



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

00382
9
14

INTERACCIONES MAGNETICAS EN MECANICA CUANTICA RELATIVISTA

T E S I S
QUE PARA OBTENER
EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
(FISICA)
P R E S E N T A
JOSE FRANCISCO RECAMIER ANGELINI

00382.
1983.

MEXICO, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

RESUMEN	1
INTRODUCCION	2
REFERENCIAS	6
CAPITULO I EL ATOMO DE HIDROGENO RELATIVISTA	
Ecuación de Klein Gordon	7
Ecuación de Klein Gordon con interacción	12
Tratamiento Clásico	14
Ecuación de Dirac	16
Ecuación de Van der Waerden Dirac en un campo radial	19
Aproximación WKB	22
Referencias al capítulo I	24
CAPITULO II EL MONOPOLO MAGNETICO	
Tratamiento Clásico	25
En mecánica Cuántica no Relativista	27
Interacción electrón monopolo	30
Apéndice Matemático	35
Referencias al Capítulo II	37
CAPITULO III INTERACCION RELATIVISTA CARGA MONOPOLO	
Monopolo pesado sin espín, carga eléctrica	38
Monopolo ligero sin espín- carga eléctrica	39
Paradoja de Klein	41
Referencias al Capítulo III	44

CAPITULO IV	CALCULO DE LOS CORRIMIENTOS DE FASE	45
	Para el potencial dispersor Φ/x^2	50
	Para el caso monopolo ligero sin espín-electrón	54
	Para el caso monopolo ligero sin espín-muón	57
	Método semiclásico (WKB)	61
	Referencias al Capítulo IV	66
CAPITULO V	RESULTADOS Y CONCLUSIONES	
	Resultados	67
	Conclusiones	76
	Referencias al Capítulo V	77

RESUMEN

En esta tesis, estudiamos el problema de la interacción entre un electrón y una carga magnética, sin espín, tanto desde el punto de vista de la mecánica cuántica no relativista como desde el punto de vista de la mecánica cuántica relativista. Para el caso relativista, analizamos dos casos límite; en uno, consideramos a la carga magnética muy masiva, de forma tal que podemos pensar en un sistema formado por un electrón que se mueve en presencia de un potencial dispersor producido por la carga magnética. Utilizando la ecuación de Dirac, encontramos que para éste sistema no hay ni estados ligados ni estados resonantes. En el otro caso límite, suponemos que la carga magnética es mucho más ligera que la eléctrica, podemos así pensar en un monopolio que se mueve en presencia de un potencial dispersor generado por la carga eléctrica, utilizando la ecuación de Klein_Gordon, encontramos que si bien éste sistema no admite estados ligados, sí se presentan estos resonantes.

I N T R O D U C C I O N

El estudio de la interacción entre cargas eléctricas y magnéticas es en sí mismo un interesante problema físico. Clásicamente, este problema ha sido estudiado por varios autores, siendo el primero de ellos Poincaré (1). Posteriormente, Dirac, (2), llevó a cabo la incorporación de las cargas magnéticas en el marco de la mecánica cuántica no relativista, con el resultado de que es necesario introducir un potencial vectorial singular para representar el campo de un monopolo fijo.

$$\vec{A} = (g/r) \tan(\theta) \hat{\phi}$$

siendo g la intensidad de la carga magnética. Este potencial satisface las siguientes relaciones:

$$\nabla \cdot \vec{A} = g(\delta/r^2)$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = -4\pi g$$

en donde C es un pequeño circuito alrededor de la línea $\theta = \pi$.

Entonces, el potencial vectorial \vec{A} no corresponde a una carga magnética aislada sino a una línea de flujo magnético que se extiende desde el origen hasta el infinito a lo largo de la dirección negativa del eje z . Ahora bien, debido a que la dirección z no tiene un significado especial, uno debería ser capaz de girar dicha línea dipolar sin cambiar los resultados físicos. Al hacerlo, se obtiene la regla de cuantización de Dirac la cual explica el que las cargas eléctricas estén cuantizadas.

La intensidad de la carga magnética resulta ser mucho mayor que la de la carga eléctrica :

$$(g^2/hc) = (n^2/4e) \cdot e^2 = \frac{1}{137}, n \text{ entero.}$$

y esto impide que el problema pueda ser resuelto en términos de un desarrollo en series de potencias de la constante de acoplamiento.

La mayor parte de los trabajos realizados hasta la fecha, centran su interés en la obtención de los estados ligados para un sistema formado por una carga eléctrica (núcleo con carga Z) y un monopolo mucho más pesado que la carga eléctrica (3), dentro del marco de la mecánica cuántica no relativista.

Por otra parte, se han encontrado soluciones a la teoría de campos de Yang-Mills las cuales tienen propiedades de monopolos magnéticos con la característica de que presentan un punto singular y no una línea singular. Sin embargo, pese a los esfuerzos realizados hasta la fecha, no se han encontrado soluciones con energía finita para sistemas con más de un monopolos (4).

Los tratamientos realizados hasta ahora, suponen que la masa del monopolos debe ser muy grande (del orden de GeV), y se dice que es ésta una de las razones por las que es tan difícil detectarlos experimentalmente. En 1982, Blas Cabrera (5) dijo haber detectado un monopolos magnético mediante un experimento independiente de la masa de la carga magnética y en el cual el resultado depende únicamente del valor de la carga magnética.

En este trabajo estudiamos la interacción entre cargas eléctricas y magnéticas sin suponer que el valor de la masa del monopolos sea grande. Recientemente, Berrondo (6) propuso un modelo para la descripción de las interacciones débiles en el cual se asigna al neutrino una carga magnética $g=1/2e$, no tiene carga eléctrica y además se supone que el neutrino libre carece de espín. El sistema electrón-neutrino tendrá entonces un espín total de cero o uno, ($1/2$ del espín del electrón y $1/2$ del momento angular de interacción debido al campo electromagnético).

El momento angular total es entonces $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{s}_e - g\vec{r}$ en donde \vec{r} y \vec{p} son la coordenada relativa y el momento canónico y \vec{s}_e el espín del electrón. Una consecuencia de la conservación del momento angular total \vec{J} es la polarización de los electrones en decaimientos P (o de los muones en decaimientos μ^{\pm}) ya que, si inicialmente el espín total es cero, (un pión en reposo por ej.) el espín del electrón deberá apuntar en la dirección \vec{r} .

Por otra parte si pedimos a los estados que estamos construyendo que sean invariantes ante transformaciones de paridad, deberemos escribirlos como las combinaciones $|+\rangle = |+g\rangle + |-g\rangle$ y la carga magnética de estos estados es nula y por lo tanto no interactúan fuertemente con la materia.

Si queremos pues utilizar dicho modelo para la descripción de las interacciones débiles, deberemos imponer la condición de que la masa del monopoló sea muy pequeña (en nuestros cálculos tomamos un valor de 0.00001 Mev).

Pasando al otro extremo en que la masa del monopoló es mucho mayor que la masa de la carga eléctrica, tanto como para poder considerarlo fijo en el espacio, reproducimos los resultados obtenidos por otros autores (7).

En el primer capítulo hacemos una revisión del problema del átomo de Hidrógeno relativista (8). Resolvemos primero la ecuación de Klein-Gordon para éste problema y analizamos las dificultades que surgen al tratar de utilizar dicha ecuación para describir partículas con espín semientero. Posteriormente, llevamos a la ecuación de Dirac a una pareja de ecuaciones de segundo orden (ecuación de Van der Waerden-Dirac) y obtenemos la ecuación radial que se satisface tras haber diagonalizado el operador angular, ecuación que tiene la misma forma que la que resulta en el caso del átomo de Hidrógeno no relativista, finalmente obtenemos los eigenvalores. Por último, encontramos los eigenvalores del problema mediante la aproximación WKB.

En el segundo capítulo, hacemos una revisión del problema de la interacción entre cargas eléctricas y magnéticas tanto clásicamente como cuánticamente, en aproximación no relativista.

En el tercer capítulo hacemos el estudio relativista del problema y obtenemos las ecuaciones radiales que se satisfacen para los casos monopoló ligero-carga (ecuación de Klein-Gordon) y monopoló pesado-carga (ecuación de Van der Waerden-Dirac). Para el primer caso obtuvimos un potencial dispersor que presenta una singularidad atractiva en el origen la cual es responsable de que el sistema pueda presentar estados ligados y resonantes.

En el cuarto capítulo calculamos los corrimientos de fase producidos por el potencial singular, tanto numéricamente como utilizando la aproximación WKB y encontramos la existencia de estados

resonantes para el sistema.

Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan los resultados y las conclusiones.

REFERENCIAS

- 1.- H. Poincaré, Compt. Rend. 123, 530(1896)
- 2.- P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. A133, 60(1931)
- 3.- D.Sivers, Phys. Rev. D 2, 2048(1970)
- 4.- A. Actor, Rev. Mod. Phys. 51, 461(1979)
G. Rosen, J.Math.Phys. 13, 595(1972)
M.K.Prasad and M.Sommerfield, Phys. Rev. Lett. 35, 760(1975)
T.T.Wu and Chen Ning Yang, Phys. Rev. D 12, 3845(1975)
Jackiw, R. and C. Rebbi, Phys. Rev. D 14, 517(1976)
- 5.- B. Cabrexa, Phys. Rev. Lett. 48, 1378(1982)
- 6.- M. Berrondo, KINAM 2, 177(1981)
- 7.- A. S. Goldhaber, Phys. Rev. 140, 1407(1965)
- 8.- P.R.Auvil and L.M.Brown, Am. J. Phys. 46, 679(1978)

EL ATOMO DE HIDROGENO
RELATIVISTA

Para resolver el problema del átomo de Hidrógeno relativista, es necesario obtener la solución de la ecuación de Dirac. Sin embargo es posible convertir la ecuación de Dirac de cuatro componentes en una ecuación tipo Klein-Gordon de dos componentes, con un término de espín adicional, cuya solución es más fácil de obtener.

Iniciaremos este capítulo con un estudio de la ecuación de Klein-Gordon y analizaremos brevemente las dificultades que surgen al aplicar esta ecuación para la descripción de partículas con espín semi-entero. La razón por la cual hacemos esto es por que en el capítulo III estudiaremos el problema de la interacción entre una carga magnética, ligera, sin espín, la cual se mueve en presencia de una carga eléctrica fija en el espacio, y en tal caso deberemos resolver la ecuación de Klein-Gordon.

A continuación pasaremos de la ecuación de dos componentes (ecuación de Van der Waerden-Dirac) a la ecuación de Dirac de cuatro componentes y resolveremos el problema de calcular los eigenvalores. Finalmente, utilizamos la aproximación WKB para el cálculo de los eigenvalores del problema.

ECUACION DE KLEIN-GORDON

La ecuación de Klein-Gordon aparece como resultado de imponer invariancia relativista en la ecuación de Schrödinger, lo cual se logra formalmente, si en lugar de partir de la expresión clásica $E_{cl} = \frac{p^2}{2m}$ (aproximación no relativista para la energía cinética), partimos de

la expresión:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (1.1)$$

donde \vec{p} es el impulso, E es la energía, m la masa de la partícula y c la velocidad de la luz. En forma de cuadvectores podemos escribirla como:

$$c^2 P^2 = c^2 P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = m^2 c^4$$

donde $P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{P})$ y $P_\mu = (\frac{E}{c}, -\vec{P})$

Interpretando ahora al cuadvector de impulso como el operador

$$P^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right) \quad (1.2)$$

y aplicando $P^\mu P_\mu$ a la función de onda $\Psi(x)$ en donde $x = (\vec{x}, t)$, que describe el estado del sistema y es tal que

$$\Psi^* (\vec{x}, t) \Psi (\vec{x}, t) d\vec{x}$$

nos da la probabilidad de encontrar a la partícula entre \vec{x} y $\vec{x} + d\vec{x}$, al tiempo t, obtenemos la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre:

$$-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \Psi (\vec{x}, t) = m^2 c^4 \Psi (\vec{x}, t) \quad (1.3)$$

en donde $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ es el operador D'Alambertiano.

Mencionaremos ahora algunas de las dificultades que se presentan al utilizar esta ecuación para resolver el problema de la estructura del átomo con electrones puntuales. El principal problema consiste en que el número de estados estacionarios predichos por la teoría para un electrón en un átomo, es la mitad del número de estados que se obtienen experimentalmente. Para resolver esta dificultad, Uhlenbeck y Goudsmit introdujeron la idea de un electrón con momento angular intrínseco (espín) y con momento magnético igual a un magnetón de Bohr.

Utilizando este modelo del electrón, Pauli (1) en 1927, obtuvo resultados que están de acuerdo, en primera aproximación, con los resultados experimentales.

En 1928, P.A.M. Dirac, (2), propuso una ecuación relativista con la cual no es necesario introducir ad hoc el concepto de espín para explicar el problema de la duplicidad de los estados estacionarios de un electrón en un átomo. En dicho trabajo, Dirac da los siguientes argumentos en contra de la ecuación de Klein-Gordon:

I.- Para responder a la pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que una variable dinámica en un tiempo dado tenga un valor entre dos límites cualesquiera cuando el estado del sistema está representado por $\Psi_n(x)$?, es necesario calcular el elemento de matriz correspondiente a la variable dinámica entre los estados $\Psi_n(x)$. Al hacer esto para la ecuación de Klein-Gordon, puede obtenerse la respuesta correcta solamente si la variable dinámica de que se trata se refiere a la posición del electrón mediante el uso de $\int \rho_{nn}$ siendo ρ_{nn} la densidad de probabilidad

$$\rho_{nn} = \frac{e}{2mc} \left(\Psi_n^* \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} - i\hbar \frac{\partial \Psi_n^*}{\partial t} \Psi_n - 2eA_0 \Psi_n^* \Psi_n \right)$$

en donde e es la carga del electrón, m es su masa, A_0 es la componente temporal del cuadrivector de potencial, $\Psi_n(x)$ es solución de la ecuación de Klein-Gordon y $\Psi_n^*(x)$ es su transpuesto conjugado; pero no, si se trata de alguna otra variable dinámica como el impulso o el momento angular por ejemplo.

La interpretación usual de la densidad de probabilidad en la mecánica cuántica no relativista es posible debido a que la ecuación de onda es lineal en la energía, por lo tanto, la función de onda a un tiempo t

determina a la función de onda para todo tiempo posterior. La ecuación de onda relativista debe ser lineal en la energía para que la misma interpretación sea posible.

II.-- Si en la ecuación de Klein-Gordon se reemplaza e por $-e$ y se toma el complejo conjugado, ésta permanece invariante. Si se considera el límite de números cuánticos grandes, uno encontraría que algunas soluciones son paquetes de ondas que se mueven en la misma forma que se movería una partícula de carga $-e$ mientras que otras soluciones serán paquetes de ondas que se mueven como una partícula de carga e para la cual la energía es negativa.

Clásicamente, se descartan tales soluciones por carecer de sentido físico; sin embargo, no podemos hacer lo mismo cuánticamente ya que al introducir una perturbación ésta puede provocar transiciones de un estado con energía positiva a uno con energía negativa. Experimentalmente, esta transición aparecería como el cambio repentino de la carga de un electrón.

Una ecuación de onda relativista debería ser tal que sus soluciones se desdoblen en dos conjuntos independientes que se refieran respectivamente a la carga e y a la carga $-e$.

Dada la forma de la ecuación de Klein-Gordon, vemos que para una función escalar de Lorentz, esto es, una función tal que

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

en donde $|\phi'\rangle = \Lambda |\phi\rangle$ con $x' = \Lambda x$ siendo Λ una transformación de Lorentz, la ecuación es covariante

$$(\square_p \partial^\mu + m^2)\phi(x) = (\square_{p'} \partial'^\mu + m^2)\phi'(x') \quad (1.4)$$

Debido a estas propiedades de transformación, la función de onda $\phi(x)$ debe describir una partícula de espín cero ya que, (3), "una partícula de espín cero se representa por un solo escalar $\phi(x)$ que obedece a la ecuación de segundo orden $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ ".

Consideremos ahora los análogos a la densidad de probabilidad ρ y a la densidad de corriente \vec{j} en la teoría relativista. Las condiciones que deben satisfacer para poder ser interpretados de acuerdo con la mecánica cuántica no relativista son:

- 1.- La densidad de probabilidad ρ debe ser real y no negativa
- 2.- $\int \rho d^3\vec{x}$ debe ser independiente del tiempo y transformarse como un escalar de Lorentz.

- 3.- Debe satisfacerse una ecuación de continuidad

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad j_\mu = (\rho c, -\vec{j})$$

En analogía con el caso no relativista, el candidato lógico para el cuadrivector densidad de corriente es de la forma, (4):

$$j_\mu(x) = [\phi^*(x) i \partial_\mu \phi(x) - i (\partial_\mu \phi^*(x)) \phi(x)] \hbar \quad (1.5)$$

que cumple con la condición 3 para $\phi^*(x)$, $\phi(x)$ soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. La parte espacial del cuadrivector es:

$$\vec{j}(x) = -i [\phi^*(x) \nabla \phi(x) - (\nabla \phi^*(x)) \phi(x)] \quad (1.6)$$

que, salvo un factor de normalización, coincide con la densidad de corriente definida en mecánica cuántica no relativista. La parte temporal es:

$$\rho(x) = \frac{i}{\hbar} [\phi^*(x) \partial_t \phi(x) - (\partial_t \phi^*(x)) \phi(x)] \quad (1.7)$$

Ahora bien, la función de onda del estado de una partícula libre con cuadrivector de impulso determinado, debe ser una onda plana, por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon de partícula libre son de la forma:

$$\phi_+(x) \propto e^{i\frac{E_+}{\hbar}t - i\frac{p_+}{\hbar}x}, \quad \phi_-(x) \propto e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t + i\frac{p_-}{\hbar}x}$$

sustituyendo en la ecuación (1,7) obtenemos:

$$\rho_2 = E_2 |\phi(x)|^2 \quad (1.8)$$

y la densidad ρ_2 no es positiva definida, y no podemos interpretarla como una densidad de probabilidad.

En 1949, Feynman propuso interpretar a (ρ_+) como la densidad de carga de una partícula de carga e , con energía positiva, la cual se propaga hacia adelante en el tiempo ($t > 0$, $E > 0$). Similarmente, se interpreta a (ρ_-) como la densidad de carga de una partícula de carga e con energía negativa la cual se propaga hacia atrás en el tiempo ($t = -|t| < 0$), o bien, como la densidad de carga de una partícula de carga $-e$ y energía positiva la cual se propaga hacia adelante en el tiempo.

Ecuación de Klein-Gordon para una partícula que interacciona con un campo electromagnético especificado por el cuadrivector de potencial $A_\mu = (A_0, -\vec{A})$.

Si suponemos que es válido utilizar acoplamiento mínimo, entonces reemplazamos, (9),

$$P_\mu \rightarrow P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu = \pi_\mu \quad (1.9)$$

y al sustituir en la ecuación de Klein-Gordon de partícula libre obtenemos:

$$[c^2 \nabla^2 \pi_\mu - m^2 c^4] \phi(x) = 0 \quad (1.10)$$

Suponiendo ahora que tenemos una partícula de espín cero y carga

es ligada a un núcleo pesado de carga $-Ze$, el potencial estático es de la forma $eA^{\dagger} = (-Ze^2/r, 0)$ en donde $r = \frac{r_0}{a_0}$ y de la ecuación (1.10) resulta:

$$[(1 + \frac{Z\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial r})^2 - \frac{Z\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial r} - u(r)] \psi(r) = 0$$

en donde solamente se tiene el término de interacción electrostática entre las cargas. Escribiendo el operador Laplaciano en coordenadas esféricas y utilizando separación de variables $\psi(r) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ obtenemos la ecuación radial (en unidades naturales $\hbar = c = 1$):

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{Z\alpha}{r} \right] R(r) = -(E^2 - m^2) R(r) \quad (1.11)$$

en donde utilizamos $Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi)$ siendo las $Y_{lm}(\theta, \phi)$ los armónicos esféricos, normalizados respecto a una integración al ángulo sólido y dados para $m \geq 0$ como:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l)!}{4\pi (l-m)! (l+m)!}} e^{im\phi} P_{lm}(\cos\theta)$$

siendo los $P_{lm}(\cos\theta)$ los polinomios de Legendre, y tales que:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l, -m}^*(\theta, \phi)$$

En el límite no relativista ($E \rightarrow m$, $(E^2 - m^2) \rightarrow 2mE$), la ecuación (1.11) se reduce a la ecuación radial de Schrödinger para un átomo hidrogenoide cuyas soluciones son, (7):

$$E_n = -\frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

Puesto que la ecuación diferencial es la misma, podemos obtener las soluciones de la ecuación (1.11) haciendo las sustituciones

$$m \rightarrow E, \quad E \rightarrow \frac{E^2 - m^2}{2E}, \quad n \rightarrow n'$$

en la ecuación (1.12), y en donde n' es un nuevo número cuántico que debe satisfacer $n' - \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2} = 1, 2, 3, 4, \dots$ con $l(l+1) = 2(2n') - (3\alpha)^2$. Al hacerlo obtenemos:

$$E = m \left[1 + \frac{(3\alpha)^2}{4n'^2} \right]^{-1/2} \quad (1.13)$$

o reinstalando variables:

$$E = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \right\}^{-1/2} \quad (1.14)$$

con $n' = n - l + l' = n - (l+l') + [(l+l')^2 - (l+l')^2]^{1/2}$
 y en donde hemos escogido el signo positivo de la raíz para asegurar que al pasar al límite cuando $Z \rightarrow 0$, l' sea no negativa y la solución r^2 sea regular en el origen.

Cuando $Z \ll 1$ se obtiene:

$$E = mc^2 - \frac{mc^2(Z\alpha)^2}{2n^2} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{1}{2l+1} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (1.15)$$

en donde vemos que los valores propios de la energía ya no están degenerados con respecto al número cuántico orbital l y nos da la estructura fina del término. Sin embargo, estos resultados predicen un desdoblamiento de estructura fina, para una n dada de:

$$\Delta E = - \frac{mc^2(Z\alpha)^2}{2n^2} \left[\left(\frac{1}{2l+1} + \frac{3}{4n} \right) - \left(2 - \frac{3}{4n} \right) \right] = \frac{mc^2(Z\alpha)^4}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n+1/2}$$

que es mucho mayor que el observado experimentalmente para el átomo de hidrógeno (1).

TRATAMIENTO CLASICO

Al resolver el problema del átomo hidrogenoide usando la mecánica clásica relativista, obtendremos una expresión para la energía en la que no aparece degeneración con respecto al momento angular orbital l , pero que, a diferencia de la ecuación (1.15) sí proporciona un valor adecuado para el desdoblamiento de los niveles de estructura fina, siempre y cuando impongamos en las variables de acción las reglas de cuantización de Bohr-Sommerfeld (10).

Partimos del Hamiltoniano:

$$H = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} - \frac{Ze^2}{r} \quad (1.17)$$

en donde Z es el número atómico y $\alpha = \frac{e^2}{hc} = \frac{1}{137}$

$$\left(\frac{E}{c} + \frac{h\alpha}{r} \right)^2 - m^2 c^4 = p_r^2 + p_\theta^2 + p_\phi^2$$

de donde obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\left(\frac{E}{c} + k \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right) - u^2 c^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)^2 \quad (1.18)$$

Usando separación de variables, escribimos la solución como $S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi)$ y al sustituir en la ecuación (1.18) encontramos las constantes de separación:

$$\mu = \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2, \quad \lambda^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{r^2}{\sin^2 \theta} \quad (1.19)$$

en donde μ es la proyección del momento angular en la dirección z y λ^2 es el cuadrado del momento angular.

Sustituyendo las constantes de separación en la ecuación (1.18) obtenemos la ecuación radial:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = \frac{E^2}{c^2} + \frac{\lambda^2 (\sin \theta)^2}{r^2} + \frac{2E(\sin \theta)}{c r} - u^2 c^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \quad (1.20)$$

Definiendo ahora las variables de acción mediante las fórmulas

$$J_\phi = \oint \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) d\phi, \quad J_\theta = \oint \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) d\theta, \quad (1.21)$$

$$J_r = \oint \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) dr$$

y efectuando las integrales, llegamos a:

$$J_\phi = 2\pi k \mu, \quad J_\theta = \oint p_\theta d\theta = 2\pi h (1 - \gamma)$$

en donde usamos que $p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} = \dot{r} \dot{\psi}$ y

$$J_r = \oint \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - u^2 c^2 + \frac{2E(\sin \theta)}{c r} - \frac{\lambda^2 (\sin \theta)^2}{r^2} - \frac{\mu^2}{r^2}} dr$$

Ahora bien, la integral que define a J_r es de la forma, (5) :

$$\oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr = 2\pi i (\sqrt{-C} + \frac{B}{rA})$$

de donde obtenemos:

$$J_i = -2\pi\hbar \left(\sqrt{2E} (2n_i)^2 - \frac{E 2n_i}{\sqrt{2E} \hbar^2} \right) \quad (1.22)$$

llamando $n_i = J_i / (2\pi\hbar)$ y despejando la energía llegamos finalmente a:

$$E = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(2n_i)^2}{\left[1 + \sqrt{(2n_i)^2 - (2n_i)^2} \right]^2} \right\}^{-1/2} \quad (1.23)$$

Expresión que coincide con la de Sommerfeld para la estructura fina de los niveles de energía, siempre y cuando se cumpla que los n_i sean enteros. (regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld) (7).

Notemos que a diferencia del caso no relativista, la frecuencia radial $(\frac{d\theta}{dt})$ no es igual a las frecuencias angulares $(\frac{d\phi}{dt}) = (\frac{d\psi}{dt})$ por lo cual, al introducir efectos relativistas se ha roto en parte la degeneración. El término $(2n_i)^2/r^2$ que se ha añadido al centrífugo hace que la órbita de la partícula presente una precesión debido al cambio instantáneo de la masa de la partícula con la velocidad, mientras que el factor $2E/c^2$ que aparece en el término Coulombiano es un efecto de espantallamiento debido al cambio promedio de la masa.

Como mencionamos anteriormente, el momento angular de la partícula y su carga, deberán satisfacer la condición $l^2 \gg (2n_i)^2$ ya que de no ser así, el término centrífugo se haría atractivo lo cual provocaría un comportamiento singular y la integral de la acción se haría divergente. (8).

ECUACION DE DIRAC

Como ya mencionamos anteriormente, la ecuación de Dirac (2), surgió del hecho de que en la ecuación de Klein-Gordon de partícula libre se tienen soluciones con energía positiva y con energía negativa debido a que el operador temporal que aparece en la ecuación es de segundo orden.

Dirac propuso que la ecuación relativista debería de ser de primer orden en los impulsos y en el tiempo para así evitar la presencia de tales soluciones y tener soluciones con energía bien de-

finida, ya sea positiva o negativa. Al hacerlo así, surgen cuatro ecuaciones de primer orden en los impulsos \vec{p} , es decir, una función de onda de cuatro componentes que incorpora al espín 1/2 automáticamente.

Otra alternativa es llevar el problema a la solución de una ecuación de segundo orden tipo Klein-Gordon con dos componentes debidas a las dos proyecciones del espín de la partícula.

Para ver más claramente lo que haremos, consideremos primero el caso no relativista. Si reemplazamos \vec{p} por la matriz de 2×2 $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2$ tendremos:

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{2m} = \frac{p^2}{2m} \cdot I_2$$

en donde $\vec{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli $i=1,2,3$ y usamos que estas satisfacen la relación $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i(\vec{A} \times \vec{B})$ y denotamos por I_2 a la matriz unidad de 2×2 , que en lo sucesivo suprimiremos.

Este H_0 actúa sobre un espinor de dos componentes

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t) \quad \text{con } \psi_1(\vec{r}, t) \text{ y } \psi_2(\vec{r}, t)$$

por convención.

En presencia de campos electromagnéticos, lo que se hace generalmente es utilizar acoplamiento mínimo en el término cinético \vec{p}^2 e introducir un término adicional de interacción $-\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ en el Hamiltoniano (aproximación de Pauli), que describe la interacción del momento magnético de espín con el campo magnético \vec{B} .

Como veremos en seguida, esto gítimo no es necesario si en lugar de utilizar el acoplamiento mínimo en \vec{p}^2 lo utilizamos incluyendo el espín del electrón $\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})$

En este caso tendremos:

$$\frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) = \frac{1}{2m} \{ (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \} \quad (1.25)$$

siendo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y $\vec{p} \times \vec{A} = (\vec{p} \times \vec{A}) - \vec{A} \times \vec{p}$ y vemos que el término de interacción $\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ aparece en forma natural, con un factor giromagnético de 2 ya que $\vec{\sigma} = 2\vec{S}$, \vec{S} el espín del electrón.

Consideremos ahora la expresión relativista clásica

$$P_r P^r = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (mc)^2$$

definiendo $\vec{\sigma}^r$ como $\vec{\sigma}^1 = (1, \vec{\sigma})$, $\vec{\sigma}^0 = (1, \vec{0})$ y recordando que $\vec{\lambda}_r = (\lambda_0, -\vec{\lambda})$ podemos ver que aunque $\vec{\sigma}^r A_r$ no es un invariante de Lorentz

$(\vec{\sigma}^r A_r)(\vec{\sigma}^r A_r)$ sí lo es. Es decir:

$$\vec{\sigma}^r A_r = \frac{A_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{A}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \left[\frac{A_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{A}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, A_0, A_0 \right] \cdot A_0 - \vec{\sigma} \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \vec{\sigma}^r A_r$$

$$(\vec{\sigma}^r A_r)(\vec{\sigma}^r A_r) = A_0 A_0 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\lambda})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\lambda}) = A_0 A_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} = A_r A^r$$

Sustituyamos ahora $\vec{p} \rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$ en la expresión invariante relativista

$$(\vec{\sigma}^r P_r)(\vec{\sigma}^r P_r) \phi = (mc)^2 \phi \quad \phi = \phi(x, t) \quad (1.24)$$

$$(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi = (mc)^2 \phi$$

Utilizando ahora las expresiones para los operadores

$$P_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{P} = -i\hbar \nabla$$

obtenemos una ecuación de segundo orden para el electrón libre

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \phi = (mc)^2 \phi \quad (1.25)$$

siendo ϕ una función de dos componentes.

Para llevar esta ecuación a la forma como Dirac la escribió inicialmente, definimos a las funciones de dos componentes (7):

$$\phi^{(1)} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \phi, \quad \phi^{(2)} = \phi \quad (1.26)$$

Sustituyendo en la ecuación de segundo orden, obtenemos una pareja de ecuaciones de dos componentes cada una

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \phi^{(1)} &= (mc) \phi^{(2)} \\ \left(i\hbar \vec{\sigma} \cdot \nabla - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi^{(2)} &= -(mc) \phi^{(1)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

ecuaciones acopladas, excepto para el caso en que la masa de la partícula sea nula. Tomando ahora las combinaciones

$$\psi_A = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} \quad , \quad \psi_B = \phi^{(1)} - \phi^{(2)} \quad (1.28)$$

podemos escribir las ecuaciones anteriores en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial t} & -i\sigma \cdot \nabla \\ i\hbar \sigma \cdot \nabla & i\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = -mc \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

y si ahora definimos a las matrices γ_r de 4×4 mediante

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

obtenemos finalmente, la ecuación de Dirac para el electrón libre

$$(i\gamma_r \nabla^r - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0 \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

en donde ψ es un biespinor de cuatro componentes.

ECUACION DE VAN DER WAERDEN-DIRAC EN UN CAMPO RADIAL

Utilizando acoplamiento mínimo en la ecuación (1.24), escribimos

$$(\nabla^2 \nabla_r)(\nabla^2 \nabla_r) \phi = (mc)^2 \phi \quad , \quad \nabla_r = \nabla_r - \frac{eA_r}{\hbar c}$$

en donde, calculando el conmutador $[\nabla_r, \nabla_r] = \frac{ie\hbar}{c} (\nabla \cdot \nabla) \frac{dA_0}{dt}$ y usando $(\nabla \cdot \nabla)(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 \nabla^2 + i\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \nabla) = (\nabla^2 - eA)^2 - \frac{e\hbar}{c} \nabla \cdot \nabla$ obtenemos la ecuación

$$\left\{ (E - eA)^2 + i\hbar c \frac{dA_0}{dt} (\nabla \cdot \nabla) - (c\nabla - e\vec{A})^2 + \hbar c \nabla \cdot \nabla - mc^2 \right\} \phi = 0 \quad (1.32)$$

Si ahora consideramos el caso de un átomo hidrogenoide, tendremos que:

$$\vec{A} = 0, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0, \quad V = eA_0 = -\frac{Ze^2}{r}$$

y obtenemos así la ecuación de Dirac en la forma de Van der Waerden, (11).

$$\left\{ (E-U)^2 + i2\alpha(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) \frac{dV}{dr} + \frac{\hbar^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} - \alpha^2 c^4 \right\} \phi = 0 \quad (1.33)$$

Sustituyendo las expresiones para el campo eléctrico y el potencial electrostático

$$V(r) = -\frac{Ze^2c}{r} \quad \frac{dV}{dr} = \frac{Ze^2c}{r^2}$$

y expresando los valores propios del operador L^2 en unidades de \hbar^2 , podemos escribir la ecuación de segundo orden:

$$\left\{ \frac{E^2 - U^2 c^4}{\hbar^2 c^4} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L^2 - (2\alpha)^2 - i(2\alpha)\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \frac{2Ze^2c}{\hbar^2 r} \right\} \phi = 0 \quad (1.34)$$

que tiene la misma forma que la ecuación de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno (o un ión Hidrogenoide), salvo por el término centrífugo que contiene un acoplamiento del espín con el campo eléctrico, y en el límite no relativista da origen al término de acoplamiento espín-órbita. Diagonalizamos el operador angular partiendo de la identidad

$$L^2 = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{L})(1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}) = (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L})^2 - (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}) \quad (1.35)$$

que define al término de espín-órbita $\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}$ lo cual puede verse si recordamos que $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}) = \mathbf{L}\cdot\mathbf{p} + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{L}\times\mathbf{p})$ y $\mathbf{L}\times\mathbf{L} = i\mathbf{L}$.

Definiendo ahora al operador

$$-\Lambda = (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}) + i2\alpha(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) \quad (1.36)$$

cuyo cuadrado es:

$$\Lambda^2 = [(1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}) + i2\alpha(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})][(1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}) + i2\alpha(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})] =$$

$$= (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L})^2 - (2\alpha)^2 + i2\alpha\{ (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}), (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) \}, \quad \{ (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L}), (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) \} = 0$$

$$\Lambda^2 = (1 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{L})^2 - (2\alpha)^2 \quad (1.37)$$

podemos escribir:

$$\nabla^2 - (2a)^2 - i2a(\nabla \cdot \hat{r}) = \Lambda^2 + \Lambda = \Lambda(\Lambda+1) \quad (1.38)$$

Haciendo el cambio de función $\psi = \frac{U(r)}{r} F(\theta)$ definiendo $k^2 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}$ obtenemos finalmente la ecuación radial

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\Lambda(\Lambda+1)}{r^2} + \frac{2HEa}{r} \right] U(r) = 0 \quad (1.39)$$

Para determinar los valores propios de la parte angular construimos el operador de momento angular $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ cuyos posibles acoplamientos son $j_{\pm} = l \pm \frac{1}{2}$ (en unidades de \hbar).

El término $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ que aparece en el Hamiltoniano hace que ni el momento angular orbital \vec{L} ni el momento angular de espín del electrón sean constantes de movimiento. Si calculamos J^2 podremos escribir $\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = J^2 - L^2 - \frac{3}{4} \hbar^2$, $(\hbar+1)$ y dado que tanto J^2 como L^2 y S^2 son constantes de movimiento, siendo sus eigenvalores de la forma $\Lambda(A-1)$, tendremos que:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) F(\theta, \phi) = [j_{\pm}(j_{\pm}+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] F(\theta, \phi)$$

con $F(\theta, \phi)$ función propia de J^2 , L^2 , S^2 y J_z .

De lo expuesto anteriormente, obtenemos:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{L})_{j_{\pm}} = \left\{ \begin{array}{l} l \\ -(l+1) \end{array} \right\} \quad (1.40)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.37)

$$(\Lambda^2)_{j_{\pm}} = (j_{\pm} + \frac{1}{2})^2 - (2a)^2 \quad (1.41)$$

$$(\Lambda)_{j_{\pm}} = \mp \sqrt{(j_{\pm} + \frac{1}{2})^2 - (2a)^2} = \mp \lambda$$

en donde el signo del radical se escoge de tal manera que cuando $Z \rightarrow 0$, Λ sea positiva para $j = l+1/2$ lo cual asegura que la solución sea regular en el origen. Podemos ahora escribir la ecuación (1.39) como:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j_{\pm}(j_{\pm}+1)}{r^2} + \frac{2HEa}{r} \right] U(r) = -k^2 U(r) \quad (1.42)$$

en donde el eigenvalor del momento angular efectivo es tal que:

$$l_2(l_2 + 1) = \lambda(\lambda + 1)$$

o sea:

$$l_2' = \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 1 \\ \lambda \end{array} \right\} \quad (1.43)$$

Comparando ahora la ecuación (1.42) con la ecuación (1.11), vemos que salvo tener valores propios angulares distintos, estas ecuaciones tienen la misma forma y por lo tanto podemos escribir su solución como:

$$E = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \right\}^{-1/2} \quad (1.44)$$

en donde ahora $n' = n - l_2' = n - l = 1, 2, 3, \dots$

$$U^2 = n + l_2' - 1 = n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2} \quad j = l_2 \quad (1.45)$$

De acuerdo con la ecuación (1.15), los niveles de energía para el ión hidrogenoide son, para $Z = 1$

$$E_{nr} = E - mc^2 = - \frac{mc^2(Z\alpha)^2}{2n^2} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (1.46)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

APROXIMACION WKB PARA EL ATOMO DE HIDROGENO

Debido a su aplicación posterior y al interesante resultado que se obtiene para el átomo de Hidrógeno, resolveremos el problema de encontrar sus niveles de energía usando la aproximación WKB.

Para ello, introducimos la corrección de Langer (8), la cual consiste en mapear a $r = 0$ la singularidad que presenta la ecuación diferencial radial en el origen, para con ello poder asegurar que el punto de retorno puede tratarse como un punto aislado.

Para ello, se lleva a cabo la transformación:

$$r = e^x, \quad \psi_0(r) = e^{N_2 x} \phi_0(x)$$

con el resultado de que la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 - U(r) - \frac{N(N+1)}{r^2} \right] \psi_0(r) = 0$$

se transforma en una ecuación unidimensional (3)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + K_2^2(r) \right] \phi_2(r) = 0$$

con

$$K_2^2(r) = e^{2\alpha} (K^2 - U(r^2)) - (l+1)^2 e^{-2\alpha}$$

Al regresar a la variable original, se encuentra que la aproximación WKB puede escribirse ahora en la forma

en donde $K_2^2(r) = K^2 - U(r) - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}$ siendo el efecto neto de la transformación el de reemplazar $l(l+1) \rightarrow (l+1/2)^2$ con lo cual se está añadiendo un término de $1/4$ al potencial centrífugo, en la primera aproximación.

Partiremos pues de la ecuación radial que obtuvimos para el ión Hidrogenoide relativista (ec. 1.42)

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2Zk}{r} \right] u = 0$$

para aplicar WKB, escribimos la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + Q^2 u = 0$$

y tenemos que para los estados ligados

$$\int \phi_r Q(r) dr = (n+l) \pi$$

en donde ahora

$$Q = \sqrt{k^2 - \frac{2Zk}{r} - \frac{l(l+1/2)}{r^2}} \rightarrow \sqrt{k^2 - \frac{2Zk}{r} - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}$$

y la integral tiene la misma forma que la que resolvimos al tratar el problema clásico y por lo tanto podemos escribir los valores propios inmediatamente

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{(Z\alpha)^2}{k^2} \right)^{1/2}$$

$$k^2 = n - l + 1 = 1, 2, 3, \dots$$

Estos coinciden con los obtenidos al resolver la ecuación de Dirac (ecuación 1.44). Tenemos pues, un problema en el cual un método aproximado nos da los mismos resultados para los eigenvalores que la solución exacta del problema.

REFERENCIAS

- 1.. L.I.Schiff "Quantum Mechanics" 3^a edición
(McGraw-Hill, New York 1968)
- 2.. P.A.M.Dirac Proc. Roy. Soc. (London)A117, 610(1928)
- 3.. L.D.Landau & E.M.Lifshitz "Curso de Física Teórica"vol 3
(Reverté S.A. Barcelona 1975)
- 4.. H.Bethe & R.Jackiw "Intermediate Quantum Mechanics" 2^a ed.
(W.A.Benjamin, Reading Mass. 1968) parte IV
- 5.. H.Goldstein "Classical Mechanics"
(Addison-Wesley, Reading, Mass 1950)
- 6.. M. Born "Atomic Physics"
(Blackie & son Limited, London 1969)
- 7.. M.D.Scadron "Advanced Quantum Theory"
(Springer Verlag, New York 1979) Capítulo V
- 8.. R.E.Langer Phys Rev. 51, 669(1937)
- 9.. E. Merzbacher "Quantum Mechanics"2^a edición
(Wiley International Edition, New York 1970)
- 10.. Berrondo and McIntosh Jour. Math. Phys. 11, 125(1970)
- 11.. J.J.Sakurai "Advanced Quantum Mechanics"
(Addison Wesley, Reading, Mass. 1980) Capítulo III
- 12.. G'tHooft Nucl. Phys. B79 , 276(1974)

E L M O N O P O L O M A G N E T I C O

Iniciamos éste capítulo haciendo una revisión del problema de la interacción entre una carga eléctrica y una carga magnética desde el punto de vista de la mecánica clásica para posteriormente hacerlo desde el punto de vista de la mecánica cuántica no relativista. En la segunda parte del capítulo, mencionamos la manera como Dirac (4), introdujo la idea de los monopolos magnéticos dentro del marco de la mecánica cuántica no relativista. Finalmente, tras haber diagonalizado el operador angular que obtuvimos en la ecuación de Schrödinger, obtenemos los eigenvalores de la ecuación radial en forma aproximada.

El problema de la interacción entre una carga magnética g y una carga eléctrica e , puede estudiarse clásicamente, en la aproximación no relativista, partiendo de la ecuación de Lorentz para la fuerza

$$\vec{F} = e \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right] \quad (2.1)$$

en donde \vec{E} y \vec{B} son los campos eléctrico y magnético generados por la carga magnética. El campo magnético generado por una carga magnética g fija en el origen es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = g \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.2)$$

mientras que el campo eléctrico es nulo.

Sustituyendo la expresión para el campo magnético en la ecuación para la fuerza obtenemos:

$$M \ddot{\vec{r}} = \frac{eg}{c} \dot{\vec{r}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.3)$$

y de aquí vemos que la torca está dada por

$$\dot{L} = \dot{r} \times \dot{p} = \frac{d}{dt} [(r \times \dot{p}) - (p \times r)] = \frac{d}{dt} \dot{L} \quad (2.4)$$

de donde $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{L}$ y el vector de momento angular no se conserva. (1)

Sin embargo, tomando los productos escalares

$$\dot{F} \cdot \dot{r} = 0 \quad \dot{F} \cdot \dot{r} = 0$$

vemos que la energía cinética de la partícula permanece constante. Por otra parte, el cuadrado del vector momento angular también permanece constante

$$L^2 = \mu^2 [r^2 \dot{p}^2 - (\dot{r} \cdot \dot{p})^2], \quad \frac{dL^2}{dt} = 0$$

Usando que

$$\frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt} (\dot{r})^2 = \frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

e integrando obtenemos:

$$r^2 \omega^2 t^2 + \alpha^2 \quad (2.6)$$

en donde hemos escogido el origen del tiempo como el momento en el cual r toma su menor valor posible $r_0 = a$. Regresando a la ecuación (2.4) e integrando por partes, obtenemos:

$$\dot{r} \times \dot{p} = \alpha \dot{r} + \bar{C} \quad , \quad \alpha = \frac{dL}{v \mu c} \quad (2.7)$$

siendo \bar{C} un vector constante que se define a partir de las condiciones iniciales (2). Además tenemos que:

$$\dot{r} \cdot \bar{C} = -\alpha \quad (2.8)$$

y el vector de posición de la partícula forma un ángulo constante con el vector \bar{C} .

La trayectoria de la partícula se encuentra entonces sobre la superficie de un cono circular recto. Podemos reescribir la ecuación (2.7) como

$$r^2 \dot{r} \times \frac{d\dot{r}}{dt} = \alpha \dot{r} + \bar{C} (\bar{C} \cdot \dot{r}) + \dot{r} \times (\bar{C} \times \dot{r})$$

en donde $r^2 \dot{r} \times \left[\frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{\bar{C}}{r} \times \dot{r} \right] = D$ y $\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{\bar{C}}{r} \times \dot{r}$ (2.9)

lo que significa que el vector de posición efectúa una rotación alrededor del origen con una velocidad angular $\omega = \frac{E}{\hbar}$ y podemos entonces identificar a $\hbar\omega$ como un momento angular de interacción.

Las ecuaciones (2.6) y (2.9) proporcionan una descripción completa de la trayectoria de la partícula.

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica no relativista, el problema de la interacción entre una carga eléctrica y una carga magnética ha sido estudiado por varios autores (3). Consideremos primeramente, el tratamiento que utilizó Dirac (4) para introducir la idea de los monopolos magnéticos en el marco de la mecánica cuántica no relativista.

En mecánica cuántica no relativista, asociamos a la partícula una función de onda $\Psi = \psi(\vec{r}, t)$ cuyo módulo al cuadrado nos da la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en un determinado lugar \vec{r} al tiempo t . De acuerdo con esto, podemos multiplicar a la función de onda por un factor de fase y de esta manera obtener otra función de onda $\chi(\vec{r}, t)$ cuyo módulo al cuadrado coincide con el anterior.

$$|\chi|^2 = |\psi|^2 \quad (2.10)$$

Sin embargo, si el factor de fase por el que multipliquemos es una función de las coordenadas y del tiempo, $\chi = \psi(\vec{r}, t)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ entonces, aunque la ecuación (2.10) sigue siendo válida, la ecuación de onda que satisfacen las diferentes funciones ya no son las mismas puesto que:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} [e^{i\theta(\vec{r}, t)} \psi] = e^{i\theta(\vec{r}, t)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + i k_i \right] \psi \quad (2.11)$$

en donde

$$k_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad i=1, 2, 3 \quad (2.12)$$

Supongamos ahora que la función $\psi(\vec{r}, t)$ es real y además tal que

$$\oint_{\text{cuerpo}} K_i(\vec{r}) d\vec{r} \neq 0 \quad (2.13)$$

Consideremos ahora la ecuación de Schrödinger para un electrón que se mueve en un campo electromagnético definido por el potencial $A_p = (0, \vec{A})$. La ecuación diferencial que satisface el electrón en presencia de campos, se obtiene de la ecuación para el electrón libre utilizando acoplamiento mínimo, lo cual nos lleva a la sustitución:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{ie}{\hbar c} A_i \quad (2.14)$$

El cambio en la forma de la ecuación de onda, introducido por la presencia de un potencial vectorial, (ecuación 2.14), es del mismo tipo que el introducido al multiplicar a la función de onda por un factor de fase no integrable (ecuación 2.11). De hecho, estos serán iguales si se cumple que:

$$K_i = -\frac{e}{\hbar c} A_i \quad (2.15)$$

lo que significa que introducir un factor de fase no integrable es equivalente a introducir potenciales electromagnéticos, siempre y cuando éstos satisfagan la condición dada por (2.15).

El cambio de fase en un circuito cerrado es:

$$(\Delta\theta)_{\text{enc}} = \oint_{\text{cuerpo}} K_i dx_i = -\frac{e}{\hbar c} \int_{\text{cuerpo}} (\vec{v} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\frac{e}{\hbar c} \int_{\text{cuerpo}} \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad (2.16)$$

en donde \vec{H} es el campo magnético. Vemos entonces que el cambio en la fase de la función de onda es igual a un factor numérico $-\frac{e}{\hbar c}$ multiplicado por el flujo magnético que atraviesa la superficie encerrada por el circuito. Debido a que podemos añadir a $(\Delta\theta)_{\text{enc}}$ un múltiplo

entero de 2π y el resultado no se altera, entonces escribimos la ecuación (2.16) como:

$$(\Delta\varphi)_{\text{circ}} + 2\pi n = -\frac{e}{hc} \int_S \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (2.17)$$

Si tomamos un circuito pequeño y Ψ es una función continua, entonces $(\Delta\varphi)_{\text{circ}}$ y $\int_S \vec{H} \cdot d\vec{s}$ también serán pequeños y necesariamente $n=0$. Sin embargo, podemos tener una función cuyo valor sea cercano a cero y cambios pequeños en ésta pueden corresponder a cambios grandes en el factor de fase. Por ejemplo, si la función de onda de que se trata es $\Psi = x_1 + ix_2$, entonces, la función de onda se anula en el origen y además es continua. Si ahora tomamos un pequeño circuito que encierre al origen y calculamos el cambio de fase que se ha llevado a cabo, encontramos que este es de 2π . Para que la función de onda sea cero, es necesario que tanto x_1 como x_2 sean cero, condición que se satisface a lo largo de la llamada línea nodal. Al tomar un circuito que encierre a la línea nodal, el cambio en la fase de la función de onda será en general un múltiplo entero de 2π aun cuando la función de onda sea continua.

Si aplicamos (2.17) a una superficie cerrada, tendremos que $(\Delta\varphi)_{\text{circ}} = 0$, ya que el perímetro se ha hecho cero, entonces:

$$-\frac{e}{hc} \int_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum 2\pi n \quad (2.18)$$

el cambio en el flujo estará dado por una suma de términos de la forma $2\pi n$, uno por cada línea nodal que atraviese la superficie. Pero, si una línea nodal entra y sale de la superficie, sus efectos se cancelarán y tendremos contribuciones no nulas solamente por parte de las líneas

que terminen dentro de la superficie. Estos serán puntos de singularidades del campo (fuentes). Tomando una de estas singularidades, el flujo magnético que la atraviesa es:

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{i} = -2\pi I \quad h c = 4\pi g \quad (2.19)$$

en donde g es la intensidad de la carga magnética encerrada dentro de la superficie. De la ecuación (2.19), obtenemos la regla de cuantización de Dirac:

$$h = \frac{|e g|}{h c} = \frac{1}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

que muestra que el momento angular de interacción $m\vec{c}$ está cuantizado.

Resolvamos ahora el problema de un electrón en presencia de un monopolo magnético. Para ello es necesario encontrar un potencial vectorial que describa al monopolo. Para obtenerlo, calculamos el tensor antisimétrico de Maxwell $F_{\mu\nu}$ para una carga eléctrica fija en el espacio y conociendo éste, obtenemos su dual $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ mediante:

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

El cuadrivector de potencial dual $\tilde{A}^\alpha = (\tilde{\phi}, \vec{A})$ es tal que

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \delta^\alpha \tilde{A}^\beta - \delta^\beta \tilde{A}^\alpha \quad (2.22)$$

Combinando las ecuaciones (2.21) y (2.22) obtenemos las ecuaciones que definen al cuadrivector de potencial dual

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\nabla \tilde{\phi} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E} &= -\nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (2.23)$$

con $\vec{E} = (e/r^2) \hat{r}$, $\vec{B} = 0$

Ahora bien, el vector $\vec{D} = \frac{\vec{r} \times \hat{n} (\vec{r} \cdot \hat{n})}{r [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}]}$ con \hat{n} un vector unitario arbitrario, es tal que (5):

$$\nabla \times \vec{D} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.24)$$

y por lo tanto podemos escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) = g \vec{D}(\vec{r}) \quad (2.25)$$

en donde g es la intensidad de la carga magnética.

Consideremos ahora a la ecuación de Schrödinger

$$H\psi = E\psi \quad (2.26)$$

y desarrollemos el operador Hamiltoniano en aproximación de Pauli (ecuación 1.23)

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 - \frac{q\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

en donde m es la masa reducida del sistema, m_0 el la masa del electrón y g es la intensidad de la carga magnética.

Utilizando la regla de cuantización de Dirac podemos escribir:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 - \frac{\mu\hbar}{2m_0} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.27)$$

donde:

$$(\vec{p} - q\vec{A})^2 = -\hbar^2 \nabla^2 + \frac{2q\hbar}{r^3 \sin^2\theta} L_z + \frac{\hbar^2 q^2}{r^3 \sin^2\theta}$$

ya que, en coordenadas esféricas $\vec{r} = (0, 0, r \sin\theta)$.

y escribiendo el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(\vec{p} - q\vec{A})^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar^2}{r^2} \left[L^2 + \frac{2q\hbar}{\sin^2\theta} L_z + \frac{\hbar^2}{\sin^2\theta} - \mu^2 \right] \quad (2.28)$$

Construimos ahora el operador de momento angular de Poincaré

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{p} - \mu\hbar \vec{\sigma} \quad (2.29)$$

en donde $\mu \frac{\hbar}{c} \hat{r}$ es el momento angular de interacción asociado al campo electromagnético. Las componentes cartesianas del operador \hat{d} son:

$$\begin{aligned} \hat{d}_x &= \hat{L}_x - r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \hat{d}_y &= \hat{L}_y - r \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \hat{d}_z &= \hat{L}_z \end{aligned} \quad (2.30)$$

y su cuadrado:

$$d^2 = L^2 + \frac{r^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2r \cos \theta}{\sin^2 \theta} \hat{L}_z \quad (2.31)$$

Además satisface las reglas de conmutación:

$$[\hat{d}_i, \hat{d}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{d}_k \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.31) en (2.28) obtenemos:

$$(p - eA)^2 = \hbar^2 \left[\frac{L^2}{r^2} + \frac{2r \cos \theta}{\sin^2 \theta} \hat{L}_z \right]$$

de donde, la ecuación diferencial a resolver es:

$$E\psi = \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{d^2 - \mu^2 - \mu \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial \phi}}{r^2} \right] \psi \quad (2.33)$$

Si la masa del monopolos es mucho mayor que la masa del electrón, entonces $m \approx m_e$ y el término del potencial queda como:

$$(d^2 - \mu^2 - \mu \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial \phi}) / r^2$$

que es independiente de la masa. Para que este término dependa de la masa, es necesario que la masa reducida del sistema sea diferente de la del electrón y es necesario entonces considerar un sistema monopolos pesado núcleo. En tal caso, el término del potencial dependiente de la masa puede ser lo suficientemente grande como para que el potencial llegue a tomar valores negativos, teniéndose entonces un potencial atractivo, singular en el origen, el cual puede provocar que se presenten estados ligados para el sistema (6).

En el caso general, la ecuación diferencial a resolver es la ecuación (2.33). Para resolver la parte angular de ésta procederemos de manera similar a la utilizada en el capítulo I cuando diagonalizamos el operador angular del átomo de Hidrógeno relativista, ecuaciones (1.36) a (1.41).

Definiendo al operador Λ mediante la combinación:

$$-\Lambda = (1 + \beta \mathcal{J}) + \epsilon_{ur} \beta \hat{r} \quad , \quad \epsilon_{ur} = \mu \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{E}_0} \quad (2.34)$$

y utilizando que;

$$\mathcal{J}^2 = (1 + \beta \mathcal{J})^2 - (1 + \beta \hat{r})^2 \quad (2.35)$$

y que el anticonmutador $\{(1 + \beta \mathcal{J}), \beta \hat{r}\} = -2\mu$ a diferencia del caso del átomo de Hidrógeno relativista en donde $\{(1 + \beta \mathcal{L}), \beta \hat{r}\} = 0$, obtenemos: $\Lambda^2 = (1 + \beta \mathcal{J})^2 + \epsilon_{ur} - 2\mu \epsilon_{ur}$

de donde $\Lambda^2 + \Lambda = \mathcal{J}^2 - \mu^2$ y podemos escribir

$$\mathcal{J}^2 - \mu^2 - \epsilon_{ur} \beta \hat{r} = \Lambda^2 + \Lambda - \epsilon_{ur} + 2\mu \epsilon_{ur} - \mu^2 \quad (2.36)$$

Construyendo ahora el operador de momento angular total $\hat{J} = \mathcal{J} + 1/2 \hat{\sigma}$ que cumple las relaciones:

$$[\hat{J}^2, \mathcal{H}] = 0 \quad , \quad [\hat{J}^2, \hat{r}] = 0 \quad , \quad [\hat{J}_z, \mathcal{H}] = 0$$

$$(1 + \beta \mathcal{J}) = \pm (j + \frac{1}{2}), \quad j = \frac{d}{2} \pm \frac{1}{2}$$

obtenemos los valores propios del operador Λ^2 y Λ .

$$\Lambda^2 \Psi = [(j + \frac{1}{2})^2 + \epsilon_{ur} - 2\mu \epsilon_{ur}] \Psi \quad (2.37)$$

$$\Lambda \Psi = \pm \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + \epsilon_{ur} - 2\mu \epsilon_{ur}} \Psi \quad j = j_{\pm} \quad (2.38)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.36) obtenemos finalmente:

$$(\mathcal{J}^2 - \mu^2 - \epsilon_{ur} \beta \hat{r}) \Psi = \left((j + \frac{1}{2})^2 - \mu^2 \pm \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + \epsilon_{ur} (\epsilon_{ur} - 2\mu)} \right) \Psi \quad (2.39)$$

que para el caso de un monopolo pesado y un electrón se reduce a:

$$(\mathcal{J}^2 - \mu^2 - \mu \beta \hat{r}) \Psi = \left[(j + \frac{1}{2})^2 - \mu^2 \pm \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \mu^2} \right] \Psi \quad (2.40)$$

independientes de la masa, como mencionamos anteriormente.

Habiendo diagonalizado el operador angular, la ecuación radial a resolver es:

$$R''(r) = -\frac{k^2}{2\mu a^2} \left[-\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} \right] R(r)$$

en donde:

$$\lambda(\lambda+1) = (l+1/2)^2 - \mu^2 \mp \sqrt{(l+1/2)^2 \epsilon_{nr}(\epsilon_{nr}-2\mu)}$$

ecuación que puede reescribirse como:

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - [k^2 r^2 + \lambda(\lambda+1)] R(r) = 0, \quad k^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

y cuyas soluciones son las funciones Bessel modificadas (7) $I_{\lambda+1/2}(kr)$, $K_{\lambda+1/2}(kr)$.

Escribiendo la solución como:

$$R(r) = a \sqrt{\frac{r}{2\pi}} I_q(kr) + b \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_q(kr)$$

con $q = \lambda + 1/2$ vemos que es la misma solución que la obtenida por Sivars (6), y es tal que para que se presenten estados ligados, es necesario que $q < 0$. Entonces:

$$(l+1/2)^2 = (l+1/2)^2 - \mu^2 \mp \sqrt{(l+1/2)^2 \epsilon_{nr}(\epsilon_{nr}-2\mu)} + \frac{1}{4} < 0$$

lo cual puede suceder para valores suficientemente grandes de ϵ_{nr} .

De acuerdo con los resultados de Sivars, una aproximación a los niveles de energía es:

$$E(\mu_{nr}) \approx -\frac{\hbar^2 [(l+1/2)^2 - \sqrt{(l+1/2)^2 + \epsilon_{nr}(\epsilon_{nr}-2\mu)}]}{2\mu a^2} \quad (2.41)$$

en donde hemos tomado $\mu = \frac{\hbar^2 n}{2a^2}$ correspondiente al valor no trivial más bajo $n=1$ en la cuantización de Dirac, y r_0 es la posición de la barrera infinita que debe introducir para evitar la singularidad en el origen (ésta aparece solamente al considerar el caso q menor que cero).

Para comparar los eigenvalores de la ecuación angular que obtuvimos con los obtenidos en (6), es necesario tomar $j=d + 1/2 = 1, 3/2, 2, \dots$ y entonces de la ecuación (2.39) tenemos que para $\mu = 1/2$

$$p = i(l+1) - \sqrt{(l+1)^2 + (\mu - \epsilon)^2}$$

resultado que coincide con (6) para el caso $m \geq 1$.

La ventaja que tiene esta manera de resolver el problema es que no es necesario conocer la forma explícita de las soluciones para obtener los eigenvalores de la ecuación angular y esto simplifica considerablemente los cálculos.

APENDICE AL CAPITULO II

En la referencia (6), Sivers, estudia el problema de calcular los posibles estados ligados para un sistema formado por un monopolo magnético y por una carga eléctrica con momento dipolar magnético.

Partiendo del Hamiltoniano en aproximación de Pauli

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] + \frac{1}{2a_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - i\mu(1-\cos\theta) \right] + 2m\mu g \sigma_z \quad (A1)$$

la ecuación de Schrödinger es separable en una parte angular

$$\left[\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i\mu(1-\cos\theta) \right)^2 \right] + m\mu g \sigma_z \right] \psi^{(l)}(\theta, \phi) = -p^2 \psi^{(l)}(\theta, \phi) \quad (A2)$$

y una parte radial

$$\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{p^2}{2} + 2mU(r) \right] R(r) = 2mE R(r) \quad (A3)$$

Resuelve la ecuación angular para el caso en que el momento dipolar magnético de la carga es nulo, obteniendo las eigenfunciones

$$\psi_{lm}^{(l)}(\theta, \phi) = d_{lm} p_{-l}^{-m}(\theta) \quad (A4)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$

y los eigenvalores

$$d^{(l)}(l, m) = [2 + l(1-m) - l(l-m)] = [2 + l + l(l+m-2)] - l^2 \quad (A5)$$

los cuales resultan ser positivos definidos. Al imponer invariancia ante rotaciones obtiene la condición de cuantización

$$l = \frac{1}{2} n \quad n = 1, 2, \dots \quad (A6)$$

Para resolver la ecuación angular cuando el momento dipolar magnético es diferente de cero, se hace un desarrollo de las soluciones en términos de las soluciones para el caso con $\mu_0 = 0$ (momento dipolar magnético nulo) y expresando las funciones de Wigner en términos de los polinomios de Jacobi, obtiene los eigenvalores (para el caso con $l \gg 0$)

$$P_{l, m} = (N_0 + m - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \pm \left[(N_0 + m - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} m \mu \right)^2 \right]^{1/2} \quad (A7)$$

cuyo menor valor es:

$$P_{l, m} = 2 - \left[2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \mu \right)^2 \right]^{1/2} \quad (A8)$$

y puede llegar a tomar valores negativos.

Substituyendo en la ecuación radial, se tiene que para valores negativos de P , es necesaria la inclusión de una barrera infinita de potencial a una cierta distancia del origen, con lo cual la ecuación radial a resolver es:

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{P}{2} + 2mU(r) \right] R(r) = 2mE R(r) \quad (A9)$$

siendo sus soluciones

$$R(r) = \sqrt{r} (C_1 I_p(kr) + C_2 K_p(kr)) \quad p = (\frac{1}{2} + p)^{1/2} \quad (A10)$$

Las funciones K_p no tienen ceros para valores reales de p y es entonces necesario que el eigenvalor de la ecuación angular sea menor que $-1/4$.

La posición de los ceros puede aproximarse si utilizamos el desarrollo asintótico

$$K_p(kr) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi k r} \left[\frac{2\pi - \pi}{x} \right]^{1/2} [J_{2p} - J_{-2p}] \left(\frac{1}{2} \left[\frac{2\pi - \pi}{x} \right]^{1/2} \right) \quad (A11)$$

y un valor aproximado para la energía de ligadura será:

$$E_0 \approx \frac{\frac{1}{2} + p}{2\mu c^2} \quad p < -\frac{1}{2} \quad (A12)$$

R E F E R E N C I A S

- 1.- J. D. Jackson "Classical Electrodynamics" 2^a edición (Wiley, New York 1975) Capitulo VI
- 2.- I. R. Lapidus & J.L.Pietenpol Am. Jour. Phys. 28 , 17(1960)
- 3.- R.A.Carrigan Il Nuovo Cimento 38 , 638(1965)
- 4.- P.A.M.Dirac Proc. Roy. Soc. A133 , 60(1931)
- 5.- M. Berrondo and H.V. McIntosh Jour. Math. Phys. 11 , 125(1970)
- 6.- D. Sivers Phys. Rev D 2 , 2048(1970)
- 7.- M. Abramowitz and I. Stegun "Handbook of Mathematical Functions" (Dover, New York 1972)
- 8.- H. Poincaré, Comp. Rend. 123, 530(1896)

INTERACCION RELATIVISTA
CARGA MONOPOLO

En este capítulo estudiamos el problema de la existencia de los posibles estados ligados para el sistema carga - monopolo, en las siguientes aproximaciones: primero, consideramos un monopolo tal que, al encontrarse libre carece de espín, y que además es mucho más masivo que la carga eléctrica, de tal manera que podemos pensar en el sistema carga_monopolo pesado como un sistema formado por una carga eléctrica que se mueve en un campo electromagnético dado por el monopolo fijo en el espacio. Para la descripción de este sistema debemos utilizar a la ecuación de Dirac, para simplificar el análisis, estudiamos la ecuación de Van der Waerden-Dirac. Posteriormente, consideramos el caso opuesto en que tenemos un monopolo sin espín, pero que ahora es mucho más ligero que la carga eléctrica, debemos entonces utilizar a la ecuación de Klein-Gordon.

Resolvamos pues, el problema de la interacción carga_monopolo pesado. El potencial que sentirá la carga eléctrica será solamente la parte vectorial ya que el potencial escalar generado por la carga magnética es proporcional a su velocidad.

El término de interacción entre el campo magnético y el momento magnético del electrón, aparecerá en forma natural al utilizar la ecuación de Dirac. Se podría introducir un término de interacción entre el momento magnético anómalo del electrón y el campo magnético, el cual puede ser muy importante al considerar regiones del espacio muy cercanas al origen (1). Al hacerlo, se obtiene un potencial que contiene un término proporcional a $\frac{1}{r^2}$ repulsivo, siendo $\frac{1}{r}$ proporcional

al momento magnético anómalo del electrón, y por lo tanto, es muy pequeño (comparado con el término en $1/r^2$) salvo en regiones del espacio muy cercanas al origen. Supondremos por el momento que es válido despreciar estas contribuciones al potencial. Al hacerlo, obtenemos para nuestro problema la ecuación de Van der Waerden_Dirac, en forma análoga a la ecuación (1.34)

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(L^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} - \mu^2 + \frac{2\mu\hbar^2}{2m_0 c^2} (L - \mu\hbar) + \frac{\mu^2 \hbar^2}{2m_0 c^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \psi = 0 \quad (3.1)$$

Sustituyendo en ésta la expresión (2.31) obtenemos:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} (\mu^2 - \mu^2 - \mu\hbar) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \psi = 0 \quad (3.2)$$

y vemos que el término correspondiente al potencial dispersor es el mismo que obtuvimos anteriormente (ecuación 2.33) para un monopolio muy masivo y cuyos eigenvalores son siempre positivos -tomando $\mu = 1/2-$ y por lo tanto, el sistema electrón - monopolio pesado no acepta ni estados ligados ni estados resonantes, sin importar el valor de la masa del monopolio siempre y cuando sea lo suficientemente grande como para poder considerarle fijo en el espacio. Vemos ahora que el incluir el término de interacción con el momento magnético anómalo del electrón, no añade nada nuevo a nuestras posibilidades de estados ligados o resonantes debido a que se estaría añadiendo un término repulsivo y la forma del potencial seguiría siendo del mismo tipo (siempre repulsivo).

Pasemos ahora al caso contrario en que tenemos un monopolio mucho más ligero que la carga eléctrica. Suponiendo como antes que la carga magnética no tiene espín, entonces deberemos utilizar la ecuación de Klein_Gordon.

El operador cuadrado de masa del sistema es:

$$W^2 c^2 \Psi = \left[(E + g \frac{\vec{E} \cdot \vec{L}}{r^2})^2 - (c\vec{p} + g\vec{A})^2 \right] \Psi \quad (3.3)$$

en donde hemos usado que el potencial escalar dual $\vec{\phi}$ es $\vec{\phi} = -\vec{u}_e \cdot \vec{B}$ siendo $\vec{u}_e = \frac{g\vec{h}}{2mc}$ $\vec{\phi}$ el momento dipolar magnético de la carga eléctrica fija en el espacio, y \vec{B} el campo magnético generado por la carga magnética. Desarrollando la ecuación (3.3) obtenemos:

$$(E + g \frac{\vec{E} \cdot \vec{L}}{r^2})^2 = E^2 + \frac{h^2 c^2 \vec{p} \cdot \vec{p}}{r} + \frac{g^2 h^2 c^2}{4m^2 c^2 r} \quad (3.4)$$

$$(c\vec{p} - g\vec{B})^2 = c^2 \left\{ -\frac{h^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{h^2}{r^2} \left(L^2 - \frac{c^2 \vec{L} \cdot \vec{L}}{2c^2} + \frac{2g\vec{L} \cdot \vec{L}}{2mc} L_z \right) \right\} \quad (3.5)$$

en donde $\vec{B} = \frac{g}{4\pi c} \vec{v}$ y $\mu = \frac{g\hbar}{2c}$.

Sustituyendo la expresión que obtuvimos para el operador d^2 nos queda:

$$\left\{ -\frac{h^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{h^2}{r^2} (d^2 - \mu^2 - g\vec{p} \cdot \vec{p}) + \mu^2 \vec{L}^2 - \frac{g^2 \vec{L}^2}{2r} \right\} \Psi = 0 \quad (3.6)$$

que difiere del caso anterior (ecuación 3.2) por el término $-g^2 \vec{L}^2 / 2r$ y el valor del coeficiente de $\vec{p} \cdot \vec{p}$.

Diagonalizando el operador angular de manera similar a la utilizada al resolver la parte angular de la ecuación no relativista, obtenemos los eigenvalores:

$$(d^2 - \mu^2 - g\vec{p} \cdot \vec{p}) \Psi = \left[(l+1)^2 - \mu^2 + \sqrt{(l+1)^2 + g(l-\mu)} \right] \Psi \quad (3.7)$$

Debido a que el término proporcional a $1/r^4$ es atractivo, es necesario introducir una barrera infinita de potencial a una cierta distancia del origen. La posición de esta barrera nos dará una medida de la máxima distancia de acercamiento entre las partículas. Por otra parte, ya no es necesario pedir que el eigenvalor de la ecuación angular sea negativo para tener la posibilidad de que se presenten estados ligados.

El incluir una barrera infinita de potencial, además de servirnos para asegurar la existencia de soluciones para la ecuación diferencial,

ya no es necesario pedir que el eigenvalor de la ecuación angular sea negativo para tener la posibilidad de que se presenten estados ligados.

El incluir una barrera de potencial infinito, además de servirnos para asegurar que existan soluciones para la ecuación diferencial, es un reflejo de la falta de conocimiento que tenemos acerca de los efectos que se presentan al llegar a distancias muy pequeñas.

Es importante notar que los eigenvalores de la ecuación angular son a su vez funciones de la energía a través del término que contiene a ℓ .

La ecuación radial a resolver es:

$$\left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - \frac{e^2 m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{\hbar^2 c^2 k^2}{4m_0^2 c^4 r} + U(r) \right\} R(r) = 0 \quad (3.8)$$

en donde

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \quad \lambda(\lambda+1) = (l+1/2)^2 \pm \sqrt{(l+1/2)^2 c^2 (l+1/2)^2} \quad (3.9)$$

Si queremos encontrar los posibles estados ligados del sistema, es necesario que pidamos al potencial que cumpla con ciertos requisitos como el de ser lo suficientemente débil para que no se presente la paradoja de Klein (2). Para ver como puede presentarse esta paradoja, consideremos un potencial unidimensional como el que se muestra en la figura



En la región I, la partícula se encuentra libre y por lo tanto se tiene una solución oscilatoria mientras que en la región II la probabilidad de encontrar a la partícula decae exponencialmente. Ahora bien, si consideramos que el potencial varía en forma adiabática, podemos obtener la forma funcional de la función de onda. Fijándonos en la componente grande únicamente, tenemos que se cumple:

$$(\mathcal{E}-p)c \frac{1}{E-V+mc^2} (\mathcal{E}-p)c \psi_0 = \frac{1}{c^2} (E-V-mc^2) \psi_0$$

Si tenemos un potencial V que es localmente independiente de x, obtenemos

$$\psi_0 \propto \exp\left(\frac{iE}{\hbar} - i\frac{Et}{\hbar}\right)x, \quad \exp\left(-\frac{10E}{\hbar} - i\frac{Et}{\hbar}\right)x$$

en donde

$$p^2 c^2 = (E-V+mc^2)(E-V-mc^2) \quad (3.10)$$

Si p^2 es positiva tenemos una solución oscilatoria, mientras que, si p^2 es negativa tenemos una solución exponencial decreciente. Si ahora hacemos que el potencial llegue a tomar un valor tal que $V_0 - E > mc^2$ tendremos que p^2 es mayor que cero, ya que en el lado derecho de la ecuación (3.10) ambos términos son negativos, por lo tanto tenemos que la solución corresponde a una función oscilatoria (como en el caso de partícula libre). Si queremos evitar que se presente éste tipo de paradoja debemos imponer al potencial que se satisfaga la condición

$$|V_0 - E| \leq mc^2 \quad (3.11)$$

con lo cual estamos evitando que se presenten fenómenos como producción de pares.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, el valor de r_0 no puede ser arbitrario, si suponemos que éste debe encontrarse entre 0 y 10 fm .

entonces encontramos que el menor valor de la masa del monopoló compatible con la ecuación (3.11) es $m = 1\text{Mev}/c^2$; pero, éste valor de la masa del monopoló no satisface nuestra suposición original de un monopoló ligero comparado con la carga eléctrica. Tenemos entonces, que en este modelo no podemos estudiar los posibles estados ligados del sistema monopoló ligero - electrón.

Sin embargo, en el caso en que haya una diferencia de signo entre los términos proporcionales a $1/r^2$ y a $1/r^4$ que aparecen en el potencial, (ecuación 3.6) es posible que el sistema tenga estados resonantes. El estudio de esta posibilidad es el objetivo del siguiente capítulo.

R E F E R E N C I A S

- 1.- A. O. Barut "Latin American School of Physics, Mexico City, 1980"
- 2.- J.J.Sakurai "Advanced Quantum Mechanics"
(Addison Wesley, Reading Mass. 1980) Capitulo III

CALCULO DE LOS CORRIMIENTOS DE FASE

En el capítulo anterior, utilizamos la ecuación de Van der Waerden-Dirac para describir un sistema formado por un monopolo muy masivo, sin espín, y un electrón que se mueve en presencia de éste. Encontramos que para dicho sistema no se presentan ni estados ligados ni estados resonantes debido a que el potencial en que se mueve el electrón es siempre repulsivo. Por otra parte, al considerar la ecuación de Klein-Gordon para el sistema monopolo ligero, sin espín, electrón, encontramos que tampoco se presentan estados ligados, pero que en éste caso surge la posibilidad de que se presenten resonancias.

En éste capítulo, hacemos el cálculo de los corrimientos de fase producidos por el potencial dispersor

$$V(r, \mathbf{e}) = \frac{\lambda(\mathbf{e})[N(\mathbf{e})]}{r^2} - \frac{\mu^2 c^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + U(r) \quad (4.1)$$

con $U(r)$ y $N(\mathbf{e})[N(\mathbf{e})]$ definidos por la ecuación (3.9).

Recordemos que en éste modelo hemos construido un momento angular total \vec{J} que conmuta con el Hamiltoniano, mediante el acoplamiento del momento angular de espín del electrón, el momento angular de interacción que aparece debido a la presencia del monopolo, y el momento angular debido al movimiento del monopolo en el campo del electrón. Esto es (1):

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{S}_e - \mu \hat{r} \quad (4.2)$$

Construimos primero el operador \vec{d} como:

$$\vec{d} = \vec{r} \times \vec{p} - \mu \hat{r}$$

cuyos valores satisfacen que (2):

$$\vec{d} \cdot |l, \mu\rangle = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

y acoplamos posteriormente con el espín del electrón teniéndose las posibilidades (en unidades con $\hbar = 1$):

$$j_+ = d + 1/2$$

$$j_- = d - 1/2$$

Al diagonalizar el operador angular obtuvimos los eigenvalores

$$\lambda(l)(\lambda(l)+1) \Psi = \left\{ (j_+)^2 - l^2 \pm \sqrt{(j_+)^2 - d(d-1)} \right\} \Psi, \quad j = j_{\pm}$$

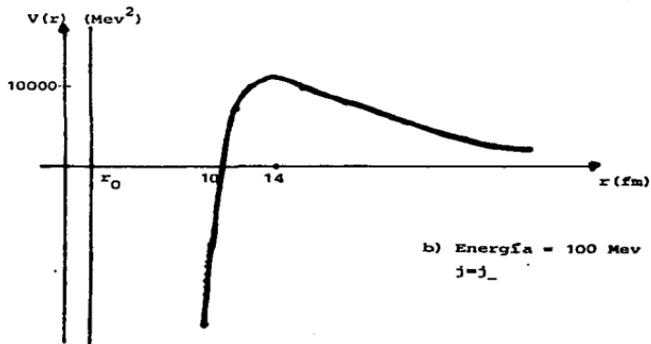
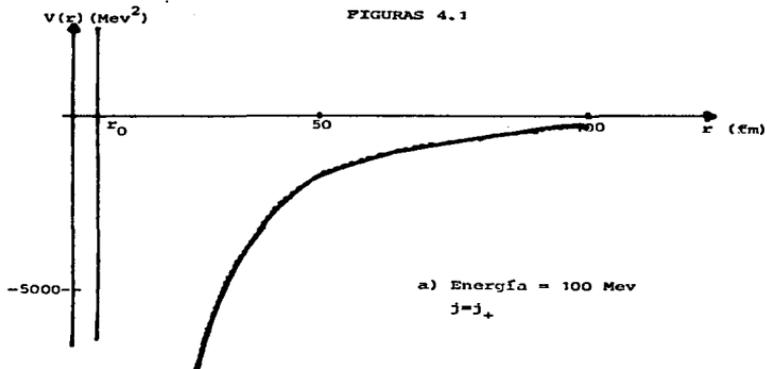
de donde notamos que el comportamiento del potencial es radicalmente distinto cuando tomamos el acoplamiento j_+ o el acoplamiento j_- , ya que al tomar j_+ la parte correspondiente al potencial centrífugo puede adquirir valores negativos mientras que al tomar j_- éste término es siempre positivo y provoca una joroba en el potencial.

Notemos también que el potencial depende únicamente de $\mu^2 = \left(\frac{e\hbar}{2m}\right)^2$ lo cual significa que los eigenvalores de la energía son independientes del signo de la carga magnética. Además, el potencial depende de la energía mediante el término proporcional a $1/r^2$. Para distancias pequeñas, el término $1/r^4$ domina al término "centrífugo" $1/r^2$ y esto provoca que (como mencionamos en el capítulo anterior), debamos introducir una barrera de potencial a una cierta distancia del origen para poder garantizar la existencia de soluciones.

Para potenciales de la forma $V(r) = V_0/r^2 + V_1/r^3 + V_2/r^4$ las resonancias y estados ligados pueden darse en forma analítica (3) y para potenciales que involucren solamente un término de la forma $1/r^4$ repulsivo, la solución puede ser escrita en términos de las funciones de Mathieu (4).

La figura 4.1 muestra la forma del potencial dado por la ecuación (4.1) para cada uno de los tipos de acoplamiento.

FIGURAS 4.1



Debido a que este sistema no admite estados ligados, en adelante consideraremos solamente el tipo de acoplamiento $j = j_-$.

El máximo del potencial se encuentra en

$$R_{\text{max}} = \frac{\hbar^2 c}{M_0 c^2} \sqrt{\frac{1}{2\lambda(\lambda+1)}} \quad [R] = \text{fm} \quad (4.3)$$

y su intensidad en ese punto es:

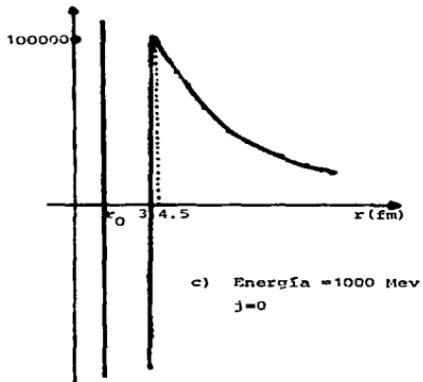
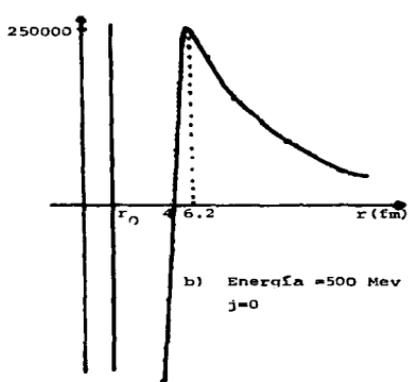
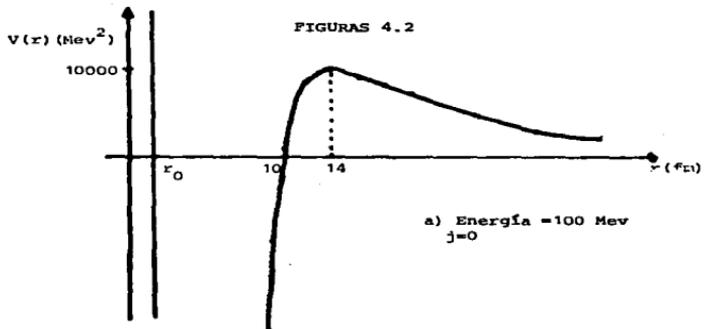
$$V(R_{\text{max}}) = \frac{M_0^2 c^4 (\lambda(\lambda+1))^2}{\hbar^2 k^2 c^2} \quad [V] = \text{MeV} \quad (4.4)$$

Podemos observar que conforme aumentamos la energía, la posición del máximo del potencial se acerca a la barrera infinita, lo cual tiene como resultado que el sistema se encuentre más localizado. También vemos que la altura del máximo aumenta con la energía lo cual provoca que la joroba sea más alta y que aún para energías grandes sigamos teniendo efectos dispersivos. Para valores de la energía suficientemente grandes, la posición del máximo del potencial y la posición de la barrera podrían llegar a confundirse y entonces ya no habrían cambios de signo en el potencial.

Para evitar que se presente esta posibilidad, es necesario que la posición de la barrera sea una función de la energía, de tal forma que el potencial en cuestión presente siempre cambios de signo. Al calcular los corrimientos de fase, encontraremos cómo dependen éstos del valor que tenga la posición de la barrera infinita.

La figura 4.2 muestra los potenciales obtenidos para tres diferentes valores de la energía, manteniendo el resto de los parámetros constantes.

FIGURAS 4.2



En cuanto a la anchura de la barrera del potencial, vemos que conforme aumentamos la energía la barrera se hace más estrecha.

La tabla 4.1 muestra la variación de la posición de los máximos del potencial así como el valor de éstos en función de la energía para el caso monopolo ligero sin espín y electrón.

Energía (Mev)	R_{\max} (fm)	$v^2 (R_{\max})$ (Mev ²)
100	14	9900
500	6.2	248000
1000	4.5	952000

Tabla 4.1

Para estudiar las resonancias de un sistema se puede proceder de varias formas, una de las más comunes es la de asociarlas con los polos de la matriz de dispersión (5,6,7). El punto que todos los tratamientos tienen en común es que la rápida variación de la sección eficaz de dispersión alrededor de la energía de resonancia E_r está relacionada con la existencia de un estado cuasi ligado del sistema blanco proyectil con energía igual a la energía de resonancia.

Si lanzamos un proyectil con energía $E = E_r$, entonces éste puede ser capturado temporalmente formándose un estado metaestable y es ésta posibilidad la responsable de las violentas variaciones de la sección eficaz con la energía.

Antes de calcular los corrimientos de fase producidos por el potencial dado por la ecuación (4.1), consideraremos el caso de un potencial dispersor del tipo P/r^2 .

La razón de hacer ésto, es que podemos obtener una expresión

analítica para los corrimientos de fase y conociendo esta, comparar con la solución numérica que involucra el cálculo de funciones Bessel $J_{\nu_1}(kr)$ y $Y_{\nu_1}(kr)$ así como una integración numérica de la ecuación diferencial y tendremos así una manera de estimar la precisión de nuestros cálculos.

La ecuación diferencial radial a resolver para la onda parcial l es:

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0 \quad (4.5)$$

En ausencia de potencial dispersor, la solución puede escribirse como una combinación lineal de las funciones esféricas de Bessel

$$u_{2l}(r) = A(k) j_l(kr) + B(k) y_l(kr) \quad (4.6)$$

imponiendo ahora la condición a la frontera $u_l(0) = 0$ vemos que $B(k) = 0$ de donde:

$$u_{2l}(r) = A(k) j_l(kr)$$

que asintóticamente se comporta como $\sin(kr - \pi l/2)$ (4.7)

Ahora bien, escribiendo $k^2 + p = \nu^2 - \frac{1}{4}$ vemos que la solución más general de la ecuación (4.5) es de la forma:

$$u_{\nu}(r) = [A'(k) J_{\nu}(kr) + B'(k) Y_{\nu}(kr)] \sqrt{r} \quad (4.8)$$

e imponiendo la condición $u_{\nu}(0) = 0$ nos queda:

$$u_{\nu}(r) = A'(k) \sqrt{r} J_{\nu}(kr)$$

que asintóticamente se comporta como:

$$u_{\nu}(r) = A'(k) \left\{ \cos(kr - \sqrt{k^2 + p} r - \frac{\pi}{2}) + e^{i\pi/2} \frac{J_{\nu}(kr)}{Y_{\nu}(kr)} \right\} \quad (4.9)$$

Obtenemos el corrimiento de fase δ_l comparando las ecuaciones (4.7) y (4.9)

$$\delta_l = \frac{\pi}{2} \left[(l + \frac{1}{2}) - \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 + p} \right] \quad (4.10)$$

vemos que si no hay potencial dispersor, el corrimiento de fase es nulo, si el potencial es repulsivo, el corrimiento es negativo y si el potencial es atractivo, el corrimiento es positivo. Para que ésta última posibilidad tenga sentido, es necesario que $|p| < (1+\frac{1}{2})^2$. Ya que de otra forma, se tendría una singularidad atractiva en el origen, en cuyo caso la partícula llevaría a cabo un movimiento de tipo helicoidal con cada vez mayor frecuencia angular y la solución de la ecuación no estaría bien definida en el origen (4).

Una manera de evitar este problema es introducir una barrera infinita a una cierta distancia del origen (8), al hacerlo, se obtiene una ecuación radial similar a la obtenida al estudiar el caso no relativista. Sin embargo, debido a que este tipo de potencial no presenta cambios de signo, no es posible que se presenten estados ligados ni resonantes para el sistema.

Un punto que es interesante hacer notar, es que los corrimientos de fase dados por la ecuación (4.10) son independientes de la energía y dependen solamente de la intensidad del potencial dispersor P/r^2 .

Para calcular numéricamente los corrimientos de fase producidos por el potencial P/r^2 escribimos la solución como

$$u_{\lambda}(r) = \sqrt{r} [A(\lambda) J_{\lambda}(kr) + B(\lambda) Y_{\lambda}(kr)]$$

y definimos el corrimiento de fase mediante la expresión (6):

$$\tan \delta_{\lambda} = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} \quad (4.11)$$

Escribiendo la solución en dos puntos sucesivos y sustituyendo en (4.11) obtenemos:

$$\tan \delta = \frac{\sqrt{r_1} J_{\lambda}(kr_1) - P \sqrt{r_{01}} J_{\lambda}(kr_{01})}{\sqrt{r_1} Y_{\lambda}(kr_1) - P \sqrt{r_{01}} Y_{\lambda}(kr_{01})} \quad (4.12)$$

siendo ξ el cociente entre las soluciones en puntos consecutivos

$$\xi = \frac{U(r_{n+1})}{U(r_n)} \quad (4.13)$$

Para encontrar los corrimientos de fase dados por la ecuación (4.12) es necesario calcular las funciones de Bessel $J_{\nu_{n+1}}(kr)$, $Y_{\nu_{n+1}}(kr)$ lo cual hacemos a partir de (KLEIN) un programa que primero calcula las funciones de Coulomb $F_{\nu}(q, x)$, $G_{\nu}(q, x)$ y a partir de éstas obtenemos las Bessel mediante la relación (9)

$$J_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi x}} F_{\nu-\frac{1}{2}}(0, x)$$

$$Y_{\nu}(x) = -\sqrt{\frac{x}{\pi x}} G_{\nu-\frac{1}{2}}(0, x)$$

Además debemos calcular la solución de la ecuación diferencial en puntos sucesivos r_n , r_{n+1} lo cual hacemos utilizando el método de Noumerov (10).

La razón por la que hacemos el cálculo numérico en este caso, es por que al tratar el problema de una carga magnética sin espín, la cual interacciona con una carga eléctrica mucho más masiva, la solución asintótica es expresable en términos de las funciones de Bessel de orden real y puesto que ahora tenemos una expresión analítica para los corrimientos de fase, podemos comparar la solución numérica con la solución analítica y de esta manera tener una idea acerca de la precisión de nuestro cálculo.

Tabla # 4.2

Lambda	Beta	Delta anal.	Delta num.	DA/DN
1.8	2.25	-0.67625	-0.67325	1.0044
1.8	4.30	-1.21306	-1.21020	1.0023

De la tabla 4.2 vemos que los valores calculados numéricamente se encuentran razonablemente cerca de los obtenidos en forma analítica siendo la diferencia menor al 1% y además, si queremos, podemos en principio, incrementar la precisión de nuestros cálculos.

Pasemos ahora al cálculo de los corrimientos de fase producidos por el potencial de la ecuación (4.1). La ecuación diferencial radial a resolver es:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{A(\omega) + p(\omega)}{r^2} + \frac{k^2 \epsilon^2}{4\pi \omega^2 r^2} + \frac{\epsilon^2 \omega^2}{4\pi c^2} + U(\omega) \right] R(\omega) = 0$$

haciendo el cambio de función $u(r) = \frac{R(r)}{r}$ obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{A(\omega) + p(\omega)}{r^2} + \frac{k^2 \epsilon^2}{4\pi \omega^2 r^2} \right] u = 0 \quad r \gg r_0 \quad (4.14)$$

que salvo por el término proporcional a $1/r^4$ es de la misma forma que la ecuación (4.5). Para valores grandes de r , el término en $1/r^4$ tiende a cero y es despreciable comparado con el término "centrífugo" y en esa región, la ecuación (4.14) se reduce a la ecuación (4.5). Entonces, la solución asintótica de la ecuación (4.14) está dada por las funciones Bessel de orden real $J_{\nu_1}(kr)$, $Y_{\nu_2}(kr)$. Si consideramos al término $A(\omega) + p(\omega)$ como u_m potencial centrífugo "efectivo", tendremos que los corrimientos de fase serán medidos con respecto al número $A(\omega) + p(\omega)$. Esto tiene como consecuencia que el potencial dispersor no será el dado por la ecuación (4.1) debido a que le estaremos quitando la parte correspondiente a $p(\omega)$. Si por otra parte, tomamos el caso en que no hay potencial dispersor, ($p = 0$ y $U(x) = 0$), la ecuación (4.1) se reduce a $A(\omega)/r^2$ y la ecuación diferencial radial a resolver es la ecuación libre

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{A(\omega)}{r^2} \right] u = 0$$

cuyas soluciones están dadas por la ecuación (4.7). Es entonces razonable el medir a los corrimientos de fase con respecto al momento angular orbital aunque este no sea un buen número cuántico y no nos sirva para caracterizar a los estados del sistema.

Para calcular los corrimientos en forma numérica, procedemos de manera similar a la utilizada en el caso anterior, con la única diferencia de que ahora las soluciones numéricas que obtengamos serán solución de la ecuación diferencial radial (4.14) y no de la ecuación diferencial radial (4.5).

Los corrimientos de fase así obtenidos se muestran en las figuras (4.3) y (4.4) para diferentes valores de r_0 .

Podemos notar que los corrimientos de fase resultan prácticamente independientes de la posición de la barrera siempre y cuando el valor de r_0 sea menor o igual a 1fm . Para valores grandes de r_0 la situación cambia drásticamente, haciéndose los desfases altamente dependientes del valor de r_0 . Esto podemos entenderlo si consideramos que la barrera infinita que hemos introducido es vista por la partícula incidente como una esfera dura. Si la esfera es pequeña, comparada con la longitud de onda asociada a la partícula incidente, el proceso de dispersión será prácticamente independiente de ésta, pero, si la esfera es grande, entonces sus efectos serán cada vez más importantes.

Obtuvimos también los corrimientos de fase producidos por un muón (masa 105.659 Mev) sobre un monopolio ligero sin espín. Las expresiones para los corrimientos son las mismas y la única diferencia está en el valor de la masa que interviene en el factor $\epsilon = \frac{h^2}{4\pi^2 \mu c^2}$.

A partir de la expresión para el término centrífugo, vemos que

FIGURA (4.3).

Corrimientos de fase para el caso $j_0=0$, $r_0=0.01\text{fm}$
del proceso monopolio ligero - electrón.

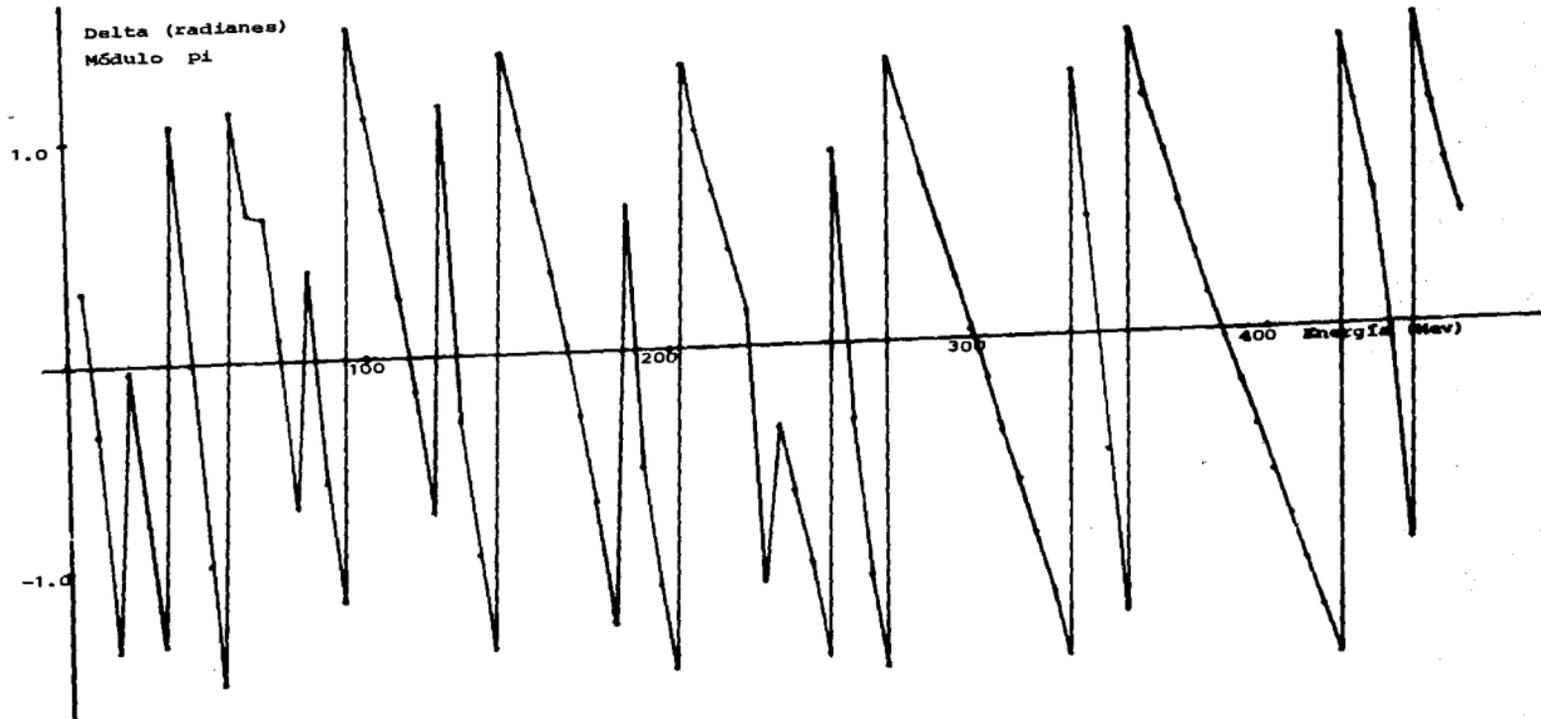
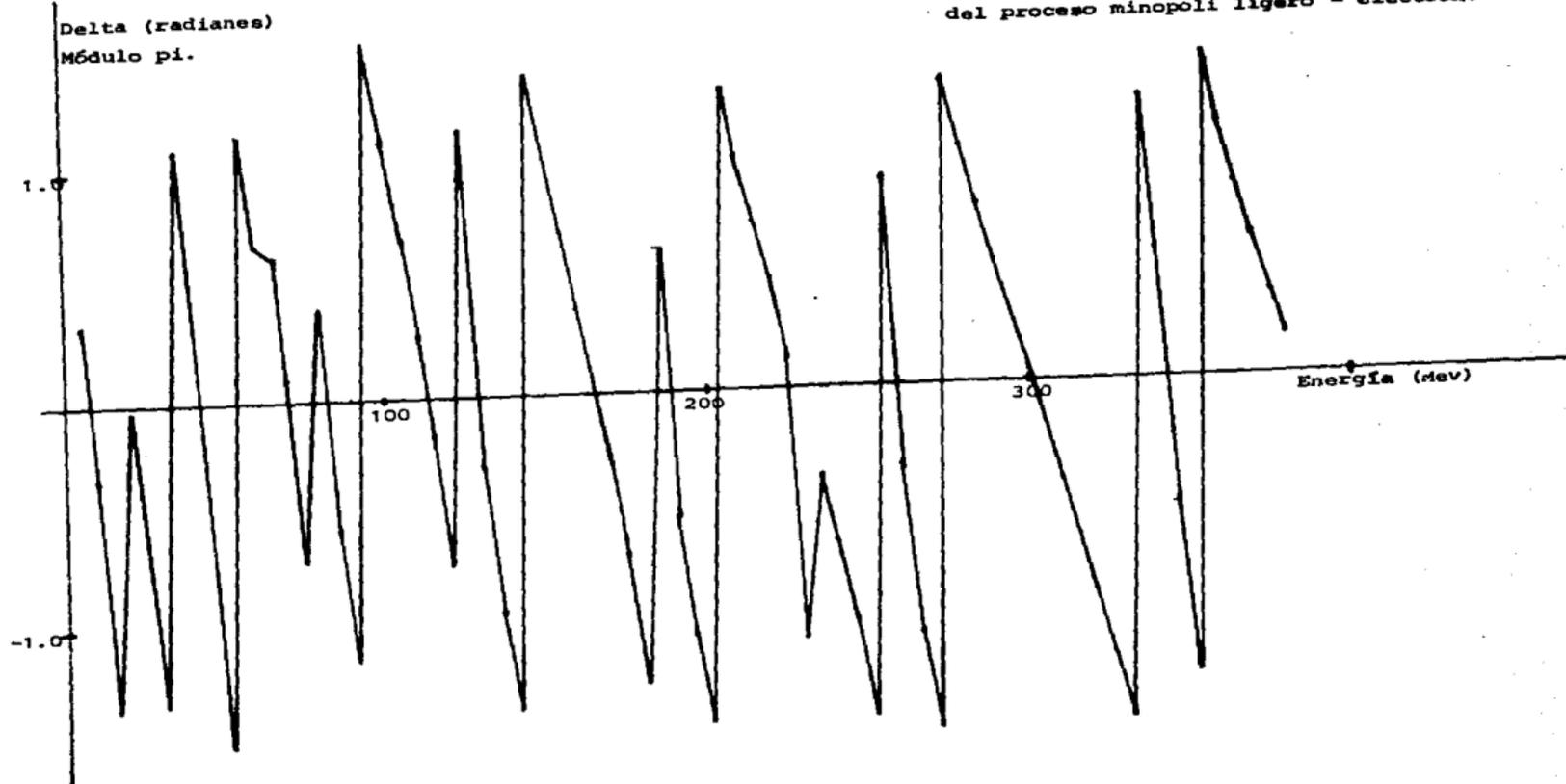


FIGURA (4.4)

Corrimientos de fase para el caso $j_0=0$, $r_0=0.001$ fm.
del proceso minopoli ligero - electrón.



para energías menores a 200 Mev $\ll 1$ mientras que para energías altas digamos de 500 a 1000 Mev sus valores se encuentran en el intervalo $2.5 \ll \ll 5.0$ y son comparables con los valores que puede tomar el momento angular. Al aumentar la energía es necesario tener en cuenta un mayor número de valores de j para describir el proceso de dispersión. La tabla # 4.3 muestra la variación de la posición de los máximos del potencial así como el valor de éstos en función de la energía para el caso monopolo ligero-muón.

Tabla # 4.3

Energía (Mev)	R_{\max} (fm)	$V^2(R_{\max})$ (Mev ²)
110	4.39	23.10
150	1.44	2012.57
200	0.94	9011.79
300	0.69	38051.54
400	0.56	87146.37
500	0.48	156296.27
1000	0.32	802871.94

Podemos notar de la tabla anterior que para el caso monopolo ligero-electrón, el comportamiento es similar al observado para el caso monopolo ligero-muón con la única diferencia de las intensidades de los máximos. Por otra parte, notemos que en el eigenvalor de la ecuación angular aparece un radical y si queremos que el potencial dispersor sea real, es necesario que el radicando sea mayor o igual a cero. Esto impone la condición de que para $j=0$, el menor valor de la energía sea:

$$E \geq m_0 c^2 \quad \text{y} \quad E \geq m_0 \mu c^2 \quad \mu = \frac{1}{2}$$

y no podemos tratar de utilizar el teorema de Levinson para investigar los estados ligados del sistema.

Debido a que en este caso no contamos con una expresión analítica para los corrimientos de fase, utilizaremos un método aproximado (WKB) para calcularlos y poder así comparar con nuestros resultados numéricos. Es de esperar que encontremos diferencias entre los resultados numéricos y los que resulten de la aproximación, pero si los corrimientos de fase han sido calculados correctamente, las diferencias deberán ser pequeñas, al menos en la región de energías en que se supone válida la aproximación.

El uso del método semiclásico para el cálculo de los corrimientos de fase producidos por potenciales singulares, ha demostrado ser de gran utilidad en trabajos anteriores (4).

Hicimos el cálculo de los corrimientos de fase con el método semiclásico para el caso en que éstos son medidos con respecto al potencial centrífugo "efectivo" $(\frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r))$ y los comparamos con el cálculo numérico para ese mismo caso en las figuras (4.5) y (4.6)

FIGURA (4.5)

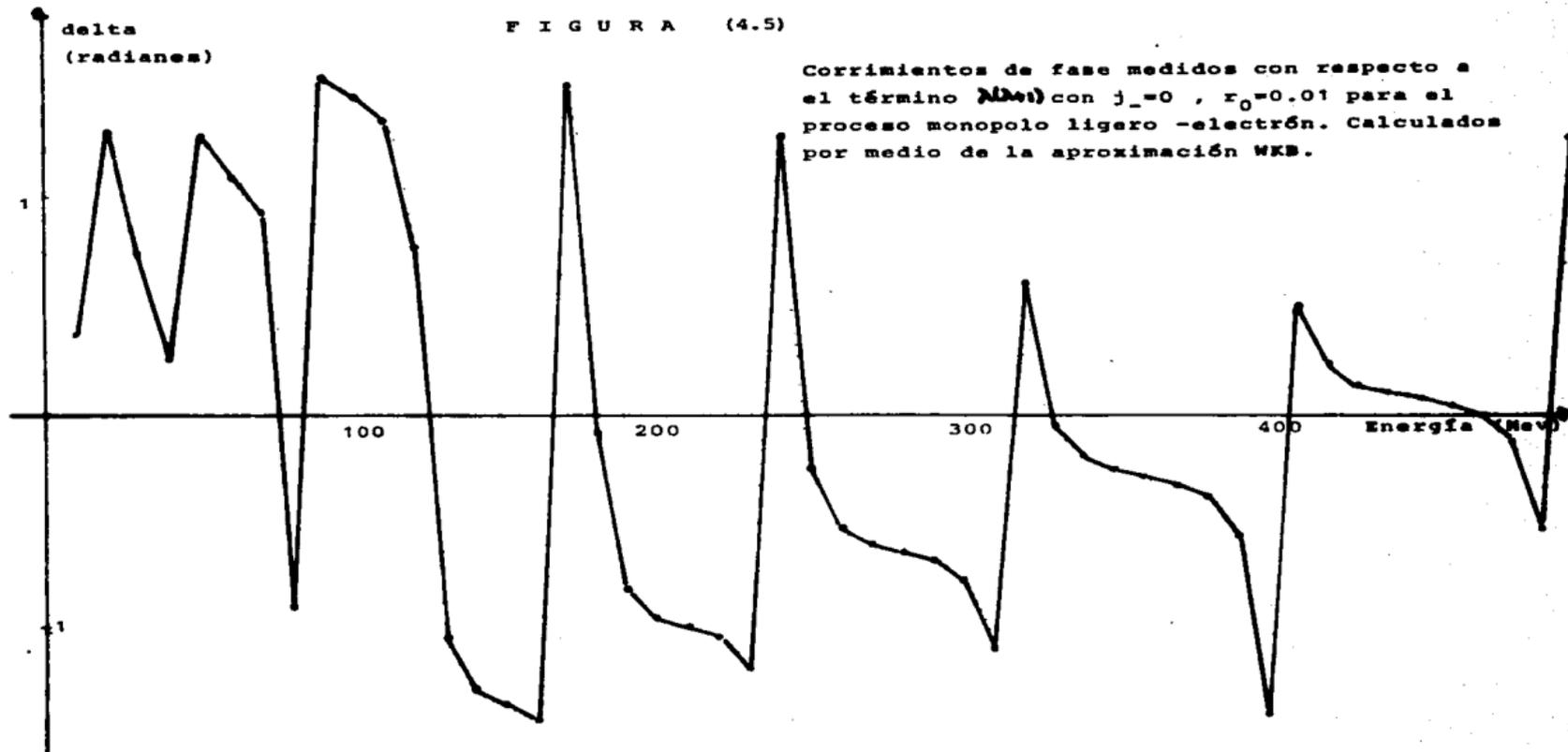
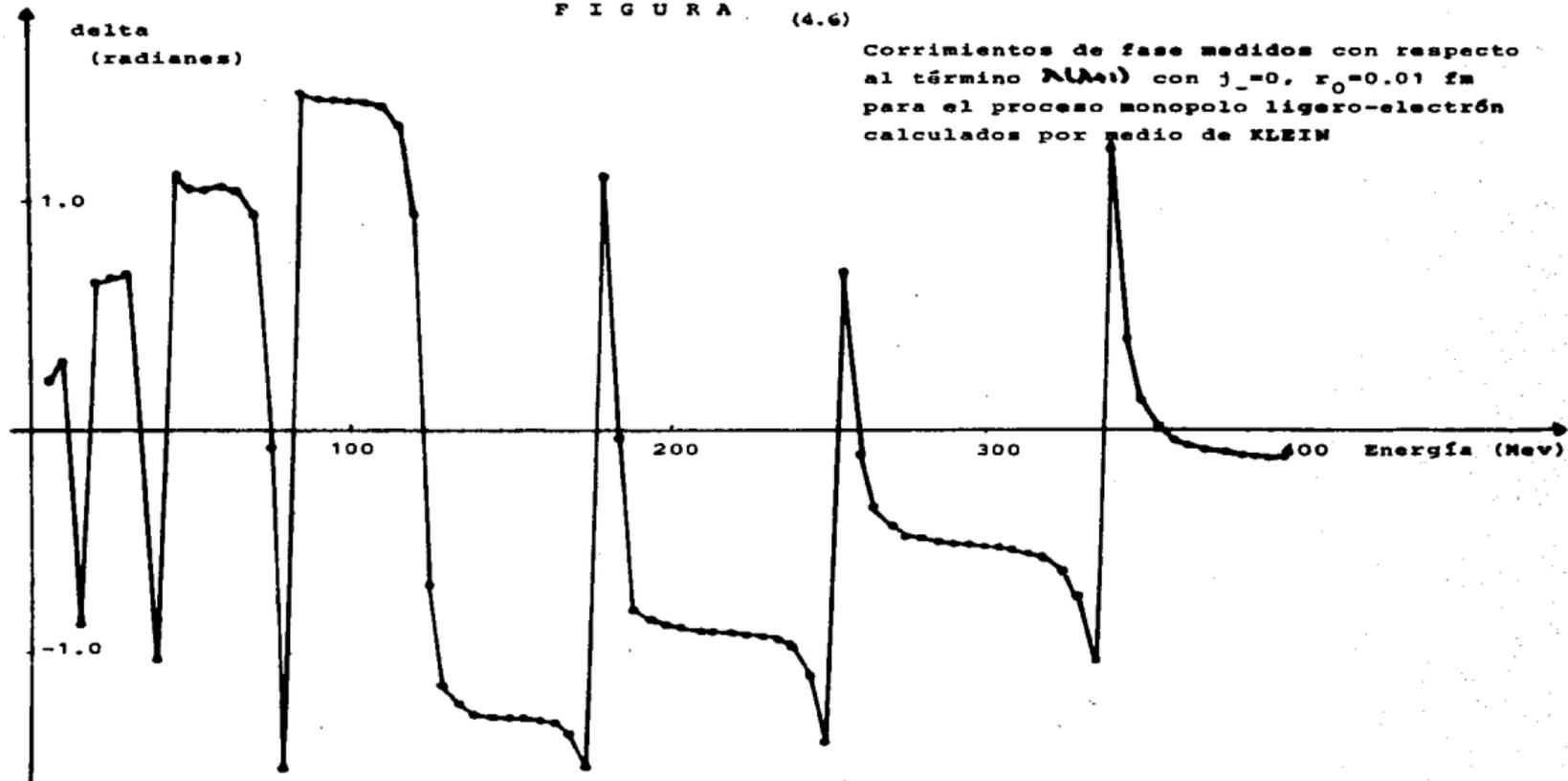


FIGURA (4.6)



APROXIMACION SEMICLASICA.

La aproximación semiclásica consiste en proponer una solución de la forma

$$\psi = e^{ikr} \quad (4.13)$$

la cual sustituimos en la ecuación de Schrödinger (2) y hecho esto escribimos ψ como una serie de potencias en \hbar .

A orden cero en \hbar obtenemos:

$$\nabla_0 = \pm \int \sqrt{2m(E - V(x))} dx = \pm \int p(x) dx \quad (4.14)$$

Para que la aproximación semiclásica sea válida, es necesario que

$\hbar \left| \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right| \ll 1$ o bien, en primera aproximación que $\left| \frac{1}{2\lambda} \right| \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1$ siendo λ la longitud de onda de de Broglie de la partícula. Esta condición indica que la longitud de onda de la partícula debe variar lentamente en distancias que son del mismo orden que ella misma.

Conservando términos a primer orden en \hbar obtenemos

$$r_1 = -\frac{1}{2} \log p \quad (4.15)$$

En esta aproximación podemos escribir:

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{p}} e^{i \int p dx} + \frac{C_2}{\sqrt{p}} e^{-i \int p dx} \quad (4.16)$$

en regiones del espacio clásicamente inaccesibles, el impulso de la partícula es imaginario y la ecuación anterior se transforma en

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} e^{i \int |p| dx} + \frac{C_2}{\sqrt{|p|}} e^{-i \int |p| dx} \quad (4.17)$$

Consideremos ahora el caso en que tenemos un punto de retorno en

$x=a$, esto es $U(a)=E$, y además supongamos que $U(x) > E$ para $x > a$.

La función de onda debe ser de la forma

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} e^{-i \int |p| dx} \quad x > a \quad (4.18)$$

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{p}} e^{i \int p dx} + \frac{C_2}{\sqrt{p}} e^{-i \int p dx} \quad x < a$$

Para calcular los coeficientes que aparecen en estas ecuaciones, es necesario que sigamos el comportamiento de la función de onda desde valores positivos de $x-a$ hasta valores negativos. Al hacerlo habremos de pasar por regiones del espacio en donde el criterio de aplicabilidad de la aproximación deja de ser válido (conforme nos acerquemos a $x=a$) y es entonces necesario conocer la solución exacta en esas regiones. Podemos evitar esta dificultad si consideramos a la función de onda ψ como una función de la variable compleja z y rodeamos el punto de retorno mediante un circuito tal que siempre nos encontremos suficientemente alejados de $x=a$, y de esta manera se satisfaga la condición de aplicabilidad de la aproximación. Al hacerlo se obtiene:

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad x < a \quad (4.19)$$

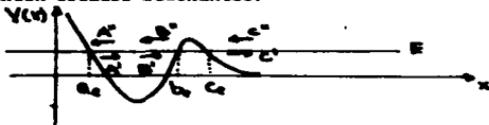
mientras que si el punto de retorno se encuentra a la izquierda, la función de onda es de la forma:

$$\psi = \frac{D}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad x > a \quad (4.20)$$

Esta expresión nos da el comportamiento asintótico de la solución y podemos calcular con ella los corrimientos de fase en esta aproximación, siempre y cuando calculemos el impulso de la partícula con el potencial efectivo. Sin embargo, cuando el punto de retorno se encuentra cercano al origen, ya no podemos considerarlo como un punto aislado ya que el término centrífugo presenta una singularidad en el origen. Para resolver esta dificultad, Langer (18), propone que se haga el cambio de variable $r = e^{\eta}$ con lo cual la singularidad del origen es trasladada a $-\infty$ y podemos entonces tratar al punto de retorno como un punto aislado. El efecto neto de hacer la transformación propuesta por Langer, es que debemos reemplazar $\frac{d}{dx}$ por $\frac{d}{d\eta}$ para obtener el impulso generalizado.

$$h_{\eta}^2(\eta) = h^2 U(\eta) - \frac{1}{4} \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2$$

Ya que hemos visto cual es la forma de las soluciones tanto a la izquierda como a la derecha de los puntos de retorno, consideremos el caso de un potencial que presenta las condiciones necesarias para que se presenten estados resonantes.



Utilizando la forma aproximada de las soluciones en las regiones comprendidas entre los puntos de retorno y a la derecha de estos, obtenemos:

$$\Psi_e(x) = \frac{1}{\sqrt{k_e(x)}} \left\{ A' e^{i \int_{a_e}^x k_e(x) dx} + A'' e^{-i \int_{a_e}^x k_e(x) dx} \right\} \quad (4.21)a \quad r \rightarrow a_e$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_e(x)}} \left\{ B' \exp(i \int_{a_e}^x k_e(x) dx) + B'' \exp(-i \int_{a_e}^x k_e(x) dx) \right\} \quad (4.21)b \quad r \rightarrow b_e$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_e(x)}} \left\{ C' \exp(i \int_{a_e}^x k_e(x) dx) + C'' \exp(-i \int_{a_e}^x k_e(x) dx) \right\} \quad (4.21)c \quad r \rightarrow c_e$$

con A', B', C' etc. las amplitudes que se indican en la figura.

Para un potencial de tipo oscilador armónico $V(x) = \frac{1}{2} \mu(x - x_0)^2$ el corrimiento de fase resonante $\delta_e^{(r)}$ está dado por (8):

$$\delta_e^{(r)} = \arctan \left\{ \frac{(e^{2\pi i} + 1)^{1/2} - 1}{(e^{2\pi i} + 1)^{1/2} + 1} \tan \delta \right\} \quad \delta = \alpha_e - \frac{3\pi}{2} \quad (4.22)$$

y la forma asintótica de la solución es:

$$\Psi_e(x) = \frac{1}{2\sqrt{k_e(x)}} \left[e^{i(k_e x - \frac{\pi}{2} - \delta)} + i \frac{1}{k_e} k_e'(x) e^{-i(k_e x - \frac{\pi}{2} - \delta)} + e^{-i(k_e x - \frac{\pi}{2} - \delta)} - i \frac{1}{k_e} k_e'(x) e^{i(k_e x - \frac{\pi}{2} - \delta)} \right] \quad (23)$$

que puede escribirse como:

$$\Psi_e(x) = \frac{1}{\sqrt{k_e(x)}} \sin(k_e x - \frac{\pi}{2} + \delta) \quad (4.24)$$

ecuación que define al corrimiento de fase para la onda parcial 1. Comparando esta expresión con la ecuación (4.23) encontramos que los corrimientos de fase para la onda parcial 1 están dados por

$$\eta_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^r k_0(r) dr - kr + (2n+1)\frac{\pi}{2} + \delta_1^{(n)} - \frac{2\pi n}{2} \right\} \quad (4.25)$$

en donde vemos la aparición del llamado término resonante.

Tomando el caso en que la energía de la partícula es mayor que la altura máxima del potencial, el corrimiento resonante queda dado por

$$\delta_1^{(n)} = \alpha_n - \frac{2\pi n}{2}$$

y podemos escribir el corrimiento de fase como:

$$\eta_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^r k_0(r) dr - k_0(r)r + (2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha_n \right\} \quad (4.26)$$

que coincide con el que se obtiene al tener un solo punto de retorno.

El efecto interesante del corrimiento resonante, se presenta cuando la energía de la partícula es menor que la altura máxima del potencial, ya que en tal caso es posible que la partícula penetre en la región comprendida entre los puntos de retorno y se forme de esta manera un estado metaestable, el cual decaerá después de un cierto tiempo τ .

La expresión para el corrimiento resonante se reduce en tal caso

a:

$$\delta_1^{(n)} = \arctan \left\{ \frac{1}{4} e^{-2S_1} \tan \pi \right\} \quad (4.27)$$

expresión generalmente pequeña, salvo para aquellos valores de la energía para los cuales $S_1 = (n+0.5)\pi$ con n entero, en cuyo caso $\delta_1^{(n)}$ crece rápidamente llevando a cabo un cambio en π radianes.

Para calcular los corrimientos de fase producidos por el potencial dado en la ecuación (4.1), hicimos un desarrollo del potencial en series de Taylor manteniendo términos de hasta segundo orden. Esta aproximación será válida para valores de la energía de la partícula que se encuentren cercanos al máximo del potencial, ya que alrededor del máximo podemos

aproximarlo por una parábola.

Afortunadamente, en nuestro caso esta condición se cumple para toda energía ya que como vimos anteriormente el potencial depende de la energía, y la altura del máximo es proporcional a ésta.

Cuando el potencial dispersor no es cuadrático, debe reemplazarse $+i$ por $+ie^{+i\theta}$ en los elementos diagonales de la matriz que liga a los coeficientes de las amplitudes a la derecha de los puntos de retorno con las amplitudes de la solución entre los puntos de retorno. Al hacerlo se obtiene para los corrimientos de fase resonantes, la expresión:

$$\delta_n^{(M)} = \text{Arg} \frac{\text{Tr} \left\{ \frac{(e^{+i\theta} + i)^{2n} \sin \delta - \sin(\theta + \delta)}{(e^{+i\theta} + i)^{2n} \cos \delta + \cos(\theta + \delta)} \right\}}{2} \quad (4.28)$$

en lugar de la expresión (4.23).

Sustituyendo en la expresión para los corrimientos de fase (4.25) obtenemos:

$$\eta_c = -k C_0 + \frac{(k_0 a)^2}{2k_0 C_0} - \frac{k^2 k_0 a^2}{2k_0 k_0 C_0} + (k_0 a) \frac{\pi}{2} + \delta_n^{(M)} - \frac{\delta_n^{(M)}}{2} \quad (4.29)$$

Los resultados obtenidos al calcular los corrimientos de fase con la ecuación (4.29) se muestran en las figuras (4.7) y (4.8). Podemos notar que la forma de los corrimientos en el caso de solución numérica y en el caso de la aproximación WKB, es la misma y hay una buena concordancia entre los resultados predichos por la aproximación y los predichos por el cálculo numérico.

R E F E R E N C I A S

1. R. Jackiw and C. Rebbi Phys. Rev. Lett. 36, 1116 (1976)
2. D. Zwanzinger Phys. Rev. 176, 1480 (1968)
3. M. Berrondo and G. García Calderón Eur. J. Phys. 1, 34, (1982)
4. W.M.Frank, D.J.Land and R.M.Spector Rev. Mod. Phys. 43,36(1971)
5. Goldberger and Watson "Collision Theory" (John Wiley & Sons,
New York, 1964)
6. J.R.Taylor "Scattering Theory" (John Wiley and Sons, New York 1972)
7. Rodberg and Thaler "Introduction to the Quantum Theory of
Scattering" (Academic Press, New York, 1967)
8. D. Sivers Phys. Rev. D-2, 2048 (1970)
9. A.R.Barnett Comp. Phys. Comm. 24,141(1981)
10. F.Scheid "Análisis Numérico" (serie de compendios Schaum)
(McGraw Hill México 1972)
11. Landau & Lifshitz "Curso de Física Teórica" vol III cap.VII
12. R.E.Langer Phys. Rev. 51, 669 (1937)
13. M.S.Child "Molecular Collision Theory" (Academic Press, London 1974)

R E S U L T A D O S Y C O N C L U S I O N E S

A partir de los corrimientos de fase que calculamos en el capítulo anterior, podemos construir la sección eficaz de dispersión para la onda parcial l mediante (1):

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2} \sin^2 \delta_l \quad (R1)$$

en donde l es el momento angular orbital y $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$

Notemos que, dependiendo de la forma en que hayamos definido a los corrimientos de fase, éstos contendrán o no información acerca del potencial centrífugo.

Como mencionamos en el capítulo anterior, la manera correcta de hacerlo es, tomar como potencial dispersor al potencial singular y a la parte correspondiente del potencial centrífugo, esto es, si escribimos:

$$(j_+ - l)^2 - \mu^2 + \sqrt{(l\mu)^2 + a(l-\mu)} = \mathcal{D}(l, \mu) + \mathcal{P}(l, \mu) \quad (R2)$$

siendo l el momento angular orbital y $j_+ = d - 1/2$ con $d = \text{abs}(1 - \mu) = 1/2, 3/2, \dots$

$$l - \mu = \begin{cases} l - \mu & l = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2} & l = 0 \end{cases}$$

entonces si $l > 0$ $\mathcal{P}(l, \mu) = -2l + \sqrt{(l\mu)^2 + a(l-\mu)}$, $\mu = \frac{1}{2}$ (R3)

mientras que si $l = 0$ $\mathcal{P}(l, \mu) = (l - \frac{1}{2})$

siendo \mathcal{P} (E) la parte del potencial dispersor que se comporta como $1/r^2$.

El potencial dispersor es entonces

$$V(r) = \frac{\mathcal{D}(l, \mu)}{r^2} - \frac{\mu^2 \hbar^2 c^2}{4\pi \mu_0^2 c^4 r^4} + \mathcal{U}(r) \quad (R4)$$

con $V(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \dots & r > r_0 \end{cases}$ y $P(E)$ dada por las ecuaciones (R3) cuando $\mu = -1/2$, y el potencial (R4) se anula cuando $\mu = 0$ ya que en tal caso no es necesaria la barrera de potencial, y los corrimientos de fase son tales que cuando no hay carga magnética $\mu = 0$, entonces $\delta_n = 0$.

Para obtener los corrimientos de fase, comparamos la solución asintótica sin potencial dispersor (funciones Bessel de orden entero $J_n(kr)$, $Y_n(kr)$) con la solución asintótica con potencial dispersor (ecuación R4) cuyas soluciones son las funciones Bessel de orden real $J_{\nu}(kr)$, $Y_{\nu}(kr)$.

Los corrimientos de fase que obtuvimos para $\mu \neq 0$ se muestran en la tabla R1

Tabla R1

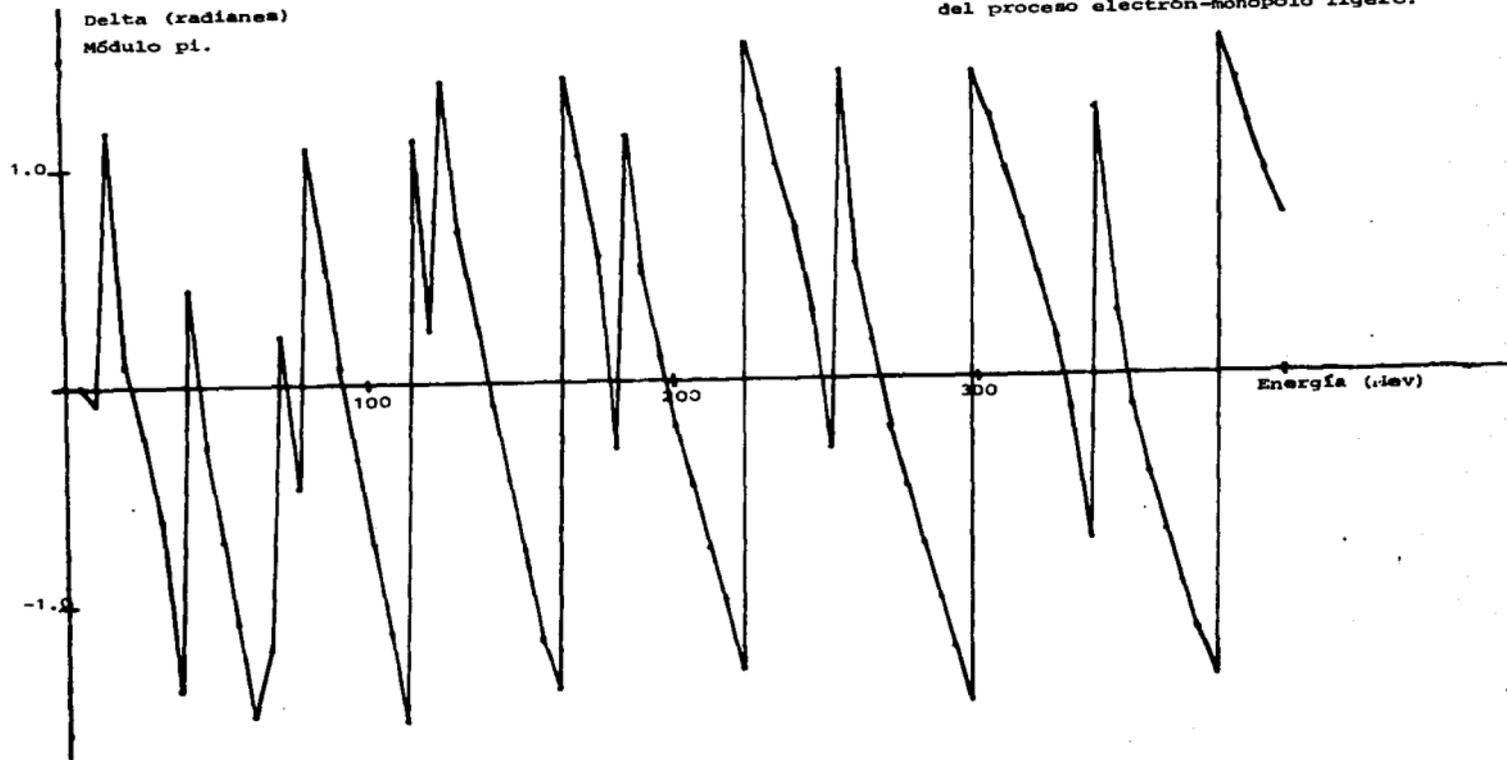
ENERGIA (Mev)	DELTA (módulo π)
160	0.000002
180	0.000003
200	0.000005
300	0.000017

El criterio que se pide para la evaluación de los corrimientos es que la diferencia entre dos valores consecutivos sea menor o igual a 1×10^{-3} .

Las figuras (R1) y (R2) muestran los corrimientos de fase que obtuvimos para el caso electrón - monopolo ligero para dos diferentes valores del momento angular orbital. Podemos observar de las figuras que los corrimientos presentan cambios bruscos (en π radianes) para

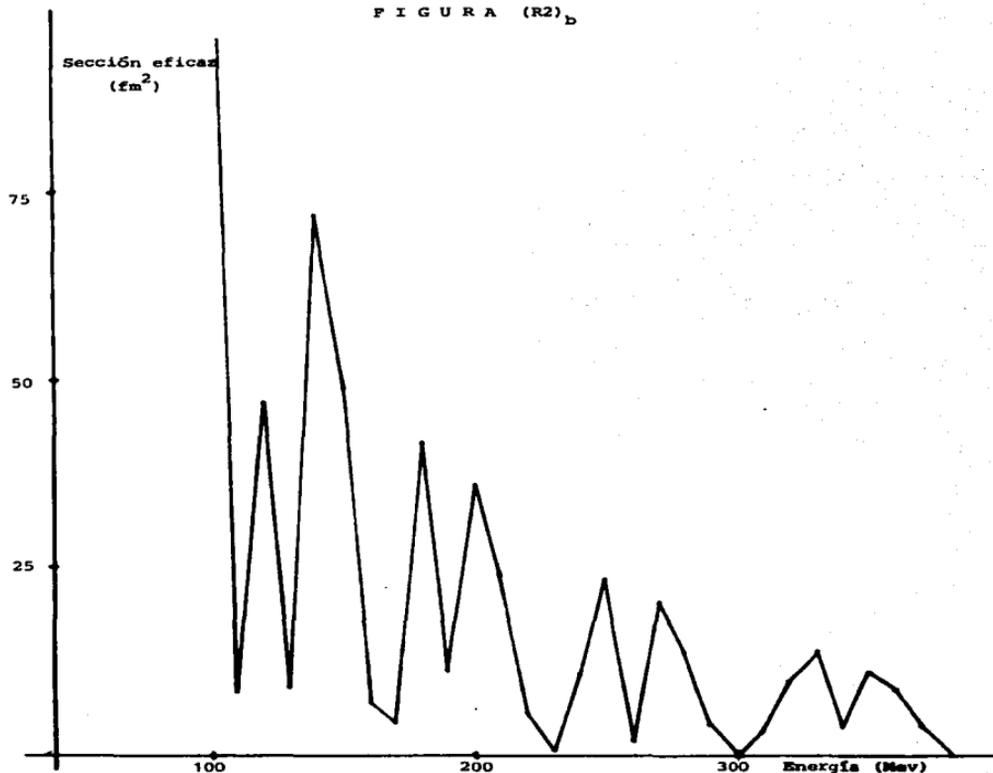
FIGURA (R2)

Corrimientos de fase para el caso $j=1$, $r_0=0.012a$
del proceso electrón-monopolo ligero.



ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

FIGURA (R2)_b



Sección eficaz de dispersión para el proceso electrón - monopolio ligero para el caso en que $j=1$, $r_0=0.01\text{fm}$.

FIGURA (R1)

Corrimientos de fase medidos con respecto al momento angular orbital para el caso $j=0$, $r_0=0.01\text{fm}$. del proceso electrón-monopolo ligero.

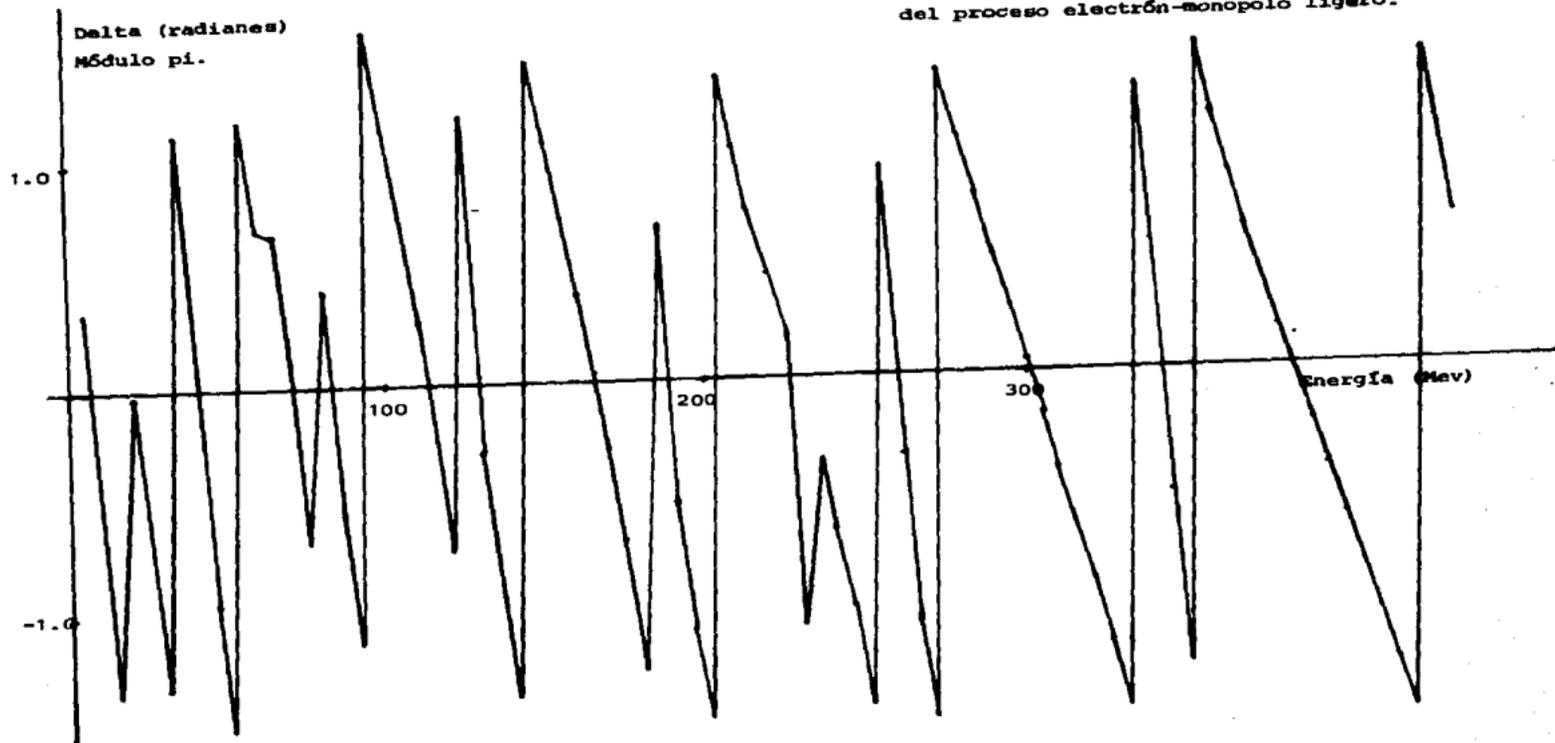
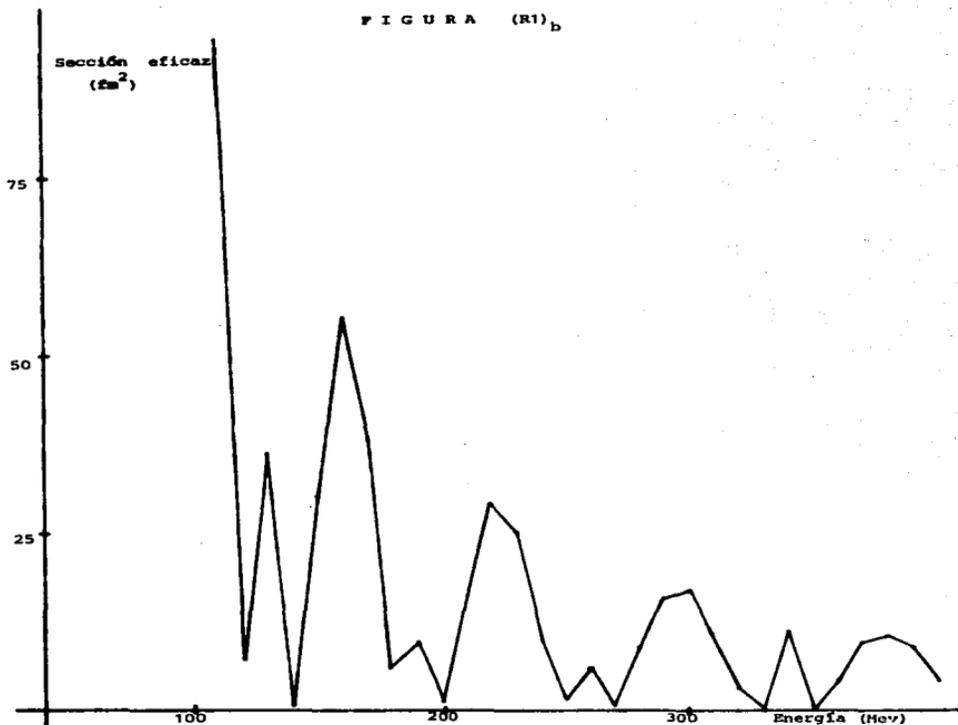


FIGURA (R1)_b



Sección eficaz de dispersión para el proceso electrón - monopolo ligero para el caso en que $j_0 = 0$, $r_0 = 0.01$ fm.

varios valores de la energía. Estas energías pueden interpretarse como energías de resonancia, lo cual se corrobora al calcular la sección eficaz de dispersión y encontrar la presencia de máximos alrededor de tales energías.

A la anchura de la resonancia se le asocia con la vida media del estado metaestable que se ha formado. Cuando se trata directamente con la matriz de dispersión, entonces, lo que se hace es encontrar la posición de sus polos y si éstos se encuentran en el semiplano inferior del plano complejo k , entonces, la parte real de $k^2/2m$ indica la energía de la resonancia y la parte imaginaria nos da la vida media del estado mediante el uso de la relación

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad [\Gamma] = \text{MeV}$$

Vemos entonces que para resonancias con anchuras del orden de Mev, las vidas medias de los estados son del orden de 10^{-23} seg y conforme aumenta la anchura de las resonancias la vida media se hace cada vez menor, hasta que la resonancia desaparece. (la parte imaginaria de $k^2/2m$ se hace muy grande y los efectos del polo dejan de ser observables) (2). Para obtener estados cuyas vidas medias sean mayores, es necesario que la anchura de las resonancias disminuya lo cual corresponde a pedir que la parte imaginaria de $k^2/2m$ se haga más pequeña, es decir que los polos de la matriz S se acerquen al eje real.

Ahora bien, el potencial dispersor (R4) depende de la posición en que coloquemos la barrera infinita que hemos introducido para evitar la singularidad en el origen y podemos pensar en esta distancia r_0 como una medida del máximo acercamiento entre las partículas; por ello, éste parámetro no puede tomar valores arbitrarios y si

consideramos al electrón y al monopolo como partículas prácticamente puntuales, entonces es razonable pedir que $0 < r_0 \leq 1$ fm.

Al calcular los corrimientos de fase en función de la energía, para diversos valores de r_0 encontramos que para aquellos valores de r_0 en que se satisface la condición anterior, los desfases son independientes de que valor tomemos, mientras que para valores grandes de r_0 los corrimientos se hacen fuertemente dependientes del valor que consideremos.

Estos resultados se muestran en la Tabla R2

Tabla R2

ENERGIA (MeV)	DELTA ($r_0 = .001$ fm)	DELTA ($r_0 = .1$ fm)	DELTA ($r_0 = 20$ fm)
10	-.337735	-.337735	-.0705429
50	-1.51504	-1.51504	-1.326892
100	1.11178	1.11178	-0.528291

Tenemos pues, que si queremos mantener la interpretación de r_0 como una medida del máximo acercamiento entre las partículas, el valor que le asignemos no nos sirve para fijar la posición de las resonancias. Recordemos que el Hamiltoniano del problema depende solamente de $p^2 = (\mathbf{p})^2$, y por lo tanto sus eigenvalores son independientes del signo de la carga magnética. Si de acuerdo con Berrondo (3), asignamos una carga magnética al neutrino, entonces debemos tomar $\mu = 1/2$ para así obtener, en el sistema en que el neutrino se encuentra en reposo, un valor de $1/2$ para su momento angular. Además tenemos que la masa del monopolo deberá tender a cero, lo cual está en contra de las suposiciones anteriores acerca de la masa de la carga magnética (4).

Al hacerlo así, obtenemos un potencial en el cual no hay parámetros libres con los cuales pudieramos ajustar las energías de resonancia. Para valores pequeños de la masa del monopoló, esto es; valores tales que $\sqrt{2} \ll E$ siendo $E^2 = m_c^2 c^4 + p^2 c^2$, el potencial dispersor resulta ser independiente de ésta.

De las figuras (R1) y (R2) vemos la existencia de varios valores de la energía para los cuales los corrimientos de fase cambian bruscamente en pi radianes lo cual indica que al evaluar la sección eficaz encontraremos estados resonantes a tales energías. Por otra parte, debido a que $\Delta E \sim \text{Mev}$, y hemos podido localizar resonancias, entonces podemos asegurar que la anchura de las resonancias será al menos de este orden ($\sim \Delta E$) ya que de no ser así no podríamos encontrarlas. Por lo tanto, las vidas medias de los estados serán del orden de 10^{-23} segundos, correspondientes a partículas que decaen mediante interacciones fuertes.

Calculamos también los corrimientos de fase para el sistema muón-monopoló ligero, y obtuvimos los resultados que se muestran en las figuras (R3) para los casos con $j=0$ y $j=1$

Mientras que para el caso monopoló ligero-electrón encontramos varias energías para las que se presentaban resonancias, siendo de gran relevancia que partiendo de un par de objetos muy pequeños (cuyas masas son menores a un Mev) pudimos encontrar estados resonantes a energías del orden de cientos de Mev, en una región en donde además sabemos de la existencia de partículas que decaen mediante la emisión de neutrinos (caso del pión), para el caso monopoló ligero-muón no encontramos estructura, al menos en la región de energías explorada

FIGURA (R3)_a

Corrimientos de fase para el proceso monopolo
ligero - $\mu\alpha\delta n$, para el caso en que $j_0=0$, $r_0=0.01\text{fm}$.

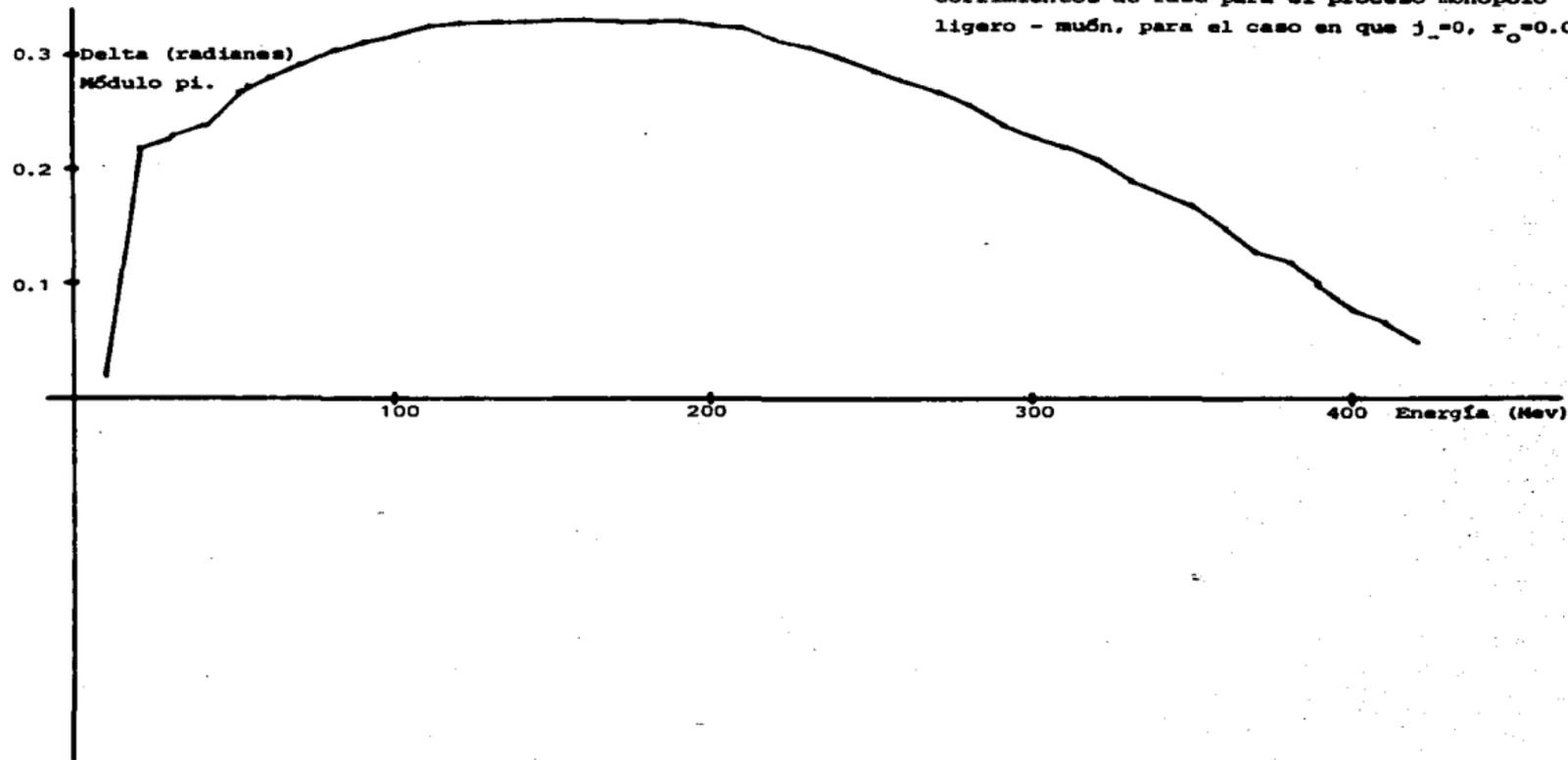
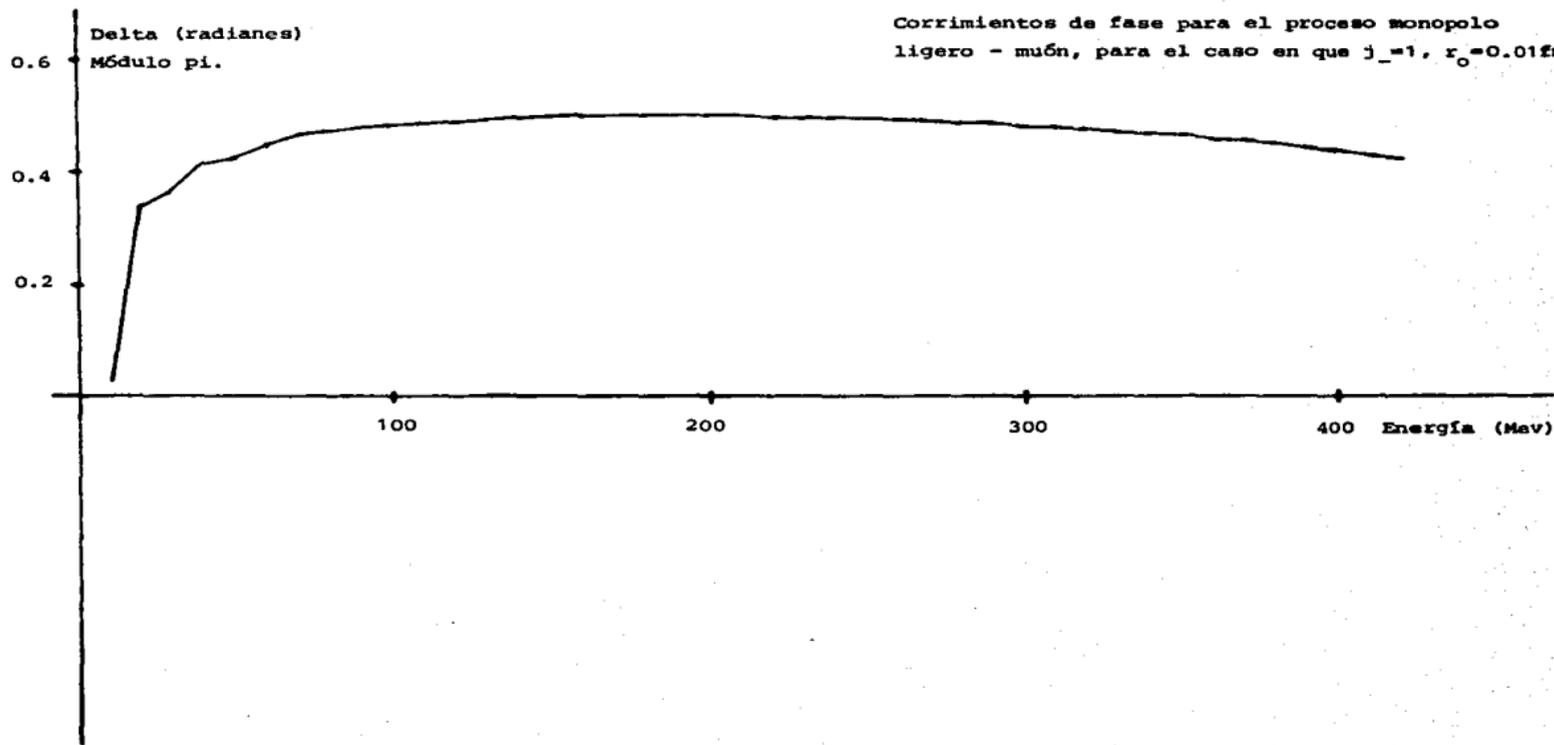


FIGURA (R3)_b

Corrimientos de fase para el proceso monopolito
ligero - muón, para el caso en que $j = 1$, $r_0 = 0.01 \text{ fm}$.



hasta el momento (del orden de 500 Mev).

La diferencia entre calcular los corrimientos de fase con respecto al momento angular orbital o con respecto al eigenvalor de la ecuación angular es, como mencionamos anteriormente, debida a que en el segundo caso estamos calculando la dispersión debida a un potencial diferente del que produce la dispersión en el primer caso. Esta diferencia se hace evidente al comparar las figuras (R1) y (R2).

CONCLUSIONES

Debido a que la carga magnética es un pseudoescalar, entonces, si queremos construir una teoría que sea invariante ante Paridad, deberemos pensar en asociar al neutrino no una carga magnética g sino una combinación de cargas $+g$ y $-g$ tal que tenga paridad definida. Si consideramos la estructura que obtuvimos para el caso electrón-monopolo ligero, vemos que aparecen un número grande de resonancias, una de las cuales podría asociarse con el pión a no ser por el diferente valor de la vida media del estado. La vida media del pión es del orden de 2.6×10^{-8} segundos mientras que las vidas medias que obtuvimos son del orden de 10^{-23} segundos. Por otra parte, hemos encontrado mucho más estructura de la que se conoce en esta región. Partiendo de éstos resultados uno podría pensar que el modelo propuesto en la referencia (#3) debería descartarse; sin embargo, antes de hacerlo, hay que tomar en cuenta que en nuestros cálculos no hemos tomado una combinación de estados $+g$ y $-g$, sino que hemos considerado la interacción entre una carga magnética aislada y un electrón.

Es de esperarse que al tomar una combinación de estados invariante ante paridad, la anchura de los estados disminuya considerablemente debido a que en tal caso el valor medio del operador de carga es nulo y nos quedaremos con una interacción mucho más débil. (3,4).

Aún suponiendo que al tomar la combinación $|2\rangle + |3\rangle$ mantuviésemos la posición de las resonancias en el mismo lugar, lo cual es de esperarse pues el Hamiltoniano no depende del signo de la carga magnética, faltaría ver que pasa con el exceso de estructura que hemos encontrado.

Vemos pues que es prematuro decir si el modelo propuesto se puede o no utilizar para la descripción de las interacciones débiles. Sin embargo, el hecho de que hayamos encontrado estados resonantes en la región de cientos de Mev, nos indica que es posible que el modelo funcione correctamente si somos capaces de encontrar los efectos que no hemos tomado en cuenta y que son responsables del lento decaimiento de los estados resonantes.

R E F E R E N C I A S

1. Rodberg and Thaler "Introduction to the Quantum Theory of Scattering"
(Academic Press, New York, 1967)
2. J.R.Taylor "Scattering Theory" (John Wiley and Sons, New York 1972)
3. M. Berrondo KINAM 3, 157(1981)
4. G.tHooft Nucl. Phys. B79 , 276 (1974)