

00368



# Universidad Nacional Autónoma de México

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE CIENCIAS

CRITERIOS DE OPTIMIZACION EN EL FILTRADO DE  
WIENER VARIABLE CON EL TIEMPO, APLICADOS A LA  
DECONVOLUCION PREDICTIVA DE TRAZAS SISMICAS

## TESIS

Que para obtener el Grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS (GEOFISICA)

presenta

RODOLFO MARINES CAMPOS

México, D. F.

1982

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	Página
INTRODUCCION	11
I. FUNCIONES DE CORRELACION PARA PROCESOS ESTOCASTICOS.	1
1.1 Ensamble de funciones aleatorias y procesos estocásticos estacionarios.	
1.2 Funciones de correlación para procesos estocásticos.	
1.3 Concepto estadístico de correlación en ensambles estacionarios.	
II. EL FILTRO OPTIMO EN SERIES DEL TIEMPO.	26
11.1 Integral de Wiener-Hopf de primera clase.	
11.2 Integral de Bootom	
11.3 Ecuación de Wiener-Hopf en series estacionarias en el tiempo.	
III. METODO DE APROXIMACION ESTOCASTICA PARA LA OBTENCION DE LOS COEFICIENTES DEL FILTRO DE WIENER, COMO PRIMER CRITERIO DE OPTIMIZACION.	48
111.1 Matriz de autocorrelación y establecimiento del algoritmo de Levinson.	
111.2 Desarrollo de método de Forsyte-Wasow.	
111.3 Algoritmo de Hestenes, como primer criterio de optimización.	
111.4 Comparación de métodos.	
IV. LONGITUD OPTIMA DE VENTANAS EN EL FILTRADO DE WIENER VARIABLE CON EL TIEMPO, COMO SEGUNDO CRITERIO DE OPTIMIZACION.	91
IV.1 Aproximación al proceso no estacionario mediante procesos ergódicos.	
IV.2 Método de Berndt-Cooper para la selección óptima de T, como segundo criterio de optimización.	
IV.3 Aplicación del método a una traza sísmica sintética.	
V. APLICACIONES EN LA DECONVOLUCION PREDICTIVA DE TRAZAS SISMICAS SINTETICAS.	114
V.1 Deconvolución predictiva y operador predictivo de error.	
V.2 Modelos geológicos sintéticos.	
VI. CONCLUSIONES.	152
APENDICE.	A1
BIBLIOGRAFIA.	B1

## INTRODUCCION

La teoría estadística de la comunicación proporciona la herramienta necesaria para formular criterios de diseño óptimo en sistemas lineales, como en el caso de filtros digitales usados en sismología marina, en donde uno de los problemas más fuertes en el manejo de señales consiste en la eliminación de ruido coherente o trenes de reverberación, así como en el filtrado variable con el tiempo de datos sísmológicos terrestres considerados como procesos estocásticos no estacionarios para la eliminación de ruido incoherente mediante filtros digitales en frecuencia.

En el presente trabajo se desarrollan dos criterios de optimización aplicados a la deconvolución predictiva de trazas sísmicas sintéticas. En el primer criterio se utiliza un algoritmo de convergencia o de aproximación estocástica para la solución del sistema de ecuaciones normales heterogéneas que se obtiene cuando se diseña el filtro óptimo en series estacionarias en el tiempo y se establece una comparación de resultados con el algoritmo de Levinson, haciendo notar que con este criterio de optimización puede reducirse considerablemente el tiempo de cálculo si el sistema computacional cuenta con un procesador de arreglos en punto flotante. En el segundo criterio se utiliza un método para determinar la longitud óptima de ventana en una traza sísmica sintética al utilizar la ecuación Wiener-Hopf de segunda clase aproximando -

un proceso no estacionario mediante procesos ergódicos para la obtención del filtro variable con el tiempo con filtros estacionarios.

En el capítulo I se mencionan algunos conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo; en el capítulo II se establece el diseño del filtro de Wiener en series del tiempo; en el capítulo III se desarrollan los algoritmos de Forsythe-Wasow y Hestenes, como primer criterio de optimización; en el capítulo IV se establece el método Berndt-Cooper para la selección óptima de ventana, como segundo criterio de optimización; en el capítulo V se hace la aplicación en la deconvolución predictiva de trazas sísmicas sintéticas, utilizando algunos modelos geológicos y finalmente, en el capítulo VI se presentan las conclusiones del trabajo.

## CAPITULO I

FUNCIONES DE CORRELACION PARA PROCESOS ESTOCASTICOS1) ENSAMBLE DE FUNCIONES ALEATORIAS  
Y PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS.

Antes de que se desarrollara la teoría estadística de la Comunicación, la teoría clásica se había formado considerando a los mensajes y al ruido como fenómenos periódicos y transitorios que matemáticamente se representan por medio de las series y la integral de Fourier, expresiones que son representación exacta, para todo el tiempo, de los mensajes considerados como señales periódicas; de aquí que la teoría clásica de la Comunicación sea aplicable solamente a funciones determinísticas, pero la fluctuación de los mensajes y el ruido con respecto al tiempo es muy compleja, y por tanto, son fenómenos o procesos aleatorios y no periódicos ni transitorios, por lo que las series y la integral de Fourier son obviamente inaplicables. La gran diferencia entre el concepto probabilístico del mensaje o ruido y el concepto determinístico dado por la teoría clásica hace posible el desarrollo de la teoría estadística de la Comunicación, cuya idea fundamental consiste en considerar estadísticamente al mensaje y al ruido, y describirlos de acuerdo con los conceptos de la teoría de la Probabilidad.

ENSAMBLE. La teoría estadística de señales no considera la señal individual sino que trabaja sobre un conjunto de posibles ondas de mensaje o de ruido generado por fuentes de carácter similar, formando un agregado de funciones aleatorias. En situaciones prácticas, este conjunto de funciones aleatorias que representan la señal o el ruido puede obtenerse de una sola fuente, a partir de experimentos repetidos limitados en el tiempo.

El conjunto de mensajes, ruido, o una combinación de éstos, es llamado ENSAMBLE. Generalmente, cuando hablamos de un mensaje o ruido nos estamos refiriendo a un ensamble de mensajes o ruidos, pero cuando se menciona solamente una función del ensamble, entonces la llamaremos FUNCION MIEMBRO DEL ENSAMBLE. Existen muchos problemas físicos en donde las funciones aleatorias están mezcladas con funciones periódicas y aperiódicas, éste es el caso de las ondas sísmicas en el método sísmológico de exploración petrolera.

En la figura número 1,1), se muestra la representación gráfica de un ENSAMBLE de funciones aleatorias continuas en el tiempo, suponiendo que provienen de una serie de mecanismos idénticos productores de mensajes o ruidos, o una combinación de ambos, en las mismas condiciones.

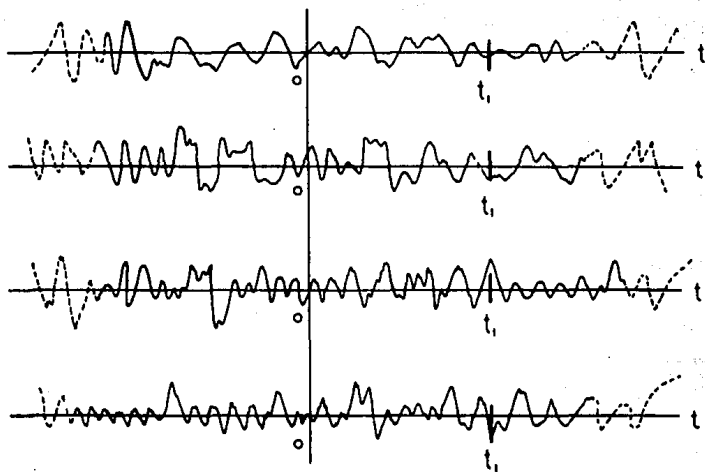


Figura No. 1.1) Ensamble de funciones aleatorias.

PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS. El ensamble de todas la posibles señales  $\{x(t)\}$  junto con su ley de generación es llamado PROCESO; cualquier señal individual  $x(t)$  generada por el proceso es llamada REALIZACION DEL PROCESO. Un proceso es DETERMINISTICO si no contiene rasgos de eventos fortuitos, de otra forma es llamado PROCESO ESTOCASTICO, que puede ser de dos tipos:

- 1) Proceso estocástico de Markov.
- 2) Proceso estocástico estacionario.



Un proceso estocástico de Markov es aquél cuyo desarrollo futuro depende del estado más reciente, sin tomar en cuenta las características pasadas.

Un proceso estocástico estacionario es aquél cuyas propiedades estadísticas no cambian con el tiempo. Las señales generadas por un proceso estacionario tienen la propiedad de que sus estadísticas no cambian para una señal registrada en un tiempo anterior  $t$  ni para una señal registrada en un tiempo  $(t + T)$ .

Si ninguna de las probabilidades que caracterizan al proceso estocástico cambian con el tiempo, entonces se dice que el proceso es estacionario en el sentido estricto.

Si el valor medio de la señal en diferentes tiempos es constante, y si el valor medio del producto de los valores de la señal en dos instantes de tiempo no dependen del tiempo absoluto, sino solamente de la diferencia de tiempos, entonces el proceso es estacionario en el sentido amplio. En otras palabras, tenemos que un proceso estacionario en el sentido amplio es aquel proceso estocástico estacionario  $\{x(t)\}$  en el cual  $E \{x(t)\}$  y  $E \{x_{t+s} x_t^*\}$  existen y son funcionalmente independientes del tiempo, donde  $E$  es el operador del valor esperado o también llamado PROMEDIO DEL ENSAMBLE.

Cuando el promedio estadístico  $\overline{\xi(t)}$  en el tiempo de una función muestra del ensamble es igual al promedio del ensamble  $E \{x(t)\}$ , entonces el proceso estocástico estacionario es ERGODICO\*, ya que la Hipótesis Ergódica establece que: "en un ensamble estacionario de funciones aleatorias producidas por fuentes de idéntica naturaleza, el promedio en el tiempo de un miembro del ensamble es igual al promedio del ensamble para cualquier  $t$ ."

$$\overline{\xi(t)} = E \{ x(t) \}$$

Este tipo de proceso es una subclase propia de un proceso estacionario, es decir, un PROCESO ERGODICO es necesariamente ESTACIONARIO, pero un proceso estacionario no es necesariamente ergódico.

\* ERGODICO: Proviene de raíces griegas: Trayectoria de trabajo.

## 2) FUNCIONES DE CORRELACION PARA PROCESOS ESTOCASTICOS.

Puesto que los mensajes y el ruido ocupan la posición central en un problema de comunicación, es de gran importancia que puedan ser representados y descritos. En la ausencia de un método adecuado para dicha representación, la teoría clásica de las Comunicaciones consideró estas funciones como periódicas y transitorias, las cuales podían representarse -- mediante las series y la integral de Fourier, respectivamente, utilizando también algunos teoremas importantes que relacionan a las funciones de correlación y convolución, como el teorema de Correlación Cruzada - (Lee, p. 36), que establece una relación biunívoca mediante un par transformado de Fourier, dado por:

$$\int_{-a}^a f_1(t) f_2(t+\tau) dt \longleftrightarrow 2\pi \bar{F}_1(\omega) F_2(\omega) \quad (1.1)$$

en donde  $F_1(\omega)$  representa al espectro conjugado de  $f_1(t)$ . Este teorema puede expresarse en forma más explícita, como:

$$\phi_{12}(\tau) = \int_{-a}^a f_1(t) f_2(t+\tau) dt = \mathcal{F}^{-1} [2\pi \bar{F}_1(\omega) F_2(\omega)] \quad (1.2)$$

y

$$\mathcal{F} [\phi_{12}(\tau)] = 2\pi \bar{F}_1(\omega) F_2(\omega) = \mathcal{F} \left[ \int_{-a}^a f_1(t) f_2(t+\tau) dt \right] \quad (1.3)$$

pero cuando  $f_1(t) = f_2(t)$ , tenemos entonces el teorema de autocorrelación dado por (lee, p.27):

$$\phi_{11}(\tau) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(t) f_1(t+\tau) dt = \mathcal{F}^{-1}[\Phi_{11}(\omega)] \quad (1.4)$$

y

$$\mathcal{F}[\phi_{11}(\tau)] = \Phi_{11}(\omega) = \mathcal{F}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(t) f_1(t+\tau) dt\right] \quad (1.5)$$

en donde  $\Phi_{11}(\omega)$  representa al espectro de densidad de energía de  $f_1(t)$ .

Otro teorema muy importante en el análisis de frecuencias es el teorema de convolución en el tiempo (Lathi, p.25), que establece:

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = 2\pi F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (1.6)$$

en donde la función de convolución está dada por:

$$f_1(t) * f_2(t) = \rho_{12}(\tau) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (1.7)$$

en forma análoga, el teorema de convolución en frecuencias (Lathi, p.27).

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = f_1(t) f_2(t) \quad (1.8)$$

Todos estos teoremas tienen propiedades muy importantes que facilitan su aplicación en el manejo de señales y ruido, por ejemplo, la propiedad conmutativa para autocorrelación y convolución, las propiedades distributiva y asociativa para la convolución, y la convolución con un impulso unitario,

$$f(t) * \delta(t-T) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \delta(\tau-t+T) dt = f(t-T) \quad (1.9)$$

que quizás es una de las más importantes.

Las funciones periódicas y aperiódicas están asociadas con experimentos físicos que producen ciertas variaciones que no cambian con la repetición experimental. En cambio, cuando se realizan experimentos en las mismas circunstancias y el resultado de éstos es diferente, sin saber en qué consiste esta diferencia, se tiene entonces un proceso aleatorio o estocástico. La teoría estadística de las Comunicaciones nos ayuda a manejar este tipo de funciones con ciertas suposiciones o idealizaciones, como el considerar que las funciones aleatorias tienen duración infinita o también suponer que debido a ciertas propiedades estadísticas debemos trabajar con un agregado o ensamble de funciones aleatorias provenientes de varios experimentos de una misma fuente en condiciones similares, pero de duración limitada.

AUTOCORRELACION. La autocorrelación de funciones periódicas y transitorias es independiente de los espectros de fase de las funciones correlacionadas; es por eso que una variedad infinita de funciones puede tener la misma autocorrelación. Este concepto se supone válido para las diferentes funciones miembro de un ensamble. Si  $f_1(t)$  es una función miembro de un ensamble, su función de autocorrelación es (Lee, R.10):

$$\phi_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) f_1(t + \tau) dt \quad (1.10)$$

y existe para cada valor de  $\tau$ .

La determinación analítica de (1.10) no es tan simple como las funciones de autocorrelación de señales periódicas y transitorias, debido a que las funciones aleatorias cambian, y por tanto, no se conocen gráfica ni analíticamente.

CORRELACION CRUZADA. La correlación cruzada de funciones aleatorias tiene mucha aplicación en el procesamiento de la información sísmológica, sobre todo en el diseño de un sistema lineal para la extracción óptima de información cuando la entrada está contaminada con señales indeseables; éste es el caso del filtrado óptimo de Wiener. En la cross-correlación de dos funciones aleatorias, se consideran dos ensambles, de los cuales estas funciones son miembros, una señal de cada ensamble. Por definición,

supongamos que  $f_1(t)$  es función miembro del primer ensamble, y  $f_2(t)$  corresponde al segundo ensamble, entonces (Lee, R., 10):

$$\phi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) f_2(t+\tau) dt \quad (1.11)$$

con la condición de que  $\phi_{12}(\tau)$  exista para cada valor de  $\tau$  y lo que es más importante, que sea la misma función  $\phi_{12}(\tau)$  para cualquier otro par de funciones miembros de los dos ensambles, esto, junto con la autocorrelación, son características estadísticas del ensamble.

TEOREMA DE WIENER PARA LA AUTOCORRELACION. El teorema de autocorrelación para funciones periódicas establece que la autocorrelación y el espectro de potencias de una función periódica están relacionados mediante la transformada de Fourier, pero si hacemos que el período  $T$  tienda al infinito, entonces  $f_1(t)$  tenderá a ser una función aleatoria, y por otro lado, ya que  $\phi_{11}(\tau)$  es real y par, entonces su transformada  $\Phi_{11}(\omega)$  también será real y par, quedando el teorema de Wiener como una transformación de cosenos (Lee, R., 10).

$$\Phi_{11}(\omega) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi_{11}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (1.12)$$

y

$$\phi_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi_{11}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (1.13)$$

Para  $\tau = 0$ , tenemos:

$$\phi_{11}(0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi_{11}(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \alpha} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^2(t) dt \quad (1.14)$$

Observando la ecuación (1.14), queda  $\Phi_{11}(\omega)$  en términos del valor medio cuadrático de la función aleatoria  $f_1(t)$ , la cual pertenece a un ensamble de funciones aleatorias  $\{f(t)\}$ , es decir,  $\Phi_{11}(\omega)$  es el espectro de densidad de potencia de  $f_1(t)$ . Finalmente, tenemos que las ecuaciones (1.12) y (1.13) representan el teorema de Wiener para la autocorrelación: "La función de autocorrelación de una función aleatoria y el espectro de densidad de potencia están relacionados mediante una transformación de cosenos de Fourier."

La suposición fundamental del teorema de Wiener es que la función de autocorrelación es común a todas las funciones miembro de un ensamble y por tanto, que cada miembro del ensamble tiene el mismo espectro de densidad de potencia, independientemente de la forma de la onda.



### 3) CONCEPTO ESTADISTICO DE CORRELACION EN ENSAMBLES ESTACIONARIOS.

La descripción exacta de una función periódica o aperiódica en el tiempo está en función del conjunto de valores correspondientes a la variable independiente, los cuales son completamente conocidos, es decir, son funciones determinísticas.

Cuando la función es aleatoria, se requiere de algunos conceptos estadísticos para dar una descripción aproximada de dicha función. El paso de una función aleatoria puede ser determinado sin problemas para cada valor del tiempo, pero el futuro de dicha función no puede precisarse, entonces se hace necesaria la predicción, la cual requiere del conjunto entero de todos los posibles valores utilizando el concepto de distribución de probabilidades.

FUNCIONES DE DISTRIBUCION Y DENSIDAD. En un experimento aleatorio, la probabilidad de que  $\xi$  (variable aleatoria) tome el valor  $x_1$  es:

$$P(\xi = x_1) = P_{\xi}(x_1) \quad (1.15)$$

y en forma similar

$$\left. \begin{aligned} P(\xi = X_2) &= P_{\xi}(X_2) \\ P(\xi = X_3) &= P_{\xi}(X_3) \\ &\vdots \\ P(\xi = X_n) &= P_{\xi}(X_n) \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

la expresión general será,

$$P(\xi = X_i) = P_{\xi}(X_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.17)$$

A la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor  $x_i$ , se le llama función de distribución de probabilidad de la variable  $\xi$ , es decir,  $P_{\xi}(x_i)$ , también se conoce como: Distribución de probabilidad, función de probabilidad, función de distribución o distribución.

La distribución de probabilidad siempre será una función no negativa y además se cumple:

$$\sum_{i=1}^n P_{\xi}(X_i) = 1 \quad (1.18)$$

Cuando el rango de variación de una variable aleatoria es continuo, entonces la variable se llama variable aleatoria continua y el concepto de distribución de probabilidad cambia a función de densidad de probabilidad, densidad de probabilidad o simplemente densidad, ya que:

$$P_{\xi}(x_i) \rightarrow P_{\xi}(x), \text{ de acuerdo a la gráfica,}$$

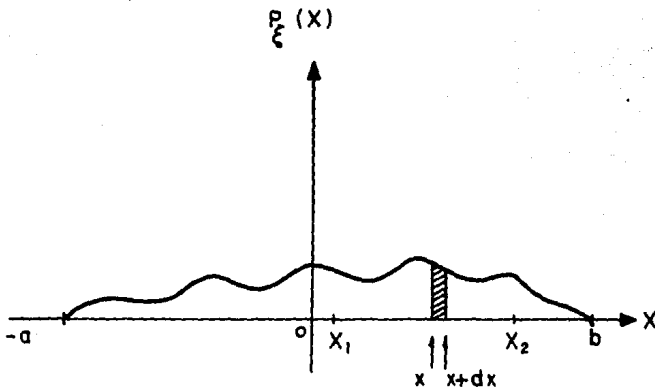


Figura No. 1.2) Densidad de probabilidad.

La probabilidad de que el evento se encuentre entre el intervalo  $in$  finitesimal  $(x, x + dx)$  es:

$$P(x < \xi < x + dx) = P_{\xi}(x) dx \quad (1.19)$$

representado por el área del rectángulo en la figura anterior.

Ahora la probabilidad de que el evento se encuentre en el intervalo  $(x_1, x_2)$  es:

$$P(X_1 < \xi < X_2) = \int_{X_1}^{X_2} P_{\xi}(X) dx \quad (1.20)$$

Dado que  $P_{\xi}(x)$  está definida sobre el intervalo  $(-\alpha, \alpha)$  y en la Figura No. 1.2) vale cero, fuera de  $(-\alpha, \alpha)$  será conveniente escribir,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\xi}(X) dx = 1 \quad (1.21)$$

como una propiedad fundamental de la función de densidad.

ENSAMBLES ESTACIONARIOS. Si se realiza varias veces el mismo experimento aleatorio en las mismas condiciones y con la misma fuente, se tiene entonces un ENSAMBLE de funciones aleatorias (Figura No. 1.1). El tiempo es muy importante dado que un evento aleatorio cambia a cada instante, pero vamos a suponer que nuestras observaciones las hacemos para  $t = 0$ , aquí se tiene un conjunto de valores  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$  y además - tomando en cuenta la información que existe desde  $t = t'$  para el pasado del ensamble (Figura No. 1.3).

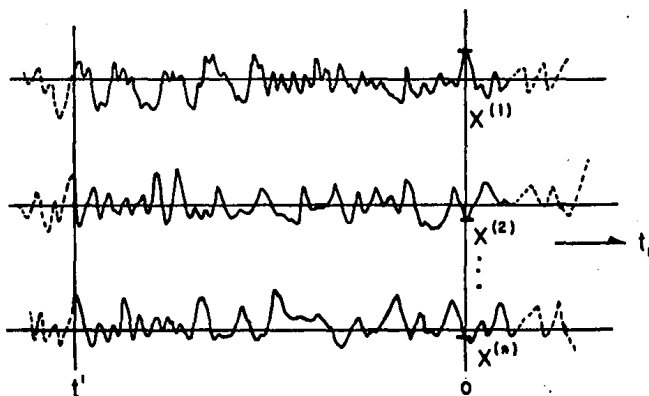


Figura No. 1.3) Datos estadísticos para experimentos de la misma duración.

Si la amplitud aleatoria de cualquiera de las funciones miembro en un tiempo futuro ( $t_1$ ) se define como  $\xi_1$ , entonces la probabilidad de que  $\xi_1$  tome el valor  $x_1$  en el tiempo  $t_1$  es:

$$P(x_1 < \xi_1 < x_1 + dx_1; t = t_1) = P_{\xi_1}(x_1, t_1) dx_1 \quad (1.22)$$

en donde  $P_{\xi_1}(x_1, t_1)$  es la densidad de probabilidad, y aunque ésta es función del tiempo en donde se encuentra la variable aleatoria, es posible que la densidad de probabilidad sea independiente de ese tiempo.

Si la densidad de probabilidad de las amplitudes de un ensamble es LA MISMA, no importando cuál sea el tiempo de observación, entonces el ensamble es ESTACIONARIO, y entonces:

$$P(X_1 < \xi_1 < X_1 + dx_1; t = t_1) = P_{\xi_1}(X_1) dx_1 \quad (1.23)$$

en donde  $P_{\xi_1}(x_1)$  es la densidad de probabilidad de  $\xi_1$ , y es independiente de  $t_1$ .

Para cualquier función miembro del ensamble, la probabilidad de que en el tiempo  $t = t_1$ ,  $\xi_1$  sea encontrada en el intervalo  $(a_1, b_1)$  y que en un tiempo posterior  $t = t_2 = t_1 + \tau_1$ ,  $\xi_2$  sea encontrada en el intervalo  $(a_2, b_2)$  es:

$$P(a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2; t_2 - t_1 = \tau_1) =$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} P_{\xi_1 \xi_2}(X_1, X_2; \tau_1) dx_1 dx_2 \quad (1.24)$$

$$\text{y además } \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\xi_1 \xi_2}(X_1, X_2; \tau_1) dx_1 dx_2 = 1 \quad (1.25)$$

en donde  $P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau_1)$  es la densidad de probabilidad.

De esta misma manera, podríamos dar una descripción completa del ensamble estacionario mediante el conjunto de densidades de probabilidad

$$\left. \begin{aligned}
 &P_{\xi_1} (X_1) \\
 &P_{\xi_1, \xi_2} (X_1, X_2; \tau_1) \\
 &P_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} (X_1, X_2, X_3; \tau_1, \tau_2) \\
 &\vdots \\
 &P_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})
 \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Cuando el conjunto completo de densidades de probabilidad es independiente del origen (a partir del cual se mide el tiempo), entonces, tenemos un ensamble estrictamente estacionario, y también se cumple que:

$$\left. \begin{aligned}
 &\int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\xi_1} (X_1) dx_1 = 1 \\
 &\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\xi_1, \xi_2} (X_1, X_2; \tau_1) dx_1 dx_2 = 1 \\
 &\vdots \\
 &\int_{-\alpha}^{\alpha} \dots \int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} (X_1, X_2, \dots, X_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) dx_1, \dots, dx_n = 1
 \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Un ensamble estacionario está completamente descrito cuando se conoce el conjunto completo de densidades de probabilidad (dado por la ecuación 1.26), pero afortunadamente para problemas prácticos, en muchos sistemas de comunicación, incluyendo el sísmológico, basta una descripción parcial del ensamble para resolver adecuadamente el sistema.

PROMEDIOS EN TIEMPO Y EN ENSAMBLE. El concepto de PROMEDIO es muy importante en teoría de probabilidad y se aplica a variables aleatorias.

Supongamos que en un experimento estocástico la variable aleatoria  $\xi$  toma los siguientes posibles valores:  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , y que de un número  $S$  de repeticiones encontramos que:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \text{ sucede para } \xi = x_1 \\ R_2 \text{ sucede para } \xi = x_2 \\ \vdots \\ R_i \text{ sucede para } \xi = x_i \\ \vdots \\ R_n \text{ sucede para } \xi = x_n \end{array} \right\} \quad (1.28)$$

en donde  $R_1, R_2, \dots, R_n$  son diferentes de cero. El valor promedio de  $\xi$  será:

$$\bar{\xi} = x_1 \frac{R_1}{S} + x_2 \frac{R_2}{S} + \dots + x_n \frac{R_n}{S} \quad (1.29)$$

en donde  $\frac{R_1}{S}, \frac{R_2}{S}, \dots, \frac{R_n}{S}$  son las relaciones de frecuencias de sucesos, es decir, la probabilidad de que  $\xi$  tome los valores  $x_i$ , entonces  $\bar{\xi}$  que da como:

$$\bar{\xi} = x_1 P_{\xi}(x_1) + x_2 P_{\xi}(x_2) + \dots + x_n P_{\xi}(x_n) \quad (1.30)$$



que se puede escribir como:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^n X_i P_{\xi}(X_i) \quad (1.31)$$

lo cual es conocido como la ESPERANZA MATEMÁTICA o el VALOR ESPERADO de

$\xi$ . Una expresión más general será:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_i P_{\xi}(X_i) \quad (1.32)$$

también conocida como el PROMEDIO o la MEDIA de  $\xi$ .

Si la variable aleatoria  $\xi$  tiene un rango continuo de posibles valores, entonces:

$$\bar{\xi} = \int_{-\alpha}^{\alpha} X P_{\xi}(X) dx \quad (1.33)$$

Las funciones de correlación juegan un papel central en el análisis armónico de procesos estocásticos y son un tipo especial de promedio. -- Existen dos tipos de promedio, éstos son los promedios en el tiempo de un proceso aleatorio (el cual puede conocerse sólomente con los valores de la función en un tiempo pasado) y los promedios estadísticos o promedios de ensamble (el cual se evalúa conociendo las densidades de probabilidad). Las funciones de correlación en procesos aleatorios están relacionadas -- con estos dos tipos de promedio.

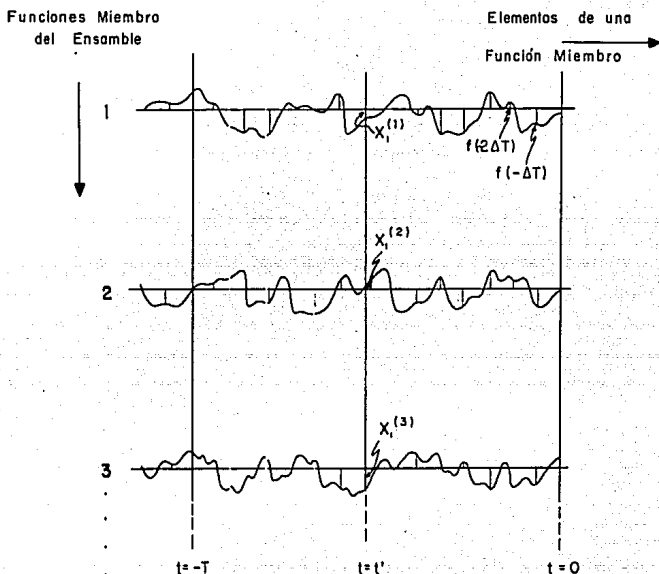


FIGURA No. 1.4) Elementos de las funciones miembro del ensamble.

En la Figura No. 1.4), se tiene un ensamble de funciones miembro --  $\{f(t)\}$ . Se establecerá la relación entre el valor promedio (en el tiempo) de una función miembro del ensamble y el valor promedio (estadístico) de las amplitudes del ensamble en cualquier tiempo  $t$ . Si el intervalo --  $(-T, 0)$  lo dividimos en  $n$  partes iguales  $\Delta t$  entonces  $n = T/\Delta t$ , y el

"promedio en el tiempo" de cada función muestra  $f(t)$  del ensamble  $\{f(t)\}$  será en el intervalo  $(-\alpha, 0)$ ,

$$\overline{f(t)} = \lim_{\substack{T \rightarrow \alpha \\ \Delta T \rightarrow 0}} \left[ \frac{f(-\Delta T) + f(-2\Delta T) + \dots + f(-n\Delta T)}{T} \right] \Delta T \quad (1.34)$$

lo cual llega a ser:

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \alpha} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt \quad (1.35)$$

Por otro lado, habíamos visto que el valor "promedio de las amplitudes" del ensamble para cualquier tiempo  $t$  se define por la ecuación (1.33). Como se supone que las diferentes funciones muestra del ensamble estacionario son producidas por fuentes de la misma naturaleza, entonces el promedio en el tiempo de un miembro sobre su pasado  $(-\alpha, 0)$  es exactamente igual que el promedio del ensamble, es decir:

$$\lim_{T \rightarrow \alpha} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} X P_{\xi}(X) dx \quad (1.36)$$

y por esta razón se considera lógico pensar que el promedio en el tiempo para cualquier  $f(t)$  en su tiempo futuro  $(0, \alpha)$  es el mismo que en el pasado  $(-\alpha, 0)$ , es decir:

$$\lim_{T \rightarrow \alpha} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \alpha} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.37)$$

y entonces se establece la Hipótesis Ergódica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X P_{\xi}(X) dx \quad (1.38)$$

es decir, "El promedio en el tiempo de cualquier función muestra  $f(t)$  de un ensamble estacionario  $\{f(t)\}$  sobre el intervalo  $(-\infty, \infty)$  es IGUAL al promedio estadístico (o promedio de ensamble) para cualquier tiempo  $t$ ."

$$\overline{f(t)} = \bar{\xi} \quad (1.39)$$

y el proceso estocástico estacionario será ergódico.

La función de autocorrelación para una función aleatoria  $f(t)$  está definida como en la ecuación (1.10). Esto no es más que un promedio en el tiempo, que se puede representar como:

$$\phi_{ff}(\tau) = \overline{f(t) f(t+\tau)} \quad (1.40)$$

y por la Hipótesis Ergódica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f(t+\tau) dt = \quad (1.41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 P_{\xi_1} P_{\xi_2}(X_1, X_2; \tau) dx_1 dx_2$$

en donde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 P_{\xi_1} P_{\xi_2} (X_1, X_2; \tau) dx_1 dx_2 = \overline{\xi_1 \xi_2} \quad (1.42)$$

entonces:

$$\overline{f(t) f(t + \tau)} = \overline{\xi_1 \xi_2} \quad (1.43)$$

de aquí que la función de autocorrelación (dada por la ecuación 1.10) en términos del promedio del ensamble queda como:

$$\phi_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 P_{\xi_1} P_{\xi_2} (X_1, X_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (1.44)$$

Si  $f(t)$  es un proceso discreto, entonces:

$$\phi_{ff}(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_{1i} X_{2j} P_{\xi_1} P_{\xi_2} (X_{1i}, X_{2j}; \tau) \quad (1.45)$$

Ahora para la función de cross-correlación tenemos dos funciones - muestra  $f(t)$  y  $g(t)$  correspondientes a dos ensambles estacionarios  $\{f(t)\}$  y  $\{g(t)\}$  respectivamente, por la Hipótesis Ergódica:

$$\overline{f(t) g(t + \tau)} = \overline{\xi_1 \mu_2} \quad (1.46)$$

entonces, la función de cross-correlación definida como un promedio en el tiempo quedará ahora en términos de un promedio de ensamble, como:

$$\phi_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 Y_2 P_{\xi_1 \mu_2}(X_1, Y_2; \tau) dx_1 dy_2 \quad (1.47)$$

y la expresión para el proceso discreto será:

$$\phi_{fg}(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_{1i} Y_{2j} P_{\xi_1 \mu_2}(X_{1i}, Y_{2j}; \tau) \quad (1.48)$$

Las expresiones (1.10) y (1.11) son las funciones de auto y cross-correlación respectivamente, expresadas como un PROMEDIO EN EL TIEMPO, y -- las expresiones (1.44) y (1.47) están en forma de un PROMEDIO DE ENSAMBLE.

## CAPITULO II

EL FILTRO OPTIMO EN SERIES DEL TIEMPO

## 1) INTEGRAL DE WIENER-HOPF DE PRIMERA CLASE.

La teoría estadística de la Comunicación nos proporciona la herramienta necesaria para formular criterios de diseño óptimo en sistemas lineales, sobre todo para la solución de ciertos filtros digitales.

En el problema del filtro lineal, se tiene como entrada un mensaje mezclado con ruido y se desea extraer este mensaje por medio de un sistema lineal con un ERROR MINIMO.

En la Figura No. 2.1), se formula el filtrado óptimo; la entrada del sistema es por lo general una combinación de un mensaje  $f_m(t)$  con ruido  $f_n(t)$ .

$$f_i(t) = f_m(t) + f_n(t) \quad (2.1)$$

Siendo ambos procesos estocásticos estacionarios.

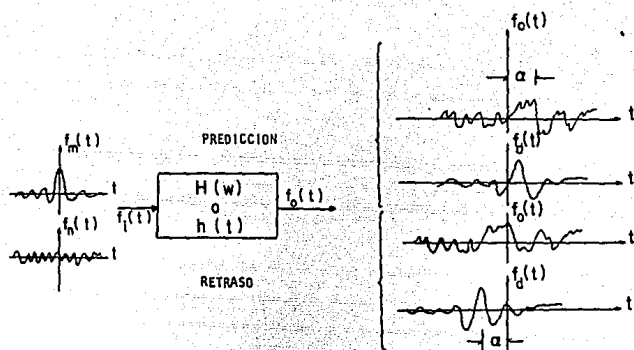


FIGURA No. 2.1) Ilustración del filtrado óptimo.

En nuestro sistema, la salida ideal sería el mensaje mismo  $f_m(t)$ , - es decir, la SALIDA DESEADA  $f_d(t)$  como se muestra en la figura, y claro, tendríamos una SALIDA ACTUAL  $f_o(t)$ ; el problema, entonces, es encontrar - la función de transferencia  $H(w)$  o la respuesta al impulso unitario  $h(t)$  de tal forma que la salida actual se aproxime a la salida deseada con un error mínimo.

Si tenemos  $f_d(t) = f_m(t)$ , significa que deseamos en la salida una - réplica instantánea del mensaje, sin embargo, se podría tener un retraso en la reproducción del mensaje y esto no significaría distorsión, en este caso la salida deseada sería  $f_d(t) = f_m(t - \alpha)$ .



Con  $f_d(t) = f_m(t + \alpha)$ , significa que deseamos el mensaje puro, pero avanzado en  $\alpha$  segundos, y esto sería un problema de predicción.

Cualquiera que sea nuestra salida actual  $f_o(t)$ , el sistema debe estar diseñado de tal forma que ésta se aproxime lo más posible a la salida deseada  $f_d(t)$ , así el error quedará determinado como (Lee, R. 10; Robinson, R. 14):

$$\epsilon(t) = f_o(t) - f_d(t) \quad (2.2)$$

Como este es el valor del error instantáneo, deberemos tomar un valor medio apropiado de  $\epsilon(t)$ , el cual servirá como medida para saber si el filtro diseñado cumple con el objetivo de que  $f_o(t) \approx f_d(t)$ , entonces

$$\overline{\epsilon(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f_o(t) - f_d(t)] dt \quad (2.3)$$

Estadísticamente, esta relación sería cero debido a que habría cancelación de errores instantáneos positivos con negativos. Se escoge entonces el error medio cuadrático,

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f_o(t) - f_d(t)]^2 dt \quad (2.4)$$

De acuerdo a las características de un sistema lineal, es decir, el teorema de superposición y la invariancia en el tiempo, tenemos que la salida actual  $f_o(t)$  es la convolución entre la función de entrada  $f_i(t)$  y la respuesta al impulso unitario del sistema  $h(t)$ , como se muestra en la figura siguiente.

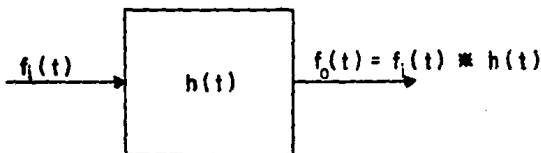


FIGURA No. 2.2) Un sistema lineal.

Y recordando que:

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f_i(t - \tau) d\tau \quad (2.5)$$

substituyendo (2.5) en (2.4) y desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_i(t - \tau) f_i(t - \sigma) dt \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_d(t) f_i(t - \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_d^2(t) dt \quad (2.6) \end{aligned}$$

en donde son válidas las relaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_i(t-\tau) f_i(t-\sigma) d\sigma &= \phi_{ii}(\tau-\sigma) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_d(t) f_i(t-\tau) dt &= \phi_{id}(\tau) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_d^2(t) dt &= \phi_{dd}(0) \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Substituyendo en (2.6), tenemos:

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \phi_{ii}(\tau-\sigma) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \phi_{id}(\tau) + \phi_{dd}(0) \quad (2.8)$$

esta expresión nos indica que el ERROR MEDIO CUADRÁTICO entre la SALIDA ACTUAL y la SALIDA DESEADA del FILTRO depende de lo siguiente:

- $h(t)$  = Respuesta al impulso unitario del filtro.
- $\phi_{ii}(\tau)$  = La autocorrelación de la entrada al filtro.
- $\phi_{id}(\tau)$  = La cross-correlación entre la entrada y la salida deseada del filtro.
- $\phi_{dd}(0)$  = El valor medio cuadrático de la salida deseada del filtro.

Una vez que se determinan la entrada  $f_i(t)$  y la salida deseada  $f_d(t)$  en un problema específico, entonces se puede calcular inmediatamente  $\phi_{ii}(\tau)$  y  $\phi_{dd}(0)$ , y cualquier cambio que exista en el error me--

dio cuadrático (ecuación 2.8), dependerá solamente de la respuesta al im pulso unitario  $h(t)$  del sistema, esto quiere decir que la ecuación (2.8) es una funcional de  $h(t)$  y que lo verdaderamente importante en un sistema lineal óptimo es la determinación de  $h(t)$  o  $H(w)$ .

Para determinar  $h(t)$  en la ecuación (2.8), es necesario minimizar - el error cuadrático medio mediante el cálculo variacional (Lee, p. 364). Para que el error medio cuadrático funcional  $\overline{\epsilon^2(t)}$  tenga un valor mínimo para la respuesta al impulso unitario  $h(t)$ , es necesario que satisfaga la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \phi_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma - \phi_{id}(\tau) = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{para } \tau \geq 0$$

esto quiere decir que la respuesta al impulso unitario del sistema óptimo es la solución de esta ecuación y le llamaremos  $h_{opt}(\sigma)$ , entonces -- la ecuación (2.9) queda como:

$$\phi_{id}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(\sigma) \phi_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma \quad (2.10)$$

$$\text{para } \tau \geq 0$$

Que es la ecuación de la Integral de Wiener-Hopf de Primera Clase, la cual cubre una gran variedad de problemas como el de filtros de retraso y predicción, y dado que esto depende de la salida deseada, entonces podríamos tener otros problemas con derivación o integración del mensaje con adelanto o con retraso en la salida deseada, etc.

Observamos que la integral de Wiener-Hopf de primera clase es una integral de convolución, es decir, la ecuación (2.10) significa que: "La cross-correlación entre la entrada y la salida deseada es igual a la convolución entre el filtro óptimo y la autocorrelación de la entrada", pero únicamente para  $\tau \geq 0$ . Como se muestra en la Figura No. 2.3a) y la -- No. 2.3b) (Lee, R., 10).

De acuerdo al teorema de cross-correlación visto en el capítulo anterior, esta convolución es igual a la cross-correlación de la entrada y salida del sistema óptimo, entonces tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\sigma) \phi_{11}(\tau - \sigma) d\sigma = [\phi_{10}(\tau)]_{h_{\text{opt}}} \quad (2.11)$$

De aquí que la ecuación de Wiener-Hopf queda:

$$\phi_{1d}(\tau) = [\phi_{10}(\tau)]_{h_{\text{opt}}} \quad \text{para } \tau \geq 0 \quad (2.12)$$

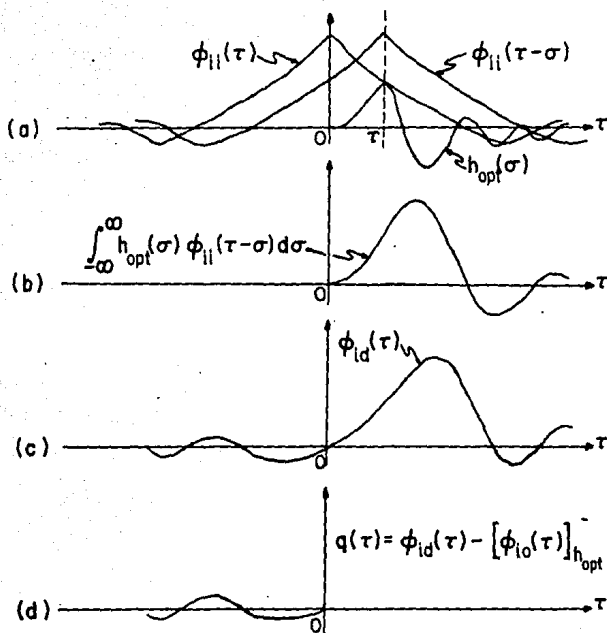


FIGURA No. 2.3) Interpretación de la ecuación de Wiener-Hopf.

La ecuación (2.12) se interpreta en la Figura No. 2.3c), en donde - observamos que para  $(\alpha < t < 0)$ , las dos funciones de esta ecuación son diferentes. Cuando la salida deseada se especifica en un problema dado, es casi seguro que en nuestro sistema óptimo exista algún error después de haber tratado de minimizar el error cuadrático medio, y la ecuación - de Wiener-Hopf será válida sólo para  $\tau \geq 0$ . Pudiera suceder que la sali-

da deseada se obtuviera sin error, entonces la ecuación (2.12) sería válida también para  $\tau < 0$  y sólo en este caso podría utilizarse la transformada de Fourier en la ecuación de Wiener-Hopf (ecuación 2.10) utilizando el teorema de convolución en el tiempo visto anteriormente (ecuación 1.6), obteniendo así:

$$\Phi_{id}(\omega) = H_{opt}(\omega)\Phi_{ii}(\omega) \quad (2.13)$$

en donde, finalmente, la función de transferencia del sistema lineal óptimo quedaría como:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{\Phi_{id}(\omega)}{\Phi_{ii}(\omega)} \quad (2.14)$$

y sería la solución del problema.

## 2) INTEGRAL DE BOOTHOM (WIENER-HOPF DE SEGUNDA CLASE).

Si para procesos estocásticos estacionarios en el tiempo se tiene que tanto la entrada  $f_i(t)$  como la salida actual  $f_o(t)$  y la salida deseada  $f_d(t)$  son funciones causales (es decir, válidas para  $t \geq 0$ ), entonces la integral de Wiener-Hopf de primera clase queda como:

$$\phi_{id}(\tau) = \int_0^{\infty} h_{opt}(\sigma) \phi_{ii}(\tau - \sigma) d\sigma \quad (2.15)$$

Una vez que la función respuesta óptima del filtro al impulso unitario  $h_{opt}(\sigma)$  es obtenida, entonces la salida actual  $f_o(t)$  se encuentra a partir de la ecuación de convolución dada por:

$$f_o(t) = \int_0^t h(t-\sigma) f_i(\sigma) d\sigma \quad (2.16)$$

Pero si el proceso estocástico es no estacionario, como en el FILTRADO DE WIENER VARIABLE CON EL TIEMPO, en donde las características de la función de entrada, tales como la media, el valor esperado y las funciones de correlación, varían con el tiempo, entonces la ecuación de Wiener-Hopf de primera clase no puede ser utilizada.

Para el diseño de un filtro óptimo cuando el proceso es no estacionario, es necesario tener muy en consideración la variación con respecto a la salida o tiempo de observación de las funciones de auto y cross-correlación, es decir, ahora tendremos:

$$\phi_{ii}(t, \gamma) \text{ y } \phi_{id}(t, \gamma) \quad (2.17)$$

en donde  $\gamma = \tau + t$ , y  $t$  es el tiempo de observación.

En otras palabras, para un proceso no estacionario, las funciones de correlación dependen de  $t$  y  $\gamma$ , mientras que para un proceso estacio-



nario las funciones de correlación dependen sólo de la diferencia, ----

$\gamma - t = T$ . El sistema óptimo quedará diseñado en base a las siguientes consideraciones:

$f_i(t)$  = Entrada (proceso estocástico no estacionario).

$f_o(t)$  = Salida actual.

$f_d(t)$  = Salida deseada.

$h_{opt}(t, \sigma)$  = Respuesta variable con el tiempo al impulso unitario del filtro óptimo.

$I(t)$  = Error cuadrático medio, entre las salidas actual y deseada.

Como habíamos mencionado anteriormente, la salida actual de nuestro sistema lineal óptimo será la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso dada por:

$$f_o(t) = \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \sigma) f_i(\sigma) d\sigma \quad (2.18)$$

y el error cuadrático medio, dado por:

$$I(t) = E \left\{ \left[ f_d(t) - f_o(t) \right]^2 \right\} \quad (2.19)$$

Substituyendo (2.18) en (2.19), tenemos:

$$I(t) = E \left\{ \left[ f_d(t) - \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \sigma) f_i(\sigma) d\sigma \right]^2 \right\} \quad (2.20)$$

Por expansión, tenemos:

$$I(t) = E \left\{ \left[ f_d(t) \right]^2 \right\} - 2 \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \sigma) E \left\{ f_d(t) f_i(\sigma) \right\} d\sigma \\ + \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \sigma) \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \gamma) E \left\{ f_i(\gamma) f_i(\sigma) \right\} d\gamma d\sigma \quad (2.21)$$

pero habíamos visto en el capítulo anterior que estadísticamente:

$$\left. \begin{aligned} E \left\{ \left[ f_d(t) \right]^2 \right\} &= \phi_{dd}(t, t) \\ E \left\{ \left[ f_i(\gamma) f_i(\sigma) \right] \right\} &= \phi_{ii}(\gamma, \sigma) \\ E \left\{ \left[ f_d(t) f_i(\sigma) \right] \right\} &= \phi_{di}(t, \sigma) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

así, substituyendo (2.22) en (2.21), tenemos:

$$I(t) = \phi_{dd}(t, t) - 2 \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \sigma) \phi_{di}(t, \sigma) d\sigma + \\ \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \sigma) \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \gamma) \phi_{ii}(\gamma, \sigma) d\gamma d\sigma \quad (2.23)$$

Suponiendo que la respuesta al impulso unitario no sea óptima, es decir, que tengamos  $h(t, \sigma)$  en lugar de  $h_{opt}(t, \sigma)$ , entonces:

$$h(t, \sigma) = h_{opt}(t, \sigma) + \epsilon f(t, \sigma) \quad (2.24)$$

en donde  $f(t, \sigma)$  es cualquier función respuesta al impulso unitario, y

$\epsilon$  es un número arbitrario. Substituyendo  $h(t, \sigma)$  por  $h_{opt}(t, \sigma)$  en la ecuación (2.23), tenemos:

$$J(t) = \phi_{dd}(t, t) - 2 \int_0^{\infty} h(t, \sigma) \phi_{di}(t, \sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} h(t, \sigma) \int_0^{\infty} h(t, \gamma) \phi_{ii}(\gamma, \sigma) d\gamma d\sigma \quad (2.25)$$

en donde ahora  $J(t)$  es el error medio cuadrático.

Ahora, substituyendo (2.24) en (2.25) y desarrollando, tendríamos:

$$J(t) = I(t) - 2\epsilon \int_0^{\infty} f(t, \sigma) \left\{ \phi_{di}(t, \sigma) - \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \gamma) \phi_{ii}(\gamma, \sigma) d\gamma \right\} d\sigma + \epsilon^2 E \left\{ \left[ \int_0^{\infty} f(t, \sigma) f_i(\sigma) d\sigma \right]^2 \right\} \quad (2.26)$$

o también:

$$\left. \begin{aligned} J(t) &= I(t) - 2\epsilon K_1(t) + \epsilon^2 K_2(t) \\ &\quad \text{en donde,} \\ K_1(t) &= \int_0^{\infty} f(t, \sigma) \left\{ \phi_{di}(t, \sigma) - \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \gamma) \phi_{ii}(\gamma, \sigma) d\gamma \right\} d\sigma \\ &\quad \text{y} \\ K_2(t) &= E \left\{ \left[ \int_0^{\infty} f(t, \sigma) f_i(\sigma) d\sigma \right]^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

podríamos poner:

$$J(t) = I(t) - 2 \left[ \epsilon K_1(t) - \frac{\epsilon^2}{2} K_2(t) \right] \quad (2.28)$$

De acuerdo a la definición de  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$  y para algunos valores de  $\epsilon$  y  $f(t, \sigma)$ , se cumple que:

$$\left[ \epsilon K_1(t) - \frac{\epsilon^2}{2} K_2(t) \right] > 0 \quad (2.29)$$

Siempre y cuando  $K_1(t) \neq 0$ , pero esto implica que:

$$I(t) > J(t) \quad (2.30)$$

Pero debemos observar (ecuaciones 2.24 y 2.25) que  $J(t)$  es el error cuadrático medio que se obtiene cuando la respuesta al impulso unitario  $h(t, \sigma)$  no es óptima y debe ser mayor que el mínimo error cuadrático medio  $I(t)$  obtenido al considerar  $h_{opt}(t, \sigma)$  en el sistema lineal óptimo, entonces:

$$J(t) > I(t) \quad (2.31)$$

y para que esto se cumpla, es necesario que  $K_1(t) = 0$ .

Así, para un sistema óptimo, y de la relación (2.27), tenemos:

$$K_1(t) = \int_0^{\infty} f(t, \sigma) \left\{ \phi_{di}(t, \sigma) - \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \gamma) \phi_{ii}(\gamma, \sigma) d\gamma \right\} d\sigma = 0 \quad (2.32)$$

esta ecuación sólo se satisface si:

$$\phi_{di}(t, \sigma) = \int_0^{\infty} h_{opt}(t, \gamma) \phi_{li}(\gamma, \sigma) d\gamma \quad (2.33)$$

Esta es la ecuación integral de Bootom (ecuación integral de Wiener-Hopf de segunda clase), condición necesaria y suficiente para que el sistema sea óptimo, es decir, con un error  $I(t)$  mínimo.

### 3) ECUACION DE WIENER-HOPF EN SERIES ESTACIONARIAS EN EL TIEMPO.

Debido a que los filtros digitales usados en sismología son aplicados mediante una computadora digital en el dominio del tiempo, es necesario digitalizar nuestras funciones analógicas con el objeto de obtener una secuencia de número o series del tiempo que representen el fenómeno físico continuo. La digitalización debe ser tal que el intervalo de muestreo  $\Delta t$  sea constante y no sea muy grande ni muy pequeño puesto que habría pérdida o redundancia en la información respectivamente. El teorema de muestreo o regla de Nyquist establece que el intervalo óptimo está dado por:

$$\Delta t = \frac{1}{2f_N} \quad (2.34)$$

donde  $f_N$  representa la frecuencia máxima presente en el espectro de la señal.

El término "series del tiempo" representa un fenómeno continuo en el tiempo desde menos infinito hasta más infinito, es decir, de duración o longitud infinita, pero como prácticamente sólo pueden obtenerse datos -- con longitud finita, entonces siempre manejaremos "muestras de series del tiempo" a diferencia de la "onda básica", la cual es una entidad completa (con principio y fin); por otro lado, la representación de un fenómeno -- continuo desde  $(-\infty, \infty)$  pero sin cambio en sus propiedades estadísticas, se hace mediante "series estacionarias en el tiempo".

En sismología, se tienen dos tipos de señales: por un lado, la ONDA BASICA, y por otro las MUESTRAS DE SERIES ESTACIONARIAS EN EL TIEMPO, y a esta última corresponden los registros sismológicos. Así que un SISMOGRAMA no es sino un ENSAMBLE DE PORCIONES DE SERIES ESTACIONARIAS EN EL TIEMPO.

Una característica importante de una onda básica ( $b_t$ ) es su ENERGIA, la cual es la suma de los cuadrados de sus amplitudes:  $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2$ , y como una onda básica tiene duración finita, su energía también es finita, esto no es sino la autocorrelación de  $b_t$  para  $\tau = 0$  o el promedio o valor esperado dado por:

$$E \{ b_t^2 \} = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = \phi_{bb}(0) \quad (2.35)$$

La autocorrelación de la onda básica  $b_t$  para  $\tau \neq 0$  será menor que - para  $\tau = 0$ , y nos da información acerca de la cantidad relativa de energía en los componentes de frecuencias de la señal, dada por:

$$\phi_{bb}(\tau) = E \{ b_{t+\tau} b_t \} \quad (2.36)$$

y como se vio en el Capítulo 1,

$$\phi_{bb}(\tau) = \phi_{bb}(-\tau) \quad (2.37)$$

Por otro lado, una característica importante de una serie estacionaria en el tiempo ( $s_t$ ) es su POTENCIA o sea, el promedio de la suma de los cuadrados de sus amplitudes:  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T+1} (S_{-T}^2 + \dots + S_{-1}^2 + S_0^2 + S_1^2 + \dots + S_T^2)$  es decir, la potencia es una cantidad infinita, también se cumple que:

$$E \{ S_t^2 \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T+1} (S_{-T}^2 + \dots + S_{-1}^2 + S_0^2 + S_1^2 + \dots + S_T^2) \quad (2.38)$$

y la autocorrelación para  $\tau \neq 0$  será:

$$\phi_{SS}(\tau) = E \{ S_{t+\tau} S_t \} \quad (2.39)$$

y la cross-correlación entre una señal de energía ( $b_t$ ) y una señal de potencia ( $s_t$ ) será:

$$\phi_{bs}(\tau) = E \{ b_{t+\tau} S_t \} \quad (2.40)$$

o también,

$$\phi_{sb}(\tau) = E \{ S_{t+\tau} b_t \} \quad (2.41)$$

en donde ya habíamos visto que:

$$\phi_{bs}(\tau) = \phi_{sb}(-\tau) \quad (2.42)$$

Anteriormente establecimos el criterio de Wiener para el diseño de un filtro óptimo, ahora para el caso discreto es exactamente lo mismo, - es decir, los elementos básicos en el dominio del tiempo para el filtro óptimo o de mínimos cuadrados son:

- a) Una señal de entrada (de energía o potencia),  $b_t$ .
- b) Una señal de salida deseada,  $d_t$ .
- c) Una señal de salida actual,  $a_t$ .

Y el problema: Encontrar un filtro  $f_t$  de tal forma que la salida -- actual  $a_t = b_t * f_t$  se parezca a la salida deseada  $d_t$  con un error mínimo, dando:

$$I = E \{ (d_t - a_t)^2 \} \quad (2.43)$$



como se muestra en la Figura No. 2.4), ya que  $e_t = d_t - a_t$ .

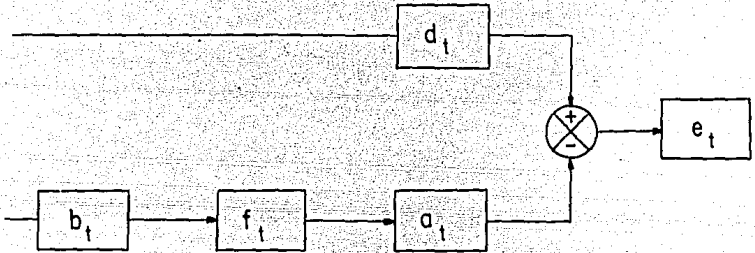


FIGURA No. 2.4) Elementos en el filtrado de Wiener.

Si el filtro es de longitud finita ( $m + 1$ ),

$$f_t = (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_m) \quad (2.44)$$

y como entrada, una señal de energía de longitud ( $n + 1$ ),

$$b_t = (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) \quad (2.45)$$

entonces, tendremos una salida actual de longitud ( $m + n + 1$ ),

$$a_t = f_t * b_t = \sum_{\tau=0}^n f_{t-\tau} b_{t-\tau} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m+n}) \quad (2.46)$$

parecida a una salida deseada de longitud ( $m + n + 1$ ),

$$d_t = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_{m+n}) \quad (2.47)$$

con una energía mínima en el error:

$$e_t = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_{m+n})$$

es decir (2.48)

$$I = E \left\{ (d_t - a_t)^2 \right\} = \text{Mín}$$

Substituyendo (2.46) en (2.48), tenemos:

$$I = E \left\{ \left( d_t - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} b_{t-\tau} \right)^2 \right\} \quad (2.49)$$

Si tomamos las derivadas parciales con respecto a cada uno de los coeficientes del filtro  $f_{\tau}$  e igualamos a cero, la ecuación (2.49) será un mínimo y tendremos:

$$\sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{bb}(j-\tau) = \phi_{db}(j) \quad (2.50)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n$$

la cual es la ecuación de Wiener-Hopf en series estacionarias en el tiempo.

De acuerdo con la ecuación (2.42) y con la (2.50), tendremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{aligned}
 f_0 \phi_{bb}(0) + f_1 \phi_{bb}(1) + f_2 \phi_{bb}(2) + \dots + f_n \phi_{bb}(n) &= \phi_{db}(0) \\
 f_0 \phi_{bb}(1) + f_1 \phi_{bb}(0) + f_2 \phi_{bb}(1) + \dots + f_n \phi_{bb}(n-1) &= \phi_{db}(1) \\
 f_0 \phi_{bb}(2) + f_1 \phi_{bb}(1) + f_2 \phi_{bb}(0) + \dots + f_n \phi_{bb}(n-2) &= \phi_{db}(2) \\
 &\dots \\
 f_0 \phi_{bb}(3) + f_1 \phi_{bb}(2) + f_2 \phi_{bb}(1) + \dots + f_n \phi_{bb}(n-3) &= \phi_{db}(3) \\
 &\dots \\
 f_0 \phi_{bb}(4) + f_1 \phi_{bb}(3) + f_2 \phi_{bb}(2) + \dots + f_n \phi_{bb}(n-4) &= \phi_{db}(4) \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 f_0 \phi_{bb}(n) + f_1 \phi_{bb}(n-1) + f_2 \phi_{bb}(n-2) + \dots + f_n \phi_{bb}(0) &= \phi_{db}(n)
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

la cual puede escribirse en forma más compacta de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix}
 \phi_{bb}(0) & \phi_{bb}(1) & \phi_{bb}(2) & \dots & \phi_{bb}(n) \\
 \phi_{bb}(1) & \phi_{bb}(0) & \phi_{bb}(1) & \dots & \phi_{bb}(n-1) \\
 \phi_{bb}(2) & \phi_{bb}(1) & \phi_{bb}(0) & \dots & \phi_{bb}(n-2) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \phi_{bb}(n) & \phi_{bb}(n-1) & \phi_{bb}(n-2) & \dots & \phi_{bb}(0)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_0 \\
 f_1 \\
 f_2 \\
 \vdots \\
 f_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \phi_{db}(0) \\
 \phi_{db}(1) \\
 \phi_{db}(2) \\
 \vdots \\
 \phi_{db}(n)
 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

En donde todos los elementos de la matriz de autocorrelación tienen simetría alrededor de la diagonal principal.

Podríamos convenir en llamar a la matriz de autocorrelación como  $[{}^N A]$ , al vector que contiene los coeficientes del filtro como  ${}^N f$  y al vector de crosscorrelación como  ${}^N C$ ; entonces finalmente tendríamos la ecuación (2.50) reducida a la forma matricial.

$$[{}^N A] {}^N f = {}^N C \quad (2.53)$$

Los paréntesis cuadrados denotan matrices cuadradas, las flechas denotan vectores columna y vectores fila, según la posición de la flecha. Finalmente, de la ec. (2.53) lo que hay que determinar, son los coeficientes del filtro óptimo,  ${}^N f$ .

## CAPITULO III

METODO DE APROXIMACION ESTOCASTICA PARA LA OBTENCION DE LOS COEFICIENTES DEL FILTRO DE WIENER, COMO PRIMER CRITERIO DE OPTIMIZACION

1) MATRIZ DE AUTOCORRELACION  
Y ESTABLECIMIENTO DEL ALGORITMO DE LEVINSON.

El problema más fuerte que se presenta en el diseño del filtro óptimo es la obtención de sus coeficientes, mediante la solución del sistema de ecuaciones simultáneas (2.52), en donde  $[N_A]$  y  $N_C$  son datos del problema (2.53).

La solución de dicho sistema se simplifica considerablemente al hacer uso de las propiedades de la matriz de autocorrelación. Se considera un ejemplo para  $N = 5$ .

$$[{}^5_A] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \hline \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \hline \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \\ \hline \phi_4 & \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

Las características de la matriz de autocorrelación son las siguientes:

- a) Es una matriz cuadrada ( $n$  renglones  $\times$   $n$  columnas).
- b) Es una matriz simétrica con respecto a sus dos diagonales.
- c) En cualquier diagonal paralela a la diagonal principal, los coeficientes son los mismos (estructura Toeplitz).
- d) Si se suprimen el primer renglón y la primera columna, se obtiene una matriz con las mismas propiedades, pero de orden menor.
- e) Puede decirse lo mismo, al suprimir la última columna y el último renglón.

Debido a que en aplicaciones geofísicas, usualmente se requiere de un gran número de coeficientes del filtro (de 100 a 200 valores), es necesario aplicar un método recursivo eficiente, tal que reduzca el tiempo de cálculo en la computadora. El tiempo de máquina requerido para resolver las ecuaciones normales para un filtro con  $m$  coeficientes, es proporcional a  $m^3$  si usamos las técnicas convencionales; pero haciendo uso de las propiedades de la matriz de autocorrelación antes mencionadas, Levinson diseñó un algoritmo (principalmente debido a la estructura Toeplitz de la matriz), que reduce este tiempo de máquina a  $m^2$ , y sobre todo, tiene la ventaja de que con este procedimiento recursivo, el espacio de almacena-

miento en la computadora es proporcional a  $m$ , en lugar de  $m^2$  requerido - por las técnicas convencionales. Robinson y Treitel desarrollan el algoritmo de Levinson (Robinson & Treitel; R, 10) de una manera clara y concisa y establecen que para este proceso recursivo es necesario almacenar en memoria los elementos:

$$\begin{aligned} & \{ \phi_{bb}(0), \phi_{bb}(1), \phi_{bb}(2), \dots, \phi_{bb}(n) \} \\ \Upsilon & \\ & \{ \phi_{db}(0), \phi_{db}(1), \phi_{db}(2), \dots, \phi_{db}(n) \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

los cuales representan los datos del sistema de ecuaciones normales (2.52).

Posteriormente, para el paso  $n = 0$ , se dan las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= 1 & \alpha_0 &= \phi_{bb}(0) & \beta_0 &= \phi_{bb}(1) \\ & & & & & \searrow \\ & & & & & (3.2) \\ f_{00} &= \frac{\phi_{db}(0)}{\phi_{bb}(0)} & \gamma_0 &= f_{00} \phi_{bb}(1) & & \nearrow \end{aligned}$$

y en forma recursiva para  $n = 1, 2, 3, \dots, m$ , se calculan los siguientes parámetros, en el orden indicado:

$$K_n = -\frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad (i)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + K_n \beta_n \quad (ii)$$

$$a_{n+1,0} = a_{n0}$$

$$a_{n+1,1} = a_{n1} + K_n a_{nn}$$

$$a_{n+1,2} = a_{n2} + K_n a_{n,(n-1)}$$

$$a_{n+1,3} = a_{n3} + K_n a_{n,(n-2)}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1,n} = a_{nn} + K_n a_{n1}$$

$$a_{n+1,n+1} = K_n a_{n0}$$

$$\beta_{n+1} = a_{n+1,0} \phi_{bb}(n+2) + a_{n+1,1} \phi_{bb}(n+1) + \dots + a_{n+1,n+1} \phi_{bb}(1) \quad (iv) \quad (3.3)$$

$$q_n = [\phi_{db}(n+1) - \gamma_n] / \alpha_{n+1} \quad (v)$$

$$f_{n+1,0} = f_{n0} + q_n a_{n+1,n+1}$$

$$f_{n+1,1} = f_{n1} + q_n a_{n+1,n}$$

$$f_{n+1,2} = f_{n2} + q_n a_{n+1,n-1}$$

$$\vdots$$

$$f_{n+1,n} = f_{nn} + q_n a_{n+1,1}$$

$$f_{n+1,n+1} = q_n a_{n+1,0}$$

$$\gamma_{n+1} = f_{n+1,0} \phi_{bb}(n+2) + f_{n+1,1} \phi_{bb}(n+1) + \dots + f_{n+1,n+1} \phi_{bb}(1) \quad (vii)$$

en donde, finalmente, los coeficientes del filtro  $f_0, f_1, f_2, f_m$  se obtienen completos cuando hayamos realizado el paso:  $m = n + 1$ , precisamente - cuando obtenemos de (vi) los valores de  $f_{m,0}, f_{m,1}, \dots, f_{m,m}$ .

Se muestra un ejemplo en el Apéndice I.



## 2) DESARROLLO DEL METODO DE FORSYTE &amp; WASOW.

El método de Levinson obtiene la solución exacta para el sistema de ecuaciones normales  $[N_A] N_{f \downarrow} = N_{C \downarrow}$  excepto por errores de redondeo, sin embargo, para fines prácticos en geofísica es probable que con una aproximación de estos coeficientes se obtengan resultados similares en el filtrado de datos. El método de aproximación estocástica de Forsyte and Wasow (Wang & Treitel; R. 23) nos lleva a una solución aproximada de (2.53) y también utiliza las propiedades de la matriz de autocorrelación pero aplica el cálculo matricial.

Este método se basa en la disminución progresiva de una función de error ocasionada por la diferencia entre el valor verdadero  $N_{f \downarrow}$  y un valor inicial  $N_{X_0 \downarrow}$  como primer aproximante a la solución de (2.53), en donde, después de un número mínimo de iteraciones, se obtiene una buena aproximación para  $N_{f \downarrow}$ .

Recordando el sistema de ecuaciones normales obtenidas del diseño del filtro óptimo:  $[N_A] N_{f \downarrow} = N_{C \downarrow}$ , y suponiendo que  $N_{X_{i \downarrow}}$  sea el iésimo estimado o aproximante del vector solución  $N_{f \downarrow}$ , entonces el vector residual será:

$$N_{\gamma_{i \downarrow}} = N_{C \downarrow} - [N_A] N_{X_{i \downarrow}} \quad (3.4)$$

desde luego que en el momento en que  ${}^N X_{i1} = {}^N f_{i1}$ , entonces:

$${}^N \gamma_{i1} = {}^N C_{i1} - [{}^N A] {}^N f_{i1} = \theta \quad (3.5)$$

aquí, la ENERGIA (la suma de los cuadrados de los elementos de  ${}^N \gamma_{i1}$ ) es cero (vector nulo), pero por lo general, la energía será diferente de ce ro aunque

$${}^N X_{i1} \approx {}^N f_{i1}$$

La idea del método es reducir dicha energía lo más pronto a cero.

La energía puede expresarse como:

$${}^N \gamma_{i1} \underline{{}^N \gamma_{i1}}$$

en donde  $\underline{{}^N \gamma_{i1}}$  es el vector transpuesto de  ${}^N \gamma_{i1}$ .

Por otro lado, (3.4) puede escribirse como:

$${}^N \gamma_{i1} = [{}^N A] \{ [{}^N A]^{-1} {}^N C_{i1} - {}^N X_{i1} \} \quad (3.6)$$

en donde  $[{}^N A]^{-1}$  es la matriz inversa de  $[{}^N A]$ , de aquí que la energía queda como:

$${}^N \gamma_{i1} \underline{{}^N \gamma_{i1}} = \{ [{}^N A]^{-1} {}^N C_{i1} - {}^N X_{i1} \}^T [{}^N A]^T [{}^N A] \{ [{}^N A]^{-1} {}^N C_{i1} - {}^N X_{i1} \} \quad (3.7)$$

en donde (T) también indica transposición, pero como  $[^N A]$  es simétrica, entonces  $[^N A]^T = [^N A]$  y entonces:

$${}^N \gamma_i \downarrow {}^N \underline{\gamma}_i = \{ [^N A]^{-1} {}^N C_i - {}^N X_i \downarrow \}^T [^N A]^2 \{ [^N A]^{-1} {}^N C_i - {}^N X_i \downarrow \} \quad (3.8)$$

podría derivarse de (3.8) una técnica para disminuir la energía, pero Forsythe & Wasow proponen la función error  $E \{ {}^N X_i \downarrow \}$ , dada por:

$$E \{ {}^N X_i \downarrow \} = {}^N \gamma_i \downarrow [^N A]^{-1} {}^N \underline{\gamma}_i \quad (3.9)$$

que de acuerdo con (3.8), queda como:

$$E \{ {}^N X_i \downarrow \} = \{ [^N A]^{-1} {}^N C_i - {}^N X_i \downarrow \}^T [^N A] \{ [^N A]^{-1} {}^N C_i - {}^N X_i \downarrow \} \quad (3.10)$$

$E \{ {}^N X_i \downarrow \}$  tiene una forma real y cuadrática cuyo valor mínimo (cero) ocurre cuando  ${}^N X_i \downarrow = [^N A]^{-1} {}^N C_i$ , es decir, cuando  ${}^N X_i \downarrow = {}^N f_i \downarrow$ . Por expansión, tenemos de (3.10):

$$E \{ {}^N X_i \downarrow \} = {}^N X_i \downarrow [^N A] {}^N X_i \downarrow - 2 {}^N X_i \downarrow {}^N C_i + {}^N C_i [^N A]^{-1} {}^N C_i \quad (3.11)$$

haciendo la consideración que  $[^N A]^{-1}$  es simétrica, dado que  $[^N A]$  también lo es.

La dirección a lo largo de la cual la función de error disminuye - más rápidamente con respecto a un aproximante dado  ${}^N X_{i-1}$  es llamada "dirección de máximo descenso", la cual se obtiene a partir del gradiente - de  $E \{ {}^N X_{i-1} \}$  :

$$\frac{-\partial}{\partial ({}^N X_i)} [E({}^N X_{i-1})] = \frac{-\partial}{\partial ({}^N X_i)} [{}^N X_i [{}^N A] {}^N X_{i-1} - 2 {}^N X_i {}^N C_1 + {}^N C [{}^N A]^{-1} {}^N C_1] \quad (3.12)$$

$$\frac{-\partial}{\partial ({}^N X_i)} [E({}^N X_{i-1})] = 2({}^N C_1 - [{}^N A] {}^N X_{i-1}) = 2 {}^N \gamma_{i-1} \quad (3.13)$$

Con esto, observamos que la función error disminuye rápidamente en la dirección del vector residual  ${}^N \gamma_{i-1}$  y por esta razón, Forsythe & Wasow escogieron la siguiente iteración para el cálculo de los vectores de aproximación  ${}^N X_{i-1}$  :

$${}^N X_i = {}^N X_{i-1} + \lambda_{i-1} {}^N \gamma_{i-1} \quad (3.14)$$

entonces, hay que determinar el valor de la constante  $\lambda_{i-1}$  de tal forma que la función error  $E \{ {}^N X_{i-1} \}$  disminuya para cada iteración (i). Sustituyendo (3.14) en (3.11), tenemos:

$$\begin{aligned}
 E\{^N X_{i1}\} &= \underline{X}_{i-1} [^N A]^N X_{i-1} + 2\lambda_{i-1} \underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N X_{i-1} + \\
 &+ \lambda_{i-1}^2 \underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N \gamma_{i-1} - 2 \underline{X}_{i-1} {}^N C - \\
 &- 2\lambda_{i-1} \underline{\gamma}_{i-1} {}^N C + {}^N C [^N A]^{-1} {}^N C
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

El valor de  $\lambda_{i-1}$  que minimiza  $E\{^N X_{i1}\}$  se obtiene al derivar esta función error con respecto a  $\lambda_{i-1}$ , e igualar a cero.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E\{^N X_{i1}\}}{\partial \lambda_{i-1}} &= 2 \underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N \gamma_{i-1} + 2\lambda_{i-1} \underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N \gamma_{i-1} - \\
 &- 2 \underline{\gamma}_{i-1} {}^N C = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

y de aquí:

$$2 \lambda_{i-1} \underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N \gamma_{i-1} = 2 \underline{\gamma}_{i-1} {}^N C - 2 \lambda_{i-1} [^N A]^N X_{i-1} \tag{3.17}$$

Despejando  $\lambda_{i-1}$ , tenemos:

$$\lambda_{i-1} = \frac{2 \underline{\gamma}_{i-1} ({}^N C - [^N A]^N X_{i-1})}{2 \underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N \gamma_{i-1}} \tag{3.18}$$

pero, de acuerdo con (3.4), finalmente se tiene:

$$\lambda_{i-1} = \frac{{}^N \gamma_{i-1} \gamma_{i-1}}{\underline{\gamma}_{i-1} [^N A]^N \gamma_{i-1}} \tag{3.19}$$

hasta ahora, hemos utilizado la iteración de Forsythe & Wasow (3.14) para calcular  $\lambda_{i-1}$  al sustituir ésta en la función error, ahora si sustituimos dicha iteración en el vector residual (3.4), tenemos lo siguiente:

$${}^N \gamma_i \downarrow = {}^N C \downarrow - [{}^N A] \{ {}^N X_{i-1} \downarrow + \lambda_{i-1} {}^N \gamma_{i-1} \downarrow \}$$

$${}^N \gamma_i \downarrow = ({}^N C \downarrow - [{}^N A] {}^N X_{i-1} \downarrow) - \lambda_{i-1} [{}^N A] {}^N \gamma_{i-1} \downarrow$$

$${}^N \gamma_i \downarrow = {}^N \gamma_{i-1} \downarrow - \lambda_{i-1} [{}^N A] {}^N \gamma_{i-1} \downarrow \quad (3.20)$$

podríamos simplificar con:  $[{}^N A] {}^N \gamma_{i-1} \downarrow = {}^N q_{i-1} \downarrow$  (3.21)

y así tendríamos:  ${}^N \gamma_i \downarrow = {}^N \gamma_{i-1} \downarrow - \lambda_{i-1} {}^N q_{i-1} \downarrow$  (3.22)

y, por inducción:  ${}^N \gamma_{i-1} \downarrow = {}^N \gamma_{i-2} \downarrow - \lambda_{i-2} {}^N q_{i-2} \downarrow$  (3.23)

Las ecuaciones (3.23), (3.21), (3.19) y (3.14), junto con la condición inicial  ${}^N \gamma_0 \downarrow = {}^N C \downarrow - [{}^N A] {}^N X_0 \downarrow$  y el error normal residual:

$$\| {}^N \gamma_i \downarrow \| = ( \underline{{}^N \gamma_i} \quad {}^N \gamma_i \downarrow )^{1/2} \quad (3.24)$$

forman el ALGORITMO DE FORSYTHE & WASOW, que a continuación se escribe.

$${}^N \gamma_0 \downarrow = {}^N C \downarrow - [{}^N A] {}^N X_0 \downarrow \quad (i)$$

$${}^N q_{i-1} \downarrow = [{}^N A] {}^N \gamma_{i-1} \downarrow \quad (ii)$$

$$\lambda_{i-1} = \frac{{}^N \gamma_{i-1} \downarrow {}^N \gamma_{i-1} \downarrow}{{}^N \gamma_{i-1} \downarrow {}^N q_{i-1} \downarrow} \quad (iii)$$

(3.25)

$${}^N \gamma_{i-1} \downarrow = {}^N \gamma_{i-2} \downarrow - \lambda_{i-2} {}^N q_{i-2} \downarrow \quad (iv)$$

$${}^N X_i \downarrow = {}^N X_{i-1} \downarrow + \lambda_{i-1} {}^N \gamma_{i-1} \downarrow \quad (v)$$

$$\|{}^N \gamma_i \downarrow\| = ({}^N \gamma_i \downarrow {}^N \gamma_i \downarrow)^{1/2} \quad (vi)$$

en donde los coeficientes del filtro ( $f_0, f_1, \dots, f_m$ ) estarán contenidos en el vector  ${}^N X_i \downarrow$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ , y tendrán más aproximación a  ${}^N f_i \downarrow$  mientras mayor sea  $i$  (número de iteraciones). Se muestra un ejemplo en el -  
 Apéndice I.

## 3) ALGORITMO DE HESTENES, COMO PRIMER CRITERIO DE OPTIMIZACION.

En el Método de Forsyte & Wasow se llega a una solución "aproximada" en un número  $m$  (orden de la matriz de autocorrelación) de iteraciones. - En la técnica de aproximación estocástica de Hestenes, se obtiene la solución "exacta" en  $n \leq m$  iteraciones; también se basa en la disminución progresiva de una función error y en las propiedades de la matriz de autocorrelación, sobre todo en que  $[^N A]$  es una matriz definida positiva y hermitiana (es decir, que sus elementos  $a_{ij}$  satisfacen la relación  $a_{ij}^* = a_{ji}$ , donde  $*$  es complejo conjugado).

En este método, los vectores de direccionamiento, los cuales dependen de la elección de la función error se escogen como un conjunto de vectores ortogonales y uno de esos vectores se genera y almacena para usarse en cada iteración. Se consideran dos conjuntos de vectores ortogonales (no nulos que satisfacen las siguientes relaciones):

$$\begin{array}{r}
 \underline{p}_i \quad [^N N] \quad \underline{p}_j \quad \downarrow = 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \neq 0 \\
 \underline{g}_i \quad [^N K] \quad \underline{g}_j \quad \downarrow = 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \neq 0
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \text{Si } i \neq j \\
 \text{Si } i = j \\
 \text{Si } i \neq j \\
 \text{Si } i = j
 \end{array}
 \right\} \quad (3.26)$$



en donde  $[{}^N N]$  y  $[{}^N K]$  son matrices definidas positivas y hermitianas de orden  $N$ . Hestenes (Wang & Treitel; R. 23) demuestra que los  $N$  vectores conjugados  ${}^N p_i \downarrow$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , y los  $K$  vectores conjugados  ${}^N g_i \downarrow$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , pueden generarse por el siguiente algoritmo, en donde para el último paso  ${}^N g_m \downarrow$  se reduce al vector NULO.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } k_i = \underline{{}^N g_i} \underline{{}^N p_i} \downarrow / \underline{{}^N p_i} [{}^N N] \underline{{}^N p_i} \downarrow \\ \text{b) } b_i = - ( [{}^N N] \underline{{}^N p_i} \downarrow )^T ( [{}^N K] \underline{{}^N g_{i+1}} \downarrow ) / \underline{{}^N p_i} [{}^N N] \underline{{}^N p_i} \downarrow \\ \text{c) } \underline{{}^N g_{i+1}} \downarrow = \underline{{}^N g_i} \downarrow - k_i [{}^N N] \underline{{}^N p_i} \downarrow \\ \text{d) } \underline{{}^N p_{i+1}} \downarrow = [{}^N K] \underline{{}^N g_{i+1}} \downarrow + b_i \underline{{}^N p_i} \downarrow \\ \text{e) } \underline{{}^N p_0} \downarrow = [{}^N K] \underline{{}^N g_0} \downarrow \end{array} \right. \quad (3.27)$$

La generación de estos vectores termina en el paso  $m$ , en donde  $m=n$  ( $n$ , orden de la matriz de autocorrelación).

En la ecuación de Wiener - Hopf (2.53), la matriz  $[{}^N A]$  es una matriz hermitiana, esto quiere decir que:

$$[{}^N A] = [{}^N A]^* \quad (3.28)$$

Hestenes escoge la siguiente función error (Forsythe & Wasow; R. 5 ):

$$E\{^N X_{i+1}\} = ^N \gamma_{i+1} [^N H] ^N \underline{\gamma}_i \quad (3.29)$$

donde  $[^N H]$  es una matriz hermitiana predeterminada; entonces Wang y Treitel (Wang & Treitel; R. 23) demuestran que las siguientes ecuaciones, junto con el algoritmo dado por (3.27), resuelven la ecuación (3.28) en  $m$  pasos, donde  $m \leq n$ :

$$\left. \begin{aligned} ^N g_{i+1} &= [^N A]^* [^N H] ^N \gamma_{i+1} & (a) \\ [^N N] &= [^N A]^* [^N H] [^N A] & (b) \\ a_i &= \underline{^N g}_i \cdot ^N p_i & (c) \\ d_i &= \underline{^N p}_i [^N N] \underline{^N p}_i & (d) \\ k_i &= a_i / d_i & (e) \\ ^N X_{i+1} &= ^N X_i + k_i \underline{^N p}_i & (f) \end{aligned} \right\} (3.30)$$

Para el caso particular de las ecuaciones normales, en donde  $[^N A] = [^N A]^*$  y  $[^N A]^{-1} = [^N H]$  y proponiendo  $[^N K] = [^N I]$  y  $[^N N] = [^N A]$ , las ecua--

ciones (3.30) quedan como:

$$\begin{array}{l}
 {}^N g_{i1} = {}^N \gamma_{i1} \\
 [{}^N N] = [{}^N A] \\
 d_i = \underline{{}^N p_i} [{}^N A] {}^N p_{i1}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{(a)} \\
 \text{(b)} \\
 \text{(c)}
 \end{array} \right\} (3.31)$$

Sustituyendo la ecuación (3.31a) en la ecuación (3.27a), tenemos:

$$k_i = \underline{{}^N \gamma_i} {}^N p_{i1} / \underline{{}^N p_i} [{}^N A] {}^N p_{i1} \quad (3.32)$$

y a partir de (3.27d), tenemos:

$${}^N p_{i1} = {}^N \gamma_{i1} + b_{i-1} {}^N p_{i-11} \quad (3.33)$$

Sustituyendo esto en (3.32), nos da:

$$k_i = \underline{{}^N \gamma_i} ({}^N \gamma_{i1} + b_{i-1} {}^N p_{i-11}) / \underline{{}^N p_i} [{}^N A] {}^N p_{i1} \quad (3.34)$$

pero, habíamos dicho que para el último paso  ${}^N g_{m1}$  se reduce al vector nulo, esto quiere decir que:

$$\underline{{}^N g_{i+1}} {}^N p_{i1} = \underline{{}^N \gamma_{i+1}} {}^N p_{i1} = \underline{{}^N \gamma_i} {}^N p_{i-11} = 0 \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.35) en (3.34), tenemos:

$$k_i = \underline{\gamma}_i^N \gamma_{i+1}^N / \underline{p}_i^N [{}^N A]{}^N p_{i+1}^N \quad (3.36)$$

utilizando las ecuaciones (3.31a) y (3.31b) en las ecuaciones (3.27b) y -- (3.27d), tenemos:

$$b_i = - \underline{p}_i^N [{}^N A]{}^N \gamma_{i+1}^N / \underline{p}_i^N [{}^N A]{}^N p_{i+1}^N \quad (3.37)$$

$${}^N \gamma_{i+1}^N = {}^N \gamma_i^N - k_i [{}^N A]{}^N p_{i+1}^N \quad (3.38)$$

$$y \begin{cases} {}^N p_{i+1}^N = {}^N \gamma_{i+1}^N + b_i {}^N p_i^N \\ {}^N p_0^N = {}^N \gamma_0^N \end{cases} \quad (3.39)$$

A partir de (3.38), tenemos:

$$- [{}^N A]{}^N p_{i+1}^N = ({}^N \gamma_{i+1}^N - {}^N \gamma_i^N) / k_i \quad (3.40)$$

y sustituyendo (3.40) en (3.37), tenemos:

$$b_i = ({}^N \gamma_{i+1}^N - {}^N \gamma_i^N)^T {}^N \gamma_{i+1}^N / k_i \underline{p}_i^N [{}^N A]{}^N p_{i+1}^N \quad (3.41)$$

recordando la ecuación (3.26)

$$\underline{g}_i^N [{}^N K]{}^N g_j^N = 0 \quad \text{Si } i \neq j \\ \neq 0 \quad \text{Si } i = j$$

y la ecuación (3.31a)  ${}^N g_{i|} = {}^N \gamma_{i|}$  y que  ${}^N K = {}^N I$   
 donde  $I$  es la matriz identidad, orden  $n$ , tenemos que  ${}^N \underline{\gamma}_i {}^N \gamma_{i+1|} = 0$   
 usando esto en (3.41):

$$b_i = {}^N \underline{\gamma}_{i+1} {}^N \gamma_{i+1|} / k_i {}^N \underline{p}_i [{}^N A] {}^N p_{i|} \quad (3.42)$$

pero de la ecuación (3.36);  ${}^N \underline{\gamma}_i {}^N \gamma_{i|} = k_i {}^N \underline{p}_i [{}^N A] {}^N p_{i|}$  (3.43)

Sustituyendo (3.43) en (3.42), tenemos:

$$b_i = {}^N \underline{\gamma}_{i+1} {}^N \gamma_{i+1|} / {}^N \underline{\gamma}_i {}^N \gamma_{i|} \quad (3.44)$$

Si llamamos  $a_i = {}^N \underline{\gamma}_i {}^N \gamma_{i|}$ , entonces:

$$b_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} \quad (3.45)$$

Si de la ecuación (3.36) llamamos

$$d_i = {}^N \underline{p}_j [{}^N A] {}^N p_{i|} \quad (3.46)$$

entonces, (3.36) queda como:

$$k_i = \frac{a_i}{d_i} \quad (3.47)$$

Puesto que  ${}^N p_0 = {}^N \gamma_0$ , entonces (3.39) queda como:

$${}^N p_i = {}^N \gamma_i + b_{i-1} {}^N p_{i-1} \quad (3.48)$$

donde  ${}^N p_{i-1} = \theta$  (3.49)

De la ecuación (3.45), podríamos escribir:

$$b_{i-1} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \quad (3.50)$$

al escoger  $a_{-1} = 1$

Así podríamos reescribir el Algoritmo de Hestenes:

$$a_{-1} = 1 \quad {}^N p_{-1} = \theta \quad (a)$$

$${}^N \gamma_i = {}^N c_i - [{}^N A] {}^N x_i \quad (b)$$

$$a_i = \underline{{}^N \gamma}_i \quad (c)$$

$$b_{i-1} = a_i / a_{i-1} \quad (d) \quad (3.51)$$

$$d_i = \underline{{}^N p}_i [{}^N A] {}^N p_i \quad (e)$$

$$k_i = a_i / d_i \quad (f)$$

$${}^N p_i = {}^N \gamma_i + b_{i-1} {}^N p_{i-1} \quad (g)$$

$${}^N x_{i+1} = {}^N x_i + k_i {}^N p_i \quad (h)$$

De la ecuación (3.51b), podríamos decir que:

$${}^N\gamma_{i+1} = {}^Nc_i - [{}^NA] {}^N x_{i+1} \quad (3.52)$$

Si sustituimos en esta ecuación el valor de  ${}^N x_{i+1}$  (ec. 3.30 f)

tenemos:

$${}^N\gamma_{i+1} = {}^Nc_i - [{}^NA] ({}^N x_i + k_i {}^N p_i) \quad (3.53)$$

$${}^N\gamma_{i+1} = {}^Nc_i - [{}^NA] {}^N x_i - [{}^NA] k_i {}^N p_i$$

pero de acuerdo a la ecuación (3.4), tenemos que:

$${}^N\gamma_{i+1} = {}^N\gamma_i - [{}^NA] k_i {}^N p_i \quad (3.54)$$

y además,  ${}^N\gamma_0 = {}^Nc_0 - [{}^NA] {}^N x_0$  (3.55)

Si convenimos en llamar

$${}^N q_i = [{}^NA] {}^N p_i \quad (3.56)$$

Tenemos finalmente, el Algoritmo de Hestenes:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{-1} = 1 \quad \quad \quad {}^N p_{-1} = \theta \quad \quad \quad {}^N x_0 = \theta \\
 (2) \quad & {}^N \gamma_0 = {}^N c - [{}^N A] {}^N x_0 \\
 (3) \quad & a_i = \underline{{}^N \gamma_i} \quad \underline{{}^N \gamma_i} \\
 (4) \quad & b_{i-1} = a_i / a_{i-1} \\
 (5) \quad & {}^N p_{i+1} = \underline{{}^N \gamma_{i+1}} + b_{i-1} {}^N p_{i-1} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \\
 (6) \quad & {}^N q_{i+1} = [{}^N A] {}^N p_{i+1} \\
 (7) \quad & d_i = \underline{{}^N p_i} \quad \underline{{}^N q_i} \\
 (8) \quad & k_i = a_i / d_i \\
 (9) \quad & {}^N x_{i+1} = \underline{{}^N x_{i+1}} + k_i {}^N p_{i+1} \\
 (10) \quad & {}^N \gamma_{i+1} = \underline{{}^N \gamma_{i+1}} - k_i {}^N q_{i+1} \\
 (11) \quad & \gamma_i = (\underline{{}^N \gamma_i} \quad \underline{{}^N \gamma_{i+1}})^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

Se muestran un ejemplo en el Apéndice 1.



## 4) COMPARACION DE METODOS.

En el ejemplo numérico desarrollado en el Apéndice No. 1, en los métodos de Levinson y Hestenes para un sistema de tres ecuaciones, observamos que en ambos se tiene la solución exacta (salvo por un error de redondeo). Aunque con el Método de Levinson se necesita una iteración menos -- que con el Método de Hestenes, este último tiene una gran ventaja sobre el primero, y ésta se refiere a la obtención de todos los coeficientes desde la primera iteración (aunque con un determinado error), además, fueron necesarias  $n = 3$  iteraciones porque partimos de un vector inicial  ${}^N x_0 = \theta$ , pero generalmente para el filtrado de datos sísmológicos se requiere de  $m$  iteraciones ( $m = n$ ) dependiendo de la elección de  ${}^N x_0$ .

El error normal residual  $\gamma_i = ({}^N \gamma_i \sum_i)^{1/2}$  nos determina la razón de convergencia del vector aproximante  ${}^N x_i$  hacia el valor verdadero  ${}^N f$ . Cuando se conoce la solución exacta  ${}^N f$  entonces podríamos utilizar el error cuadrático normalizado, definido por:

$$(ECN)_i = \frac{({}^N x_i - {}^N f)^T ({}^N x_i - {}^N f)}{{}^N f \quad {}^N f} \quad (3.58)$$

el cual determina la relación de energías del vector diferencia  ${}^N x_i - {}^N f$  y de la solución exacta  ${}^N f$ , es decir, el criterio  $(ECN)_i$  mide directamente la desviación entre la solución verdadera y aproximada.

Desde luego, cabe aclarar que en situaciones prácticas nunca se va a tener conocimiento de  $N\{f\}$  y por tanto, siempre se utilizará el error normal residual  $\gamma_i$ , sin embargo, se muestra un ejemplo numérico en el Apéndice I con el criterio  $(ECN)_i$ , sobre todo para establecer una comparación muy clara entre los métodos de Forsyte y Hestenes.

En la página siguiente se muestra, con base en los resultados del ejemplo numérico del Apéndice I, una comparación tabulada entre los criterios de Levinson y Hestenes.

(Iteración)	( HESTENES )			( LEVINSON )
	${}^5X_{i+1}$	${}^5\gamma_{i+1}$	$\gamma_{i+1}$	
0	1.86	5.06	8.34	3.71
	1.67	1.08		<hr/>
	1.08	-3.66		
	0.72	-4.24		
	0.36	-3.38		
1	3.09	0.59	2.83	
	2.11	-0.79		<hr/>
	0.54	-2.03		
	0.02	-0.19		
	-0.23	1.7		
2	3.67	1.19	3.81	
	1.9	1.30		<hr/>
	-0.45	1.12		
	-0.24	2.03		
	0.32	2.46		
3	4.18	-0.26	0.38	
	1.95	-0.05		<hr/>
	-0.89	-0.03		
	-0.12	0.2		
	1.0	0.19		
4	4.1	-0.06	0.1	
	1.98	0.01		<hr/>
	-0.96	-0.06		
	-0.03	0.0		
	1.0	-0.06		

Figura 3.1. Comparación de los métodos de Hestenes y Levinson para el ejemplo del Apéndice I.

Ahora, estableceremos una comparación entre los métodos de Forsythe y Wasow, y Hestenes, considerando la convergencia del error cuadrático normalizado  $(ECN)_i$ .

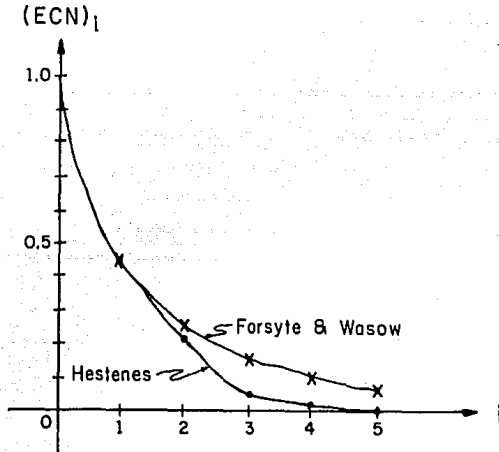


Figura 3.2. Comparación de los métodos: Hestenes y Forsythe y Wasow para el ejemplo del Apéndice 1.

En los dos ejemplos dados en el Apéndice 1, si las matrices  $\begin{bmatrix} 3 \\ A \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 5 \\ A \end{bmatrix}$  son consideradas de autocorrelación, es muy probable que los vectores  $\begin{bmatrix} 3 \\ C \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 5 \\ C \end{bmatrix}$  no tengan elementos de crosscorrelación de entrada con alguna salida deseada y aún así, el Método de Hestenes tiene resolución. Ahora se dará un ejemplo numérico basado en una proposición de modelo para el filtro de Wiener.

a) Método de Hestenes ( ${}^5x_0 = \theta$ )

DATOS  $\left\{ \begin{array}{l} \text{entrada al sistema} \longrightarrow f_b = (2, 1, -1, 0, 1) \\ \text{salida deseada} \longrightarrow f_d = (1, 1, 1, 1, 1) \end{array} \right.$

2	1	-1	0	1	$\phi_{bb}(\tau)$	Autocorrelación de la entrada:
2	1	-1	0	1	7	$\phi_{bb}(\tau) \rightarrow (7, 1, -3, 1, 2)$
2	1	-1	0	1	1	
2	1	-1			-3	
2	1				1	
2					2	

Crosscorrelación salida deseada - entrada:

1	1	1	1	1	$\phi_{bd}(\tau)$	
2	1	-1	0	1	3	$\phi_{bd}(\tau) \rightarrow (3, 2, 2, 3, 2)$
2	1	-1	0	1	2	
2	1	-1			2	
2	1				3	
2					2	

de tal forma que tenemos el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 7 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[{}^5A] {}^5f | = {}^5c |$$

Se obtienen los siguientes cálculos, para  ${}^5x_0 | = \theta$  —  $\gamma_0 = \underline{\underline{5.48}}$

n	$a_n$	$b_{n-1}$	${}^5p_n  $	${}^5q_n  $	$d_n$	$k_n$	${}^5x_{n+1}  $	${}^5\gamma_{n+1}  $	$\gamma_{n+1}$
0	30	30	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 4 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix}$	208	0.14	$\begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.28 \\ 0.28 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.36 \\ 0.32 \\ 1.44 \\ -0.08 \\ -0.66 \end{bmatrix}$	1.66
1	2.75	0.09	$\begin{bmatrix} -0.09 \\ 0.50 \\ 1.62 \\ 0.19 \\ -0.48 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5.76 \\ 3.98 \\ 13.74 \\ 0.88 \\ -7.71 \end{bmatrix}$	28.64	0.10	$\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.33 \\ 0.44 \\ 0.40 \\ 0.23 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.22 \\ -0.08 \\ +0.07 \\ -0.17 \\ 0.11 \end{bmatrix}$	0.32
2	0.10	0.04	$\begin{bmatrix} 0.22 \\ -0.06 \\ 0.13 \\ -0.16 \\ 0.09 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.11 \\ 0.50 \\ -0.24 \\ -0.50 \\ 0.46 \end{bmatrix}$	0.30	0.33	$\begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.31 \\ 0.48 \\ 0.35 \\ 0.26 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.25 \\ 0.15 \\ -0.01 \\ -0.04 \end{bmatrix}$	0.32

$n$	$a_n$	$b_{n-1}$	${}^5p_n$	${}^5q_n$	$d_n$	$k_n$	${}^5x_{n+1}$	${}^5\gamma_{n+1}$	$\gamma_{n+1}$
3	0.11	1.1	$\begin{bmatrix} 0.09 \\ -0.32 \\ 0.29 \\ -0.19 \\ 0.06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.63 \\ -1.23 \\ 1.07 \\ 0.07 \\ -0.78 \end{bmatrix}$	0.59	0.19	$\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 0.54 \\ 0.31 \\ 0.27 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.02 \\ -0.05 \\ -0.02 \\ 0.11 \end{bmatrix}$	0.14
4	0.02	0.18	$\begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.08 \\ 0.00 \\ -0.05 \\ 0.12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.27 \\ -0.44 \\ -0.04 \\ 0.68 \end{bmatrix}$	0.10	0.19	$\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.24 \\ 0.54 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ -0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix}$	0.0

Figura 3.3. Aplicación del método de Hestenes al filtro de Wiener.

La convergencia del error residual normal es:

$$(5.48, 1.66, 0.32, 0.32, 0.14, 0)$$

Así, la solución exacta es:  $(0.50, 0.24, 0.54, 0.30, 0.29)$ .

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 7 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.24 \\ 0.54 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.99 \\ 2.06 \\ 1.95 \\ 2.75 \\ 1.97 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hemos visto que con el Método de Hestenes se llega a la solución exacta (salvo por error de redondeo) en  $m = n$  iteraciones a lo máximo, esto se debe a que el vector inicial aproximante lo hemos considerado como el vector nulo ( ${}^N x_0 = \theta$ ).

Si se efectúa una buena elección de  ${}^N x_0$  es posible llegar a la solución exacta en  $m < n$  iteraciones.

b) Método de Hestenes ( ${}^5 x_0 \neq \theta$ )

DATOS  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrada al sistema} \rightarrow f_b = (1, 2, 0, -1, 1) \\ \text{Salida deseada} \rightarrow f_d = (1, 1, 1, 1, 1) \end{array} \right.$

1	2	0	-1	1	$\phi_{bb}(\tau)$
1	2	0	-1	1	7
	1	2	0	-1	1
		1	2	0	-2
			1	2	1
				1	1

1	1	1	1	1	$\phi_{bb}(\tau)$
1	2	0	-1	1	3
	1	2	0	-1	2
		1	2	0	3
			1	2	3
				1	1



tendremos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } {}^5x_0 \downarrow = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.24 \\ 0.54 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$

$$p_{-1} = \theta \quad a_{-1} = 1 \quad {}^5\gamma_0 \downarrow = {}^5c \downarrow - [{}^5A] {}^5x_0 \downarrow$$

$${}^5\gamma_0 \downarrow = \begin{bmatrix} -0.23 \\ -0.38 \\ 0.26 \\ 0.04 \\ -1.00 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \underline{\underline{{}^5\gamma_0 = 1.1278}}$$

Primera iteración:

$$a_0 = 1.2719 \quad b_{-1} = 1.2719 \quad {}^5p_0 \downarrow = {}^5\gamma_0 \downarrow \quad d_0 = 11.3689 \quad k_0 = 0.1119$$

$$\underline{\underline{\gamma_1 = 0.2640}}$$

$${}^5q_0 \downarrow = \begin{bmatrix} -3.46 \\ -3.69 \\ 3.97 \\ 0.08 \\ -8.11 \end{bmatrix} \quad {}^5x_1 \downarrow = \begin{bmatrix} 0.4719 \\ 0.1928 \\ 0.5700 \\ 0.3042 \\ 0.1809 \end{bmatrix}$$

Si suponemos

$${}^5x_1 \downarrow \approx {}^5f \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4719 \\ 0.1928 \\ 0.5700 \\ 0.3042 \\ 0.1809 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8412 \\ 1.9640 \\ 3.1814 \\ 2.9666 \\ 1.0950 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tenemos que hay buena aproximación con sólo una iteración.

El algoritmo de Hestenes es de gran utilidad en el cálculo de los coeficientes del filtro de Wiener, sobre todo aplicado en forma iterativa a diferentes trazas sísmicas, dado que pueden utilizarse vectores iniciales aproximantes diferentes de cero. Una aplicación práctica resulta cuando el filtro de Wiener se utiliza en la reducción de trazas sísmicas como un filtro predictivo, por ejemplo, para remover eventos repetitivos o patrones de reverberación en una traza sísmológica marina.

Enseguida se proponen algunos modelos teóricos utilizando una traza sísmica sintética formada por un evento primario (señal) y una serie de eventos múltiples (ruido). En cada modelo se aplica también el algoritmo de Levinson, como medida de comparación con el de Hestenes.

En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6, se muestra una traza sísmica sintética con las mismas características, éstas son: inicio de la traza a -- 100 ms., un evento primario de 32 ms. de duración y 20 ms. de período aparente, 15 eventos múltiples separados cada 32 ms. y del mismo período que el primario con amplitud alternante progresiva en función cuadrática al anterior, como puede observarse en la parte (a) de dichas figuras.

La parte (b) de estas mismas figuras muestra la función de autocorrelación de la traza sísmica sintética en donde se obtiene la distancia

de predicción a partir del segundo "zero crossing" de la función.

En (c) puede observarse el resultado de aplicar el algoritmo de Levinson al calcular los coeficientes de operadores predictivos de -- 51,75 y 101 puntos respectivamente.

Finalmente en la parte (d) se muestra la aplicación del algoritmo de Hestenes, partiendo para el cálculo de los coeficientes del filtro con un vector inicial aproximante igual a cero. Obsérvese que se utilizaron 12, 11 y 14 iteraciones con el algoritmo de Hestenes, mientras -- que para el algoritmo de Levinson se necesitaron 51,75 y 101 respectivamente, además del efecto de filtrado que resulta superior con el algoritmo de Hestenes.

En las figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 se aplica un operador de 51 puntos a diferentes trazas sísmicas, con 51 iteraciones en ambos algoritmos (c y d), el tiempo inicial y separación de múltiples cambia en cada traza como se observa en (a) y por tanto, también la función de autocorrelación (b). Obsérvese que cuando no hay traslape entre múltiples (figuras 3.7 y 3.8) el filtrado es mejor que cuando se tiene algún traslape (figuras 3.9 y 3.10), ya que el operador se vuelve inestable, dado que la distancia de predicción es menor a la longitud del pulso.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

79

En las figuras 3.11 y 3.12 se observa un mejor filtrado con el -- algoritmo de Hestenes que con el de Levinson a pesar de iniciar con un vector aproximante nulo y de efectuar el cálculo con menos iteraciones, esta vez se utilizó una traza que inicia en 100 ms. con primario y -- 25 múltiplos separados cada 32 ms.

Finalmente en las figuras 3.13 y 3.14 se muestra la aplicación de un filtro de 51 puntos. En la figura 3.13 con el algoritmo de Hestenes se parte de un vector inicial aproximante igual a cero para obtener en 28 iteraciones un operador de 51 puntos y se aplica a la traza sísmica. En la figura 3.14 se cambian los parámetros de la traza y se diseña el operador de 51 puntos con el algoritmo de Hestenes, pero ahora se toma un vector inicial aproximante igual al operador que resulta en la aplicación anterior y obsérvese que en sólo 7 iteraciones se obtiene el -- operador de 51 puntos, además de observar un filtrado más eficiente -- con el algoritmo de Hestenes.

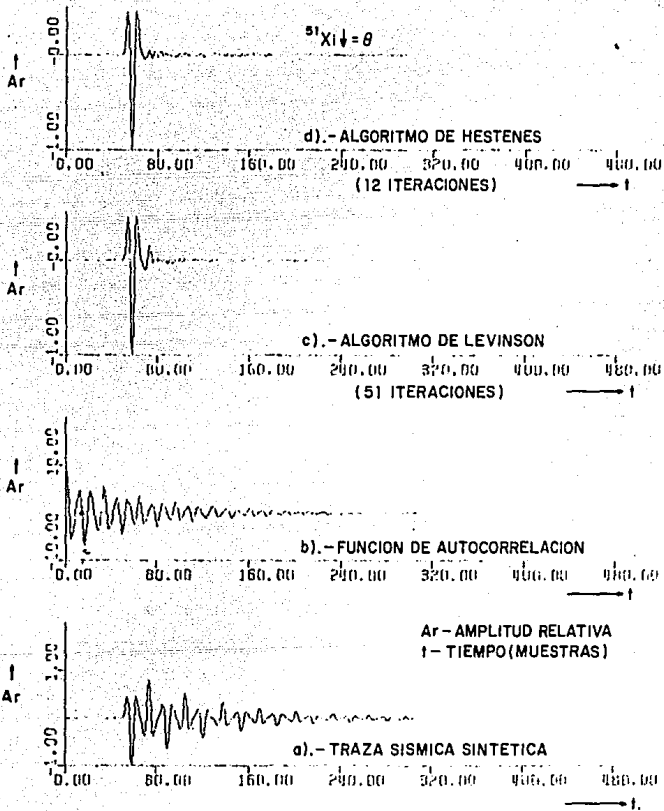


FIG. 3.4).- COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON-HESTENES  
(OPERADOR DE 51 PUNTOS)

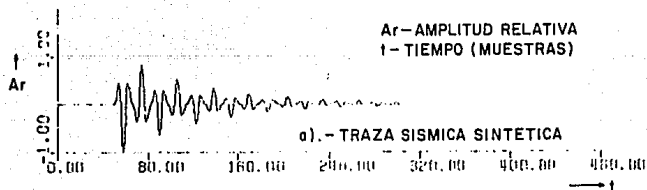
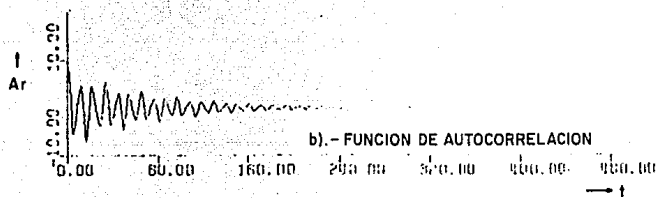
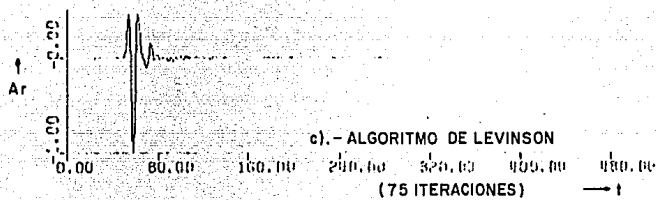
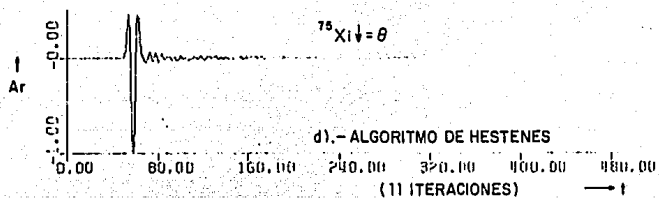


FIG. 3.5). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON - HESTENES  
(OPERADOR DE 75 PUNTOS)

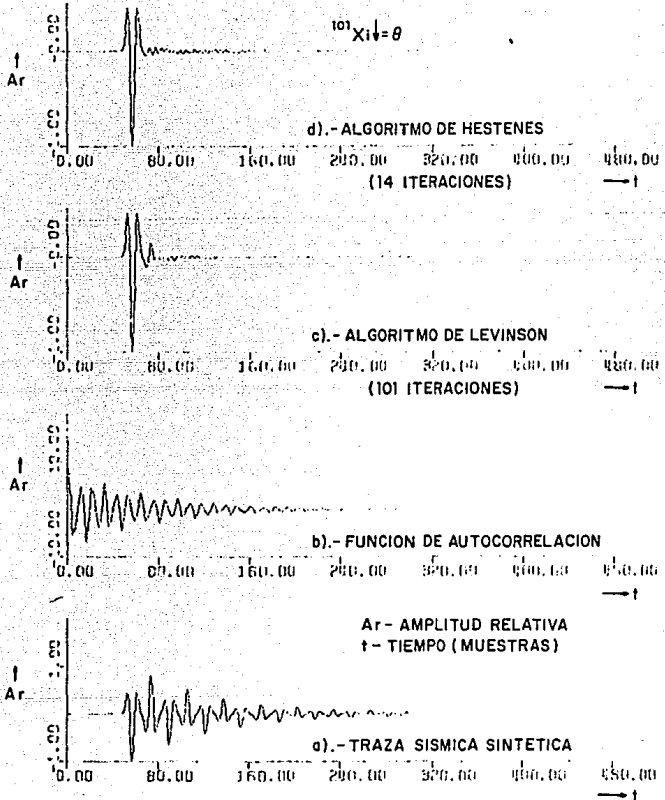


FIG. 3.6). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON-HESTENES  
(OPERADOR DE 101 PUNTOS)

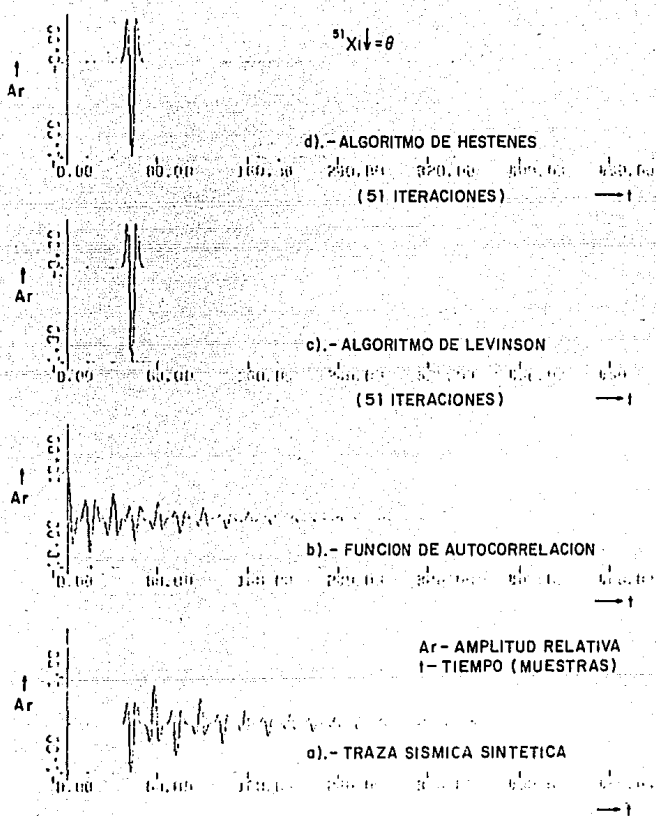


FIG. 3.7). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON - HESTENES  
(PULSOS CADA 20 MUESTRAS, INICIO DE TRAZA A 50)



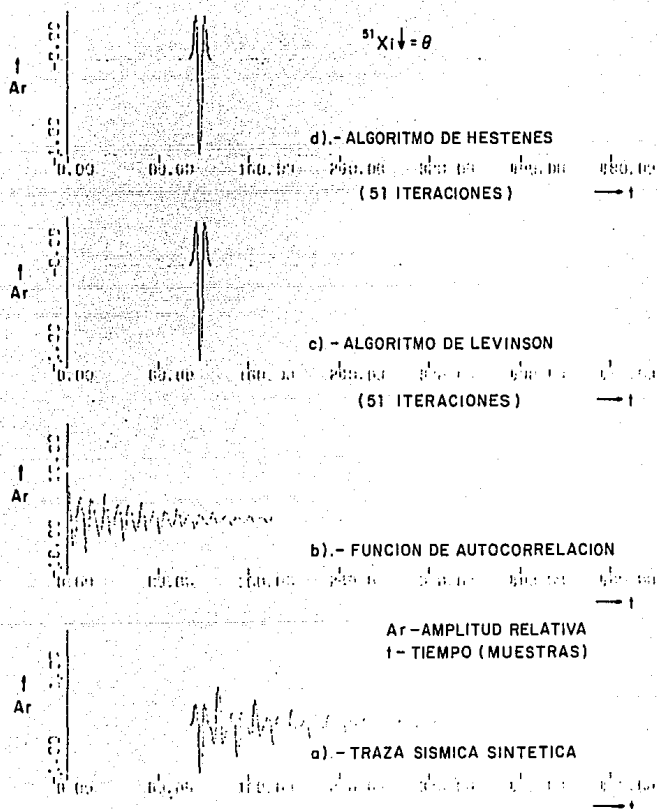


FIG. 3.8). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON - HESTENES  
(PULSOS CADA 16 MUESTRAS, INICIO DE TRAZA A 110)

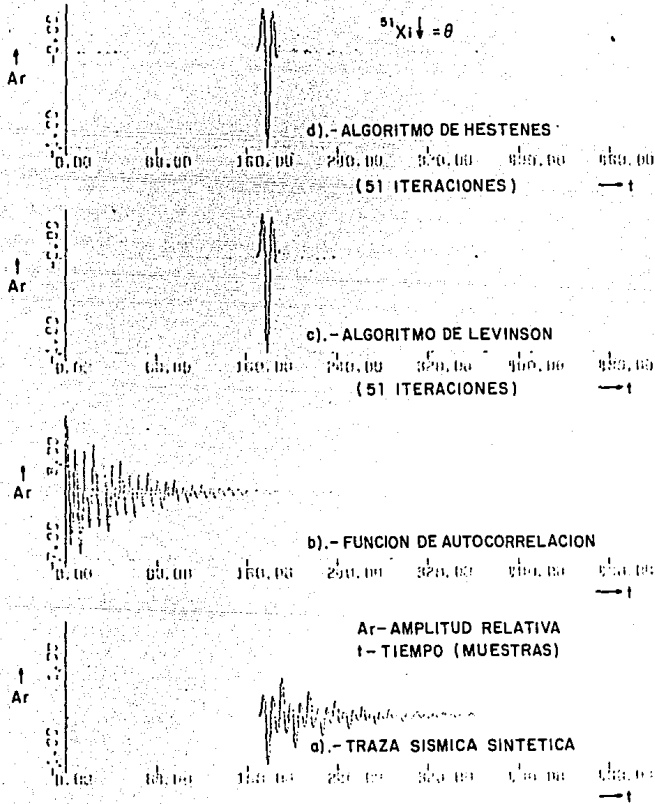


FIG. 3.9). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON - HESTENES  
(PULSOS CADA 12 MUESTRAS, INICIO DE TRAZA A 170)

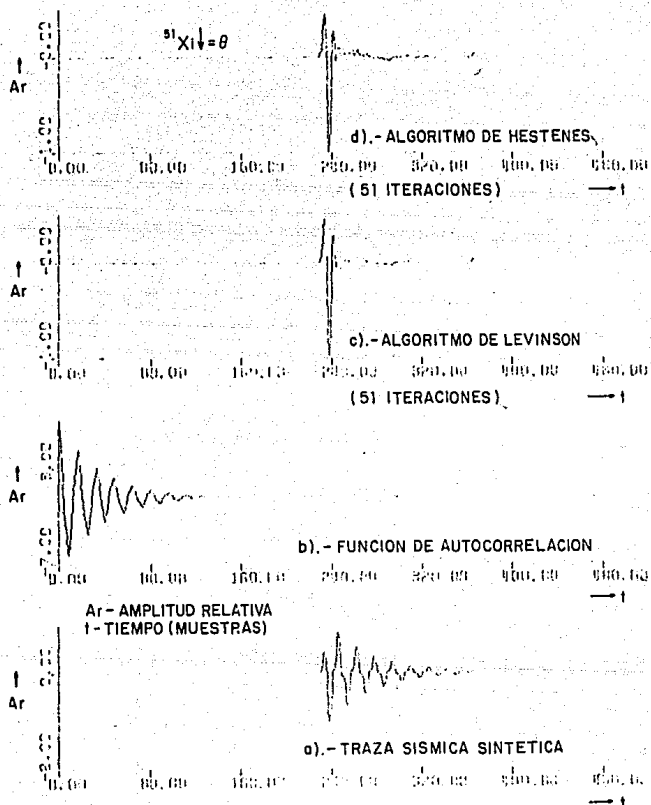


FIG. 3.10). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON - HESTENES  
 (PULSOS CADA 8 MUESTRAS, INICIO DE TRAZA A 230)

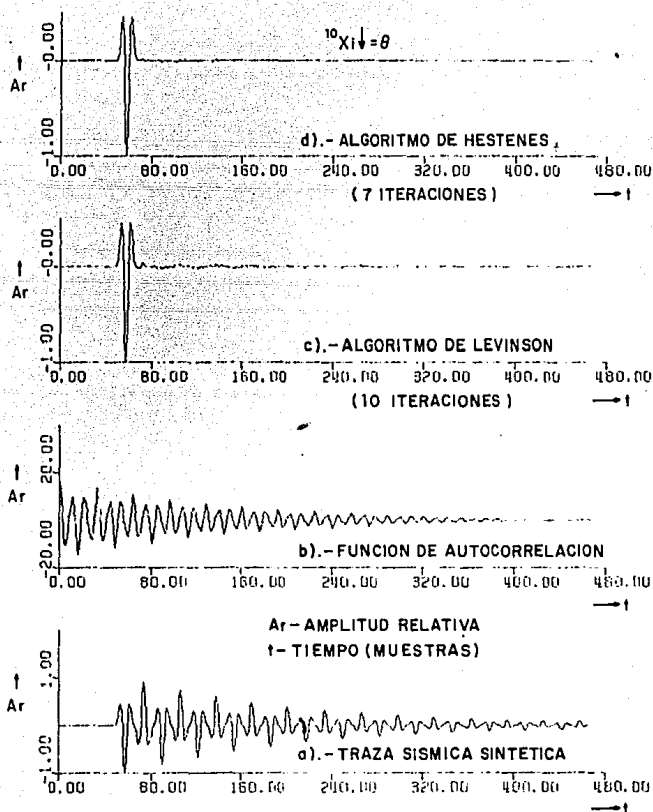


FIG. 3.11). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON-HESTENES  
(OPERADOR DE 10 PUNTOS, PRIMARIO Y 25 MULTIPLES)

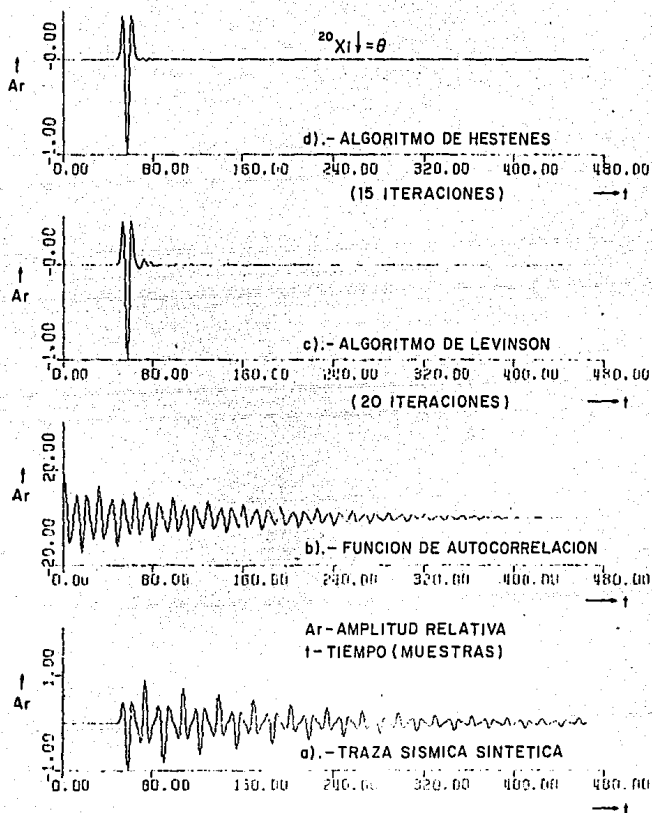


FIG. 3.12).- COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON-HESTENES  
(OPERADOR DE 20 PUNTOS, PRIMARIO Y 25 MULTIPLES)

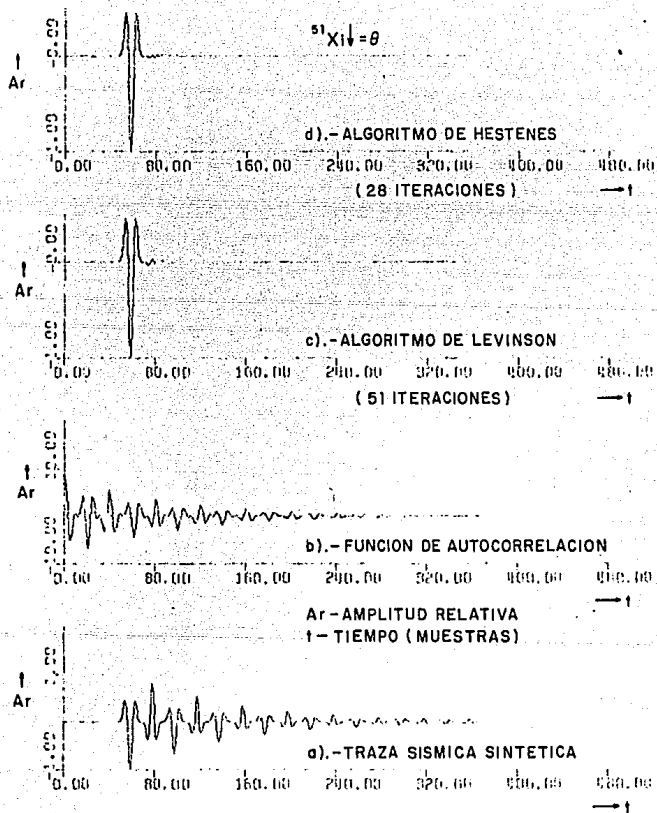


FIG. 3.13).- COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON - HESTENES  
( VECTOR INICIAL APROXIMANTE NULO )

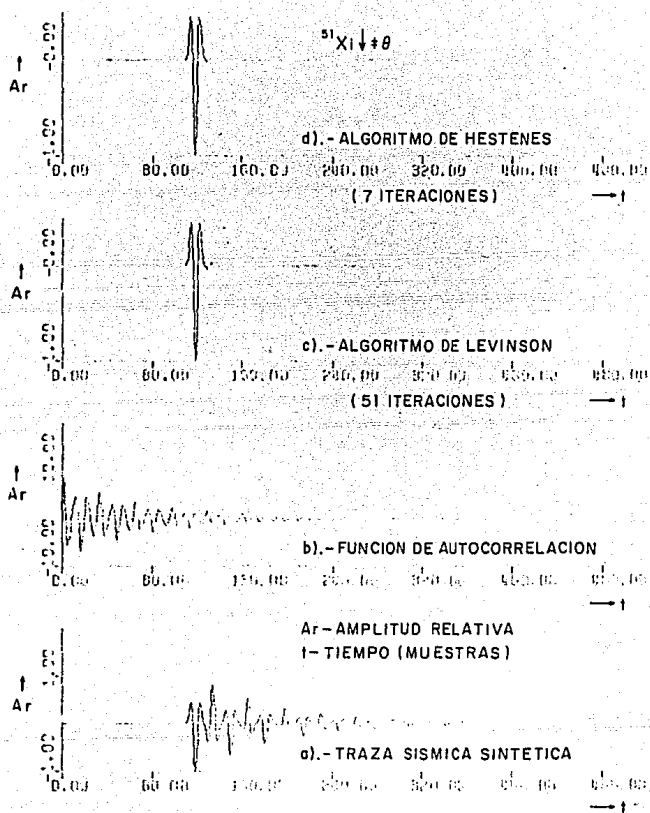


FIG. 3.14). - COMPARACION DE ALGORITMOS LEVINSON-HESTENES  
( VECTOR INICIAL DIFERENTE DE CERO )

## CAPITULO IV

LONGITUD OPTIMA DE VENTANAS EN EL FILTRADO DE WIENERVARIABLE CON EL TIEMPO, COMO SEGUNDO CRITERIO DE OPTIMIZACION

## 1) APROXIMACION AL PROCESO NO ESTACIONARIO MEDIANTE PROCESOS ERGODICOS.

En el diseño del filtro de Wiener variable con el tiempo, se toma en consideración que tanto la entrada, la salida real y la salida deseada, - son realizaciones de procesos no estacionarios en el tiempo, por tal razón, las funciones de correlación  $\phi_{ii}(t, \gamma)$  y  $\phi_{di}(t, \gamma)$  varían con la salida o tiempo de observación. En el Capítulo II se desarrolla la ecuación de Wiener-Hopf de segunda clase, como condición necesaria y suficiente para la existencia de un valor mínimo entre las salidas actual y deseada del filtro óptimo, es decir, se tiene la ecuación de Boolem:

$$\phi_{di}(t, \gamma) = \int_0^{\infty} g(t, \sigma) \phi_{ii}(\sigma, \gamma) d\sigma \quad (4.1)$$

en donde  $g(t, \sigma)$  es la respuesta variable con el tiempo al impulso unitario (filtro variable con el tiempo),  $\phi_{di}(t, \gamma)$  es la cross-correlación variable con el tiempo entre la salida deseada y la entrada y  $\phi_{ii}(t, \gamma)$  es la autocorrelación variable con el tiempo de la entrada. Hasta ahora, no se ha encontrado una solución general a la ecuación de Boolem, por lo



tanto, es necesario hacer una aproximación para determinar  $g(t, \sigma)$ , pero el problema principal radica en la obtención de las funciones de correlación variables con el tiempo,

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11}(t, \gamma) &= E [f_1(t) f_1(\gamma)] \\ \phi_{d1}(t, \gamma) &= E [f_d(t) f_1(\gamma)] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

en donde  $E [ \ ]$  es el valor esperado o promedio del ensamble, pero en este caso tenemos un solo canal (una sola entrada y una salida no estacionaria en el tiempo) por lo tanto resulta imposible calcular  $\phi_{11}(t, \gamma)$  y  $\phi_{d1}(t, \gamma)$ .

Wang propone aproximar el proceso no estacionario mediante procesos ergódicos al dividir la entrada  $f_1(t)$  y la salida deseada  $f_d(t)$  en secciones (Wang, R. 22), las cuales pueden ser consideradas realizaciones de algún proceso estacionario y ergódico. Si  $f_1(t) = x(t)$  y  $f_d(t) = z(t)$  entonces la aproximación se muestra en la siguiente figura.

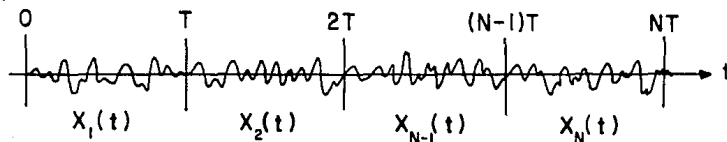


FIGURA 4.1) Aproximación del proceso no estacionario mediante secciones estacionarias en el tiempo.

Como es necesario calcular el promedio del ensamble, la aproximación anterior debe hacerse rigurosamente en la siguiente forma:

$$X(t) = \sum_{k=1}^N X_k(t) \quad (4.3)$$

en donde:

$$X_k(t) = X(t) \{U[t - (k-1)T] - U(t - kT)\} \quad (4.4)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

La ecuación anterior se representa en la figura 4.2).

En esta ecuación (4.4), T es el tiempo de subdivisión de la traza sígnica (proceso no estacionario) y U(t) es la función escalón unitario, dada por:

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

análogamente:

$$Z(t) = \sum_{k=1}^N Z_k(t) \quad (4.5)$$

en donde

$$Z_k(t) = Z(t) \{U[t - (k-1)T] - U(t - kT)\} \quad (4.6)$$

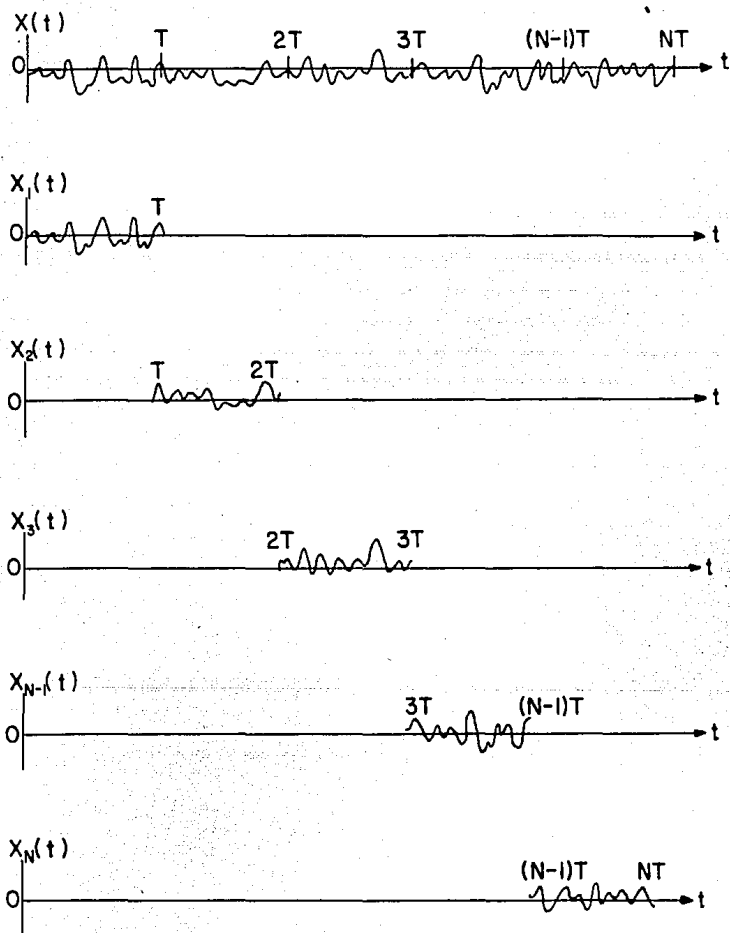


Fig. 4.2.- Aproximación del proceso no estacionario mediante procesos ergódicos.

de esta forma, podemos escribir las funciones de correlación:

$$\phi_{xx}^{(K)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{(K-1)T}^{KT} X_k(t) X_k(t+\tau) dt \quad (4.7)$$

y

$$\phi_{zx}^{(K)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{(K-1)T}^{KT} Z_k(t) X_k(t+\tau) dt \quad (4.8)$$

y la integral de Boottom se reduce a la siguiente forma:

$$\phi_{zx}^{(K)}(\tau) = \int_0^{\infty} G_k(\sigma) \phi_{xx}^{(K)}(\tau - \sigma) d\sigma \quad (4.9)$$

para  $K = 1, 2, \dots, n$ , y representa el número de ventana con longitud  $T$ .

## 2) METODO DE BERNDT & COOPER PARA LA SELECCION OPTIMA DE T, COMO SEGUNDO CRITERIO DE OPTIMIZACION.

En la ecuación anterior, ecuación (4.9), hemos efectuado una aproximación de la integral de Boottom al considerar las funciones de correlación variables con el tiempo como procesos ergódicos, dividiendo la traza sísmica en  $n$  secciones de longitud  $T$ . Esta longitud de ventana puede ser grande o pequeña, dependiendo de las características del ensamble. En un proceso ergódico, la variancia desaparece cuando  $T$  tiende al infinito, razón por la cual es deseable hacer  $T$  tan grande como sea posible;

por otro lado, el error entre las funciones de correlación estimada y verdadera es directamente proporcional a  $T$ , por tanto se desea que  $T$  sea lo más pequeña posible. Berndt & Cooper proponen un criterio para la selección óptima de  $T$  basado en la minimización del error cuadrático medio entre las funciones aproximada y verdadera de correlación variable con el tiempo (Berndt & Cooper, R. 3).

La función de autocorrelación variable con el tiempo puede ser representada como:

$$\phi_{xx}(t, \gamma) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \beta_i(\gamma) \quad (4.10)$$

Desarrollando  $\alpha_i(t)$  en series de Taylor alrededor de  $t = t_0$  con  $m$  términos, queda como:

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=0}^m C_{ij} (t - t_0)^j \quad (4.11)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

y los coeficientes de Taylor son:

$$C_{ij} = \frac{1}{j!} \alpha_i^{(j)}(t_0) \quad (4.12)$$

Ahora supongamos que  $\phi_{xx}(t_0, \gamma, T)$  es la función de autocorrelación estimada en  $t = t_0$ . Berndt y Cooper demuestran que el error cuadrá-

tico medio (Berndt & Cooper, R. 3 ),

$$\xi^2 = E \left\{ \left[ \phi_{xx}(t_0, \gamma, T) - \phi_{xx}(t_0, \gamma) \right]^2 \right\} \quad (4.13)$$

en donde la función de autocorrelación estimada está dada por:

$$\phi_{xx}(t_0, \gamma, T) = \frac{1}{T} \sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X\left(t+t_0+\frac{\gamma}{2}\right) X\left(t+t_0-\frac{\gamma}{2}\right) \quad (4.14)$$

es minimizado cuando se cumple la relación:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{\mu} \sum_{q=1}^{\mu} C_{i2p} C_{j2q} \frac{(p+q) \beta_i(0) \beta_j(0) T^{2(p+q)+1}}{(2p+1)(2q+1)2^{2(p+q)}} = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}(t_0, \gamma)]^2 d\gamma \quad (4.15)$$

en donde n es el número de términos usados en la expansión de  $\phi_{xx}(t, \gamma)$

y  $\mu = \frac{m}{2}$  si m es par o bien  $\mu = \frac{m-1}{2}$  si m es impar.

Berndt & Cooper muestran que con  $m = 2$  términos en la expansión es suficiente, por tanto  $\mu = 1$  y la ecuación (4.15) queda como:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{i2} C_{j2} \frac{\beta_i(0) \beta_j(0) T^5}{72} = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}(t_0, \gamma)]^2 d\gamma \quad (4.16)$$

Despejando T (Longitud óptima de la ventana), tenemos:

$$T = \left\{ \frac{72 \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}(t_0, \gamma)]^2 d\gamma}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{i2} C_{j2} \beta_i(0) \beta_j(0)} \right\}^{\frac{1}{5}} \quad (4.17)$$

Esta es la ecuación que se utiliza para un caso generalizado. Para obtener la longitud óptima de la ventana en el filtrado variable con el tiempo de una traza sísmica, Wang propone las funciones:

$$\alpha_i(t) = d_i + e_i(KT - t_0) + f_i(KT - t_0)^2$$

y

(4.18)

$$\beta_i(\gamma) = \text{Cos} (i-1) \frac{2\pi\gamma}{T}$$

en donde  $K$  representa la  $K$ -ésima sección de longitud  $T$  de la traza (Wang, R. 22), además, como en la expansión de  $\alpha_i(t)$  se utilizan tres términos, cada sección  $K$  debe dividirse en tres segmentos iguales y marcar el centro de estas partes con  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$ , como se muestra en la siguiente figura:

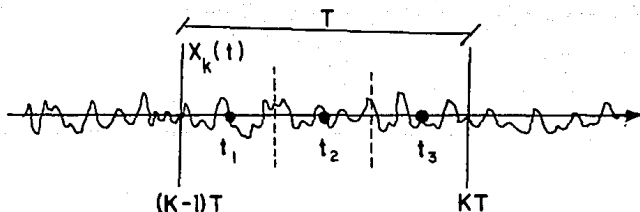


FIGURA No. 4.3)  $K$ -ésima sección de una traza sísmica.

De esta forma, la función de autocorrelación variable con el tiempo puede aproximarse por tres funciones de autocorrelación estacionarias en

el tiempo,

$$\phi_{xx}^{[j]}(\gamma) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_j) b_i(\gamma) \quad (4.19)$$

para  $j = 1, 2, 3$ .

en donde

$$\alpha_i(t_j) = d_i + e_i(KT - t_j) + f_i(KT - t_j)^2 \quad (4.20)$$

Variando  $j$  en la ecuación (4.12) y derivando la ecuación (4.18), se obtienen los siguientes coeficientes al poner  $t_0 = t_j$ :

$$\left. \begin{aligned} C_{i0} &= \alpha_i^{(0)}(t_j) = d_i + e_i(KT - t_j) + f_i(KT - t_j)^2 \\ C_{i1} &= \alpha_i^{(1)}(t_j) = -e_i - 2f_i(KT - t_j) \\ C_{i2} &= \frac{1}{2} \alpha_i^{(2)}(t_j) = f_i \quad \therefore C_{j2} = f_j \\ C_{i3} &= C_{i4} = C_{i5} = \dots = C_{im} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

al substituir  $C_{i2}$  y  $C_{j2}$  en la ecuación (4.17) y tomando en cuenta que  $B_i(0) = 1$  de la ecuación (4.18), entonces:

$$T = \left[ \frac{144 \int_0^{\infty} [\phi_{xx}(t_2, \gamma)]^2 d\gamma}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i f_j} \right]^{1/5} \quad (4.22)$$

este es el caso particular para las funciones  $\alpha_i(t)$  y  $\beta_i(\gamma)$  propuestas anteriormente.



Cada traza sísmica debe dividirse en un número determinado de secciones iguales, dependiendo de la elección de  $T$ ; por tanto, es necesario indicar mediante  $\phi_{xx}(t_k, \gamma)$  y  $f_j^k$  a la función de autocorrelación y a los coeficientes de Taylor correspondientes a la  $k$ -ésima sección respectivamente, de esta forma:

$$T_k = \left[ \frac{144 \sum_{\gamma=0}^{T-1} [\phi_{xx}(t_k, \gamma)]^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i^k f_j^k} \right]^{1/5} \quad (4.23)$$

el lado derecho de esta ecuación es función de la longitud de ventana  $T$  seleccionada, para encontrar la longitud óptima  $T_0$  es necesario calcular  $T_k$  a partir de la ecuación (4.23) y compararla con la longitud propuesta  $T$ , si la diferencia excede de un valor tolerable, entonces se propondrá otro valor de  $T$  y nuevamente calcularemos  $T_k$  y así sucesivamente hasta que  $T_k = T_0$ .

Para encontrar  $T_k$  debemos considerar en la ecuación (4.23) que la función de autocorrelación variable con el tiempo  $\phi_{xx}(t_k, \gamma)$  es imposible obtenerla, por tanto debemos hacer una aproximación al tomar en cuenta el promedio en tiempo de la cantidad  $[x(t_k) \times (\gamma)]$  dado por:

$$\phi_{xx}(t_k, \gamma) = \frac{1}{T} \sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X\left(t+t_k+\frac{\gamma}{2}\right) X\left(t+t_k-\frac{\gamma}{2}\right) \quad (4.24)$$

por otro lado, para encontrar los coeficientes de Taylor  $f_i$  debemos desarrollar la ecuación (4.20) para  $\lambda = 1, 2, 3$ .

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i(t_1) &= d_i + e_i(KT - t_1) + f_i(KT - t_1)^2 \\ \alpha_i(t_2) &= d_i + e_i(KT - t_2) + f_i(KT - t_2)^2 \\ \alpha_i(t_3) &= d_i + e_i(KT - t_3) + f_i(KT - t_3)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

y resolver este sistema de ecuaciones para  $f_i$ :

$$f_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & (KT - t_1) & \alpha_i(t_1) \\ 1 & (KT - t_2) & \alpha_i(t_2) \\ 1 & (KT - t_3) & \alpha_i(t_3) \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

pero como no conocemos  $\alpha_i(t_\lambda)$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$ , entonces de la ecuación (4.19):

$$\phi_{xx}^{[\lambda]}(\gamma) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_\lambda) \cos(i-1) \frac{2\pi\gamma}{T} \quad (4.27)$$

$$\lambda = 1, 2, 3$$

entonces,  $\alpha_i(t_\lambda)$  estará dada por los coeficientes de la transformación en cosenos finitos de  $\phi_{xx}^{[\lambda]}(\gamma)$ , la cual ya está previamente calculada para  $\lambda = 1, 2, 3$ .

Se escoge el error cuadrático medio como medida del error para visualizar en qué momento hemos encontrado la longitud óptima de la ventana,

este error está dado por:

$$Q_T = \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N E_K^2 \quad (4.28)$$

en donde N es el número de ventanas de longitud T, y

$$E_K = 1 - \frac{T_K}{T} \quad (4.29)$$

es el error normalizado entre el valor propuesto de T y el calculado  $T_K$  por la ecuación (4.23), para todas las ventanas de la traza sísmica desde  $k = 1$  hasta N.

### 3) APLICACION DEL METODO A UNA TRAZA SISMICA SINTETICA.

Enseguida se muestra la aplicación del método Berndt-Cooper para la determinación de la longitud óptima de ventana en una traza sísmica sintética.

En la parte (a) de la Fig. 4.4 se muestra un sismograma impulsional formado por seis pulsos de Ricker de 25 mseg. de período aparente cada uno, separados cada 140 mseg., teniendo así una señal formada por ondas básicas variables con el tiempo de 840 mseg. de longitud. En la parte (b) se genera ruido de distribución Gaussiana que, sumado al sismograma impulsional nos dará como resultado una traza sísmica sintética, en este caso

utilizando una relación señal a ruido igual a la unidad, como se muestra en la figura (4.4c), esta señal puede considerarse como no estacionaria - en el tiempo y al aplicar el método Berndt-Cooper, encontramos que la longitud óptima de ventana sucede cuando el error cuadrático medio es mínimo; como puede observarse en la parte (d) de la figura, la ventana óptima para esta traza sintética es de 30 muestras (el espaciamiento entre dos -- muestras es de 0,002 seg) en donde se encuentra un error cuadrático medio de 0,20588. Como se mencionó anteriormente, en este proceso se propone una longitud de ventana  $T$  y en base a este dato se aplica la ecuación - - (4.23) para determinar  $T_k$ , con este dato se encuentra  $E_k$  de la ec. (4.29) para que finalmente se determine  $Q_T$  de la ec. (4.28), para  $k = 1, 2, \dots, N$ , siendo  $N$  el número de ventanas de longitud propuesta  $T$ . Se aplica el método en forma iterativa para varias proposiciones de  $T$ , en este ejemplo  $T = 15, 20, \dots, 100$  muestras (es decir de 30 msec a 200 msec).

En las figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se muestra la aplicación del método haciendo variar la relación S/N de la traza sísmica sintética, se utiliza 0,75, 0,60, 0,43 y 0,20 respectivamente, observando en la parte (d) de estas figuras algunas diferencias en los errores cuadráticos medios, pero conservando siempre el mismo valor para la longitud óptima de la traza sísmica; sin embargo, hay inestabilidad cuando la relación señal a ruido es demasiado pequeña, como puede observarse en la fig (4.8,d). En la Tabla número 1 se muestran los valores numéricos obtenidos con la aplicación de este método.

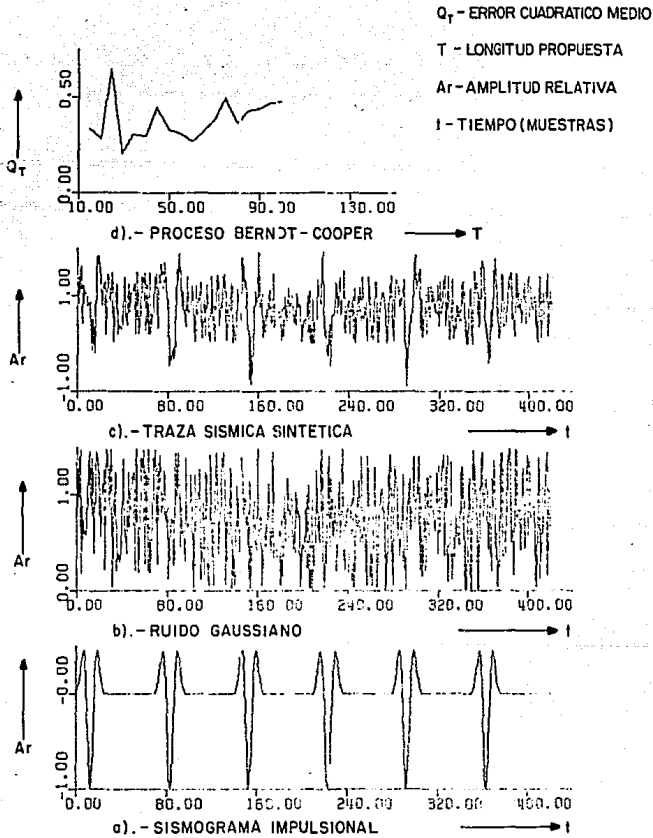


FIG. 4.4). - DETERMINACION DE LONGITUD OPTIMA DE VENTANA  
 - (PARA UNA RELACION SEÑAL/RUIDO = 1.0)

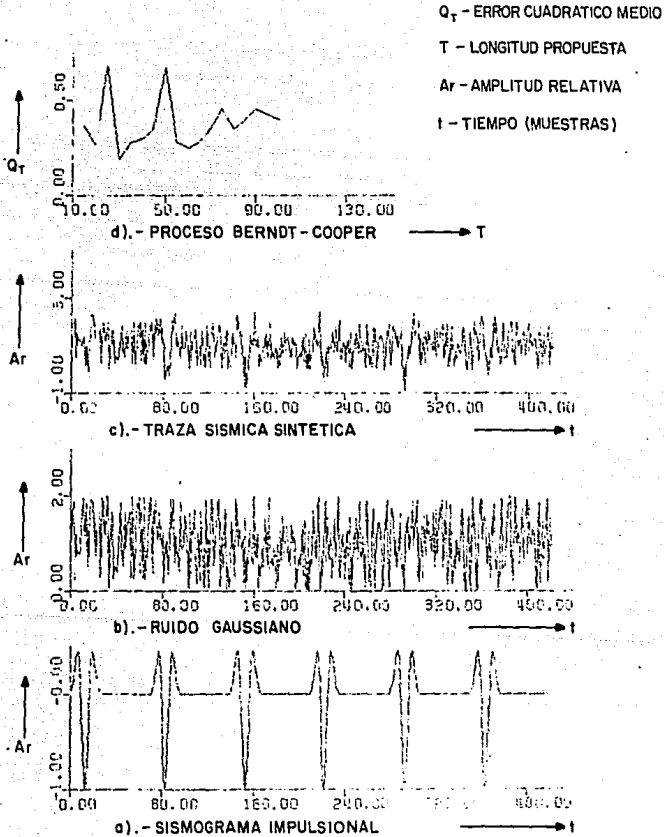


FIG. 4.5). - DETERMINACION DE LONGITUD OPTIMA DE VENTANA  
 (PARA UNA RELACION SEÑAL/ RUIDO = 0.75)

$Q_T$  - ERROR CUADRATICO MEDIO

T - LONGITUD PROPUESTA

$A_r$  - AMPLITUD RELATIVA

t - TIEMPO (MUESTRAS)

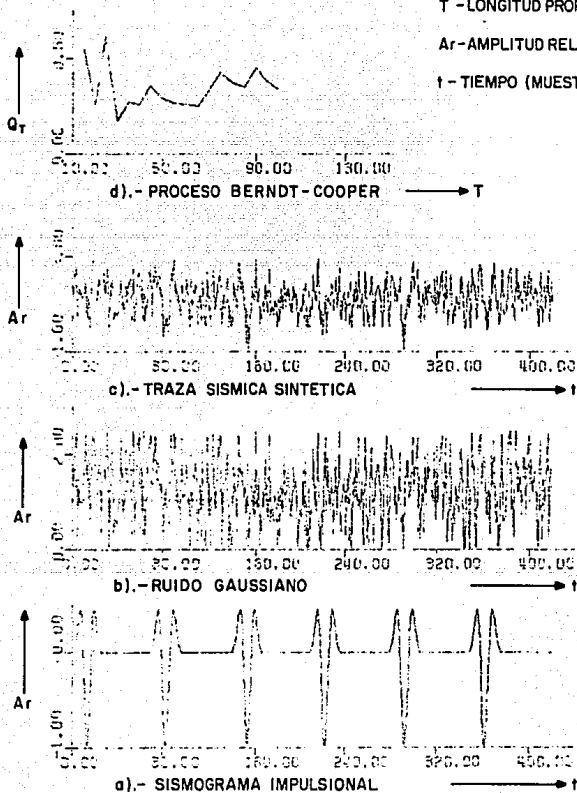


FIG. 4.6).- DETERMINACION DE LONGITUD OPTIMA DE VENTANA  
PARA UNA RELACION SENAL / RUIDO = 0.60)

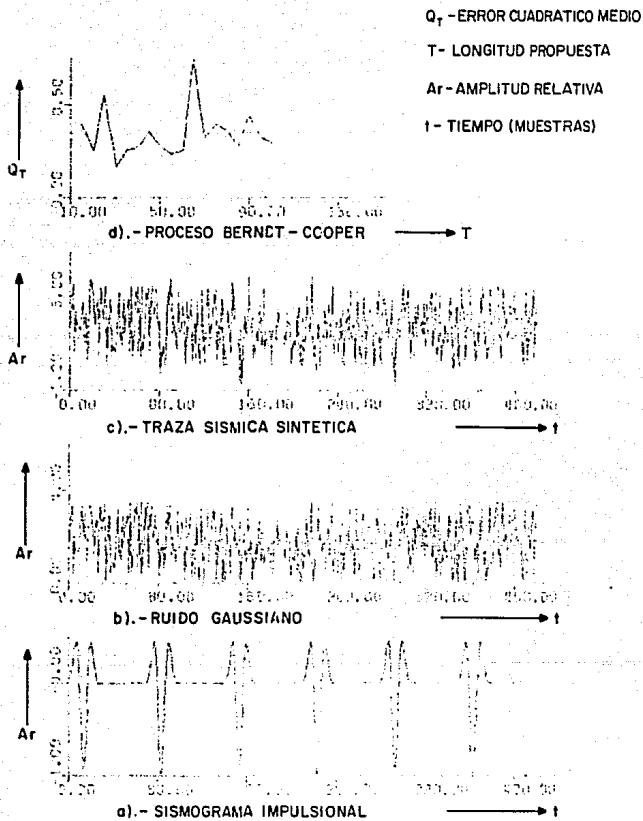


FIG. 4. 7). - DETERMINACION DE LONGITUD OPTIMA DE VENTANA  
 . ( PARA UNA RELACION SEÑAL / RUIDO = 0. 43 )



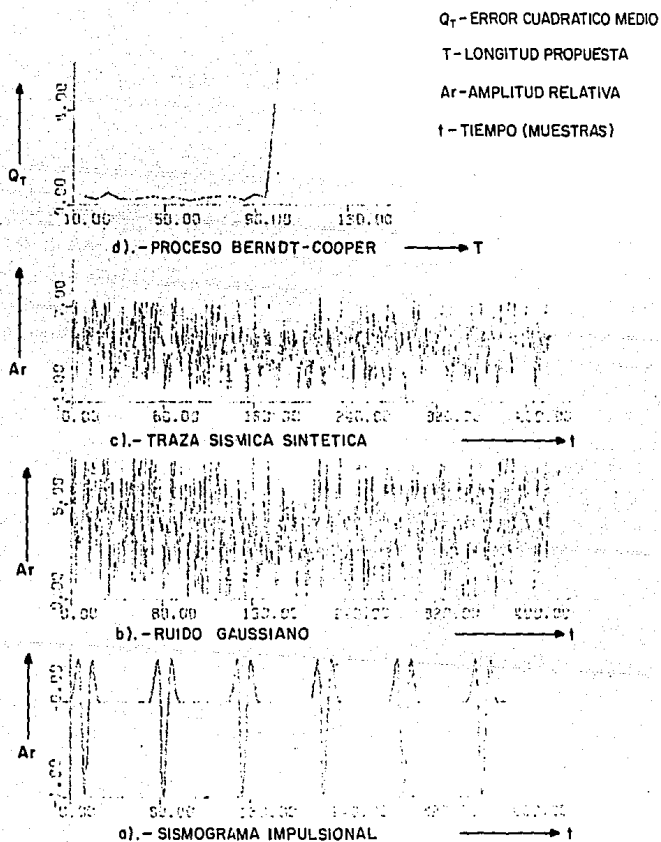


FIG. 4.8) - DETERMINACION DE LONGITUD OPTIMA DE VENTANA  
 ( PARA UNA RELACION SEÑAL/ RUIDO = 0. 20 )

T	Q <sub>T</sub>				
	S/N = 1.0	S/N = 0.75	S/N = 0.60	S/N = 0.45	S/N = 0.20
15	0.33366	0.36530	0.54454	0.39502	0.35339
20	0.28096	0.26787	0.26293	0.25432	0.24230
25	0.64855	0.68382	0.61462	0.54976	0.53355
30	0.20588	0.18762	0.17622	0.16925	0.22112
35	0.30452	0.28173	0.27184	0.25873	0.25643
40	0.29649	0.29329	0.25972	0.26869	0.29830
45	0.44266	0.34997	0.35746	0.35576	0.34080
50	0.33176	0.67720	0.29216	0.27683	0.26424
55	0.30852	0.28481	0.26566	0.23446	0.33783
60	0.27220	0.25064	0.26074	0.25629	0.21664
65	0.31844	0.27806	0.24797	0.74348	0.24003
70	0.38596	0.35475	0.33909	0.32686	0.32067
75	0.49597	0.45306	0.42546	0.39297	0.35014
80	0.36353	0.35139	0.36846	0.36708	0.34449
85	0.43053	0.39358	0.35138	0.27445	0.22762
90	0.43753	0.45356	0.45063	0.44270	0.43040
95	0.47176	0.42489	0.38472	0.32472	0.31096
100	0.47596	0.40239	0.34227	0.28915	5.72620

TABLA I. Resultados obtenidos de la aplicación del método Berndt-Cooper para la determinación de la longitud óptima de ventana en una traza sísmica sintética, variando S/N.

Enseguida se muestra el programa en Fortran IV elaborado para la aplicación del método Berndt-Cooper a una traza sísmica sintética, las subrutinas que se utilizaron se muestran en el apéndice, excepto las subrutinas de graficación PLØTS, GPLABL, PLØT, QAD y GPLEND que se encuentran implementadas en el sistema IBM-370/148 del Instituto Mexicano del Petróleo.

PROGRAMA PARA LA DETERMINACION DE LONGITUD OPTIMA DE VENTANA  
EN UNA TRAZA SISMICA SINTETICA.

```

001     INTEGER T1, T2, T3, TK
002     DATA N1, N2, IS, IE/4*0/
003     DIMENSION XV(1000), XVX(1000), S(200), B(70), XAC1(200),
* AK(70,70), B(3,200), T(20), E(20), PULSØ(200), TRAZA(999), CØEF(20),
* IPØS(20), SEN(999), RUI(999), CØEF1(999), XAC2(200), M(20), QT(20)
004     CALL PLØTS (-40.,-18.,0,0,2)
005     CALL GPLABL (15,'RØDØLFØ MARINES')
006     CALL PLØT (0.,3.,-3)
007     CALL PLØT (8.5,0,2)
008     CALL PLØT (8.5,11.,2)
009     CALL PLØT (0.,11.,2)
010     CALL PLØT (0.,0.,2)
011     CALL PLØT (1.75,1.75,-3)
012     READ (1,102)DEL, NIN
013     READ (1,103)(M(I),I=1, NIN)
014     READ (1,100)(CØEF(I),I=1,6), (IPØS(I), I=1,6)
015     NVAL = 396
016     PERI = 0.025
017     FACT = 1.0
018     EPS = 0.005
019     DX = 5.5
020     DY = 1.5
021     CALL RIKER(PULSØ,LP,PERI,DEL,FACT,EPS)
022     DØ 2 I=1,NVAL
023     2 CØEF1(I) = 0.
024     DØ 3 I=1,6

```

```

025 3 CØEF1(IPØS(1)) = CØEF(1)
026 CALL RICK(PULSØ,LP,CØEF1,NVAL,TRAZA,LZ)
027 CALL DAGRAF(TRAZA,LZ,DX,DY,1,0.,0.,1,0,M)
028 READ 5, (RUI(1), 1=1,421)
029 DØ 9 1=1,421
030 9 RUI(1) = RUI(1)*75.0
031 CALL DAGRAF(RUI,LZ,DX,DY,1,0.,2.083,1,0,M)
032 DØ 4 1=1,LZ
033 4 SEN(1) = TRAZA(1) + RUI(1)
034 CALL DAGRAF(SEN,LZ,DX,DY,1,0.,2.083,1,0,M)
035 LZ = LZ-1
036 DO 201 JT = 1,NIN
037 N = M(JT)
038 DX = (N/10.)
039 DX3 = DX3.
040 DY = 1.0
041 XD = DX + 0.25
042 YD = DY + 0.25
043 N1 = 0.
044 N2 = 1.
045 1E = 1.
046 1S = 0.
047 NV = LZ/N
048 QT(JT) = 0.
049 DØ 101 K=1,NV
050 N1 = N2
051 N2 = N2 + N
052 DØ 1 1 = N1, N2
053 K1 = 1-(K-1)*N
054 1 XY(K1) = SEN(1)
055 T1 = ((N/3) + 2)/2 + (K-1)*N
056 T2 = T1+N/3
057 T3 = T2+N/3
058 TK = T2
059 LT = N
060 LTD2 = LT/2
061 WRITE(3,302)N,NV,N1,N2,T1,T2,T3,TK,LT,LTD2,LZ
062 SC=0.
063 NN=N + 1
064 DØ 22 1T=1,NN,2
065 S(1T) = 0.
066 ITT=1T-1
067 DØ 23 1=1,NN
068 KT1=1-1-LTD2-(K-1)*N
069 KT2=KT1+TK+ITT/2

```

```

070      KT3=KT1+TK-ITT/2          GT.NN) GØ TØ 23
071      IF(KT3.LE.O.ØR.KT3,LE.O.ØR.KT2,GT.NN,ØR.KT3.
072      S(IT)=S(IT)+XV(KT2)*XV(KT3)
073 23  CØNTINUE
074      S(IT)=S(IT)/NN
075      S(IT)=S(IT)*S(IT)
076      WRITE(3,302)IT,I
077 22  SC=SC+S(IT)
078      SC=SC*144.
079      WRITE(3,301)(S(I),I=1,NN),SC
080      TT1=T1-1
081      TT2=T2-1
082      TT3=T3-1
083      P1=K*N-TT1
084      P2=K*N-TT2
085      P3=K*N-TT3
086      P11=P1*P1
087      P22=P2*P2
088      P33=P3*P3
089      DET=P2*P33-P3*P22-P1*P33+P11*P3+P1*P22-P11*P2
090      DET V=1./DET
091      WRITE(3,301)P1,P2,P3,P11,P22,P33,DET,DETV
092      ND3=(N/3)+1
093      DØ 29 IK=1,3
094      IS=IE
095      IE=IE+ND3-1
096      DØ 24 I=IS,IE
097      KI=I-IS+1
098 24  XVX(KI)=SEN(1)
099      CALL AUCR(XVX,ND3,XVX,ND3,XAC1)
100      WRITE(3,302)ND3,IS,IE,N,IK
101      CALL QAD(XAC1,XAC2,ND3,0,1)
102      ND2=2.*ND3
103      CALL RUDØL(XAC2,ND2,B)
104      WRITE(3,301)(B(J),J=1,ND3)
105      DØ 25 J=1,ND3
105 25  AK(IK,J)=B(J)
107 29  CØNTINUE
108      DØ 16 J=1,ND3
109      P11=AK(1,J)
110      P22=AK(2,J)
111      P33=AK(3,J)
112      DET=P2*P33-P3*P22-P1*P33+P11*P3+P1*P22-P11*P2
113      WRITE(3,301)P1,P2,P3,P11,P22,P33,DETV,DET
114 16  F(I,J)=DETV*DET
115      FIJ=0.

```

```

116   DØ 7 I=1,ND3
117   DØ 7 J=1,ND3
118   7 FIJ=FIJ+F(1,I)*F(1,J)
119   WRITE(3,301)(F(1,J),J=1,ND3),FIJ
120   T(K)=SC/FIJ
121   T(K)=T(K)**0.2
122   E(K)=1.0-T(K)/N
123   WRITE(3,301)T(K),E(K)
124   101 QT(JT)=QT(JT)+E(K)*E(K)
125   QT(JT)=QT(JT)/NV
126   WRITE(3,301)QT(JT)
127   201 CØNTINUE
128   WRITE(3,301)(QT(I),I=1,NIN)
129   CALL DAGRAF(QT,NIN,3.5,1.50,1.0,2.083,1,1,M)
130   CALL PLØT (0.,0.,999)
131   CALL GPLEND (0.,0.)
132   5 FØRMAT (26F3.3)
133   102 FØRMAT (F10.3,I5)
134   103 FØRMAT (16I5)
135   100 FØRMAT (6F5.2,6I3)
136   301 FØRMAT (1X,10E13.5,1X)
137   302 FØRMAT (1X,20I6)
138   STØP
139   END

```

## CAPITULO V

APLICACIONES EN LA DECONVOLUCION PREDICTIVA  
DE TRAZAS SISMICAS SINTETICAS

## 1) DECONVOLUCION PREDICTIVA Y OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR.

Un sistema de reflexión es considerado como la convolución de -- una función respuesta de la Tierra con una forma de onda constante. El ob- jetivo de la deconvolución es regresar del sismograma registrado a la fun- ción respuesta de la Tierra. Si se considera que la forma de onda de la señal de entrada cambia conforme a su propagación, debe utilizarse un fil- tro de deconvolución variable con el tiempo y el problema de diseño se -- complica pues debe ser tratado como un proceso estocástico no estaciona- rio el cual requiere de una descripción estadística dependiente del tiem- po; sin embargo en la práctica, la deconvolución usual (invariable con el tiempo) es considerada como un caso especial del filtrado óptimo, en donde el filtro es un operador inverso de mínimos cuadrados y la salida deseada es una función parecida al impulso unitario. Debido a esto la función de - croscorelación entre la entrada y la salida deseada puede escribirse como:

$$\phi_{db}(\tau) = \sum_t d_t b_{t+\tau} \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.1)$$

pero si la salida deseada  $d_t = 1, 0, 0, \dots$  y la señal de entrada  $b_t = b_0, b_1, b_2, \dots$ , entonces  $\psi_{db}(t) = b_0, 0, 0, \dots$ , y haciendo un escalamiento tendríamos que  $\psi_{db}(t) = 1, 0, 0, \dots$  y entonces la ecuación matricial del filtro de Wiener (ec. 2.52) queda como:

$$\begin{bmatrix}
 \phi_{bb}(0) & \phi_{bb}(1) & \phi_{bb}(2) & \cdots & \phi_{bb}(n) \\
 \phi_{bb}(1) & \phi_{bb}(0) & \phi_{bb}(1) & \cdots & \phi_{bb}(n-1) \\
 \phi_{bb}(2) & \phi_{bb}(1) & \phi_{bb}(0) & \cdots & \phi_{bb}(n-2) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \phi_{bb}(n) & \phi_{bb}(n-1) & \phi_{bb}(n-2) & \cdots & \phi_{bb}(0)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_0 \\
 f_1 \\
 f_2 \\
 \vdots \\
 f_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

(5.2)

y el filtro calculado ( $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ ) se utilizaría para deconvolver un tren reverberatorio de pulsos, por ejemplo en sismología marina, en un impulso unitario. Ahora si se desea un filtro predictivo de energía coherente para remover eventos repetitivos con una cierta periodicidad, como en el caso de eventos múltiples, la deconvolución será predictiva.

En este caso de deconvolución predictiva, el operador de predicción  $P_t$  actúa sobre la traza de entrada  $b_t$  para darnos una salida  $a_t$  - que será un estimado de la entrada a un tiempo  $t + \infty$  (como se observó en la fig. 2.1), es decir, este operador tendrá una distancia de predicción  $\infty$ .



Si en el modelo general del filtrado de Wiener de mínimos cuadrados (ec. 2.52) cambiamos la notación  $\varphi_{bb}(\tau) \rightarrow A_\tau$  y  $\varphi_{db}(\tau) \rightarrow C_\tau$  para  $\tau = 0, 1, 2, \dots, \infty$  y además  $f_t \rightarrow \hat{p}_t$  considerando que en la deconvolución predictiva  $d_t = b_{t+\alpha}$ , entonces la crosscorrelación entre la salida deseada  $d_t$  y la traza de entrada  $b_t$  será:

$$C_\tau = \sum_t b_{t+\alpha} b_{t+\tau} = \sum_t b_t b_{t+(\tau+\alpha)} \quad (5.3)$$

pero como la autocorrelación de la entrada  $b_t$  es

$$A_\tau = \sum_t b_t b_{t-\tau} \quad (5.4)$$

si observamos las ecuaciones 5.3 y 5.4, concluimos que

$$C_\tau = A_{\tau+\alpha} \quad (5.5)$$

es decir, la crosscorrelación entre la salida deseada y la entrada será la autocorrelación de la entrada para desplazamientos mayores a la distancia de predicción  $\alpha$  y por tanto la ec. 2.52 quedará como:

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} \\ A_1 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-2} \\ A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & A_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\alpha \\ A_{\alpha+1} \\ A_{\alpha+2} \\ \vdots \\ A_{\alpha+n-1} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

en donde el vector  $\mathbf{p}$  es el operador de predicción de longitud  $n$  y distancia de predicción  $\alpha$ . Si este operador se aplica mediante la convolución a la señal de entrada  $b_t$ , obtendremos  $\hat{b}_{t+\alpha}$  por tanto existirá un error  $\xi_{t+\alpha}$  que representará la parte no predecible de  $b_t$  dado -- por:

$$\xi_{t+\alpha} = b_{t+\alpha} - \sum_{\tau=t} b_{\tau} p_{\tau-t} \quad (5.7)$$

y aplicando la transformada  $Z$  obtendremos

$$Z^{-\alpha} E(Z) = Z^{-\alpha} B(Z) - B(Z) P(Z) \quad (5.8)$$

y por tanto

$$E(Z) = B(Z) \left[ 1 - Z^{\alpha} P(Z) \right] \quad (5.9)$$

en donde la parte en paréntesis representa la transformada  $Z$  del OPERADOR PREDICTIVO DEL ERROR, es decir, si el operador de predicción está dado -- por  $\phi_k = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$  entonces el operador predictivo del error -- con distancia de predicción  $\alpha$  será  $P_k = (1, 0, 0, \dots, 0, -p_0, -p_1, \dots, -p_{n-1})$  en donde el número de ceros será igual a  $\alpha - 1$ .

Si una traza sísmica marina es la convolución de una serie incoherente de coeficientes de reflexión con un tren reverberatorio de pulsos (con energía repetitiva), entonces el operador predictivo del error -- removerá la porción predecible de la traza, es decir, la energía repetitiva en las reverberaciones y dará como salida del filtrado la serie de error  $\xi_k$ , es decir una aproximación de los coeficientes de reflexión; otra forma de hacerlo es utilizando el operador de predicción y calculando  $\xi_k$  como se indica en la ec. 5.7, pero es más laborioso así.

Para calcular el operador predictivo del error  $P_k$  es necesario considerar el arreglo matricial (5.6) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_{n-1} p_{n-1} &= A_\alpha \\
 A_1 p_0 + A_0 p_1 + A_1 p_2 + \dots + A_{n-2} p_{n-1} &= A_{\alpha+1} \\
 A_2 p_0 + A_1 p_1 + A_0 p_2 + \dots + A_{n-3} p_{n-1} &= A_{\alpha+2} \\
 &\vdots \\
 A_{n-1} p_0 + A_{n-2} p_1 + A_{n-3} p_2 + \dots + A_0 p_{n-1} &= A_{\alpha+n-1}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

aumentando algunos términos en ambos lados de las ecuaciones 5.10 y consi-  
 derando de esta forma algunos renglones precedentes:

$$\begin{aligned}
 -A_0 \quad -0A_1 \quad \dots \quad -0A_{\alpha-1} + A_\alpha p_0 + A_{\alpha+1} p_1 + \dots + A_{\alpha+n-1} p_{n-1} &= -p_0 \\
 -A_1 \quad -0A_0 \quad \dots \quad -0A_{\alpha-2} + A_{\alpha-1} p_0 + A_\alpha p_1 + \dots + A_{\alpha+n-2} p_{n-1} &= -p_1 \\
 -A_2 \quad -0A_1 \quad \dots \quad -0A_{\alpha-3} + A_{\alpha-2} p_0 + A_{\alpha-1} p_1 + \dots + A_{\alpha+n-3} p_{n-1} &= -p_2 \\
 &\vdots \\
 -A_{\alpha-1} \quad -0A_{\alpha-2} \quad \dots \quad -0A_0 + A_1 p_0 + A_2 p_1 + \dots + A_n p_{n-1} &= -p_{\alpha-1} \tag{5.11} \\
 -A_\alpha \quad -0A_{\alpha-1} \quad \dots \quad -0A_1 + A_0 p_0 + A_1 p_1 + \dots + A_{n-1} p_{n-1} &= A_\alpha \\
 -A_{\alpha+1} \quad -0A_\alpha \quad \dots \quad -0A_2 + A_1 p_0 + A_0 p_1 + \dots + A_{n-2} p_{n-1} &= A_{\alpha+1} \\
 &\vdots \\
 -A_{\alpha+n-1} \quad -0A_{\alpha+n-2} \quad \dots \quad -0A_n + A_{n-1} p_0 + A_{n-2} p_1 + \dots + A_0 p_{n-1} &= A_{\alpha+n-1}
 \end{aligned}$$

en donde la ec. 5,10 está encerrada en un rectángulo dentro de 5,11.

Si cambiamos signos a todo el arreglo de 5,11 y damos otra presentación, obtenemos finalmente:

$$\begin{array}{cccc}
 A_0 & A_1 & \cdots & A_{\alpha+n-1} \\
 A_1 & A_0 & \cdots & A_{\alpha+n-2} \\
 A_2 & A_1 & \cdots & A_{\alpha+n-3} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 A_{\alpha-1} & A_{\alpha-2} & \cdots & A_n \\
 A_\alpha & A_{\alpha-1} & \cdots & A_{n-1} \\
 A_{\alpha+1} & A_\alpha & \cdots & A_{n-2} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 A_{\alpha+n-1} & A_{\alpha+n-2} & \cdots & A_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 -p_0 \\
 -p_1 \\
 \vdots \\
 -p_{n-1}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 p_0 \\
 p_1 \\
 p_2 \\
 \vdots \\
 p_{\alpha-1} \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{array}
 \quad (5.12)$$

en donde el vector  $(1, 0, 0, \dots, -p_0, -p_1, -p_2, \dots, -p_{n-1})$  representa al operador predictivo del error como una diferencia entre un impulso unitario y el operador de predicción  $u^p t$  desplazado por la distancia de predicción  $\alpha$ . Si la distancia de predicción  $\alpha$  es igual a la unidad, entonces el operador predictivo del error  $P_t$  de longitud  $n+1$  será igual al operador inverso de mínimos cuadrados  $f_t$  de longitud  $n+1$ , excepto por un factor de escala (Peacock-Treitel, R. 13). De esta forma el filtro inverso (ec. 5.2), el filtro de predicción (ec. 5.6) y el filtro predictivo del error (ec. 5.12), son casos particulares del filtro de Wiener y por tanto, puede usarse el algoritmo de Hestenes para encontrar los coeficientes del operador que se aplique a la deconvolución usual o a la deconvolu-

ción predictiva.

El operador predictivo del error (ec. 5.12) se dedujo del operador de predicción (ec. 5.6), por tanto es recomendable calcular  $\hat{p}_k$  y  $c_0$  conociendo la distancia de predicción  $\alpha$ , calcular  $P_k$ . El operador predictivo del error acorta la onda básica de entrada de longitud  $\alpha + n$  en una onda básica de salida de longitud  $\alpha$ , como se observa en la fig.5.1.

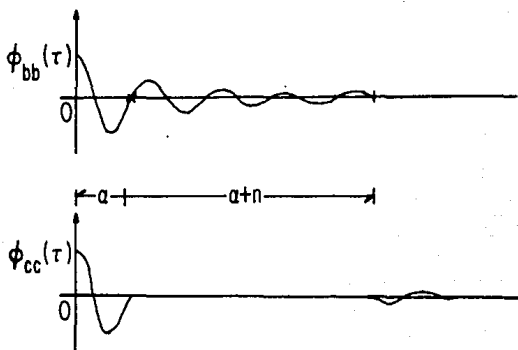


Fig. 5.1 La función  $\phi_{bb}(\tau)$  representa la autocorrelación de la traza de entrada con reverberaciones de período corto y  $\phi_{cc}(\tau)$  la autocorrelación después de la aplicación del filtro predictivo de error, con distancia de predicción  $\alpha$  y longitud  $n$ .

Lo anterior se debe a que la autocorrelación de la traza de entrada es igual a la autocorrelación de la onda básica (Peacock & Treitel, -- R, 13 ) y a que la crosscorrelación (ec. 5.12) se hace cero para desplaza-

mientos mayores de  $\alpha - 1$ . Como  $\alpha$  es una variable independiente, podemos seleccionar la longitud de la salida deseada, si  $\alpha \approx 1$  tendríamos más contracción, pero también ruido de alta frecuencia, la práctica ha demostrado que  $\alpha$  debe corresponder al segundo cruce con cero de la función de autocorrelación de la entrada,

De esta forma, los parámetros  $\alpha$  (distancia de predicción) y  $n$  (longitud del operador de predicción) deben ser tales que la energía de las reverberaciones periódicas sea removida y por tanto la autocorrelación de la salida  $\chi_{\alpha}(t)$  será cero entre  $\alpha$  y  $\alpha + n - 1$  (Fig. 5.1).

## 2) MODELOS GEOLOGICOS SINTENTICOS.

El problema principal en sismología marina consiste en las reflexiones múltiples de energía dentro de la capa de agua. La señal producida en la superficie mediante la explosión de un gas propano-butano en un cañón de caucho en la parte inferior del barco, se propaga por debajo de la superficie y las reflexiones producidas por las capas geológicas son detectadas por sismodetectores que están dentro de un cable que arrastra el barco, la señal propagada es convolucionada con la Tierra, pero se enmascara por una cantidad tremenda de ruidos incoherentes y coherentes como las reverberaciones o múltiples. La velocidad de la propagación en el agua es de 1500 m/s y la densidad de un gramo por centímetro cúbico, en cambio la velocidad de

propagación en las rocas debajo del agua es de 2000 m/s o más, y la densidades superiores a un gramo sobre centímetro cúbico. Esto significa que los coeficientes de reflexión del fondo marino son de 0.3 hacia arriba; por otro lado, debido a que la densidad del aire es muy pequeña, el coeficiente de reflexión en la interfase aire-agua es casi -1. Las reflexiones del fondo marino llegan a la superficie en un tiempo  $T_w$  con amplitud unitaria y en la interfase aire-agua, la energía es totalmente reflejada con polaridad inversa, por tanto amplitud -1. Si en el fondo marino un porcentaje  $R$  de la energía es reflejada hacia arriba, entonces al tiempo  $2T_w$  registraremos una amplitud  $-R$ ; este proceso de reflexión en la interfase aire-agua y en el fondo marino continúa indefinidamente, de tal manera que las amplitudes registradas será  $R^2$ ,  $-R^3$ ,  $R^4$ ,  $-R^5$ , etc., a los tiempos  $3T_w$ ,  $4T_w$ ,  $5T_w$ ,  $6T_w$ , etc., respectivamente (ver figura 5.2).

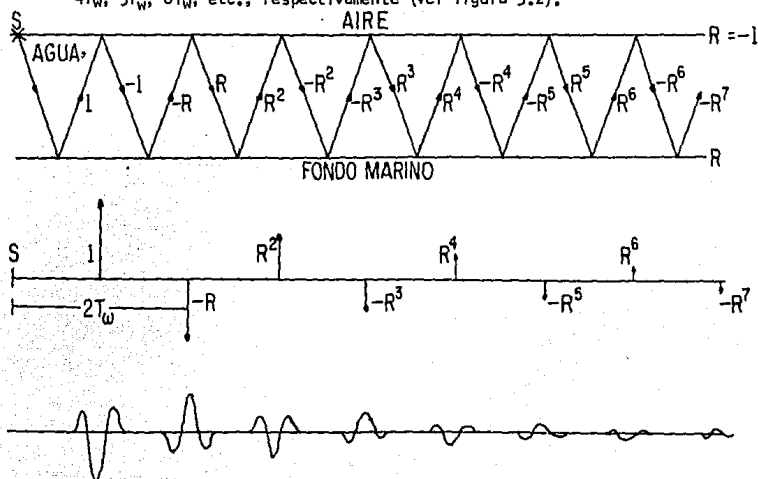


Fig. 5.2) Trayectorias, coeficientes de reflexión y secuencia de reverberaciones de primer orden.



Si consideramos una capa de sedimentos por debajo del fondo marino, tendríamos un tercer reflector y el coeficiente de transmisión a lo largo del segundo reflector sería  $t_1$  y se producirían reverberaciones de segundo orden (fig. 5.3):

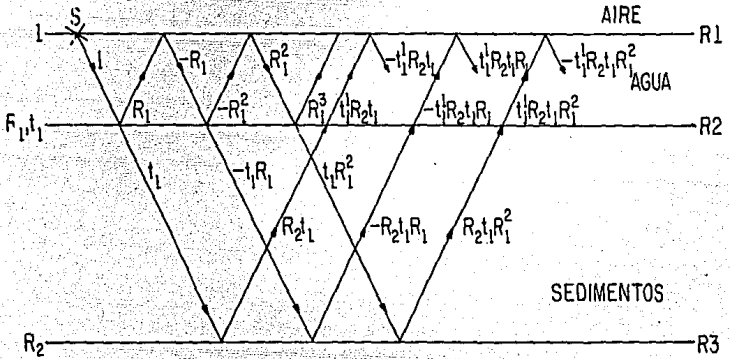


Fig. 5.3) Reverberaciones de primer y segundo orden.

Si el tiempo de viaje de ida y vuelta a través de la capa de agua es  $T_w$ , entonces podemos escribir la respuesta al impulso para las reverberaciones de primer orden, en términos de la transformada Z (ver parte central de la fig. 5.2).

$$I_1(Z) = 1 - R_1 Z^{T_w} + R_1^2 Z^{2T_w} - R_1^3 Z^{3T_w} + \dots \quad (5.13)$$

multiplicando la ecuación 5.13 por  $R_1 Z^{T\omega}$ , tenemos:

$$R_1 Z^{T\omega} I_1(Z) = R_1 Z^{T\omega} - R_1^2 Z^{2T\omega} + R_1^3 Z^{3T\omega} - \dots \quad (5.14)$$

Al sumar las ecuaciones 5.13 y 5.14, y despejando  $I_1(z)$ , tenemos la transformada  $z$  de la respuesta al impulso para reverberaciones de primer orden.

$$I_1(Z) = \frac{1}{1 + R_1 Z^{T\omega}} \quad (5.15)$$

Similáramente, la transformada  $z$  de la respuesta al impulso de las reverberaciones de segundo orden (fig. 5.3) estará dada por (Peacock-Treitl, R. 13 ):

$$I_2(Z) = \frac{1}{(1 + R_1 Z^{T\omega})^2} \quad (5.16)$$

La traza sísmica sintética se forma mediante la convolución de la onda básica de Ricker con la respuesta al impulso (Fig. 5.2) considerando que el tiempo de propagación a través de la capa de agua es de 60 ms y el coeficiente de reflexión  $R_1 = 0,6$ . Para remover el tren reverberatorio de la señal, efectuamos la autocorrelación de la señal de entrada:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{11}(\tau) &= 1 + R_1^2 + R_1^4 + R_1^6 + \dots && \text{para } \tau = 0 \\
 \phi_{11}(\tau) &= 0 && \text{para } 0 < \tau < T\omega \\
 \phi_{11}(\tau) &= -R_1(1 + R_1^2 + R_1^4 + \dots) = -R_1\phi_{11}(0) && \text{para } \tau = T\omega
 \end{aligned} \right\} (5.17)$$

y así sucesivamente. De la función de autocorrelación se diseña un operador predictivo de error con distancia predictiva  $\infty$  y posteriormente se convoluciona este operador con la señal sísmica de entrada para obtener finalmente la señal filtrada (sin tren reverberatorio).

A continuación, se muestra el programa en Fortran IV que se diseñó para la aplicación de los algoritmos Levinson y Hestenes a la deconvolución predictiva de trazas sísmicas de algunos modelos geológicos, las subrutinas que contienen dichos algoritmos se muestran en el apéndice de este trabajo.

PROGRAMA QUE APLICA LOS ALGORITMOS DE HESTENES Y LEVINSON A LA  
DECONVOLUCION PREDICTIVA DE TRAZAS SISMICAS SINTETICAS.

```

0001      DIMENSION PULSØ(200), X(1000), TRAZA(1200), R(1000),
* TRAZAF(1500), MM(200), Z(200), XX(1000,10)
0002      REAL*8 HEURE2
0003      CALL PLØTS (-40., -18., 0, 0, 2)
0004      CALL GPLABL (15, 'RØDØLFØ MARINES')
0005      CALL PLØT (0., 0., 999)
0006      READ (1,102)MIN,(MM(I), I=1,MIN)
0007      CALL RIKER(PULSØ,LP,0.032,0.004,1.0,0.02)

```

```

0008 CALL PLØTS (-40.,-18,0,0,0,2)
0009 CALL PLØT (0.,16.,-3)
0010 CALL PLØT (8.50,0.,2)
0011 CALL PLØT (8.50,-11.,2)
0012 CALL PLØT (8.50,0.,3)
0013 CALL PLØT (17.0,0.,2)
0014 CALL PLØT (17.0,0.,-11.,2)
0015 CALL PLØT (17.0,0.,3)
0016 CALL PLØT (25.50,0.,2)
0017 CALL PLØT (25.50,-11.,2)
0018 CALL PLØT (0.,-11.,2)
0019 CALL PLØT (0.,0.,2)
0020 CALL PLØT (0.,-1.5,-3)
0021 DY=8./MIN
0022 DYY=2.*DY
0023 DØ 10 IN=1,MIN
0024 M=MM(IN)
0025 DØ 13 I=1,1000
0026 13 X(1)= 0.
0027 READ(1,102)NPUL
0028 DØ 11 IK=1, NPUL
0029 READ(1,102)(JD,NMUL,NSTART,N,NALFA,IAMP, NNSTAR)
0030 XX(NSTART,IK)=1.0
0031 XX(NSTART+JD,IK)=-IAMP/100.
0032 DØ 20 I=2,NMUL
0033 K=JD*I
0034 20 XX(NSTART+K,IK)=(-IAMP/100.)*I
0035 11 CØNTINUE
0036 DØ 12 IK=1, NPUL
0037 DØ 12 I=1,1000
0038 12 X(1)=X(1)+XX(I,IK)
0039 LX=NSTART+(NMUL-1)*JD+NALFA-NNSTAR
0040 CALL RICK(PULSØ,LP,X,LX,TRAZA,LZ)
0041 CALL DAGRAF(TRAZA,LZ,5.50,DYY,0,1.5,-DY,1)
0042 CALL AUCR(TRAZA,LZ,TRAZA,LZ,R)
0043 CALL DATIME(HEURE1,HEURE2)
0044 WRITE(3,104)HEURE1,HEURE2
0045 CALL DECLEV(TRAZA,R,TRAZAF,N,NALFA,LZ)
0046 CALL DATIME(HEURE1,HEURE2)
0047 WRITE(3,104)HEURE1,HEURE2
0048 CALL DAGRAF(TRAZAF,LZ,5.50,DYY,0,8.50,0.,1)
0049 CALL DATIME(HEURE1,HEURE2)
0050 WRITE(3,104)HEURE1,HEURE2
0051 CALL DECHES(TRAZA,R,TRAZAF,N,NALFA,LZ,M,Z,PRMSQ)
0052 CALL DATIME(HEURE1,HEURE2)

```

```

0053 WRITE(3,104)HEURE1,HEURE2
0054 CALL DAGRAF(TRAZAF,LZ,5.50,DYY,0,8.50,0.,1)
0055 CALL PLØT (-18,50,0.,-3)
0056 DØ 14 IK=1,NPUL
0057 DØ 14 I=1,1000
0058 14 XX(1,IK)=0.
0059 10 CØNTINUE
0060 CALL PLØT (0.,0.,999)
0061 CALL SPLEND(0.,0.)
0062 102 FØRMAT(1615)
0063 103 FØRMAT(1X,10F13.5,1X,/)
0064 104 FØRMAT(1X,F15.5,10X,A8)
0065 STØP
0066 END

```

En este trabajo se aplica el operador predictivo de error a ciertos modelos geológicos con información sísmica sintética, mediante el algoritmo de Hestenes. Es necesario mencionar que la interpretación geológica a partir de una sección sísmica, depende de muchos factores, pero básicamente la interpretación puede hacerse dentro de tres categorías: la primera relaciona la interpretación de estructuras con la velocidad de propagación del frente de onda; la segunda las relaciona con la geometría de los reflectores; y la tercera, con el registro y procesamiento de los datos sísmicos. Los modelos aquí expuestos están relacionados con la distorsión debida al pulso de entrada, a los efectos múltiples y al enmascaramiento de estructuras geológicas o creación de falsas estructuras por parámetros incorrectos en el procesamiento de los datos, aunque se insiste en que sólo son modelos geológicos sintéticos, dado que se desconocen los formatos de información real.

MODELO 1. Se forma un sismograma sintético (ensamble de funciones) con 24 trazas sísmicas marinas sintéticas (miembros del ensamble) generadas por la misma fuente, cada una de éstas es la convolución de la onda básica de Ricker con una secuencia de coeficientes. De esta forma en la Fig. 5.4 se muestra la simulación de una capa reflectora con efectos de reflexión múltiple y en la Fig. 5.5, el resultado de aplicar un operador de 100 puntos obtenido con el algoritmo de Hestenes, tomando el vector nulo como inicial -- aproximante para la primera traza y el vector resultante como vector inicial para la segunda y así sucesivamente hasta terminar. El número de iteraciones ( $n$ ) para cada traza depende de la disminución progresiva del error inicial ( $\epsilon_0$ ) hasta llegar a un límite mínimo ( $\epsilon_n$ ) que dependerá de la condición que se establezca, en este caso, se escoge  $\epsilon_{min} \leq \epsilon_0 / 1000$ . Se aplicó también el algoritmo de Levinson con 100 iteraciones necesariamente para cada traza.

HESLEVSS									
$T_r$	$X_{ob}$	$\epsilon_0$	$\epsilon_n$	$n$	$T_r$	$X_{ob}$	$\epsilon_0$	$\epsilon_n$	$n$
1	0	59.5971	0.05518	34	13	12	0.25077	0.05271	2
2	1	0.56867	0.04876	5	14	13	0.23339	0.05642	4
3	2	0.52022	0.05179	5	15	14	0.22780	0.05589	2
4	3	0.47583	0.05798	2	16	15	0.21068	0.05095	6
5	4	0.43846	0.05485	5	17	16	0.20395	0.04923	2
6	5	0.40392	0.04619	5	18	17	0.19002	0.05411	3
7	6	0.37054	0.04280	2	19	18	0.18953	0.05748	2
8	7	0.34495	0.04155	6	20	19	0.17658	0.05753	5
9	8	0.32153	0.05122	2	21	20	0.16872	0.04224	2
10	9	0.29925	0.04475	4	22	21	0.15720	0.05866	3
11	10	0.28322	0.05903	2	23	22	0.16113	0.05654	2
12	11	0.26412	0.04770	6	24	23	0.15189	0.05578	5

para  $\epsilon_{min} = 0.0595971$

MODELO 2. Se genera un SINCLINAL enmascarado por ruido coherente (reverberaciones de perfodo corto), como se observa en la Fig. 5.6, y se aplica un operador predictivo de error de 25 puntos (Fig. 5.7).

HSLV SINC											
$T_r$	$N$	$X_{ob}$	$r_0$	$r_n$	$n$	$T_r$	$N$	$X_{ob}$	$r_0$	$r_n$	$n$
1	0	16.5341	0.01471		15	13	12	0.00536	0.00729		1
2	1	0.01513	0.00983		2	14	13	0.00740	0.00529		1
3	2	0.00984	0.00874		1	15	14	0.00523	0.00749		1
4	3	0.00868	0.00530		1	16	15	0.00767	0.00514		1
5	4	0.00534	0.00836		1	17	16	0.00508	0.00781		1
6	5	0.00822	0.00527		1	18	17	0.00792	0.00503		1
7	6	0.00535	0.00791		1	19	18	0.00500	0.00799		1
8	7	0.00772	0.00534		1	20	19	0.00804	0.00495		1
9	8	0.00542	0.00750		1	21	20	0.00494	0.00808		1
10	9	0.00739	0.00540		1	22	21	0.00810	0.00491		1
11	10	0.00540	0.00733		1	23	22	0.00489	0.00809		1
12	11	0.00733	0.00536		1	24	23	0.00809	0.00489		1

para  $\epsilon_{mfn} \leq 0.0165341$

MODELO 3. En la Fig. 5.8 se muestra un sismograma sintético, simulando dos capas de reflexión con efecto de enmascaramiento por trenes de reverberación y en la Fig. 5.9 el resultado de aplicar un filtro de 25 puntos utilizando el algoritmo de Hestenes.

(...)

## HSLV2CMS

$T_r$	$N_{X_{ob}}$	$C_0$	$\epsilon_n$	$n$	$T_r$	$N_{X_{ob}}$	$C_0$	$\epsilon_n$	$n$
1	0	53.7076	0.00398	21	13	12	0.00291	0.00203	1
2	1	0.00402	0.00394	23	14	13	0.00285	0.00204	1
3	2	0.00393	0.00330	3	15	14	0.00279	0.00206	1
4	3	0.00348	0.00332	2	16	15	0.00278	0.00204	1
5	4	0.00358	0.00347	1	17	16	0.00278	0.00204	1
6	5	0.00363	0.00209	1	18	17	0.00278	0.00201	1
7	6	0.00354	0.00207	1	19	18	0.00277	0.00203	1
8	7	0.00350	0.00198	1	20	19	0.00274	0.00204	1
9	8	0.00316	0.00205	1	21	20	0.00266	0.00208	1
10	9	0.00309	0.00205	1	22	21	0.00268	0.00207	1
11	10	0.00300	0.00203	1	23	22	0.00273	0.00202	1
12	11	0.00303	0.00201	1	24	23	0.00270	0.00204	1

para  $\epsilon_{mfn} \leq 0.0537076$

MODELO 4. En la Fig. 5.10 se muestra la simulación de un anticlinal simple, aparentemente cerca de la superficie, con una capa reflectora en su parte superior y una secuencia de ondas múltiples de período corto a lo largo del sísmograma. En la Fig. 5.11 se observa el resultado de aplicar un operador predictivo de error de 25 puntos; mientras que con el algoritmo de Levinson se utilizaron 25 iteraciones para cada traza, con el algoritmo de Hestenes se tienen los siguientes resultados.

Número de iteraciones para el modelo HSLVANTI: (17, 7, 4, 7, 8, 12, 10, 10, 1, 15, 3, 1, 1, 1, 1, 11, 4, 16, 11, 8, 10, 7, 4, 6).

Para  $\epsilon_{mfn} \leq 0.00428902$



MODELO 5. Se presenta un modelo en la Fig. 5.12, para la simulación de un sismograma que contiene tres capas reflectoras más ruido de reverberaciones de período corto, y en la Fig. 5.13, la depuración del ruido mediante el algoritmo de Hestenes.

HSLV3CMS									
$T_r$	$N_{Xob}$	$f_0$	$f_u$	$n$	$T_r$	$N_{Xob}$	$f_0$	$f_u$	$n$
1	0	99.3714	0.06175	15	13	12	0.05401	0.03953	1
2	1	0.06171	0.06156	1	14	13	0.05295	0.03979	1
3	2	0.06174	0.03939	1	15	14	0.05269	0.03968	1
4	3	0.06086	0.03942	1	16	15	0.05205	0.03970	1
5	4	0.06053	0.03913	1	17	16	0.05203	0.03951	1
6	5	0.05874	0.03945	1	18	17	0.05176	0.03952	1
7	6	0.05852	0.03920	1	19	18	0.05166	0.03933	1
8	7	0.05797	0.03918	1	20	19	0.05090	0.03955	1
9	8	0.05757	0.03918	1	21	20	0.05059	0.03948	1
10	9	0.05525	0.03975	1	22	21	0.05050	0.03941	1
11	10	0.05479	0.03970	1	23	22	0.05082	0.03900	1
12	11	0.05411	0.03969	1	24	23	0.05019	0.03925	1

para  $\epsilon_{min} \leq 0.0993714$

MODELO 6. En la Fig. 5.14 se muestra la simulación de un SINCLINAL en el que son evidentes tres eventos sísmicos; dos reflexiones en los flancos y una DIFRACCION en el fondo del sinclinal. En la Fig. 5.15 se tiene el resultado de aplicar un operador predictivo de error de 25 puntos utilizando el algoritmo de Hestenes para la obtención de los coeficientes del filtro de Wiener. También se utilizó el algoritmo de Levinson, en el cual se efectuaron 25 iteraciones para cada traza del sismograma.

<u>HSLVSNRD</u>									
$T_r$	$N_{\text{obs}}$	$k_0$	$\gamma_n$	$n$	$T_r$	$N_{\text{obs}}$	$k_0$	$\gamma_n$	$n$
1		4.37143	0.00398	13	13	12	0.03700	0.00334	4
2	1	0.24302	0.00175	7	14	13	2.35295	0.00172	10
3	2	0.29809	0.00431	4	15	14	0.90257	0.00422	11
4	3	0.36766	0.00420	4	16	15	0.86951	0.00434	8
5	4	0.44348	0.00220	6	17	16	0.54636	0.00297	7
6	5	0.04346	0.00190	7	18	17	0.48586	0.00205	8
7	6	0.34345	0.00233	7	19	18	0.34440	0.00370	7
8	7	0.47359	0.00335	7	20	19	0.04836	0.00251	7
9	8	0.54700	0.00303	8	21	20	0.43708	0.00341	7
10	9	0.80704	0.00418	11	22	21	0.39516	0.00385	6
11	10	0.92765	0.00314	8	23	22	0.29670	0.00276	7
12	11	1.33161	0.00370	10	24	23	0.25337	0.00437	4

para  $k_0 \text{ mfn} \leq 0.00437143$

MODELO 7. En la Fig. 5.16 se tiene un sismograma sintético formado por 24 trazas sísmicas provenientes de una estructura de cuatro capas reflectoras más un tren reverberatorio de período corto, en la Fig. 5.17, el filtrado.

<u>HSLVNCMS</u>									
$T_r$	$N_{ob}$	$r_0$	$t_n$	$n$	$T_r$	$N_{ob}$	$r_0$	$t_n$	$n$
1	0	148.3995	0.10676	15	13	12	0.07546	0.05976	1
2	1	0.10650	0.08896	1	14	13	0.07667	0.05909	1
3	2	0.08933	0.06383	1	15	14	0.07852	0.05807	1
4	3	0.07579	0.06415	1	16	15	0.07924	0.05755	1
5	4	0.07398	0.06206	1	17	18	0.07846	0.05752	1
6	5	0.06950	0.06473	1	18	17	0.07853	0.05730	1
7	6	0.06793	0.06566	1	19	18	0.07926	0.05680	1
8	7	0.06794	0.06541	1	20	19	0.08111	0.05603	1
9	8	0.06681	0.06659	1	21	20	0.08519	0.05480	1
10	9	0.07122	0.06296	1	22	21	0.08470	0.05484	1
11	10	0.07560	0.06033	1	23	22	0.07878	0.05660	1
12	11	0.07608	0.05981	1	24	23	0.08087	0.05565	1

para  $\epsilon_{min} \leq 0.01483995$

MODELO 8. Por último, en la Fig. 5.18 se muestra la simulación de un DOMO SALINO en presencia de una cantidad considerable de ruido coherente, el tiempo de viaje de las ondas a través del domo es menor que a través de las rocas adyacentes. En la Fig. 5.19 se muestra el resultado después de filtrar con un operador de 25 puntos diseñado bajo el criterio de mínimos cuadrados y la deconvolución predictiva, usando el algoritmo de Hestenes.

<u>HSLVDØMØ</u>											
Tr	Nº	Xob	f <sub>o</sub>	f <sub>n</sub>	n	Tr	Nº	Xob	f <sub>o</sub>	f <sub>n</sub>	n
1	Ø	4.22006	0.00253	13	13	12	0.00350	0.00312	13		
2	1	0.00253	0.00145	3	14	13	0.11204	0.00394	7		
3	2	0.00302	0.00145	1	15	14	0.79164	0.00267	7		
4	3	0.00302	0.00119	1	16	15	0.93582	0.00054	19		
5	4	0.00245	0.00119	1	17	16	0.36430	0.00168	7		
6	5	0.00245	0.00119	1	17	16	0.36430	0.00168	7		
7	6	1.77100	0.00400	8	19	18	1.72335	0.00375	10		
8	7	0.51275	0.00246	7	20	19	0.70992	0.00239	7		
9	8	0.32203	0.00195	7	21	20	0.00239	0.00228	2		
10	19	0.83103	0.00213	7	22	21	0.00228	0.00226	1		
11	10	0.53828	0.00246	7	23	22	0.00226	0.00125	1		
12	11	0.13694	0.00350	7	24	23	0.00125	0.00154	1		

para  $\epsilon_{mf_n} \approx 0.00422006$

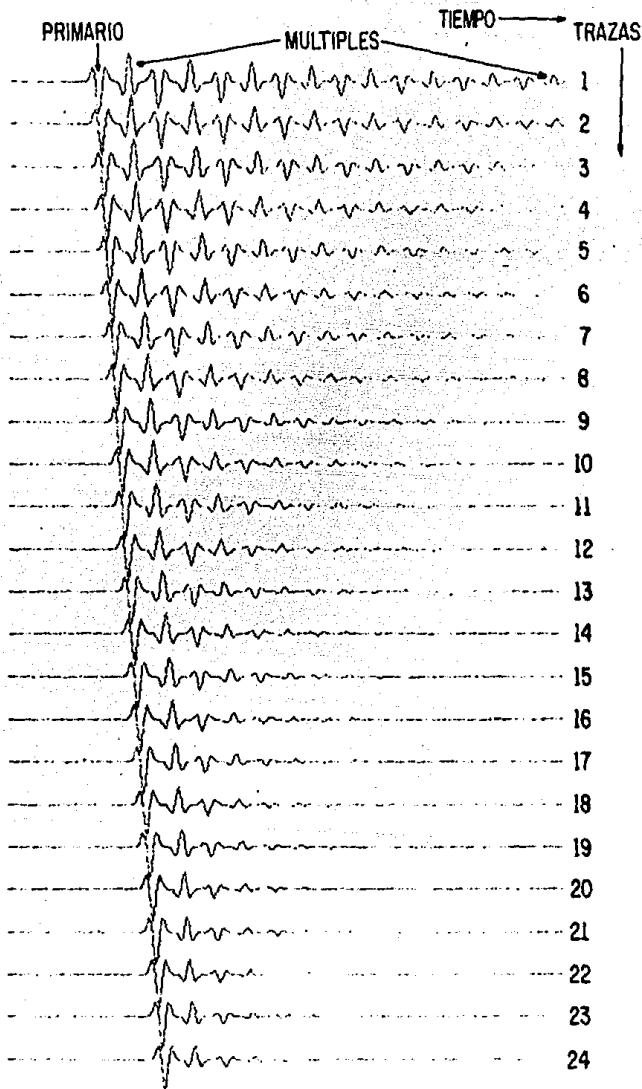


FIG. 5.4).- MODELO 1, SISMOGRAMA SINTETICO PARA UN HORIZONTE REFLECTOR Y TREN REVERBERATORIO.

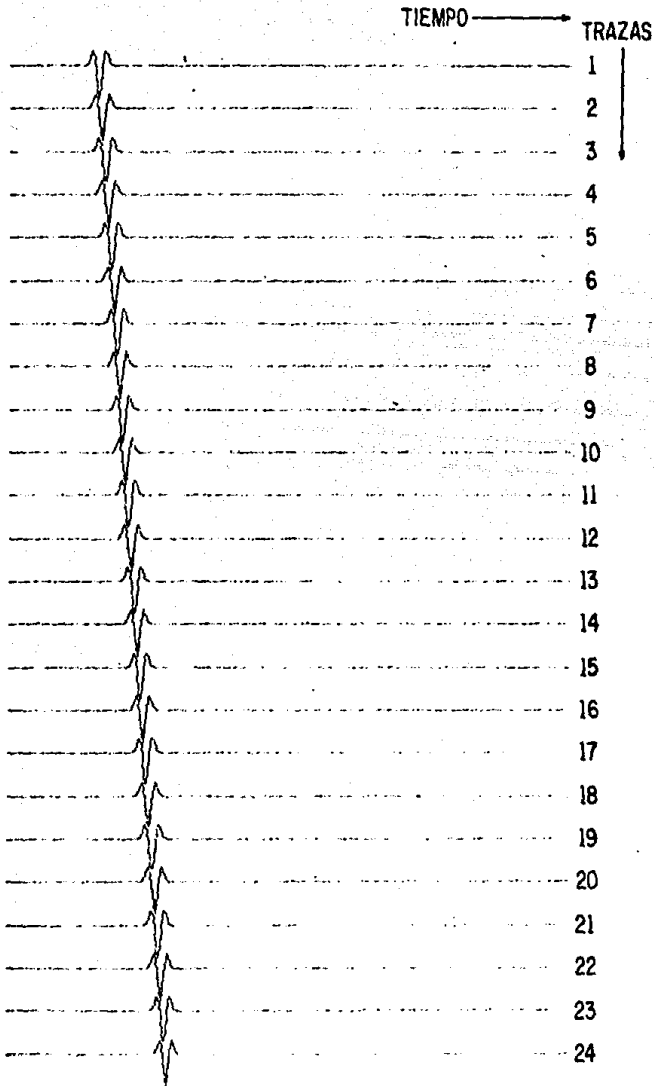


FIG. 5.5).- MODELO 1, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON ALGORITMO DE HESTENES.

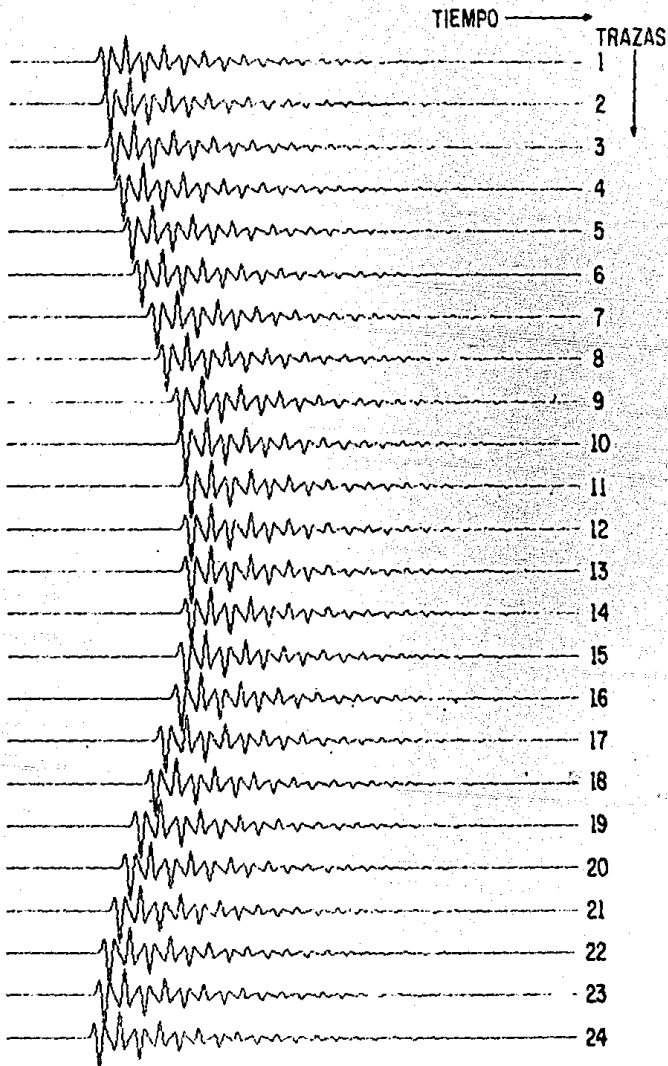


FIG. 5.6).- MODELO 2, SISMOGRAMA SINTETICO PARA UN SINCLINAL Y EFECTO DE REFLEXIONES MULTIPLES.

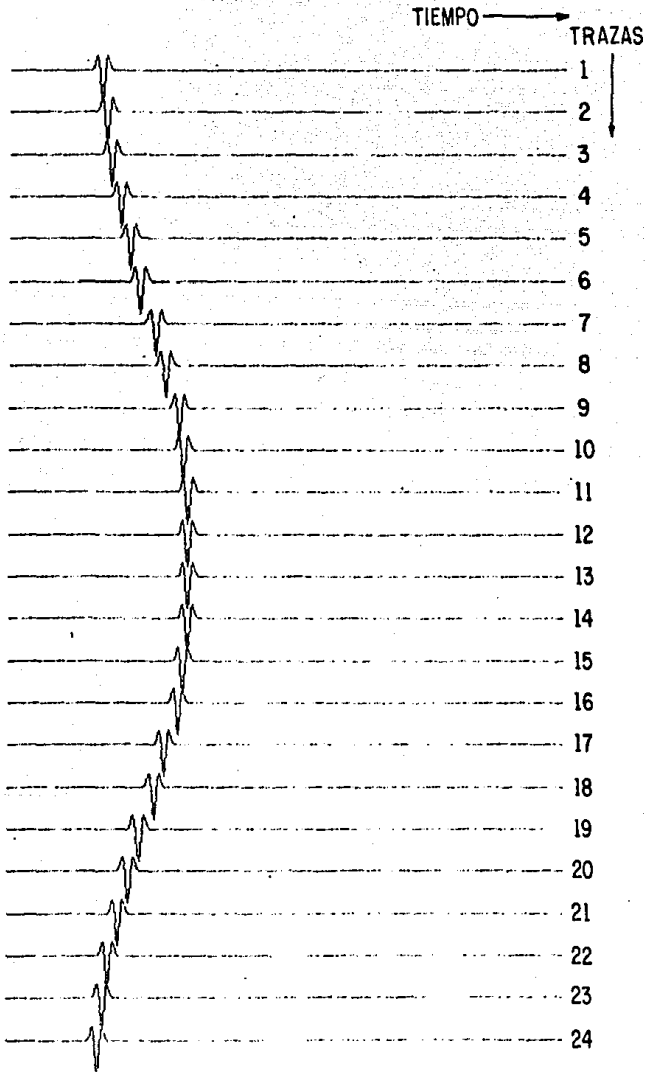


FIG. 5.7).- MODELO 2, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON ALGORITMO DE HESTENES.



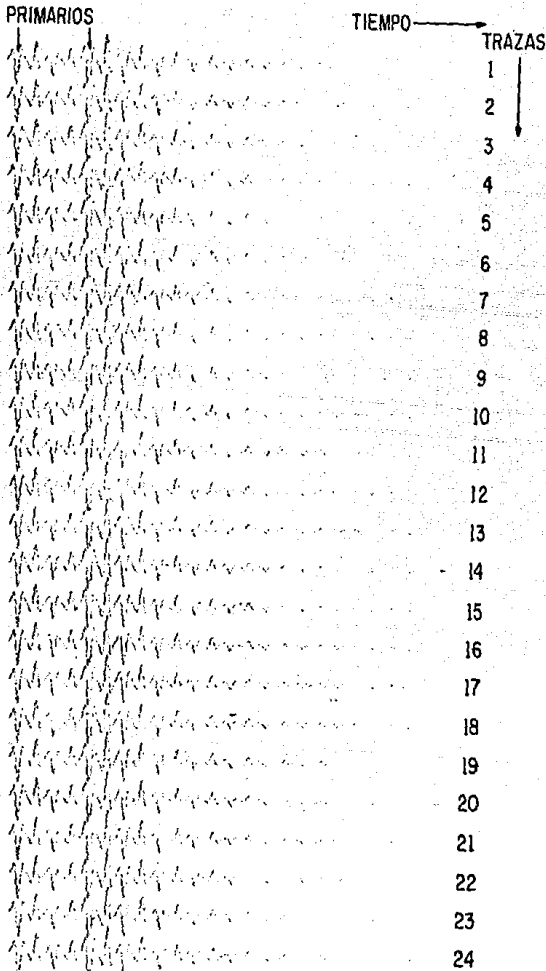


FIG. 5.8).- MODELO 3, SISMOGRAMA SINTETICO PARA DOS CAPAS REFLECTORAS CON TREN DE REVERBERACIONES.

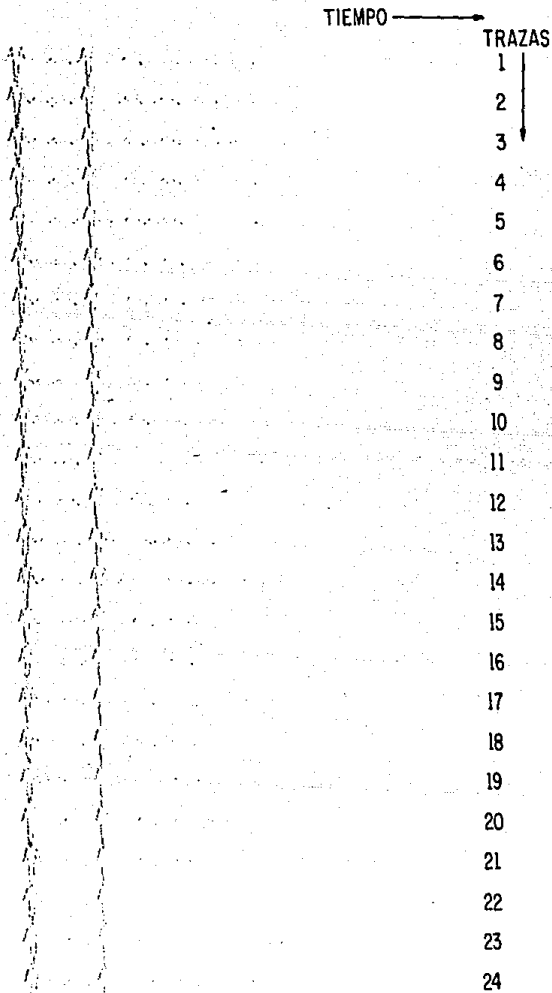


FIG. 5.9).- MODELO 3, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON ALGORITMO DE HESTENES.

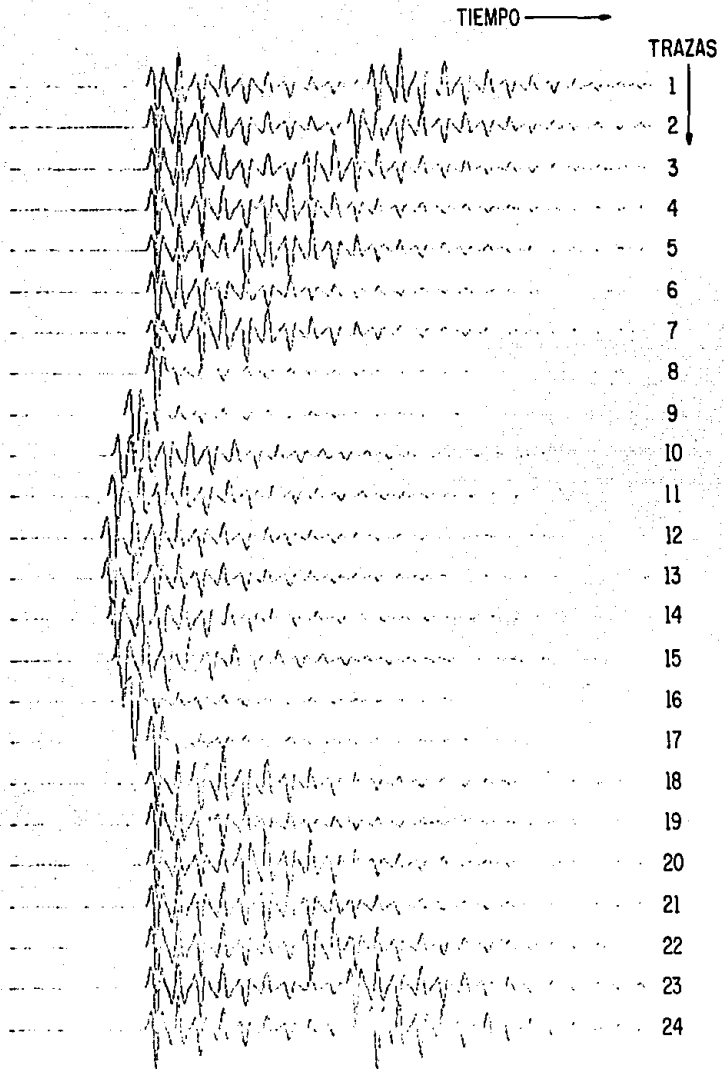


FIG. 5.10).- MODELO 4, SISMOGRAMA SINTETICO PARA UN ANTICLINAL SIMPLE CON EFECTO DE REVERBERACIONES MULTIPLES.

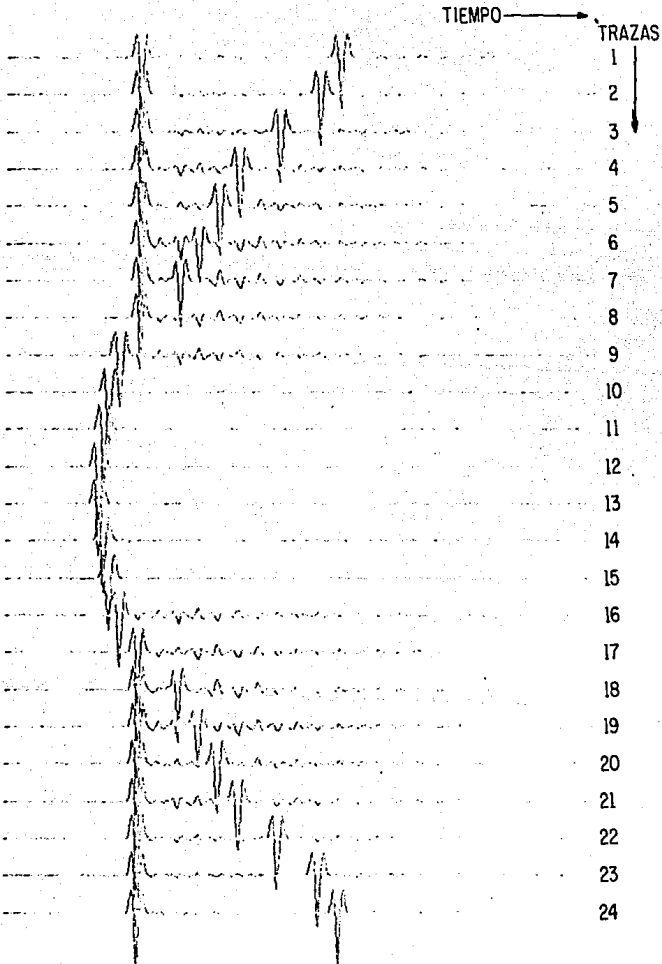


FIG. 5.11).- MODELO 4, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON ALGORITMO DE HESTENES.

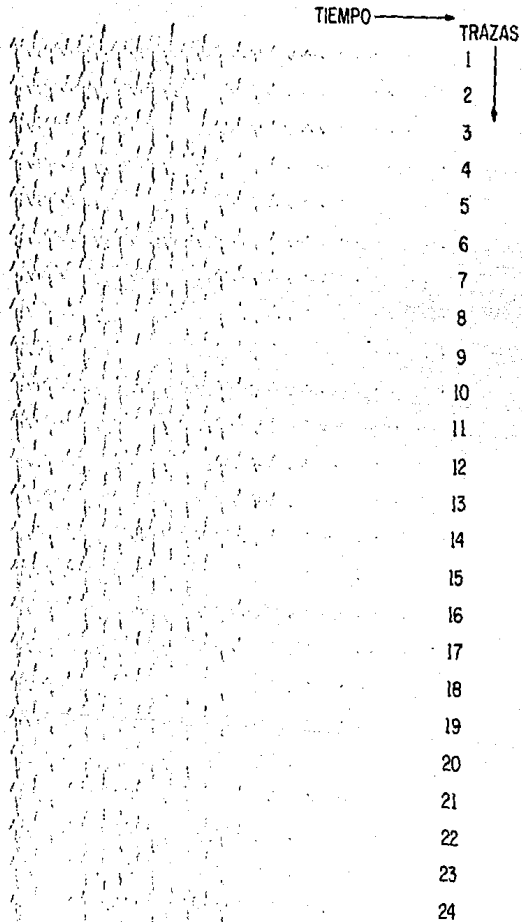


FIG. 5.12).— MODELO 5, SISMOGRAMA SINTETICO FORMADO POR TRES CAPAS DE REFLEXION Y RUIDO COHERENTE.

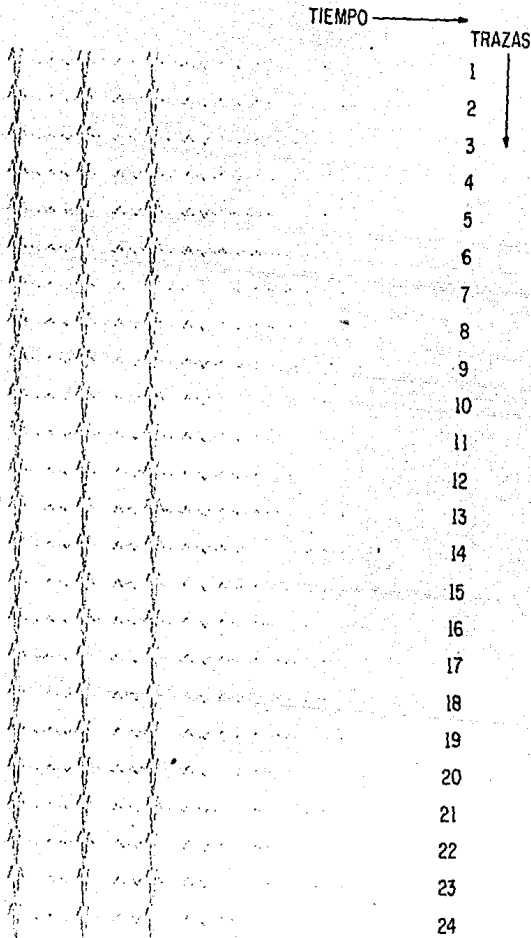


FIG. 5.13).- MODELO 5, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON ALGORITMO DE HESTENES.

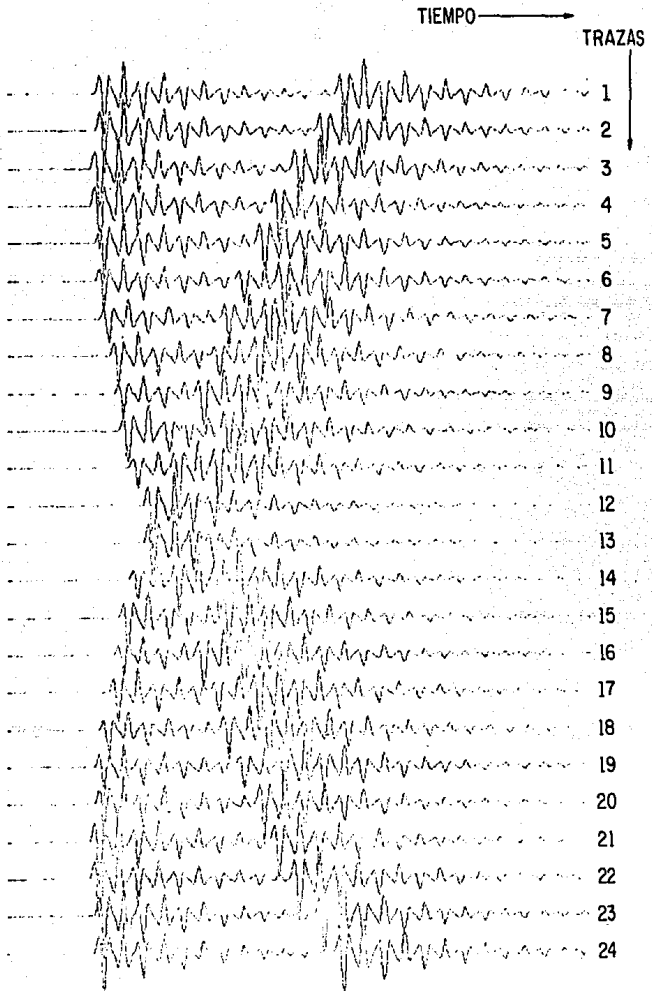


FIG.5.14).- MODELO 6, SINCLINAL CON TRES EVENTOS SISMICOS; DOS REFLEXIONES EN LOS FLANCOS Y DIFRACCION EN EL FONDO; MAS REVERBERACIONES.

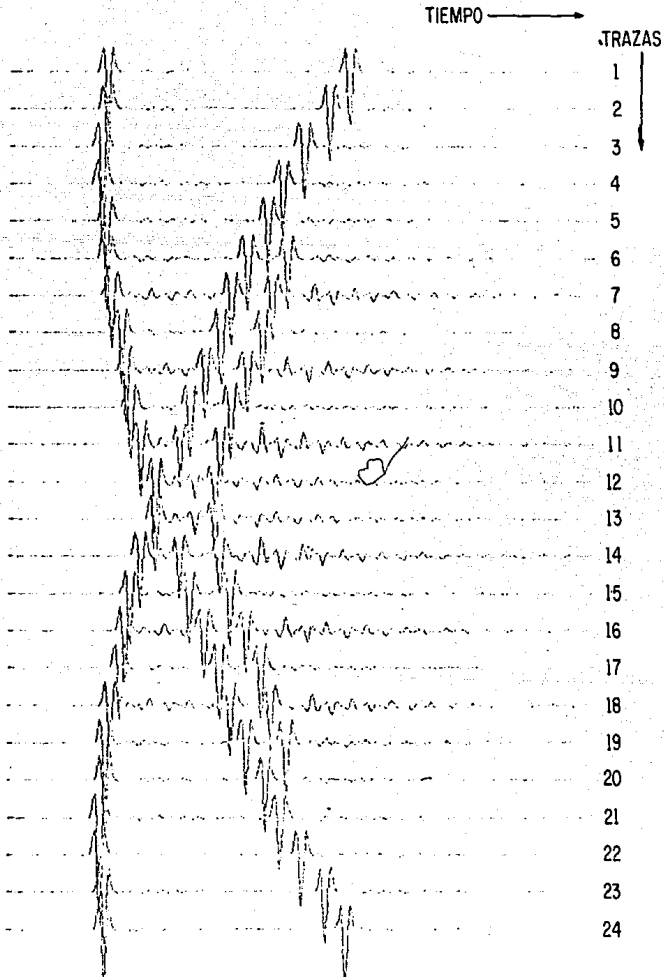


FIG. 5.15).- MODELO 6, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON ALGORITMO DE HESTENES.



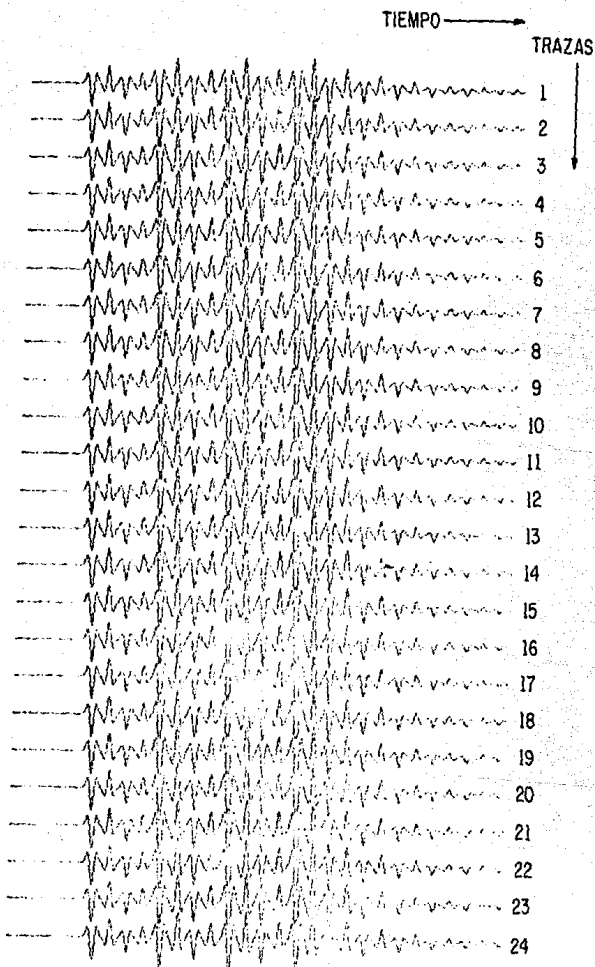


FIG. 5.16).— MODELO 7, SISMOGRAMA SINTETICO PARA CUATRO CAPAS REFLECTORAS MAS RUIDO REVERBERATORIO.

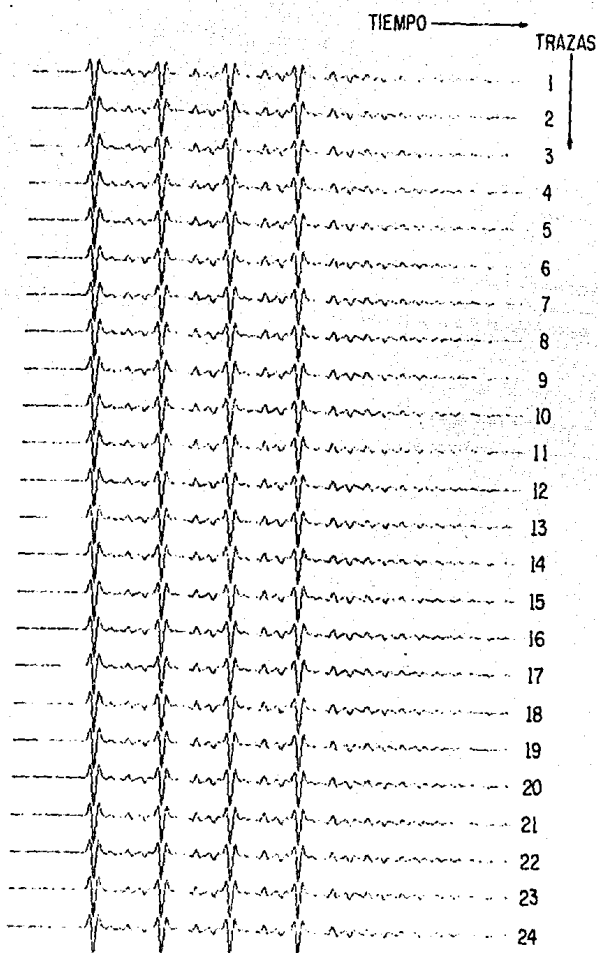


FIG. 5.17).- MODELO 7, RESULTADO DE APLICAR FILTRO CON ALGORITMO DE HESTENES, NOTESE RUIDO REMANENTE.

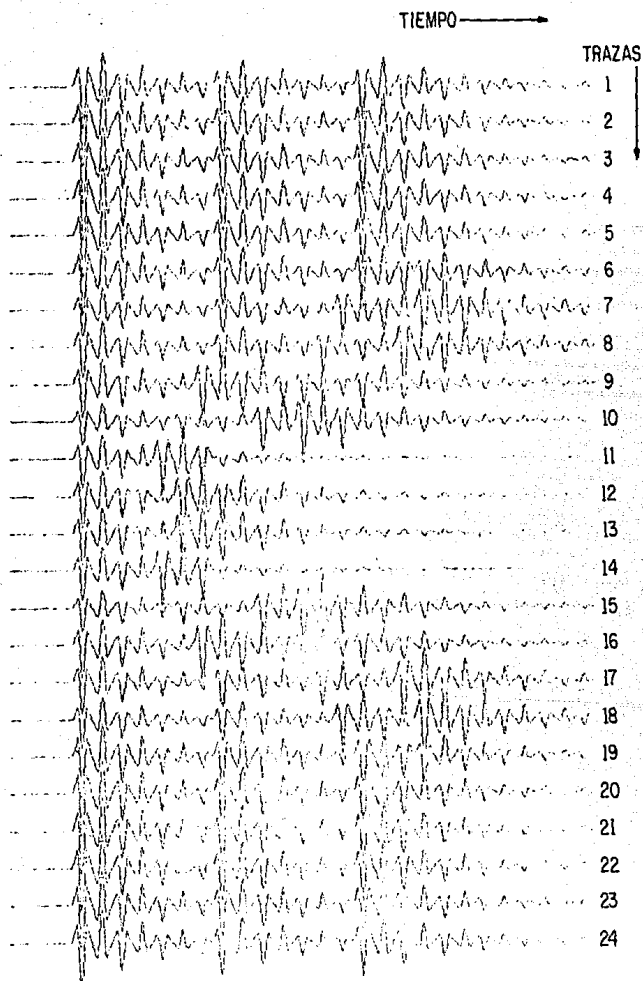


FIG. 5.18).- MODELO 8, SISMOGRAMA SINTETICO PARA UN DOMO SALINO ENMASCARADO CON RUIDO COHERENTE.

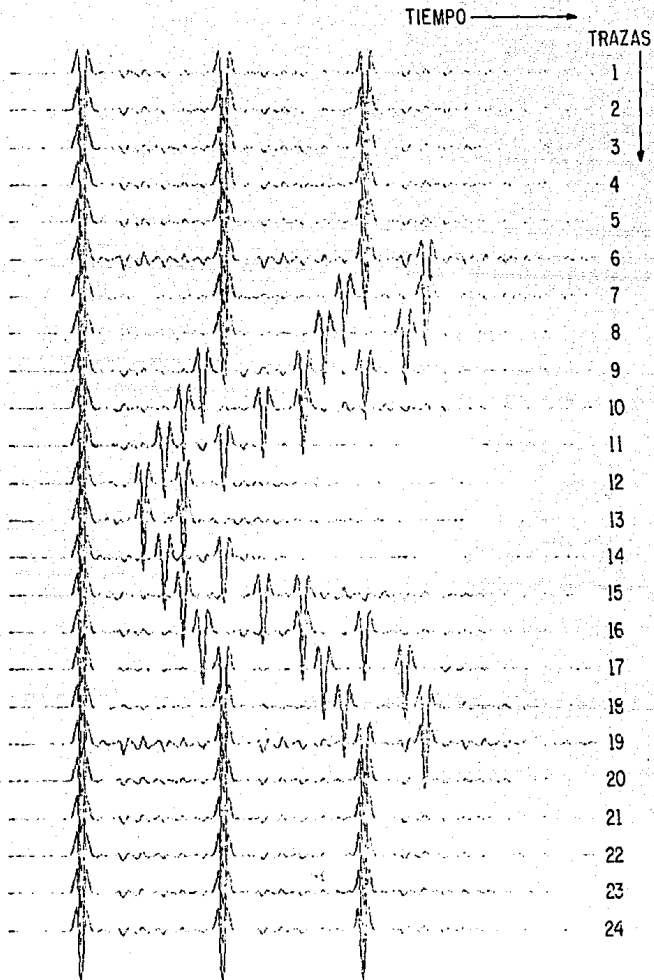


FIG. 5.19).- MODELO 8, RESULTADO DE APLICAR EL OPERADOR PREDICTIVO DE ERROR CON EL ALGORITMO DE HESTENES.

C A P I T U L O V I  
C O N C L U S I O N E S

La aplicación de los filtros digitales constituye un método muy eficiente en la detección de la información que viene contaminada con ruido y que por tanto, deforma a la señal de interés.

La información sísmológica tiene una naturaleza muy compleja; cabe aclarar que en este trabajo se emplearon modelos teóricos mediante trazas sísmicas sintéticas, con el objeto de mostrar únicamente la aplicación de los métodos expuestos.

Los filtros inversos de mínimos cuadrados son de gran aplicación en la deconvolución normal de sismogramas y en la deconvolución predictiva de energía coherente, como las reverberaciones en sismología marina.

El problema más fuerte que se presenta en el diseño de filtros óptimos es la obtención de sus coeficientes, mediante la solución del sistema de ecuaciones.

El algoritmo de Levinson, como un método convencional para la obtención de los coeficientes del filtro, encuentra la solución exacta del sistema de orden  $N$ , pero en cada iteración calcula un coeficiente, de tal forma que se

requieren  $N$  iteraciones y esto aumenta el tiempo de cálculo para cada traza sísmica.

La solución de dicho sistema se simplifica considerablemente al hacer uso de las propiedades de la matriz de autocorrelación, que tiene estructura Toeplitz; además de considerar que para fines prácticos es suficiente con un método aproximado pero que reduzca el costo del procesamiento.

Los métodos de aproximación estocástica se basan en la disminución progresiva de una función de error, ocasionada por la diferencia entre el valor verdadero y un vector inicial, como primer aproximante a la solución del sistema, lo que nos permite escoger dicho vector inicial con el criterio adecuado en sustitución del vector nulo; razón por la que disminuye considerablemente el número de iteraciones y por tanto el tiempo de cálculo.

La ventaja del algoritmo de Hestenes sobre el algoritmo de Levinson radica básicamente en la estructura matemática, la cual es puramente matricial, que nos permite escoger los vectores de direccionamiento como un conjunto de vectores ortogonales, en donde uno de ellos se genera y almacena para usarse en cada iteración, lo que nos permite hacer una programación más eficiente.

Es recomendable que se implemente este algoritmo en un sistema computacional que tenga un procesador de arreglos en punto flotante, ya que de esta

forma puede apreciarse realmente la ventaja de este método.

Se generaron 8 modelos geológicos sintéticos mediante 24 trazas cada uno, en todos ellos se utilizó el algoritmo de Levinson para la primera traza, el vector resultante se utilizó como aproximante para la segunda traza, y así sucesivamente hasta terminar, si observamos los resultados correspondientes notaremos en la mayoría de los casos que se requiere de una sola iteración para alcanzar el error mínimo establecido de la segunda traza a la última, no así si se partiera de un vector nulo para cada traza, pues requerimos de un promedio de 15 iteraciones para un operador predictivo de 25 puntos.

El operador predictivo es una poderosa herramienta para deconvolucionar trazas sísmicas, pero un buen filtrado dependerá del cuidado que se tenga para seleccionar las distancias predictivas.

La función de autocorrelación es una magnífica herramienta para el análisis de reverberaciones, dado que por experiencia se ha establecido el segundo cruce con cero para determinar la distancia de predicción  $\infty$ .

En lo que se refiere a la longitud del operador, debe tomarse muy en cuenta el tiempo de cálculo para definirlo, sobre todo si se usa el operador predictivo en toda una sección sísmológica.

En el filtrado de Wiener "variable con el tiempo", normalmente se usan empíricamente ciertas longitudes de ventana en donde se aplican filtros invariables con el tiempo, dado que se considera a la información sísmológica como procesos estocásticos estacionarios.

Para procesos no estacionarios, las funciones de correlación varían con el tiempo de observación y por tanto ya no es aplicable la ecuación de Wiener-Hopf de primera clase; se utiliza entonces la integral de Booton y se hace la aproximación de un proceso no estacionario mediante procesos ergódicos.

Se determina la longitud óptima de ventana mediante el método de Berndt-Cooper, para el cual el error cuadrático medio en el filtrado de Wiener es pequeño.

Se generan varias trazas sísmicas sintéticas cambiando el nivel de ruido (observar las Figs. 4.4 a 4.8); siempre se obtiene la longitud óptima en 60 mseg, excepto cuando la relación S/N es muy baja, como en la Fig. 4.8 pues hay inestabilidad en el método.

Hay que mencionar que el método se deriva de un proceso Gaussiano y las trazas sísmicas reales no son precisamente de estas características; sin embargo, es recomendable que se estudien las ventajas desde el punto de vista



práctico, para implementar este método a un paquete de programas de procesamiento sísmológico.

Finalmente, estos dos criterios de optimización pueden utilizarse juntos en la deconvolución predictiva, al dividir la primera traza sísmica en ventanas de longitud óptima, en la primera ventana podría utilizarse el algoritmo de Levinson para encontrar el operador de predicción, el cual serviría como vector inicial aproximante para la segunda ventana pero ahora con el algoritmo de Hestenes y en forma iterativa aplicar de esta manera el algoritmo de convergencia hasta terminar la primera traza y repetir el proceso para -- las trazas restantes del sismograma considerado como un ensamble de funciones aleatorias.

## APENDICE I

- 1).- EJEMPLO NUMERICO PARA UN SISTEMA DE ORDEN 3 (comparación de los métodos Levinson y Hestenes).

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

METODO DE LEVINSON.

De acuerdo a (3.1) los datos que almacenaremos son:  $\{2, 3, 1\}$ .

y  $\{1, 2, 3\}$  y las condiciones iniciales según (3.2):

$$a_{00} = 1, \quad \alpha_0 = 2, \quad \beta_0 = 3, \quad f_{00} = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{3}{2}.$$

Aplicando el Método Recursivo (3.3) 2 veces, tenemos:

para  $n=0$

$$k_0 = \frac{-\beta_0}{\alpha_0} = -\frac{3}{2}$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + k_0 \beta_0 = -\frac{5}{2}$$

$$a_{10} = a_{00} = 1$$

$$a_{11} = a_{01} + k_0 a_{00} = -\frac{3}{2}$$

$$\beta_1 = a_{10} \phi_{bb}(2) + a_{11} \phi_{bb}(1) = -\frac{7}{2}$$

$$q_0 = [\phi_{db}(1) - \gamma_0] / \alpha_1 = -\frac{1}{5}$$

$$f_{10} = f_{00} + q_0 a_{11} = \frac{4}{5}$$

$$f_{11} = f_{01} + q_0 a_{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\gamma_1 = f_{10} \phi_{bb}(2) + f_{11} \phi_{bb}(1) = -\frac{1}{5}$$

para  $n=1$

$$k_1 = \frac{-\beta_1}{\alpha_1} = \frac{-7}{5} \quad \alpha_2 = \alpha_1 + k_1 \beta_1 = \frac{12}{5}$$

$$a_{20} = a_{10} = 1 \quad a_{21} = a_{11} + k_1 a_{10} = \frac{3}{5}$$

$$a_{22} = \cancel{a_{12}} + k_1 a_{10} = \frac{-7}{5}$$

$$\beta_2 = a_{20} \cancel{\theta_{bb}(3)} + a_{21} \theta_{bb}(2) + a_{22} \theta_{bb}(1) = \frac{-18}{5}$$

$$q_1 = [\theta_{db}(2) - \gamma_1] / \alpha_2 = \frac{7}{6}$$

$$f_{20} = f_{10} + q_1 a_{22} = \frac{-5}{6}$$

$$f_{21} = f_{11} + q_1 a_{21} = \frac{1}{2}$$

$$f_{22} = \cancel{f_{12}} + q_1 a_{20} = \frac{7}{6}$$

$$\gamma_2 = f_{20} \theta_{bb}(3) + f_{21} \theta_{bb}(2) + f_{22} \theta_{bb}(1) = 4$$

De aquí que los coeficientes, son:

$$\left\{ \frac{-5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6} \right\}$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-5}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Observamos que para  $[{}^3A]$  se necesitan las condiciones iniciales y 2

iteraciones para llegar al valor exacto de los coeficientes del filtro.

METODO DE HESTENES.

Las condiciones iniciales según el Algoritmo de Hestenes son:

$$a_{-1} = 1 \quad {}^3p_{-1} = \emptyset \quad {}^3x_0 = \emptyset$$

$${}^3\gamma_0 = {}^3c - [{}^3A] {}^3x_0 = {}^3c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando el Sist. (3.57) en el orden indicado  $m=n=3$  veces tenemos para  $l=0$

$$\gamma_0 = ({}^3\gamma_0^T \underline{{}^3\gamma_0})^{1/2} = 3.74$$

$$a_0 = \gamma_0 \underline{{}^3\gamma_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] = 14$$

$$b_{-1} = a_0 / a_{-1} = \frac{14}{1} = 14$$

$${}^3p_0 = \gamma_0 \underline{{}^3\gamma_0} + b_{-1} {}^3p_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 14 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$${}^3q_0 = [{}^3A] {}^3p_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$d_0 = \underline{{}^3p_0}^T {}^3q_0 = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix} = 82$$

$$k_0 = \frac{a_0}{d_0} = \frac{14}{82} = \frac{7}{41}$$

$${}^3x_1 = {}^3x_0 + \frac{7}{41} {}^3p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{7}{41} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.34 \\ 0.51 \end{bmatrix} \quad (\text{1er. aproximante})$$

$${}^3y_1 = {}^3y_0 - k_0 {}^3q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{7}{41} \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.73 \\ 0.78 \end{bmatrix}$$

para  $i=1$

$$\gamma_1 = ({}^3y_1 \cdot {}^3y_1)^{1/2} = 1.38$$

$$a_1 = {}^3y_1 \cdot {}^3y_1 = \begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.73 \\ 0.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.88 & -0.73 & 0.78 \end{bmatrix} = 1.92$$

$$b_0 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{1.92}{14} = 0.14$$

$${}^3p_1 = {}^3y_1 + b_0 {}^3p_0 = \begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.73 \\ 0.78 \end{bmatrix} + 0.14 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.74 \\ -0.45 \\ 1.20 \end{bmatrix}$$

$${}^3q_1 = [{}^3A] {}^3p_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.74 \\ -0.45 \\ 1.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.63 \\ 0.48 \\ 0.31 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = {}^3p_1 \cdot {}^3q_1 = \begin{bmatrix} -0.74 & -0.45 & 1.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.63 \\ 0.48 \\ 0.31 \end{bmatrix} = 1.36$$

$$k_1 = \frac{a_1}{d_1} = \frac{1.92}{1.36} = 1.41$$

$${}^3x_2 = {}^3x_1 + k_1 {}^3p_1 = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.34 \\ 0.51 \end{bmatrix} + 1.41 \begin{bmatrix} -0.74 \\ -0.45 \\ 1.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.87 \\ -0.29 \\ 2.20 \end{bmatrix} \quad (\text{2o. aproximante})$$

$${}^3y_2 = {}^3y_1 - k_1 {}^3q_1 = \begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.73 \\ 0.78 \end{bmatrix} - 1.41 \begin{bmatrix} -1.63 \\ 0.48 \\ 0.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.42 \\ -1.41 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

para  $i=2$ 

$$\gamma_2 = ({}^3\gamma_2 \downarrow {}^3\gamma_2)^{1/2} = 2.03$$

$$a_2 = {}^3\gamma_2 \downarrow {}^3\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1.42 \\ -1.41 \\ 0.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.42 & -1.41 & 0.34 \end{bmatrix} = 4.12$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4.12}{1.92} = 2.15$$

$${}^3p_2 \downarrow = {}^3\gamma_2 \downarrow + b_1 {}^3p_1 \downarrow = \begin{bmatrix} 1.42 \\ -1.41 \\ 0.34 \end{bmatrix} + 2.15 \begin{bmatrix} -0.74 \\ -0.45 \\ 1.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -2.38 \\ 2.92 \end{bmatrix}$$

$${}^3q_2 \downarrow = [{}^3A] {}^3p_2 \downarrow = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.17 \\ -2.38 \\ 2.92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.56 \\ 3.49 \\ -1.47 \end{bmatrix}$$

$$d_2 = {}^3p_2 \downarrow {}^3q_2 \downarrow = \begin{bmatrix} -0.17 & -2.38 & 2.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.56 \\ 3.49 \\ -1.47 \end{bmatrix} = -11.82$$

$$k_2 = \frac{a_2}{d_2} = \frac{4.12}{-11.82} = -0.35$$

$${}^3x_3 \downarrow = {}^3x_2 \downarrow + k_2 {}^3p_2 \downarrow = \begin{bmatrix} -0.87 \\ -0.29 \\ 2.20 \end{bmatrix} - 0.35 \begin{bmatrix} -0.17 \\ -2.38 \\ 2.92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.81 \\ 0.54 \\ 1.18 \end{bmatrix} \quad (\text{3er. aproximante})$$

$${}^3\gamma_3 \downarrow = {}^3\gamma_2 \downarrow - k_2 {}^3q_2 \downarrow = \begin{bmatrix} 1.42 \\ -1.41 \\ 0.34 \end{bmatrix} + 0.35 \begin{bmatrix} -4.56 \\ 3.49 \\ -1.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 \\ -0.19 \\ -0.17 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = ({}^3\gamma_3 \downarrow {}^3\gamma_3)^{1/2} = 0.3$$

De esta manera se obtienen los coeficientes del filtro  $(f_0, f_1, f_2)$

encontrando que  ${}^3x_3 \approx {}^3f_1$  en  $m=n=3$  iteraciones ya que de acuerdo al Método de Levinson:

$$\begin{bmatrix} -0.81 \\ 0.54 \\ 1.18 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -5/6 \\ 1/2 \\ 7/6 \end{bmatrix}$$

(1).- EJEMPLO NUMERICO PARA UN SISTEMA DE ORDEN 5 (comparación de los métodos Levinson, Hestenes y Forsythe-Wasovi).

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline f_0 \\ \hline f_1 \\ \hline f_2 \\ \hline f_3 \\ \hline f_4 \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline 18 \\ \hline 12 \\ \hline 8 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

METODO DE LEVINSON.

Condiciones iniciales (según 3.2):  $a_{00}=1$   $\alpha_0 = \varnothing_{bb}(0) = 4$

$$\beta_0 = \varnothing_{bb}(1) = 3 \quad f_{00} = \frac{\varnothing_{bb}(0)}{\varnothing_{bb}(0)} = \frac{20}{4} = 5 \quad \gamma_0 = f_{00} \varnothing_{bb}(1) = 15$$

para  $n=0$

$$k_0 = \frac{-\beta_0}{\alpha_0} = \frac{-3}{4} \quad \alpha_1 = \alpha_0 + k_0 \beta_0 = \frac{7}{4}$$

$$a_{10} = a_{00} = 1 \quad a_{11} = a_{01} + k_0 a_{00} = \frac{-3}{4}$$

$$\beta_1 = a_{10} \varnothing_{bb}(2) + a_{11} \varnothing_{bb}(1) = \frac{-1}{4} \quad q_0 = \frac{[\varnothing_{bb}(1) - \gamma_0]}{\alpha_1} = \frac{12}{7}$$

$$f_{10} = f_{00} + q_0 a_{11} = \frac{26}{7} \quad f_{11} = f_{01} + q_0 a_{10} = \frac{12}{7}$$

$$\gamma_1 = f_{10} \varnothing_{bb}(2) + f_{11} \varnothing_{bb}(1) = \frac{88}{7}$$

para  $n=1$

$$k_1 = \frac{-\beta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{7} \quad \alpha_2 = \alpha_1 + k_1 \beta_1 = \frac{12}{7}$$

$$a_{20} = a_{10} = 1 \quad a_{21} = a_{11} + k_1 a_{11} = \frac{-6}{7} \quad a_{22} = a_{12} + k_1 a_{10} = \frac{1}{7}$$



$$f_2 = a_{20} \theta_{bb}(3) + a_{21} \theta_{bb}(2) + a_{22} \theta_{bb}(1) = -\frac{2}{7} \quad q_1 = \frac{[\theta_{bb}(2) - f_1]}{\alpha_2} = -\frac{1}{3}$$

$$f_{20} = f_{10} + q_1 a_{22} = \frac{11}{3} \quad f_{21} = f_{11} + q_1 a_{21} = 2 \quad f_{22} = \cancel{f_{12}} + q_1 a_{20} = \frac{1}{3}$$

$$f_2' = f_{20} \theta_{bb}(3) + f_{21} \theta_{bb}(2) + f_{22} \theta_{bb}(1) = \frac{20}{3}$$

para  $n=2$

$$k_2 = \frac{-\beta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{6} \quad \alpha_3 = \alpha_2 + k_2 \beta_2 = \frac{5}{3}$$

$$a_{30} = a_{20} = 1 \quad a_{31} = a_{21} + k_2 a_{22} = -\frac{5}{6} \quad a_{32} = a_{22} + k_2 a_{21} = 0 \quad a_{33} = k_2 a_{20} = \frac{1}{6}$$

$$f_3 = a_{30} \theta_{bb}(4) + a_{31} \theta_{bb}(3) + a_{32} \theta_{bb}(2) + a_{33} \theta_{bb}(1) = -\frac{1}{3}$$

$$q_2 = \frac{[\theta_{bb}(3) - f_2']}{\alpha_3} = \frac{4}{5} \quad f_{30} = f_{20} + q_2 a_{33} = 3.8$$

$$f_{31} = f_{21} + q_2 a_{32} = 2 \quad f_{32} = f_{22} + q_2 a_{31} = -1 \quad f_{33} = \cancel{f_{23}} + q_2 a_{30} = 0.8$$

para  $n=3$

$$k_3 = \frac{-\beta_3}{\alpha_3} = \frac{1}{5} \quad f_3' = f_{30} \theta_{bb}(4) + f_{31} \theta_{bb}(3) + f_{32} \theta_{bb}(2) + f_{33} \theta_{bb}(1) = \frac{12}{5}$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + k_3 \beta_3 = \frac{8}{5} \quad a_{40} = a_{30} = 1 \quad a_{41} = a_{31} + k_3 a_{33} = -0.8$$

$$a_{42} = a_{32} + k_3 a_{32} = 0 \quad a_{43} = a_{33} + k_3 a_{31} = 0 \quad a_{44} = k_3 a_{30} = \frac{1}{5}$$

$$\beta_4 = a_{40} \theta_{bb}(5) + a_{41} \theta_{bb}(4) + a_{42} \theta_{bb}(3) + a_{43} \theta_{bb}(2) + a_{44} \theta_{bb}(1) = \frac{3}{5}$$

$$q_3 = \frac{[\theta_{bb}(4) - f_3']}{\alpha_4} = 1 \quad f_{40} = f_{30} + q_3 a_{44} = 4$$

$$f_{41} = f_{31} + q_3 a_{43} = 2 \quad f_{42} = f_{32} + q_3 a_{42} = -1$$

$$f_{43} = f_{33} + q_3 a_{41} = 0 \quad f_{44} = \cancel{f_{34}} + q_3 a_{40} = 1$$

METODO DE HESTENES.Condiciones Iniciales:

$a_{-1} = 1$

${}^5p_{-1} = \theta$

${}^5x_0 = \theta$

$${}^5\gamma_0 = {}^5c_1 - [{}^5A] {}^5x_0 = {}^5c_1$$

para  $i=0$ 

$$(ECN)_0 = \frac{(-{}^5f_1)(-{}^5f_1)}{{}^5f_1 {}^5f_1} = 1 \quad \text{ya que } \underline{{}^5f} = [4 \ 2 \ -1 \ 0 \ 1]$$

$a_0 = {}^5\gamma_0 / \underline{{}^5\gamma}_0 = 948$

$b_{-1} = \frac{a_0}{a_{-1}} = 948$

$${}^5p_0 = {}^5\gamma_0 + b_{-1} {}^5p_{-1} = {}^5c_1 \quad {}^5q_0 = [{}^5A] {}^5p_0 = \begin{bmatrix} 166 \\ 188 \\ 174 \\ 136 \\ 82 \end{bmatrix}$$

$d_0 = \underline{{}^5p}_0 {}^5q_0 = 10208$

$k_0 = \frac{a_0}{d_0} = 0.09$

$${}^5x_1 = {}^5x_0 + k_0 {}^5p_0 = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 1.67 \\ 1.08 \\ 0.72 \\ 0.36 \end{bmatrix} \quad {}^5\gamma_1 = {}^5\gamma_0 - k_0 {}^5q_0 = \begin{bmatrix} 5.06 \\ 1.08 \\ -3.66 \\ -4.24 \\ -3.38 \end{bmatrix}$$

para  $i=1$ 

$$(ECN)_1 = \frac{({}^5x_1 - {}^5f_1)^T ({}^5x_1 - {}^5f_1)}{{}^5f_1 {}^5f_1} = 0.45$$

$a_1 = {}^5\gamma_1 / \underline{{}^5\gamma}_1 = 69.57$

$b_0 = \frac{a_1}{a_0} = 0.07$

$${}^5p_1 = {}^5\gamma_1 + b_0 {}^5p_0 = \begin{bmatrix} 6.46 \\ 2.34 \\ -2.82 \\ -3.68 \\ -3.10 \end{bmatrix} \quad {}^5q_1 = [{}^5A] {}^5p_1 = \begin{bmatrix} 23.54 \\ 9.82 \\ -8.58 \\ -21.34 \\ -26.74 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = {}^5p_1 {}^5q_1 = 360.67$$

$$k_1 = \frac{a_1}{d_1} = 0.19$$

$${}^5x_2 = {}^5x_1 + k_1 {}^5p_1 = \begin{bmatrix} 3.09 \\ 2.11 \\ 0.54 \\ 0.02 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

$${}^5y_2 = {}^5y_1 - k_1 {}^5q_1 = \begin{bmatrix} 0.59 \\ -0.79 \\ -2.03 \\ -0.19 \\ 1.70 \end{bmatrix}$$

para  $i=2$

$$(ECN)_2 = \frac{({}^5x_2 - {}^5f) \cdot ({}^5x_2 - {}^5f)}{{}^5f \cdot {}^5f} = 0.22$$

$$a_2 = {}^5y_2 \cdot {}^5y_2 = 8.02$$

$$b_1 = \frac{a_2}{d_1} = 0.12$$

$${}^5p_2 = {}^5y_2 + b_1 {}^5p_1 = \begin{bmatrix} 1.37 \\ -0.51 \\ -2.37 \\ -0.63 \\ 1.33 \end{bmatrix}$$

$${}^5q_2 = [{}^5A] {}^5p_2 = \begin{bmatrix} -1.42 \\ -4.97 \\ -7.50 \\ -5.29 \\ -1.82 \end{bmatrix}$$

$$d_2 = {}^5p_2 \cdot {}^5q_2 = 19.28$$

$$k_2 = \frac{a_2}{d_2} = 0.42$$

$${}^5x_3 = {}^5x_2 + k_2 {}^5p_2 = \begin{bmatrix} 3.67 \\ 1.90 \\ -0.45 \\ -0.24 \\ 0.32 \end{bmatrix}$$

$${}^5y_3 = {}^5y_2 - k_2 {}^5q_2 = \begin{bmatrix} 1.19 \\ 1.30 \\ 1.12 \\ 2.03 \\ 2.46 \end{bmatrix}$$

para  $i=3$

$$(ECN)_3 = \frac{({}^5x_3 - {}^5f) \cdot ({}^5x_3 - {}^5f)}{{}^5f \cdot {}^5f} = 0.04$$

$$a_3 = {}^5y_3 \cdot {}^5y_3 = 14.53$$

$$b_2 = \frac{a_3}{d_2} = 1.81$$

$${}^5p_3 = {}^5y_3 + b_2 {}^5p_2 = \begin{bmatrix} 3.67 \\ 0.38 \\ -3.17 \\ 0.89 \\ 4.87 \end{bmatrix}$$

$${}^5q_3 = [{}^5A] {}^5p_3 = \begin{bmatrix} 10.37 \\ 9.67 \\ 8.71 \\ 13.09 \\ 16.19 \end{bmatrix}$$

A11

$$d_3 = {}^5p_3 {}^5q_3 = 106.2$$

$$k_3 = \frac{a_3}{d_3} = 0.14$$

$${}^5x_4 = {}^5x_3 + k_3 {}^5p_3 = \begin{bmatrix} 4.18 \\ 1.95 \\ -0.89 \\ -0.12 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$${}^5y_4 = {}^5y_3 - k_3 {}^5q_3 = \begin{bmatrix} -0.76 \\ -0.05 \\ -0.03 \\ 0.20 \\ 0.19 \end{bmatrix}$$

para  $i = 4$

$$(ECN)_4 = \frac{({}^5x_4 - {}^5f) \cdot ({}^5x_4 - {}^5f)}{{}^5f} = 0.003$$

$$a_4 = {}^5y_4 \cdot {}^5y_4 = 0.15$$

$$b_3 = \frac{a_4}{d_3} = 0.01$$

$${}^5p_4 = {}^5y_4 + b_3 {}^5p_3 = \begin{bmatrix} -0.22 \\ -0.05 \\ -0.06 \\ 0.21 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

$${}^5q_4 = [{}^5A] {}^5p_4 = \begin{bmatrix} -0.94 \\ -0.38 \\ 0.28 \\ 1.06 \\ 1.42 \end{bmatrix}$$

$$d_4 = {}^5p_4 {}^5q_4 = 0.77$$

$$k_4 = \frac{a_4}{d_4} = 0.19$$

$${}^5x_5 = {}^5x_4 + k_4 {}^5p_4 = \begin{bmatrix} 4.10 \\ 1.98 \\ -0.96 \\ -0.03 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$${}^5y_5 = {}^5y_4 - k_4 {}^5q_4 = \begin{bmatrix} -0.06 \\ 0.01 \\ -0.06 \\ 0.00 \\ -0.06 \end{bmatrix}$$

Observamos que  ${}^5x_5 \approx {}^5f$        $(ECN)_5 = 0.001$

Es muy importante que se observe la secuencia de los  $(ECN)_i$ , la cual es:

$$(1, 0.45, 0.22, 0.04, 0.003, 0.001)$$

METODO DE FORSYTE & WASOW.

De acuerdo al Algoritmo representado por las Ecuaciones (3.25), tenemos:

Condiciones Iniciales:

$${}^5q_0^t = {}^5c^t - [{}^5A] {}^5x_0^t = {}^5c^t \quad (ECN)_0 = 1$$

para  $i=1$

$${}^5q_0^t = [{}^5A] {}^5q_0^t = \begin{bmatrix} 166 \\ 188 \\ 174 \\ 136 \\ 82 \end{bmatrix} \quad \lambda_0 = \frac{{}^5\gamma_0^t {}^5q_0^t}{{}^5\gamma_0^t {}^5q_0^t} = 0.09$$

$${}^5x_1^t = {}^5x_0^t + \lambda_0 {}^5q_0^t = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 1.67 \\ 1.08 \\ 0.72 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

para  $i=2$

$${}^5q_1^t = {}^5q_0^t - \lambda_0 {}^5q_0^t = \begin{bmatrix} 5.06 \\ 1.08 \\ -3.66 \\ -4.24 \\ -3.38 \end{bmatrix} \quad (ECN)_1 = 0.45$$

$${}^5q_1^t = [{}^5A] {}^5q_1^t = \begin{bmatrix} 11.92 \\ -3.34 \\ -20.76 \\ -30.86 \\ -32.48 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{{}^5\gamma_1^t {}^5q_1^t}{{}^5\gamma_1^t {}^5q_1^t} = 0.19$$

$${}^5x_2t = {}^5x_1t + \lambda_1 {}^5\gamma_1t = \begin{bmatrix} 2.82 \\ 1.88 \\ 0.38 \\ -0.09 \\ -0.28 \end{bmatrix}$$

para  $i=3$

$$(\text{ECN})_2 = 0.23 \quad {}^5\gamma_2t = {}^5\gamma_1t - \lambda_1 {}^5q_1t = \begin{bmatrix} 2.80 \\ 1.71 \\ 0.28 \\ 1.62 \\ 2.79 \end{bmatrix}$$

$${}^5q_2t = [{}^5A] {}^5\gamma_2t = \begin{bmatrix} 18.51 \\ 22.11 \\ 22.29 \\ 21.91 \\ 18.29 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{{}^5\gamma_2t \cdot {}^5\gamma_2t}{\sum {}^5\gamma_2t \cdot {}^5q_2t} = 0.12$$

$${}^5x_3t = {}^5x_2t + \lambda_2 {}^5\gamma_2t = \begin{bmatrix} 3.16 \\ 2.09 \\ 0.41 \\ 0.10 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

para  $i=4$

$${}^5\gamma_3t = {}^5\gamma_2t - \lambda_2 {}^5q_2t = \begin{bmatrix} 0.58 \\ -0.94 \\ -2.39 \\ -1.01 \\ 0.60 \end{bmatrix}$$

$$(\text{ECN})_3 = 0.16$$

$${}^5q_3t = [{}^5A] {}^5\gamma_3t = \begin{bmatrix} -6.29 \\ -10.61 \\ -13.05 \\ -10.71 \\ -6.35 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{{}^5\gamma_3t \cdot {}^5\gamma_3t}{\sum {}^5\gamma_3t \cdot {}^5q_3t} = 0.19$$

$${}^5x_4t = {}^5x_3t + \lambda_3 {}^5\gamma_3t = \begin{bmatrix} 3.27 \\ 1.91 \\ -0.04 \\ -0.09 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

para  $l=5$

$${}^5\gamma_4 \downarrow = {}^5\gamma_3 \downarrow - \lambda_3 {}^5q_3 \downarrow = \begin{bmatrix} 1.78 \\ 1.08 \\ 0.09 \\ 1.02 \\ 1.81 \end{bmatrix} \quad (\text{ECN})_4 = 0.10$$

$${}^5q_4 \downarrow = [{}^5A] {}^5\gamma_4 \downarrow = \begin{bmatrix} 11.56 \\ 13.78 \\ 13.84 \\ 13.72 \\ 11.56 \end{bmatrix} \quad \lambda_4 = \frac{{}^5\gamma_4 \downarrow}{{}^5q_4 \downarrow} = 0.12$$

$${}^5x_5 \downarrow = {}^5x_4 \downarrow + \lambda_4 {}^5\gamma_4 \downarrow = \begin{bmatrix} 3.48 \\ 2.04 \\ -0.03 \\ 0.03 \\ 0.38 \end{bmatrix} \quad {}^5\gamma_5 \downarrow = {}^5\gamma_4 \downarrow - \lambda_4 {}^5q_4 \downarrow = \begin{bmatrix} 0.39 \\ -0.57 \\ -1.57 \\ -0.63 \\ 0.42 \end{bmatrix}$$

$$(\text{ECN})_5 = 0.07$$

Observar que con este Método el  $(\text{ECH})_4$  converge más lentamente a cero esto quiere decir que  ${}^5x_1 \downarrow$  tiene más error comparado con  ${}^5f \downarrow$

En este ejemplo observamos que el vector aproximante  ${}^5x_3 \downarrow$  del Método de Hestenes, tiene menos error (0.04) que el vector aproximante  ${}^5x_5 \downarrow$  del Método de Forsyte & Wasow (0.07)

En este caso, la secuencia de los  $(\text{ECH})_i$  es:

$$(1, 0.45, 0.23, 0.16, 0.10, 0.07)$$

Se puede demostrar matemáticamente que no se llega a la solución exacta

$${}^N x_1 \downarrow = {}^N f \downarrow \quad \text{en un número finito de pasos.}$$

SUBROUTINA QUE GENERA EL PULSO DE RICKER

```

001  SUBROUTINE RICKER(PULS,LPULS,PERI,DEL,FACT,EPS)
002  DIMENSION PULS(1),XPULS(200)
003  LPULS=(2.*PERI)/DEL + 1
004  DØ 51 I=1,LPULS
005  51  PULS(I)=0.
006  T=-DEL
007  X=0.8862269
008  LLW=(LPULS/2)+1
009  DØ 52 I=LLW,LPULS
010  T=T+DEL
011  Y=6.*(T/PERI)**2)
012  52  PULS(I)=X*(Y-0.5)*EXP(-Y)
013  KW=LLW-1
014  DØ 53 I=1,KW
015  J=LPULS-I+1
016  53  PULS(I)=PULS(J)
017  2  DØ 55 I=1,LPULS
018  55  SUM=SUM+PULS(I)
019  SUM=SUM/LPULS
020  DØ 56 I=1,LPULS
021  PULS(I)=PULS(I)-SUM
022  56  XPULS(I)=ABS(PULS(I))
023  PMA=XPULS(1)
024  DØ 57 I=2,LPULS
025  57  IF(XPULS(I).GT.PMA)PMA=XPULS(I)
026  DØ 58 I=1,LPULS
027  58  PULS(I)=PULS(I)/PMA
028  RETURN
029  END

```

SUBROUTINA PARA LA CONVOLUCION DE DOS FUNCIONES

```

001  SUBROUTINE RICK(A,LA,B,LB,C,LC)
002  DIMENSION A(1),B(1),C(1)
003  LC=LA+LB-1
004  LD=LA+1
005  DØ 7 N=1,LA
006  C(N)=0.
007  DØ 8 M=1,N
008  8  C(N)=C(N)+A(N-M+1)*B(M)
009  7  CONTINUE
010  DØ 9 N=LD,LC

```

(...)



(SUBROUTINA PARA LA CONVOLUCION DE DOS FUNCIONES...)

```

011      C(N)=0.
012      M1=N-LA+1
013      DØ 10 M=M1, N
014  10   C(N)=C(N)+A(N=M+1)*B(M)
015      9   CØNTINUE
016      RETURN
017      END

```

SUBROUTINA PARA GRAFICACION EN GOULD

```

001      SUBROUTINE DAGRAF(ARR, LAR, EXT X, EXT Y, IAXE, XNEF, YNEF, IECH, IØPM)
002      DIMENSION ARR(1), XCØNT(1000), M(20)
003      CALL PLØT(XNEF, YNEF, -3)
004      LY=LAR+1
005      LX=LAR+2
006      DØ 1 I=1, LAR
007  1    XCØNT(I)=1
008      IF(IØP.EQ.0) GØ TØ 4
009      DØ 6 I=1, LAR
010  6    XCØNT(I)=M(I)
011  4    IF(IECH.NE.1) GØ TØ 5
012      CALL SCALE(ARR, EXT X, LAR, 1)
013      CALL SCALE(XCØNT, EXT X, LAR, 1)
014      XAR1=ARR(LY)
015      XAR2=ARR(LX)
016      XCO1=XCØNT(LY)
017      XCO2=XCØNT(LX)
018      GØ TØ 3
019  5    ARR(LY)=XAR1
020      ARR(LX)=XAR2
021      XCØNT(LY)=XCO1
022      XCØNT(LX)=XCO2
023  3    IF(IAXE.NE.1) GØ T. 2
024      CALL AXIS(0., 0., ' ', -1, LAX, 0.0, XCØNT(LY), XCØNT(LX))
025      CALL AXIS(0., 0., ' ', EXT Y, 0., ARR(LY), ARR(LX))
026      CALL LINE(XCØNT, ARR, LAR, 1, 0, 0)
027      RETURN
028      END

```

Nota. Las subrutinas SCALE y AXIS están implementadas en el sistema.

(...)

SUBROUTINA PARA LA CORRELACION DE DOS FUNCIONES

```

001     SUBROUTINE AUCR(X1,N1,X2,N2,X3)
002     DIMENSION X1(1),X2(1),X3(1)
003     DØ 20 K=1,N1
004     S=0
005     J=0
006     DØ 10 I=K,N1
007     J=J+1
008     S=S+X1(I)*X2(J)
009     IF(J.GE.N2) GØ TØ 15
010 10   CØNTINUE
011 15   X2(K)=S
012 20   CØNTINUE
013     RETURN
014     END

```

SUBROUTINA PARA AUTOCORRELACION VARIABLE CON EL TIEMPO

```

001     SUBROUTINE RUDØL(F,N,A)
002     DIMENSION F(1),A(1)
003     N1=N/2 + 1
004     DØ 10 L=1,N
005     A(L)=F(1)
006     DØ 11 M=2,N1
007     TETA=6.2832*(L-1)*(M-1)/N
008 11   A(L)=A(L)+2.*F(M)*CØS(TETA)
009 10   A(L)=2.*A(L)/N
010     A(1)=A(1)/2
011     RETURN
012     END

```

SUBROUTINA QUE APLICA EL ALGORITMO DE LEVINSON

```

001     SUBROUTINE DECLEV(TRAZA,R,TRAZAF,N,NALFA,LZ)
002     DIMENSION TRAZA(999),R(1000),A(125,125),G(1000),C(125,125),
* F(125),TRAZAF(1000)
003     NN=N+1
004     DØ 22 I=1,NN
005 22   G(I)=R(1+NALFA)
006     R(I)=1.01*R(I)
007     C(1,1)=R(2)/R(1)
008     M=2
009 7   N4=M-1

```

(...)

(SUBROUTINA QUE APLICA EL ALGORITMO DE LEVINSON...)

```

010      SUM=0.
011      DØ 9 J=1,N4
012      JL=J+1
013      9  SUM=SUM+C(J,N4):R(J1)
014      NZ=M+1
015      SUM=-SUM+R(N2)
016      SUMM=0.
017      DØ 11 J=1,N4
018      N3=M-J+1
019      11 SUMM=SUMM+C(J,N4):R(N3)
020      SUMM=-SUMM+R(1)
021      C(1,M)=SUM/SUMM
022      DØ 8 K=2,M
023      K1=K-1
024      K2=M-K+1
025      8  C(K,M)=C(K1,N4)-C(1,M):C(K2,N4)
026      IF(M-N) 100,101,101
027      100 M=M+1
028      GØ TØ 7
029      101 CØNTINUE
030      A(1,1)=G(1)/R(1)
031      I=2
032      10  N5=I-1
033      SSUM=0.
034      DØ 12 N=1,N5
035      N6=I-N+1
036      12  SSUM=SSUM+A(N,N5):R(N6)
037      SSUM=-SSUM+G(I)
038      SSUMM=0.
039      DØ 16 L=1,N5
040      N7=I-L+1
041      16  SSUMM=SSUMM+C(L,N5):R(N7)
042      SSUMM=-SSUMM+R(1)
043      A(I,1)=SSUM/SSUMM
044      DØ 13 K=1,N5
045      13  A(K,1)=A(K,N5)-C(K,N5):A(I,1)
046      IF(I-NN)14,15,15
047      14  I=I+1
048      GØ TØ 10
049      15  CØNTINUE
050      WRITE(3,400)
051      WRITE(3,401) (K,NN,A(K,NN),K=1,NN)
052      F(1)=1.

```

(...)

(SUBROUTINA QUE APLICA EL ALGORITMO DE LEVINSON...)

```

053      DØ 33 I=1,NN
054      33 F(NALFA+I)=-A(I,NN)
055      KK=NALFA+NN
056      CALL RICK(F, KK, TRAZA, LZ, TRAZAF, LTRF)
057      R(1)=R(1)/1.01
058      400 FØRMAT(40X, 'LØS CØEFICIENTES DEL FILTRØ SØN', //)
059      401 FØRMAT(43X, 'A( ', 12, ', ', 12, ')=' , F10.5
060      RETURN
061      END

```

SUBROUTINA QUE APLICA EL ALGORITMO DE HESTENES

```

001      SUBRØUTINE DECHES (TRAZA, R, TRAZAF, N, NALFA, LZ, M, Z, PRMSQ)
002      REAL KM
003      DIMENSION TRAZA(999), R(1000), T(200,200), C(1000), TRAZAF(1000),
* Z(200), RI(200), P(200), XX(200), Q(200), PT(200), MM(200), F(200)
004      DO 11 I=1, N
005      T(I,1)=R(I)
006      T(1,I)=R(I)
007      I1=N-I+1
008      T(I,N)=R(I1)
009      11 T(N,I)=R(I1)
010      N11=N-1
011      DØ 12 I=2, N11
012      DØ 12 J=2, N11
013      IF(1.EQ.J)T(I,J)=R(I)
014      12 IF(1.NE.J)T(I,J)=T(I-1, J-1)
015      DØ 22 I=1, N
016      22 C(I)=R(I+NALFA)
017      RM=0.
018      A=1.
019      15 DØ 1 I=1, M
020      P(I)=0.
021      RI(I)=0.
022      1 XX(I)=Z(I)
023      DØ 2 I=1, M
024      DØ 2 J=1, M
025      2 RI(I)=RI(I)+T(I, J)*XX(J)
026      DØ 7 I=1, M
027      RI(I)=C(I)-RI(I)
028      7 RM=RM+RI(I)*RI(I)

```

(...)

(CONTINUA SUBROUTINA QUE APLICA EL ALGORITMO DE HESTENES)

```

029      RMSQ=SQRT(RM)
030      IF(PRMSQ.EQ.0)PRMSQ=RMSQ/1000.
031      B=RM/A
032      WRITE(3,103)RMSQ
033      DØ 8 I=1,M
034      X I I=I I
035      DØ 3 I=1,M
036      P(I)=R I (I)+B**P(I)
037      3 PT(I)=P(I)
038      DØ 4 I=1,M
039      DØ 4 J=1,M
040      4 Q(I)=Q(I)+T(I,J)**P(J)
041      D=0.
042      DØ 5 I=1,M
043      5 D=D+PT(I)**Q(I)
044      KM=ABS(RM/D)
045      RMN=0.
046      DØ 6 I=1,M
047      XX(I)=XX(I)+KM**P(I)
048      R I (I)=R I (I)-KM**Q(I)
049      6 RMN=RMN+R I (I)**R I (I)
050      RMSQ=SQRT(RMN)
051      B=RMN/RM
052      RM=RMN
053      DØ 9 I=1,M
054      9 Q(I)=0.
055      IF(RMSQ.LE.PRMSQ) GØ TØ 16
056      8 CØNTINUE
057      WRITE(3,103)(XX(I),I=1,M),RMSQ,X I I
058      F(1)=1.
059      DØ 33 I=1,N
060      Z(I)=XX(I)
061      33 F(NALFA+I)=-XX(I)
062      KK=N+NALFA
063      CALL RICK(F, KK, TRAZA, LZ, TRAZAF, LTRF)
064      102 FØRMAT(16I5)
065      103 FØRMAT(1X,10F13.5,1X,/)
066      RETURN
067      END

```

## BIBLIOGRAFIA

- Anstey, Nigel A., 1977; Seismic Interpretation, The Physical Aspects; International Human Resources Development Corporation, Boston, Massachusetts.
- Backus, M.M., 1959; Water Reverberations, Their Nature and Elimination; -- Geophysics, V.24, pp.233-261.
- Berndt, H. and Cooper, G.R., 1965; An optimum observation time for estimates of time-varying correlation functions; IEEE Trans, on Inform. Theory - for time-varying linear systems with nonstationary inputs; Roc-IRE, - V. 40, pp. 977-981.
- Bracewell, R., 1965; The Fourier Transform\$ and its Applications; McGraw--- Hill Book Co.
- Forsythe, G.E., and Wasow, W.R., 1960; Finite difference methods for partial differential equations; New York, John Wiley and Sons.
- Hestenes, M.R., 1956; The conjugate-gradient method for solving linear systems; in Proceedings of symposia in applied mathematics, V. VI; New York, McGraw-Hill Book Co., Inc.
- Jenkins, G.M., and Watts, D.G., 1968; Spectral Analysis and its Applications; Holden-Day Series in Time Series Analysis, San Francisco, USA.
- Kulhanek, O., 1976; Introduction to Digital Filtering in Geophysics; Elsevier Sci. Pub. Company, Amsterdam.
- Kunetz, G., and Fourmann, J.M., 1968; Efficient deconvolution of marine seismic records; Geophysics, V. 33, pp. 412-423.
- Lee, Y.W., 1960; Statistical Theory of Communication; New York, John Wiley and Sons, Inc.
- Levinson, H., 1947; The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction; J. Math. and Physics, V. 25, pp. 261-278.
- Oppenheim, A.V., and Schaffer, E.W., 1975; Digital Signal Processing; Prentice-Hall, Inc.
- Peacock, K.L., and Treitel, S., 1969; Predictive deconvolution; Geophysics, V- 34, pp. 155-169.
- Robinson, E.A., 1954; Predictive Decomposition of Time series with Applications to Seismic Exploration; Ph.D. Thesis, MIT, Geophysics, V. 32, No. 3, pp.- 418 - 484.
- Robinson, E.A., and Silvia, M.T., 1978; Digital Signal Processing and Time Series Analysis; Holden Day, Inc.
- Robinson, E.A., and Treitel, S., 1964; Principles of Digital Filtering; Geophysics, V. 29, pp. 395-404.
- Robinson, E.A., and Treitel, S., 1980; Geophysical Signal Analysis; Prentice-Hall, Inc. Englewood, Cliffs.
- Seismograph Service Corp., 1974; The Robinson-Treitel Reader, S.S.C., Tulsa.

(...)

- Shinbrot, M., 1957; On the integral equation occurring in optimization theory with nonstationary inputs; J. Math. and Phys., V. 26, pp. 121-129.
- Treitel, S., 1970; Principles of digital multichannel filtering; Geophysics, V. 35, pp. 785-811.
- Wadsworth, G.P., 1953; Detection of reflections on seismic records by linear operators; Geophysics, V. 18, pp. 539-586.
- Wang, R.J., 1969; The determination of optimum gate-lengths for time-varying Wiener filtering; Geophysics, V. 34, pp. 683-695.
- Wang, R.J., and Treitel, S., 1973; The determination of digital Wiener filters by means of gradient methods; Geophysics, V. 38, pp. 310-326.
- Wiener, N., 1949; Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series; New York, John Wiley and Sons, Inc.
- Wuenschel, P.C., 1960; Seismogram synthesis including multiples and transmission coefficients; Geophysics, V. 25, pp. 106-129.