i,jj}^E + \rho_E \omega^2 u_i^E = 0 \quad (5)$$

$$(\lambda_R + \mu_R) u_{j,ji}^R + \mu_R u_{i,jj}^R + \rho_R \omega^2 u_i^R = 0 \quad (6)$$

definidas respectivamente en el semiespacio y en la inclusión; asimismo el subíndice E o R indica el semiespacio o la inclusión, respectivamente. En la fig 4 se muestran las regiones E y R y la denominación de sus fronteras.

Sea u_i^f la solución de campo libre; esto es, la solución debida a la superposición de ondas incidentes y reflejadas por la superficie libre en ausencia de irregularidad. En el apéndice A se presentan las correspondientes expresiones de esfuerzos y desplazamientos para incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh en términos de potenciales. Para la región E, el semiespacio, se tiene que

$$u_i^E = u_i^f + v_i^E \quad (7)$$

donde v_i^E = vector de desplazamientos generado por las ondas di fractadas por la irregularidad. Por otra parte para la región R, el difractor, puede escribirse que

$$u_i^R = v_i^R \quad (8)$$

donde v_i^R = vector de desplazamientos generado por las ondas re fractadas en la inclusión. Debe notarse que v_i^E y v_i^R satisfacen las ecs 5 y 6 en E y R, respectivamente.

Las condiciones de frontera que deben satisfacerse son

$$t_i(\underline{v}^E) = \sigma_{ij}(\underline{v}^E) n_j = 0 \quad \text{en } \partial_1 E \quad (9)$$

$$t_i(\underline{v}^R) = \sigma_{ij}(\underline{v}^R) n_j = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 R \quad (10)$$

además debe cumplirse la continuidad de los desplazamientos y los esfuerzos en la frontera $\partial_2 E = \partial_2 R$

$$u_i^f + v_i^E = v_i^R \quad (11)$$

$$t_i(\underline{u}^f) + t_i(\underline{v}^E) = t_i(\underline{v}^R) \quad (12)$$

En las ecs 9, 10 y 12 $t_i(\underline{v})$ es el vector de tracciones asociado con la frontera de vector normal n_j para el desplazamiento \underline{v} , $\sigma_{ij}(\underline{v})$ es el tensor de esfuerzos asociado al vector \underline{v} . El vector n_j se considerará dirigido hacia fuera de R.

Si se trata de un cañón, esto es, no hay región R, las condiciones relevantes son

$$t_i(\underline{v}^E) = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 E \quad (9')$$

$$t_i(\underline{u}^f) + t_i(\underline{v}^E) = 0 \quad \text{en} \quad \partial_2 E = \partial_2 R \quad (12')$$

Una vez conocidos los vectores v_i^E y v_i^R se puede calcular el campo de desplazamientos total con las ecs 7 y 8.

4. SISTEMAS COMPLETOS DE SOLUCIONES

Se construyen aquí los sistemas c-completos de soluciones de la ecuación reducida de onda bidimensional para generar los campos difractados de desplazamientos v_i^E y v_i^R para el semiespacio y la irregularidad, respectivamente.

Es posible demostrar que la ecuación reducida de Navier (ecs 5 o 6) para el vector de desplazamientos se satisface si este se expresa mediante

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e_{ijl} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j} \quad \text{con} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = 0 \quad (13)$$

donde e_{ijl} = tensor alternante; en la ecuación anterior ϕ y ψ_l son potenciales de desplazamientos, soluciones a su vez de las ecuaciones reducidas de onda

$$\nabla^2 \phi + q^2 \phi = 0 \quad (14)$$

$$\nabla^2 \psi_l + k^2 \psi_l = 0 \quad (15)$$

donde $q = \omega/\alpha$, $k = \omega/\beta$, $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas P, $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas S, y ∇^2 = operador laplaciano.

En el problema bidimensional el vector ψ_ℓ tiene una sola componente distinta de cero, $\psi_z = \psi$. En coordenadas polares los desplazamientos, funciones de los potenciales de desplazamientos, están dados por

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (16)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (17)$$

y las componentes del tensor de esfuerzos, en estas coordenadas, quedan

$$\sigma_{rr} = \sigma_r = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) \right] \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_\theta = \lambda \nabla^2 \phi + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right] \quad (19)$$

$$\sigma_{r\theta} = \tau_{r\theta} = 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial \psi}{r} \right) \right] \quad (20)$$

Se ha demostrado (Herrera y Sabina, 1978) que los sistemas de funciones

$$C_R = \{J_0(hr), J_n(hr) \sin n\theta, J_n(hr) \cos n\theta, n = 1, 2, \dots\} \quad (21)$$

$$C_E = \{H_0^{(2)}(hr), H_n^{(2)}(hr) \sin n\theta, H_n^{(2)}(hr) \cos n\theta, n = 1, 2, \dots\} \quad (22)$$

donde $J_n(\cdot)$ = función de Bessel de primera especie y orden n , $H_n^{(2)}$ = función de Hankel de segunda especie y orden n , y r, θ = coordenadas polares, son bases c -completas de las ecuaciones reducidas de onda bidimensionales, ecs 14 y 15, con números de onda $h = q$ y $h = k$, respectivamente. La familia C_R es c -completa en regiones acotadas, mientras que C_E lo es en regiones no acotadas.

Para construir el conjunto de vectores que se utilizan para resolver el problema, considérense los potenciales de desplazamientos

$$\phi_j = \sum_{n=1}^N A_n^j \sin n\theta C_n^j(q_j r) + \sum_{n=0}^N B_n^j \cos n\theta C_n^j(q_j r) \quad (23)$$

$$\psi_j = \sum_{n=1}^N C_n^j \sin n\theta C_n^j(k_j r) + \sum_{n=0}^N D_n^j \cos n\theta C_n^j(k_j r) \quad (24)$$

para las ondas P y S, respectivamente; en las ecs 23 y 24, el subíndice o superíndice j indica que se definen para las regiones interior $j = R$, en donde $C_n^j(\cdot) = J_n(\cdot)$, o exterior $j = E$, en donde $C_n^j(\cdot) = H_n^{(2)}(\cdot)$

En el apéndice B se presentan las expresiones para los desplazamientos y esfuerzos generados por estos potenciales.

Se generan entonces ocho familias de vectores de desplazamientos, cuatro para cada componente de desplazamiento (ecs 16 y 17), estando asociadas cuatro a la región R y cuatro a la región E.

Es posible demostrar que las familias de vectores de desplazamientos asociadas a la región E cumplen con las condiciones de radia-

ción elástica de Sommerfeld-Kupradze (Sommerfeld, 1949; Kupradze, 1965). Esta condición surge en cualesquier problema de valores en la frontera referido a un dominio que se extiende al infinito en donde es necesario examinar el comportamiento asintótico de la solución; la construcción de los potenciales con funciones de Hankel garantiza que la energía se irradia al infinito.

Se supondrá aquí que las familias de vectores son bases c-completas de las ecuaciones reducidas de onda, ecs 14 y 15.

5. METODO DE SOLUCION

Considérese las aproximaciones para el campo vectorial de desplazamientos v_i^E y v_i^R dadas por

$$v_i^E = \sum_{m=1}^{4n+2} A_m w_{i_m}^E, \quad i = r, \theta \quad (25)$$

$$v_i^R = \sum_{m=1}^{4n+2} B_m w_{i_m}^R, \quad i = r, \theta \quad (26)$$

donde A_m y B_m son los coeficientes por determinar y w_i^R son los vectores de desplazamientos descritos en el apéndice B. Dado que el orden de los desarrollos para los potenciales es N se tiene que el límite superior para n es $4N + 2$. Los coeficientes de las ecuaciones 25 y 26 se determinarán de manera tal que, imponiendo condiciones de frontera en las fronteras $\partial_1 E$, $\partial_2 E$ y $\partial_1 R$ en $2M, L$ y K puntos de colocación, respectivamente, el error cuadrático medio en las condiciones de frontera sea mínimo; es decir, el método de solución numérica es el de colocación con mínimos cuadrados. El número de coeficientes por determinar pa

ra los problemas de la inclusión elástica y el de prueba es, en ambos casos, $8N + 4$. Para el problema de un cañón se tendrán únicamente $4N + 2$. Asimismo, dado que el problema es vectorial se formarán $2L + 2K + 4M$ ecuaciones para los problemas de la inclusión y el de prueba, mientras que para el caso del cañón el número de ecuaciones será solamente $2L + 4M$.

El ajuste de las condiciones de frontera se lograría de manera exacta en los puntos de colocación si se considerase un número de ecuaciones en correspondencia con el número de puntos de discretización, igual al número de incógnitas en correspondencia con el número de coeficientes de las aproximaciones. Por otro lado, un número insuficiente de puntos de colocación produce una solución pobre e inestable en puntos de la frontera distintos a los de colocación. Se buscará entonces tener un sistema sobredeterminado, mayor número de ecuaciones que de incógnitas, de la forma

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (27)$$

Puede demostrarse (Noble, 1969) que la solución que minimiza el error cuadrático medio, se obtiene al resolver el sistema

$$[A^*]^T [A] \{X\} = [A^*]^T \{B\} \quad (28)$$

donde el asterisco significa que la matriz es compleja conjugada. La matriz de coeficientes resultante en la ec 28 se hermitiana y positiva definida.

6. PROBLEMA DE PRUEBA

El problema de prueba tiene por objeto averiguar, en el rango de frecuencia estudiado, el orden de magnitud del ancho de la irregularidad que debe de considerarse sobre la frontera libre del semiespacio al imponer ahí condiciones de frontera.

El problema de una placa rígida sin masa sometida a carga vertical armónica y apoyada en un semiespacio elástico, ha sido resuelto analíticamente por Karasudhi, Keer y Lee (1968). Las condiciones de frontera que se consideran en $y = 0$ (ver fig 5) son

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq |x| < \infty \quad (29.a)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0 \quad \text{en} \quad b < |x| < \infty \quad (29.b)$$

$$u_y(x, 0) = v_0 \quad \text{en} \quad 0 \leq |x| < b \quad (29.c)$$

donde τ_{xy} es el esfuerzo cortante y σ_y es el esfuerzo normal, v_0 es la amplitud de desplazamiento vertical especificado de la

placa y b es el semiancho de la región de contacto. De las ecs 31 se deduce que se trata de un problema de contacto sin fricción. Conocido $\sigma_y(x, 0)$ en $|x| \leq b$ se puede calcular, mediante integración, la carga P aplicada. La relación entre P y v_0 está dada por

$$P = \pi \mu v_0 (b_1 + i b_2) \quad (30)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y b_1 y b_2 son coeficientes que son función de la frecuencia.

Con objeto de probar el método utilizado en este trabajo, en lo referente a las condiciones de frontera en $\partial_1 E$, la superficie libre del semiespacio, se establecen las siguientes condiciones de frontera para las regiones E y R mostradas en la fig 4,

$$t_i(\underline{v}^E) = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 E \quad (31)$$

$$t_x(\underline{v}^R) = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 R \quad (32)$$

$$v_y^R = v_0 \quad \text{en} \quad \partial_1 R \quad (33)$$

además, de las ecs 11 y 12 con $u_i^f = 0$ se tiene que en la frontera $\partial_2 E = \partial_2 R$

$$v_i^E = v_i^R \quad (34)$$

$$t_i(\underline{v}^E) = t_i(\underline{v}^R) \quad (35)$$

donde $i = x, y$ (ecs 31-35).

7. RESULTADOS

Los resultados obtenidos para el problema de prueba al igual que los valores exactos se presentan en la fig 7; en ella se muestran los valores de b_1 y b_2 vs el factor de frecuencia $\omega b/\beta$. Se utilizó una relación de Poisson de $\nu = 0.25$. Los valores presentados se calcularon con los siguientes parámetros, definidos en la fig 4: $K = 4$, $L = 4$, $M = 4$. El orden de los desarrollos se tomó con $N = 6$. La porción de superficie libre considerada a cada lado de la irregularidad tiene una longitud igual al ancho de la placa.

Para estos parámetros, con $\omega b/\beta = 0.25$ se muestran en la fig 8 las amplitudes de los esfuerzos bajo la placa y de los esfuerzos residuales en la frontera libre del semiespacio. Es importante hacer notar que los esfuerzos aun en puntos alejados de la región discretizada no son significativos y presentan un comportamiento constante, de donde se concluye que basta un pequeño intervalo de discretización de la frontera libre para obtener resultados satisfactorios. Se observó que para el rango de frecuencia estudiado, basta que dicho interva

lo sea de dos a tres veces el semiancho de la placa. Debe notarse que para mayores frecuencias el número de puntos de colocación y los órdenes de los desarrollos deben aumentar.

Habiéndose obtenido resultados satisfactorios en el problema de prueba, se procede a analizar la convergencia y estabilidad numérica de la solución. No obstante que esto se hace para un problema particular, el estudio proporciona pautas de lo que puede hacerse para problemas con irregularidades más complicadas. El problema analizado es el de incidencia vertical de ondas P en un cañón semicircular con una frecuencia adimensional $\eta_k = 1.00$ donde $\eta_k = ka/\pi = 2a/\lambda_s$, $\lambda_s =$ longitud de una onda S incidente y $a =$ semiancho del cañón.

Se hace notar que en este trabajo no se realiza un análisis exhaustivo de las fuentes de error inherentes al proceso numérico, como, por ejemplo, los errores de redondeo en el cálculo de las funciones de Bessel y de Hankel.

El criterio seguido en el análisis de la convergencia y estabilidad numérica de la solución consiste en considerar que la solución es válida si, para el conjunto de parámetros utilizados en un análisis, esta no cambia considerablemente al variar uno de ellos. En esta forma se puede apreciar la sensibilidad del modelo. Los parámetros considerados son: el ancho de la superficie libre por incluir en el cálculo, el número de puntos de colocación y el orden de los desarrollos.

Los resultados obtenidos en el análisis se presentan en el apéndice C y corresponden en orden secuencial a la optimación del valor del número de puntos de colocación, ancho de la superficie libre por considerar y orden de los desarrollos. En cada tabla del apéndice se indica el parámetro que se varía, los va

lores que se asignan a este y los de los parámetros que permanecen fijos.

Se analizaron los resultados para 12 puntos en total, 6 en el interior del cañón y 6 en la superficie libre del semiespacio, igualmente espaciados y con una densidad o número de puntos por unidad de longitud 'a' definidos para las regiones $\partial_1 E$ Y $\partial_2 E$ (ver fig 9) respectivamente, como

$$q_1 = \frac{M}{D} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{L}{\pi a}$$

donde D es el número de veces el semiancho del cañón que se considera de superficie libre a cada uno de los lados del cañón.

Para cada uno de los puntos de colocación en cada serie particular de parámetros se calcula el porcentaje de variación del resultado en ese punto con respecto al resultado obtenido en la misma localización con el parámetro optimizado cuyo valor se presenta al extremo superior derecho de cada tabla; así se determina el promedio del porcentaje de variación de los 12 puntos analizados, resultado que aparece en la gráfica correspondiente a cada tabla y que se define como

$$\overline{\Delta u} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \Delta u_i$$

con

$$\Delta u_i = \frac{|u_{m_i} - u_i|}{u_{m_i}} \times 100$$

donde u_{m_i} es el resultado obtenido con la mejor aproximación en el punto i, u_i es el resultado obtenido con el valor del parámetro variable indicado en la gráfica.

En las tablas se presentan la desviación estandar (denotada con S) correspondiente a cada promedio, así como el valor máximo de Δu_1 , definido como Δu_{\max} , y la localización x/a de la superficie libre donde se presenta este máximo, definida como $x/a (\Delta u_{\max})$.

En los resultados mostrados se observa que la solución presenta un comportamiento convergente y estable para el caso de variación de los parámetros q_1 , q_2 (tabla C.1) y D (tabla C.2). Para el caso de variación de N, orden de los desarrollos (tabla C.3), se observa que la solución es muy sensible ante cambios en ese parámetro; no obstante ello, el comportamiento de la solución es también convergente. Por otra parte, las diferencias entre las soluciones para el parámetro optimizado y el valor inmediato anterior analizado, cercanas al 1% para el caso de optimización de N y menor que el 5% para los casos de q_1 , q_2 y D, resultan aceptables para casos prácticos. Se advierte asimismo que el máximo porcentaje de variación de los resultados se presenta más del 90% de las veces cerca del extremo de la irregularidad.

Con base en las consideraciones anteriores, se procedió a estudiar el problema de difracción de ondas P, SV y de Rayleigh por distintos difractores como son cañones semicircular y semielíptico y depósito semicircular. En ellos la frecuencia máxima estudiada corresponde a la del problema utilizado para probar la convergencia; además los parámetros de discretización q_1 , q_2 , D y N corresponden aproximadamente a los óptimos de dicho problema.

Los resultados que a continuación se presentan se han obtenido para un valor $\nu = 1/3$ de la relación de Poisson y para varios valores de la frecuencia adimensional, $\eta_k = 2a/\lambda_s$.

Con objeto de hacer notar las amplificaciones y reducciones de los desplazamientos en la superficie libre del terreno y de la

irregularidad con respecto a los desplazamientos en ausencia de irregularidad, se presentan también estos desplazamientos de campo libre para cada uno de los tres tipos de ondas incidentes.

Estos son:

ONDAS P

$$|u_x^f| = 0.00 \quad |u_y^f| = 2.00 \quad , \text{ para } \gamma_p = 0^\circ$$

$$|u_x^f| = 0.9633 \quad |u_y^f| = 1.7411 \quad , \text{ para } \gamma_p = 30^\circ$$

$$|u_x^f| = 1.3949 \quad |u_y^f| = 1.1168 \quad , \text{ para } \gamma_p = 60^\circ$$

ONDAS SV

$$|u_x^f| = 2.00 \quad |u_y^f| = 0.00 \quad , \text{ para } \gamma_s = 0^\circ$$

$$|u_x^f| = 3.4639 \quad |u_y^f| = 0.00 \quad , \text{ para } \gamma_s = 30^\circ$$

$$|u_x^f| = 0.4585 \quad |u_y^f| = 1.1239 \quad , \text{ para } \gamma_s = 60^\circ$$

ONDAS DE RAYLEIGH

$$|u_x^f| \quad |u_y^f| = 1.5652$$

Para cada difractor se presentan en cada figura las amplitudes de los desplazamientos, verticales u horizontales, para cada tipo de onda incidente. Se muestran así los efectos de la variación de las frecuencias adimensionales analizadas $\eta_k = 0.50$, $\eta_k = 0.75$ y $\eta_k = 1.00$.

En particular, para las ondas P y SV se muestran en cada figura

los efectos del ángulo de incidencia de la onda $\gamma_p = 0^\circ, 30^\circ$ y 60° , y $\gamma_s = 0^\circ, 30^\circ$ y 60° , respectivamente.

7.1 Comparación de algunos resultados

En las figs 12 y 13 se presentan la comparación de los resultados de los desplazamientos horizontales y verticales para incidencia de ondas P con frecuencias adimensionales $\eta_k = 0.50$ y 0.75 , respectivamente, obtenidos con el método de frontera aquí utilizado y con la técnica de las fuentes puntuales, utilizado por Wong (1982). En cada figura se muestran los resultados para tres ángulos de incidencia analizados $\gamma_p = 0^\circ, 30^\circ$ y 60° .

Los parámetros de discretización utilizados en esta comparación se definen en la fig 9 y fueron $L = 30, M = 60, N = 12$ y $D = 6$, donde D es el número de veces el semiancho de la irregularidad que se considera de superficie libre a cada uno de los lados de esta.

7.2 Resultados para un cañón semicircular

En las figs 14-18 se muestran los resultados obtenidos para este difractor. Los parámetros de discretización utilizados, definidos en la fig 9, fueron $L = 30, M = 60, N = 12, D = 6$.

7.3 Resultados para un cañón semielíptico

Se presentan tales resultados en las figs 19-23. Aquí se tomó la relación particula entre los semiejes de la elipse, definidos en la fig 10, como $r_2/r_1 = 0.50$. Los parámetros utilizados fueron: $L = 30, M = 60, N = 12, D = 6$.

7.4 Resultados para un depósito semicircular

La relación entre las propiedades mecánicas de ambos medios se escogió de manera arbitraria. Esta corresponde a un depósito blando y ligero sobre roca firme y viene dada por $\rho_R/\rho_E = 2/3$ y $\beta_E/\beta_R = 2.00$. La definición de los parámetros se muestra en la fig 11. Los resultados obtenidos se presentan en las figs 24-28 y los parámetros usados fueron $K = 30$, $L = 25$, $M = 50$, $N = 9$, $D = 5$.

8. DISCUSION Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos mediante la técnica aquí utilizada al ser comparados con los correspondientes obtenidos mediante fuentes puntuales por Wong (1982) muestran, en general, una notable semejanza (figs 12 y 13). En todos los resultados el comportamiento en el interior del cañón coincide para ambas aproximaciones; las diferencias significativas, en aquellos resultados donde las hay, se presentan en los bordes del cañón o en la superficie del semiespacio.

En los resultados que aquí se presentan para los distintos difractores se observa que la variación espacial de los desplazamientos es función del ángulo de incidencia y de la frecuencia de excitación; en particular, al aumentar dicha frecuencia o equivalentemente a menores longitudes de onda, el patrón de desplazamientos se vuelve más complicado.

8.1 Cañón semicircular

Para incidencia de ondas P (figs 14 y 15) las máximas amplificaciones se presentan en los bordes y al centro del cañón. Se observa que al crecer el ángulo de incidencia γ_p , las amplitudes mínimas de los dos desplazamientos se presentan cerca del borde del lado opuesto al incidente, es decir, en $x/a = 1$; por otra parte, en el caso de los desplazamientos horizontales las máximas amplificaciones tienden a presentarse en el lado incidente a medida que γ_p aumenta.

Para incidencia de ondas SV (figs 16 y 17) las amplitudes máximas de los desplazamientos verticales se presentan en el lado opuesto al de incidencia. En cuanto al movimiento horizontal se observa que este es muy sensible ante cambios en el ángulo de incidencia; dicha sensibilidad aumenta al incrementarse la frecuencia; así, por ejemplo, para $\gamma_s = 30^\circ$ las máximas amplitudes se presentan en el borde del lado de incidencia ($x/a = -1$), mientras que para $\gamma_s = 60^\circ$, las máximas se presentan en el borde opuesto.

En la incidencia de ondas de Rayleigh (fig 18), se nota un ligero efecto de barrera del cañón, sobre todo para los desplazamientos verticales; dicho efecto se incrementa al aumentar la frecuencia. Ambos desplazamientos presentan grandes amplificaciones en el borde $x/a = -1$, lado incidente del cañón; las máximas reducciones se presentan en el borde opuesto.

8.2 Cañón semielíptico

Claramente se observa que los resultados para el cañón semielíptico (figs 19-23) al compararse con los correspondientes para el semicircular, presentan un comportamiento muy similar pero un patrón más suave. Esto está de acuerdo con lo que físicamente su-

cede; la irregularidad semielíptica es menos abrupta que la semicircular y por ello las ondas "sienten" menos ese efecto, lo que se refleja en un patrón de desplazamientos más suave. Sin embargo este comportamiento no se presenta en el caso de desplazamientos horizontales con incidencia de ondas P y frecuencia $\eta_k = 0.75$ (fig 20).

Es también interesante observar que para incidencia de ondas SV con $\gamma_S = 60^\circ$ y frecuencia $\eta_k = 0.50$ (fig 22), las amplitudes de los desplazamientos horizontales en poco más del 50% del interior del cañón son constantes y casi nulas.

Para el caso de ondas de Rayleigh incidentes (fig 23) el efecto debarrera es menos notorio que para la irregularidad en forma de cañón semicircular; esto se debe en parte a que la profundidad de este último es mayor en 100% a la del cañón semielíptico. Las máximas amplificaciones para los dos desplazamientos se presentan del lado incidente del cañón.

8.3 Depósito semicircular

Ante ondas P incidentes (figs 24 y 25) a medida que el ángulo de incidencia γ_p se incrementa, el patrón de amplificaciones presenta una disminución en sus desplazamientos verticales y una amplificación en los horizontales; en estos últimos las máximas amplitudes se presentan en la región del depósito opuesta a la del lado incidente.

Para incidencia de ondas SV (figs 26 y 27) se presentan reducciones notables en el lado incidente de depósito ($x/a < 0$) y para algunas frecuencias llegan a ser cercanas a cero. Para $\gamma_S = 30^\circ$ es considerable la amplificación de ambos desplazamientos en la región de depósito $x/a > 0$.

Para ondas de Rayleigh incidentes (fig 28), las amplitudes máximas se presentan al centro y cerca de los bordes del depósito.

Sería conveniente hacer un análisis paramétrico que considere la variación de las relaciones entre las propiedades mecánicas del semiespacio y el depósito así como estudiar la respuesta para diversas geometrías.

Los resultados presentados muestran algunas características de las amplitudes de los desplazamientos del terreno con irregularidades topográficas y geológicas ante incidencia de ondas armónicas P, SV y de Rayleigh. De estas características se deduce que es importante considerar estos efectos en el diseño sísmico de puentes, tuberías y, en general, estructuras largas asentadas en irregularidades así como en los estudios de micro regionalización y riesgo sísmico.

La cuantificación de tales efectos en casos prácticos es un problema no completamente resuelto. Esto se debe a que el conocimiento del fenómeno sísmico es aun insuficiente en lo que se refiere a ocurrencia, mecanismo focal y trayectoria de las ondas.

Dentro del marco de simplificaciones consideradas, el método de frontera aquí utilizado permite resolver el problema de difracción de ondas P, SV y de Rayleigh por irregularidades topográficas y geológicas bidimensionales en un semiespacio homogéneo, isótropo y linealmente elástico con razonable aproximación para una frecuencia dada.

El hecho de considerar solamente una porción de la superficie libre en el método de solución resultó ser de gran utilidad,

puesto que reduce la complejidad del problema y los errores que se cometen en la solución son pequeños.

La no existencia de una solución analítica debida a la dificultad del problema, obligó al análisis numérico de la convergencia y estabilidad de la solución; no obstante que este análisis se hace para un caso particular da pautas de la forma de proceder para problemas con irregularidades más complejas. Sin embargo, falta hacer un análisis de todas las fuentes de error propias del proceso numérico como son, entre otras, los errores de redondeo.

El método aquí utilizado reduce la complejidad del problema atacado de manera diferente por Wong (1982), utilizando fuentes puntuales.

Convendría hacer un análisis de la variación espacial de las fases del movimiento.

Finalmente, el método podría emplearse para estudiar la respuesta sísmica de estructuras terreas, tales como presas, terraplenes y muros de retención. En el caso de presas, convendría explorar la posibilidad de incluir los efectos hidrodinámicos.

9. REFERENCIAS

- Aki, K., y K.L. Lerner (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves, *J. Geophys. Res.* 75, 933-954.
- Aranda, G.R. y G.A. Ayala (1978). Modelo numérico eficiente de aplicación en estudios de amplificación dinámica. *Instituto de Ingeniería, UNAM, México.*
- Asano, S. (1966). Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated surface, *Bull. Seism. Soc. Am.* 50, 201-222.
- Bard, P.Y., y M. Bouchon (1980). The seismic response of sediment filled valleys. Part 1. The case of incident SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 70, 1263-1286.
- Boore, D.M. (1972). A note on the effect of simple topography on seismic SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 62, 275-284.
- Boore, D.M., S.C. Harmsen, y S.T. Harding (1981). Wave scattering from a steep change in surface topography, *Bull. Seism. Soc. Am.* 71, 117-125.
- Bouchon, M. (1973). Effects of topography on surface motion, *Bull. Seism. Soc. Am.* 63, 615-632.
- Bouchon, M., y K. Aki (1977). Near-field of a seismic source in a layered medium with irregular interfaces. *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 50, 669-684.

- Domínguez, J. (1978). Dynamic stiffness of rectangular foundations, *Report R-78-20, Department of Civil Engineering*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- Dravinski, M. (1983). Amplification of P, SV and Rayleigh waves by two alluvial valleys, *Soil Dynamics and Earthquake Engng.* 2, 66-77.
- England, R., F.J. Sabina, e I. Herrera (1980). Scattering of SH waves by surface cavities of arbitrary shape using boundary methods, *Phys. Earth Planet. Ints.* 21, 148-157.
- Esteva, L. (1977). Microzoning: models and reality, *Proc. World Conf. Earthquake Engng., 6th, New Delhi.*
- Fung, Y.C. (1965). *Foundations of solid mechanics*, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J.
- Harmsen, S.C., y S.T. Harding (1981). Surface motion over a sedimentary valley for incident plane P and SV waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 71, 655-670.
- Herrera, I. (1964). A perturbation method for elastic wave propagation: 1. Non-parallel boundaries, *J. Geophys. Res.* 69, 3845-3851.
- Herrera, I. (1979). Theory of connectivity: a systematic formulation of boundary element methods, *Applied Math. Modelling* 3, 151-156.
- Herrera, I. (1980 a). Variational principles for problems with linear constraints: prescribed jumps and continuation type restrictions, *J. Inst. Maths. and Applics.* 25, 67-96.
- Herrera, I. (1981). Boundary methods. A criterion for completeness, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* 77, 4395-4398.
- Herrera, I. (1981). An algebraic theory of boundary value problems. *Comunicaciones técnicas, IIMAS-UNAM*, 3(2), 161-230.
- Herrera, I. (1982). Boundary methods for fluids, *Capítulo 19 de Finite Elements in fluids IV* Gallagher, R.H., J.T. Oden, y O.C. Zienkiewicz, eds, John Wiley and Sons Ltd.
- Herrera, I., y F.J. Sabina (1978). Connectivity as an alternative to boundary integral equations. Construction of bases, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* 75, 2059-2063.

- Karasudhi, P., L.M. Keer, y S.L. Lee (1968). Vibratory motion of a body on an elastic half plane, *J. Applied Mechanics*, Trans. ASME, 697-705.
- Kupradze, V.D. (1965). *Potential methods in the theory of elasticity*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Royal Soc. (Lond.)* A203, 1-42.
- Mc Ivor, I. K. (1969). Two dimensional scattering of a plane compressional wave by surface imperfections, *Bull. Seism. Soc. Am.* 59, 1349-1364.
- Noble, B. (1969). *Applied linear algebra*, Mc Graw-Hill, New-York.
- Ruiz, S.E. (1977). Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos, *Instituto de Ingeniería, UNAM* 387 -
- Sabina, F.J., y J.R. Willis (1977). Scattering of Rayleigh waves by a ridge, *J. Geophys.* 43, 401-419.
- Sánchez-Sesma, F.J. (1978). Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape. *Proc. Int. Conf. on Microzonation, 2nd, San Francisco*, 2, 729-738.
- Sánchez-Sesma, F.J. (1981). A boundary method applied to elastic scattering problems, *Arch. Mech.* 33, 167-179.
- Sánchez-Sesma, F.J. y J. A. Esquivel (1979). Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 69, 1107-1120.
- Sánchez-Sesma, F.J., y J.A. Esquivel (1980). Ground motion on ridges under incident SH waves, *Proc. World Conf. Earthquake Engng.*, 7th, Istanbul, 1, 33-40.
- Sánchez-Sesma, F.J., I. Herrera, y J. Avilés (1982 b). A boundary method for elastic wave diffraction. Application to scattering of SH waves by surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.* 72, 473-490.
- Sánchez-Sesma, F.J., y E. Rosenblueth (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, *Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn.* 7, 441-450.

- Sills, L. B. (1978). Scattering of horizontally polarized shear waves by surface irregularities, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 54, 319-348.
- Smith, W. D. (1977). The application of finite element analysis to body wave propagation problems, *Geophys. J.* 44.
- Sommerfeld, A. (1949). *Partial differential equations in physics*, Academic Press, Inc, New York.
- Treffitz, E. (1926). Ein Gegenstück zum Ritzchen Vergaren, *Proc. 2nd Int. Congress Appl. Mech.*, Zurich.
- Trifunac, M. D. (1971). Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 61, 1755-1770.
- Trifunac, M. D. (1973). Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon, *Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn.* 1, 267-281.
- Wong, H. L. (1979). Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by surface topographies. Report CE79-05, Department of Civil Engineering, University of Southern California, Los Angeles, California.
- Wong, H. L. (1982). Effect of surface topography on the diffraction of P, SV and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 72, 1167-1183.
- Wong, H. L., y P. C. Jennings (1975). Effect of canyon topographies on strong ground motion, *Bull. Seism. Soc. Am.* 65, 1239-1257.
- Wong, H. L., y M. D. Trifunac (1974a). Scattering of plane SH wave by a semi-elliptical canyon, *Int. J. Earthquake Engng. Struct. Dyn.* 3, 157-169.
- Wong, H. L., y M. D. Trifunac (1974 b). Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* 64, 1389-1408.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se realizó en el Instituto de Ingeniería como parte del proyecto 2720.

Se agradece al Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma su valiosa dirección en el desarrollo del mismo; al Dr. Gustavo Ayala, al M en I G. Rafael Aranda y al M en I Javier Avilés por sus atinados comentarios y sugerencias.

Asimismo se agradece a Celia Juárez y a los miembros del Dpto. de dibujo del Instituto por su valioso apoyo.

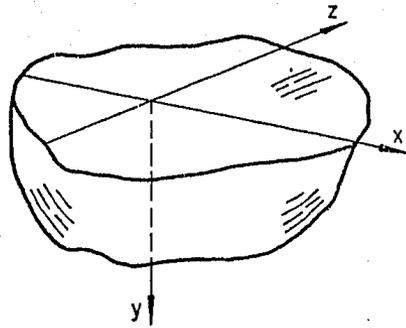


Fig1. Sistema de coordenadas en el semiespacio elástico

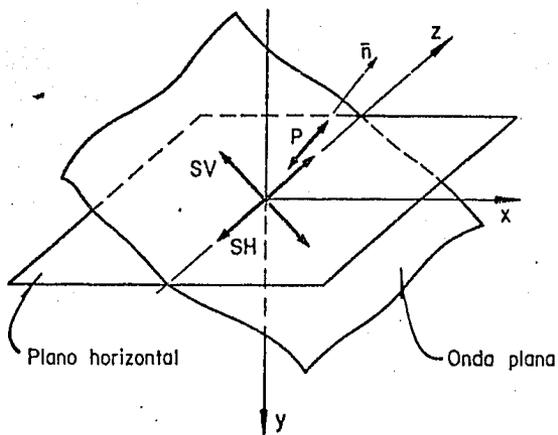


Fig 2. Nomenclatura para ondas planas

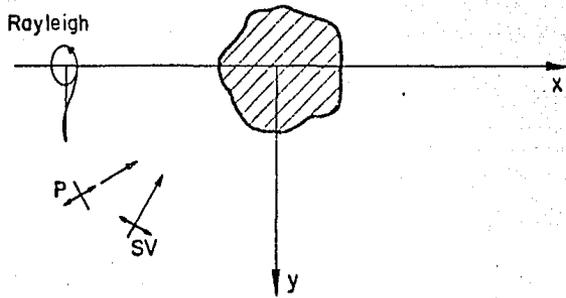


Fig3. Inclusión elástica en la superficie del semiespacio y ondas incidentes P, SV y Rayleigh

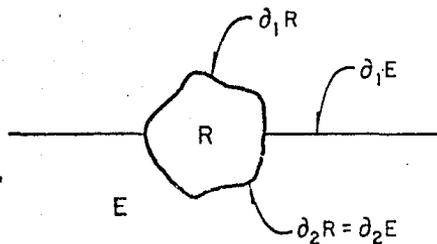


Fig4. Regiones interior R y exterior E

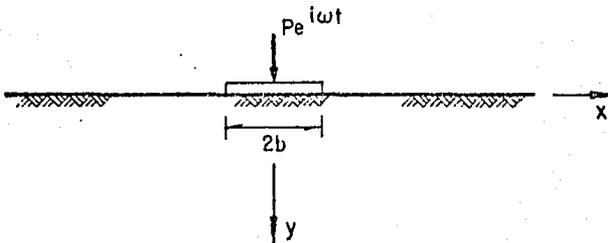


Fig5. Placa rígida sin masa apoyada en un semiespacio elástico y sometida a vibración vertical

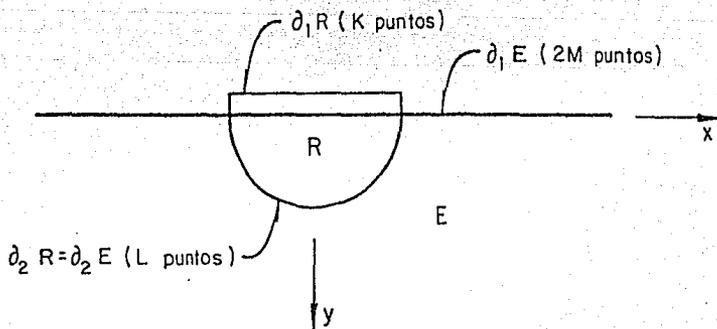


Fig 6. Regiones R y E para el estudio del problema de prueba

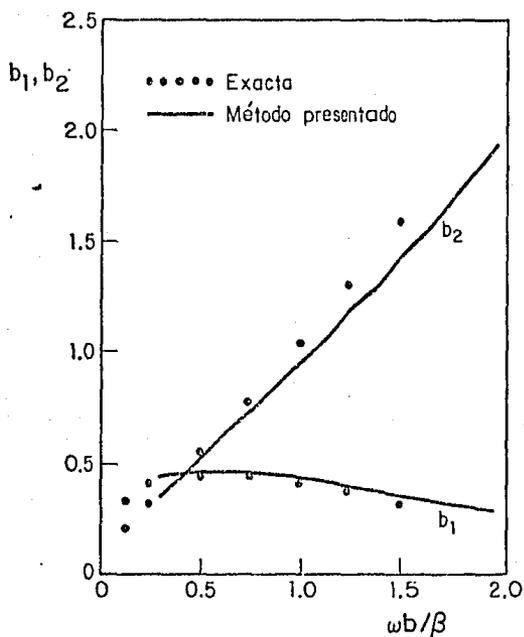


Fig 7. Parámetros de rigidez b_1 y b_2 (ec 30) del problema de prueba. Comparación con la solución exacta para $\nu = 0.25$

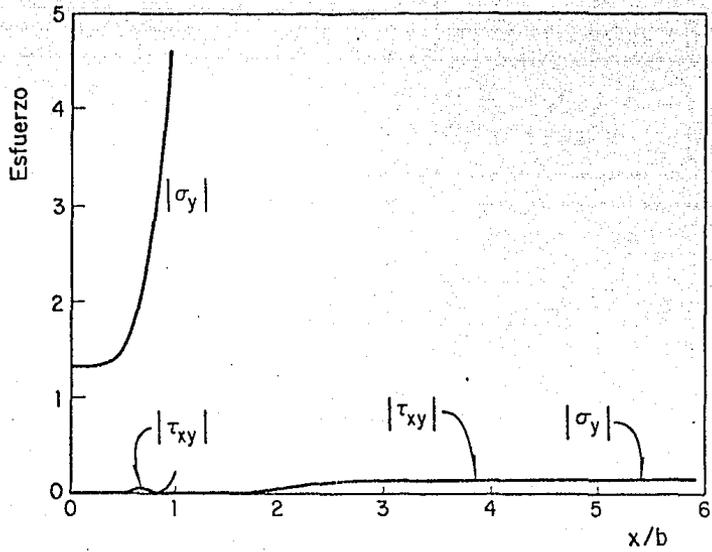


Fig 8. Amplitudes de los esfuerzos en la superficie libre para el problema de prueba. Frecuencia normalizada $\omega b/\beta = 0.25$

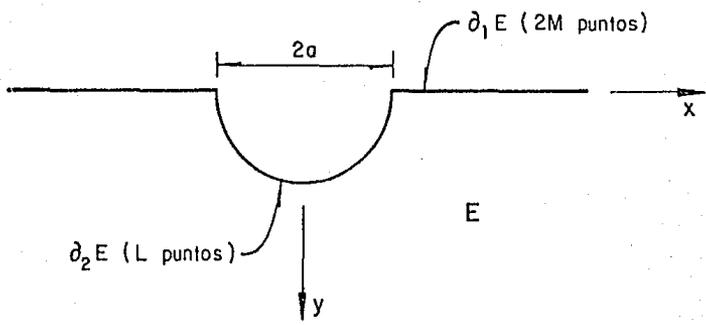


Fig 9. Cañón de sección semicircular en la superficie del semiespacio elástico

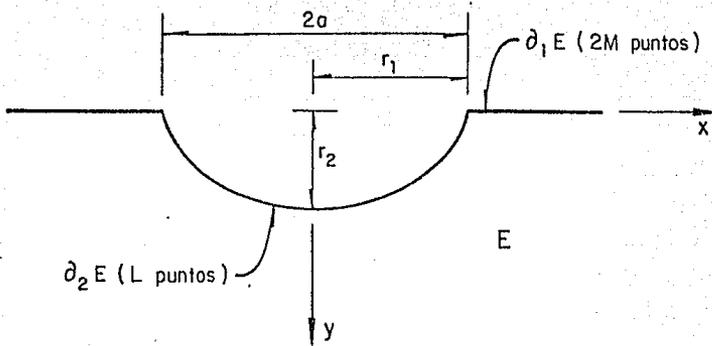


Fig 10. Cañón de sección semielíptica en la superficie del semiespacio elástico

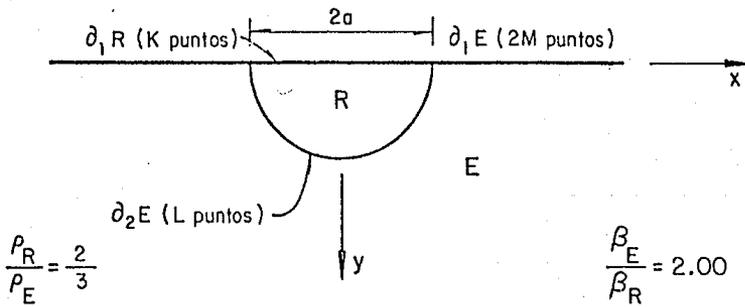


Fig 11. Depósito de sección semicircular en la superficie del semiespacio elástico

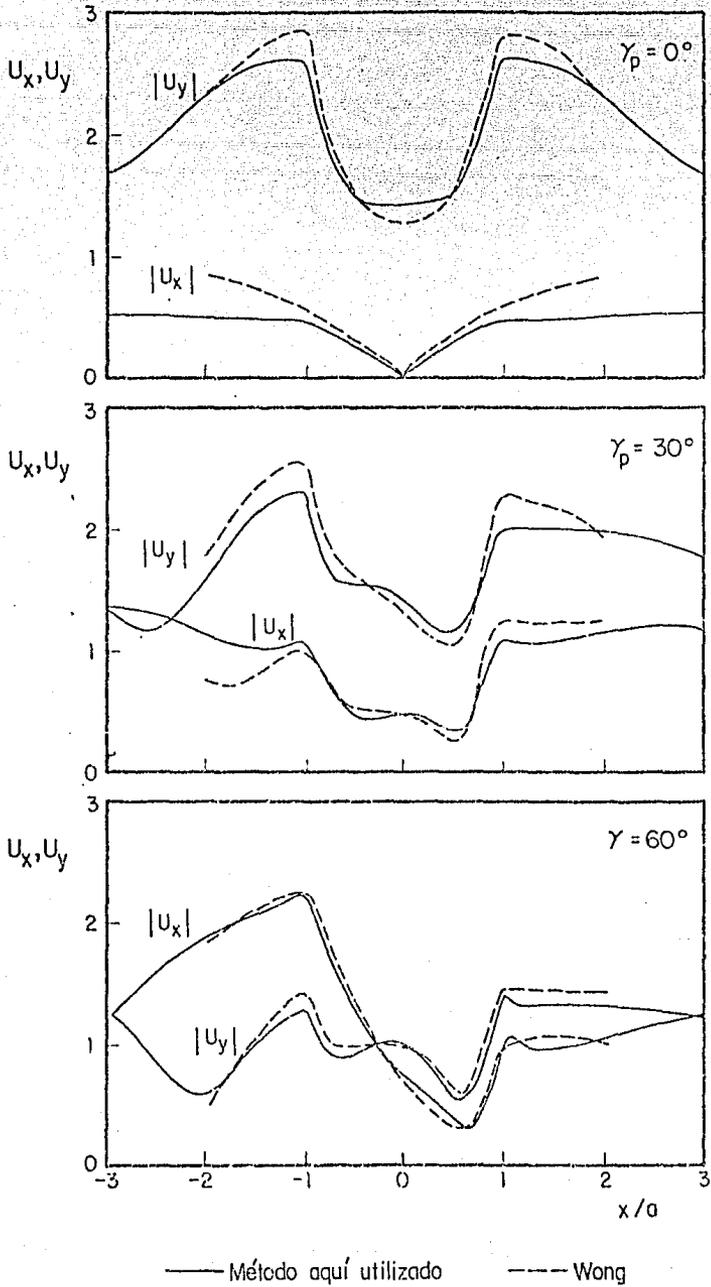


Fig 12. Comparación de resultados para un cañón semicircular. Incidencia de ondas P. Frecuencia adimensional $\eta_k = 0.50$. Amplitudes de los desplazamientos horizontales (U_x) y verticales (U_y)

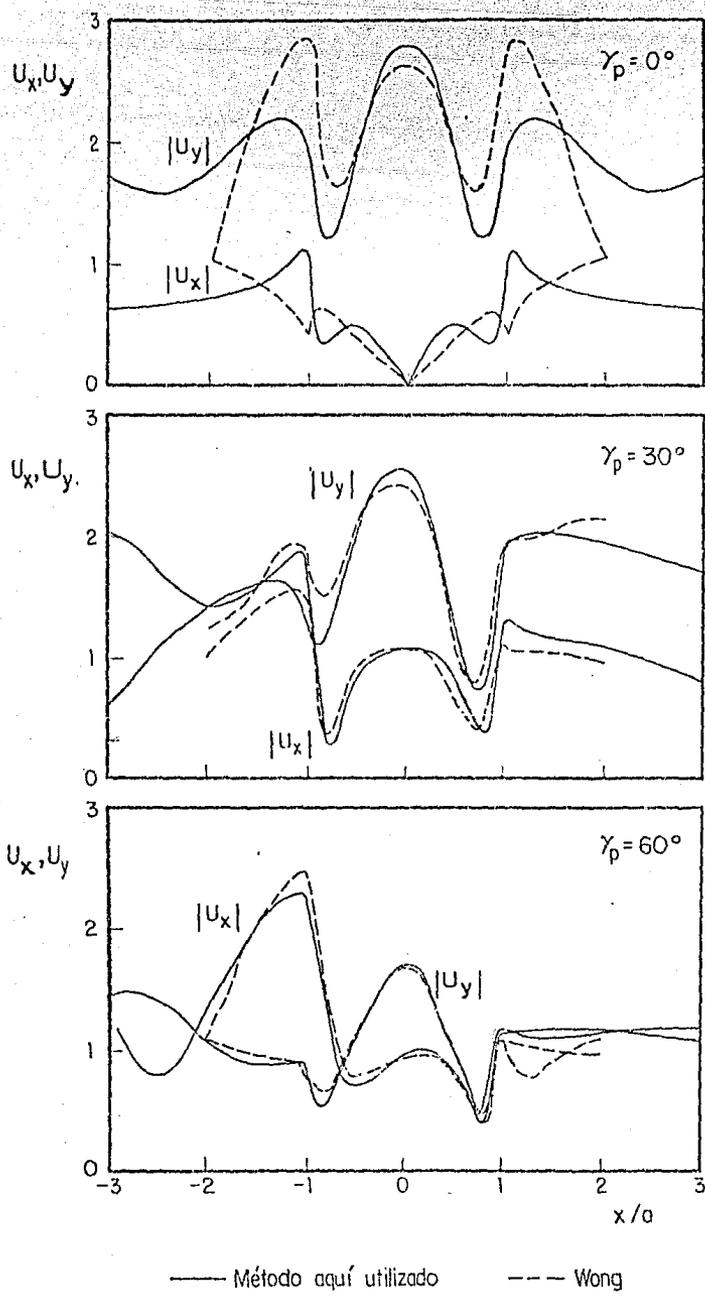


Fig 13. Comparación de resultados para un cañón semicircular. Incidencia de ondas P. Frecuencia adimensional $\eta_k = 0.75$. Amplitudes de los desplazamientos horizontales (U_x) y verticales (U_y)

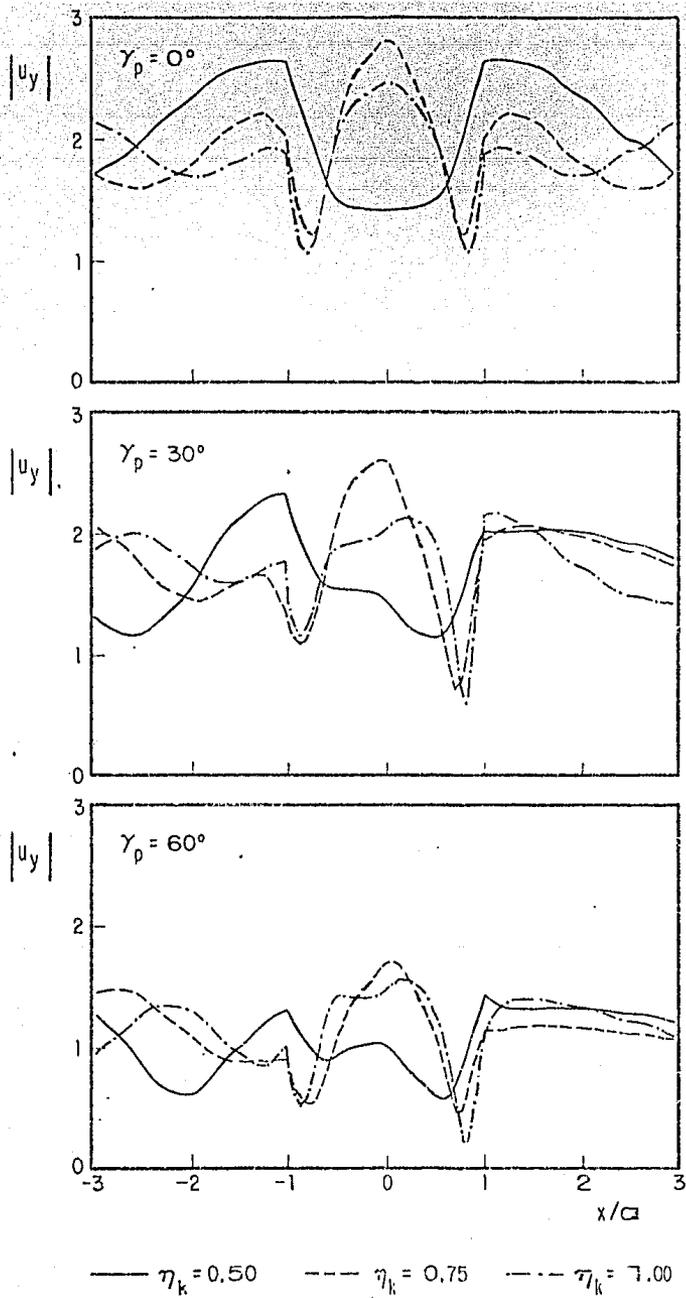


Fig 14. Amplitudes de los desplazamientos verticales. Cañón semicircular. Incidencia de ondas P

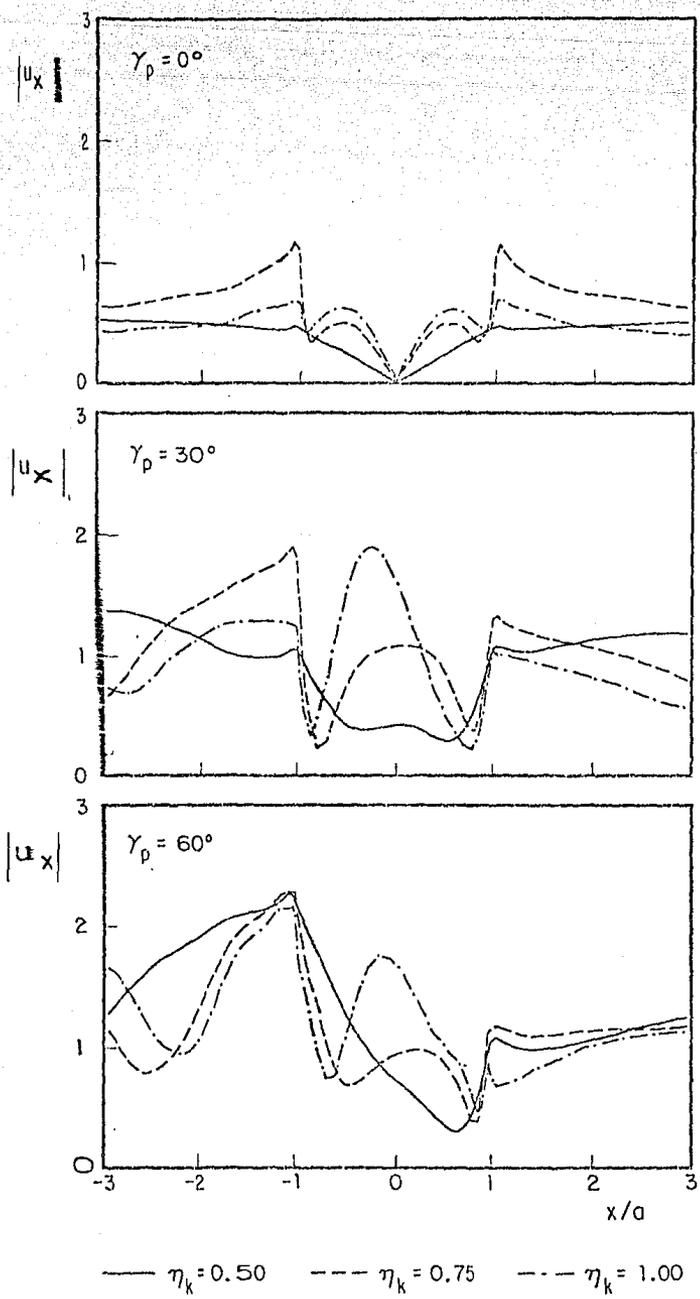


Fig 15. Amplitudes de los desplazamientos horizontales. Cañón semicircular. Incidencia de ondas P

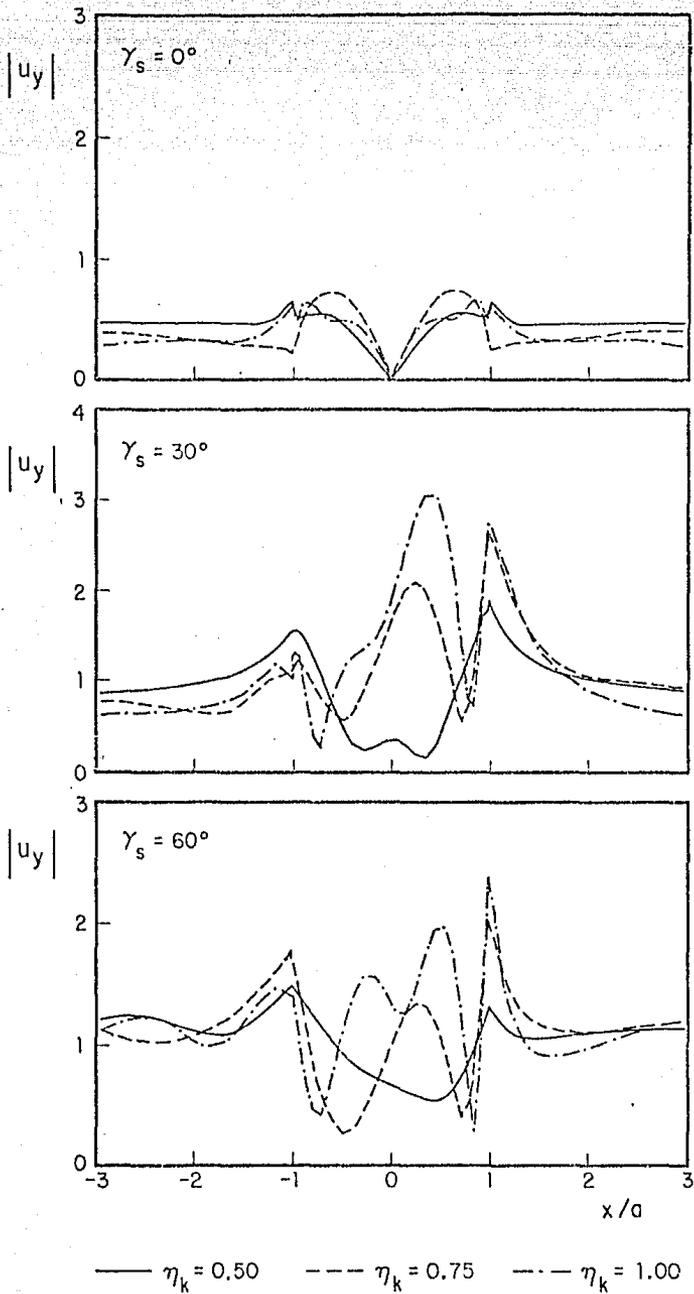


Fig 16. Amplitudes de los desplazamientos verticales. Cañón semicircular. Incidencia de ondas SV

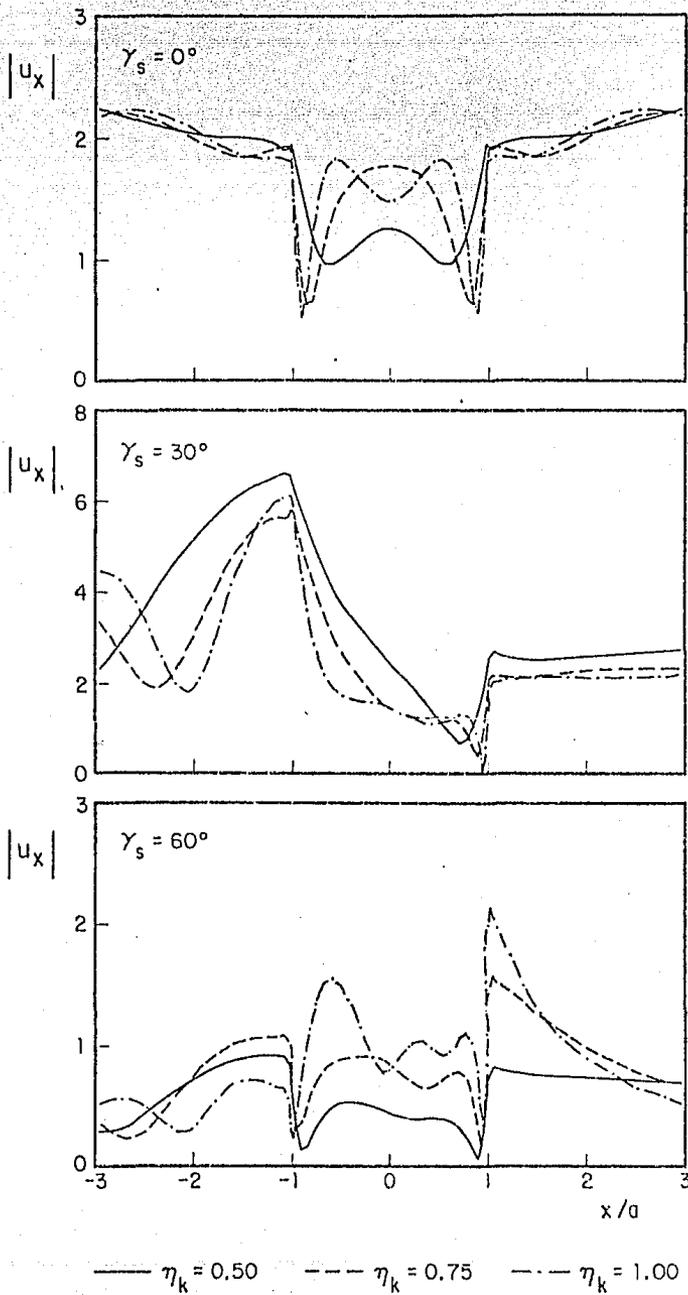


Fig 17. Amplitudes de los desplazamientos horizontales. Cañón semicircular. Incidencia de ondas SV

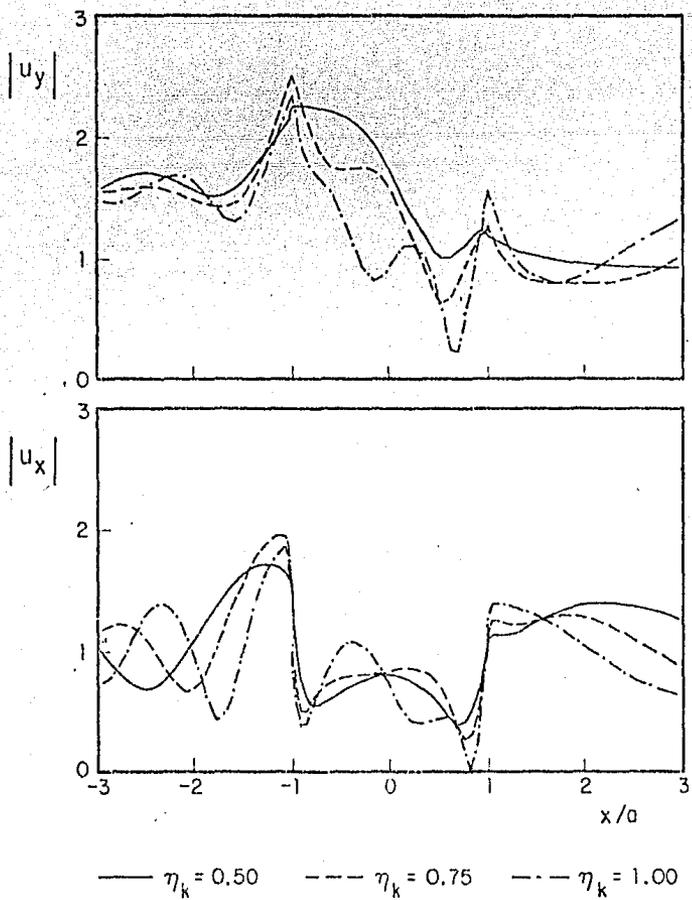


Fig 18. Amplitudes de los desplazamientos verticales y horizontales, respectivamente. Cañón semicircular. Incidencia de ondas de Rayleigh

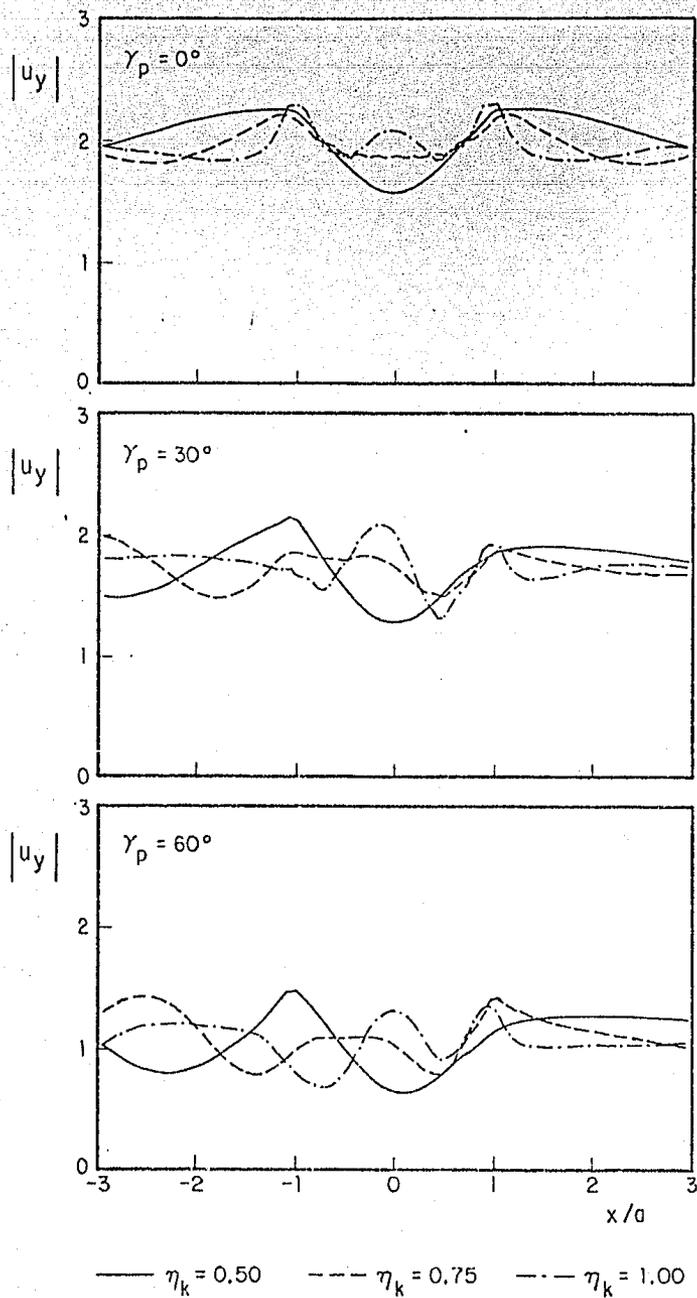


Fig 19. Amplitudes de los desplazamientos verticales. Cañón sernielíptico ($r_2/r_1=0.50$). Incidencia de ondas P

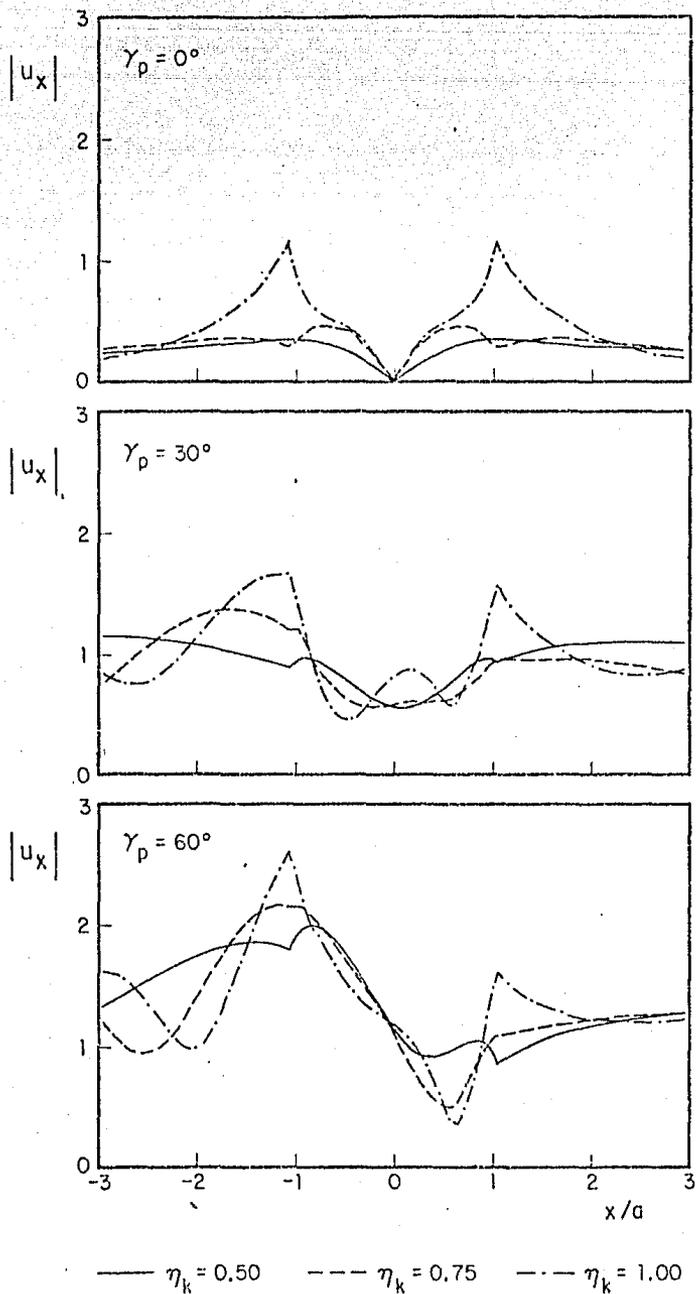


Fig 20. Amplitudes de los desplazamientos horizontales. Cañón semielíptico ($r_2/r_1=0.50$). Incidencia de ondas P

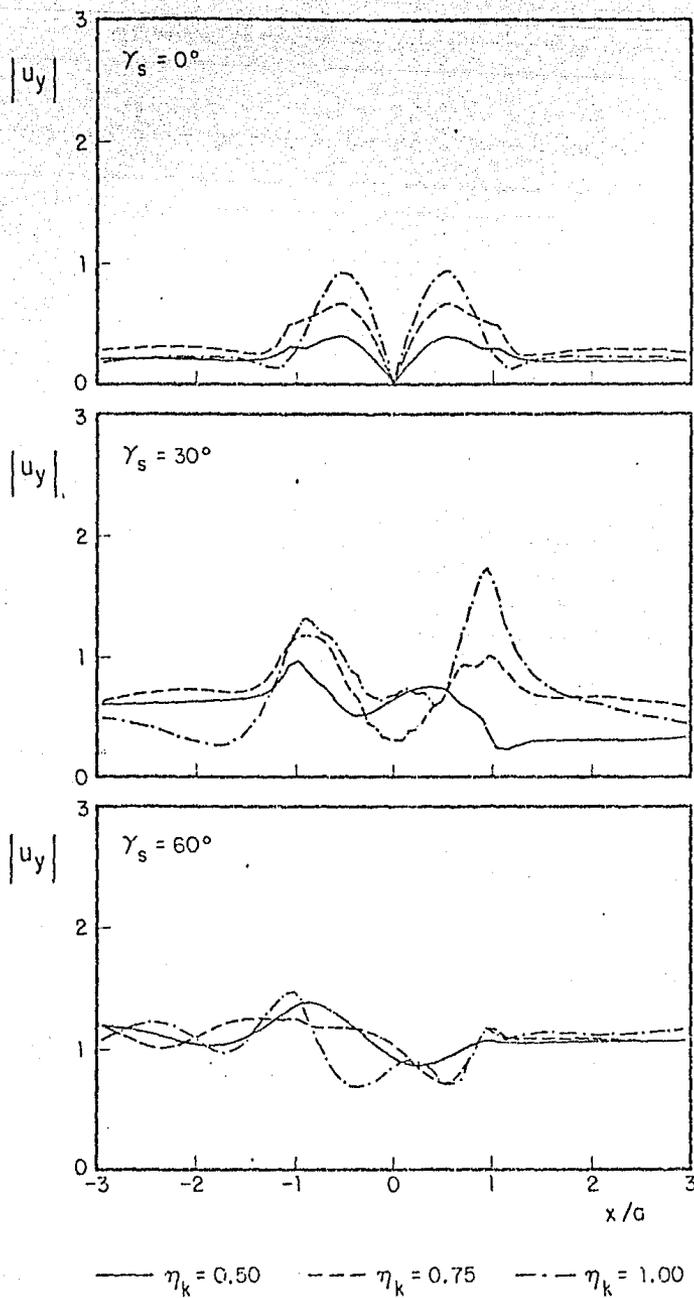


Fig 21. Amplitudes de los desplazamientos verticales. Cañón semielíptico ($r_2/r_1=0.50$). Incidencia de ondas SV

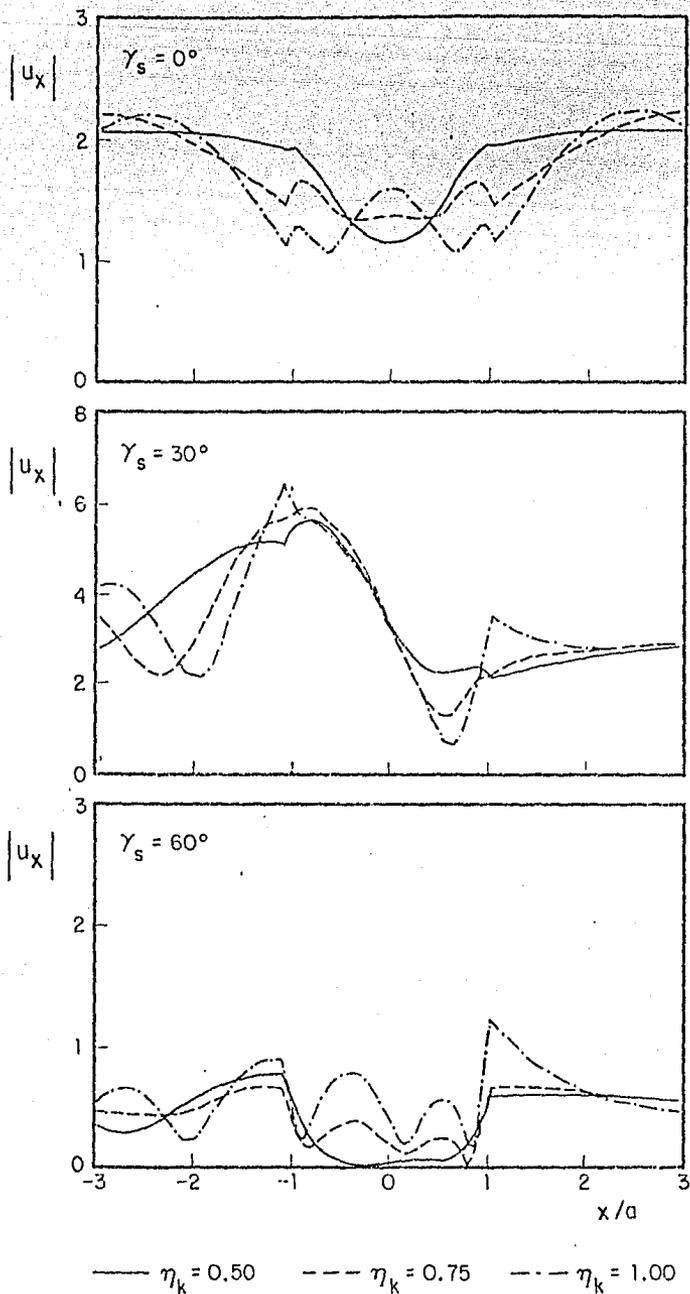


Fig 22. Amplitudes de los desplazamientos horizontales. Cañon semielíptico ($r_2/r_1 = 0.50$). Incidencia de ondas SV

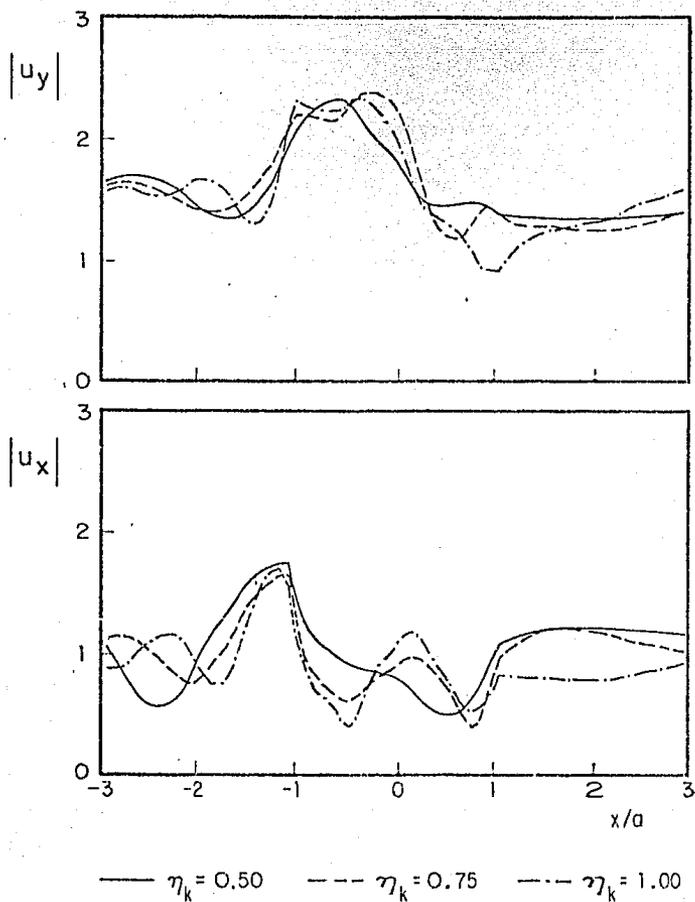


Fig 23. Amplitudes de los desplazamientos verticales y horizontales, respectivamente. Cañón semielíptico ($r_2/r_1 = 0.50$). Incidencia de ondas de Rayleigh

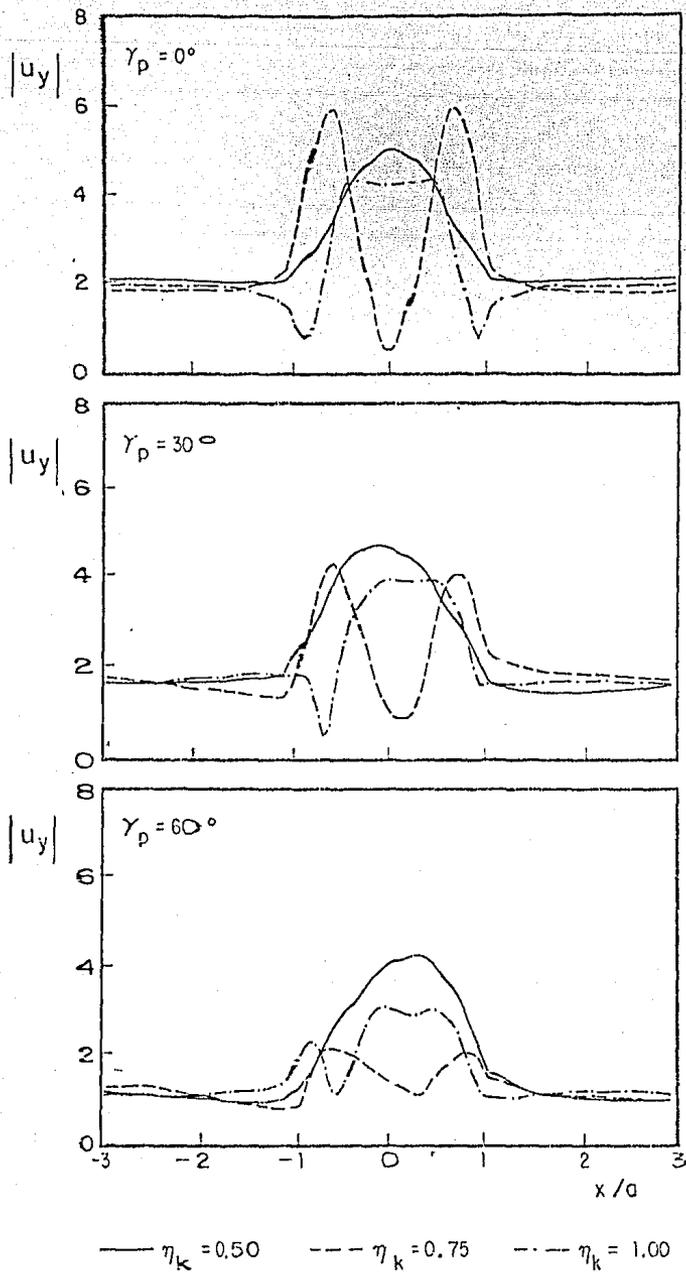


Fig 24. Amplitudes de los desplazamientos verticales. Depósito semicircular ($\rho_R/\rho_E = 2/3$, $\beta_E/\beta_R = 2.00$). Incidencia de ondas P

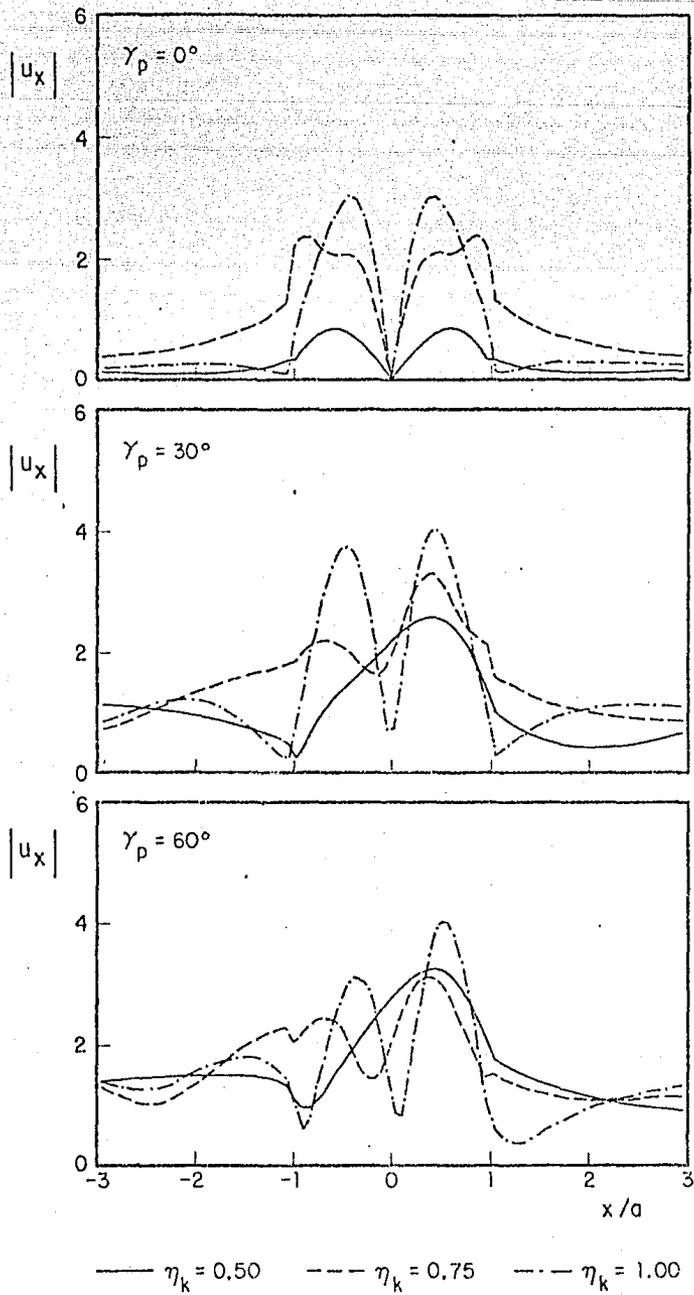


Fig 25. Amplitudes de los desplazamientos horizontales. Depósito semicircular ($\rho_R/\rho_E = 2/3$, $\beta_E/\beta_R = 2.00$). Incidencia de ondas P

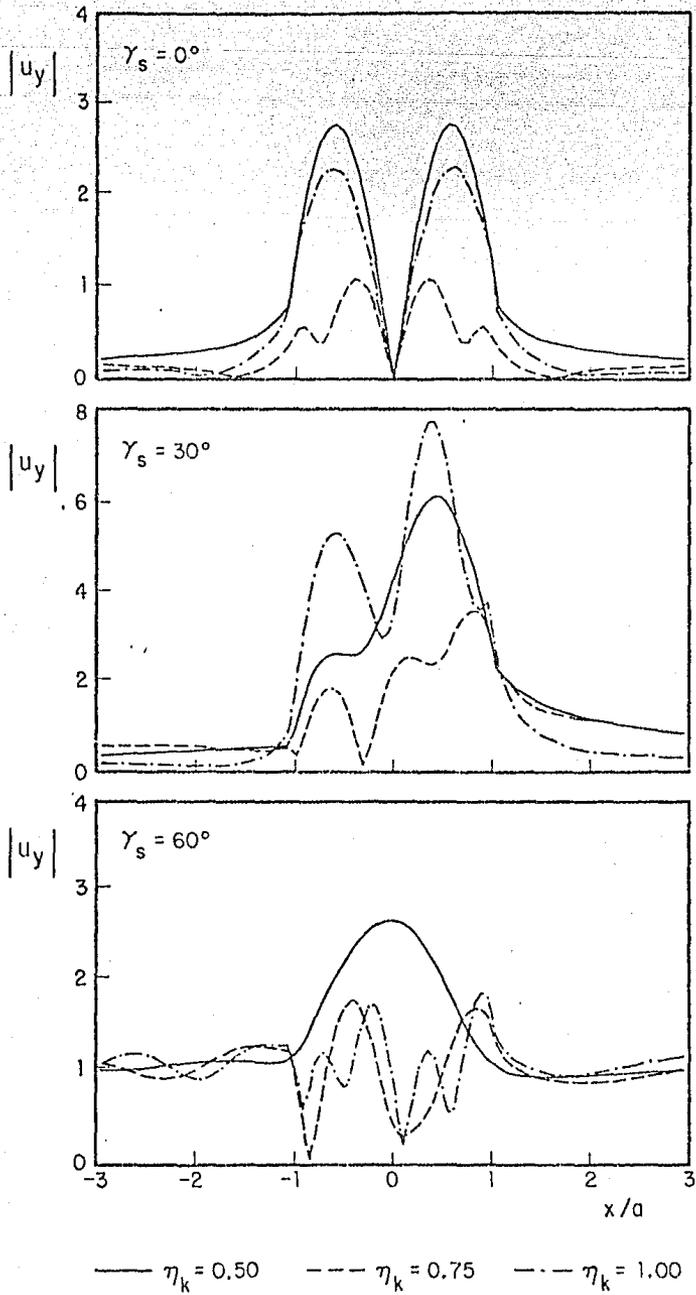


Fig 26. Amplitudes de los desplazamientos verticales. Depósito semicircular ($\rho_R/\rho_E = 2/3$, $\beta_E/\beta_R = 2.00$). Incidencia de ondas SV

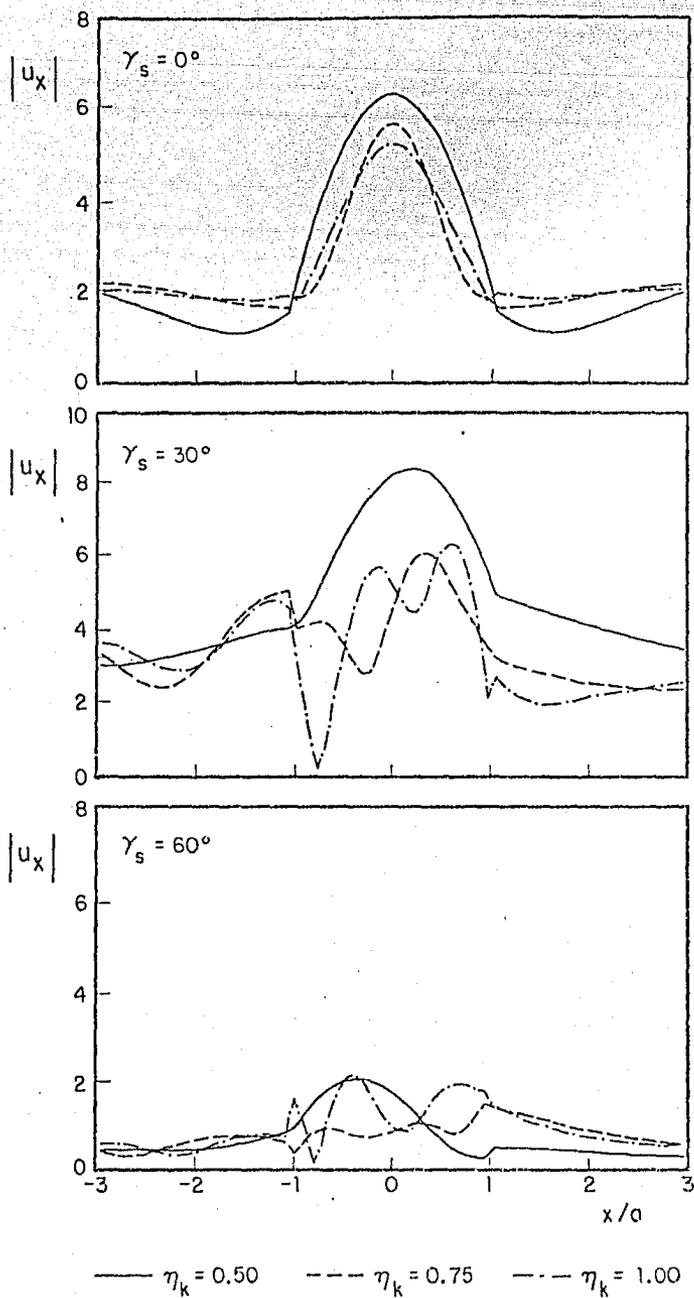


Fig 27. Amplitudes de los desplazamientos horizontales. Depósito semicircular ($\rho_R/\rho_E = 2/3$, $\beta_E/\beta_R = 2.00$). Incidencia de ondas SV

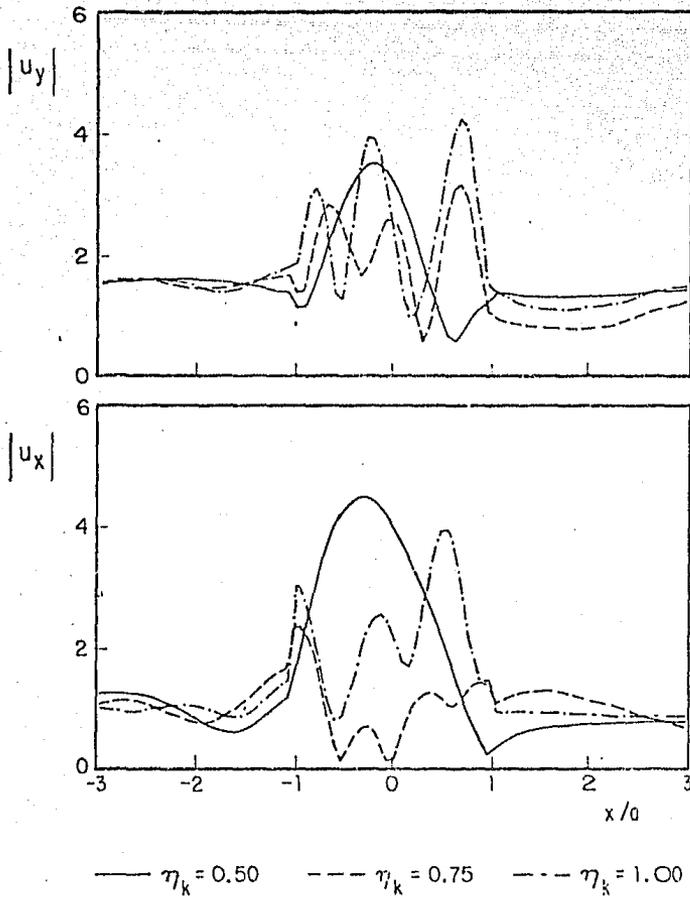


Fig 28. Amplitudes de los desplazamientos verticales y horizontales, respectivamente. Depósito semicircular ($\rho_R/\rho_E = 2/3$, $\beta_E/\beta_R = 2.00$). Incidencia de ondas de Rayleigh

A P E N D I C E A

EXPRESIONES DE ESFUERZO Y DESPLAZAMIENTO DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE. ONDAS P, SV Y DE RALEIGH

Considérense los potenciales

$$\phi(f) = (A_1 e^{imy} + A_2 e^{-imy}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (A.1)$$

$$\psi(f) = (B_1 e^{iky} + B_2 e^{-iky}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (A.2)$$

donde $l = \omega/c$, $m = lf_\alpha$, $k = lf_\beta$, $\omega =$ frecuencia circular ($\omega > 0$) y

$$f_\alpha = (c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2} \quad (A.3)$$

$$f_\beta = (c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} \quad (A.4)$$

Puede demostrarse que la velocidad de fase aparente en la superficie está relacionada con las velocidades de propagación α y β mediante

$$c = \frac{\alpha}{\text{sen}\gamma_p} = \frac{\beta}{\text{sen}\gamma_s} \quad (A.5)$$

donde γ_p y γ_s = ángulos de incidencia y reflexión de las ondas P y S respectivamente como se muestra en las figs A.1 y A.2.

Los coeficientes A_1 y B_1 son las amplitudes de potenciales de ondas planas incidentes P y SV, respectivamente. A_2 y B_2 representan a las ondas reflejadas.

Los desplazamientos $u_x^{(f)}$ y $u_y^{(f)}$ de campo libre que satisfacen la ecuación reducida de Navier están dados por

$$u_x^{(f)} = \frac{\partial \phi^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial y} \quad (A.6)$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$u_y^{(f)} = \frac{\partial \phi^{(f)}}{\partial y} - \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial x} \quad (A.7)$$

y los componentes del tensor de esfuerzos de campo libre son

$$\sigma_{xx}^{(f)} = \sigma_x^{(f)} = \lambda e + 2\mu \epsilon_x \quad (A.8)$$

$$\sigma_{yy}^{(f)} = \sigma_y^{(f)} = \lambda e + 2\mu \epsilon_y \quad (A.9)$$

$$\sigma_{xy}^{(f)} = \tau_{xy}^{(f)} = \mu \gamma_{xy} \quad (A.10)$$

donde

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial x} \quad (A.11)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial y} \quad (A.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial y} \quad (A.13)$$

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y \quad (A.14)$$

Sustituyendo las ecs A.1 y A.2 en las ecs A.6- A.14 se tiene que

$$u_x^{(f)} = -i\ell\phi_1 + ik\psi_2 \quad (A.15)$$

$$u_y^{(f)} = im\phi_2 + i\ell\psi_1 \quad (A.16)$$

$$\sigma_x^{(f)} = -\lambda (\ell^2 + m^2) \phi_1 + 2\mu [-\ell^2 \phi_1 + k\ell\psi_2] \quad (A.17)$$

$$\sigma_y^{(f)} = -\lambda (\ell^2 + m^2) \phi_1 + 2\mu [-m^2 \phi_1 - k\ell\psi_2] \quad (A.18)$$

$$\tau_{xy}^{(f)} = \mu [2m\ell\phi_2 + (\ell^2 - k^2) \psi_1] \quad (A.19)$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 y ψ_2 están dados, omitiendo el factor $e^{i\omega t}$, por

$$\phi_1 = (\Lambda_1 e^{imy} + \Lambda_2 e^{-imy}) e^{-ilx} \quad (\text{A.20})$$

$$\phi_2 = (\Lambda_1 e^{imy} + \Lambda_2 e^{-imy}) e^{-ilx} \quad (\text{A.21})$$

$$\psi_1 = (B_1 e^{-iky} + B_2 e^{-iky}) e^{-ilx} \quad (\text{A.22})$$

$$\psi_2 = (B_1 e^{iky} - B_2 e^{-iky}) e^{-ilx} \quad (\text{A.23})$$

Para incidencia de ondas P se tiene que $B_1 = 0$ y que $\beta < \alpha < |c|$. La satisfacción de las condiciones de frontera libre en $y = 0$, es decir $\sigma_y^{(f)} = \tau_{xy}^{(t)} = 0$, conduce a

$$\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{B_2}{\Lambda_1} = \frac{4f_\alpha (f_\beta^2 - 1)}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.25})$$

que son las amplitudes de los potenciales de las ondas P y SV reflejadas, en términos de la amplitud de la onda incidente.

En la incidencia de ondas SV, $\Lambda_1 = 0$, se tienen dos casos; cuando $\beta < \alpha < |c|$ y cuando $\beta < |c| < \alpha$. En este último se tendrá que la onda P reflejada será inhomogénea, es decir f_α será una cantidad imaginaria. Si se acepta que $\text{Im}(f_\alpha) < 0$ se tendrá, para las amplitudes de las ondas reflejadas por la superficie libre, que en los dos casos

$$\frac{\Lambda_2}{B_1} = - \frac{4f_\beta (f_\beta^2 - 1)}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.27})$$

Existe otra condición dada por $|c| < \beta < \alpha$ que no corresponde a ondas incidentes P o SV finitas pues en este caso f_α y f_β son imaginarias. Es decir que, si se acepta que $\text{Im}(f_\alpha) < 0$ e $\text{Im}(f_\beta) < 0$, hay que tomar $A_1 = B_1 = 0$. El sistema de ecuaciones resultante de imponer condiciones de frontera es homogéneo. Así, se obtiene que

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2f_\beta}{f_\beta^2 - 1} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{(f_\beta^2 - 1)}{2f_\alpha} \quad (\text{A.29})$$

que deben ser iguales, de donde la condición que debe cumplirse es

$$4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2 = 0 \quad (\text{A.30})$$

que es la ecuación de Rayleigh. La raíz real de esta ecuación $c = c_R$, es la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh. Las ondas de Rayleigh son ondas superficiales que se atenúan con la profundidad, están compuestas de ondas P y SV que viajan acopladas con una velocidad $c_R < \beta$. Las partículas en la superficie describen trayectorias elípticas retrógradas. En la fig A.3 se esquematizan algunas características de las ondas de Rayleigh.

En un caso dado, basta conocer la velocidad de fase, mediante la ec A.5 o la A.30, y calcular f_α y f_β de las ecs A.3 y A.4, con la

precaución de tomarlos, cuando sean imaginarios, negativos.

Las amplitudes se calculan con las ecs A.24 y A.25 o A.26 y A.27 o A.28 y A.29, según el caso.

Finalmente, las ecs A.15 - A.19 proporcionan los desplazamientos y esfuerzos de la solución de campo libre.

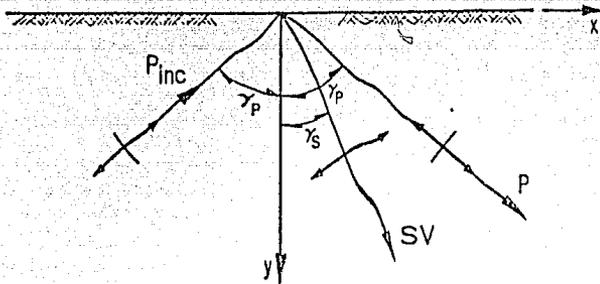


Fig A-1. Incidencia de ondas P

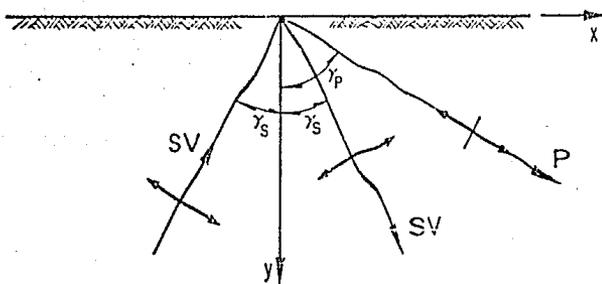


Fig A-2. Incidencia de ondas SV

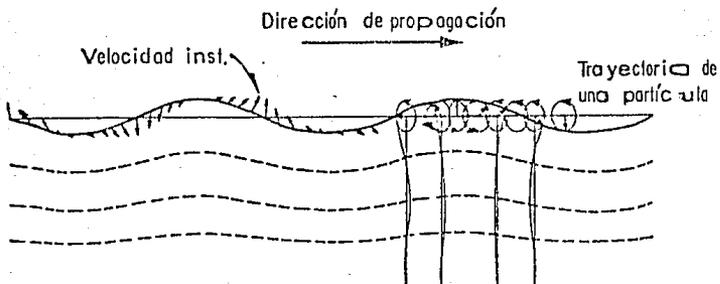


Fig A-3. Ondas de Rayleigh

A P E N D I C E · B

EXPRESIONES PARA DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS EN COORDENADAS
POLARES

A partir de los potenciales dados en las ecs 23 y 24, las expresiones para los desplazamientos y esfuerzos en coordenadas polares, obtenidos con las ecs 16 y 17, y 18 - 20, respectivamente, están dadas por

$$v_r^j = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=1}^N A_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^1(q_j r) + \sum_{n=0}^N B_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^1(q_j r) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^N C_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^2(k_j r) - \sum_{n=1}^N D_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^2(k_j r) \right\} \quad (\text{B.1})$$

$$v_\theta^j = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=0}^N A_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^2(q_j r) - \sum_{n=1}^N B_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^2(q_j r) \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^N C_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^1(k_j r) - \sum_{n=0}^N D_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^1(k_j r) \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma_r^j = \frac{2\mu_j}{r^2} \left\{ - \sum_{n=1}^N A_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^3(q_j r) - \sum_{n=0}^N B_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^3(q_j r) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^N C_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^4(k_j r) - \sum_{n=1}^N D_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^4(k_j r) \right\} \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_\theta^j = \frac{2\mu_j}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^N A_n^j \operatorname{sen} n\theta y_n^5(q_j r) + \sum_{n=0}^N B_n^j \operatorname{cos} n\theta y_n^5(q_j r) \right.$$

$$- \sum_{n=0}^N C_n^j \cos n\theta y_n^4(k_j r) + \sum_{n=1}^N D_n^j \sin n\theta y_n^4(k_j r) \} \quad (B.4)$$

$$\tau_{r\theta}^j = \frac{2\mu_j}{r^2} \left\{ \sum_{n=0}^N A_n^j \cos n\theta y_n^4(q_j r) - \sum_{n=1}^N B_n^j \sin n\theta y_n^4(q_j r) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N C_n^j \sin n\theta y_n^3(k_j r) + \sum_{n=0}^N D_n^j \cos n\theta y_n^3(k_j r) \right\} \quad (B.5)$$

donde

$$y_n^1(z) = z \mathfrak{C}_{n-1}(z) - n \mathfrak{C}_n(z) \quad (B.6)$$

$$y_n^2(z) = n \mathfrak{C}_n(z) \quad (B.7)$$

$$y_n^3(z) = z \mathfrak{C}_{n-1}(z) - (n^2 + n - \frac{1}{2} k^2 r^2) \mathfrak{C}_n(z) \quad (B.8)$$

$$y_n^4(z) = n z \mathfrak{C}_{n-1}(z) - (n^2 + n) \mathfrak{C}_n(z) \quad (B.9)$$

$$y_n^5(z) = z \mathfrak{C}_{n-1}(z) - (n^2 + n - z^2 + \frac{1}{2} k^2 r^2) \mathfrak{C}_n(z) \quad (B.10)$$

Las expresiones B.1 - B.5 están definidas para cada región $j=R$ o E . Para $j = R$ se tiene $\mathfrak{C}_n(\cdot) = J_n(\cdot)$, mientras que para $j=E$ se tiene $\mathfrak{C}_n(\cdot) = H_n^{(2)}(\cdot)$.

Aquí $J_n(\cdot)$ = función de Bessel de primera especie y orden n ;
 $H_n^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n .

Tanto los vectores de desplazamiento como los componentes del tensor de esfuerzos dependen de cuatro grupos de constantes en

cada región. Por ejemplo, las ecs B.1 y B.2 pueden escribirse en forma

$$v_i^j = \sum_{m=1}^{4N+2} B_m^j w_{i_m}^j \quad (\text{B.11})$$

donde $w_{i_m}^j$ son los vectores de desplazamiento asociados a la constante B_m^j en la región $j = R$ o E . Nótese que el número de términos de la ec B.11 es $4N+2$. Los grupos dependientes de las constantes A_n, B_n, C_n y D_n son, respectivamente, de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \operatorname{sen} n\theta y_n^1(q_j r) \\ \frac{1}{r} \operatorname{cos} n\theta y_n^2(q_j r) \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \operatorname{cos} n\theta y_n^1(q_j r) \\ -\frac{1}{r} \operatorname{sen} n\theta y_n^2(q_j r) \end{array} \right. \quad (\text{B.13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \operatorname{cos} n\theta y_n^2(k_j r) \\ -\frac{1}{r} \operatorname{sen} n\theta y_n^1(k_j r) \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r} \operatorname{sen} n\theta y_n^2(k_j r) \\ -\frac{1}{r} \operatorname{cos} n\theta y_n^1(k_j r) \end{array} \right. \quad (\text{B.15})$$

A P E N D I C E . C

OPTIMACION DE LOS PARAMETROS QUE INTERVIENEN EN LA
SOLUCION NUMERICA

q	6	7	8	9	10
S	2.232	1.474	0.549	0.636	—
$\Delta u_{\text{máx}}$	4.496	5.059	1.859	2.221	—
$x/a(\Delta u_{\text{máx}})$	0.838	0.838	0.838	0.838	—

Tabla C.1. Optimación del parámetro $q_1=q_2=q$ (Ver fig C.1).
Parámetros fijos: $D=2$, $N=8$.

D	2	3	4	5	6
S	9.453	3.988	2.919	3.480	—
$\Delta u_{\text{máx}}$	23.34	11.04	7.800	1.452	—
$x/a(\Delta u_{\text{máx}})$	0.838	0.939	0.998	0.998	—

Tabla C.2. Optimación del parámetro D. (Ver fig. C.2).
Parámetros fijos: $N=8$, $q_1=q_2=10$.

N	4	6	8	10	12
S	3.564	1.284	4.098	1.605	—
$\Delta u_{\text{máx}}$	11.16	4.005	12.18	4.900	—
$x/a(\Delta u_{\text{máx}})$	0.838	1.350	0.998	0.998	—

Tabla C.3. Optimación del parámetro N (Ver fig C.3).
Parámetros fijos: $q_1=q_2=10$, $D=6$.

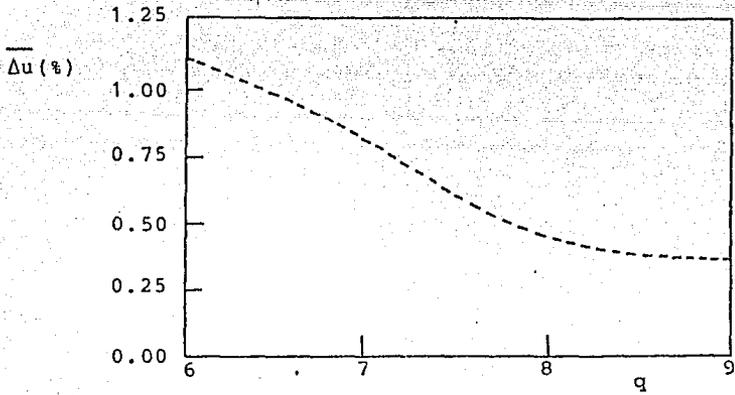


Fig C.1. Optimización del parámetro $q_1=q_2$

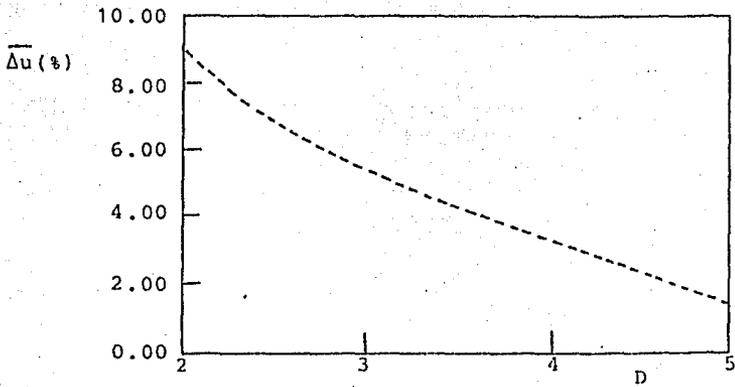


Fig C.2. Optimización del parámetro D.

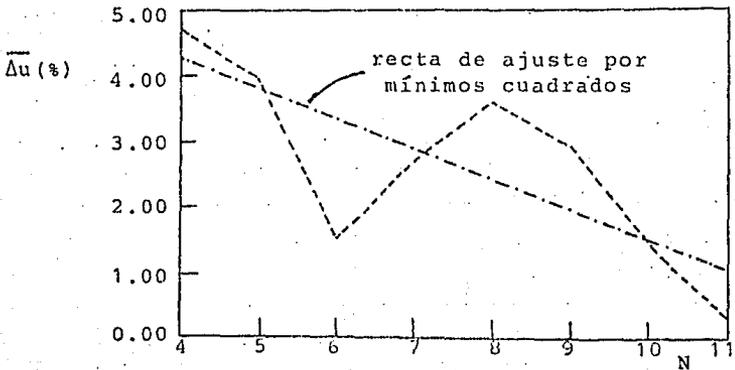


Fig C.3. Optimización del parámetro N.