

00362

rej.
1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

*EL METODO ESPECTRAL APLICADO A LA
ECUACION DE VORTICIDAD BAROTROPICA*

T E S I S
Que para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (FISICA)
P r e s e n t a :
TELMA G. CASTRO ROMERO

00362.
1983.

México, D.F.

1983

TESIS CON
FALTA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Página

INTRODUCCION	1
CAPITULO I.- El Modelo Barotrópico	4
1. Ecuación de movimiento	4
2. Ecuación de continuidad	9
3. Coordenadas isobáricas	9
4. Notación	13
5. La importancia del campo $z(x, y, p, t)$	14
6. Ecuación de vorticidad , Ecuación vorticidad barotrópica.	16
7. Ecuación para la evolución del campo $z(x, y, p, t)$	20
CAPITULO II.- Solución del Modelo Barotrópico por el método espectral	23
MANEJO DE DATOS	41
RESULTADOS	42
CONCLUSIONES	49
APENDICE A	50
BIBLIOGRAFIA	53

INTRODUCCION

Los modelos numéricos para describir los movimientos de "escala sinóptica" de la atmósfera progresaron rápidamente desde los primeros experimentos para predicción del tiempo hechos por Charney en 1947. Con la evolución de las computadoras, métodos numéricos y avances en los procesos físicos que describen el flujo atmosférico, fue posible tener simulaciones más realistas de la circulación atmosférica.

Existen dos métodos numéricos que comunmente se emplean en los modelos atmosféricos: el de diferencias finitas y el espectral.

El método de diferencias finitas se utiliza para representar a las variables dinámicas sobre una malla de puntos (grid point) en el espacio y el tiempo, y las derivadas de la ecuación se evalúan usando series de Taylor.

El otro método es el que representa las variables dependientes como una suma de funciones que tienen una estructura especial preescrita. Los coeficientes asociados con cada función son normalmente función del tiempo. Este método transforma una ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones para los coeficientes. Estas ecuaciones se resuelven por diferencias finitas en el tiempo. En el método espectral se emplean funciones ortogonales.

El desarrollo del método espectral para la integración numérica de las ecuaciones que describen el movimiento de la atmósfera, fueron tratados primeramente por Siberman en 1954 considera una geometría esférica para la integración de la ecuación de vorticidad barotrópica.

Demuestra que cuando la función de corriente se expresa como una suma de superficies esféricas armónicas, la ecuación de vorticidad barotrópica da origen a ecuaciones de tendencia armónica, las cuales expresan la razón de cambio en el tiempo de los coeficientes de los armónicos como función de todos los coeficientes de los armónicos. Conocidos los coeficientes iniciales, las ecuaciones de tendencia pueden usarse en procesos iterativos para encontrar el patrón de flujo en un tiempo futuro.

Estudios posteriores del método espectral fueron realizados por Lorenz (1960), Platzman (1960), Kubota (1961), Baer y Platzman (1961) y Elsaesser (1966). Los estudios

de Lorenz demuestran que las ecuaciones dinámicas que escriben los fenómenos atmosféricos, pueden simplificarse para la predicción del tiempo. La ecuación de vorticidad barotrópica puede reducirse a un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales a través del uso de doble serie de Fourier y la omisión de todas las escalas grandes de movimiento. Estas ecuaciones se resuelven por integración numérica. Además, Lorenz demuestra que las ecuaciones espectrales truncadas para el flujo barotrópico no divergente, tienen la propiedad de que la media del cuadrado de la vorticidad y de la energía cinética son invariantes.

Platzman señaló que esta propiedad automáticamente elimina la inestabilidad no lineal, la cual ha sido una dificultad sustancial en los modelos de malla.

Kubota muestra que el método para integrar la ecuación de vorticidad con el uso de superficies armónicas tiene algunas ventajas sobre el método de diferencias finitas.

"Estas ventajas son: i). no se requiere del método de relajación para resolver la ecuación de vorticidad; ii). no son relevantes las condiciones de frontera; iii). no hay un error de truncación tan marcado como en el método de diferencias finitas".

Baer y Platzman presentan un proceso de integración numérica para la ecuación de vorticidad espectral construyendo una tabla de coeficientes de iteración, los cuales son constantes y sus valores se determinan por los números de onda.

Elsaesser, usando los datos meteorológicos hemisféricos como condición inicial, hace una comparación entre el método de malla y el espectral. Encuentra sólo una desventaja en el método espectral, al aplicarlo a la ecuación diferencial que incluye términos de orden superior: la ecuación de tendencia no puede aislarse para una expresión individual cuando se multiplican los términos que tienen derivadas respecto al tiempo por variables especiales. Excepto por la anterior desventaja, el método espectral es superior al de malla para problemas atmosféricos. Debido a que en un hemisferio o esfera, el problema de frontera lateral y el problema de proyección desaparecen.

Hasta aquí se han dado algunos antecedentes sobre el método espectral, aplicado a problemas atmosféricos.

Debido a que no fue posible conseguir más literatura sobre este tema, esta parte de antecedentes no se amplía más.

A continuación se presentan tres contribuciones en el uso del método espectral.

- Para resolver la ecuación de vorticidad barotrópica se expresa a la función de corriente mediante una doble serie de Fourier real. El uso de la doble serie hace posible, en este caso, manejar un álgebra más sencilla y permite una interpretación física de cada uno de los términos de las ecuaciones.
- Para calcular los coeficientes iniciales se aproximan por medio de integrales. La aproximación hace posible que el tiempo máquina se reduzca notablemente (de varias horas a un minuto).
- La solución de la ecuación de vorticidad barotrópica se adapta a las latitudes donde se encuentra la República Mexicana por lo que es de utilidad en nuestro país para propósitos de pronóstico de tiempo a corto plazo.

En el Capítulo I se muestra el desarrollo del modelo barotrópico no divergente, encontrándose una ecuación para la evolución del campo de las isohipsas a 500 mb.

En el Capítulo II se presenta la solución de la ecuación de vorticidad barotrópica por el método espectral en la región comprendida entre latitudes 10° y 46° norte y las longitudes 65° y 125° oeste. Además se muestra cómo manejar los datos enviados por las estaciones meteorológicas para su uso en el programa que resuelve la ecuación de interés. Por último, se presentan los resultados y conclusiones en donde las isohipsas del pronóstico y las isohipsas observadas, se comparan considerándolas como secuencias ordenadas de datos, determinándose la correlación entre estos, a fin de evaluar el grado de precisión del pronóstico lográndose un 85% de correlación máxima.

CAPITULO I :

EL MODELO BAROTROPICO

- 1.- Ecuaciones de movimiento.**
- 2.- Ecuación de continuidad.**
- 3.- Coordenadas isobáricas.**
- 4.- Notación.**
- 5.- La importancia del campo $z(x, y, p, t)$.**
- 6.- Ecuación de vorticidad.**
Ecuación vorticidad barotrópica.
- 7.- Ecuación para la evolución del campo $z(x, y, p, t)$.**

1.- Ecuaciones de movimiento

Para utilizar la segunda ley de Newton en problemas meteorológicos es conveniente presentarla en un marco de referencia desde el cual se simplifica el estudio del movimiento de la atmósfera. Para ello se considera a la Tierra como un marco de referencia inercial, sin embargo, debido a que la Tierra gira alrededor de su propio eje y además gira en torno al Sol, es necesario considerar las fuerzas inerciales que aparecen por estos movimientos. Como la aceleración que experimenta la Tierra por su movimiento de traslación alrededor del Sol puede despreciarse en comparación con las aceleraciones que experimenta un elemento de atmósfera, debidas a las fuerzas que ejercen sobre él sus alrededores y la fuerza de gravedad terrestre, es posible considerar que existe un marco de referencia desde el cual el centro de la Tierra está en reposo. Así, la Tierra tiene sólo un movimiento de rotación alrededor de su eje polar. Ahora, se verá como se relacionan las observaciones tomadas en el marco de referencia inercial con las que se toman en un marco de referencia que gire con la Tierra. Se considera el caso en el cual el marco de referencia experimenta traslación y rotación relativa a un marco de referencia inercial. El vector de posición de una partícula en el sistema inercial se denota por \bar{R} y en el sistema que se mueve por \bar{r} . Además, \bar{R}_0 es el vector de posición del sistema no inercial respecto al sistema inercial (véase figura 1), se tiene:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{r} \quad 1.1$$

derivando con respecto al tiempo la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \dot{\bar{R}}_0 + \dot{\bar{r}} + x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt} \quad 1.2$$

donde $\dot{\bar{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ da la velocidad de la partícula relativa al sistema en movimiento, (para todos los casos el punto arriba de las variables indica d/dt respecto al sistema no inercial). Y los términos $d\hat{i}/dt + y d\hat{j}/dt + z d\hat{k}/dt$ representan a la velocidad debida a la rotación del sistema OXYZ.

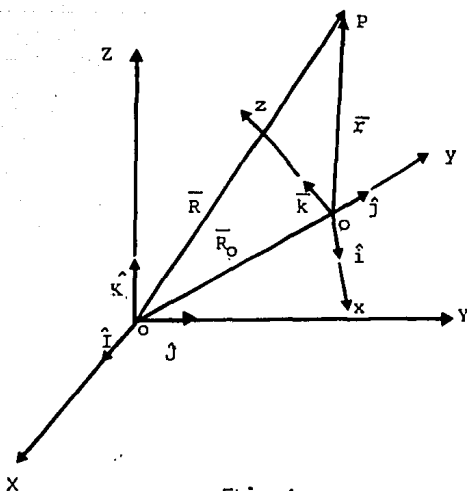


Figura 1

Sea $\hat{\lambda}$ un vector unitario que dá la dirección del eje de rotación del sistema no inercial, y sea $\bar{\Omega}$ la velocidad angular de rotación alrededor de este eje, entonces el producto $\bar{\Omega} \hat{\lambda}$ es la velocidad angular de rotación del sistema no inercial. El sentido del vector está dado por la regla de la mano derecha (véase figura 2). Para encontrar $d\hat{i}/dt$, $d\hat{j}/dt$ y $d\hat{k}/dt$ en términos de $\bar{\Omega}$ se considera la figura 2, en donde se muestra el cambio de $\Delta \hat{i}$ del vector unitario \hat{i} (los vectores \hat{j} y \hat{k} se omiten para dar mayor claridad). De la figura se ve que la magnitud de $\Delta \hat{i}$ está dada por $|\Delta \hat{i}| \approx \Delta \theta \sin \varphi$; donde $\Delta \theta$ es el ángulo que barre $\hat{i}(t)$ en un intervalo de tiempo Δt y φ es el ángulo entre \hat{i} y $\bar{\Omega}$. Entonces:

$$\left| \frac{d\hat{i}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \hat{i}}{\Delta t} \right| = \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi = \bar{\Omega} \sin \varphi$$

pero como $\Delta \hat{i}$ es perpendicular a $\bar{\Omega}$ y \hat{i} , es posible expresar $d\hat{i}/dt$ como el producto de cruz de $\bar{\Omega}$ y \hat{i} , es decir:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \bar{\Omega} \times \hat{i}$$

y procediendo en forma análoga, se encuentran expresiones similares para los vectores unitarios \hat{j} y \hat{k} .

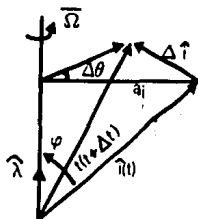


Figura 2

Utilizando estos resultados es posible expresar la parte de la velocidad que resulta por la rotación del sistema coordenado como:

$$x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt} = |\bar{\Omega}| \times \bar{r} \quad 1.3$$

substituyendo la ecuación (1.3) en (1.2), se obtiene:

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \dot{\bar{r}} + \bar{\Omega} \times \bar{r} + \dot{\bar{R}}_0 \quad 1.4$$

La ecuación anterior expresa la relación entre las derivadas temporales de los vectores de posición de una partícula moviéndose en dos sistemas coordenados; un sistema considerado como fijo X, Y, Z , y el otro con movimiento de traslación y rotación (x, y, z) . El término $\dot{\bar{R}}_0$ se debe únicamente al movimiento de traslación. En el caso de pura rotación, éste término no aparece. Como ya se había mencionado anteriormente, se considera que la tierra sólo tiene movimiento de rotación alrededor de su eje polar, entonces (1.4) queda:

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \dot{\bar{r}} + \bar{\Omega} \times \bar{r} \quad 1.5$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior, se tiene la relación entre las aceleraciones, es decir:

$$\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} + 2\bar{\Omega} \times \dot{\bar{r}} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad 1.6$$

donde se ha considerado que $\bar{\Omega}$ es constante para el caso de la tierra.

Denotando por \bar{F} a la fuerza real por unidad de masa† que actúa sobre un elemento de atmósfera, la segunda ley de Newton queda,

$$\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = \bar{F} \quad 1.7$$

de manera que:

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{F} - 2 \bar{\Omega} \times \bar{r} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \quad 1.8$$

Esta ecuación muestra que en el sistema de referencia que gira con la Tierra, aparecen dos fuerzas inerciales la fuerza de Coriolis $-2 \bar{\Omega} \times \bar{r}$ y la fuerza centrífuga $-\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$. Suponiendo que las fuerzas reales que actúan sobre un elemento de atmósfera se deben a la presión, la gravedad y la fricción (Holton, 1979), entonces la segunda ley de Newton (1.7), con ayuda de (1.8), queda como:

$$\ddot{\bar{r}} = -2 \bar{\Omega} \times \bar{r} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \bar{g} + \bar{F}_f, \quad 1.9$$

donde \bar{F}_f designa a las fuerzas de fricción, (esta fuerza es la resultante de las fuerzas tangenciales debidas a la viscosidad y como se considera al aire como un fluido no viscoso, entonces puede ser despreciada) y $\bar{g} = \bar{g}^* - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$ es la llamada "gravedad efectiva". Esta expresión para \bar{g} se emplea puesto que para un observador fijo en la Tierra no es posible medir por separado la fuerza centrífuga y la fuerza de gravedad.

En un sistema de coordenadas cartesianas fijo a la Tierra, tal que: el eje X sea tangente a la superficie terrestre y dirigido hacia el este; el eje Y sea tangente a la superficie terrestre y dirigido hacia el norte y, el eje Z normal a la superficie terrestre y dirigido hacia arriba, la ecuación (1.9) expresada en componentes queda:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - 2\Omega w \cos \varphi \quad 1.10$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - f u \quad 1.11$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \varphi \quad 1.12$$

donde $f \equiv 2 \Omega \sin \varphi$ se le llama parámetro de Coriolis, Holton (1979); φ es la latitud.

(†) De aquí en adelante, al hacer referencia a las fuerzas, se consideran por unidad de masa.

Por medio de un análisis de escala sinóptica (véase página 52), es posible simplificar las ecuaciones de movimiento (1.10, 1.11, 1.12). Se sabe que las escalas características de las variables de campo de la atmósfera son las siguientes: (Holton, 1979; Thompson, 1961).

Velocidad horizontal	$U = 10 \text{ m/seg}$
Velocidad vertical	$W = 10^{-2} \text{ m/seg}$
Fluctuación horizontal de la presión	$\Delta P = 10^3 \text{ N/m}^2$
Espesor de la tropósfera	$H = 10^4 \text{ m}$
Presión al nivel del mar	$P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$
Aceleración de la gravedad	$G = 10 \text{ m/seg}^2$
Densidad del aire	$D = 1 \text{ kg/m}^3$
Parámetro de Coriolis	$F = 10^{-4} \text{ seg}$
Escala espacial de los fenómenos atmosféricos	$L = 10^6 \text{ m}$
Escala temporal de los fenómenos atmosféricos	$L/U = 10^5 \text{ seg}$

Con estas escalas características se pueden estimar las magnitudes de los distintos términos de las ecuaciones de movimiento, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Componente x	$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fv - 2\Omega w \cos \varphi$			
Componente y	$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + fu$			
Escala de términos individuales	$\frac{U^2}{L}$	$\frac{\Delta P}{DL}$	FU	FW
Magnitud de términos (m/seg ²)	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-6}
Componente z	$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \varphi$			
Escala de términos individuales	$\frac{UW}{L}$	$\frac{P_0}{DH}$	G	FU
Magnitud de términos (m/seg ²)	10^{-7}	10	10	10^{-6}

TABLA I

Con el análisis de la tabla anterior se observa que en la ecuación (1.10) es posible desprestigiar el término $2\Omega w \cos \varphi$ y en la (1.12) los términos dw/dt y $2\Omega u \cos \varphi$. Así, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad 1.13$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad 1.14$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad 1.15$$

La ecuación de movimiento horizontal está dada por 1.13 y 1.14, mientras que la ecuación 1.15 representa la condición de equilibrio hidrostático (o la aproximación hidrostática).

2.- Ecuación de continuidad.

En la etapa anterior se han explicado algunas de las propiedades básicas del flujo horizontal en la atmósfera a través de la aplicación de la segunda ley de Newton. Hasta ahora lo concerniente al movimiento vertical en la atmósfera ha sido poco tratado. Sin embargo, debe ser claro, por los argumentos de escala de la sección anterior, que la ecuación de movimiento vertical no puede usarse directamente para describir este movimiento en sistemas de escala sinóptica. Por lo anterior, se va a considerar un principio físico adicional: la conservación de la masa, la que relaciona los campos de movimiento horizontal y vertical. Entonces, en teoría, el principio de conservación de masa (o continuidad de masa), puede usarse para describir el movimiento vertical por el conocimiento del campo de velocidad horizontal. Así, la ecuación que se utiliza es:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \quad 1.16$$

donde $\bar{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$

A la ecuación anterior se le conoce como ecuación de continuidad, será utilizada más adelante para relacionar los campos de movimiento horizontal y vertical.

3.- Coordenadas Isobáricas

En el tratamiento de muchos problemas meteorológicos, es conveniente introducir a la

presión p como una variable independiente en lugar de la altura z , debido a que la mayor parte de la información meteorológica se reporta a lo largo de superficies isobáricas. Otra razón se debe a que en una atmósfera barotrópica la densidad solamente depende de la presión $\rho = \rho(p)$, de modo que las superficies isobáricas son superficies de densidad constante. Para un gas ideal, las superficies isobáricas son también isotérmicas si la atmósfera es barotrópica. Por lo tanto, cuando las ecuaciones (1.13) - (1.16) se usan en conexión con datos meteorológicos, es conveniente tener las ecuaciones transformadas en un sistema de variables independientes x, y, p, t . (Eliassen, 1949).

Para abreviar, las variables independientes x, y, z, t será referidas en lo siguiente como "sistema z ", mientras que x, y, p, t se llamará "sistema p ".

La nueva coordenada p es función del espacio y del tiempo

$$p = p(x, y, z, t) \quad 1.17$$

cuando x, y y t son constantes, esta ecuación expresa relaciones uno a uno entre p y Z .

Resolviendo con respecto a z , se encuentra:

$$Z = Z(x, y, p, t) \quad 1.18$$

Entonces, en el "sistema p ", z queda como variable dependiente (la ecuación 1.18 es la ecuación de transformación y la 1.17 se usa si se desea la transformación inversa). Sustituyendo esta función para z , se puede transformar cualquier función de x, y, z, t en una función de x, y, p, t . Así, si α es cualquier función, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \alpha &= A(x, y, z, t) = A(x, y, z(x, y, p, t), t) \\ &= B(x, y, p, t) \end{aligned} \quad 1.19$$

La derivada parcial de la ecuación 1.19 con x, y y t constantes dá:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \quad 1.20$$

Cuando se hace la derivada parcial de la ecuación 1.19 con respecto a x, y, t , hay que recordar que las derivadas de las función A y B no son iguales. Entonces $\partial A / \partial x$ ó $\partial A / \partial y$, expresan el cambio de α en la dirección horizontal (con z constante), mientras que $\partial B / \partial x$ ó $\partial B / \partial y$, expresan el cambio de α a lo largo de la superficie isobárica (p constante). De la misma manera, $\partial A / \partial t$ dá el cambio de α en el tiempo en un nivel fijo (z constante), mientras que $\partial B / \partial t$ dá el cambio de α en una superficie isobárica fija (p constante). Para evitar confusión, en lo siguiente se denotará con un sub-

índice la cantidad que se considera constante en la operación en cuestión ; entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_z & ; & \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_z & ; & \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_z \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_p & ; & \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_p & ; & \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_p \end{aligned}$$

Ahora, la derivada con respecto a x de la ecuación (1.19), da:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z \frac{\partial \alpha}{\partial p} \quad 1.21$$

en forma análoga se encuentra:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z \frac{\partial \alpha}{\partial p} \quad 1.22$$

Para propósitos meteorológicos, la principal ventaja de las coordenadas isobáricas se origina en el hecho de que la atmósfera puede considerarse en equilibrio hidrostático, (Thomson, 1961). Así en la ecuación (1.21) puede ponerse en lugar de la función α , la altura z de una superficie isobárica. Entonces por definición, el lado derecho de la ecuación (1.21) se anula, es decir

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z \frac{\partial z}{\partial p} \quad 1.23$$

De la condición de equilibrio hidrostático ecuación (1.15), se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial p} = - \frac{1}{g \rho} \quad 1.24$$

substituyendo esta expresión para $\partial z / \partial p$ en la ecuación 1.23, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \quad 1.25$$

y con un razonamiento análogo se demuestra que:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \quad 1.26$$

Ahora, aplicando los resultados (1.25) y (1.26) en las ecuaciones de movimiento (1.13) y (1.14) se encuentran:

$$\frac{du}{dt} - fv = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \quad 1.27$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \quad 1.28$$

Por otra parte, dado que la ecuación de continuidad (1.16) es independiente de las coordenadas usadas, sigue siendo válida al usar a la presión como coordenada vertical. Sin embargo, cuando P es la coordenada vertical, la ecuación (1.16) puede escribirse en una forma aproximada que será muy útil más adelante.

En coordenadas cartesianas (x, y, z) la ecuación (1.16) se puede escribir como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad 1.29$$

pero recordando que con buena aproximación $\rho = -1/g \partial P / \partial z$, la ecuación anterior puede transformarse en:

$$-\frac{1}{g} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad 1.30$$

Utilizando (1.20), la ecuación anterior queda de la forma

$$-\frac{1}{g} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial P} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial P} \right) \right] = 0$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{dt} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z - \frac{\partial u}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_z - \frac{\partial v}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_z = 0 \quad 1.31$$

Usando ahora los resultados (1.21) y (1.22) en la expresión anterior se obtiene la forma de la ecuación de continuidad que se buscaba:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial P}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p = 0 \quad 1.32$$

donde $\omega = dP/dt$.

En el "sistema P" el movimiento horizontal del aire está representado por la velocidad horizontal \bar{V}_h , definida en la misma forma que en el "sistema z". Esto es porque las coordenadas horizontales (x, y) son las mismas en ambos sistemas. Sin embargo, la coordenada vertical no es la misma en ambos sistemas y, por lo tanto, el movimiento vertical no puede representarse en la misma forma en ambos sistemas.

En el "sistema z" se denota a la velocidad vertical como $w = dz/dt$. En el "sistema P" se ha usado el cambio individual de presión

$$\omega = \frac{dP}{dt} \quad 1.33$$

Esta cantidad representa la velocidad relativa a superficies isobáricas, expresada en milibares por segundo y se llamará la P-velocidad vertical del aire. El movimiento relativo a las superficies isobáricas es descendente si w es positiva y ascendente si ω es negativa.

Los movimientos verticales en la atmósfera son especialmente importantes porque son la causa de cambios individuales de estado (por ejemplo, condensación o subsidencia).

4.- Notación

Para evitar futuras confusiones es necesario aclarar la notación que se usará de aquí en adelante.

- a) Se denota por \bar{V} a la componente horizontal de la velocidad del aire:

$$\bar{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

donde \hat{i} y \hat{j} son los vectores unitarios del sistema coordenado cartesiano fijo a la tierra (definido anteriormente).

- b) Si U es cualquier campo escalar y $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ es cualquier campo vectorial horizontal, se define:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{ypt} \hat{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{xpt} \hat{j}$$

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{ypt} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{xpt}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_{ypt} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_{xpt}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_{ypt} - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_{xpt} \right] \hat{k}$$

- c) De aquí en adelante se considera que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{ypt} ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{xpt}$$

$$\frac{\partial}{\partial P} = \left(\frac{\partial}{\partial P} \right)_{xyt} ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{xyp}$$

5.- La importancia del campo $Z(x, y, P, t)$.

Considerando que los campos que pueden determinar el estado de la atmósfera (z, ρ, u, v y ω) son funciones de x, y, p y t , las ecuaciones fundamentales toman la forma:

$$\frac{1}{\rho g} = \frac{\partial z}{\partial P} \quad 1.36$$

$$\frac{du}{dt} - fv = -g \frac{\partial z}{\partial x} \quad 1.37$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g \frac{\partial z}{\partial y} \quad 1.38$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 1.39$$

Para propósitos de predicción numérica del tiempo, es prudente empezar por tratar de predecir la evolución de uno solo de los campos: $Z(x, y, p, t)$, la elección de éste campo no es arbitraria, se escoge porque conocido el campo $Z(x, y, P)$ en un instante dado, y sin necesidad de saber la forma en que Z depende de t , es posible calcular en forma aproximada los valores que tienen en ese instante p, u, v, γ, ω .

La densidad se encuentra mediante la ecuación (1.36), y por lo que respecta a los componentes horizontales de la velocidad, con ayuda del análisis de escala (véase Tabla I), en una primera aproximación pueden calcularse por las ecuaciones:

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \quad 1.40$$

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \quad 1.41$$

a las ecuaciones anteriores, en Meteorología, se les conoce como "componentes horizontales del viento geostrófico". El balance geostrófico es una relación de diagnóstico que da la relación aproximada entre el campo $Z(x, y, p, t)$ y la velocidad horizontal en sistemas de escala sinóptica. Entonces dada la distribución del campo z en cualquier tiempo, es posible encontrar el viento geostrófico a través de 1.40 y 1.41. Sin embargo, la ecuación geostrófica no contiene al tiempo y por lo tanto no puede usarse para predecir la evolución del campo de velocidad. Es por esta razón que la relación geostrófica es llamada relación de diagnóstico. Para calcular la evolución del campo $Z(x, y, p, t)$ sin tener que resolver simultáneamente las ecuaciones (1.46) - (1.39), se puede partir de (1.40) y (1.41) para obtener una expresión aproximada para $\nabla^2 Z$ que da algún indicio para la evolución de Z .

Aproximando en (1.40) y (1.41) a f por un valor promedio f_0^* , se obtiene:

$$u = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial z}{\partial y} \quad 1.42$$

$$v = \frac{g}{f_0} \frac{\partial z}{\partial x} \quad 1.43$$

con lo cual se tiene en una primera aproximación:

(+) Ver explicación en la página 18 de este trabajo.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{f_0} \nabla^2 z \quad 1.44$$

ésta ecuación sugiere que la evolución del campo $Z(x, y, p, t)$ podría calcularse a partir de la ecuación que diera el cambio de,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \zeta \quad 1.45$$

en la siguiente sección se construirá tal ecuación.

A la cantidad ζ se le conoce en Meteorología como vorticidad, aún cuando en rigor la vorticidad es el rotacional de la velocidad.

6.- Ecuación de vorticidad

Para encontrar una ecuación que dé el cambio en el tiempo de la vorticidad, se deriva (1.37) respecto a Y , y (1.38) respecto a X , y restando la primera de las ecuaciones así obtenida de la segunda, se encuentra:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} + fu \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} - fv \right) = 0 \quad 1.46$$

Desarrollando las derivadas respecto al tiempo, efectuando las derivadas parciales respecto a Y y X , y reordenando los términos (1.46), toma la forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla (\zeta + f) + (\zeta + f) \nabla \cdot \bar{v} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) = 0 \quad 1.47$$

A esta ecuación se le conoce como "ecuación de vorticidad". los términos que aparecen en 1.47 son de izquierda a derecha: 1). La razón de cambio local de la vorticidad. 2). La advección horizontal de la vorticidad absoluta, i.e., el transporte de la vorticidad absoluta por el viento horizontal. 3). El término de divergencia. 4). La advección vertical de la vorticidad relativa. 5). Términos de inclinación.

La ecuación 1.47 se puede simplificar por medio de un análisis de "escala sinóptica" para latitudes medias. Una vez más se puede escoger una escala de movimientos horizontales ya que el patrón de vorticidad y el patrón de presión tienden a moverse con velocidad comparable a la del viento horizontal. Usando las escalas que se mostraron en la Sección 1, se puede evaluar la magnitud de los términos de 1.47. Notando primero que

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U}{L} \approx 10^{-5} \text{ seg}^{-1}.$$

Comparando con el parámetro de Coriolis se ve que $\zeta/f_0 \sim 10^{-1}$, de modo que para sistemas "sinópticos" de latitudes medias, la vorticidad relativa es pequeña comparada con la vorticidad de la Tierra (Holton, 1979). Así, ζ en el término de divergencia se puede despreciar en comparación con f . En la ecuación 1.47 es posible despreciar algunos de los términos que aparecen en ella, si se calcula los órdenes de magnitud de cada uno de los términos. Así para analizar el orden de magnitud de ω , se utiliza (1.33), es decir:

$$\omega = \frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{xyz} + u \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{zzt} + v \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{zzt} - \rho g w \quad 1.48$$

donde $\partial P / \partial Z = -\rho g$.

Empíricamente se sabe que $\partial P / \partial t$ es el orden de 10^{-2} N/m² seg (Haltiner, 1971). Ahora, haciendo uso de las escalas características de las variables de campo (véase Sección I), se puede calcular los ordenes de magnitud de los últimos tres términos de (1.48). Entonces $u (\partial P / \partial x) \approx 10^{-2}$ N/m² seg, $v (\partial P / \partial y) \approx 10^{-2}$ N/m² seg y $\rho g w \approx 10^{-1}$ N/m² seg, con lo cual el orden de magnitud de ω es $M \approx 10^{-1}$ N/m² seg. Conociendo esto, es posible calcular las magnitudes de cada uno de los términos de (1.47), tal como se muestra en la Tabla II.

Términos de (1.47)	Orden de magnitud (seg. ⁻²)
$\frac{\partial \xi}{\partial t}$	$\frac{1}{L/U} \frac{U}{L} = 10^{-10}$
$\bar{V} \cdot \nabla \xi$	$U \frac{U/L}{L} = 10^{-10}$
$\bar{V} \cdot \nabla F$	$U \frac{F}{L} = 10^{-9}$
$(\xi + f) \nabla \cdot \bar{V} \approx f \nabla \cdot \bar{V}$	$F \frac{U}{L} = 10^{-9}$
$\omega \frac{\partial \xi}{\partial P}$	$M \frac{U/L}{P_0} = 10^{-11}$
$\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial P}$	$\frac{M}{L} \frac{U}{P_0} = 10^{-11}$
$\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial P}$	$\frac{M}{L} \frac{U}{P_0} = 10^{-11}$

Tabla II

En el análisis anterior se observa que la ecuación (1.47) queda como:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla (\xi + f) + f \nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad 1.49$$

Como una simplificación adicional, se puede desarrollar el parámetro de Coriolis por un serie de Taylor alrededor de la latitud φ_0 , es decir:

$$f = f_0 + \beta y + (\text{términos de orden superior})$$

donde $\beta \equiv \left(\frac{df}{dy} \right)_{\varphi_0}$, y $y = 0$ en φ_0 . Denotando por ξ a la escala de movimientos latitudinales, la razón de los primeros términos del desarrollo de f tiene un orden de magnitud

$$\frac{\beta \xi}{f_0} \sim \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} \frac{\xi}{R}$$

Entonces, cuando la escala de movimientos latitudinales es pequeña, comparada con el radio de la Tierra ($\xi / R \ll 1$), el parámetro de Coriolis se puede considerar como una constante f_0 , excepto cuando aparece diferenciado en el término de advección, en cuyo caso $df/dy \equiv \beta$ se asume como constante (Holton, 1979).

Con los argumentos descritos anteriormente, la ecuación 1.49 queda como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla (\xi + f) + f_0 \nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad 1.50$$

Es importante notar que el viento horizontal no se reemplaza por su valor geostrófico en el término de divergencia. De hecho, cuando se calcula el viento geostrófico usando el parámetro de Coriolis constante, las pequeñas variaciones del viento horizontal son las que dan esta divergencia.

Esta divergencia y su correspondiente campo de movimiento vertical son dinámicamente necesarias para que los cambios de vorticidad se mantengan geostróficos en un sistema de escala sinóptica.

La divergencia horizontal en (1.50) puede eliminarse fácilmente usando la ecuación de continuidad (1.39).

$$\nabla \cdot \bar{V} = - \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Para obtener una forma alternativa para la ecuación "cuasigeostrófica de vorticidad",

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} + \bar{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0 \quad 1.50 a$$

o bien

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} + \bar{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) = 0 \quad 1.50 b$$

donde
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot \bar{V} = 0^*$$

(*) Ver explicación en la página 22 de este trabajo.

A la ecuación 1.50b se le conoce en meteorología como "Ecuación de vorticidad barotrópica".

7.- Ecuación para la evolución del campo $z(x, y, p, t)$.

Ahora se verá la forma de utilizar la ecuación 1.5a para calcular la evolución del campo $z(x, y, p, t)$.

Para valores fijos de la presión y del tiempo, $v(x, y, p, t)$ se puede considerar como un campo vectorial de dos dimensiones, de modo que \bar{v} se puede descomponer en dos partes: (ver apéndice A).

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}''$$

tales que

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad 1.51$$

$$\frac{\partial v''}{\partial x} - \frac{\partial u''}{\partial y} = \quad 1.52$$

La ecuación 1.51 indica que u' y v' pueden expresarse de la forma:

$$u' = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

donde la función Ψ se le llama "función de corriente".

Usando estas dos últimas ecuaciones, se puede ver que:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \nabla^2 \Psi \quad 1.53$$

Por otro lado, usando la notación

$$J(\gamma, \eta) = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad 1.54$$

se tiene

$$\begin{aligned} \bar{V}' \cdot \nabla (\zeta + f) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi + f) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Psi + f) \\ &= J(\Psi, \nabla^2 \Psi + f) \end{aligned} \quad 1.55$$

Substituyendo (1.53) y (1.54) en (1.50a), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi; \nabla^2 \Psi + f) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0 \quad 1.56$$

comparando ahora la expresión aproximada (1.44) con la ecuación (1.53) se tiene una primera aproximación:

$$\Psi = \frac{g}{f_0} z \quad 1.57$$

Substituyendo esta expresión en (1.56) y cambiando $\partial \nabla^2 z / \partial t$ por $\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t}$ se obtiene,

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + J(z, \frac{fg}{f_0} \nabla^2 z + f) - \frac{f_0^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0 \quad 1.58$$

En la ecuación anterior aparecen dos funciones incógnitas: $Z(x, y, P, t)$ y $\omega(x, y, P, t)$.

Por lo tanto, para resolverla sin ayuda de otra ecuación, es necesario expresar al término

$$\frac{f_0^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial P} = - \frac{f_0^2}{g} \nabla \cdot \bar{V} \quad 1.59$$

en función de $Z(x, y, P, t)$ o bien despreciarlo completamente. Sin embargo, se sabe que la aproximación $\nabla \cdot \bar{V} = 0$ solo es válida para $P \approx 500$ mb y que este término en (1.59) sólo puede aproximarse mediante una función $Z(x, y, P, t)$ para ciertos niveles de P en 100 mb y 500 mb (Thompson, 1961). Por consiguiente, si se quiere predecir la evolución de $Z(x, y, P, t)$ para cualquier valor de P es necesario otra ecuación que relacione a Z y ω . Esto no se desarrolla en este trabajo, puesto que el interés es la evolución del campo $Z(x, y, P, t)$ en 500 milibares, así la ecuación (1.58) queda como:

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + J(z, \frac{q}{f_0} \nabla^2 z + f) = 0 \quad 1.60$$

CAPITULO II:

SOLUCION DEL MODELO BAROTROPICO POR EL METODO ESPECTRAL.

En este capítulo se resuelve la ecuación de vorticidad barotrópica :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla (\zeta + f) = 0 \quad 2.1$$

para la región comprendida entre las latitudes 10 y 46 grados norte y las longitudes 65 y 125 grados oeste.

Empleando la ecuación (1.53) en (2.1) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \bar{v} \cdot \nabla (\nabla^2 \psi + f) = 0 \quad 2.2$$

usando (1.55), la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad 2.3$$

donde

$$\beta = \frac{df}{dy}.$$

Para resolver la ecuación 2.3, se expresa la función de corriente ψ , mediante una doble serie de Fourier :

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{mn} \cos m kx \cos n ly + b_{mn} \sin m kx \cos n ly + c_{mn} \cos m kx \sin n ly + d_{mn} \sin m kx \sin n ly \right\} \quad 2.4$$

para determinar el límite superior de la ecuación debemos determinar cuántos coeficientes - - (a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , d_{mn}) se puedan calcular en el instante inicial a partir de la condición inicial - $\psi(x, y, t = 0)$.

Tomando una malla rectangular como la que se muestra en la figura 3, cuyos lados es - - tán dados por $i_x = 1, 2, 3, \dots, I$ y $j_y = 1, 2, 3, \dots, J$.

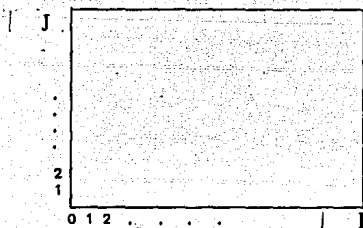


FIGURA 3

Se tiene que el número total de puntos es IJ , por lo tanto, igualando (2.3) al valor observado en cada punto de la red, en $t = 0$, se obtienen IJ ecuaciones, de las cuales se pueden calcular IJ coeficientes.

Es necesario analizar físicamente cuantos coeficientes se pueden utilizar. Notando que los valores de k y ℓ que aparecen en 2.4 se pueden encontrar por medio del siguiente análisis:

$$\text{Sen } m k x \Rightarrow m k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 2.5$$

donde λ es la longitud de onda.

Despejando λ de la relación anterior, se tiene:

$$\lambda = \frac{2\pi}{mk} \quad 2.5a$$

para $m = 1$ se obtiene λ_{\max} , por lo que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} = \frac{2\pi}{I d} \quad 2.5b$$

con un razonamiento similar al anterior, se encuentra una relación para ℓ , es decir:

$$\ell = \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} = \frac{2\pi}{J d} \quad 2.5c$$

donde d es la distancia de separación entre cada punto de la red, y λ_{\max} es la longitud de onda máxima, y es igual a $I d$ ó $J d$, respectivamente. Como,

$$m k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad n \ell = \frac{2\pi}{\lambda}$$

se tiene:

$$\eta_{\max} = \frac{2}{k \lambda_{\min}} = \frac{I}{2} \quad 2.5d$$

$$\eta_{\max} = \frac{2}{\ell \lambda_{\min}} = \frac{J}{2} \quad 2.5e$$

donde λ_{\min} es la longitud de onda mínima y es igual a $2d$. Con los resultados (2.5d) y (2.5e) se tiene el límite de los sumatorios de la ecuación (2.3), esto es:

$$\psi(x, y) = \sum_{m=0}^{I/2} \sum_{n=0}^{J/2} \left\{ a_{mn} \cos m kx \cos n ly + b_{mn} \sin m kx \cos n ly + c_{mn} \cos m kx \sin n ly + d_{mn} \sin m kx \sin n ly \right\} \quad 2.6$$

de modo que el número de coeficientes que se pueden calcular son:

$$\left(\frac{I}{2}\right) \left(\frac{J}{2}\right) 4 = IJ$$

Ahora se utiliza la ecuación (2.6) en la ecuación (2.2), definiendo:

$$A(x, y) = \cos m kx \cos n ly \equiv A_{mn}$$

$$B(x, y) = \sin m kx \cos n ly \equiv B_{mn}$$

$$C(x, y) = \cos m kx \sin n ly \equiv C_{mn}$$

$$D(x, y) = \sin m kx \sin n ly \equiv D_{mn}$$

2.7

para compactar las ecuaciones. Así, se tiene: (†)

$$\psi = \sum_{m=0} \sum_{n=0} \left\{ a_{mn} A_{mn} + b_{mn} B_{mn} + c_{mn} C_{mn} + d_{mn} D_{mn} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sum_m \sum_n -m^2 k^2 \left\{ a_{mn} A_{mn} + b_{mn} B_{mn} + c_{mn} C_{mn} + d_{mn} D_{mn} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \sum_m \sum_n -n^2 \ell^2 \left\{ a_{mn} A_{mn} + b_{mn} B_{mn} + c_{mn} C_{mn} + d_{mn} D_{mn} \right\}$$

(†) De aquí en adelante se omiten los límites de la sumatoria por simplicidad.

$$\nabla^2 \psi = \sum_m \sum_n -(m^2 k^2 + n^2 \ell^2) \left\{ a_{mn} A_{mn} + b_{mn} B_{mn} + c_{mn} C_{mn} + d_{mn} D_{mn} \right\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_m \sum_n m k \left\{ b_{mn} A_{mn} - a_{mn} B_{mn} + d_{mn} C_{mn} - c_{mn} D_{mn} \right\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sum_m \sum_n n \ell \left\{ c_{mn} A_{mn} + d_{mn} B_{mn} - a_{mn} C_{mn} - b_{mn} D_{mn} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi = \sum_m \sum_n -m k (m^2 k^2 + n^2 \ell^2) \left\{ b_{mn} A_{mn} - a_{mn} B_{mn} + d_{mn} C_{mn} - c_{mn} D_{mn} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = \sum_m \sum_n -n \ell (m^2 k^2 + n^2 \ell^2) \left\{ c_{mn} A_{mn} + d_{mn} B_{mn} - a_{mn} C_{mn} - b_{mn} D_{mn} \right\}$$

Substituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.2):

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n -(m^2 k^2 + n^2 \ell^2) \left\{ a'_{mn} A_{mn} + b'_{mn} B_{mn} + c'_{mn} C_{mn} + d'_{mn} D_{mn} \right\} \\ & + \sum_m \sum_n m k \left\{ b_{mn} A_{mn} - a_{mn} B_{mn} + d_{mn} C_{mn} - c_{mn} D_{mn} \right\} \\ & - \sum_u \sum_v -v \ell (u^2 k^2 + v^2 \ell^2) \left\{ c_{uv} A_{uv} + d_{uv} B_{uv} - a_{uv} C_{uv} - b_{uv} D_{uv} \right\} \\ & - \sum_u \sum_v n \ell \left\{ c_{mn} A_{mn} + d_{mn} B_{mn} - a_{mn} C_{mn} - b_{mn} D_{mn} \right\} \\ & - \sum_u \sum_v u k (u^2 k^2 + v^2 \ell^2) \left\{ b_{uv} A_{uv} - a_{uv} B_{uv} + d_{uv} C_{uv} - c_{uv} D_{uv} \right\} \\ & + \sum_m \sum_n m k \beta (y) \left\{ b_{mn} A_{mn} - a_{mn} B_{mn} + d_{mn} C_{mn} - c_{mn} D_{mn} \right\} = 0 \end{aligned} \quad 2.8$$

En los sumatorias sobre u y v, se tiene, (igual que en 2.6):

$$A(x, y) = \cos u k x \cos v ly \equiv A_{uv}$$

$$B(x, y) = \sin u k x \cos v ly \equiv B_{uv}$$

$$C(x, y) = \cos u k x \sin v ly \equiv C_{uv}$$

$$D(x, y) = \sin u k x \sin v ly \equiv D_{uv}$$

Realizando las operaciones de la ecuación 2.8 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_m \sum_n - (m^2 k^2 + n^2 \ell^2) \left\{ a'_{mn} A_{mn} + b'_{mn} B_{mn} + c'_{mn} C_{mn} + d'_{mn} D_{mn} \right\} \\
 & + \sum_m \sum_n \sum_u \sum_v - m k v \ell (u^2 k^2 + v^2 \ell^2) \\
 & \quad \left\{ b_{mn} c_{uv} A_{mn} A_{uv} + b_{mn} d_{uv} A_{mn} B_{uv} - b_{mn} a_{uv} A_{mn} C_{uv} - b_{mn} b_{uv} A_{mn} D_{uv} \right. \\
 & \quad - a_{mn} c_{uv} B_{mn} A_{uv} - a_{mn} d_{uv} B_{mn} B_{uv} + a_{mn} a_{uv} B_{mn} C_{uv} + a_{mn} b_{uv} B_{mn} D_{uv} \\
 & \quad + d_{mn} c_{uv} C_{mn} A_{uv} + d_{mn} d_{uv} C_{mn} B_{uv} - d_{mn} a_{uv} C_{mn} C_{uv} - d_{mn} b_{uv} C_{mn} D_{uv} \\
 & \quad \left. - c_{mn} c_{uv} D_{mn} A_{uv} - c_{mn} d_{uv} D_{mn} B_{uv} + c_{mn} a_{uv} D_{mn} C_{uv} + c_{mn} b_{uv} D_{mn} D_{uv} \right\} \\
 & + \sum_m \sum_n \sum_u \sum_v n k u \ell (u^2 k^2 + v^2 \ell^2) \\
 & \quad \left\{ c_{mn} b_{uv} A_{mn} A_{uv} - c_{mn} a_{uv} A_{mn} B_{uv} + c_{mn} d_{uv} A_{mn} C_{uv} - c_{mn} c_{uv} A_{mn} D_{uv} \right. \\
 & \quad + d_{mn} b_{uv} B_{mn} A_{uv} - d_{mn} a_{uv} B_{mn} B_{uv} + d_{mn} d_{uv} B_{mn} C_{uv} - d_{mn} c_{uv} B_{mn} D_{uv} \\
 & \quad - a_{mn} b_{uv} C_{mn} A_{uv} + a_{mn} a_{uv} C_{mn} B_{uv} - a_{mn} d_{uv} C_{mn} C_{uv} + a_{mn} c_{uv} C_{mn} D_{uv} \\
 & \quad \left. - b_{mn} b_{uv} D_{mn} A_{uv} + b_{mn} a_{uv} D_{mn} B_{uv} - b_{mn} d_{uv} D_{mn} C_{uv} + b_{mn} c_{uv} D_{mn} D_{uv} \right\} \\
 & + \sum_m \sum_n m k \beta \left\{ b_{mn} A_{mn} - a_{mn} B_{mn} + d_{mn} C_{mn} - c_{mn} D_{mn} \right\} = 0 \quad 2.10
 \end{aligned}$$

Usando ahora las identidades trigonométricas para los productos de seno y coseno, se pueden expresar los productos de las funciones base, como combinación lineal de ellas, es to es:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \cos (\alpha - \gamma) - \cos (\alpha + \gamma) \right\}$$

$$\cos \alpha \cos \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \cos (\alpha - \gamma) + \cos (\alpha + \gamma) \right\}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen} (\alpha - \gamma) + \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) \right\}$$

2.11

con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} A_{mn} A_{uv} &= (\cos m k x \cos n l y) (\cos u k x \cos v l y) \\ &= (\cos m k x \cos u k x) (\cos n l y \cos v l y) \\ &= \frac{1}{4} \{ \cos k x (m - u) + \cos k x (m + u) \} \{ \cos l y (n - v) + \cos l y (n + v) \} \\ &= \frac{1}{4} \{ A_{m-u, n-v} + A_{m-u, n+v} + A_{m+u, n-v} + A_{m+u, n+v} \} \end{aligned}$$

$$A_{mn} B_{uv} = \frac{1}{4} \{ -B_{m-u, n-v} - B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} + B_{m+u, n+v} \}$$

$$A_{mn} C_{uv} = \frac{1}{4} \{ -C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} - C_{m+u, n-v} + C_{m+u, n+v} \}$$

$$A_{mn} D_{uv} = \frac{1}{4} \{ D_{m-u, n-v} - D_{m-u, n+v} - D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v} \}$$

$$B_{mn} A_{uv} = \frac{1}{4} \{ B_{m-u, n-v} + B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} + B_{m+u, n+v} \}$$

$$B_{mn} B_{uv} = \frac{1}{4} \{ A_{m-u, n-v} + A_{m-u, n+v} - A_{m+u, n-v} - A_{m+u, n+v} \}$$

$$B_{mn} C_{uv} = \frac{1}{4} \{ -D_{m-u, n-v} + D_{m-u, n+v} - D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v} \}$$

$$B_{mn} D_{uv} = \frac{1}{4} \{ -C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} + C_{m+u, n-v} - C_{m+u, n+v} \}$$

$$C_{mn} A_{uv} = \frac{1}{4} \{ C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} + C_{m+u, n-v} + C_{m+u, n+v} \}$$

$$C_{mn} B_{uv} = \frac{1}{4} \{ -D_{m-u, n-v} - D_{m-u, n+v} + D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v} \}$$

$$C_{mn} C_{uv} = \frac{1}{4} \{ A_{m-u, n-v} - A_{m-u, n+v} + A_{m+u, n-v} - A_{m+u, n+v} \}$$

$$C_{mn} D_{uv} = \frac{1}{4} \{ -B_{m-u, n-v} + B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} - B_{m+u, n+v} \}$$

$$D_{mn} A_{uv} = \frac{1}{4} \{ D_{m-u, n-v} + D_{m-u, n+v} + D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v} \}$$

$$D_{mn} B_{uv} = \frac{1}{4} \{ B_{m-u, n-v} - B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} - B_{m+u, n+v} \}$$

$$D_{mn} C_{uv} = \frac{1}{4} \left\{ A_{m-u, n-v} - A_{m-u, n+v} - A_{m+u, n-v} + A_{m+u, n+v} \right\}$$

$$D_{mn} D_{uv} = \frac{1}{4} \left\{ A_{m-u, n-v} - A_{m-u, n+v} - A_{m+u, n-v} + A_{m+u, n+v} \right\}$$

Ahora se substituyen todas las igualdades anteriores en la ecuación (2.10), obteniéndose:

se:

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n - (m^2 k^2 + n^2 \ell^2) \left\{ a'_{mn} A_{mn} + b'_{mn} B_{mn} + c'_{mn} C_{mn} + d'_{mn} D_{mn} \right\} \\ & + \sum_m \sum_n mk \beta \left\{ b_{mn} A_{mn} - a_{mn} B_{mn} + d_{mn} C_{mn} - c_{mn} D_{mn} \right\} \\ & + \sum_m \sum_n \sum_u \sum_v \frac{1}{4} k \ell (u^2 k^2 + v^2 \ell^2) \\ & \left\{ (-mv b_{mn} c_{uv} + nu c_{mn} b_{uv}) [A_{m-u, n-v} + A_{m-u, n+v} + A_{m+u, n-v} + A_{m+u, n+v}] \right. \\ & + (-mv b_{mn} d_{uv} - nu c_{mn} a_{uv}) [-B_{m-u, n-v} - B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} + B_{m+u, n+v}] \\ & + (mv b_{mn} a_{uv} + nu c_{mn} d_{uv}) [-C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} - C_{m+u, n-v} + C_{m+u, n+v}] \\ & + (mv b_{mn} b_{uv} - nu c_{mn} c_{uv}) [D_{m-u, n-v} - D_{m-u, n+v} - D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v}] \\ & + (mv a_{mn} c_{uv} + nu d_{mn} b_{uv}) [B_{m-u, n-v} + B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} + B_{m+u, n+v}] \\ & + (mv a_{mn} d_{uv} - nu d_{mn} a_{uv}) [A_{m-u, n-v} + A_{m-u, n+v} - A_{m+u, n-v} - A_{m+u, n+v}] \\ & + (-mv a_{mn} a_{uv} + nu d_{mn} d_{uv}) [-D_{m-u, n-v} + D_{m-u, n+v} - D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v}] \\ & + (-mv a_{mn} b_{uv} - nu d_{mn} c_{uv}) [-C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} + C_{m+u, n-v} - C_{m+u, n+v}] \\ & + (-mv d_{mn} c_{uv} - nu a_{mn} b_{uv}) [C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} + C_{m+u, n-v} + C_{m+u, n+v}] \\ & \left. + (-mv d_{mn} d_{uv} + nu a_{mn} a_{uv}) [-D_{m-u, n-v} - D_{m-u, n+v} + D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (m v d_{mn} a_{uv} - n u a_{mn} d_{uv}) [A_{m-u, n-v} - A_{m-u, n+v} + A_{m+u, n-v} - A_{m+u, n+v}] \\
& + (m v d_{mn} b_{uv} + n u a_{mn} d_{uv}) [-B_{m-u, n-v} + B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} - B_{m+u, n+v}] \\
& + (m v c_{mn} c_{uv} - n u b_{mn} b_{uv}) [D_{m-u, n-v} + D_{m-u, n+v} + D_{m+u, n-v} + D_{m+u, n+v}] \\
& + (m v c_{mn} d_{uv} + n u b_{mn} a_{uv}) [C_{m-u, n-v} + C_{m-u, n+v} - C_{m+u, n-v} - C_{m+u, n+v}] \\
& + (m v c_{mn} a_{uv} - n u b_{mn} d_{uv}) [B_{m-u, n-v} - B_{m-u, n+v} + B_{m+u, n-v} - B_{m+u, n+v}] \\
& + (m v c_{mn} b_{uv} + n u b_{mn} c_{uv}) [A_{m-u, n-v} - A_{m-u, n+v} - A_{m+u, n-v} + A_{m+u, n+v}] = 0
\end{aligned}$$

2.12

Esta ecuación es la forma espectral de la ecuación de vorticidad barotrópica.

A partir de la ecuación 2.12, se puede obtener la expresión para cada una de las derivadas de los coeficientes de la serie de Fourier, multiplicando toda la ecuación por la función correspondiente de la base e integrando sobre la región considerada, es decir, sobre el rectángulo $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{k}$, $0 \leq y \leq \frac{2\pi}{l}$.

Es necesario hacer notar que las funciones base de la serie de Fourier son ortogonales; así, analizando los siguientes ejemplos se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/l} \int_0^{2\pi/k} A_{mn}^2 dx dy &= \int_0^{2\pi/l} \int_0^{2\pi/k} \cos^2 m k x \cos^2 n l y dx dy \\
&= \int_0^{2\pi/l} \cos^2 n l y \left\{ \int_0^{2\pi/k} \cos^2 m k x dx \right\} dy \\
&= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4mk} \sin 2 m k x \right]_0^{2\pi/k} \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{4n l} \sin 2 n l y \right]_0^{2\pi/l} \\
&= \left(\frac{\pi}{k} \right) \left(\frac{\pi}{l} \right) = \frac{\pi^2}{k l}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi/\ell} \int_0^{2\pi/k} A_{mn} B_{mn} &= \int_0^{2\pi/\ell} \int_0^{2\pi/k} \cos m k x \cos n \ell y \sin m k x \cos n \ell y dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi/\ell} \cos^2 n \ell y \left\{ \int_0^{2\pi/k} \cos m k x \sin m k x \right\} dy \\
 &= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4mk} \sin 2 m k x \right]_0^{2\pi/k} \left[\frac{1}{2} \sin^2 n \ell y \right]_0^{2\pi/\ell} = 0
 \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned}
 \iint A_{mn} B_{uv} &= \iint A_{mn} C_{uv} = \iint A_{mn} D_{uv} = \iint C_{mn} D_{uv} = 0 & 2.13 \\
 \iint A_{mn} A_{uv} &= \iint B_{mn} B_{uv} = \iint C_{mn} C_{uv} = \iint D_{mn} D_{uv} = \frac{\pi^2}{k\ell} \delta_{mu} \delta_{nv}
 \end{aligned}$$

con lo expuesto anteriormente, se tienen las expresiones para cada una de las derivadas de los coeficientes de la serie de Fourier, es decir:

$$a_{rs} = \frac{r k \bar{\beta} b_{rs}}{(r^2 k^2 + s^2 \ell^2)} + \sum_u \sum_v \frac{k\ell(u^2 k^2 + v^2 \ell^2)}{4(r^2 k^2 + s^2 \ell^2)}$$

$$\left\{ + [(r+u)v b_{r+u, s+v} c_{uv} + (s+v)u c_{r+u, s+v} b_{uv}] \right.$$

$$+ [-(r+u)v b_{r+u, s-v} c_{uv} + (s-v)u c_{r+u, s-v} b_{uv}]$$

$$+ [-(r-u)v b_{r-u, s+v} c_{uv} + (s+v)u c_{r-u, s+v} b_{uv}]$$

$$+ [-(r-u)v b_{r-u, s-v} c_{uv} + (s-v)u c_{r-u, s-v} b_{uv}]$$

$$+ [(r+u)v a_{r+u, s+v} d_{uv} - (s+v)u d_{r+u, s+v} a_{uv}]$$

$$+ [(r+u)v a_{r+u, s-v} d_{uv} - (s-v)u d_{r+u, s-v} a_{uv}]$$

$$- [(r-u)v a_{r-u, s+v} d_{uv} - (s+v)u d_{r-u, s+v} a_{uv}]$$

$$- [(r-u)v a_{r-u, s-v} d_{uv} - (s-v)u d_{r-u, s-v} a_{uv}]$$

$$\begin{aligned}
& + [(r+u) v d_{r+u, s+v} a_{uv} - (s+v) u a_{r+u, s+v} d_{uv}] \\
& - [(r+u) v d_{r+u, s-v} a_{uv} - (s-v) u a_{r+u, s-v} d_{uv}] \\
& + [(r-u) v d_{r-u, s+v} a_{uv} - (s+v) u a_{r-u, s+v} d_{uv}] \\
& - [(r-u) v d_{r-u, s-v} a_{uv} - (s-v) u a_{r-u, s-v} d_{uv}] \\
& + [(r+u) v c_{r+u, s+v} b_{uv} + (s+v) u b_{r+u, s+v} c_{uv}] \\
& - [(r+u) v c_{r+u, s-v} b_{uv} + (s-v) u b_{r+u, s-v} c_{uv}] \\
& - [(r-u) v c_{r-u, s+v} b_{uv} + (s+v) u b_{r-u, s+v} c_{uv}] \\
& + [(r-u) v c_{r-u, s-v} b_{uv} + (s-v) u b_{r-u, s-v} c_{uv}] \} \quad 2.14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'_{rs} &= \frac{k r \beta a_{rs}}{(r^2 k^2 + s^2 \varrho^2)} + \sum_u \sum_v \frac{k \varrho (u^2 k^2 + v^2 \varrho^2)}{4(r^2 k^2 + s^2 \varrho^2)} \\
& \left\{ \begin{aligned}
& - [-(r+u) v b_{r+u, s+v} d_{uv} - (s+v) u c_{r+u, s+v} a_{uv}] \\
& - [-(r+u) v b_{r+u, s-v} d_{uv} - (s-v) u c_{r+u, s-v} a_{uv}] \\
& + [-(r-u) v b_{r-u, s+v} d_{uv} - (s+v) u c_{r-u, s+v} a_{uv}] \\
& + [-(r-u) v b_{r-u, s-v} d_{uv} - (s-v) u c_{r-u, s-v} a_{uv}] \\
& + [(r+u) v a_{r+u, s+v} c_{uv} + (s+v) u d_{r+u, s+v} b_{uv}] \\
& + [(r+u) v a_{r+u, s-v} c_{uv} + (s-v) u d_{r+u, s-v} b_{uv}]
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ [(r+u)v a_{r-u,s+v} c_{uv} + (s+v)u d_{r-u,s+v} b_{uv}] \\
 &+ [(r-u)v a_{r-u,s-v} c_{uv} + (s-v)u d_{r-u,s-v} b_{uv}] \\
 &- [(r+u)v d_{r+u,s+v} b_{uv} + (s+v)u a_{r+u,s+v} c_{uv}] \\
 &+ [(r+u)v d_{r+u,s-v} b_{uv} + (s-v)u a_{r+u,s-v} c_{uv}] \\
 &+ [(r-u)v d_{r-u,s+v} b_{uv} + (s+v)u a_{r-u,s+v} c_{uv}] \\
 &- [(r-u)v d_{r-u,s-v} b_{uv} + (s-v)u a_{r-u,s-v} c_{uv}] \\
 &+ [-(r+u)v c_{r+u,s+v} a_{uv} - (s+v)u b_{r+u,s+v} d_{uv}] \\
 &- [(r+u)v c_{r+u,s-v} a_{uv} - (s-v)u b_{r+u,s-v} d_{uv}] \\
 &+ [(r-u)v c_{r-u,s+v} a_{uv} - (s+v)u b_{r-u,s+v} d_{uv}] \\
 &- [(r-u)v c_{r-u,s-v} a_{uv} - (s-v)u b_{r-u,s-v} d_{uv}] \}
 \end{aligned}$$

2.15

$$\begin{aligned}
 c'_{rs} = & \frac{kr\beta d_{rs}}{(r^2k^2 + \ell^2)} + \left\{ \sum_u \sum_v \frac{k\ell(u^2k^2 + v^2\ell^2)}{4(r^2k^2 + s^2\ell^2)} \right. \\
 & \left\{ - [(r+u)v b_{r+u,s+v} a_{uv} + (s+v)u c_{r+u,s+v} d_{uv}] \right. \\
 & + [(r+u)v b_{r+u,s-v} a_{uv} + (s-v)u c_{r+u,s-v} d_{uv}] \\
 & - [(r-u)v b_{r-u,s+v} a_{uv} + (s+v)u c_{r-u,s+v} d_{uv}] \\
 & \left. + [(r-u)v b_{r-u,s-v} a_{uv} + (s-v)u c_{r-u,s-v} d_{uv}] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [(r+u) v a_{r+u, s+u} b_{uv} - (s+v) u d_{r+u, s+v} c_{uv}] \\
& + [(r+u) v a_{r+u, s-v} b_{uv} - (s-v) u d_{r+u, s-v} c_{uv}] \\
& + [(r-u) v a_{r-u, s+v} b_{uv} - (s+v) u d_{r-u, s+v} c_{uv}] \\
& - [(r-u) v a_{r-u, s-v} b_{uv} - (s-v) u d_{r-u, s-v} c_{uv}] \\
& + [(r+u) v d_{r+u, s+v} c_{uv} - (s+v) u a_{r+u, s+v} b_{uv}] \\
& + [(r+u) v d_{r+u, s-v} c_{uv} - (s-v) u a_{r+u, s-v} b_{uv}] \\
& + [(r-u) v d_{r-u, s+v} c_{uv} - (s+v) u a_{r-u, s+v} b_{uv}] \\
& + [(r-u) v d_{r-u, s-v} c_{uv} - (s-v) u a_{r-u, s-v} b_{uv}] \\
& + [(r+u) v c_{r+u, s+v} d_{uv} + (s+v) u b_{r+u, s+v} a_{uv}] \\
& + [(r+u) v c_{r+u, s-v} d_{uv} + (s-v) u b_{r+u, s-v} a_{uv}] \\
& - [(r-u) v c_{r-u, s+v} d_{uv} + (s+v) u b_{r-u, s+v} a_{uv}] \\
& - [(r-u) v c_{r-u, s-v} d_{uv} + (s-v) u b_{r-u, s-v} a_{uv}] \} \quad 2.16
\end{aligned}$$

$$d'_{rs} = \frac{k r \beta c_{rs}}{(r^2 k^2 + s^2 \varrho^2)} + \sum_u \sum_v \frac{k \varrho (u^2 k^2 + v^2 \varrho^2)}{4 (r^2 k^2 + s^2 \varrho^2)}$$

$$\left\{ + [(r+u) v b_{r+u, s+v} b_{uv} - (s+v) u c_{r+u, s+v} c_{uv}] \right.$$

$$\left. - [(r+u) v b_{r+u, s-v} b_{uv} - (s-v) u c_{r+u, s-v} c_{uv}] \right.$$

$$\begin{aligned}
& - [(r-u) v b_{r-u, s+v} b_{uv} - (s+v) u c_{r-u, s+v} c_{uv}] \\
& + [(r-u) v b_{r-u, s-v} b_{uv} - (s-v) u c_{r-u, s-v} c_{uv}] \\
& - [-(r+u) v a_{r+u, s+v} a_{uv} + (s+v) u d_{r+u, s+v} d_{uv}] \\
& + [-(r+u) v a_{r+u, s-v} a_{uv} + (s-v) u d_{r+u, s-v} d_{uv}] \\
& - [-(r-u) v a_{r-u, s+v} a_{uv} + (s+v) u d_{r-u, s+v} d_{uv}] \\
& + [-(r-u) v a_{r-u, s-v} a_{uv} + (s-v) u d_{r-u, s-v} d_{uv}] \\
& - [-(r+u) v d_{r+u, s+v} d_{uv} + (s+v) u a_{r+u, s+v} a_{uv}] \\
& - [-(r+u) v d_{r+u, s-v} d_{uv} + (s-v) u a_{r+u, s-v} a_{uv}] \\
& + [-(r-u) v d_{r-u, s+v} d_{uv} + (s+v) u a_{r-u, s+v} a_{uv}] \\
& + [-(r-u) v d_{r-u, s-v} d_{uv} + (s-v) u a_{r-u, s-v} a_{uv}] \\
& + [+(r+u) v c_{r+u, s+v} c_{uv} - (s+v) u b_{r+u, s+v} b_{uv}] \\
& + [+(r+u) v c_{r+u, s-v} c_{uv} - (s-v) u b_{r+u, s-v} b_{uv}] \\
& + [+(r-u) v c_{r-u, s+v} c_{uv} - (s+v) u b_{r-u, s+v} b_{uv}] \\
& + [+(r-u) v c_{r-u, s-v} c_{uv} - (s-v) u b_{r-u, s-v} b_{uv}] \}
\end{aligned}$$

Suponiendo que son conocidos los valores de los coeficientes en $t = 0$, se pueden calcular los valores de sus derivadas con respecto al tiempo, mediante las relaciones dadas por 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17. Con ellas, es posible calcular los valores de los coeficientes en $t = t + \Delta t$, mediante el uso de la fórmula de diferencias finitas centradas. (Shaw, 1953).

$$a_{n+1} = a_{n-1} + 2 \left(\frac{da}{dt} \right)_n \Delta t$$

$$b_{n+1} = b_{n-1} + 2 \left(\frac{db}{dt} \right)_n \Delta t$$

$$c_{n+1} = c_{n-1} + 2 \left(\frac{dc}{dt} \right)_n \Delta t$$

$$d_{n+1} = d_{n-1} + 2 \left(\frac{dd}{dt} \right)_n \Delta t$$

2.18

y con dichos valores se repite el proceso para $t = t + \Delta t$ subsecuente y así hasta $t = 24$ horas.

En el primer paso de tiempo, no es posible usar la fórmula de diferencias finitas centradas. Por consiguiente, se puede obtener una primera aproximación $a_{(1)}$ en a_1 , $b_{(1)}$ en b_1 , $c_{(1)}$ en c_1 , $d_{(1)}$ en d_1 , por medio de la fórmula de diferencias finitas adelantadas; esto es: (Shaw, 1953).

$$a_{(1)} = a_0 + \left(\frac{da}{dt} \right)_0 \Delta t$$

$$b_{(1)} = b_0 + \left(\frac{db}{dt} \right)_0 \Delta t$$

$$c_{(1)} = c_0 + \left(\frac{dc}{dt} \right)_0 \Delta t$$

$$d_{(1)} = d_0 + \left(\frac{dd}{dt} \right)_0 \Delta t$$

2.19

Entonces se obtienen los valores finales de a_1 , b_1 , c_1 , d_1 mediante las fórmulas:

$$a_1 = a_0 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{da}{dt} \right)_0 + \left(\frac{da}{dt} \right)_1 \right] \Delta t$$

$$b_1 = b_0 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{db}{dt} \right)_0 + \left(\frac{db}{dt} \right)_1 \right] \Delta t$$

$$c_1 = c_0 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dc}{dt} \right)_0 + \left(\frac{dc}{dt} \right)_1 \right] \Delta t$$

$$d_1 = d_0 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dd}{dt} \right)_0 + \left(\frac{dd}{dt} \right)_1 \right] \Delta t$$

2.20

Hasta aquí se ha expuesto, en forma general, la estructura del modelo espectral aplicada a la ecuación de vorticidad barotrópica; sin embargo, para obtener la condición inicial, es decir, los valores iniciales de los coeficientes de la doble serie de Fourier, es necesario un análisis más detallado.

En principio, una forma de encontrar los valores óptimos de los coeficientes de la serie, sería construyendo una función que diera una medida del error entre los valores observados inicialmente, y los valores de los coeficientes de la serie de Fourier, por ejemplo:

$$E(a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, d_{rs}) = E[\psi_0(x_i, y_j) - \psi_f(x_i, y_j)]^2 \quad 2.21$$

donde $\psi_0(x_i, y_j)$ son los valores conocidos de la función de corriente en $t=0$, y ψ_f son los valores de la serie de Fourier en $t=0$. Con la expresión 2.21 se procede a encontrar los valores de los coeficientes que minimizan esta función, a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial E}{\partial a_{rs}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial b_{rs}} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_{rs}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial d_{rs}} = 0 \quad 2.22$$

Esto conduce a un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes iniciales, sin embargo,

se encuentra que para resolver dicho sistema, el tiempo computadora es excesivo y hace el proceso prácticamente inútil, por lo que se procedió a aproximar los coeficientes con las integrales siguientes:

$$\begin{aligned}
 a_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x, y) \cos r x' \cos s y' dx' dy' , \\
 b_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x, y) \sin r x' \cos s y' dx' dy' , \\
 c_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x, y) \cos r x \sin s y dx' dy' , \\
 d_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x, y) \cos r x' \sin s y' dx' dy' ,
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $\psi(x, y)$ son los valores conocidos de la función de corriente $t = 0$.

Para propósitos de cálculo numérico, las integrales 2.23 se transformaron de la siguiente manera: Haciendo un cambio variable:

$$\begin{aligned}
 x' = xk &\Rightarrow x = \frac{2\pi}{k} , \\
 y' = y &\Rightarrow y = \frac{2\pi}{l} ,
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 a_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi/l} \int_0^{2\pi/k} \psi(x, y) \cos r k x \cos s l y d(k x) d(l y) \\
 b_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi/l} \int_0^{2\pi/k} \psi(x, y) \sin r k x \cos s l y d(k x) d(l y) \\
 c_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi/l} \int_0^{2\pi/k} \psi(x, y) \cos r k x \sin s l y d(k x) d(l y) \\
 d_{rs} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi/l} \int_0^{2\pi/k} \psi(x, y) \sin r k x \sin s l y d(k x) d(l y)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ahora se aproxima (2.21) por sumatorias; es decir:

$$\begin{aligned}
 a_{rs} &= \frac{k l}{\pi^2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi(x_i, y_j) \cos r k x_i \cos s l y_j \Delta x_i \Delta y_j \\
 b_{rs} &= \frac{k l}{\pi^2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi(x_i, y_j) \sin r k x_i \cos s l y_j \Delta x_i \Delta y_j \\
 c_{rs} &= \frac{k l}{\pi^2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi(x_i, y_j) \cos r k x_i \sin s l y_j \Delta x_i \Delta y_j \\
 d_{rs} &= \frac{k l}{\pi^2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi(x_i, y_j) \sin r k x_i \sin s l y_j \Delta x_i \Delta y_j
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

los términos Δx_i y Δy_i que aparecen en la ecuación anterior, se toman de la siguiente forma:

$$\Delta x_i = \frac{8\pi R}{360} \cos \varphi$$

donde φ es la latitud ($\varphi = 10^\circ, 14^\circ, 18^\circ, \dots, 46^\circ$) y R es el radio de la tierra.

Para Δy_i se tomó un valor constante, es decir, la distancia de separación entre cada punto de la malla considerada. Calculando de esta forma los coeficientes iniciales se reconstruye, la condición inicial con una alta precisión. Como se podrá observar en los resultados finales, esta condición resultante se aplica al modelo barotrópico, lo cual permite un pronóstico a 24 horas.

RESUMEN

Se desarrolló un método numérico llamado "espectral" para resolver la ecuación 2.1, la cual da información sobre el movimiento de las isohipsas (o campo z) en 500 mb; esto se debe a que la "vorticidad ζ " está relacionada con la "función de corriente ψ " a través de la ecuación 1.53 y ésta con el campo z mediante la ecuación 1.57.

El método espectral se puede resumir en la forma siguiente. Para resolver la ecuación de vorticidad barotrópica (2.1) se expresa a la función de corriente ψ mediante una doble serie de Fourier real (2.4). Se determina el límite superior de las sumatorias que aparecen en esta serie, por medio de un análisis del número de coeficientes que pueden calcularse en el intento inicial a partir de la condición inicial $\psi(x, y, t = 0)$ y de un análisis relacionado con los números de onda de K y ℓ .

Debido a que se consideran ondas completas en ambas direcciones X y Y, la longitud de onda máxima se toma como Id y Jd respectivamente, (I = número de puntos en el eje X; J = número de puntos en el eje Y; d = distancia de separación entre puntos de la malla). La longitud mínima es 2d; con esto es posible obtener los valores de los números de onda que aparecen en la serie, (2.5b y 2.5c) lo que permite encontrar el límite superior de las sumatorias a través de 2.5d y 2.5e.

Posteriormente se realizan todos los cálculos de cada uno de los términos de la ecuación 2.1 para encontrar la forma "espectral" de la ecuación de vorticidad barotrópica (véase 2.12).

A partir de la ecuación 2.12, se puede obtener la expresión para cada una de las derivadas de los coeficientes de la serie de Fourier, multiplicando toda la ecuación por la función correspondiente de la base e integrando sobre la región considerada, además se utiliza la propiedad de que las funciones de la base en cuestión son ortogonales; así, se obtienen las ecuaciones 2.14 a 2.17, las cuales están en función de los coeficientes iniciales que son calculados por medio de 2.25. Con las ecuaciones 2.14 a 2.17 es posible calcular los valores de los coeficientes en $t = t + \Delta t$ mediante el uso de las fórmulas de diferencias finitas (2.18). con ellas se repite el proceso para obtener sus valores en pasos de tiempo subsecuentes hasta 24 horas, lo que permite el pronóstico del movimiento de las isohipsas.

Se elaboró un programa (en Algol) para resolver numéricamente la ecuación 2.1. Las etapas que conforman al programa son las siguientes:

- a) Se dan los valores iniciales de $z(x, y, t = 0)$ en cada punto de la malla.
- b) Se transforman los valores iniciales de $z(x, y, t = 0)$ en $\psi(x, y, t = 0)$ usando la ecuación 1.57.
- c) Se calculan los coeficientes iniciales por medio de la ecuación 2.23
- d) Se reconstruye el campo z inicial usando los coeficientes iniciales calculados en la etapa anterior.
- e) Se calculan las derivadas de los coeficientes de la serie por medio de las ecuaciones 2.14 a 2.17, las cuales están en función de los coeficientes iniciales calculados en la etapa c).
- f) Con los valores de las derivadas de los coeficientes se calculan los nuevos valores de los coeficientes en $t = t + \Delta t$ mediante el uso de la ecuación 2.18 y con ellos se repite el proceso para $t = t + \Delta t$ subsecuente y así, hasta 24 horas.
- g) Con los coeficientes calculados en la etapa anterior, se hace el pronóstico para el campo z .

MANEJO DE DATOS

Los datos utilizados en este trabajo, corresponden a los días 5-6 de octubre y 14-15 de diciembre de 1981, son enviados (en código BAUDOT) de Miami, Flo., E.U., por radio-teletipo de alta frecuencia; pertenecen a 105 estaciones distribuidas no uniformemente en la región IV. (Región que abarca a: Sur de Canadá, Estados Unidos, México, Centroamérica, Caribe, Norte de Venezuela y Colombia.

Por medio de un análisis subjetivo de los datos de altura "z" (en metros) y de la dirección del viento se trazan las isohipsas en 500 mb; se hace una interpolación para obtener los datos en los puntos de la malla, los cuales están separados cuatro grados. En esta parte aparece una dificultad, debida a que en los océanos la información meteorológica es casi nula. Por lo que la interpolación es poco confiable en esa área, lo que se verá reflejado en el pronóstico. Se usan 160 datos en el modelo ya que el área de trabajo está comprendida entre las latitudes 65° y 125° oeste y las longitudes 10° y 46° norte.

RESULTADOS

Como se ha mencionado anteriormente, se desarrolló un método espectral y un programa para resolver la ecuación de vorticidad barotrópica. Lo cual permite un pronóstico de la forma de las superficies isobáricas a 500 mb. con 24 horas de anticipación.

Se presentan sólo dos "experimentos" numéricos, debido principalmente a que para la obtención de los datos que utiliza el programa es necesario hacer todos los pasos contemplados en el "manejo de datos", lo que requiere información que no siempre se tiene, Esto en un futuro próximo no será problema porque se está trabajando actualmente, para que la captura de datos sea por computadora.

En los mapas o cartas que se presentan a continuación se pueden observar las curvas de nivel de las superficies isobáricas a 500 mb. En la figura 1 y 5 se muestran las condiciones iniciales del campo de las isohipsas para su uso en el modelo barotrópico, corresponden a los días 5 de octubre y 14 de diciembre respectivamente. En las figuras 2 y 6 se tiene la configuración del mismo campo (observado) 24 horas después, es decir, para el día 6 de octubre y 15 de diciembre respectivamente. La figura 3 y 7 corresponden a la reconstrucción (por el modelo) de la condición inicial de los días 5 de octubre y 14 de diciembre. Y por último, en la figura 4 y 8 se ven las isohipsas pronosticadas por el modelo en ambos experimentos.

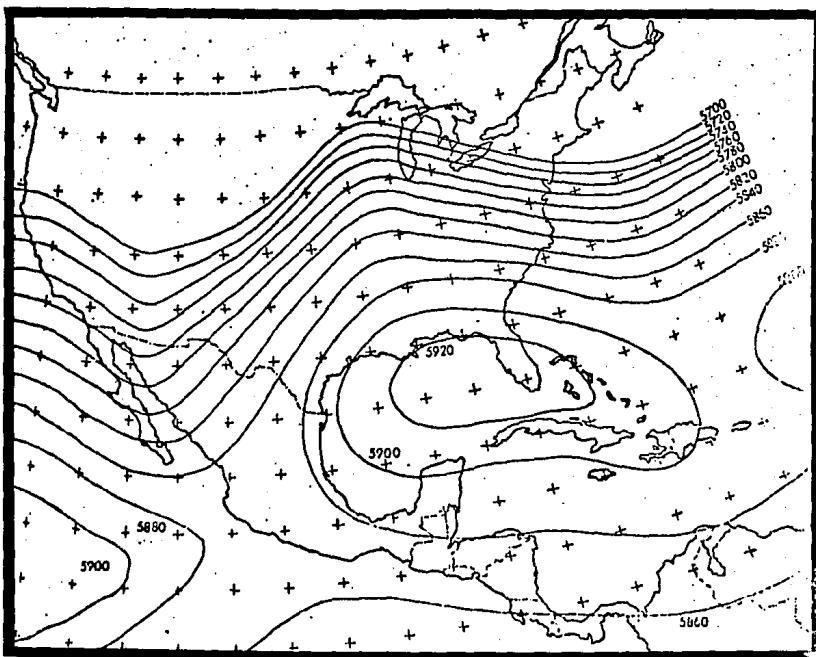


FIGURA 1.- Carta de isohipsas en 500 mb, 5 de octubre de 1981 (Observada).

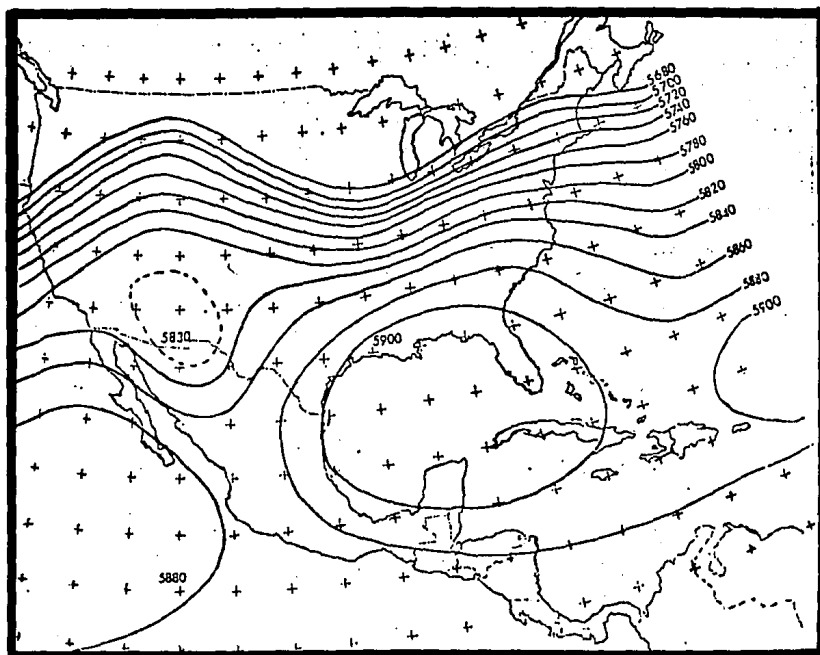


FIGURA 2.- Carta de isohipsas en 500 mb, 6 de octubre de 1981 (Observada).

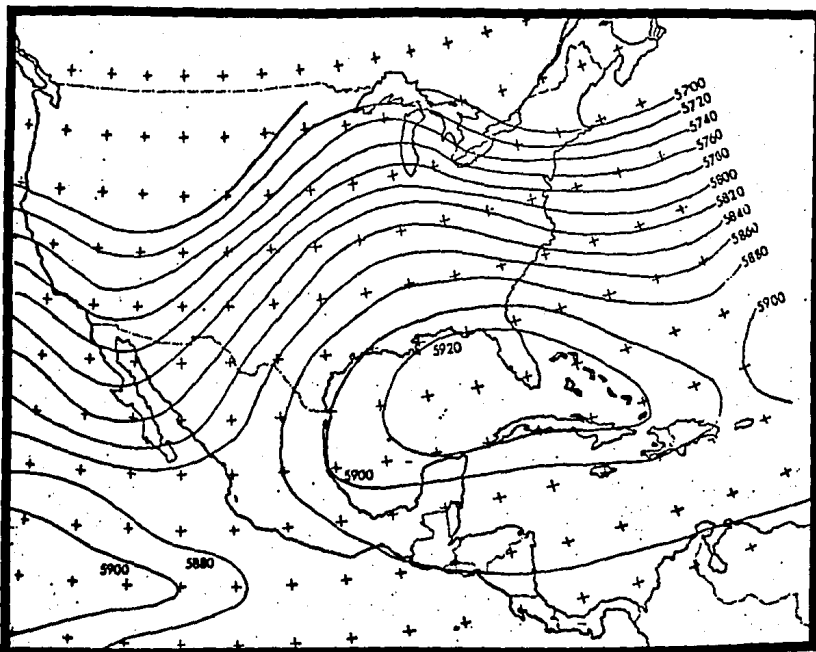


FIGURA 3.- Carta de isohipsas en 500 mb, 5 de octubre de 1981 (Calculada).

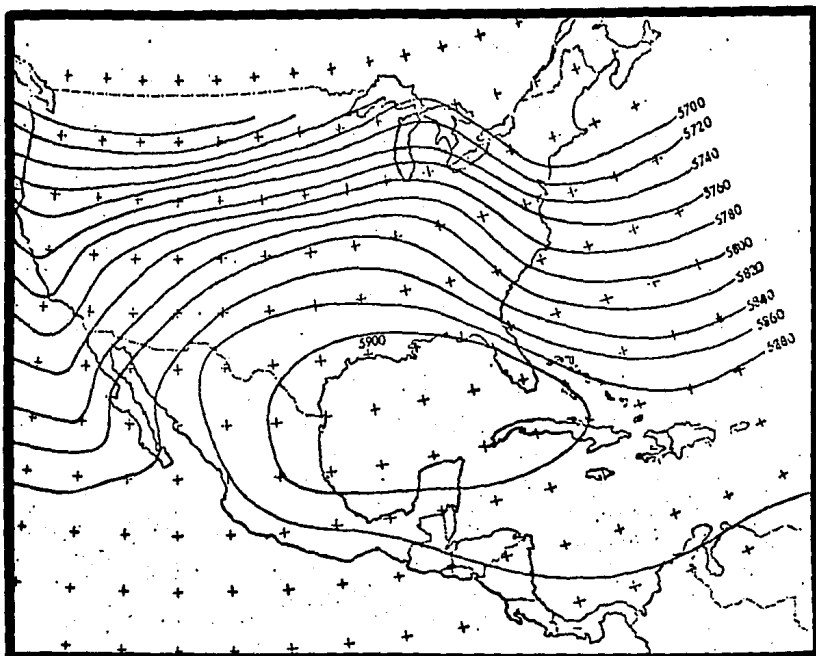


FIGURA 4.- Carta de isohipsas en 500 mb, 6 de octubre de 1981 (Calculada).

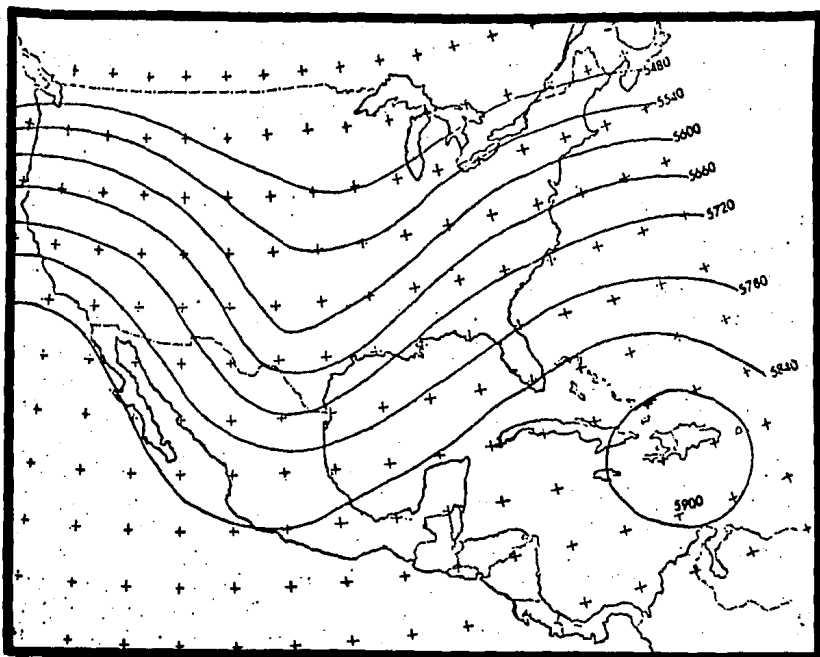


FIGURA 5.- Carta de isohipsas en 500 mb, 14 de diciembre de 1981 (Observada).

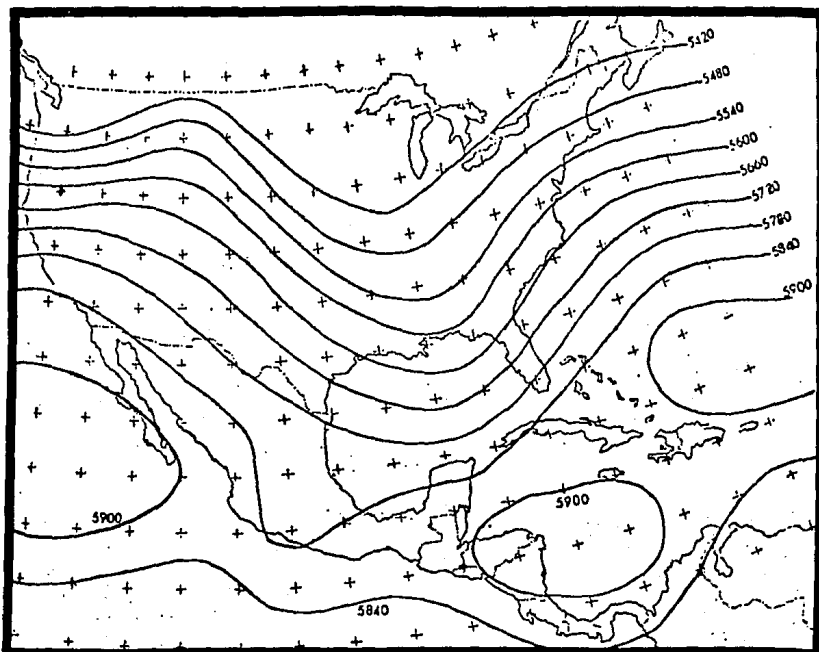


FIGURA 6.- Carta de isohipsas en 500 mb, 15 de diciembre de 1981 (Observada).

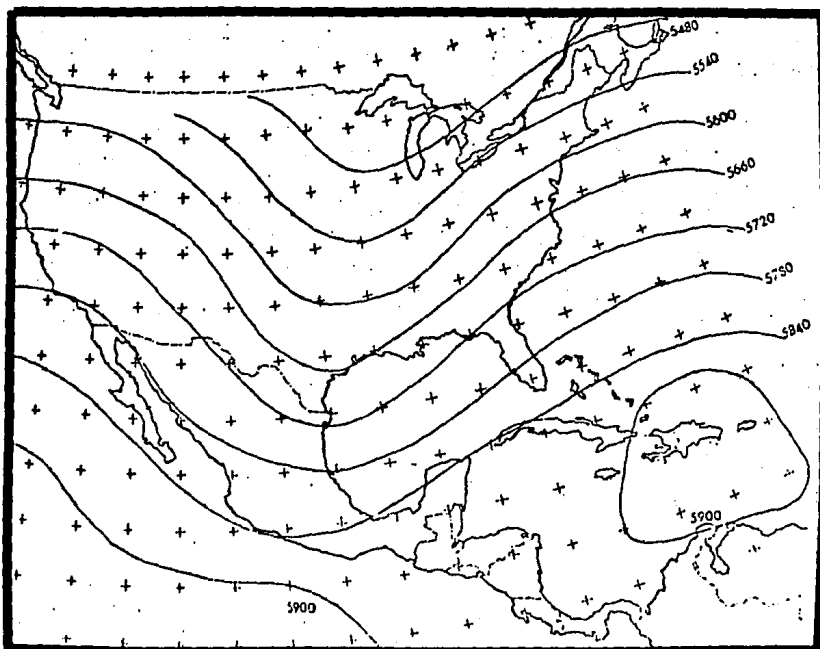


FIGURA 7.- Carta de isohipsas en 500 mb, 14 de diciembre de 1981 (Calculada).

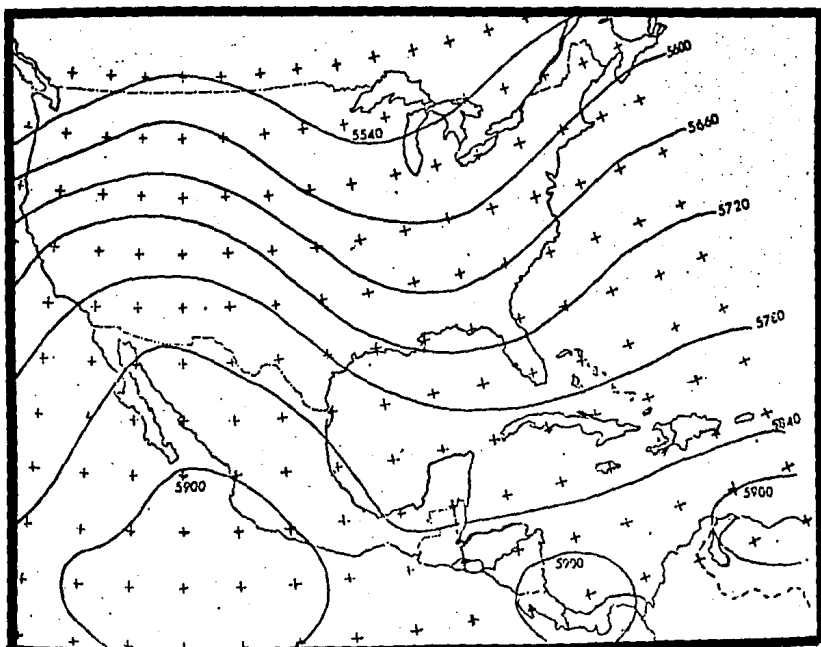


FIGURA 8.- Carta en isohipsas en 500 mb, 15 de diciembre de 1981 (Calculada).

Comparando las figuras 1 con 3 y 5 con 7 se puede observar que el aspecto general de las curvas de nivel calculadas son muy parecidas a las observadas, esto se debe a la buena aproximación de los coeficientes iniciales calculados con las integrales usadas (ecuación 2.23) los ejes de las vaguadas no se modifican y las zonas de alta presión no cambiaron. Sin embargo, al observar las isohipsas en el sur y sur-oeste del área de estudio, la reconstrucción de la condición inicial es regular, debido básicamente a que en esa área se tienen pocos datos reportados y la interpolación falla, lo cual se va a reflejar en el pronóstico.

Esta condición inicial se usa en el modelo barotrópico lo que permite un pronóstico a 24 horas (véase figura 4 y 7).

Para calcular el grado de precisión del pronóstico y la reconstrucción de la condición inicial, se procedió de la siguiente manera: i) se compararon las isohipsas observadas con las isohipsas pronosticadas, considerándolas como secuencia ordenada de datos; ii) se examinó la nube de puntos, encontrándose que existe regresión lineal; iii) se utilizó el índice de correlación de Pearson, encontrándose una correlación de 0.85 para el pronóstico y 0.93 para la reconstrucción de la condición inicial.

Al comparar las curvas de nivel de las isohipsas de las figura 2 y 4 se observa que el pronóstico sólo es bueno sobre la República Mexicana (excluyendo la zona noroeste), el Golfo de México, el sureste de Estados Unidos y parte de la zona del Caribe.

Analizando las figuras 6 y 8 se observa que el pronóstico es bueno en todo el territorio de Estados Unidos, la República Mexicana (excluyendo la zona noroeste), el Golfo de México y la parte del Caribe.

Por lo anterior, se tiene que la mejor predicción se obtuvo para el día 14 de diciembre. Uno esperaría que el pronóstico fuera prácticamente igual en ambos casos analizados, sin embargo, las diferencias se deben básicamente a las limitaciones del modelo barotrópico usado.

En el primer caso aparece una célula de baja con un valor de 5830 m., sobre la frontera política entre Estados Unidos y México, la cual no es detectada por el modelo barotrópico; debido a que no toma en cuenta la magnitud y dirección del viento, ésta última es la que se considera siempre paralela a lo largo de los isobaras. Otra limitación del modelo es que no se considera el término de divergencia, lo que significa ausencia de fuentes y sumideros que podrían detectar interacciones con otras capas atmosféricas adyacentes.

Al suponer que la densidad sólo despende de la presión ($\rho = \rho(p)$), de modo que las superficies isobáricas son también superficies de densidad constante, conduce a considerar que la atmósfera es barotrópica. Esto restringe el tipo de movimientos posibles del fluido que pudieron deberse, por ejemplo, al gradiente de temperatura.

En un análisis sinóptico del movimiento de los sistemas, siempre se consideran otras superficies isobáricas, así como las isotermas, debido a que estos movimientos están regidos por la interacción con otras capas. Así pues, como el modelo no contempla esta interacción, es difícil observar la influencia debida a otras capas, con lo que se podría detectar con mucha precisión el desplazamiento de las vaguadas.

CONCLUSIONES

Se consideró una atmósfera ideal (no hay fricción) homogénea, incompresible y en equilibrio hidrostático, en donde sólo los movimientos horizontales son importantes.

El nivel en el cual el movimiento de atmósfera baroclínica corresponde al movimiento de atmósfera barotrópica, es 550 mb. (S. Shukla, 1972) entonces, para propósitos prácticos se puede tomar 500 mb. para la aplicación del modelo barotrópico.

Las limitaciones del modelo barotrópico pueden resumirse brevemente como sigue: i).- Se intenta representar el comportamiento de una atmósfera promediada verticalmente en algún nivel intermedio de promedio. ii) No hay mecanismos de generación o disipación de energía cinética (EC), y por lo tanto, sólo hay redistribuciones de EC y momento. Entonces los desarrollos baroclínicos no pueden predecirse. iii). El movimiento se tomó sólo en dos dimensiones. iv). La aproximación del viento geostrofico conduce a considerar la dirección del viento paralela a lo largo de los isobaras.

La justificación para el uso del modelo barotrópico inspirada en estas limitaciones está dada por las siguientes bases observacionales y numéricas: i), las perturbaciones de escala vertical son mucho más pequeñas comparadas con las de escala horizontal. ii). La generación de energía cinética por procesos baroclínicos está limitada a regiones y la razón de cambio de EC es muy pequeña comparada con la EC total en sistemas sinópticos en el curso de un día. iii). El cálculo numérico se simplifica. Ya que no están presentes las ondas de gravedad y de sonido, es posible tomar pasos de tiempo (time steps) grandes.

Para tener simulaciones más realistas del comportamiento de la atmósfera se recomienda trabajar con modelos que consideren el término de la divergencia, por ejemplo, el modelo baroclínico o trabajar con el modelo de ecuaciones primitivas.

Por otro lado, se mostró también que el método espectral (ME) desarrollado en este trabajo sirve para resolver ecuaciones tipo Poisson. Y comparando con el método de diferencias finitas (MDF), tiene las siguientes ventajas: i). No se requiere la relajación para resolver la ecuación de vorticidad ya que el ME calcula las derivadas espaciales exactamente. ii). Se tiene el mismo número de incógnitas que ecuaciones, por lo que "aparentemente" no se requieren las condiciones de frontera.

La desventaja más importante del ME es que requiere mucho más tiempo de proceso que el MDF si hay muchos grados de libertad.

APENDICE A

En la Sección 6 se dan argumentos físicos para encontrar la ecuación cuasi geostrófica de vorticidad. En este apéndice se darán argumentos "matemáticos" y de análisis de escala para hallar la misma ecuación.

Para valores fijos de la presión y el tiempo, $\bar{V}(x, y, P, t)$ se puede considerar como un campo vectorial de dos dimensiones de modo que se puede descomponer a \bar{V} en dos partes:

$$\bar{V} = \bar{V}' + \bar{V}'' \quad \text{A.1}$$

tales que:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad \text{A.2}$$

$$\frac{\partial v''}{\partial x} - \frac{\partial u''}{\partial y} = 0 \quad \text{A.3}$$

Substituyendo (A.1) en (1.49), se puede ver que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi + f) \bar{V}' + \nabla \cdot (\xi + f) \bar{V}'' = 0 \quad \text{A.4}$$

por otro lado usando (1.51) se tiene,

$$\nabla \cdot (\xi + f) \bar{V}' = \bar{V}' \cdot \nabla (\xi + f) + (\xi + f) \nabla \cdot \bar{V}' \approx \bar{V}' \cdot \nabla (\xi + f) \quad \text{A.5}$$

con lo cual (A.4) queda en la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{V}' \cdot \nabla (\xi + f) + \nabla \cdot (\xi + f) \bar{V}'' = 0 \quad \text{A.6}$$

Ahora se calcularán las magnitudes de cada uno de los términos (A.6) Para encontrar el orden de magnitud de \bar{V}'' el cual se denotará por U'' , se usará la ecuación de continuidad (1.39).

$$-\frac{\partial \omega}{\partial P} = \nabla \cdot \bar{V} = \nabla \cdot (\bar{V}' + \bar{V}'') = \nabla \cdot \bar{V}'' \quad \text{A.7}$$

de aquí es posible ver que:

$$U'' = L \frac{M}{P_0} = 1 \quad \text{A.8}$$

la igualdad anterior indica que \bar{V}'' es de un orden de magnitud menor que \bar{V} . Por consiguiente \bar{V}' y \bar{V} deben ser del mismo orden de magnitud. Conociendo esto es posible calcular las magnitudes de los términos de (A.6) tal como se muestra en la siguiente tabla:

Términos de A.6	Orden de magnitud (seg. ⁻²)
$\frac{\partial \xi}{\partial t}$	$\frac{1}{L/U} \frac{U}{L} = 10^{-10}$
$\bar{V}' \cdot \nabla \xi$	$U \frac{U/L}{L} = 10^{-10}$
$\bar{V} \cdot \nabla f$	$U \frac{F}{L} = 10^{-9}$
$\nabla \cdot \xi \bar{V}''$	$\frac{1}{L} \frac{U}{L} U'' = 10^{-11}$
$\nabla \cdot f \bar{V}''$	$\frac{1}{L} F U'' = 10^{-10}$

Tabla III

En esta tabla se puede ver que es posible despreciar el término $\nabla \cdot \xi \bar{V}''$, con lo cual la ecuación (A.6) se reduce a,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{V}' \cdot \nabla (\xi + f) + \nabla \cdot f \bar{V}'' = 0 \quad \text{A.9}$$

Por último, si en el tercer término de (A.9) se substituye a f por un valor promedio f_0 , se tiene:

$$\nabla \cdot f \bar{V}'' = \nabla \cdot f_0 \bar{V}'' = f_0 \nabla \cdot \bar{V}'' = f_0 \nabla \cdot \bar{V} = -f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P} \quad \text{A.10}$$

con lo cual (A.9) toma la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{V}' \cdot \nabla (\xi + f) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0 \quad \text{A.11}$$

Escala horizontal

		10 ⁴ km.	10 ³ km.	10 ² km.	10 km.	1 km.
		Planetaria ←	Sinóptica	Meso - escala	Convectiva o escala pequeña .	Micro escala → molecular
Latitudes medias	Ondas grandes sub-tropicales.			Frentes Ondas Lee	Cumulonimbus lluvia	Capa - frontera Remolinos (EDDIES)
	Anti-ciclones		Anti-ciclones.	Vientos rápidos	Tornados	
Trópicos	Ondas del Este		Nubes (Clusters) Ciclones tropicales.	Meso - escala Elementos Convectivos	Celdas Convectivas	Capa-frontera Remolinos (EDDIES)

10² hr. 10 hr. 1 hr. 10⁻¹ hr.

Escala de Tiempo

Algunos fenómenos atmosféricos como una función de escala.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Baer, F., Platzman, G., "*A procedure for numerical integration of the spectral vorticity equation*" Journal Meteorology, Vol. 18, págs. 393 - 401, 1961.
- 2.- Bouske, W., McAvaney, B., Puri, K., Thurling, R., "*Global modeling of atmospheric flow by spectral methods*". Academic Press, Methods in Computational Physics, Vol. 17, pag. 267 - 327, 1977.
- 3.- Charney, J.G., "*The dynamics of long waves in a baroclinic in westerly current*". J. Meteorology, Vol. 4, No. 5, 1947.
- 4.- Eliassen, A., "*The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable*". Geofysiske Publikasjoner, Vol. 17, No. 3, pag. 5 - 44, 1949.
- 5.- Elsaesser, H.W., "*Evaluation of spectral versus grid methods of hemispheric numerical weather prediction*". Journal of Applied Meteorology, Vol. 15, págs. 246 - 262, 1966.
- 6.- Fujioka, R.J., "*Un modelo para predecir el movimiento de las superficies isobáricas de la atmósfera*". Facultad de Ciencias, U.N.A.M., Tesis profesional, 1981.
- 7.- Haltiner, G.J., "*Numerical weather prediction*", John Wiley & Sons, 1971.
- 8.- Haltiner, G.J., Williams, R.T., "*Numerical prediction and dynamic meteorology*", John Wiley & Sons, 1980.
- 9.- Holton, J.R., "*An introduction to dynamic meteorology*", Academic Press, 1979.
- 10.- Kubota, S., Hirose, M., Kikuchi, Y., Kurihara, Y., "*Barotropic forecasting with the use of surface spherical harmonic representation*". Pap. Meteorology Geophysics. Vol. 12, pag. 199 - 225, 1961.
- 11.- Lorentz, E.N., "*Maximum simplification of the dynamic equations*". Tellus, Vol. 12, No. 3, pag. 243 - 254, 1960.

- 12.- Platzman, G.W., *"The spectral form of the vorticity equation"*. Journal Meteorology, Vol. 17, pag. 635 - 644, 1960.
- 13.- Shukla, J., *"Barotropic model: a review"*, Indian J. Met. Geophys., Vol. 23, pag. 201 - 206, 1972.
- 14.- Siberman, I., *"Planetary waves in the atmosphere"*. Journal Meteorology, Vol. 11, pag. 27 - 34, 1954.
- 15.- Shaw, F.S., *"Relaxation Methods and introduction to approximal methods for differential equations"*, 1953.
- 16.- Thompson, P.D., *"Numerical weather analysis and prediction"*. MacMillan, 1960.