

00382
8
14



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

**Teoría Estadística de Reacciones Nucleares Mediante
Ensembles de Matrices de Colisión**

T E S I S

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS
(F I S I C A)

p r e s e n t a :
PEDRO PEREYRA PADILLA

00382
1983

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D. F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

INTRODUCCION	1
Capítulo I : EL PROBLEMA FISICO Y LOS TRATAMIENTOS PRINCIPALES. LA FILOSOFIA DEL MODELO DE LA ENTROPIA	18
I.1 Antecedentes Básicos	18
I.1.1 La fórmula de Hauser - Feshbach	18
I.1.2 El modelo óptico	24
I.2 Contribuciones importantes de carácter gene ral	27
I.2.1 La matriz de transmisión generalizada ..	27
I.2.2 La fórmula de Hauser - Feshbach gene ralizada por Vager	28
I.2.3 Una importante simplificación de pro blema. La transformación de Engel- brecht y Weidenmuller	31
I.3 Tratamientos analíticos importantes	32
I.3.1 El formalismo de Moldauer	32
I.3.1a Resultados en la región de reso nancias aisladas	33
I.3.1b Análisis estadístico en la región de resonancias traslapantes	37
I.3.2 Algunos resultados de Kawai, Kerman y McVoy	42
I.3.3 Resultados de Agassi, Weidenmuller y Mantzouranis	45
I.4 Fórmulas ajustadas. La región de absorción intermedia	48

1.4.1	La fórmula de Hofmann, Richert, Tepel y Weidenmuller (HRTW)	48
1.4.2	La fórmula de Moldauer (1980)	52
1.5	El modelo de la Entropía	54
Capítulo II	: DISTRIBUCION MARGINAL PARA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ S Y APLICACIONES	66
II.1	Elemento de volumen en un espacio Euclideo de matrices	67
II.1.1	El elemento de volumen en el espacio de matrices ortogonales (propias)	68
II.1.2	El elemento de volumen en el espacio de matrices unitarias	71
II.1.3	El elemento de volumen en el espacio de matrices simétricas y unitarias	74
II.2	El problema de las matrices ortogonales R	78
II.2.1	La densidad de probabilidad marginal conjunta para los elementos de matrices ortogonales	78
II.2.2	Aplicaciones	82
II.2.2a	Aproximación en el ensemble definido por la medida de Haar Límite $n \gg 1$	82
II.2.2b	Aproximación en el ensemble de máxima entropía. Límite $n \gg 1$ y "absorción arbitraria en uno y dos canales"	83
II.2.2c	Función de distribución marginal para el elemento R_{11} cuando se tiene "absorción fuerte en todos los canales"	89
II.3	El problema de las matrices U unitarias	91
II.3.1	Densidad de probabilidad marginal conjunta para los elementos de matrices unitarias	91

II.3.2.	Aplicaciones.....	94
II.3.2a	Aproximación en el ensemble definido por la medida de Harr $dh(U)$. Límite $n \gg 1$	94
II.3.2b	Aproximaciones en el ensemble de máxima entropía. Límite $n \gg 1$ y absorción arbitraria en uno y dos canales.....	95
II.4	El problema de las matrices S simétricas y unitarias.....	101
II.4.1	La densidad de probabilidad marginal conjunta para los elementos de las matrices S	101
II.4.2	Aplicaciones.....	109
II.4.2a	Aproximación en el ensemble definido por la medida $d\mu(S)$. Límite $n \gg 1$	109
II.4.2b	Aproximaciones en el ensemble de máxima entropía. Límite $n \gg 1$ y absorción arbitraria en uno y dos canales.....	111
Capítulo III	: CONDICIONES DE AE A TODO ORDEN. DISCUSION DE DOS CASOS PARTICULARES.....	116
III.1	El caso de n canales con absorción total en $n-1$ de ellos.....	118
III.2	El caso de dos canales con absorción arbitraria en ambos.....	127
Capítulo IV	: LA FORMULACION DEL PROBLEMA GENERAL.....	137
IV.1	El requerimiento de AE y la propiedad reproductora. (Análisis en el problema de un solo canal).....	138
IV.2	Problema de un solo canal (ilustración).....	141
IV.2.1	Deducción del Kernel de Cauchy en términos de una base ortonormal.....	141
IV.2.2.	Deducción del kernel de Cauchy con base en propiedades de transformación.....	144
IV.3	El problema general, n canales abiertos y absorción arbitraria.....	147
IV.3.1	Una base ortonormal y los kernels de Cauchy y Poisson.....	148
IV.3.2	Deducción del Kernel de Cauchy. La función de densidad en el problema general.....	151

Capítulo V : APLICACIONES.....	162
V.1 Absorción arbitraria en uno y dos canales. Funciones de distribución marginal. Límite $n = 1$	163
V.2 Secciones de fluctuación	166
V.2.1 El problema de dos canales.....	169
V.2.2 Algunos resultados de las secciones de fluctuación para varios canales equivalentes.....	175
Conclusiones.....	179
Apéndices.....	182
Referencias.....	211

RESUMEN

Se formula una teoría estadística de reacciones nucleares mediante ensembles de matrices de colisión; estos ensembles son de máxima entropía y covariantes bajo la transformación unitaria $S \rightarrow S = USU^T$. Se definen leyes estadísticas directamente sobre los elementos de la matriz S a través de la preservación rigurosa de conservación de flujo (unitariedad), reversibilidad temporal (simetría) y causalidad (analiticidad); además, se postula una hipótesis de ergodicidad en el sentido de substituir promedios energéticos por promedios en el ensemble. Esta teoría es válida para cualquier valor que se asigne al coeficiente de transmisión, al número de canales e incluso en presencia de reacciones directas. Los resultados obtenidos para las secciones de fluctuación y el factor de intensificación elástica (elastic enhancement factor), están en excelente acuerdo con las predicciones de las teorías analíticas existentes (válidas en los límites de absorción fuerte o débil) y con las de las fórmulas ajustadas a cálculos de Monte Carlo (válidas para un número reducido de canales).

ABSTRACT

A statistical theory of nuclear reactions is formulated by means of scattering matrix ensembles, which are of maximal entropy and covariant under the unitary transformation $S \rightarrow S = USU^T$. The statistical laws are defined directly on the S -matrix elements through a rigorous preservation of flux conservation (unitarity), time reversibility (symmetry) and causality (analyticity); further, an ergodicity assumption is made in the sense that energy averages may be replaced by ensemble averages. This theory is valid for any value of the transmission coefficient, any number of channels and also in presence of direct reactions. The results are in a very good agreement with the predictions of the analytic theories (valid in the strong or weak absorption limits) and with formulas fitted to Monte Carlo calculations (valid for a reduced number of channels).

INTRODUCCION

Si se tiene una reacción nuclear y se observa la función de excitación asociada a ella, es evidente su complicada variación con la energía. Sin embargo, se distinguen algunas propiedades muy importantes.

En la región de bajas energías es característica la presencia de resonancias aisladas y estrechas que reflejan la existencia de estados cuasi estacionarios en el sistema compuesto. Las resonan

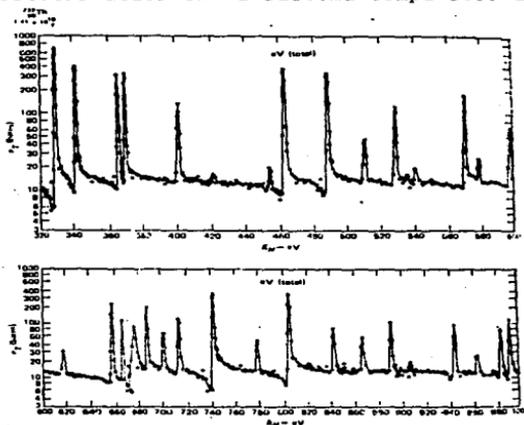


fig. 1. Sección eficaz total de neutrón en ^{232}Th . 1)

cias se pueden estudiar individualmente²⁾ y también se han esta-

1. Tomado de BNL-325 2da edición, Suplemento No. 2
2. G. Breit y E.P. Wigner, Phys. Rev. 49 (1936) 519, 642

blecido propiedades de naturaleza estadística para sus anchuras y espaciamentos³⁾. En la parte comprendida entre las resonancias, la sección eficaz varía suavemente con la energía y es casi nula; corresponde a la contribución de fondo y puede ser descrita mediante un potencial promedio.

Al crecer la energía las resonancias se hacen más cercanas y al mismo tiempo aumenta su anchura. Llega el punto en el que ya no es posible separar las resonancias una de otra y la interferen-

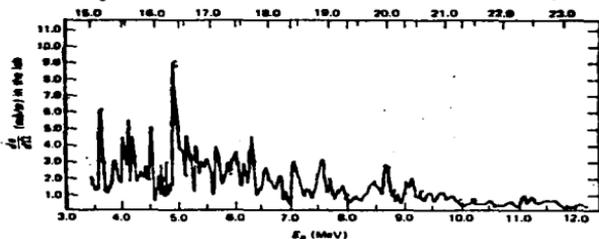


fig.2. función de excitación para la reacción $^{27}\text{Al}(p,)\text{Mg.}^4)$

cia de estas resonancias traslapantes da lugar a las fluctuaciones de Ericson⁵⁾.

La región de resonancias aisladas se llama también la región de absorción débil, para la cual la relación entre la anchura media y el espaciamento medio de las resonancias es $\Gamma \ll D$. La región de resonancias traslapantes se denomina región de absor-

3. C.E. Porter y R.G. Thomas, Phys. Rev. 104 (1956) 483.

4. G.M. Temmer y N.P. Heydenburg, Phys.Rev. 104 (1956) 967.

5. T. Ericson, Ann. Phys. (N.Y.) 23 (1963) 390.

ción fuerte y en ella $\Gamma \gg D$.

Teniendo en cuenta la relación $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$, entre el tiempo de vida media τ de los estados y la anchura Γ de la distribución de energía, la identificación de resonancias y fluctuaciones sobre un fondo de variación lenta con la energía, permite distinguir, en principio, dos mecanismos de reacción nuclear: los procesos directos ($\tau \approx 10^{22}$ s, $\Gamma \approx 1$ MeV) y los que dan lugar a formación de núcleo compuesto ($\tau = 10^{16} \rightarrow 10^{19}$ s, $\Gamma \approx 1 \rightarrow 10^3$ eV). Consecuentemente, en la descripción teórica de las reacciones nucleares, se tiene también dos líneas de investigación fundamentales: las teorías de reacciones directas y las llamadas teorías de resonancia o de núcleo compuesto. Incidentalmente, el problema fisico que nos ocupará en esta tesis está relacionado con la des--cripción de los procesos que dan lugar a formación de núcleo compuesto, más exactamente y según veremos más adelante en esta misma introducción, estamos interesados en la descripción de la parte fluctuante del promedio energético de la sección de reacción* en ausencia de emisiones de preequilibrio. No obstante la diversidad de formulaciones existentes, no se tenía hasta el presente una formulación analítica que resuelva el problema en toda su generalidad. Esta situación constituye la motivación central del presente trabajo y la teoría que presentaremos en los capítulos III, IV y V, establece una formulación analítica y general para la descripción del problema. Es una generalización del mode

* estos conceptos serán discutidos tres páginas adelante.

lo de la Entropía propuesto por P.A. Mello⁶⁾ y como en ese modo, se hace estadística directamente sobre los elementos de la matriz de colisión S ; se construyen, analíticamente, ensembles - de matrices S basandonos esencialmente en la preservación rigurosa de las tres propiedades generales que caracterizan a la matriz de colisión: conservación de flujo (unitaridad), reversibilidad temporal (simetría) y causalidad (esta propiedad, relacionada con la estructura analítica de la matriz de colisión, no estaba incluida en el modelo de la Entropía), más una hipótesis de ergodicidad en el sentido de substituir promedios en la energía \bar{f} por promedios en el ensemble $\langle f \rangle$. Como se sabe, estas -- mismas propiedades son de una u otra manera consideradas en -- los tratamientos tradicionales, tratamientos que aparte de ser válidos solo en dominios restringidos, acuden a la postulación de leyes estadísticas sobre variables microscópicas y a procedimientos realmente complicados.

Después de las aseveraciones que anteceden, hechas con el propósito de indicar desde un principio y en términos generales la naturaleza del problema y lo que se hace en esta tesis, presentaremos, en lo que sigue de esta introducción, un resumen que nos permita establecer, también en términos muy generales, una primera, superficial y cualitativa aproximación al problema, los conceptos y las contribuciones más importantes. En el capítulo I, comentaremos estos trabajos de una manera un tanto más formal pero igualmente resumida.

6. P.A. Mello, Phys. Lett. B81 (1979) 103

La idea de núcleo compuesto fue originalmente introducida por N. Bohr⁷⁾ (1936) para explicar las resonancias estrechas observadas por Fermi y otros para la absorción de neutrones. Por muchos años fue considerado como el principal mecanismo de reacción nuclear. Sin duda, el modelo de núcleo compuesto es uno de los que más ha influido en el análisis de las reacciones nucleares. Según este modelo la reacción nuclear se divide en dos etapas: la formación y el decaimiento del núcleo compuesto. Se postula que el proceso de formación está caracterizado por una interacción fuerte entre el proyectil y los nucleones del blanco; las resonancias son los valores de las energías en los estados del sistema compuesto; los estados, que no son estrictamente estacionarios, tienen un tiempo de vida media finito y decaen por reemisión de la misma partícula, radiación γ o de otras formas. La otra suposición del modelo está en cierto modo relacionada con la larga existencia de los estados de núcleo compuesto; el núcleo "olvida" la manera en que ha sido formado y su decaimiento subsecuente a través de los diversos canales de salida posibles es entonces independiente del modo en que se formó.

En los primeros años de la década de los 50's se descubrieron procesos de reacción que ocurren rápidamente sin formar núcleo compuesto⁸⁾. Experimentalmente están asociados con resonancias

7. N. Bohr, Nature, 137 (1936) 344

8. H.B. Burrows, W.M. Gibson y J. Rotblat, Phys. Rev. 80 (1950) 1095; S.T. Butler, ibid; H.H. Barshall, Phys. Rev. 86 (1952) 431.

anchas ($\Gamma \sim 1$ MeV) que se observan por ejemplo cuando se tiene baja resolución ($\Delta E \sim 1$ KeV) o si se promedia la sección eficaz sobre intervalos de energía suficientemente largos como para alisar la función de excitación y eliminar las fluctuaciones. Para el estudio y descripción de estos mecanismos de interacción directa se han formulado modelos de reacción directa como el modelo óptico, la aproximación de Born de onda distorsionada y otros. Dado que en este trabajo no nos ocuparemos de los procesos directos, solamente nos referiremos al modelo óptico de Feshbach, Porter y Weisskopf ⁹⁾ como mención necesaria porque en él se establece claramente que el promedio energético de la sección eficaz de una reacción que inicia en el canal a y concluye en el canal b (momento angular J y paridad p fijos), se separa en una componente directa y otra de núcleo compuesto (fluctuante), es decir, si

$$\bar{\sigma}_{ab} = \pi \chi_a^2 | \delta_{ab} - S_{ab} |^2,$$

entonces el promedio energético será**

$$\bar{\sigma}_{ab} = \bar{\sigma}_{ab}^{dir} + \bar{\sigma}_{ab}^{flc},$$

en donde

$$\bar{\sigma}_{ab}^{dir} = \pi \chi_a^2 | \delta_{ab} - \bar{S}_{ab} |^2,$$

es la parte que describen las teorías de reacciones directas

9. H. Feshbach, C.E. Porter y V.F. Weisskopf, Phys. Rev. 96 (1954) 448.

* Un "canal" está caracterizado por el estado cuántico de las partículas que interaccionan o los posibles pares de partículas saliente y núcleo residual.

** En ausencia de emisiones de preequilibrio.

como el modelo óptico. En otros términos, lo que hacen estas teorías es describir un problema, "el problema de estructura gruesa" en el que la matriz de colisión $S(E)$, de variación complicada -- con la energía es substituida por su promedio energético: la matriz de colisión óptica \bar{S} .

La descripción de la parte fluctuante

$$\sigma_{ab}^H = \pi \chi_a^2 \overline{|S_{ab} - \bar{S}_{ab}|^2} \equiv \pi \chi_a^2 \overline{|S_{ab}^H|^2},$$

asociada a los procesos de reacción que ocurren dando lugar a formación de núcleo compuesto, tanto en presencia de reacciones directas como en ausencia de éstas, ha sido uno de los mayores problemas de la teoría de reacciones nucleares. Encontramos muchas formulaciones y resultados importantes en el desarrollo de esta teoría que se inicia prácticamente con el ya citado modelo de núcleo compuesto de Bohr (1936). En esta introducción mencionaremos esquemáticamente las teorías tradicionales en relación con las hipótesis fundamentales y el dominio de validez de sus descripciones. En el capítulo I seremos un poco más explícitos en la mención de estas teorías; pero como nuestra intención no es agotar el análisis de dichas formulaciones sino mostrar sus resultados principales, también allí, evitaremos entrar en detalles.

Los promedios energéticos de la sección eficaz de núcleo compuesto fueron inicialmente discutidos por L. Wolfenstein¹⁰⁾ y por

10. L. Wolfenstein, Phys. Rev. 87 (1951) 690.

W. Hauser y H Feshbach¹¹⁾. De igual forma que en el caso de resonancias aisladas, se postula que la contribución de cada onda parcial del sistema al promedio de la sección de reacción puede factorizarse en una sección de formación de núcleo compuesto σ_a^c y una probabilidad de decaer independientemente G_b^c . Con estas hipótesis estadísticas características del modelo de núcleo compuesto y el teorema de reciprocidad¹²⁾, se tiene la conocida fórmula de Hauser - Feshbach (1952)

$$\sigma_{ab}^R = \pi \chi_a^2 \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} .$$

Además de su sencillez, nos interesa, muy especialmente, señalar que a través de los coeficientes de transmisión ($T_a = 1 - |\bar{S}_{aa}|^2$) la sección de fluctuación depende de la matriz de colisión óptica que, supondremos está dada por las teorías de reacciones directas. Comentaremos este punto más adelante.

Con respecto a la fórmula de Hauser - Feshbach y las hipótesis en que se funda, se han observado y señalado desviaciones y limitaciones importantes que se reflejan, particularmente, en la predicción de las secciones de fluctuación elástica e inelástica. Se han desarrollado diversas formulaciones para mejorar la fórmula de Hauser - Feshbach y en general para la descripción del fenómeno. No obstante los avances significativos, estas teorías no han resuelto el problema en toda su generalidad, siendo

-
11. W. Hauser y H. Feshbach, Phys. Rev. 87 (1952) 366
 12. J.M. Blatt y V.F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics (John Wiley & Sons- Inc., New York, 1952).

característico en ellas el uso de conceptos estadísticos.

La aplicación de modelos estadísticos al estudio de las reacciones nucleares está motivada fundamentalmente por el carácter estadístico de los espaciamientos de niveles y distribución de anchuras en la región de resonancias aisladas (ampliamente estudiadas por la teoría estadística de espectros nucleares¹³) y por las fluctuaciones de Ericson que se observan en la región de resonancias traslapantes.

El tratamiento teórico se ha realizado en dominios restringidos. Para la región de resonancias aisladas, donde la contribución de núcleo compuesto a la sección eficaz total puede aproximarse como una suma de resonancias de Breit-Wigner de un solo nivel, Lane y Lynn¹⁴) y también Moldauer¹⁵) (para el término dominante de una serie), obtienen la fórmula

$$\sigma_{ab}^{\mu} = \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{\Gamma_{a\mu} \Gamma_{b\mu}}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle_{\mu}$$

donde D es el espaciamiento medio de las resonancias, $\Gamma_{a\mu}$ las anchuras parciales y Γ_{μ} la anchura total de la resonancia. Haciendo uso de las distribuciones de anchuras y espaciamientos que predicen los modelos de matrices estocásticas, esta fórmula da lugar a desviaciones significativas con respecto a la fórmula de Hauser - Feshbach. Para fines de comparación se acostumbra expresar la sección de fluctuación en la forma

13. T.A. Brody, J. Flores, J.B. French, P.A. Mello, A. Pandey y S.S.M. Wong, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 385.
14. A.M. Lane y J.E. Lynn, Proc. Phys. Soc. (London) Sect. A70 (1957) 557.
15. P.A. Moldauer, Phys. Rev. 123 (1961) 968.

$$\sigma_{ab}^H = \sigma_{ab}^{HT} W_{ab}$$

donde W_{ab} se conoce como el factor de corrección de fluctuación de anchuras ("width fluctuation correction factor").

En la fig.3 mostramos uno de los muchos resultados experimentales reportados por Tucker et al.¹⁶⁾ Aparecen también las predicciones de las fórmulas de Hauser - Feshbach sin y con factor de fluctuación de anchuras, curvas 1 y 2 respectivamente.

En la región de resonancias traslapantes (el otro extremo) se distinguen los trabajos de Moldauer¹⁷⁾, Kawai, Kerman y Mcvoy¹⁸⁾, Agassi, Weidenmuller y Mantzouranis¹⁹⁾ y P.A. Mello et al.²⁰⁾.

La teoría de Moldauer se basa en un desarrollo en polos de la -

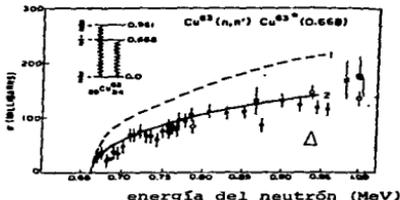


fig. 3. Sección eficaz para la producción del primer estado excitado $1/2^+$ del Cu^{63} . Curva 1 Hauser-Feshbach y curva 2 Hauser-Feshbach con factor de corrección de fluctuación de anchuras.

16. A.B. Tucker, J. Wells y W. Meyerhof, Phys.Rev. **137** (1957) B1181.
17. P.A. Moldauer, Phys. Rev. **135** (1964) B642; Phys. Lett. **19** (1967) 1047; Phys. Rev. **C11**(1975a) 426; *ibid.* **12** (1975b) 744; *Statistical Theory of Neutron Nuclear Reactions*, Curso sobre teoría nuclear para aplicaciones en el Centro Internacional para Física Teórica, Trieste, Italia, 1978.
18. M. Kawai, A. Kerman y K.W. McVoy, Ann. of Phys. **75**(1973)156.
19. D. Agassi, H.A. Weidenmuller y G. Mantzouranis, Phys. Rep. **22** (1975) 145.
20. P.A. Mello y T.H. Seligman, Nucl. Phys. **A344** (1980) 489.

matriz S e hipótesis estadísticas sobre residuos. Las fuertes condiciones que impone unitariedad sobre los parámetros del desarrollo dan lugar a severas dificultades. Sin embargo, con ayuda de algunos cálculos numéricos, consigue expresar la sección de fluctuación como una fórmula de Hauser - Feshbach con factor de fluctuación de anchuras del tipo indicado líneas arriba para la región de absorción débil.

Los trabajos de Kawai et al. y Agassi et al., válidos en el límite $\text{Tr } P \gg 1$ (donde $P = \sum_{a,b} \bar{S}_{a,c} \bar{S}_{c,b}$ es la matriz de colisión de Satchler²¹), basados en desarrollo en polos y residuos de la matriz S el primero y en hipótesis estadísticas sobre los elementos de matriz del Hamiltoniano nuclear el segundo, confirman la fórmula de Hauser - Feshbach generalizada por Vager²² (al incorporar reversibilidad temporal), la cual está dada por la expresión

$$\sigma_{ab}^{ll} = \frac{P_{aa} P_{bb} + P_{ab} P_{ba}}{\text{Tr } P}, \quad n \gg 1.$$

En la figura 4 se muestra un resultado experimental de Kretshmer y Wangler²³) para la distribución angular de la sección de fluctuación elástica en el límite de absorción fuerte y muchos canales abiertos en la reacción $^{30}\text{Si}(p,p)$. Se advierte la duplicación que, con respecto a Hauser - Feshbach, predice la fórmula de Vager.

21. G.R. Satchler, Phys. Lett. 7 (1963) 55.

22. Z. Vager, Phys. Lett. 36B (1971) 269.

23. W. Kretshmer y M. Wangler, Phys. Lett. 41 (1978) 1224.

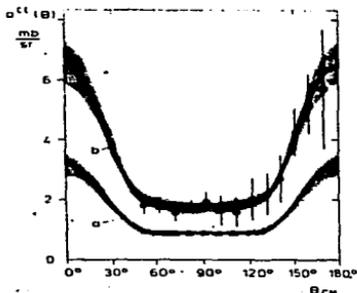


fig. 4. Resultados experimentales para la distribución angular de la sección de fluctuación elástica (absorción fuerte y muchos canales). La curva a) es la predicción de Hauser-Feshbach

Además de los tratamientos analíticos en los dominios restringidos de absorción débil y fuerte se han obtenido para la región intermedia fórmulas de ajuste^{24,25} basadas en cálculos de Monte Carlo (con hipótesis estadísticas sobre polos y residuos de la matriz K) y válidas solamente para un número reducido de canales.

La presencia de reacciones directas introduce algunas complicaciones para el análisis estadístico (por ejemplo correlaciones entre las anchuras parciales en los diferentes canales). Por ésta razón, la transformación unitaria de Engelbrecht y Weidenmüller²⁶) que diagonaliza la matriz de penetración de

24. H.M. Hofmann, J. Richert, J.W. Tepel y H.A. Weidenmüller, Ann. of Phys. 90 (1975) 403.

25. P.A. Moldauer, Nucl. Phys. A344 (1980) 185.

26. C.A. Engelbrecht y H.A. Weidenmüller, Phys. Rev. C8 (1973) 859.

Satchler, convirtiendo el problema en uno sin reacciones directas, constituye una gran simplificación y una importante contribución a la teoría de reacciones nucleares. Sin embargo, aún con esta simplificación, las dificultades para formular analíticamente el problema, han sido considerables. Con los tratamientos tradicionales se obtienen resultados analíticos, expresados como series de potencias, solamente en los límites de absorción débil y absorción fuerte, en tanto que para la región intermedia solo se cuenta con fórmulas de ajuste. Como dijimos antes el propósito de este trabajo es presentar una formulación analítica basada en propiedades muy generales de la matriz S que sea válida en todo el dominio de absorción e incluso en presencia de reacciones directas.

Un rasgo común a los diferentes tratamientos es que por una parte se tiene que recurrir a la postulación de leyes estadísticas para las variables microscópicas subyacentes en el modelo (polos y residuos de la matriz S , elementos de matriz del Hamiltoniano nuclear, polos y residuos de la matriz K , etc.) y por otra parte las secciones de fluctuación y en general los promedios $\overline{S_{\mu\nu}^k} \overline{S_{\mu\nu}^k}$ resultan finalmente parametrizables o expresados en términos de los coeficientes de transmisión o la matriz óptica \overline{S} . Al referirnos a la fórmula de Hauser - Feshbach, hicimos notar esta dependencia en $\overline{S_{\mu\nu}^k}$; el problema de expresar la sección enteramente en términos de los coeficientes de transmisión o la matriz óptica \overline{S} , se suele denominar "el problema de Hauser - Feshbach".

Con base en este hecho, P.A. Mello⁶⁾ sugirió la idea de cons-

truir un ensemble de matrices de colisión (Simétricas y Unitarias) cuya función de distribución maximice la entropía sujeta a la condición de que el promedio en el ensemble $\langle S \rangle$ coincida con el promedio energético \bar{S} . Así, a través de esta condición de ergodicidad, se introducía explícitamente la variable relevante: la matriz óptica \bar{S} . Los resultados obtenidos tanto para dos canales como para un número arbitrario de ellos²⁰⁾ coinciden con los conocidos únicamente en la región de absorción fuerte ($.9 \leq T < 1$). Fuera de esta región el modelo predice resultados incorrectos.

En trabajos posteriores se estudió, en dos casos muy especiales: un solo canal²⁷⁾ y dos canales equivalentes²⁸⁾, la posibilidad y consecuencias de incorporar la otra propiedad importante de la matriz de colisión, que es la propiedad de causalidad asociada a la estructura analítica de la matriz S (polos en el semiplano inferior del plano complejo de energía). A esta propiedad junto con la hipótesis de ergodicidad se denomina la condición de Analiticidad-Ergodicidad (AE) que como veremos en el capítulo I se expresa a través de la siguiente relación²⁰⁾

$$\bar{S}_{a,b_1}^{n_1} \dots \bar{S}_{a_n,b_n}^{n_n} = \langle S_{a,b_1}^{n_1} \dots S_{a_n,b_n}^{n_n} \rangle$$

En general se debe satisfacer esta relación para cualesquier valores de las potencias n_i (AE a todo orden). Si la condición

27. G. Lopez, P.A. Mello y T.H. Seligman, Z. Phys. A302 (1981) 351.

28. J. de los Reyes, P.A. Mello y T.H. Seligman, Z. Phys. A259 (1980) 247.

se cumple solo para $\max_i n_i = 1, \forall i$, entonces diremos que el ensemble satisface AE a primer orden y así sucesivamente.

En el problema de un solo canal²⁷⁾ (matriz S de un elemento) se introdujo AE a todo orden y se obtuvo una función de distribución que presenta un buen acuerdo con cálculos de Monte Carlo. En el problema de dos canales equivalentes²⁸⁾ se incorporó, numéricamente y solo a segundo orden, la condición de AE, observándose que la descripción mejoraba. Sin embargo, a juzgar por el procedimiento utilizado en ese trabajo parecía prácticamente imposible avanzar más en el sentido de incorporar AE a ordenes mayores, aún en el caso simple de dos canales.

El objetivo central de esta tesis es construir analíticamente ensembles de matrices de colisión que satisfacen AE a todo orden, con el propósito de describir el problema general, es decir: absorción arbitraria, número de canales arbitrario y aún presencia de reacciones directas.

En el capítulo I, nos referiremos en términos más formales que los de esta introducción, a los tratamientos principales y sus resultados. Al final expondremos las ideas centrales que se encuentran en la base del modelo de la Entropía.

Aparte de la discusión de la medida y algunos resultados que se utilizarán en los capítulos III y V, el contenido del capítulo II, que por si mismo puede ser interesante, no está directamente relacionado con el propósito central de esta tesis y opcionalmente se podría leer de el únicamente la primera sección que trata de la medida. Estudiaremos en el capítulo II propieda

des asociadas al espacio de las matrices Simétricas y Unitarias; determinaremos exactamente funciones de distribución marginales para los elementos de matriz y consideraremos algunas aplicaciones en el límite de muchos canales. Esto se hará en dos tipos de ensembles: el definido por la medida y el que resulta de AE a primer orden. Por tratarse de casos más sencillos y porque permiten comprender el efecto de la simetría, se estudia antes, distribuciones y aproximaciones para las matrices Ortogonales y las matrices Unitarias.

En el capítulo III se determinan explícitamente ensembles que satisfacen AE a todo orden para dos casos especiales: en primer lugar se discute el caso de n canales abiertos con absorción arbitraria en un canal y completa en los $n-1$ restantes y se obtienen resultados analíticos para las secciones; después se estudia el problema de dos canales. En este problema, formulado en principio para absorción arbitraria en ambos canales, se calcularán secciones solamente en el caso de canales equivalentes. Las secciones de fluctuación elástica e inelástica y particularmente su cociente G_{aa}^M / G_{ab}^M , que es un parámetro de alta sensibilidad, se comparan con resultados obtenidos por el grupo de Heidelberg en base a cálculos de Monte Carlo. Aún cuando el procedimiento que se sigue en este capítulo no puede por razones prácticas, aplicarse a otros casos, resulta altamente ilustrativo y ayuda a comprender mejor el tratamiento general.

En el capítulo IV abordaremos el caso general; mostraremos la equivalencia entre el requerimiento de AE y la propiedad de re

producibilidad de funciones analíticas en la teoría de varias variables complejas; finalmente, obtendremos el ensamble adecuado de matrices S definido por una función de densidad positiva definida (Kernel de Poisson) y de esta manera estableceremos una formulación analítica y general para la descripción de la parte fluctuante del promedio energético de la sección eficaz de reacción. En esta teoría, el único parámetro de entrada (además del número de canales) es la matriz de colisión óptica \bar{S} que suponemos se obtiene de las teorías de reacciones directas. Discutiremos algunas propiedades asociadas al kernel de Poisson: familia de kernels que satisfacen AE, covarianza unitaria, maximización de entropía y aproximación en el límite de absorción fuerte.

En el capítulo V se hará uso del formalismo desarrollado en el capítulo IV y se obtendrán resultados para las secciones de fluctuación. Se estudiarán los siguientes problemas: a) problema de n canales con absorción arbitraria en uno y dos canales; para este caso se obtendrán distribuciones marginales, su aproximación en el límite $n \gg 1$ y las correspondientes secciones de fluctuación; el propósito es completar la discusión iniciada en el capítulo II acerca de las propiedades generales de la matriz S y su relación con los valores de las secciones de fluctuación elástica e inelástica; b) dos canales equivalentes (resultados analíticos); c) dos canales con absorción arbitraria (resultados numéricos) y d) n canales equivalentes con $n=3,4,5,6,10$ (resultados numéricos).

Capítulo I

EL PROBLEMA FISICO Y LOS TRATAMIENTOS PRINCIPALES.

LA FILOSOFIA DEL MODELO DE LA ENTROPIA.

Después de haber mencionado en términos generales e introductorios los tratamientos principales para la descripción de la parte fluctuante del promedio energético de la sección de reacción en el contexto de la teoría de reacciones nucleares, nos referiremos a ellos un poco más formalmente. Nuestro propósito fundamental es mostrar algunos de sus resultados. Comenzaremos por considerar el trabajo de Hauser y Feshbach¹¹⁾. Nos interesa presentar su famosa e importante fórmula para la sección de reacción. Por su relación con esta fórmula y porque constituye el punto de bifurcación entre los modelos de reacciones directas y las teorías estadísticas para la descripción de los procesos que ocurren vía formación de núcleo compuesto, señalaremos brevemente los resultados de interés en el modelo óptico - de Feshbach, Porter y Weisskopf⁹⁾. De ahí en adelante mencionaremos en forma muy resumida las formulaciones tradicionales - sobre el tema que nos ocupa.

I.1 Antecedentes básicos

I.1.1 La fórmula de Hauser - Feshbach

Presente en estado embrionario en trabajos anteriores, particularmente en los de Wolfenstein¹⁰⁾ (1951) y Blatt y Weisskopf¹²⁾ (1951), la fórmula de Hauser y Feshbach contiene en su estructura central la hipótesis de independencia entre los procesos

de formación y decaimiento del núcleo compuesto⁷⁾, esto, en el supuesto de que se excitan muchos niveles, ya sea porque la densidad de niveles del núcleo blanco es alta o porque la energía del proyectil es suficientemente grande.

En el caso especial en el que los "spines" de los canales de entrada y salida son cero, la sección eficaz para la formación de núcleo compuesto en un modelo de absorción fuerte (en el que se supone que la partícula es absorbida una vez que entra en el interior del núcleo) está dada por la expresión

$$\sigma_a^c = \pi \lambda_a^2 T_a \quad (I.1)$$

donde T_a es el coeficiente de transmisión. Si escribimos la sección de reacción , para un valor dado del momento angular y en términos de la matriz S, tenemos

$$\sigma_{ab} = \pi \lambda^2 \left| \delta_{ab} - S_{ab} \right|^2 \quad (I.2)$$

haciendo uso de la simetría de la matriz S y de la hipótesis de independencia expresada en la factorización

$$\sigma_{ab}^c = \sigma_a^c G_b^c \quad (I.3)$$

se tiene que la probabilidad de decaer por el canal b es simplemente

$$G_b^c = \frac{T_b}{\sum_c T_c} \quad (I.4)$$

resultando entonces que la sección eficaz de reacción en ausencia de spines es

$$\sigma_{ab} = \pi \lambda_a^2 \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \quad (I.5)$$

Esta es esencialmente la fórmula de Hauser - Feshbach.

En la situación más general, se tienen muchos canales de entrada y de salida compatibles con conservación de energía, momento angular total y paridad. Si caracterizamos el canal de entrada por los números cuánticos ($l_a j_a J m p$) y al de salida por los números ($l_b j_b J m p$), la probabilidad de formación de núcleo compuesto con momento angular J está dada por

$$\sigma_a^{cJ} = \pi \lambda^2 (2l_a + 1) T_{l_a j_a} \left| C_{m m 0}^{J j_a l_a} \right|^2 \quad (I.6)$$

Los primeros cuatro factores dan simplemente la probabilidad de formación de núcleo compuesto y el último factor da la probabilidad de que el sistema compuesto tenga momento angular total J . La probabilidad de decaer desde este estado hacia el canal caracterizado por los números cuánticos ($l_b j_b J m p$) y en la dirección (θ, φ) se propone proporcional a

$$\left| C_{m(m-m_b) m_b}^{J j_b l_b} \right|^2 \left| Y_{l_b}^{m_b}(\theta, \varphi) \right|^2 \frac{T_{l_b j_b}}{\sum_{l_c j_c} T_{l_c j_c}} \quad (I.7)$$

Para determinar la sección eficaz diferencial para la reacción se debe sumar sobre los números cuánticos magnéticos m y m_b , obteniéndose

$$\sigma_{ab}^J(\Theta) = \pi \chi_a^2 (2l_a + 1) A_J(j_a l_a, j_b l_b; \Theta) \frac{T_{l_a j_a} T_{l_b j_b}}{\sum_{l_c j_c} T_{l_c j_c}} \quad (I.8)$$

donde

$$A_J(j_a l_a, j_b l_b; \Theta) = \sum_{m, m_b} |C_{m m_0}^{J j_a l_a}|^2 |C_{m (m-m) m_b}^{J j_b l_b}|^2 |Y_{l_b}^{m_b}(\Theta, \varphi)|^2 \quad (I.9)$$

Para poder compararse con datos experimentales la expresión -- (I.8) debe ser sumada sobre todos los estados permitidos, esto es, debe sumarse sobre los números cuánticos l_a , j_a , l_b , j_b , J y p , sujetos a las restricciones impuestas por el acoplamiento de momentos angulares. Si además el haz incidente no está polarizado y se considera que el núcleo blanco puede encontrarse en cualquiera de sus $(2l_a + 1)(2l_b + 1)$ subestados, se tiene

$$\sigma_{ab}(\Theta) = \pi \chi_a^2 \sum_{\substack{J, p, j_a, l_a \\ j_b, l_b}} \frac{2l_a + 1}{(2l_a + 1)(2l_b + 1)} A_J(j_a l_a, j_b l_b; \Theta) \frac{T_{l_a j_a} T_{l_b j_b}}{\sum_{l_c j_c} T_{l_c j_c}} \quad (I.10)$$

Al escribir la sección eficaz en esta forma se asume implícitamente que las funciones de onda de los estados de núcleo compuesto tienen fases al azar, de tal forma que las interferencias entre las reacciones que proceden a través de los diferen

res estados de núcleo compuesto, se anulan. Esta es una suposición fuerte y hace posible la sencillez de esta fórmula.

Para determinar la sección es suficiente conocer los spines -- inicial y final y los coeficientes de transmisión que en principio se deberían obtener de la teoría cuántica y de hecho se obtienen en casos especiales.

La capacidad predictiva de la fórmula de Hauser - Feshbach era evidente en muchas situaciones, dando así soporte a las hipótesis en que se funda. Sin embargo, una serie de experimentos - realizados desde 1948 por Barshall y colaboradores²⁹⁾ pusieron en duda la validez general de la hipótesis de interacción fuerte, especialmente en la región de resonancias traslapantes surgió así, en la época y el ambiente triunfal del modelo de capas, reminiscencias del modelo de partícula independiente³⁰⁾.

29. Barshall, Bockelman y Seagondollar, Phys. Rev. 73 (1948) - 659. (Fe, Ni, Bi); Adair, Barshall, Bockelman y Sala, --- ibid. 75 (1949) 1124 (Be, O, Na, Ca) Bockelman, Peterson, Adair y Barshall, ibid 76 (1949) 277 (Zr, Ag, In, Sb, I, Ta, Pb); Paterson, Adair y Barshall, - ibid. 79 (1950) 935 (isotopos del plomo); Bockelman Miller, Adair y Barshall, ibid. 84 (1951) 69 (Li, Be, B, C, O); H. H. Barshall, ibid. 86 (1952) 431 L (revisión) Miller, Adair, Bockelman y Darden, ibid. 88 (1952) 83 Walt, et. al., ibid. 89 (1953) 1271 (Co, Ga, Se, Cd, Te, Pt, Au, Hg, Th), Okasaki et. al., ibid. 93 (1954) 461, etc.
30. K.W. Ford y D. Rohm Phys. Rev. 79 (1950) 745; S.T. Butler Phys. Rev. 80 (1950) 1095; Proc. Roy. Soc. (London) A208 (1951) 559

Los experimentos realizados con neutrones rápidos de aproximadamente 0.1 a 3 MeV, presentan, para la sección eficaz total (ignorando fluctuaciones, véase Barshall (1952)) características interesantes. A bajas energías, se observan valores grandes de la sección para los elementos vecinos del ^{88}Sr ; este pico parece correrse a energías mayores al crecer el peso atómico. A energías de neutrón de aproximadamente 1 MeV, se tiene mínimos en los elementos más pesados que el ^{193}Ir . Esto está en desacuerdo con la teoría del continuo propuesta por Weisskopf³¹⁾ para procesos en los que el núcleo compuesto es formado en estados de excitación relativamente grande. Según esta teoría, la sección total debe decrecer monotónicamente con la energía. Las resonancias anchas ($\Gamma \sim 1 \text{ MeV}$) asociadas a estos máximos y mínimos, eran sistemáticas y aparecían en las funciones de baja resolución "allí donde las viejas teorías de simple pozo de potencial, anteriores a la de Bohr, las habrían situado"³²⁾. De esta manera la evidencia experimental mostró la existencia de reacciones directas, es decir, reacciones rápidas en las cuales el tiempo de reacción es del orden del que le lleva al proyectil atravesar el núcleo ($\sim 10^{-22}$). Por otra parte, la suposición de independencia en la región de resonancias traslapantes nunca fue trivial. Bohr, Peierls y Placzek³³⁾ afirmaban que las fases relativas de los muchos estados excitados dependen de la naturaleza de la excitación de forma que si el núcleo compuesto se excita a la misma energía por diferentes procesos, es de esperarse diferentes relaciones de fase

31. Feshbach, Peaslee y Weisskopf, Phys. Rev. 71 (1947)145

32. F.L. Friedman y V.F. Weisskopf en Niels Bohr on the Development of Physics, Pergamon Press, London, 1955.

33. N. Bohr, P.L. Peierls y G. Placzek, Nature 144 (1939) 200

entre los estados compuestos y diferentes modos de decaimiento puesto que las probabilidades de emisión de una combinación lineal de estados depende de la relación entre sus fases. Sin embargo, se tuvieron a la mano argumentos de plausibilidad en el sentido de que tantos estados se excitan y por lo tanto tantas fases intervienen en la reacción que su acción con respecto al proceso de decaimiento es prácticamente al azar.

Todo esto sugería un retorno parcial a las teorías de partícula independiente en una especie de combinación entre los tratamientos de dichas teorías y las del modelo de núcleo compuesto.

El modelo óptico que constituye, sin duda, la realización de esta idea provee una sorprendente descripción del promedio energético de la sección eficaz total observada. Comentaremos en la subsección siguiente algunos aspectos de interés que surgen del trabajo de Feshbach, Porter y Weisskopf.

I.1.2 El modelo óptico

En el desarrollo de la teoría de reacciones nucleares, el modelo óptico tiene un lugar importante. Por una parte, hace evidente que al calcular el promedio energético de la sección de reacción

$$\overline{\sigma}_{ab} = \pi \lambda_a^2 \overline{|\delta_{ab} - S_{ab}|^2} \quad (I.11)$$

escrita en la forma

$$\overline{\sigma}_{ab} = \pi \chi_a^2 \left(|\delta_{ab} - \overline{S}_{ab}|^2 + |\overline{S}_{ab}|^2 - |\overline{S}_{ab}|^2 \right)$$

se establece una separación natural entre la contribución rápida conocida como la parte directa de la reacción

$$\sigma_{ab}^{dir} = \pi \chi_a^2 |\delta_{ab} - \overline{S}_{ab}|^2, \quad (I.12)$$

y la parte restante conocida como sección de fluctuación

$$\sigma_{ab}^H = \pi \chi_a^2 \left(|\overline{S}_{ab}|^2 - |\overline{S}_{ab}|^2 \right), \quad (I.13)$$

que corresponde a la contribución de procesos que ocurren a -- través de la formación de núcleo compuesto. Una notación más sencilla se tiene si se propone que la matriz S se puede escribir como⁵⁾

$$S = \overline{S} + S^H \quad \text{con} \quad \overline{S}^H = 0, \quad (I.14)$$

en cuyo caso

$$\sigma_{ab}^H = \pi \chi_a^2 \overline{|S_{ab}^H|^2}. \quad (I.15)$$

Por otra parte, en el trabajo de Feshbach, Porter y Weisskopf se muestra la capacidad del modelo óptico para describir la -- parte directa de la reacción, quedando para las teorías estadísticas la tarea de describir la parte complementaria. Una no - es independiente de la otra. De hecho, por unitaridad resulta la siguiente relación importante para la sección total de formación de núcleo compuesto.

$$\sigma_a^c = \sum_b \sigma_{ab}^H = \pi \chi_a^2 (1 - \sum_b \overline{|S_{ab}^H|^2}) = \pi \chi_a^2 T_a. \quad (I.16)$$

Se supone que en esta representación que incorpora la posibilidad de reacciones directas, la fórmula de Hauser - Feshbach re produce la parte de fluctuación, es decir que

$$\sigma_{ab}^H \propto \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c}. \quad (I.17)$$

Mucho esfuerzo se ha hecho en justificar y extender esta fórmula la y en este mismo propósito se adscribe el tratamiento que se

expone en los capítulos siguientes.

En las secciones que siguen mencionaremos en forma muy resumida los tratamientos y contribuciones más importantes a este problema. Por tratarse de contribuciones de carácter general nos referiremos en primer lugar y en sección aparte (sección - 1.2) a la matriz de Satchler²¹⁾, a la fórmula de H - F generalizada por Vager²²⁾ y a la transformación de Engelbrecht y Weidenmüller que reduce un problema con parte directa en otro sin esta contribución.

De aquí en adelante las secciones estarán en unidades de $\pi \chi_a^2$.

1.2 Contribuciones importantes de carácter general

1.2.1 La matriz de Transmisión generalizada

Como consecuencia de que la matriz de colisión es unitaria, podemos escribir

$$S S^\dagger = (\bar{S} + S^u)(\bar{S} + S^u)^\dagger = I. \quad (1.18)$$

Si se toma ahora un promedio energético se tiene la siguiente relación para los elementos de matriz

22. Z. Vager, Phys. Lett. 36B (1971) 269

$$\delta_{ab} - \sum_c \bar{s}_{ac} \bar{s}_{bc}^* = \sum_c \overline{s_{ac}^{\mu} s_{bc}^{\mu*}} \quad (I.19)$$

Satchler²¹⁾ definió al primer miembro como los coeficientes de transmisión generalizados y es conocido como Matriz de Penetración de Satchler

$$P_{ab} = \delta_{ab} - \sum_c \bar{s}_{ac} \bar{s}_{bc}^* \quad (I.20)$$

$$P_{ab} = \sum_c \overline{s_{ac}^{\mu} s_{bc}^{\mu*}} \quad (I.21)$$

La interpretación que dió a esta expresión fué que "cualquier flujo absorbido en la fase de interacción directa reaparece como formación de núcleo compuesto".

I.2.2 La fórmula de Hauser - Feshbach generalizada por Vager²²⁾

Lo primero que muestra Vager es que si se supone la factorización

$$\overline{S_{ac}^H S_{bc'}^{H*}} = A_{ab} A_{cc'} , \quad (I.22)$$

que daría lugar a una fórmula generalizada tipo Hauser - Feshbach de la forma

$$\overline{S_{ac}^H S_{bc'}^{H*}} = \frac{P_{ab} P_{cc'}}{Tr(P)} \quad (I.23)$$

y además se considera reversibilidad temporal

$$S_{ab}^H = S_{ba}^{H*} ,$$

que permite escribir

$$\overline{S_{ac}^H S_{bc'}^{H*}} = \overline{S_{ca}^{H*} S_{b'c}^H} = A_{cb} A_{ac'} , \quad (I.24)$$

se llega, después de sumar las ecuaciones (I.22) y (I.24) sobre los índices $c = c'$, a la siguiente expresión

$$A_{ab} \text{Tr}(A) = (A^2)_{ab} ,$$

(I.25)

según la cual, A debe ser una matriz escalar y $\overline{S_{ac}^H S_{bc}^{H*}}$ independiente de a o c, lo que ciertamente es un error. Vager propone entonces una forma invariante bajo reversibilidad temporal en la forma

$$S_{ac}^H S_{bc}^{H*} = A_{ab} A_{cc'} + A_{cb} A_{ac'}$$

(I.26)

encontrando que la matriz A y la matriz de Satchler están relacionados por la expresión

$$P_{cc'} = \text{Tr}(A) A_{cc'} + (A^2)_{cc'}$$

(I.27)

En el límite $\text{Tr}(A) \gg 1$, que equivale a $\text{Tr}(P) \gg 1$ y también por consiguiente a un número grande de canales abiertos, se tiene la solución aproximada

$$A \approx \frac{P}{\text{Tr}(A)} ; \quad [\text{Tr}(A)]^2 \approx \text{Tr}(P) ,$$

(I.28)

y por lo tanto

$$A \approx \frac{P}{[\text{Tr}(P)]^{1/2}}, \quad (1.29)$$

de manera que

$$\sigma_{ab}^{\mu} \approx \frac{P_{aa} P_{bb} + P_{ab} P_{ab}}{\text{Tr}(P)}, \quad n \gg 1 \quad (1.30)$$

Esta se conoce como la fórmula generalizada de Hauser y Feshbach que en ausencia de reacciones directas introduce un factor de 2 para la parte elástica.

1.2.3 Una importante simplificación del problema.

La transformación de Engelbrecht y Weidenmüller ²⁶⁾

Sin duda una de las contribuciones más importantes a la teoría, es la transformación

$$(UPU^+)_{ab} = \delta_{ab} t_a \quad (1.31)$$

que al diagonalizar a la matriz de penetración de Satchler ha-

ce posible tratar el problema de reacciones con parte directa, como si esta contribución no existiera. Engelbrecht y Weidenmüller muestran la validez de este resultado en la región de absorción débil. En un trabajo posterior²⁴⁾ se extiende el dominio de validez; gracias a esto no se pierde generalidad cuando se supone reacciones sin parte directa (matriz óptica diagonal).

I.3 Tratamientos analíticos importantes

Debido particularmente a que la hipótesis de independencia no es completamente válida, la fórmula de Hauser - Feshbach no es suficientemente precisa para su uso general.

Presentamos ahora algunos tratamientos que además de justificarla, la mejoran. Analíticamente el problema ha sido estudiado en los casos límite $\Gamma \ll D$ y $\Gamma \gg D$.

I.3.1 El formalismo de Moldauer¹⁵⁾

En el vasto trabajo de Moldauer encontramos tratamientos analíticos (en la región de absorción débil) y otros que no son puramente analíticos (válidos, en principio, para absorción arbitraria), de los cuales resultan fórmulas tipo Hauser Feshbach con factor de corrección que se determina en base a hipótesis estadísticas sobre los parámetros subyacentes. Por su estre-

cha relación con el formalismo de Hofmann et al. dejamos para la sección I.4, la mención de uno de los últimos trabajos de Moldauer, en el que da una fórmula de ajuste para el factor de corrección expresado en función de los coeficientes de transmisión.

I.3.1a Resultados en la región de resonancias aisladas

Una forma de exhibir desviaciones a la fórmula de Hauser - Feshbach en la región de resonancias aisladas es calcular la sección de núcleo compuesto haciendo uso de la fórmula de Breit - Wigner para una resonancia

$$\sigma_{ab} = \frac{T_{Ma} T_{Mb}}{(E - E_M)^2 + \frac{1}{4} T_M^2} \quad (I.32)$$

donde T_{Ma} son las anchuras parciales, E_M la energía de resonancia y $T_M = \sum_a T_{Ma}$ la anchura total. Si se integra la expresión anterior en un intervalo de energía alrededor de la resonancia y se promedia sobre todas las resonancias del mismo spin contenidas en la región de energías sobre las que se extiende el haz incidente, se tiene (Lane y Lynn 1957)¹⁴⁾

14. A.M. Lane y J.E. Lynn, Proc. Phys. Soc. (London) Sect. A70 (1957) 557

$$\bar{\sigma}_{ab} = \sigma_{ab}^H = \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{\Gamma_{\mu a} \Gamma_{\mu b}}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle, \quad (\text{I.33})$$

esta es precisamente la expresión que obtiene Moldauer para esta región: ya sea como la contribución más importante en el desarrollo (Moldauer 1961)

$$\bar{\sigma}_{ab} = |S_{ab}^0|^2 + \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{\Gamma_{\mu a} \Gamma_{\mu b}}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle \left(1 - \frac{1}{2} \langle \Gamma_{\mu a} + \Gamma_{\mu b} \rangle \phi + \dots \right) \quad (\text{I.34})$$

o simplemente de considerar la sección de reacción en términos de probabilidades de transición hacia y desde los estados de núcleo compuesto y promediar luego en un intervalo de energía apropiado (Moldauer 1978)

Para establecer la comparación con la fórmula de Hauser - Feshbach, usamos la fórmula de Moldauer - Simonius³⁴⁾

$$T_a = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi \langle \Gamma_{\mu a} \rangle}{D}\right) \approx \frac{2\pi \langle \Gamma_{\mu a} \rangle}{D}, \quad \text{si } \langle \Gamma_{\mu a} \rangle \ll D \quad (\text{I.35})$$

y escribimos la ecuación (I.33) en la forma

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} W_{ab} = \sigma_{ab}^{HF} \cdot W_{ab} \quad , \quad (I.36)$$

siendo

$$W_{ab} = \frac{\langle T_{ua} T_{ub} \rangle}{\langle T_u \rangle} \bigg/ \frac{\langle T_{ua} \rangle \langle T_{ub} \rangle}{\langle T_u \rangle} \quad , \quad (I.37)$$

el factor de "corrección de fluctuación de anchuras" a que hicimos referencia antes. Es evidente que este factor hace la diferencia con la fórmula de Hauser - Feshbach. Adelantamos aquí, que incluso en la región de absorción fuerte y para cana les equivalentes, Moldauer consigue expresar la sección de fluctuación de la misma forma que en (I.36), con un factor de corrección cuya estructura es semejante a la que tiene en (I.37). Sobre este punto regresaremos después.

Para determinar la corrección de fluctuación de anchuras, es necesario conocer la distribución de niveles en el núcleo compuesto. Dejamos para el apéndice I.1 la discusión, resumida, de este punto. Considerando distribuciones χ^2 de ν grados de libertad para las anchuras parciales, y en ausencia de reacciones directas se encuentra que

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \left(1 + \frac{2\delta_{ab}}{\nu_a} \right) G_{ab} \quad (I.38)$$

En particular, en el problema de dos canales equivalentes y su poniendo distribuciones de Porter Thomas ($\nu = 1$) independientes e idénticas para T_{λ_a} y T_{λ_b} , se tiene

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \left(\frac{1}{2} + \delta_{ab} \right) \quad (I.39)$$

según la cual, la parte elástica de la sección de fluctuación aumenta y la inelástica disminuye con respecto a lo que predice la fórmula de Hauser - Feshbach.

Un parámetro que se acostumbra definir es el factor de agrandamiento de la parte elástica ("elastic enhancement factor"). - En el límite que estamos considerando y en el problema de dos canales este factor es simplemente el cociente

$$W = \frac{\sigma_{aa}^H}{\sigma_{ab}^H} = 3, \quad a \neq b \quad (I.40)$$

Este valor del "elastic enhancement factor" para canales estadísticamente equivalentes y en el límite $\Gamma \ll \mathcal{D}$, está bastante bien establecido.

I.3.1 b Análisis estadístico en la región de resonancias traslapantes.

Para tener una descripción que se pueda extender hacia la región de altas energías en la que las resonancias traslapan, -- Moldauer, considera para la matriz S la expansión

$$S_{ab} = S_{ab}^0 - i \sum_{\mu} \frac{g_{\mu a} g_{\mu b}}{E - E_{\mu} + i \frac{\Gamma_{\mu}}{2}} \quad (\text{I.41})$$

$$= S_{ab}^0 + S_{ab}^P \quad (\text{I.42})$$

Esta representación de la matriz S, es el punto de partida de muchos trabajos sobre el tema; en ella la parte real de sus polos complejos da la posición de las resonancias y la parte imaginaria sus correspondientes semi-anchuras. Por otra parte, en la expresión (I.41) están excluidas las contribuciones de los umbrales. Esto porque "siempre es posible arreglar los --

cortes de rama de manera que caigan fuera de nuestro intervalo de promediación", además de que "la dependencia en la energía producida por los puntos de rama son generalmente muy débiles". El término de fondo S_{ab}^0 varía lentamente con la energía en el intervalo de interés y resulta de la contribución de las resonancias lejanas. El término S_{ab} incorpora la contribución de las resonancias cercanas.

En general, se sabe que además de unitaridad (conservación de flujo) y simetría (reversibilidad temporal), la matriz S como función de la energía debe tener una continuación analítica -- con singularidades en el semi-plano inferior (principio de causalidad), de ahí que los polos simples de la expansión (I.41) se encuentren en el semiplano inferior. Estas propiedades son de carácter general y su cumplimiento da lugar a complicaciones y restricciones severas. De hecho el propósito del trabajo -- que nos ocupará en los siguientes capítulos se funda esencialmente en la preservación de estas propiedades. La condición de Analiticidad y Ergodicidad a que hicimos referencia en la Introducción no es otra cosa que la conjunción del principio de causalidad y una hipótesis ergódica. Sobre este punto seré mos más explícitos en la sección I.5.

Dada la matriz S en la forma propuesta y a fin de poder calcular la sección de fluctuación es conveniente establecer la relación que existe entre las matrices S^0 , S^P y las matrices -

\bar{S} y S^H de la representación

$$S = \bar{S} + S^H \quad (I.43)$$

Moldauer muestra que

$$\bar{S} = S^0 + \bar{S}^P \quad ; \quad S^H = S^P - \bar{S}^P \quad (I.44)$$

con

$$\bar{S}^P = -\frac{\pi}{D} \langle g_{ma} g_{mb} \rangle, \quad (I.45)$$

obteniendo para la sección de fluctuación la expresión siguiente:

$$\sigma_{ab}^H = \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{|g_{ma}|^2 |g_{mb}|^2}{\Gamma_\mu} \right\rangle - M_{ab} \quad (I.46)$$

donde

$$M_{ab} = 2 \left| \bar{S}_{ab}^P \right|^2 - \frac{2\pi i}{D} \left\langle \frac{g_{va} g_{vb} g_{ma}^* g_{mb}^*}{(E_\mu - E_\nu) + \frac{i}{2}(\Gamma_\mu + \Gamma_\nu)} \right\rangle_{\mu \neq \nu} \quad (I.47)$$

Para el análisis estadístico en términos de los parámetros de la matriz S se requiere conocer la distribución de estos. Para cada valor de la energía E , un número Γ/D de resonancias contribuyen a la matriz $S(E)$ que, además, debe ser unitaria.

Es claro que unitaridad impone correlaciones complicadas entre parámetros. Para evitar esto, Moldauer define la matriz S en términos de los parámetros de la matriz R que como se sabe muy bien es real y simétrica y se puede escribir en la forma

$$R_{ab} = R_{ab}^0 + \sum_{\mu} \frac{v_{\mu a} v_{\mu b}}{E - E_{\mu}}, \quad (I.48)$$

donde E_{μ} es un eigenvalor del Hamiltoniano nuclear y $v_{\mu a}$, la amplitud de la anchura reducida para la transición desde el μ -ésimo estado al canal a. El espaciamiento de los E_{μ} sigue -- una distribución de Wigner y las $v_{\mu a}$ tienen distribución normal con media cero al variar μ manteniendo fijo el canal. -- Las $v_{\mu a}$ para canales diferentes se consideran estadísticamente independientes.

En realidad el procedimiento que sigue para el análisis de la matriz S en términos de la matriz R discurre por dos caminos - alternativos. En uno de ellos se construye la matriz S estadística en base a su relación con la matriz R que a su vez se genera numéricamente de forma que se satisfacen sus relaciones con la matriz óptica \bar{S} (una descripción detallada de este proce

*Para no desviar la atención y porque además la teoría de la matriz R es muy conocida y defundida no estramos en detalles.

cedimiento se encuentra por ejemplo un Moldauer (1978)). Dada la matriz S estadística obtiene las secciones eficaces dependientes de la energía y también sus promedios energéticos. Para esto, se supone una hipótesis ergódica para sustituir el promedio energético por un promedio en el ensemble generado -- por repetición del procedimiento de construcción de matrices S.

En el otro caso el propósito está enfocado a determinar los parámetros de polo de la matriz S y a partir de la ecuación --- (I.46) obtener la sección. En el apéndice I.2, presentamos un resumen del análisis estadístico, definiciones y justificaciones numéricas que permiten a Moldauer proponer en el caso de n canales estadísticamente equivalentes un factor de corrección efectivo o equivalentemente un número efectivo ν'_2 de grados - de libertad de manera que la sección

$$T_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \left(1 + \frac{2 \delta_{ab}}{\nu'_2} \right) G'_{ab} \quad (I.49)$$

tiene exactamente la misma forma que en (I.38), estando G'_{ab} definida en el apéndice I.1 (con ν'_2 en lugar de ν_2). Según los cálculos numéricos, ν'_2 varía desde $\nu'_2 = 1$ (distribución de Porter - Thomas) en el límite $T \ll D$, hasta $\nu'_2 = 2$ (distribución exponencial) en el límite $T \gg D$.

Una fórmula empírica simple para el parámetro ν'_2 como función

del coeficiente de transmisión es

$$\nu' = 1 + \sqrt{T} \quad (I.50)$$

que fué propuesta por Tepel, Hofmann y Weidenmüller³⁵⁾.

En la parte final de la sección I.4 volveremos sobre estos resultados de Moldauer, concretamente discutiremos lo referente a su fórmula ajustada para obtener el parámetro de número de grados de libertad ν' en función de los coeficientes de transmisión.

1.3.2 Algunos resultados de Kawai, Kerman y McVoy

Se considera que uno de los resultados interesantes de Kawai, Kerman y McVoy es el que tiene que ver con la representación de la matriz S.

Haciendo uso del formalismo de operadores de proyección de Feshbach, consiguen pasar de la representación para la matriz S dada por

$$S_{ab} = S_{ab}^0(E) - i \sum_{\mu} \frac{\tilde{g}_{\mu a} \tilde{g}_{\mu b}}{E - E_{\mu} + i \frac{\Gamma_{\mu}}{2}}, \quad (I.51)$$

35. J.W. Tepel, H.M. Hofmann y H.A. Weidenmüller, Phys. Lett. 49 B (1974) 1

en la cual, el promedio energético de las secciones contiene términos de interferencia entre la contribución, de resonancia y la de fondo, a otra

$$S_{ab} = \bar{S}_{ab}(E) - i \sum_A \frac{g_{qa} g_{ab}}{E - E_q + i \frac{\Gamma_q}{2}}, \quad (I.52)$$

en la que la interferencia desaparece. En esta representación, la contribución de fondo es la parte óptica de la matriz de colisión y la parte restante es la parte de fluctuación que promedia a cero.

Debemos decir que Ericson ⁵⁾ "imponiendo la condición de que la sección eficaz de núcleo compuesto sea, en promedio, incoherente con la parte de interacción directa" obtiene, partiendo de una representación de la matriz de colisión de la teoría -- unificada de Feshbach y mediante el expediente de sumar y restar el promedio de la parte resonante, una parte de fluctuación de la matriz S que por construcción promedia a cero y -- una contribución de fondo que, en la región de resonancias -- traslapantes, se muestra (a primer orden en D/r) que coincide con el promedio energético de la matriz S. Como muestra el

modelo óptico, por lo menos para este límite, Ericson obtiene la separación entre la sección de núcleo compuesto y la correspondiente a la interacción directa.

Una vez que Kawai, Kerman y McVoy tienen la representación de la matriz S que se indicó líneas arriba, calculan secciones de fluctuación en los casos extremos $\Gamma/D \gg 1$ y $\Gamma/D \ll 1$, para un número de canales N grande.

Para $\Gamma/D \gg 1$ a orden $1/N^2$ encuentran que

$$\sigma_{ab}^H = \frac{1}{\sum_c P_c} \left\{ P_{aa} P_{bb} + P_{ab} P_{ba} + \frac{\text{Tr}(P^2)}{(\text{Tr} P)^2} P_{aa} P_{bb} - \frac{P_{aa} (P^2)_{bb} + P_{bb} (P^2)_{aa}}{\text{Tr} P} \right\}; \quad (I.53)$$

expresión que a orden $\frac{1}{N}$ es simplemente

$$\sigma_{ab}^H = \frac{P_{aa} P_{bb} + P_{ab} P_{ba}}{\sum_c P_c} \quad (I.54)$$

y confirma la fórmula de Vager.

Para $\Gamma/D \ll 1$ y en ausencia de reacciones directas calculan

la sección de fluctuación elástica obteniendo

$$\sigma_{aa}^H = \frac{3P_a^2}{\sum_c P_c} \quad , \quad (.55)$$

resultado que está de acuerdo con los de Moldauer para la región de absorción débil (ver ec. I.40).

I.3.3 Resultados de Agassi, Weidenmüller y Mautzouranis¹⁹⁾

El modelo desarrollado por Agassi, Weidenmüller y Mautzouranis está propuesto para proveer una descripción analítica de diversos conceptos físicos en la región de resonancias traslapantes (absorción fuerte) en la que $\Gamma/D \gg 1$. En particular, uno de los objetivos es el cálculo de promedios energéticos del tipo

$$\overline{S_{ab} S_{cd}^*} = \overline{S_{ab}} \overline{S_{cd}^*} + \overline{S_{ab}^H (S_{cd}^H)^*} \quad (.I.56)$$

En el supuesto de que las teorías de reacciones directas proveen modelos para el cálculo de \overline{S} , la teoría, estadística que desarrollan se concentra en el cálculo de los momentos de S^H en base a un modelo de matrices estocásticas del Hamiltoniano nuclear, consistente con el modelo de reacciones directas.

Teniendo que realizar promedios en energía, se introduce una hipótesis ergódica de substitución de estos promedios, por otros en el ensemble de matrices estocásticas.

Para evaluar los promedios en el ensemble, hacen uso de técnicas de la mecánica estadística válidas cuando

$$T_p \gg (T_{eq}, T_{dec}) \gg T_{colp}$$

(I.57)

donde $T_p = \frac{h}{D}$ es el "tiempo de recurrencia de Poincare" - (D el espaciamiento medio), $T_{eq} = \frac{h}{\Gamma \downarrow}$ el tiempo en el que el sistema compuesto alcanza el equilibrio ($\Gamma \downarrow$ la anchura total de esparcimiento o mezcla), $T_{dec} = \frac{h}{\Gamma \uparrow}$ el tiempo de decaimiento o tiempo de vida media del núcleo compuesto ($\Gamma \uparrow$ la anchura media de decaimiento) y $T_{colp} = \frac{h}{\Delta E}$ es el tiempo de duración de una colisión nucleon - nucleón.

Un cálculo aproximado de estos tiempos establece la aplicación de la teoría para blancos con peso atómico $A \geq 40$, proyectiles con $A \leq 4$, energías de excitación que van desde algunos MeV arriba del umbral de neutrones. hasta 80 o 100 MeV.

La teoría está formulada para incluir en general procesos de preequilibrio. Dejando para el apéndice I.3 el resumen de algunas de las ideas e hipótesis relevantes, nos limitamos a pre

sentar sus resultados para la sección de fluctuación en ausencia de emisiones de precuilibrio.

En la región de absorción intermedia, obtienen la expresión

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} (1 + \delta_{ab}) \left\{ 1 + \frac{\sum_a (T_a)^2}{(\sum_c T_c)^2} - \frac{T_a + T_b}{\sum_c T_c} \right\} + \delta_{ab} X_a \quad (I.58)$$

que no es sino la fórmula de Hauser - Feshbach con un factor de corrección escrito en términos del parámetro de expansión -- $y = (\sum_c T_c)^{-1}$. X_a es del orden de $(\sum_c T_c)^{-2}$.

Nos interesa observar que en la región de absorción fuerte y para el límite $\eta \gg 1$ en la región de absorción intermedia, se tiene el siguiente resultado

$$\sigma_{ab}^H \approx \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} (1 + \delta_{ab}) \quad (I.59)$$

que es precisamente la fórmula de Hauser - Feshbach con factor de agrandamiento elástico igual a 2 como predice Vager. Si -- los canales son equivalentes

$$\sigma_{ab}^H = \frac{1 + \delta_{ab}}{n} T_a \quad (I.60)$$

Estos resultados los usaremos sistemáticamente como referencia cuando consideremos, precisamente, el límite $\nu \gg 1$.

Otros tratamientos que deberían incluirse en esta sección son el Modelo de la Entropía⁶⁾ que da resultados coincidentes con los conocidos en la región de absorción fuerte y otro que para la región de absorción débil estudió T.H. Seligman³⁶⁾. Por su relación con el trabajo que desarrollamos después, posponemos la discusión del Modelo de la Entropía para la sección I.5.

I.4 Fórmulas ajustadas. La región de absorción intermedia

I.4.1 La fórmula de Hofmann, Richert, Tepel y Weidenmüller²⁴⁾

(HRTW)

En un artículo, que en cierto modo es una generalización del ya mencionado trabajo de Engelbrecht y Weidenmüller, Hofmann et al, extienden y muestran numéricamente (y también analíticamente en un caso límite) que la transformación que diagonaliza a la matriz de Penetración de Satchler se puede aplicar para todo el dominio (desde absorción débil hasta absorción fuerte);

6. P.A. Mello, Phys. Lett. B81 (1979) 103

20. P.A. Mello y T.H. Seligman, Nucl. Phys. A344 (1980) 489

36. T.H. Seligman, 2. Phys. A204 (1982)

reduciéndose el problema de reacciones con parte directa en -- otro sin esta contribución.

El análisis y cálculo numérico es realizado en función de las propiedades estadísticas que corresponden a los parámetros de la matriz K (real y simétrica), en cuya representación la matriz de colisión (del problema transformado) es

$$S = \frac{I - iK}{I + iK} \quad (I.61)$$

siendo

$$K_{ab} = K_{ab}^0 + \sum_{\lambda=1}^N \frac{\Gamma_{\lambda a} \Gamma_{\lambda b}}{E - E_{\lambda}} \quad (I.62)$$

Aquí $\Gamma_{\lambda a}$ son las amplitudes de las anchuras parciales y E_{λ} la energía del estado compuesto. Se considera a ambas como variables aleatorias no correlacionadas (la justificación la encuentran en la teoría estadística de espectros).

La idea general es postular leyes de distribución que se ajustan de forma que se reproducen valores conocidos en los límites asintóticos $\Gamma \gg D$ y $\Gamma \ll D$ (el "elástico enhancement factor" W_a para canales equivalentes toma en estos límites los valores

2 y 3 respectivamente); para las energías E_n usan la ley de distribución de espaciamientos de Wigner

$$Q_W(x) dx = \left(\frac{\pi}{2}\right) x \exp(-\pi x^2/4) dx \quad (I.63)$$

donde x es la razón entre el espaciamiento de niveles adyacentes y el espaciamiento medio D , y también toman en cuenta las correlaciones entre espaciamientos de vecinos próximos que se predicen teóricamente³⁷).

Por lo que a las amplitudes de anchuras reducidas concierne, se diagonaliza (mediante una transf. ortogonal) a la matriz de covarianza C_{ab} (real y simétrica) de modo que

$$C_{ab} = \overline{\gamma_{\mu a} \gamma_{\mu b}} = \delta_{ab} \overline{\gamma_{\mu a}^2} \quad (I.64)$$

y se propone para las amplitudes $\gamma_{\mu a}$ que estas sean cantidades (no correlacionadas) de distribución normal centrada en cero y varianza $\overline{\gamma_{\mu a}^2}$ dada.

37. H.M. Hofmann, J. Richert y J.W. Tepel. Ann. Phys. (N.Y.) 90 (1975) 391; M.L. Mehta, Statistical Properties of Nucleo (J.B. Garg. ed.) p. 179, Plenum Publishing Co. New York 1972

En base a estas hipótesis se construye numéricamnte un ensem-
ble de matrices S y secciones para cada valor de n. Sus prome-
dios se identifican con la matriz óptica y el promedio energé-
tico de la sección respectivamente. En esto consiste aquí la
hipótesis ergódica.

El resultado central del trabajo de HRTW es que las secciones
del problema transformado (ausencia de parte directa) dependen
únicamente de los elementos de la matriz óptica y además encuen-
tran que es posible expresarlas en forma factorizada

$$\sigma_{aa}^H = \frac{V_a^2}{\sum_c V_c} W_a, \quad (I.65a)$$

$$\sigma_{ab}^H = \frac{V_a V_b}{\sum_c V_c} a + b, \quad (I.65b)$$

donde V_a esta definida por la relación

$$p_a = V_a + (V_a^2 / \sum_c V_c) (W_a - 1) \quad (I.66)$$

y W_a es el "elastic enhancement factor" para el cual encuen-
tran (con base en los cálculos numéricos de Monte Carlo), la si-
guiente fórmula de ajuste

$$W_a = 1 + 2 \left(1 + k_a^{0.3 + \frac{1.5 k_a}{\sum_i k_i}} \right)^{-1} + 2 \left[(k_a - \phi) / \sum_i k_i \right]^2 \quad (I.67)$$

Esta fórmula será una de las que utilizaremos nosotros para --
comparar con los resultados del presente trabajo.

I.4.2 La fórmula de Moldauer (1980)

Haciendo uso de un formalismo en términos de la matriz K y --
con suposiciones estadísticas semejantes a las de HRTW excepto
en lo que se refiere a la forma de tomar en cuenta las correla-
ciones entre espaciamientos de niveles, ajusta una fórmula pa-
ra determinar el parámetro de grados de libertad efectivo en --
términos del cual, Moldauer escribe su "fórmula de Hauser --
Fashbach con factor de corrección de fluctuación de anchuras"
que mostramos en la ecuación (I.49) y que da lugar a un "elas-
tic enhancement factor" de la forma

$$W = 1 + 2 / \nu' \quad (I.68)$$

Concretamente, la fórmula que ajusta para ν' es

$$\nu'_2 = 1.78 + (T_2^{1.212} - 0.78) e^{-.228 \sum_i T_i} \quad (I.69)$$

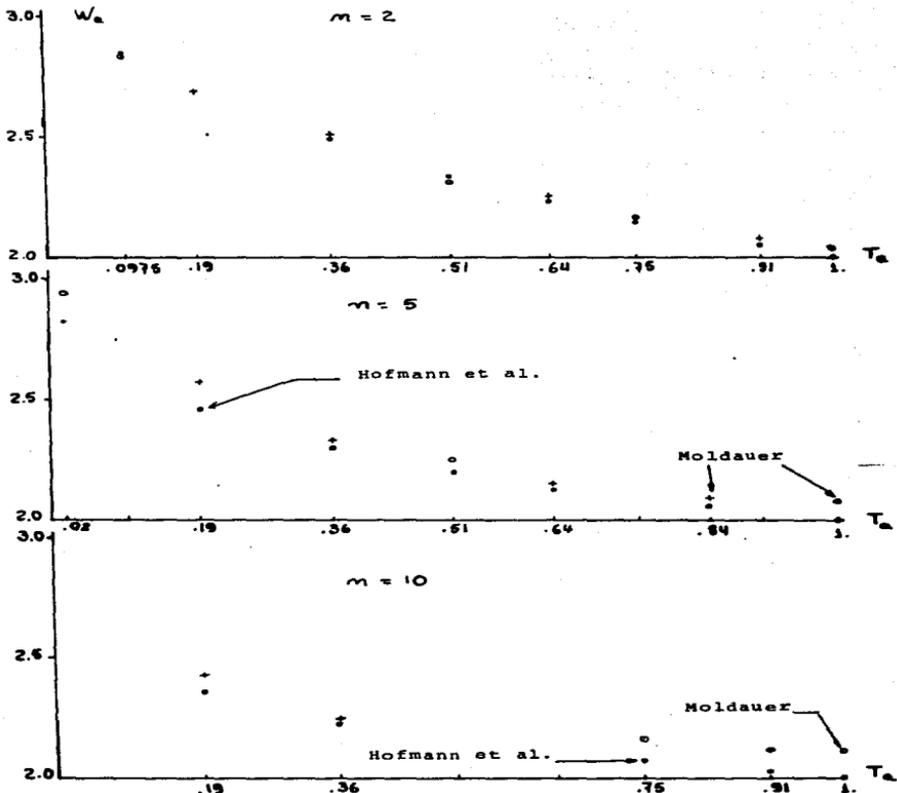


fig. I.1 El "elastic enhancement factor" que predicen las fórmulas ajustadas por Hofmann et al. (puntos) y Moldauer (círculos). Las cruces son resultados de Moldauer (1980) que obtiene de cálculos de Monte Carlo.

En la figura I.1, se muestra los valores que predicen para el "elastic enhancent factor" la fórmula de HRTW y esta de Moldauer cuando se tiene 2, 5 y 10 canales equivalentes. Es notable el hecho de que en el límite de absorción fuerte, este factor sea diferente de 2 para Moldauer. Debemos decir que en este mismo trabajo muestra, numéricamente, que en la región de absorción fuerte, sus resultados son altamente sensibles a las distribuciones que se propongan para los espaciamiento de niveles y anchuras reducidas.

I.5 El Modelo de la Entropía

Si intentamos una caracterización para los modelos considerados, encontramos que, en líneas generales, se hace uso de hipótesis estadísticas en relación con las variables microscópicas subyacentes en los diferentes formalismos, tratando de respetar en buena medida las propiedades fundamentales de la matriz S (simetría, unitaridad y causalidad); así mismo se asumen hipótesis ergódicas a fin de substituir los promedios energéticos por promedios en los ensembles construidos en cada caso; finalmente, se llega a escribir la sección de fluctuación como expresiones tipo Hauser - Feshbach con un factor de corrección que depende esencialmente del coeficiente de transmisión, es decir, se obtiene en última instancia una expresión parametrizable en términos de la variable relevante del problema: la ma

triz de colisión óptica \bar{S} , lo que por supuesto no es obvio.

No obstante que (véase sec. I.2)

$$\sum_b \sigma_{ab}^H = T_a \quad (I.16)$$

de ninguna manera, se puede concluir algo acerca de la forma en que T_a se distribuye entre los diferentes términos σ_{ab}^H . Todo lo que nos dice es que, si existe alguna dependencia en otras variables, ésta se cancela al sumarse. Surge así la siguiente pregunta: ¿Es posible formular una teoría estadística de reacciones nucleares con hipótesis estadísticas directamente sobre la matriz S y en la que la variable relevante sea des de un principio la matriz óptica.

En relación con la primera parte de esta pregunta, encontramos un trabajo de Krieger³⁸⁾ en el que se propone sustituir la for mulación en términos de parámetros microscópicos, por otra en la que la matriz S misma es la variable estadística básica; pa ra esto, utiliza el ensemble de matrices simétricas y unita--- rias E_b que estudió Dyson en relación con espectros nuclea--- res y lo modifica de forma tal que el valor del promedio de -- S_{ab} sea diferente de cero. Sorprendentemente, el ensemble que postuló estuvo muy cerca del que resulta ser el correcto, en -

38. T.J. Krieger, Ann. Phys. (N.Y.) 42 (1967) 275

el problema de canales equivalentes, cuando se imponen condiciones adicionales que Krieger no considera. Cálcula la sección de fluctuación en el límite $n \gg 1$ en base a suposiciones difíciles de justificar. En realidad, el formalismo de Krieger no tiene nada que ver con la idea de introducir a la matriz óptica \bar{S} como el parámetro relevante y de hecho no lo hace, -- sin embargo, sí con la idea de hacer estadística directamente sobre la matriz S porque de ese modo, decía, se preservan rigurosamente, unitaridad y simetría.

De hecho, es en un trabajo de P.A. Mello del año 1979 en el -- que la idea de establecer una distribución para la matriz S incorporando desde un principio la matriz \bar{S} óptica como el parámetro fundamental se plantea como propósito central.

Dado el ensemble E_c de matrices unitarias y simétricas igualmente probables definido por la medida $d\mu(S)$ (conocida también como medida de Dyson)*, invariante bajo la transformación

$$S \rightarrow \tilde{S} = U^T S U \quad (I.70)$$

donde U es unitaria, P.A. Mello postula una ley de distribución para las matrices S en términos de una densidad de probabilidad

*De aquí en adelante, nos referiremos a esta medida simplemente como la medida del espacio (Euclideo) de matrices simétricas y unitarias en atención a que era conocida en el ámbito de las funciones de varias variables complejas muchos años antes de que Dyson se ocupara de ella.

$$p(S) \propto \exp(-\text{Re Tr } \beta S) \quad (\text{I.71})$$

que maximice la entropía

$$\Delta(p) = - \int p(S) \ln p(S) d\mu(S), \quad (\text{I.72})$$

sujeta a la condición de que

$$\langle S_{ab} \rangle \equiv \int S_{ab} p(S) d\mu(S) = \bar{S}_{ab} \quad (\text{I.73})$$

La matriz β (ec. I.71), es una matriz de multiplicadores de Lagrange definida por la condición anterior.

En el capítulo II, nos ocuparemos con más detalle de la medida $d\mu(S)$ y algunas propiedades de ella.

De esta forma, se contruye un nuevo ensemble E_M definido por la medida.

$$dp(S) = \frac{\exp(-\text{Re Tr } \beta S) d\mu(S)}{\int \exp(-\text{Re Tr } \beta S) d\mu(S)} \quad (\text{I.74})$$

Este ensemble fué utilizado para calcular secciones de fluctuación en el problema de dos canales equivalentes (sin parte directa). Los valores obtenidos para el "elastic enhancement -

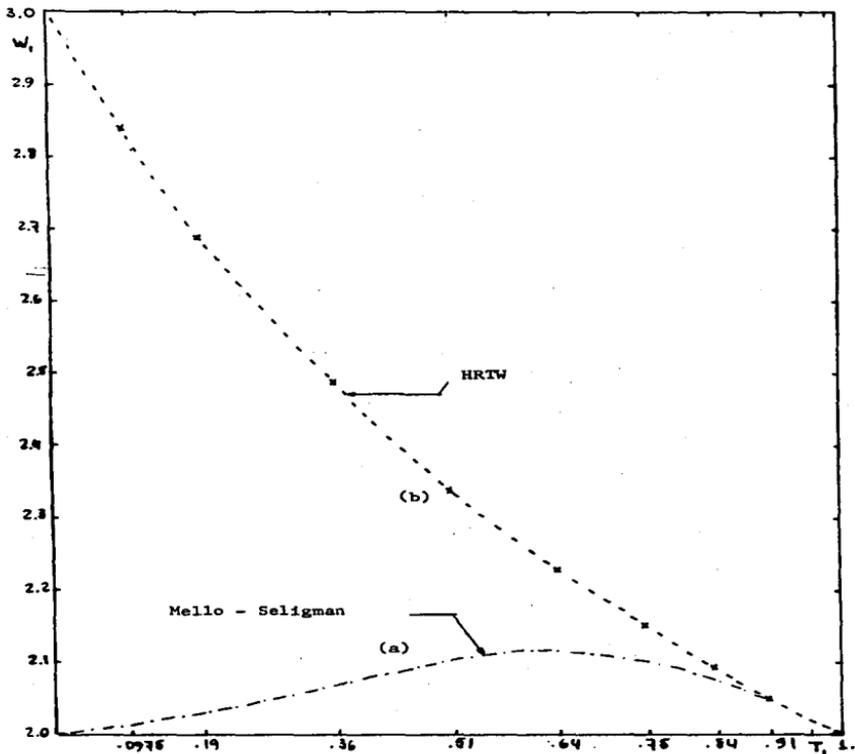


Fig. I.2 El "elastic enhancement factor" para dos canales equivalentes: (a) Resultados del modelo de la entropía (AE primer orden) y (b) Cálculos de Monte Carlo (fórmula de ajuste de HRTW)

factor" se comparan muy bien con los que se obtiene de la fórmula de HRTW en la región de absorción fuerte y son completamente diferentes en la región de absorción débil (véase fig. - I.2)

La idea que se encuentra en la base de este procedimiento es - construir de la manera menos prejuiciosa posible, un ensemble de sistema físicos (o de matrices S) que tienen en común un -- conjunto semejante de constricciones que, en este formalismo, están relacionados con los valores promedios de la matriz S -- (la matriz \bar{S} óptica) la cual, en cierta forma, representa la - cantidad observable.

En un trabajo posterior P.A. Mello y T.H. Seligman²⁰, calcula ron con el mismo ensemble ϵ_n , secciones de fluctuación para un número arbitrario de canales y en la región de absorción -- fuerte, obteniendo también un buen acuerdo con los resultados conocidos para esta región. También en ese trabajo se incluye una discusión de la forma en que la propiedad de causalidad, asociada a la estructura analítica de la matriz S , sería incor porada en el formalismo. Fundamentalmente, la idea es que si en la región lejana de los umbrales las únicas singularidades de la matriz S son polos en el semiplano inferior, entonces, - el promedio energético de S_{ab} (ϵ) calculando con una función de peso Lorentziana de ancho I es $S_{ab}(\epsilon + iI)$. Similarmente,

para el promedio energético de cualquier monomio formado por potencias de elementos de S que no incluya conjugaciones complejas se tiene

$$\overline{S_{a_1 b_1}^{m_1}(E) \dots S_{a_n b_n}^{m_n}(E)} = \overline{S_{a_1 b_1}^{m_1}(E+iI) \dots S_{a_n b_n}^{m_n}(E+iI)} \\ = \overline{S_{a_1 b_1}^{m_1}(E)} \dots \overline{S_{a_n b_n}^{m_n}(E)} \quad (I.75)$$

Según esta relación el promedio de productos de potencias se transforma en producto de promedios de potencias. Si a esto se añade una hipótesis de ergodicidad entendida en el sentido de que el promedio de energía \bar{f} pueda sustituirse por un promedio en el ensemble $\langle f \rangle$, se tiene para la conjunción de causalidad (o analiticidad) y ergodicidad la siguiente expresión

$$\langle S_{a_1 b_1}^{m_1} \dots S_{a_n b_n}^{m_n} \rangle = \overline{S_{a_1 b_1}^{m_1}} \dots \overline{S_{a_n b_n}^{m_n}} \quad (I.76)$$

A esta condición se ha denominado "el requerimiento de Analiticidad - Ergodicidad (AE)"

Obsérvese que como el ensemble E_m se define bajo la condición (I.71), se satisface la condición de AE solamente a primer orden.

Una extensión natural en el formalismo, era ciertamente la obtención de ensembles que en lo posible cumplan con la condición (I.74). Este programa fué abordado parcialmente en un par de trabajos^{27, 28)}

En la referencia 28) se estudia, en el caso particular de dos canales equivalentes, el efecto que resulta de imponer la condición de AE (I.74) a segundo orden; es decir, cuando $\max n_s = 2$.

Para definir el nuevo ensemble se propuso una función de densidad de la forma

$$p(S) = \exp \left[-R_e \text{Tr}(\beta S) - R_e \text{Tr}(\tilde{\nu}(S \otimes S)) \right]. \quad (\text{I.77})$$

que maximice la entropía sujeta a la condición de AE a segundo orden. Las matrices β y $\tilde{\nu}$, consistentes con estas condiciones, se evaluaron numéricamente, obteniéndose para el "elastic enhancement factor" valores que son notablemente mejores (véase la figura I.3) que los que se tienen si sólo se toma la condición de AE a primer orden.

La enseñanza de este trabajo es que la condición de AE es importante. Sin embargo, si se intenta generalizar el procedimiento para incluir esta condición a ordenes mayores proponiendo funciones de densidad dadas por

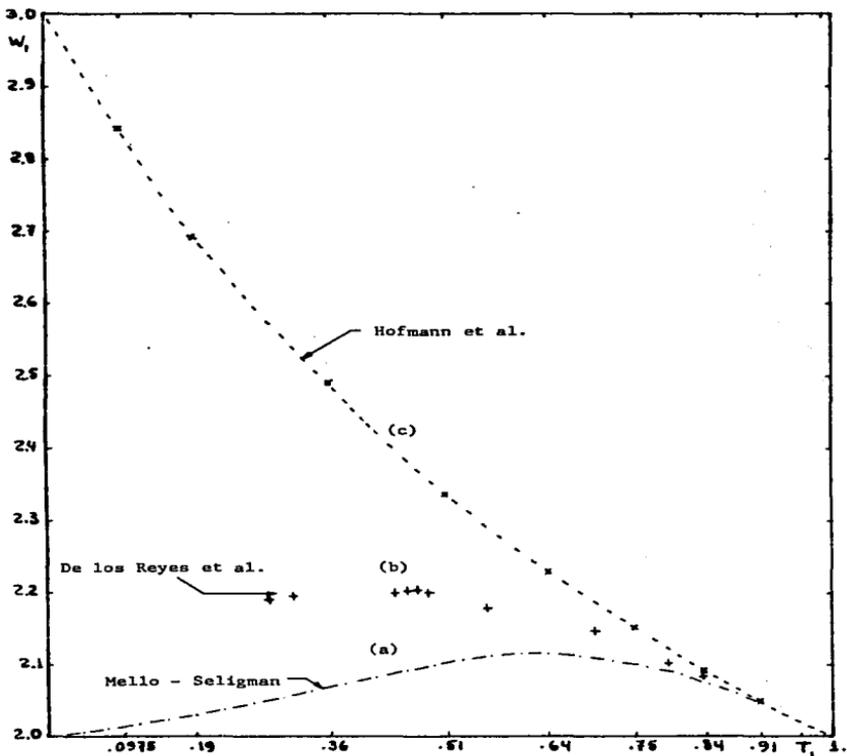


fig. I.3 El "elastic enhancement factor" para dos canales equivalentes: (a) y (b) resultados del modelo de la entropía con AE a primer y segundo orden respectivamente; (c) Cálculos de Monte Carlo (fórmula de ajuste de HRTW)

$$p(s) = \exp \left[-\operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\beta S) - \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\gamma (S \otimes S)) - \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\delta (S \otimes S \otimes S)) \dots \right]$$

(I.78)

que maximicen la entropía, etc. nos encontramos que es prácticamente muy complicado el tratamiento numérico de este problema, aún en el caso muy especial de dos canales equivalentes y AE de bajo orden.

En la referencia 27) se estudia un caso muy especial y este es el de un solo canal. Se plantea el problema de determinar una función de densidad $p(S)$ tal que

$$\bar{s}^k = \int s^k p(S) dS$$

(I.79)

siendo k un natural cualquiera. En otros términos se busca una función de distribución que satisfaga, en este caso particular, la condición de AE a todo orden. La solución se obtiene analíticamente, es única, aparece en algunos problemas en la teoría de variable compleja como el Kernel de Poisson del disco unidad. Esta función es

$$p(s, \bar{s}) = \frac{L}{2\pi} \frac{1 - |\bar{s}|^2}{|1 - \bar{s}s|^2} \quad (\text{I.80})$$

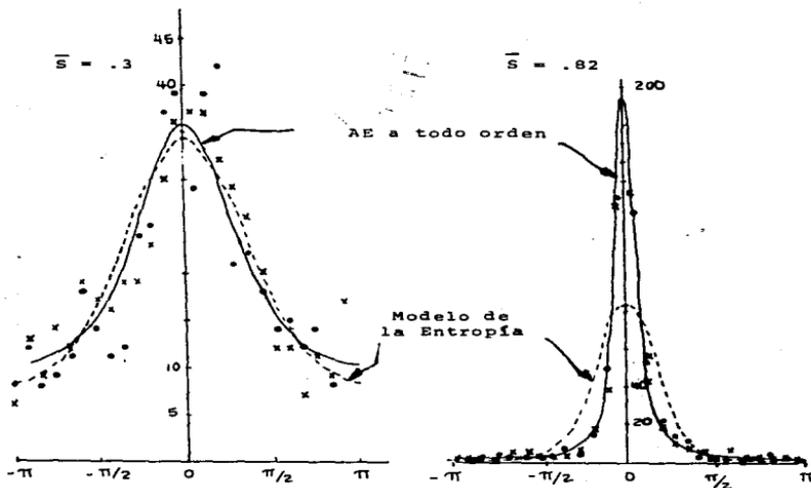


fig. I.4 Función de distribución $p(s)$ para el problema de un canal. La curva continua es la que se obtiene de la fórmula (I.80) con AE a todo orden; la curva en trazos se obtiene del Modelo de la Entropía (AE a primer orden); los puntos y las cruces son resultados de Monte Carlo considerando distribuciones de espaciamentos de Wigner y Poisson respectivamente. Para la distribución de amplitudes se consideró una distribución Gaussiana con media ²⁷⁾ cero.

y se muestra en la figura I.4 observandose un buen acuerdo con resultados de Monte Carlo.

Concluiremos formulando dos preguntas a las cuales se pretende responder en los capítulos siguientes: ¿Será posible comprender algo de la forma como las diferentes propiedades generales de la matriz de colisión intervienen en la asignación de los valores a las secciones elástica e inelástica? y ¿Es suficiente cuidar el riguroso cumplimiento de los principios de conservación de flujo, reversibilidad temporal y causalidad, para que junto a una hipótesis estadística se reproduzcan los valores correctos de las secciones de fluctuación en reacciones nucleares -- que proceden sin emisiones de preequilibrio?

El contenido de los capítulos siguientes está relacionado con el de las preguntas y responde a estas en el orden en que fueron planteadas. En el capítulo II el análisis que comienza -- por la discusión de la medida de los espacios Euclidianos de -- interés se concentra básicamente en establecer distribuciones marginales para los elementos de matriz de manera que se refleje la influencia de las propiedades de simetría y unitariedad e incluso la de analiticidad (aunque sólo sea a primer orden). Postergamos para los capítulos III y IV el problema de incorporar AE a todo orden.

Capítulo II

DISTRIBUCION MARGINAL PARA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ S Y APLICACIONES

Aún cuando el siguiente paso en la formulación de la teoría es construir el ensemble de matrices de colisión consistente con el requerimiento de Analiticidad-Ergodicidad a todo orden, el análisis y contenido de este capítulo no está directamente orientado a este propósito. Nos interesa estudiar propiedades relativas a la matriz de colisión. Más específicamente, trataremos de comprender, en la medida de lo posible, la forma en que las propiedades de conservación de flujo, reversibilidad temporal y causalidad, influyen en las secciones de fluctuación elástica e inelástica. De este análisis se obtienen resultados cualitativamente significativos que confirman o justifican resultados y aseveraciones que se encuentran en la literatura.

Con éste fin, es evidentemente necesario estudiar el problema de manera que sea posible discriminar la propiedad y su efecto asociado. Para esto, es conveniente seguir un orden progresivo.

Debido básicamente a que algunos cálculos y aproximaciones son, en el espacio de matrices ortogonales más simples e ilustrativos, comenzaremos nuestro análisis en el espacio de matrices ortogonales, luego se considera el espacio de las matrices unitarias y finalmente, el de las simétricas y unitarias.

En todos los casos el análisis consiste en calcular exactamente funciones de distribución marginal para elementos de matriz; después, se aproxima estas distribuciones en el límite $n \gg 1$ y se determinan las secciones de fluctuación. Por último se estudia el efecto de AE construyendo para cada espacio considerado ensembles E_M que maximizan la entropía con "AE a primer orden". Cuando hayamos encontrado la forma de construir ensembles con -- AE a todo orden rediscutiremos los problemas que trataremos en la sección II.4.

Puesto que vamos a estudiar propiedades relativas a los elementos de matriz en los espacios de matrices ortogonales, unitarias y simétricas y unitarias es natural que comencemos refiriéndonos a la medida asociada con estos espacios.

II.1 Elemento de volumen en un espacio Euclideo de matrices

Consideremos un espacio Euclideo de dimensión real $2n^2$. Una matriz \mathbf{Z} de orden n con elementos complejos se puede considerar como un punto en este espacio. Los conjuntos de matrices ortogonales, unitarias y unitarias simétricas constituyen (en este espacio) variedades de dimensiones reales $\frac{n(n-1)}{2}$, n^2 y $\frac{n(n+1)}{2}$ respectivamente.

La determinación del elemento de volumen en estos espacios ha sido ampliamente estudiado. En esta sección adoptamos el procedimiento que utiliza Hua³⁹.

Supongamos en general el espacio Euclideo de dimensión real $2n^2$. Se define la métrica

$$d s^2 = \text{Tr} (d z d z^t) \quad (\text{II.1})$$

a partir de la cual, se determina el tensor métrico g_{ij} dado por

$$d s^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \delta z_{ij} \quad (\text{II.2})$$

donde las δz_{ij} son (los $2n^2$) parámetros linealmente independientes del espacio. El elemento de volumen queda entonces definido por la expresión.

$$d \mu (z) = \prod_{i,j} \quad (\text{II.3})$$

Veamos ahora lo que de esta forma se tiene para el elemento de volumen en los espacios que nos interesan.

II.1.1 El elemento de volumen en el espacio de matrices ortogonales (propias).

Sea T una matriz ortogonal real en el espacio Euclideo de di

39. L.K. Hua, Harmonic analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Am.Math.Soc.(Providence, Rhode Island) 1963.

mensión $\frac{n(n-1)}{2}$. Se sabe que las matrices ortogonales están definidas de manera que

$$\Gamma \Gamma^T = I \quad (\text{II.4})$$

Esto significa que

$$d\Gamma \Gamma^T + \Gamma d\Gamma^T = 0 \quad (\text{II.5})$$

Con el propósito de expresar la métrica y el elemento de volumen - en términos de los parámetros linealmente independientes definamos la matriz

$$\delta\Gamma = d\Gamma \Gamma^T \quad (\text{II.6})$$

La ec. (II.5) se transforma en

$$\delta\Gamma = -\delta\Gamma^T \quad (\text{II.7})$$

Esta relación que se deduce a partir de la condición (II.4), incorpora en su seno las propiedades de las matrices ortogonales.

Por otra parte, la métrica

$$ds^2 = \text{Tr} (d\Gamma d\Gamma^T) \quad (\text{II.8})$$

se puede reescribir como

$$ds^2 = -\text{Tr} (d\Gamma \cdot \Gamma^T d\Gamma \Gamma^T) \quad (\text{II.9})$$

$$= \text{Tr} (\delta\Gamma \cdot \delta\Gamma^T) \quad (\text{II.10})$$

Dado que la matriz $\delta\Gamma$ es antisimétrica, es claro que

$$(\delta\Gamma)_{ij} \equiv \delta\gamma_{ij} = -\delta\gamma_{ji} ; \quad (\delta\Gamma)_{ii} = 0 \quad (\text{II.11})$$

de forma que sólo se tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ parámetros linealmente independientes. En términos de estos parámetros la métrica se escribe

$$d\sigma^2 = \sum_{i < j} 2 (\delta\gamma_{ij})^2 \quad (\text{II.12})$$

y el elemento de volumen o medida de Haar para este espacio será

$$dh(\Gamma) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i < j} \delta\gamma_{ij} \quad (\text{II.13})$$

Para el propósito de calcular las distribuciones marginales de los elementos de la matriz ortogonal es conveniente expresar la medida en términos de sus n^2 elementos de matriz, que por otra parte, no son independientes ya que deben satisfacer n condiciones de normalización y $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones de ortogonalidad de renglones. Estas condiciones se introducen explícitamente a través de funciones delta, teniéndose para la medida de Haar de matrices ortogonales la expresión:

$$dh(\Gamma) = \prod_{i=1}^n \delta(1 - \sum_a \Gamma_{ia}^2) \prod_{i < j} \delta(\sum_a \Gamma_{ia} \Gamma_{ja}) \prod_{i,j} d\Gamma_{ij} \quad (\text{II.14})$$

Por último, la medida de Haar es invariante bajo la transformación

$$\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma} = \Gamma^{\circ} \Gamma \quad \text{o} \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \Gamma^{\circ} \quad (\text{II},15 \text{ a,b})$$

donde Γ° es una matriz ortogonal, es decir

$$dh(\Gamma) = dh(\Gamma^{\circ} \Gamma) = dh(\Gamma \Gamma^{\circ}). \quad (\text{II},16)$$

II.1.2 El elemento de volumen en el espacio de matrices unitarias.

Sea U una matriz unitaria que pertenece al espacio Euclideo de matrices unitarias cuya dimensión real es n^2 . También en este caso partimos de la propiedad que caracteriza a las matrices unitarias

$$UU^{\dagger} = I \quad (\text{II},17)$$

de la cual se obtiene

$$dUU^{\dagger} + U dU^{\dagger} = 0 \quad (\text{II},18)$$

$$dU^{\dagger} = -U^{\dagger} dUU^{\dagger} \quad (\text{II},19)$$

La representación en términos de parámetros independientes se consigue si se define

$$\delta U = dU U^+ \quad (\text{II.20})$$

es claro por la ec. (II.18) que

$$\delta U = -\delta U^+ \quad (\text{II.21})$$

al incorporar estas propiedades en la métrica, tenemos que

$$\begin{aligned} d\Delta^2 &= \text{Tr} (dU dU^+) = -\text{Tr} (dU \cdot U^+ dU U^+) \\ &= \text{Tr} (\delta U \delta U^+) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Si expresamos los elementos de la matriz δU en términos de parámetros reales de manera que satisfagan la relación (II.19) se tiene

$$(\delta U)_{ji} = i \delta u_{ji}; \quad (\delta U)_{ij} = \delta u_{ij} + i \delta u'_{ij} \quad i < j \quad (\text{II.23})$$

y como

$$\begin{aligned} \delta U_{ji}^* &= -(\delta U)_{ij} \\ \delta U_{ji} &= \delta u_{ij} + i \delta u'_{ij} \quad i < j \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Tenemos así, $n + n(n-1) = n^2$ parámetros, que es precisamente el número de los linealmente independientes. En términos de estos, la métrica resulta ser

$$d\Delta^2 = \sum_i |\delta U_{ii}|^2 = \sum_i \delta u_{ii}^2 + \sum_{i < j} 2 (\delta u_{ij}^2 + \delta u'_{ij}{}^2) \quad (\text{II.25})$$

y el elemento de volumen de este espacio también denominado medida de Haar para el espacio de matrices unitarias es

$$dh(U) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n \delta u_{ii} \prod_{i < j} \delta u_{ij} \delta u'_{ij} \quad (II.26)$$

Igualmente, será necesario tener la medida en términos de los elementos de matriz. Si

$$U_{ij} = x_{ij} + i y_{ij} \quad (II.27)$$

y tomamos en cuenta las n condiciones de normalización de renglones y $n(n-1)$ condiciones que resultan de ortogonalidad de renglones, se tiene

$$dh(U) = \prod_{i=1}^n \delta(1 - \sum_a |U_{ia}|^2) \prod_{i < j} \delta(\text{Im} \sum_a U_{ia} U_{ja}^*) \cdot \delta(\text{Re} \sum_a U_{ia} U_{ja}^*) \prod_{i,j} dx_{ij} dy_{ij} \quad (II.28)$$

Por otra parte, la medida de Haar de este espacio es invariante bajo la transformación

$$U \rightarrow \tilde{U} = U^\circ U \quad \text{o} \quad \tilde{U} = U U^\circ \quad (II.29 \text{ a,b})$$

donde U° es una matriz unitaria, es decir

$$dh(U) = dh(U^\circ U) = dh(U U^\circ) \quad (II.30)$$

II.1.3 El elemento de volumen para el espacio de matrices simétricas y unitarias.

Para incorporar las propiedades de simetría y unitariedad deberíamos tomar en cuenta simultáneamente las relaciones

$$SS^T = I \quad ; \quad S = S^T \quad (II.31)$$

En este caso conviene expresar la matriz S en la representación de matrices unitarias U , en la forma

$$S = U^T U \quad (II.32)$$

porque de esta manera se introducen ambas propiedades, además de que se puede aprovechar la parametrización que se usó para las unitarias, esto es, usaremos

$$\delta U = dU U^T = \delta u + i \delta u' \quad (II.33)$$

en la que las matrices reales δu y $\delta u'$ tienen las siguientes propiedades:

$$\delta u = -\delta u^T \quad ; \quad \delta u' = \delta u'^T \quad (II.34)$$

Considerando la ec. (II.32) se tiene que:

$$\begin{aligned} dS &= dU^T U + U^T dU \\ &= U^T (U^* dU + dU U^T) U \\ &= U^T (\delta U^T + \delta U) U \end{aligned} \quad (II.35)$$

$$dS^T = U^T (\delta U^* + \delta U^T) U^* \quad (II.36)$$

y la métrica del espacio se escribirá entonces, en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \text{Tr} (dS dS^T) \\
 &= \text{Tr} [U^T (\delta U^T + \delta U) (\delta U^T + \delta U) U] \\
 &= \text{Tr} [(\delta U^T + \delta U) (\delta U^T + \delta U)] \quad (\text{II.37})
 \end{aligned}$$

En términos de las matrices δu y $\delta u'$ queda

$$ds^2 = \text{Tr} [(2i \delta u')(-2i \delta u')] = \text{Tr} (4 \delta u' \delta u')$$

Para simplificar un poco, definamos la matriz real y simétrica

$$\delta M = 2 \delta u' \quad , \quad (\delta M)_{ij} = \delta m_{ij} \quad (\text{II.38})$$

con lo que

$$ds^2 = \text{Tr} (\delta M \delta M^T) \quad (\text{II.39})$$

$$= \sum_{i=1}^m \delta^2 m_{ii} + \sum_{i < j} 2 \delta^2 m_{ij} \quad (\text{II.40})$$

la métrica queda así escrita en términos de $\frac{n(n+1)}{2}$ parámetros linealmente independientes. Finalmente el elemento de volumen para este espacio es

$$d\mu(S) = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i < j} \delta m_{ij} \quad (\text{II.41})$$

Similarmente, se puede escribir la medida en términos de los -
elementos de matriz. Si tomamos en cuenta que

$$S_{ij} = x_{ij} + i y_{ij} = S_{ji} \quad (\text{II.42})$$

y consideramos las condiciones de normalización y ortogonalidad
de renglones, se escribirá

$$d\mu(S) = \prod_{i=1}^n \delta(1 - \sum_a |S_{ia}|^2) \prod_{i < j} \delta(S_{ij} - S_{ji}) \delta(\text{Im} \sum_a S_{ia} S_{ja}^*) \cdot \\ \cdot \delta(\text{Re} \sum_a S_{ia} S_{ja}^*) \prod_{i,j} dx_{ij} dy_{ij} . \quad (\text{II.43})$$

Se puede, naturalmente, reescribir esta medida en la representa-
ción

$$S = U^T U \quad (\text{II.44})$$

y es precisamente la que se usa en la sección II.5. Finalmen-
te, mencionemos que la medida es invariante bajo la transfor-
mación

$$S = \tilde{S} = U^0 S U^T \quad (\text{II.45})$$

donde U^0 es una matriz unitaria fija. Consiguientemente

$$d\mu(S) = d\mu(U^0 S U^T) \quad (\text{II.46})$$

Esta propiedad de la medida bajo el automorfismo (II.45) refleja invariancia bajo un cambio de representación de estados y además, que la medida es una función de los invariantes de la matriz de colisión multiplicada por los diferenciales de las componentes independientes de los elementos de matriz. Físicamente el automorfismo (II.45) está relacionado con el concepto vago de que todos los sistemas del ensemble definido por la medida invariante son a priori igualmente probables. Para entender mejor esto, presentamos a continuación un argumento de Dyson⁴⁰⁾ al respecto: Si visualizamos una matriz de colisión como la representación de un sistema encerrado en una caja negra, siendo S la matriz de transformación del sistema desde un estado inicial ψ a un estado final ψ' , la transformación $S \rightarrow U^0 S U^{0T}$ significa que sometemos el estado inicial a una interacción U^{0T} y al estado final a una interacción U^0 simétrica en el tiempo. Si ignoramos completamente las interacciones que ocurren dentro de la caja negra, la interacción adicional U^0 no puede aumentar ni disminuir nuestra ignorancia. Si todos los sistemas son igualmente probables al empezar, la aplicación de U^0 debe dejarlos igualmente probables. La invariancia del ensemble definido por la medida, bajo la transformación (II.45) es por tanto una idealización matemática del estado hipotético de ignorancia total.

40. F. Dyson, J. Math. Phys. 3 (1962) 140.

II.2. El problema de las matrices ortogonales R

II.2.1 La densidad de probabilidad marginal conjunta para los elementos de matrices ortogonales.

Sea el ensemble de matrices ortogonales de orden n definido por la medida de Haar $dh(R)$. Supongamos un conjunto de k elementos de matriz $\{R_{a_1 b_1}, \dots, R_{a_k b_k}\}$ y llamemos $d\mu(R_{a_1 b_1}, \dots, R_{a_k b_k})$ a la probabilidad asignada por la medida de Haar al elemento de volumen $dR_{a_1 b_1} dR_{a_2 b_2} \dots dR_{a_k b_k}$. Definimos la densidad de probabilidad marginal conjunta $\mu(R_{a_1 b_1}, \dots, R_{a_k b_k})$ por la relación

$$d\mu(R_{a_1 b_1}, \dots, R_{a_k b_k}) = \mu(R_{a_1 b_1}, \dots, R_{a_k b_k}) dR_{a_1 b_1} \dots dR_{a_k b_k} \quad (II.47)$$

En lo que sigue de esta sección, calcularemos densidades de probabilidad conjunta para elementos de matriz que pertenecen a -- uno, dos, tres y cuatro renglones. En los últimos dos casos nos limitaremos a mostrar resultados para las densidades de probabilidad sin más análisis de las mismas. En la subsección II.2.2 se estudiará el comportamiento de las densidades de probabilidad conjunta en casos límite.

Para determinar la densidad de probabilidad conjunta de elementos en el primer renglón, comenzaremos por establecer la densidad de probabilidad conjunta de todos los elementos del primer renglón. Una de las propiedades que debe reflejarse es la de no

malización de renglón, la cual sugiere que la densidad de probabilidad debe ser proporcional a la función delta $\delta \left(1 - \sum_{a=1}^n R_{ia}^2 \right)$.

Por otra parte, una transformación del tipo (II.15.b) que no mezcla los elementos de una fila con los de otras, debe dejar invariante a esta función de densidad. Esto equivale a decir que la función de densidad para todos los elementos de la primera fila debe ser función de alguna cantidad invariante bajo dicha transformación. Siendo la norma del renglón la única invariante, se tiene

$$p_0(R_{11}, \dots, R_{1n}) \propto \delta \left(1 - \sum_{a=1}^n R_{1a}^2 \right). \quad (\text{II.48})$$

La densidad de probabilidad marginal de los elementos R_{11}, \dots, R_{1n} resulta de integrar (II.48) sobre los restantes. A fin de tener una notación mas compacta definamos

$$\tau_i = (R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{in}) \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{II.49})$$

Teniendose entonces que

$$p_0(\tau_i) \propto (1 - \tau_i^2)^{\frac{n-k-2}{2}}. \quad (\text{II.50})$$

Observese que esta densidad no es invariante bajo cualquier transformación del tipo (II.15 b), pero sí bajo aquellas de la clase

$$R^0 = \left(\begin{array}{c|c} R_k^0 & 0 \\ \hline 0 & R_{n-k}^0 \end{array} \right), \quad (\text{II.51})$$

siendo R_m^o una matriz ortogonal de orden m.

Consideremos ahora la densidad de probabilidad conjunta para -- los elementos de matriz en dos renglones. También aquí, empezamos por la densidad de probabilidad de todos los elementos, debiendo ésta incorporar las condiciones de normalización y ortogonalidad. Se tiene así

$$p_o \left(\begin{matrix} R_{11}, \dots, R_{1m} \\ R_{21}, \dots, R_{2m} \end{matrix} \right) \propto \delta \left(1 - \sum_{a=1}^m R_{1a}^2 \right) \delta \left(1 - \sum_{a=1}^m R_{2a}^2 \right) \delta \left(\sum_{a=1}^m R_{1a} R_{2a} \right) \quad (II.52)$$

Si se quiere la densidad de probabilidad para los primeros k elementos de cada renglón, se tiene que integrar sobre los 2(n-k) restantes.

Después de un cálculo directo cuyo detalle se muestra en el apéndice II.1, se obtiene (Θ es la función escalón usual)

$$p(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \propto \left(1 - r_1^2 - r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - (r_1 r_2)^2 \right)^{\frac{n-k-3}{2}} \Theta(1-r_1^2) \Theta(1-r_2^2) \quad (II.53)$$

Es evidente que esta densidad es invariante bajo (II.15 b) cuando R^o es del tipo (II.51) puesto que ésta conserva las normas y producto escalar de \underline{r}_1 y \underline{r}_2 . En el caso particular en -- que $k = 2$, que utilizaremos después, se tiene

$$p_o \left(\begin{matrix} R_{11} R_{12} \\ R_{21} R_{22} \end{matrix} \right) \propto \left(1 - R_{11}^2 - R_{12}^2 - R_{21}^2 - R_{22}^2 + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21})^2 \right)^{\frac{n-5}{2}} \cdot \Theta(1 - R_{11}^2 - R_{12}^2) \Theta(1 - R_{21}^2 - R_{22}^2) \quad (II.54)$$

Se advierte aquí la presencia del cuadrado del determinante $\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$ que como se sabe es invariante bajo la transformación mencionada líneas arriba.

Para concluir, mostraremos las funciones de densidad de probabilidad conjunta para los primeros k elementos de tres y cuatro renglones. Estas son:

$$f_3 \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right) \propto (a_1 a_2 a_3)^{n-k-4} \left[1 - \left(\frac{\alpha_{12}}{a_1 a_2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_{13}}{a_1 a_3} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_{23}}{a_2 a_3} \right)^2 - 2 \frac{\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31}}{(a_1 a_2 a_3)^2} \right]^{n-k-4} \quad (II.55)$$

$$f_4 \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right) \propto (a_1 a_2 a_3 a_4)^{n-k-5} \left[1 - \sum_{i < j}^4 \frac{\alpha_{ij}^2}{a_i^2 a_j^2} - \sum_{i < j < k}^4 2 \frac{\alpha_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{ki}}{a_i^2 a_j^2 a_k^2} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2} \left(\sum_{\substack{i < j < k \\ k < l < 2}}^4 \alpha_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{kl} \alpha_{li} - \sum_{j+k+l=2}^4 \alpha_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{kl} \alpha_{li} \right) \right] \quad (k, l \neq i, j) \quad (II.56)$$

siendo

$$a_i^2 = 1 - r_i^2 \quad y \quad \alpha_{ij} = r_i - r_j \quad (II.57)$$

II.2.2 Aplicaciones.

II.2.2.a Aproximación en el ensemble definido por la medida de Haar $dh(R)$. Límite $n \gg 1$.

El procedimiento que seguiremos en todos los casos será: expresar la densidad de probabilidad como una función exponencial -- del logaritmo y luego desarrollar este logaritmo en potencias -- de n teniendo en cuenta que el orden de magnitud de R_{ij}^2 es n^{-1} .

La densidad de probabilidad para R_{11} en el límite n grande -- se obtiene a partir de (II.50) cuando $k = 1$ y toma la forma

$$p_0(R_{11}) \propto (1 - R_{11}^2)^{\frac{n-2}{2}} = \exp\left(-\frac{n}{2} R_{11}^2 + O(n^{-1})\right) \quad (II.58)$$

que como se ve es una gaussiana centrada en cero y cuya varianza define para este ensemble una especie de "sección de fluctuación elástica" dada por

$$\sigma_{11}^2 \approx \frac{1}{n} \quad n \gg 1 \quad (II.59)$$

De la misma densidad de probabilidad (II.50) con $k = 2$ se tiene

$$p_0(R_{11}, R_{12}) \propto (1 - R_{11}^2 - R_{12}^2)^{\frac{n-4}{2}} \underset{n \gg 1}{\approx} \exp\left(-\frac{n}{2} (R_{11}^2 + R_{12}^2)\right) \quad (II.60)$$

según esto en el límite $n \gg 1$ los elementos R_{11} , R_{12} tienen

distribuciones gaussianas independientes, centradas en el origen y además con la misma varianza $\frac{1}{n}$. Por un procedimiento semejante se tiene que la densidad (II.52) se reduce en el límite $n \gg 1$ al producto de cuatro distribuciones gaussianas centradas en el origen y con varianzas $\frac{1}{n}$. Nos interesa observar cómo se modifican estas varianzas cuando se tiene un ensemble E_M para matrices ortogonales.

II.2.2.b Aproximaciones en el ensemble de máxima entropía. Límite $n \gg 1$ y "absorción arbitraria en uno y dos canales".

En este espacio el ensemble que corresponde al de máxima entropía sujeta a la condición $\langle R \rangle = \bar{R}$, se define, en analogía al ensemble correspondiente para el espacio de matrices simétricas y unitarias, mediante la expresión

$$dp(R) = \exp(-\text{Tr} \beta R) dh(R) / \int \exp(-\text{Tr} \beta R') dh(R') \quad (\text{II.61})$$

Antes de analizar el límite $n \gg 1$, nos restringiremos al caso más simple de tratar: aquel en el que únicamente $\bar{R}_{11} = \langle R_{11} \rangle \neq 0$. Para esta situación ocurre que

$$e^{-\text{Tr}(\beta R)} \longrightarrow e^{-\beta_{11} R_{11}} \quad (\text{II.62})$$

$$dp(R) \longrightarrow dp(R) = p(R) dh(R) = e^{-\beta_{11} R_{11}} p_0(R) dh(R)$$

Por lo que a las densidades de probabilidad marginal se refiere, estas se pueden obtener con solo multiplicar las densidades obtenidas en la subsección II.2.1 por el factor $\exp(-\beta_n R_n)$. Así por ejemplo

$$p(R_n) \propto e^{-\beta_n R_n} (1 - R_n^2)^{\frac{n-k-2}{2}} \quad (\text{II.63})$$

Para comprender el efecto de este factor en el límite $n \gg 1$, tomemos $k=1$, en cuyo caso

$$p(R_n) = e^{-\beta_n R_n} (1 - R_n^2)^{\frac{n-3}{2}} \quad (\text{II.64})$$

Aquí tenemos un producto de una función exponencial (asimétrica) por otra que sí es simétrica y con máximo en $R_n = 0$. Como se ilustra en la fig. II.1 lo que hace la exponencial es correr

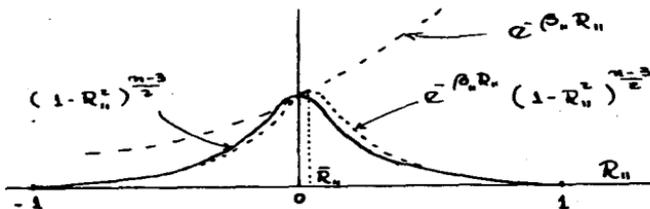


fig.II.1

el máximo al mismo tiempo que modifica la varianzá. Este efec-

to en la varianza no se observaría en el límite $n \gg 1$ si para este límite se nos ocurre substituir el segundo factor por su límite gaussiano ya que en tal caso la densidad (II.64) se transformaría en una expresión de la forma

$$e^{-\frac{n}{2} \left(\frac{\Theta_{11}}{n} - R_{11} \right)^2} \quad (\text{II.65})$$

que es una gaussiana con centro en $\frac{\Theta_{11}}{n}$ y la misma varianza $\frac{1}{n}$ que se tenía en el apartado II.2.2.a. La forma correcta de proceder es tomar la expansión del logaritmo alrededor del valor medio \bar{R}_{11} (fijado para la variable R_{11}). De acuerdo con esto escribimos

$$R_{11} = \bar{R}_{11} + \xi_{11} \quad (\text{II.66})$$

con lo que

$$\begin{aligned} p(R_{11}) &\propto \exp \left(-\beta_{11} R_{11} + \frac{n-3}{2} \ln(1-R_{11}^2) \right) \\ &= \exp \left(-\beta_{11} \bar{R}_{11} - \beta_{11} \xi_{11} + \frac{n-3}{2} \ln(1-(\bar{R}_{11} + \xi_{11})^2) \right) \\ &\propto \exp \left[-\beta_{11} \xi_{11} - \frac{n}{2} \left(\frac{2\bar{R}_{11} \xi_{11} + \xi_{11}^2}{1-\bar{R}_{11}^2} + \frac{4\bar{R}_{11}^2 \xi_{11}^2}{2(1-\bar{R}_{11}^2)^2} + \dots \right) \right] \\ &= \exp \left[-\left(\beta_{11} + \frac{n\bar{R}_{11}}{1-\bar{R}_{11}^2} \right) \xi_{11} + \frac{n}{2} \frac{1+\bar{R}_{11}^2}{(1-\bar{R}_{11}^2)^2} \xi_{11}^2 + O(n^{-1}) \right] \end{aligned}$$

(II.67)

De la condición de que $\langle R_{11} \rangle = \bar{R}_{11}$, se determina β_{11} ;
obteniéndose

$$\beta_{11} = - \frac{n \bar{R}_{11}}{1 - \bar{R}_{11}^2} \quad (\text{II.68})$$

en tanto que

$$\begin{aligned} p(R_{11}) &\propto \exp \left(- \frac{n}{2} \frac{1 + \bar{R}_{11}^2}{(1 - \bar{R}_{11}^2)^2} \xi_{11}^2 + \mathcal{O}(m^{-1}) \right) \\ &\underset{n \gg 1}{\approx} \exp \left[- \frac{n}{2} \frac{1 + \bar{R}_{11}^2}{(1 - \bar{R}_{11}^2)^2} (R_{11} - \bar{R}_{11})^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

es una gaussiana centrada en \bar{R}_{11} y cuya varianza es

$$\text{var } R_{11} = \frac{1}{n} \frac{(1 - \bar{R}_{11}^2)^2}{1 + \bar{R}_{11}^2} \leq \frac{1}{n} \quad (\text{II.70})$$

según esta expresión la varianza se reduce con el corrimiento - del centro de la gaussiana. Como se intuyó del análisis gráfico, la varianza cambia. Sin embargo, para no tener una conclusión prematura veamos otros casos.

Consideremos ahora $k = 2$ en la ec. (II.63). En el límite $n \gg 1$ se tiene que

$$p(R_{11}, R_{12}) \propto \exp \left(- \frac{n}{2} \frac{1 + \bar{R}_{11}^2}{(1 - \bar{R}_{11}^2)^2} \xi_{11}^2 + \frac{n}{2} \frac{R_{12}^2}{1 - \bar{R}_{11}^2} + \mathcal{O}(m^{-1}) \right) \quad (\text{II.71})$$

Nuevamente las distribuciones son gaussianas. Advertimos que - también la varianza correspondiente al elemento R_{12} es afecta da por el corrimiento del centro en la primera gaussiana. Esto es, sin duda, consecuencia de la condición de normalización. Si, por analogía con la matriz de Penetración de Sthaler, definimos

$$P_i = 1 - \bar{R}_{ii}^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (II.72)$$

tenemos las varianzas

$$\text{var } R_{ii} = \frac{P_i^2}{n} \cdot \frac{1}{2 - P_i}; \quad \text{var } R_{12} = \frac{P_1 P_2}{n} \quad (II.73)$$

que son diferentes del valor $\frac{1}{n}$ obtenido en el apartado II.2.2.a pero semejantes a la expresión de Hauser-Feshbach con un factor de corrección en la "parte elástica". Tenemos así que al fijar $\langle R_{ii} \rangle = \bar{R}_{ii}$ ("Condición de AE a primer orden en el espacio de - matrices ortogonales") se modifica la varianza del elemento R_{ii} y por normalización se propaga la información a la distribución de R_{12} , modificando también su varianza. Si intentamos un análisis gráfico, observamos lo siguiente: Por la condición de nor malización, las variables toman valores en el círculo unitario - de la figura II.2. En tanto el máximo de

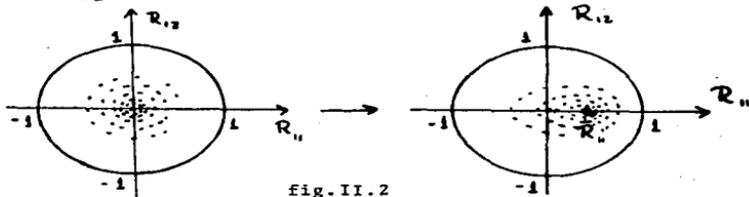


fig. II.2

las distribuciones de R_{11} y R_{12} estén en el origen, tendrán igual variancia, pero si corremos el máximo paralelamente al eje R_{11} , la anchura de la distribución de R_{11} se modifica igual que antes pero también la anchura de la distribución de R_{12} resulta afectada puesto que ahora debe crecer más rápidamente.

Para observar el efecto de la ortogonalidad consideremos la densidad de distribución marginal para los elementos R_{11} , R_{12} , R_{21} y R_{22} cuando

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} &\neq 0, & \bar{R}_{1i} &= 0 & i &= 2, 3, \dots, n \\ \bar{R}_{22} &\neq 0, & \bar{R}_{2i} &= 0 & i &= 1, 3, 4, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Como se muestra en el apéndice II.2 se tiene que

$$p \left(\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right) \propto e^{-\beta_{11} R_{11} - \beta_{22} R_{22}} \quad p_0 \left(\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right)$$

$$\propto \exp \left\{ \frac{n}{2} \left[\frac{1 + \bar{R}_{11}}{(1 - \bar{R}_{11})^2} \xi_{11}^2 + \frac{1 + \bar{R}_{22}}{(1 - \bar{R}_{22})^2} \xi_{22}^2 + 2(1 - \bar{R}_{11} \bar{R}_{22})(\xi_{12}^2 + \xi_{21}^2) \right] \right\} \quad (\text{II.75})$$

de manera que las variancias son:

$$\text{var } R_{11} = \frac{P_1^2}{n} \frac{1}{2-P_1} ;$$

$$\text{var } R_{12} = \text{var } R_{21} = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{1}{P_1 P_2 - P_1 P_2} ;$$

(II.76)

$$\text{var } R_{22} = \frac{P_2^2}{n} \frac{1}{2-P_2} .$$

La influencia de ortogonalidad y normalización es clara. La varianza en el elemento R_{12} , se ve igualmente afectada por las distribuciones en los elementos R_{11} y R_{22} .

II.2.2.c Función de distribución marginal para el elemento R_{11} cuando se tiene "absorción fuerte en todos los canales".

El problema en este caso es obtener la densidad de probabilidad para un elemento de matriz en el ensemble de máxima entropía -- cuando $\langle R_{ii} \rangle \ll 1$. El propósito es ver, a nivel de matrices ortogonales, si en este caso que es un poco más complejo pero tratable aún, se sustituye la n que aparece en las varianzas antes calculadas por la característica $\text{Tr}P$ de la fórmula de -- Hauser-Feshbach.

En el apéndice II.3 se resume el procedimiento que se sigue para calcular en el límite de "absorción fuerte" la integral

$$p_{af}(R_{ii}^0) = \frac{1}{\int dh(R)} \int \delta(R_{ii} - R_{ii}^0) e^{-\sum_i \beta_i R_{ii}} dh(R) \quad (\text{II.77})$$

Obteniéndose

$$p_{af}(R_{ii}) \propto (1 - \bar{R}_{ii}^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[(1 - \beta_{ii} \bar{R}_{ii} + \frac{1}{2} (\beta_{ii} \bar{R}_{ii}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i+1} \bar{R}_{ii}^2 \frac{n-2+\bar{R}_{ii}^2}{(n-1)^2} + \dots \right] \quad (\text{II.78})$$

Con el procedimiento ya mostrado para el caso límite $n \gg 1$ se obtiene que

$$p_{af}(R_{ii}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[n \frac{1 + \bar{R}_{ii}^2}{(1 - \bar{R}_{ii}^2)^2} - \frac{\sum_{i+1} \beta_{ii}^2}{n^2 + \frac{1}{2} \bar{R}_{ii}^2 \sum \beta_{ii}^2} \right] \xi_{ii}^2 + \dots \right\} \quad (\text{II.79})$$

si en esta expresión $\bar{R}_{ii} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $\beta_{ii} \approx n \bar{R}_{ii}$

$$p_{af}(R_{ii}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{n(1 + \bar{R}_{ii}^2)}{(1 - \bar{R}_{ii}^2)^2} - \sum_{i+1} \bar{R}_{ii}^2 \right] \xi_{ii}^2 + \dots \right\} \quad (\text{II.80})$$

$$p_{af}(R_{ii}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{n(1 + \bar{R}_{ii}^2) - (1 - \bar{R}_{ii}^2) \sum_{i+1} \bar{R}_{ii}^2}{(1 - \bar{R}_{ii}^2)^2} \xi_{ii}^2 + \mathcal{O}(n^{-1}) \right\}$$

$$p_{af}(R_{ii}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{n - \sum_{i+1} \bar{R}_{ii}^2}{(1 - \bar{R}_{ii}^2)^2} \xi_{ii}^2 + \mathcal{O}(n^{-1}) \right\} \quad (\text{II.81})$$

con lo que la varianza resulta ser

$$\text{var } R_{ii} \approx \frac{(1 - \bar{R}_{ii})^2}{n - \sum_i \bar{R}_{ii}^2} = \frac{P_i^2}{T_r P} \quad (\text{II.82})$$

Sin embargo, en el límite $n \gg 1$ y absorción fuerte: $T_r P \sim n$.

II.3. El problema de las matrices U unitarias⁴¹⁾

II.3.1 Densidades de probabilidad marginal conjunta para los elementos de matrices unitarias.

Sea el espacio de matrices definido por la medida de Haar $dh(U)$.

Analizaremos la densidad de probabilidad conjunta para elementos de uno y dos renglones. La densidad de probabilidad $p_0(U_{11}, \dots, U_{1n})$ de los elementos de, digamos, el primer renglón, contiene una función delta $\delta(1 - \sum_a |U_{1a}|^2)$. Mas aún, p_0 debe permanecer invariante bajo cualquier transformación del tipo -- (II.29.b), puesto que tales transformaciones solamente mezclan elementos de un renglón con ellos mismos. Podemos entonces multiplicar la función δ por una función arbitraria de U_{11}, \dots, U_{1n} que permanece invariante bajo (II.29 b). Como la única invariante es la norma $\sum_a |U_{1a}|^2$, la función arbitraria se reduce a una constante, debido a la función delta. Tenemos entonces

41. Lo que sigue hasta el final de capítulo es casi una transcripción de - P.Pereyra y P.A. Mello, J.Phys. A16 (1983) 237.

$$p_0(u_{11}, \dots, u_{1m}) \propto \delta\left(1 - \sum_{\alpha} |u_{1\alpha}|^2\right) \quad (\text{II.83})$$

Integrando (II.83) sobre las variables $u_{1,k+1}, \dots, u_{1m}$ encontramos para la densidad de probabilidad conjunta de los elementos u_{11}, \dots, u_{1k} , la expresión

$$p_0(u_{11}, \dots, u_{1k}) \propto \left(1 - \sum_{\alpha} |u_{1\alpha}|^2\right)^{m-k-1} \quad (\text{II.84})$$

Obsérvese que (II.76) permanece invariante bajo la operación (II.29 b) con

$$u^0 = \begin{pmatrix} u_{11}^0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & u_{n-k}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.85})$$

donde u_{11}^0 es una matriz unitaria de orden m .

Consideremos ahora la densidad de probabilidad conjunta asociada a la medida de Haar de, por ejemplo, el primero y segundo renglones

$$p_0 \left(\begin{matrix} u_{11}, \dots, u_{1n} \\ u_{21}, \dots, u_{2n} \end{matrix} \right) \propto \delta\left(1 - \sum_{\alpha} |u_{1\alpha}|^2\right) \delta\left(1 - \sum_{\alpha} |u_{2\alpha}|^2\right) \delta\left(\sum_{\alpha} u_{1\alpha} u_{2\alpha}^*\right) \quad (\text{II.86})$$

Si queremos conservar solamente k elementos de cada renglón - tenemos que integrar sobre las restantes $2(n-k)$. Definiendo --

los vectores

$$\underline{u}_1 \equiv (U_{11}, \dots, U_{1n}) , \quad \underline{u}_2 \equiv (U_{21}, \dots, U_{2k}) , \quad (\text{II.87})$$

se obtiene en el apéndice II.4, para la densidad de probabilidad conjunta la expresión siguiente

$$p_0(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \propto [1 - |\underline{u}_1|^2 - |\underline{u}_2|^2 + |\underline{u}_1|^2 |\underline{u}_2|^2 - |\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|^2]^{\frac{n-k-2}{2}} \theta(1 - |\underline{u}_1|^2) \theta(1 - |\underline{u}_2|^2) \quad (\text{II.88})$$

Consideremos nuevamente una transformación del tipo (II.29 b) - con \underline{u}^0 como en (II.77); tal transformación conserva las normas de \underline{u}_1 y \underline{u}_2 y su producto escalar hermitiano, de manera que (II.80) permanece invariante.

Para el caso particular en que $k = 2$, que utilizaremos después, la ecuación (II.84) da

$$p_0 \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \propto (1 - |U_{11}|^2 - |U_{12}|^2 - |U_{21}|^2 - |U_{22}|^2 + |U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21}|^2)^{m-4} \cdot \theta(1 - |U_{11}|^2 - |U_{12}|^2) \theta(1 - |U_{21}|^2 - |U_{22}|^2). \quad (\text{II.89})$$

Adviertase la aparición del valor absoluto del determinante $U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21}$, que también permanece invariante bajo la transformación a que nos referimos en el párrafo anterior.

II.3.2. Aplicaciones.

II.3.2.a Aproximación en el ensemble definido por la medida de Haar $dh(U)$. Límite $n \gg 1$.

Analizaremos el límite n grande para los resultados de la subsección anterior.

Consideremos la densidad de probabilidad de U_{11} , dada por la ecuación (II.84) con $k = 1$. Si expandimos su logaritmo, obtenemos

$$\begin{aligned}
 p_0(U_{11}) &\propto (1 - |U_{11}|^2)^{n-2} \underset{n \gg 1}{\approx} \exp(-n |U_{11}|^2) \\
 &\underset{n \gg 1}{\approx} \exp(-n x_{11}^2) \exp(-n y_{11}^2) \quad (II.90)
 \end{aligned}$$

el siguiente término del desarrollo del logaritmo es de orden $\mathcal{O}(n^{-1})$. Vemos entonces, que en el límite $n \gg 1$, x_{11} y y_{11} están distribuidas de acuerdo con Gaussianas centradas en el origen con varianzas iguales. La sección de fluctuación elástica definida como $\langle |U_{11} - \bar{U}_{11}|^2 \rangle$, resulta ser

$$\sigma_{11}^2 = \text{var } x_{11} + \text{var } y_{11} \approx \frac{1}{n} \quad (II.91)$$

que coincide con un resultado encontrado por Gaudin y Mello⁴²⁾.

42. M.Gaudin y P.A. Mello: J.Phys. 67 (1981) 1085.

Similarmente, el límite n grande de $p_0(U_{11}, U_{12})$ obtenido de (II.84) con $k = 2$, es

$$p_0(U_{11}, U_{12}) \sim \exp(-n|U_{11}|^2) \exp(-n|U_{12}|^2), \quad n \gg 1, \quad (\text{II.92})$$

que corresponde a dos Gaussianas independientes centradas en el origen, con la misma varianza $\frac{1}{n}$. La ecuación (II.90) se obtiene de (II.92) por integración. Por el mismo procedimiento el límite $n \gg 1$ de (II.89) corresponde a cuatro Gaussianas independientes centradas en cero con varianza $\frac{1}{n}$.

Los resultados que se obtienen aquí para las distribuciones aproximadas de los elementos de la matriz unitaria son exactamente iguales a los que se obtuvieron en la situación correspondiente para las matrices ortogonales.

Veremos en el apartado siguiente de qué manera se modifican estas secciones al introducirse la condición de AE a primer orden y máxima entropía.

II.3.2.b Aproximaciones en el ensemble de máxima entropía Límite $n \gg 1$ y absorción arbitraria en uno y dos canales.

Estudiaremos ahora el ensemble de matrices U definido por Gaudin y Mello (1981), que es de máxima entropía, sujeto a la restricción $\langle U \rangle = \bar{U}$. La probabilidad diferencial asociada con es-

te ensemble está dada por

$$d\mathcal{P}(U) = \frac{\exp(-\text{Re Tr}(\beta U)) d\mathcal{h}(U)}{\int \exp(-\text{Re Tr}(\beta U')) d\mathcal{h}(U')} \quad (\text{II.93})$$

donde β es la matriz de multiplicadores de Lagrange que permite fijar $\langle U \rangle$.

Los resultados que se obtuvieron para las funciones de densidad de las variables $U_n, \{U_n, U_{1n}\}, \{U_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}\}$ nos permiten estudiar, en el nuevo ensemble, algunos casos particulares. Empezaremos con $\mathcal{P}(U_n)$. Consideremos el problema en el cual el promedio de todo U_{ab} es cero excepto el de U_{11} , que por conveniencia se toma real (Gaudin y Mello 1981), con valor arbitrario entre -1 y 1, es decir

$$\bar{x}_{11} \equiv \langle x_{11} \rangle \neq 0 \quad \langle y_{ij} \rangle = 0, \quad \langle U_{1n} \rangle = \dots = \langle U_{nn} \rangle = 0. \quad (\text{II.94})$$

Aquí se usó la notación de (II.27).

De (II.93) y (II.84) con $k=1$, se puede escribir inmediatamente $\mathcal{P}(U_n)$ como

$$\mathcal{P}(U_n) = \exp(-\beta_{11} x_{11}) \mathcal{P}_0(U_n) \quad (\text{II.95})$$

Para obtener el límite n grande de $\mathcal{P}(U_n)$, debemos tomar en cuenta que $\mathcal{P}_0(U_n)$ está centrada en \bar{x}_{11} y por tanto aproximar el segundo factor en (II.95) por valores de x_{11} en la vecindad de \bar{x}_{11} . Escribiendo

$$x_{11} = \bar{x}_{11} + \xi_{11} \quad (II.96)$$

en (II.95) y con un procedimiento semejante al que se usó en el caso de matrices ortogonales (véase ec. (II.67)), tenemos

$$p(U_{11}) \propto \exp \left[-2n \frac{1 + \bar{x}_{11}^2}{(1 - \bar{x}_{11}^2)^2} \frac{\xi_{11}^2}{2} - \frac{2n}{1 - \bar{x}_{11}^2} \frac{y_{11}^2}{2} + O(n^{-1}) \right] \quad (II.97)$$

donde se cancelaron los términos lineales en ξ_{11} con la elección

$$\beta_{11} = 2n \bar{x}_{11} / (1 - \bar{x}_{11}^2) \quad (II.98)$$

Adviertase que en esta aproximación y en el caso considerado de absorción total en todos los canales y absorción arbitraria en el canal 1, ξ_{11} y y_{11} son estadísticamente independientes; ellas tienen distribuciones Gaussianas centradas en \bar{x}_{11} y 0, respectivamente, y varianzas dadas por

$$\text{var } x_{11} = \frac{1}{2n} \frac{(1 - \bar{x}_{11}^2)^2}{1 + \bar{x}_{11}^2}, \quad \text{var } y_{11} = \frac{1 - \bar{x}_{11}^2}{2n} \quad (II.99)$$

Ocurre con las varianzas de x_{11} y y_{11} lo que en el caso ortogonal se tenía para R_{11} y R_{12} . También en este caso la condición de normalización cumple con la función de transmitir la información. Para la varianza de U_{11} se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{-2} &= \text{var } z_{11} + \text{var } y_{11} = \frac{1}{m} \frac{(1 - \bar{x}_{11}^2)^2}{1 - \bar{x}_{11}^4} \\ &= \frac{P_1^2}{n} \frac{1}{1 - \bar{x}_{11}^4} \end{aligned} \quad (\text{II.100})$$

donde se ha introducido el factor de transmisión

$$P_1 = 1 - |\langle U_{11} \rangle|^2 \quad (\text{II.101})$$

La expresión (II.100) es, formalmente, ligeramente diferente -- que la correspondiente ec.(II.70) para el elemento R_{11} de las matrices ortogonales y no solo porque $\bar{y}_{11} \equiv \langle y_{11} \rangle = 0$, ya que si en lugar de (II.94) consideramos que

$$\bar{x}_{11} \equiv \langle x_{11} \rangle \neq 0; \quad \bar{y}_{11} \equiv \langle y_{11} \rangle \neq 0 \quad \langle U_{12} \rangle = \dots = \langle U_{nn} \rangle = 0 \quad (\text{II.102})$$

se muestra en el apéndice II.5 que

$$\sigma_{11}^{-2} = \frac{P_1 P_1}{n} \frac{1}{1 - |U_{11}|^2} \quad (\text{II.103})$$

Similarmente, bajo la condición (II.102), la distribución de $-U_{11}$ y U_{12} que se obtiene de (II.84) ($k=2$) y (II.93) es

$$\begin{aligned} p(U_{11}, U_{12}) &= 2\pi \beta (-\beta z_{11}) (1 - |U_{11}|^2 - |U_{12}|^2)^{m-2} \\ &\approx_{m \gg 1} 2\pi \beta \left\{ -\frac{m}{P_1} \left[(1 + \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2) \xi_{11}^2 + (1 - \bar{x}_{11}^2 + \bar{y}_{11}^2) \eta_{11}^2 + 4\bar{x}_{11}\bar{y}_{11} \xi_{11}\eta_{11} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{P_1} |U_{12}|^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

nuevamente, $\bar{\epsilon}$ está correspondiente a distribuciones Gaussianas para las variables. Después de diagonalizar la expresión bilineal por un procedimiento igual al que se muestra en el apéndice II.3 para el problema anterior, resulta que

$$p(U_{11}, U_{12}) \propto \exp \left[-\frac{n}{P_1} (1 - |\bar{U}_{11}|^4) (x_{11}^2 + y_{11}^2) - \frac{n}{P_1} (x_{12}^2 + y_{12}^2) \right] \quad (\text{II.105})$$

Las secciones de fluctuación σ_{11}^H y σ_{12}^H están ahora dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^H &= \text{var } x_{11} + \text{var } y_{11} = \frac{P_1 P_1}{n} \frac{1}{(1 - |\bar{U}_{11}|^4)} \\ \sigma_{12}^H &= \text{var } x_{12} + \text{var } y_{12} = \frac{P_1 P_1}{n} \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

Recordemos que $P_1 \neq 1$, $P_2 = \dots = P_n = 1$. Las ecuaciones (II.106) están en la forma de la expresión de Hauser-Feshbach, con un factor de corrección en la parte elástica, no muy diferente de 1 en tanto \bar{x}_{11} y \bar{y}_{11} no exceden de, por ejemplo, 0.4. Reiteremos, nuevamente que la modificación a que da lugar el hecho de fijar $\langle U_{11} \rangle$ es que las secciones sufren la siguiente transformación

$$\sigma_{ab}^H \approx \frac{1}{n} \xrightarrow{\langle U_{11} \rangle \text{ fija}} \sigma_{ab}^H \approx \frac{P_a P_b}{n} \frac{1}{1 - \sum_{\alpha} |\bar{U}_{\alpha\alpha}|^2} \quad (\text{II.107})$$

Finalmente, consideremos la distribución de U_{11} , U_{12} , U_{21} y U_{22} .

Haremos el análisis cuando los promedios de U_{11} y U_{22} son diferentes de cero y reales mientras que los promedios restantes son todos ceros, es decir

$$\bar{x}_{11} = \langle x_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle y_{11} \rangle = 0; \quad \bar{x}_{22} = \langle x_{22} \rangle \neq 0; \quad \langle y_{22} \rangle = 0.$$

$$\langle U_{33} \rangle = \dots = \langle U_{nn} \rangle = 0; \quad \langle U_{ab} \rangle = 0 \quad a \neq b. \quad (\text{II.108})$$

De (2.89) y (2.93), tenemos

$$p \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \propto \exp(-\beta_{11} x_{11}) \exp(-\beta_{22} x_{22}) \cdot (1 - |U_{11}|^2 - |U_{12}|^2 - |U_{21}|^2 - |U_{22}|^2 + |U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21}|^2)^{m-4}. \quad (\text{II.109})$$

Haciendo la substitución

$$x_{11} = \bar{x}_{11} + \xi_{11}, \quad x_{22} = \bar{x}_{22} + \xi_{22} \quad (\text{II.110})$$

y en el límite n grande, a orden $\mathcal{O}(n^{-1})$, la distribución toma la forma

$$p \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \propto \exp \left[-n \frac{1 + \bar{x}_{11}^2}{(1 - \bar{x}_{11}^2)^2} \xi_{11} + \frac{n}{1 - \bar{x}_{11}^2} y_{11}^2 + n \frac{1 + \bar{x}_{22}^2}{(1 - \bar{x}_{22}^2)^2} \xi_{22} + \frac{n}{1 - \bar{x}_{22}^2} y_{22}^2 + \frac{n}{(1 - \bar{x}_{11}^2)(1 - \bar{x}_{22}^2)} \left(x_{12}^2 + y_{12}^2 + x_{21}^2 + y_{21}^2 + 2\bar{x}_{11}^2 \bar{x}_{22}^2 (x_{12} x_{21} - y_{12} y_{21}) \right) \right] \quad (\text{II.111})$$

la cual corresponde nuevamente a variables Gaussianas. Pero - ahora U_{12} y U_{21} no son más independientes. Esta es una consecuencia de ortogonalidad. Después de diagonalizar la expresión bilineal, encontramos que las secciones de fluctuación son

$$\sigma_{11}^{\mu} = \frac{P_1 P_1}{n} \frac{1}{1 - \bar{x}_{11}^4}, \quad \sigma_{12}^{\mu} = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{1}{1 - \bar{x}_{11}^2 \bar{x}_{22}^2}, \quad (\text{II.112})$$

$$\sigma_{20}^{\mu} = \frac{P_2 P_1}{n} \frac{1}{1 - \bar{x}_{11}^2 \bar{x}_{22}^2}, \quad \sigma_{22}^{\mu} = \frac{P_2 P_2}{n} \frac{1}{1 - \bar{x}_{22}^4}$$

y estas, corresponden nuevamente a las expresiones de Hauser-Feshbach con factores de corrección que con \bar{x}_{11} y \bar{x}_{22} hasta 0.5, no difieren apreciablemente de la unidad.

II.4 El problema de las matrices S simétricas y unitarias.

II.4.1 La densidad de probabilidad marginal conjunta para los elementos de las matrices S.

Estudiaremos ahora ensembles de matrices simétricas y unitarias, esto no solamente es importante porque incorporaremos la reversibilidad temporal a nuestro análisis, sino también porque los resultados que encontremos son, desde el punto de vista físico, significativos.

Sea el ensemble de matrices S definido por la medida $d\mu(S)$ de

(II.41). Escribimos

$$S_{ab} = x_{ab} + i y_{ab} \quad (II.113)$$

y definimos la densidad de probabilidad exactamente como se hizo en la sección anterior, reemplazando U por S y x,y por X,Y.

Específicamente, estudiaremos densidades de probabilidad conjunta para elementos en un renglón y para los elementos $\{S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$

Consideremos, por ejemplo, el primer renglón y designemos por $\phi_1(S_{11}, \dots, S_{1n})$ la correspondiente densidad de probabilidad. Por unitariedad ϕ_1 contiene la función delta $\delta(1 - \sum |S_{1i}|^2)$. El conjunto de transformaciones del tipo (II.45) que no mezclan los elementos S_{11}, \dots, S_{1n} con los otros elementos de la matriz S y por tanto dejan invariantes a ϕ_1 , constituyen una clase restringida. Funciones de los correspondientes invariantes aparecerán en la expresión para ϕ_1 . Para determinar la clase, escribamos la ecuación (II.45) en la forma

$$\tilde{S}_{ab} = \sum_{\alpha, \beta} U_{a\alpha}^{\circ} U_{b\beta}^{\circ} S_{\alpha\beta} \quad (II.114)$$

y, para el primer renglón

$$\tilde{S}_{1b} = \sum_{\alpha, \beta} U_{1\alpha}^{\circ} U_{b\beta}^{\circ} S_{\alpha\beta} \quad (II.115)$$

Si se quiere que la suma de la expresión anterior únicamente contenga elementos $S_{1\beta}$, se necesita que

$$U_{i,2}^{\circ} = e^{i\theta_i} \delta_{i,2} \quad (\text{II.116})$$

La matriz U° tendrá entonces la estructura

$$U^{\circ} = \left(\begin{array}{c|c} e^{i\theta_1} & \vdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & U_{n-1}^{\circ} \end{array} \right) \quad (\text{II.117})$$

Los elementos de la matriz transformada (II.115) son

$$\tilde{S}_n = e^{2i\theta_1} S_n, \quad \tilde{S}_{1b} = e^{i\theta_1} \sum_{\rho=2}^n U_{\rho b}^{\circ} S_{1\rho} \quad b \neq 1 \quad (\text{II.118})$$

Como U° es unitaria, las funciones invariantes bajo (II.118) son :

$$|\tilde{S}_n|^2 = |S_n|^2 ; \quad \sum_{b=2}^n |\tilde{S}_{1b}|^2 = \sum_{b=2}^n |S_{1b}|^2 \quad (\text{II.119})$$

Ya que por unitariedad

$$\sum_{b=2}^n |S_{1b}|^2 = 1 - |S_n|^2, \quad (\text{II.120})$$

nuestra distribución p_n puede escribirse como

$$p_n(S_1, \dots, S_n) \propto f(|S_n|^2) \delta\left(1 - \sum_{b=2}^n |S_{1b}|^2\right) \quad (\text{II.121})$$

No tenemos manera de especificar más acerca de f en base a las

propiedades de invariancia. Sin embargo, como la densidad de probabilidad para el elemento S_{ii} es posible determinarla independientemente $\{S_{ii}\}$ puede entonces calcularse. Veamos ahora como se consigue esto.

Dado que toda matriz S se puede escribir como en (II.32)

$$S = U^* U,$$

donde U es unitaria, entonces, es posible expresar la distribución de S en términos de U . Para esto necesitamos la representación de la medida $d\mu(S)$ en términos de matrices unitarias. En particular, para determinar la densidad de probabilidad $p_0(S_{ii})$, debemos tener en cuenta que debido a que

$$S_{ii} = \sum_a |U_{ia}|^2, \quad \sum_a |S_{ia}|^2 = \sum_a |U_{ia}|^2 \quad (\text{II.122})$$

todo lo que necesitamos es la densidad de probabilidad del primer renglón. De (II.43) se tiene que

$$p_0(S_{ii}) \propto \int \dots \int \delta(S_{ii} - \sum_a |U_{ia}|^2) \delta(1 - \sum_a |U_{ia}|^2) dU_{i1} \dots dU_{in}$$

$$dU_{ab} = dx_{ab} dy_{ab} \quad U_{ab} = x_{ab} + i y_{ab} \quad (\text{II.123})$$

Los detalles de la integración se dan en el apéndice II.6, donde se obtiene el siguiente resultado.

$$p_0(s_{ii}) \propto (1 - |s_{ii}|^2)^{\frac{m-3}{2}}. \quad (\text{II.124})$$

Esta densidad tiene una estructura similar a la que se encontró para las unitarias, excepto por el valor del exponente.

Por otra parte, de (II.121) se puede obtener $p_0(s_{ii})$ por integración sobre s_{11}, \dots, s_{1n} , es decir

$$\begin{aligned} p_0(s_{ii}) &\propto \int \delta(1 - \sum_{\alpha} |s_{\alpha i}|^2) ds_{11} \dots ds_{1n} \\ &\propto \int (1 - |s_{ii}|^2)^{m-2}. \end{aligned} \quad (\text{II.125})$$

Comparando (II.125) con (II.124) se tiene que

$$\int (1 - |s_{ii}|^2) \propto (1 - |s_{ii}|^2)^{\frac{1-m}{2}}. \quad (\text{II.126})$$

Así, la distribución conjunta (II.121) para el primer renglón - viene a ser

$$p_0(s_{11}, \dots, s_{1n}) \propto (1 - |s_{11}|^2)^{\frac{1-m}{2}} \delta(1 - \sum_{\alpha=1}^n |s_{1\alpha}|^2). \quad (\text{II.127})$$

En contraste con la expresión (II.83) donde todas las variables se encuentran en pie de igualdad, el factor $\int (1 - |s_{ii}|^2)$ distingue ahora los elementos de matriz diagonales de los no diagonales.

Varias consecuencias interesantes pueden obtenerse a partir de la ecuación (II.127). Integrando sobre las variables $s_{1,2}, \dots, s_{1n}$

se obtiene para la densidad de probabilidad conjunta de los elementos S_{11}, \dots, S_{kk} , la expresión

$$p_0(S_{11}, \dots, S_{kk}) \propto (1 - |S_{11}|^2)^{\frac{1-n}{2}} \left(1 - \sum_{\alpha=1}^k |S_{\alpha\alpha}|^2\right)^{n-k-1} \quad (\text{II.128})$$

Integrando (II.128) sobre S_{11} encontramos, para la densidad de probabilidad conjunta de los elementos no diagonales S_{12}, \dots, S_{kk}

$$p_0(S_{12}, \dots, S_{kk}) \propto \left(1 - \sum_{\alpha=1}^k |S_{\alpha\alpha}|^2\right)^{n-k} {}_2F_1\left(\frac{n-1}{2}, 1; n-k+1; 1 - \sum_{\alpha} |S_{\alpha\alpha}|^2\right), \quad n > k, \quad (\text{II.129})$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica usual. La asimetría entre los elementos de matriz diagonales y los no diagonales es nuevamente perceptible de los resultados (II.128) y (II.129).

La densidad de probabilidad del elemento S_{12} se obtiene de (II.129) poniendo $k = 2$, entonces

$$p_0(S_{12}) \propto (1 - |S_{12}|^2)^{n-2} {}_2F_1\left(\frac{n-1}{2}, 1; n-1; 1 - |S_{12}|^2\right), \quad n > 2. \quad (\text{II.130})$$

De las propiedades de simetría de la medida $d\mu(S)$, podemos decir que la ecuación (II.124) da la densidad de probabilidad de cualquier elemento de matriz diagonal y la ecuación (II.130) para cualquier no diagonal.

La distribución $p_0(S_{12})$ para $n = 2$ se obtiene directamente de (II.127) con $n = 2$ y por integración sobre S_{11} , con el resultado

$$p_0(S_{12}) \propto \frac{1}{|S_{12}|} \quad n=2 \quad (\text{II.131})$$

El uso de la relación

$$F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 1; 2\right) = (1-2)^{1/2} \quad (\text{II.132})$$

muestra que (II.130) es también válida para $n=2$.

De los anteriores resultados es fácil encontrar algunos momentos de las diversas distribuciones, que serán importantes en algunas aplicaciones. De (II.127) con $k=2$, se puede obtener, por integración directa, los momentos cruzados de las variables S_{11} y S_{12} :

$$\langle |S_{11}|^l |S_{12}|^m \rangle_0 = \frac{\Gamma(n) \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n+m-l}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{m}{2}+n-1\right) \Gamma\left(\frac{l+m+n}{2}\right)} \quad (\text{II.133})$$

Los momentos cruzados de las variables S_{12} , S_{13} se encuentran fácilmente integrando $|S_{12}|^l |S_{13}|^m$ por la densidad de probabilidad conjunta $p_0(S_{11}, S_{12}, S_{13})$ obtenida de (II.127) con $k=3$, con el siguiente resultado

$$\langle |S_{12}|^l |S_{13}|^m \rangle_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{l+m}{2}-1\right) (n+l+m-1)} \quad (\text{II.134})$$

Las ecuaciones (II.133) y (II.134) están de acuerdo con los casos particulares que fueron calculados por Mello y Seligman (1980)

Generalizaremos ahora, el análisis para encontrar la densidad de probabilidad conjunta para el bloque de cuatro elementos $\{S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}\}$. Si consideramos

$$S = U^T U$$

es claro que necesitamos la densidad de probabilidad conjunta de dos renglones de U , la cual fue dada en (II.86). El cálculo de $p. \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ es descrito en el Apéndice II.7, con el siguiente resultado

$$p. \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \propto \delta(S_{11}, S_{21}) (1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 - 2|S_{12}|^2 + |S_{11} S_{22} - S_{21}^2|)^{\frac{n-k}{2}} \quad (\text{II.135})$$

La estructura de esta expresión es similar a la correspondiente ec. (II.89) para matrices unitarias, excepto por el valor del exponente y la aparición de la función delta $\delta(S_{11}, S_{21})$. Es además, claro que esta densidad es invariante bajo la operación (II.29b) con U^0 de la clase definida en (II.85) para $k = 2$. En efecto si

$$u = U_2^0 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.136a})$$

y

$$\Delta = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.136b})$$

el determinante $S_{11} S_{22} - (S_{12})^2$ permanece invariante bajo

$$\tilde{A} = u \lambda u^T \quad (\text{II.137})$$

Observándose que se puede escribir

$$(\tilde{S}_{11}, \tilde{S}_{12}, \tilde{S}_{21}, \tilde{S}_{22})^T = u \times u^T (S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22})^T, \quad (\text{II.138})$$

donde \times indica el producto directo usual, vemos que la norma $|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2$ es igualmente invariante. Consecuentemente la distribución p_n de la oc. (II.135) es también invariante.

II.4.2 Aplicaciones.

II.4.2.a Aproximación en el ensemble definido por la medida $d\mu(S)$. Límite $n \gg 1$.

Como en el caso de las matrices ortogonales y unitarias nos interesa el análisis de las formas aproximadas de las funciones de densidad en el límite n grande (muchos canales abiertos).

Para $n \gg 1$, $p_n(S_{11})$ de la ecuación (II.124) se transforma en

$$p_n(S_{11}) \propto (1 - |S_{11}|^2)^{\frac{n-3}{2}} \approx \exp\left(-\frac{1}{2} n |S_{11}|^2\right) \\ \approx \exp\left(-\frac{1}{2} n X_{11}^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} n Y_{11}^2\right) \quad (\text{II.139})$$

mostrando que en este límite X_{11} y Y_{11} se comportan como variables Gaussianas independientes centradas en cero con la misma varianza $\frac{1}{n}$. La sección de fluctuación σ_{11}^{12} está entonces dada por

$$\sigma_{11}^{12} = \langle |S_{11} - \langle S_{11} \rangle|^2 \rangle = \text{var } X_{11} + \text{var } Y_{11} \approx \frac{2}{n} \quad , \quad (\text{II.140})$$

que difiere por un factor de 2 de la correspondiente expresión (II.91) para las matrices unitarias. Aquí tenemos la primera manifestación de simetría a nivel de secciones. Ya habíamos anotado antes que el elemento de la diagonal no aparecía en igualdad de condiciones. Esto se hace evidente si aproximamos la ecuación (II.30) y calculamos la sección de fluctuación en este mismo límite, obteniéndose

$$\sigma_{11}^{11} \approx \frac{1}{n} \quad , \quad n \gg 1 \quad . \quad (\text{II.141})$$

Estos valores para las secciones de fluctuación reflejan, sin duda, la influencia de la propiedad de simetría. de manera que el valor $W = 2$ del "elastic enhancement factor" es como afirman Vager ²²⁾ y Agassi, Weidenmuller y Mantzouranis ¹⁹⁾, debido a reversibilidad temporal.

Para concluir haremos el análisis en el ensemble E_M de matrices S .

II.4.2.b Aproximaciones en el ensemble de máxima entropía
Límite $n \gg 1$ y absorción arbitraria en uno y dos
canales.

Aplicaremos ahora los resultados que obtuvimos para las funciones de densidad del ensemble de matrices que fue definido por Mello (1979) y Mello y Seligman (1980) como el de máxima entropía sujeto a la restricción $\langle S \rangle = \text{fijo}$, siendo la medida básica $d\mu(S)$. La probabilidad diferencial asociada con este ensemble ya fue considerada en el capítulo I (vease ec. (I.74)) y la reescribimos aquí

$$d\rho(S) = \frac{\exp(-\text{Re } \text{Tr}(\beta S)) d\mu(S)}{\int \exp(-\text{Re } \text{Tr}(\beta S')) d\mu(S')} \quad (\text{II.142})$$

Consideremos en primer lugar el caso en el que los promedios de todo S_{ab} son cero, excepto el promedio de S_{11} , que por conveniencia se escoge real, con valores arbitrarios entre -1 y 1, es decir

$$\bar{x}_{11} = \langle x_{11} \rangle \neq 0, \quad \langle y_{11} \rangle = 0, \quad \langle S_{11} \rangle = \dots = \langle S_{nn} \rangle = 0. \quad (\text{II.143})$$

De (II.142), (II.124) y (II.128) (con $k = 2$) tenemos

$$p(S_{11}) \propto \exp(-\beta x_{11}) (1 - |S_{11}|^2)^{\frac{n-3}{2}} \quad (\text{II.144})$$

$$p(S_{11}, S_{12}) \propto \exp(-\beta x_{11}) (1 - |S_{11}|^2)^{\frac{n-1}{2}} (1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)^{\frac{n-3}{2}} \quad (\text{II.145})$$

El límite n grande de estas expresiones es

$$p(S_{11}) \underset{n \gg 1}{\sim} \exp \left(-n \frac{1 + \bar{x}_{11}^2}{(1 - \bar{x}_{11}^2)^2} \frac{\xi_{11}}{2} - \frac{n}{1 - \bar{x}_{11}^2} \frac{y_{11}^2}{2} \right), \quad (\text{II.146})$$

$$p(S_{11}, S_{12}) \underset{n \gg 1}{\sim} \exp \left(-n \frac{1 + \bar{x}_{11}^2}{(1 - \bar{x}_{11}^2)^2} \frac{\xi_{11}^2}{2} - \frac{n}{1 - \bar{x}_{11}^2} \frac{y_{11}^2}{2} - \frac{2n}{1 - \bar{x}_{11}^2} \frac{|S_{12}|^2}{2} \right) \quad (\text{II.147})$$

Las secciones eficaces de fluctuación pueden ahora escribirse como

$$\sigma_{11}^{\mu} = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{2}{1 - |\bar{S}_{11}|^4}, \quad \sigma_{12}^{\mu} = \frac{P_1 P_2}{n}, \quad (\text{II.147})$$

donde P_c es el factor de transmisión (Kawai et al. 1973)

$$P_c = 1 - |\bar{S}_{c1}|^2 \quad (\text{II.148})$$

El que ξ_{11} , y_{11} y S_{12} sean variables Gaussianas (ec.(II.147)), está de acuerdo con Agassi et al (1975).

Finalmente, consideremos la distribución de cuatro elementos de matriz S_{11} , S_{12} , S_{21} y S_{22} y analicemos el caso en que -- los promedios de S_{11} y S_{12} son diferentes de cero y reales -- con valores arbitrarios entre -1 y 1, mientras que los otros se toman iguales a cero, es decir

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11} &\equiv \langle x_{11} \rangle \neq 0, \quad \langle y_{11} \rangle = 0, \quad \bar{x}_{12} \equiv \langle x_{12} \rangle \neq 0, \quad \langle y_{12} \rangle = 0, \\ \langle S_{33} \rangle &= \dots = \langle S_{nn} \rangle = 0 \quad \langle S_{ab} \rangle = 0 \quad a \neq b \end{aligned} \quad (\text{II.149})$$

De (II.142) y (II.135) tenemos

$$p \left(\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix} \right) \propto \exp \left(-\beta_{11} X_{11} \right) \exp \left(-\beta_{22} X_{22} \right) \cdot \quad (II.150)$$

$$\cdot \left[1 - (|S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 + 2|S_{12}|^2 + |S_{11} S_{22} - (S_{12})^2|) \right]^{\frac{n-2}{2}} \delta(S_{12} - S_{21}).$$

Tomando la aproximación en el límite n grande, obtenemos la siguiente expresión

$$p \left(\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix} \right) \propto \exp \left[-\frac{n}{2} \frac{1 + \bar{X}_{11}^2}{(1 - \bar{X}_{11}^2)^2} \xi_{11}^2 - \frac{n}{2} \frac{1}{1 - \bar{X}_{11}^2} Y_{11}^2 - \frac{n}{2} \frac{1 + \bar{X}_{22}^2}{(1 - \bar{X}_{22}^2)^2} \xi_{22}^2 \right. \\ \left. - \frac{n}{2} \frac{1}{1 - \bar{X}_{22}^2} Y_{22}^2 - n \frac{(1 - \bar{X}_{11}^2 \bar{X}_{22}^2)(X_{12}^2 + Y_{12}^2)}{(1 - \bar{X}_{11}^2)(1 - \bar{X}_{22}^2)} \right] \delta(S_{12} - S_{21}). \quad (II.151)$$

que muestra que las partes real e imaginaria de S_{11} y S_{22} son variables Gaussianas independientes. Las secciones de fluctuación que resultan son

$$\sigma_{11}^2 = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{2}{1 - \bar{X}_{11}^4}, \quad \sigma_{12}^2 = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{1}{1 - \bar{X}_{11}^2 | \bar{X}_{22} |^2} \quad (II.152)$$

$$\sigma_{21}^2 = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{1}{1 - \bar{X}_{11}^2 | \bar{X}_{22} |^2}, \quad \sigma_{22}^2 = \frac{P_1 P_2}{n} \frac{2}{1 - \bar{X}_{22}^4}.$$

Es interesante comparar (II.152) con el resultado de Agassi et al

(1975), que también es válido en el límite n grande. La diferencia entre los dos resultados es el factor $f_{ab} = (1 - 15_{ab}^2 / 15_{ab}^2)^{-1}$ que aparece en el presente tratamiento. Para valores de \bar{S}_{11} y \bar{S}_{22} tan grandes como 0.5, el factor no difiere apreciablemente de la unidad ($f = 1.07$).

En resumen, se obtuvieron algunos resultados que pueden ser útiles y también se ha encontrado, que en el límite de muchos canales abiertos, el efecto asociado con simetría es la duplicación de la parte elástica y con el requerimiento de AE (a primer orden) es la presencia de los factores de transmisión que no solo caracterizan a los canales de entrada y salida, sino también, la dependencia con respecto a la matriz \bar{S} óptica. Se tiene así, como no puede ser de otra forma que es a través de AE que se manifiesta la naturaleza absorbente de la reacción nuclear.

Sin embargo, y aún cuando no sabemos exactamente cual sea el resultado de imponer el requerimiento de AE en toda su plenitud (a todo orden) en el límite $n \gg 1$, el "elástico enhancement -- factor" que se obtiene para el problema de canales equivalentes a partir de las ecuaciones (II.152) es

$$W_1 = \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{12}^2} \approx 2 ; \quad n \gg 1 . \quad (\text{II.153})$$

tal cual predicen Agassi et al (1975), siendo la diferencia con

la fórmula que ajustan HRTW, prácticamente inexistente.

Nos encontramos entonces con que en el límite $n \gg 1$, la diferencia entre lo que predice esta teoría (con AE a primer orden) y lo que se conoce por los otros tratamientos es significativamente menor que la diferencia que se observa en el problema de dos canales (véase sec. 1.5) cuando se impone la misma condición de AE. Esto, puede en cierto modo, interpretarse como que la condición de analiticidad ergodicidad parece ser menos relevante cuanto mayor sea el número de canales abiertos (al menos para canales equivalentes).

En los capítulos siguientes estudiaremos el problema general de formular la teoría y por supuesto calcular secciones, de tal manera que se incorpore el requerimiento de AE a todo orden. En otros términos, nos ocuparemos de definir el ensemble de matrices de colisión consistente con el principio de causalidad. En el capítulo III discutiremos dos casos especiales en los que ha sido posible resolver el problema mediante procedimientos mas o menos directos y explícitos.

Capítulo III

CONDICIONES DE AE A TODO ORDEN.
DISCUSION DE DOS CASOS PARTICULARES.

Por lo que se discutió en la última sección del capítulo I, la necesidad de incorporar el requerimiento de Analiticidad - Ergodicidad a todo orden era por demás evidente. En este capítulo obtendremos funciones de densidad $\rho(S)$ que junto con $d\mu(s)$ definen ensembles de matrices unitarias y simétricas consistentes con la condición (ec. (I.96))

$$\bar{S}_{a,b_1}^{m_1} \dots \bar{S}_{a,b_k}^{m_k} = \int \rho(s) [S_{a,b_1}^{m_1} \dots S_{a,b_k}^{m_k}] d\mu(s), \quad n_i \geq 0 \quad (\text{III.1})$$

El procedimiento que utilizaremos parte de la observación de - que la expresión (I.98) puede reescribirse en la forma

$$\rho(s) = \left| \exp \left(\sum_{m_{11} \geq 0, \dots, m_{nn} \geq 0} \beta_{m_{11}, \dots, m_{nn}} S_{11}^{m_{11}} S_{12}^{m_{12}} \dots S_{nn}^{m_{nn}} \right) \right|^2, \quad (\text{III.2})$$

y la serie del exponente ser considerada como la expansión en serie de potencias absolutamente convergente de una función -- analítica ψ de varias variables complejas $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{nn}$. Como los multiplicadores de Lagrange se definen a través de la condición (III.1), adoptaremos la notación $\rho(\bar{S}, S)$ para la --

función de densidad, así

$$p(\bar{S}, S) = |\psi(\varphi(\bar{S}, S))|^2 = |F(\bar{S}, S)|^2 \quad (\text{III.3})$$

donde $F(\bar{S}, S)$ es también una función analítica.

De esta manera, el problema de encontrar la función de densidad $p(\bar{S}, S)$ que maximice la entropía sujeta a la condición de AE a todo orden se transforma en la representación (III.3) en el problema de encontrar una función $F(\bar{S}, S)$ analítica que satisfaga la condición

$$f(\bar{S}) = \int |F(\bar{S}, S)|^2 f(S) d\mu(S) \quad (\text{III.4})$$

siendo $f(S)$ cualquier función analítica definida en el espacio Euclidean de matrices simétricas y unitarias.

Estudiaremos dos problemas especiales: en el primero consideraremos n canales abiertos con absorción total ($\bar{S}_{aa} = 0$) en $n-1$ de ellos y arbitraria ($1 < \bar{S}_{ii} < 1$) en el restante*; en el segundo trataremos el caso de reacciones con dos canales abiertos y absorción arbitraria en ambos. En este último problema, se mos

* Discutido por P.A. Mello en el homenaje al Dr. Moshinsky

traran resultados Únicamente en el caso de canales equivalentes.

III.1 El caso de n canales con absorción total en n-1 de ellos

En este problema solamente un elemento de la matriz óptica, digamos el \bar{S}_{11} , es en general diferente de cero. Por esto, la condición de AE en la representación (III.1) queda definida por

$$\bar{S}_{11}^{n_1} = \int p(\bar{S}_{11}, S_{11}) S_{11}^{n_1} d\mu(S) \quad (\text{III.5})$$

con $p(\bar{S}_{11}, S_{11}) = |F(\bar{S}_{11}, S_{11})|^2$. Si expresamos la función $F(\bar{S}_{11}, S_{11})$ como una serie de potencias de S_{11} ; es decir si

$$F(\bar{S}_{11}, S_{11}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k S_{11}^k \quad (\text{III.6})$$

la relación (III.5) se transforma en

$$\bar{S}_{11}^{n_1} = \sum_{k,l} a_k a_l^* \int S_{11}^{k+n_1} S_{11}^{l-1} d\mu(S) \quad (\text{III.7})$$

$$= \sum_{k,l} a_k a_l^* \langle S_{11}^{k+n_1}, S_{11}^{l-1} \rangle \quad (\text{III.8})$$

Recordemos ahora que, siendo la medida invariante bajo transformaciones del tipo (II.45), P.A. Mello y T.H. Seligman encontraron que la integral

$$M_{(a; b)}^{(a; b)} = M_{(a; \beta)}^{a, b, \dots, a_n b_n} = \int S_{a, b} \dots S_{a_n b_n} S_{a, \beta}^* \dots S_{a_n \beta_n} d\mu(s) \quad (III.9)$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad \{a, b\} \neq \{a, \beta\}$$

De acuerdo con este resultado, la ecuación (III.8) se simplifica y toma la forma

$$\bar{s}_n^{(n)} = \sum_{k, l} a_k a_l^* \delta_{k+n, l} \langle |s_k|^{k+n} \rangle \quad (III.10)$$

La integral $\langle |s_k|^{k+n} \rangle_0$, ha sido calculada* en el capítulo anterior (véase la ec. I.133); con esto, el requerimiento de AE a todo orden queda expresada por la ecuación

$$\bar{s}_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{k+n}^* \frac{\Gamma(k+n+1) \Gamma(\frac{k-n}{2})}{\Gamma(k+n+\frac{n+1}{2})} \quad (III.11)$$

nuestro problema de encontrar la función de densidad $p(\bar{s}, s)$ consiste ahora en el problema de determinar, a partir de esta relación, los coeficientes a_k . Solo por comodidad, utilizaremos la siguiente notación compacta para el factor de gammas

* P. Pereyra y P.A. Mello

$$g_n(k+n) = \frac{\Gamma(k+n+1) \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(k+n+\frac{n+1}{2})} \quad (\text{III.12})$$

En este punto, a diferencia de lo que ocurre en el problema de un solo canal, no existe otra alternativa que adivinar una solución para la ecuación (III.11). Si se propone la solución - (no estamos seguros que sea la única)

$$a_n = A \frac{\bar{s}_n^{\alpha k}}{g_n(k)} \quad (\text{III.13})$$

en la que A es una constante de normalización, se encuentra fácilmente que

$$|A|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\bar{s}_n)^k}{g_n(k)} = 1 \quad (\text{III.14})$$

$$|A|^2 = (1-s_n)^{\frac{n+1}{2}} \quad (\text{III.15})$$

mientras que para la función de densidad obtenemos el siguiente resultado

$$p(\bar{s}_n, s_n) = |A|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{s}_n^k \bar{s}_n^{\alpha k}}{g_n(k) g_n(k)} s_n^k s_n^{\alpha k} \quad (\text{III.16})$$

que puede reescribirse en la forma

$$p(\bar{s}_n, s_n) = \frac{(1 - |\bar{s}_n|^2)^{\frac{n+1}{2}}}{|1 - \bar{s}_n s_n^*|^{n+1}} \quad (III.17)$$

La semejanza de esta expresión con la que se obtuvo en el problema de un solo canal, es sugerente y como se verá en el siguiente capítulo, ambas expresiones son casos particulares de otra más general. Una vez que se tiene definido el ensemble que satisface AE, calcularemos las secciones de fluctuación. A continuación procedemos a calcular explícitamente la parte inelástica que está dada por la integral

$$\sigma_{ii}^k = \langle |s_{ii}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \int p(\bar{s}_n, s_n) |s_{ii}|^2 d\mu(s), \quad i+1 \quad (III.18)$$

donde N es la constante de normalización. Conviene hacer uso de la relación

$$(n-1) \langle |s_{ii}|^2 \rangle + \langle |s_{nn}|^2 \rangle = 1 \quad ; \quad i=1, \quad (III.19)$$

para escribir (hagamos $i=2$)

$$\langle |s_{i2}|^2 \rangle = \frac{1}{(n-1)N} \int p(\bar{s}_n, s_n) (1 - |s_{nn}|^2) d\mu(s). \quad (III.20)$$

La integración de la medida $d\mu(s)$ sobre todas las variables excepto S_{11} , se ha llevado a cabo en el capítulo anterior con objeto de obtener la función de distribución marginal $p_0(s_{11})$. Aprovechamos dicho resultado y la ec. (III.20) se transforma en la ecuación

$$\langle |S_{11}|^2 \rangle = \frac{C}{(n-1)N} \int \frac{(1 - \bar{S}_{11}^2)^{\frac{n+1}{2}}}{|1 - \bar{S}_{11} S_{11}^*|^{\frac{n+1}{2}}} (1 - |S_{11}|^2)^{\frac{n-1}{2}} dS_{11} \quad (\text{III.21})$$

Expresando en coordenadas polares se tiene

$$\langle |S_{11}|^2 \rangle = \frac{C (1 - \bar{S}_{11}^2)^{\frac{n+1}{2}}}{N(n-1)} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-3}{2}} r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \bar{S}_{11}^2 r^2 - 2\bar{S}_{11} r \cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{III.22})$$

Las integraciones en ambas variables son conocidas⁴³⁾. Tenemos así, para la parte inelástica de la sección de fluctuación, la expresión

$$\langle |S_{11}|^2 \rangle = \frac{C (1 - \bar{S}_{11}^2)^{\frac{n+1}{2}}}{N(n-1)} \frac{2\pi}{n+1} F_1 \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; \bar{S}_{11}^2 \right). \quad (\text{III.23})$$

La constante $\frac{C}{N}$ se determina evaluando integrales similares y se encuentra que

$$\frac{C}{N} = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}, \quad (\text{III.24})$$

43. Gradshteyn, ... pg. 284, integral 3.665.2 y pg. 850 integral 7.152.11

Absorción arbitraria en el canal 1 y completa en los otros.

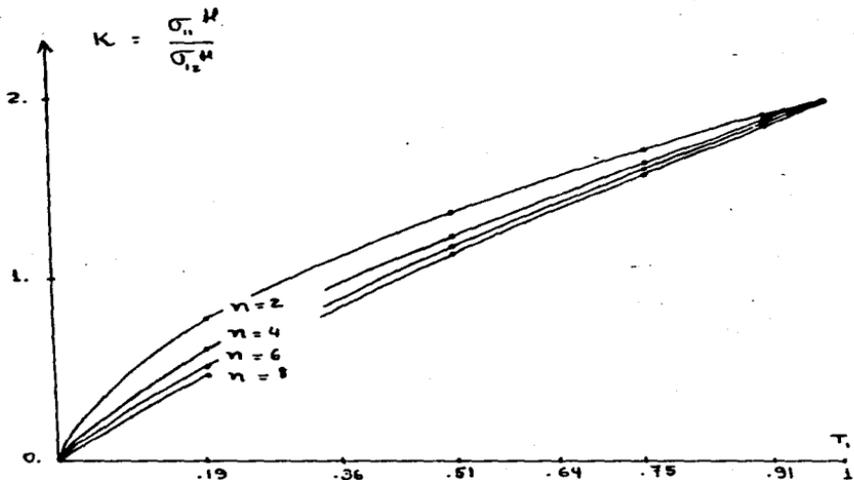


fig. III.1 Cociente de las secciones de fluctuación elástica e inelástica calculadas a partir de las ecuaciones (II.25) y (II.26) respectivamente ($T_a = 0$ a $\neq 1$)

Tabla III.1

Secciones de fluctuación y su cociente para casos de absorción arbitraria en un solo canal y completa en los otros. El primero de cada columna de dos números corresponde al calculado en el presente trabajo y el segundo proviene de cálculos de Monte Carlo realizados recientemente por el grupo de Heidelberg (entre paréntesis aparece el error en las últimas cifras significativas).

n	T_1	G_{11}^M	$G_{1i}^M \quad i \neq 1$	$G_{11}^M / G_{12}^M = \kappa$
		.0100	.0299	.334
	.04	.0101 (11)	.0301 (9)	.3355 (465)
		.0769	.103	.75
	.18	.0721 (28)	.1101 (19)	.6548 (367)
		.3069	.2231	1.38
2	.53	.3032 (95)	.224 (23)	1.3633 (568)
		.4783	.2816	1.7
	.76	.4728 (64)	.2853 (47)	1.6572 (497)
		.5951	.3148	1.89
	.91	.5993 (33)	.3152 (49)	1.9013 (400)
		.00134	.0097	1.385
	.0399	.00117 (15)	.0096 (4)	1.218 (206)
		.0221	.0417	.5322
5	.1866	.0223 (18)	.0411 (17)	.5423 (677)
		.219	.1348	1.622
	.7577	.224 (5)	.1334 (36)	1.679 (81)

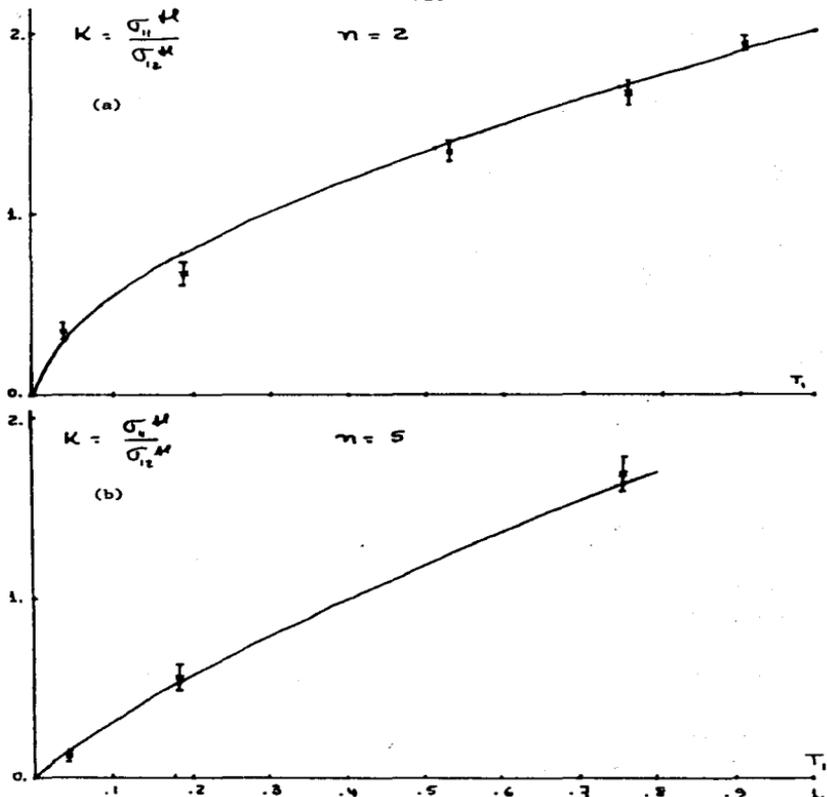


fig. III.2 El cociente $\sigma_{12}^H/\sigma_{11}^H$ comparado con resultados de Monte Carlo del grupo de Heidelberg.

con lo cual, los resultados para las secciones de fluctuación elástica e inelástica, del problema en consideración, son

$$\sigma_{11}^H = (1 - \bar{S}_{11}^2) \left[1 - \frac{n-1}{n+1} (1 - \bar{S}_{11}^2)^{\frac{n-1}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; \bar{S}_{11}^2 \right) \right] \quad (\text{III.25})$$

$$\sigma_{11}^H = \frac{(1 - \bar{S}_{11}^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; \bar{S}_{11}^2 \right). \quad (\text{III.26})$$

Como se verá después, este es uno de los pocos casos especiales que ha sido posible tratar analíticamente obteniéndose para las secciones expresiones cerradas en términos de funciones bien conocidas.

Se han evaluado estas secciones para algunos valores de n y \bar{S}_{11} (véase la figura III.1). En la tabla III.1 aparecen las secciones calculadas en base a (III.25) y (III.26) (para $n=2$ y $n=5$) y las obtenidas por el grupo de Heidelberg en base a cálculos de Monte Carlo. El acuerdo es muy bueno, no obstante que se tiene, en el canal no negro, absorción tan baja como $T_r \approx 0.04$. En general, es interesante la comparación del "elastic enhance ment factor" que, para $n > 2$ y canales no necesariamente equivalentes, estaría definido por la expresión (véase capítulo I, Hofmann et al.)

$$w_1 = \frac{\sigma_{11}^H \sigma_{23}^H}{\sigma_{12}^H \sigma_{13}^H} \quad (\text{III.27})$$

Sin embargo, por sencillez y porque de todas formas proporciona un criterio de sensibilidad, definiremos el cociente

$$K = \frac{\sigma_{11}^H}{\sigma_{12}^H} \quad (\text{III.28})$$

Obsérvese que en el problema de dos canales equivalentes el cociente K coincide con el "elastic enhancement factor".

En la figura III.2, se muestra el cociente K para dos y cinco canales respectivamente, observándose un excelente acuerdo con los cálculos de Monte Carlo del grupo de Heidelberg.

III.2 El caso de dos canales con absorción arbitraria en ambos.

Consideraremos ahora el problema de construir un ensemble de matrices simétricas y unitarias (de orden 2) que maximizan la entropía y satisfacen las condiciones de AE. Formularemos el problema en términos de una matriz S con todos sus elementos distintos de cero, en general. En el momento de aplicar estos resultados al cálculo de las secciones, por conveniencia, nos restringiremos al caso de \bar{S} diagonal (sabemos gracias a la ---

transformación de Engelbrecht - Weidenmüller que esto no constituye una pérdida de generalidad).

Como en la sección anterior deduciremos la función de densidad a partir de la condición

$$\bar{s}_n^n \bar{s}_{22}^{n_2} \bar{s}_{12}^{n_3} = \int p(\bar{s}, s) s_n^n s_{22}^{n_2} s_{12}^{n_3} d\mu(s), \quad (\text{III.29})$$

en la que

$$p(\bar{s}, s) = |F(\bar{s}_n, \bar{s}_{22}, \bar{s}_{12}, s_n, s_{22}, s_{12})|^2, \quad (\text{III.30})$$

igualmente, proponemos que la función analítica F se expresa - como la serie de potencias

$$F(\bar{s}, s) = \sum_{l, m, n} a_{l, m, n} s_n^l s_{22}^m s_{12}^n \quad (\text{III.31})$$

La condición (III.29) se transforma en

$$\bar{s}_n^n \bar{s}_{22}^{n_2} \bar{s}_{12}^{n_3} = \sum_{l, m, n} a_{l, m, n}^{p, q, r} \langle s_n^{ln}, s_{22}^{m+n_2}, s_{12}^{n+n_3} (s_n^p s_{22}^q s_{12}^r)^n \rangle \quad (\text{III.32})$$

De acuerdo con la condición (III.9) muchos términos de esta serie son nulos, nos despreocuparemos de esto momentaneamente.

Por comodidad usaremos la notación

$$g_{p,q,r}^{a,b,c} \equiv \langle S_{11}^a S_{22}^b S_{33}^c (S_{11}^* S_{22}^* S_{33}^*)^n \rangle_0 \quad (\text{III.33})$$

$$\bar{S}^{a,b,c} \equiv \bar{S}_{11}^a \bar{S}_{22}^b \bar{S}_{33}^c \quad (\text{III.34})$$

En esta notación la condición (III.32) se reescribe en la forma

$$\sum_{l,m,n} a_{lmn} \sum_{p,q,r} a_{pqr}^{*} g_{p,q,r}^{l+n, m+n_2, n+n_3} = \bar{S}^{n, n_2, n_3} \quad (\text{III.35})$$

Nuestro problema es determinar los coeficientes a_{lmn} . Para esto, proponemos que (A es una constante de normalización)

$$\sum_{p,q,r} a_{pqr}^{*} g_{p,q,r}^{a,b,c} = A^{*} \bar{S}^{a,b,c} \quad (\text{III.36a})$$

De manera que la condición (III.35), se transforma en

$$\sum_{l,m,n} a_{lmn} A^{*} \bar{S}^{l+n, m+n_2, n+n_3} = \bar{S}^{n, n_2, n_3} \quad (\text{III.37})$$

y esta, en la expresión

$$\sum_{l,m,n} a_{lmn} A^* \bar{S}^{l,m,n} = 1. \quad (\text{III.38a})$$

Las ecuaciones (III.36a) y (III.38a) serán usadas para determinar los coeficiente a_{lmn} y la constante de normalización A. Si definimos los coeficientes

$$b_{lmn} \equiv \frac{a_{lmn}}{A} \quad (\text{III.39})$$

las ecuaciones (III.36a) y (III.38a) se reescriben así

$$\sum_{l,q,r} b_{lqr}^* g_{l,q,r}^{a,b,c} = \bar{S}^{a,b,c}, \quad (\text{III.36})$$

$$|A|^2 \sum_{l,m,n} b_{lmn} \bar{S}^{l,m,n} = 1. \quad (\text{III.38})$$

Por la condición (III.9) sabemos que las integrales $g_{l,q,r}^{a,b,c}$ se anulan a menos que satisfagan simultáneamente las igualdades

$$2a+c = 2p+r \quad y \quad 2b+c = 2q+r \quad (\text{III.40})$$

Estas restricciones reducen el número de índices de suma en -- (III.35) a solamente cuatro; sean estos N, L, μ, ν definidos - como sigue

$$N = p+q+r = a+b+c ; \quad L = p-q = a-b ; \quad v = q ; \quad \mu = b , \quad (III.41)$$

y para los cuales se tienen las siguientes relaciones

$$0 \leq L \leq N ; \quad 0 \leq v, \mu \leq \left[\frac{N-L}{2} \right] . \quad (III.42)$$

De esta forma se consigue la reducción

$$\sum_{l,m,n} \sum_{p,q,r} \longrightarrow \sum_{N,L,\mu} \sum_v \quad (III.43)$$

En particular, las ecuaciones (III.36) y (III.38) toman la siguiente forma

$$\sum_v g_{L+v, v, N-L-2v}^{L+\mu, \mu, N-L-2\mu} b_{L+v, v, N-L-2v}^a = \bar{S}^{L+\mu, \mu, N-L-2\mu} \quad (III.44)$$

$$|A|^2 \sum_{N,L,\mu} b_{L+\mu, \mu, N-L-2\mu} \bar{S}^{L+\mu, \mu, N-L-2\mu} = 1. \quad (III.45)$$

Por otra parte se puede mostrar fácilmente que

$$g_{L+v, v, N-L-2v}^{L+\mu, \mu, N-L-2\mu} = (-)^{v+\mu} g_{L+v, \mu, N-L-\mu-v}^{L+v, \mu, N-L-\mu-v} \quad (III.46)$$

$$\equiv (-)^{v+\mu} g_{L+v+\mu, N-L-\mu-v}^{L+v+\mu, N-L-\mu-v} \quad (III.47)$$

donde

$$g(a, b) = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1/2)}{2 \Gamma(a+b+3/2)} \quad (\text{III.48})$$

No tiene mucho interés considerar la discusión de los detalles y la forma en que se procedió para resolver numéricamente las ecuaciones (III.44) y (III.45) y obtener así los coeficientes b_{lmn} y la constante $|A|^2$.

Las cantidades físicas que se pueden calcular, una vez determinados los coeficientes y con ellos la densidad de probabilidad $p(\xi, \zeta)$, son las secciones de fluctuación. Así por ejemplo para la parte elástica se tiene la expresión

$$\sigma_{ll}^{*} + \bar{\sigma}_{ll}^2 = \langle |S_{ll}|^2 \rangle = \sum_{l,m,n} a_{lmn} \sum_{p,q,r} g_{p,q,r}^{2l, m, n} a_{pqr}^* \quad (\text{III.49})$$

$$= |A|^2 \sum_{N,L,\mu,\nu} (-)^{\nu+\mu} \frac{L+\nu+\mu+1}{N+3/2} g_{L,\mu,\nu, N-L-\mu-\nu}^{L,\mu,\nu, N-L-\mu-\nu} \left(b_{L,\mu,N-L-\mu-\nu}^* b_{L,\mu,N-L-\mu-\nu} + (1-\delta_{L,0}) b_{L,\mu,N-L-2,\mu}^* b_{L,\nu,N-L-2,\nu} \right) \quad (\text{III.50})$$

Los valores obtenidos para las secciones, en el caso de canales equivalentes, se muestran en la tabla (III.2) en la que también aparecen valores del "elastic enhancement factor" calculados a partir de estas secciones. Para fines de comparación, se dan los correspondientes valores de este factor que se obtienen de las fórmulas de ajuste de HRTW y Moldauer. En la fig. III.3 tene-

Tabla III.2

Secciones de fluctuación y el "elastic enhancement factor" (factor de intensificación alástica) para dos canales equi valentes. En las columnas 5 y 6, se dan valores del e.c.f. calculados de las fórmulas de ajuste de HRTW y Moldauer. En la misma columna 6 y para algunos valores del coeficiente de transmisión, se muestran resultados "experimentales" de Moldauer 1980 (entre paréntesis los errores sobre las últimas cifras significativas).

T	$\sigma_{11}^{H^2}$	$\sigma_{12}^{H^2}$	$W \equiv \sigma_{11}^{H^2} / \sigma_{12}^{H^2}$	W (H)	W (M)
1.0	.6666	.3333	2.000	2.000	2.042
0.99	.6606	.3293	2.006	2.005	2.046 2.02(3)
0.96	.6425	.3174	2.024	2.021	2.057
0.91	.6122	.2978	2.056	2.049	2.079
0.84	.5691	.2708	2.102	2.091	2.111 2.12(2)
0.75	.5130	.2370	2.164	2.15	2.158
0.64	.4429	.1970	2.248	2.230	2.225 2.25(4)
0.51	.358	.1519	2.357	2.339	2.322
0.36	.2572	.1028	2.502	2.490	2.466 2.51(8)
0.19	.1386	.0513	2.701	2.693	2.684 2.69(7)
0.0975	.0720	.0254	2.832	2.84	2.833
0.0396	.0295	.0101	2.927	2.935	2.935
0.0199	.0149	.0050	2.962	2.968	2.969
0.0019	.0015	.0005	2.996	2.997	2.997

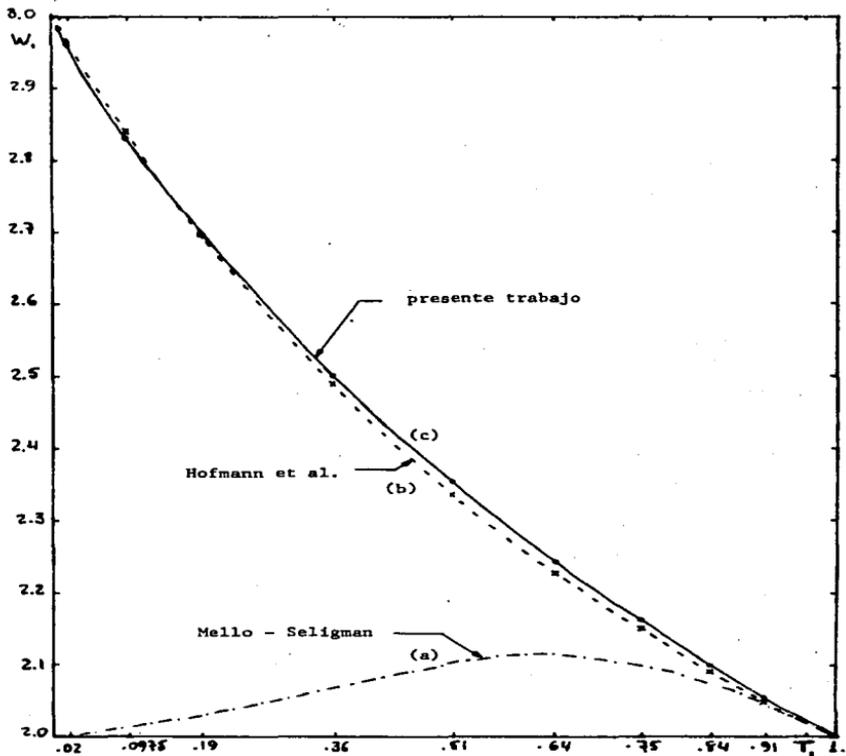


fig. III.3 El "elastic enhancement factor" para dos canales equivalentes: (a) modelo de la entropía; (b) cálculos de Monte Carlo (fórmula de ajuste de HRTW) y (c) resultados del presente trabajo.

mos el "elastic enhancement factor". Se aprecia un excelente acuerdo en todo el dominio de valores \bar{S}_{aa} .

En función de los problemas estudiados, en este capítulo, se puede pensar que al incorporar la condición de AE a todo orden se construye finalmente el ensemble correcto de matrices de colisión para el cálculo de las secciones de fluctuación. Sin embargo, el procedimiento utilizado se hace complejo aún en el caso muy especial de dos canales abiertos. Queda todavía el problema de determinar la función de densidad en el caso general de n canales abiertos. De este problema nos ocuparemos en el Capítulo IV.

Capítulo IV

LA FORMULACION DEL PROBLEMA GENERAL

Como se afirmó al final del capítulo anterior, el problema de incorporar las condiciones de Analiticidad - Ergodicidad (a todo orden) en el caso general de n canales abiertos y absorción arbitraria en todos ellos, requiere, sin lugar a dudas, de procedimientos un poco más eficientes que los utilizados hasta -- aquí. Más específicamente, para el tratamiento de este problema, nos remitiremos a técnicas y resultados de la teoría de varias variables complejas.

Para establecer cierta continuidad con los problemas ya estudiados y las ideas y procedimientos que expondremos en la sección IV.3, dedicaremos la sección IV.2 a rediscutir el problema de un solo canal en el lenguaje de la teoría de una variable compleja y en los términos que serán propios al tratamiento que - se expone en la sección IV.3. La razón es la sencillez y transparencia de los tratamientos en este caso particular.

El propósito de la sección IV.1 es hacer evidente, a partir de la discusión del problema de un canal, que la condición de AE se puede interpretar en términos de propiedades de reproducibilidad de funciones analíticas.

IV.1 El requerimiento de AE y la propiedad reproductora.

(Análisis en el problema de un solo canal).

Recordemos que nuestro problema consiste, fundamentalmente, en determinar una función de densidad $p(\bar{s}, S)$ que satisface la condición

$$f(\bar{s}) = \int p(\bar{s}, s) f(s) d\mu(s) ; \quad (\text{IV.1})$$

dado que en el caso de un solo canal $d\mu(S)$ es simplemente $d\theta$, la condición IV.1, se reduce a

$$f(\bar{s}) = \int p(\bar{s}, s) f(s) d\theta . \quad (\text{IV.2})$$

Si, además, $p(\bar{s}, S)$ maximiza la entropía, será posible expresarla (véase capítulo III) en la forma

$$p(\bar{s}, s) = \left| \exp \psi(\bar{s}, s) \right|^2 , \quad (\text{IV.3})$$

en donde $\psi(\bar{s}, S)$ es una función analítica.

El enfoque bajo el cual se abordó el estudio del problema de un solo canal es esencialmente el mismo que el que se encuentra en el análisis de los problemas estudiados en el capítulo anterior. Veamos ahora otra forma alternativa y equivalente -

de obtener la función de densidad.

Comencemos por escribir la Fórmula Integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{IV.4})$$

en la que $f(z)$ es una función analítica en el interior y a lo largo de C y z_0 un punto situado en el interior de C . Como es evidente, la integral (IV.4) relaciona los valores de la función en un punto del interior de C con los valores de la misma en la curva C . Esta observación es crucial debido a que el enfoque bajo el cual abordaremos el problema general de determinar la función de densidad está estrechamente ligado con esta propiedad. En este caso, se identifica un "Kernel" (de Cauchy) del cual se dice que posee propiedad reproductora.

Si consideramos una curva C de radio unidad con centro en el origen del plano complejo, y denotamos con ξ a los números complejos de módulo 1, se tiene que

$$\frac{dz}{2\pi i (z - z_0)} \rightarrow \frac{d\theta}{2\pi (1 - z_0 \xi^*)} = H(z_0, \xi^*) d\theta \quad (\text{IV.5})$$

siendo

$$H(z_0, \xi^*) = \frac{1}{2\pi (1 - z_0 \xi^*)} \quad (\text{IV.6})$$

del "Kernel (reproductor) de Cauchy". De manera que la F6rmula Integral (IV.4) la podemos escribir, en este caso, en la forma

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} H(z_0, \xi^n) f(\xi) d\theta ; |\xi| = 1. \quad (\text{IV.7})$$

Aunque esta expresi6n se parece a la (IV.2), no se puede identificar $\mu(\bar{S}, S)$ con el "Kernel de Cauchy" debido a que este Kernel complejo no es positivo definido, sin embargo, si propo-
nemos la funci6n analitica

$$f(\xi) = u(\xi) H(z_0, \xi) \quad (\text{IV.8})$$

tenemos la expresi6n

$$u(z_0) = \int \frac{|H(z_0, \xi^n)|^2}{H(z_0^n, z_0)} u(\xi) d\theta \quad (\text{IV.9})$$

que nos permite identificar un kernel positivo denifido

$$P(z_0, \xi) = \frac{|H(z_0, \xi^n)|^2}{H(z_0^n, z_0)} = \frac{1 - |z_0|^2}{2\pi |1 - z_0 \xi^n|^2}, \quad (\text{IV.10})$$

que se conoce como el "Kernel de Poisson" que, por otra parte, no es otra cosa que la funci6n de densidad que se obtuvo en el caso de un solo canal (v6ase ec. (I.80).

Del análisis que antecede extraemos la conclusión de que el requerimiento de AE y la propiedad reproductora de un kernel definido positivo, son esencialmente equivalentes.

Bajo el enfoque de la reproducibilidad, es posible estudiar el caso general. Como ya se anticipó, el tratamiento requiere de técnicas y procedimiento distintos. Para ilustrar reestudiaremos el problema de un solo canal.

IV.2 Problema de un solo canal (ilustración)

IV.2.1 Deducción del Kernel de Cauchy en términos de una base ortonormal

En primer lugar necesitamos una base ortonormal. La condición (III.9) en el caso de un solo canal, toma la forma

$$\langle s^k (s^k)^* \rangle = \int s^k s^{*k} d\mu(s) = 2\pi \delta_{j,k} \quad (IV.11)$$

Esto corresponde al hecho bien conocido de que en el subespacio de números complejos de módulo unidad, se tiene una base ortonormal $\{\psi_j\}$ con

$$\psi_j(s) = \frac{s^j}{\sqrt{2\pi}} \equiv \frac{\sqrt{s^j}}{\sqrt{2\pi}} \quad (IV.12)$$

Ahora bien, nos proponemos determinar un kernel $H(z_0, \xi^*)$ tal que para toda función analítica $f(\xi)$ se satisfaga la condición (IV.7). Si expresamos $H(z_0, \xi^*)$ como la serie

$$H(z_0, \xi^*) = \sum_{\mu} b_{\mu} \varphi_{\mu}^*(\xi) \quad (\text{IV.13})$$

y también

$$f(\xi) = \sum_{\nu} a_{\nu} \varphi_{\nu}(\xi) \quad (\text{IV.14})$$

la relación (IV.7), toma la forma

$$\sum_{\nu} a_{\nu} \varphi_{\nu}(z_0) = \sum_{\mu, \nu} a_{\nu} b_{\mu} \int_{\gamma} \varphi_{\nu}(\xi) \varphi_{\mu}^*(\xi) d\mu(\xi) \quad (\text{IV.15})$$

$$= \sum_{\nu} a_{\nu} b_{\nu}, \quad (\text{IV.16})$$

de aquí se deduce unívocamente que

$$b_{\mu} = \varphi_{\mu}(z_0), \quad (\text{IV.17})$$

$$H(z_0, \xi^*) = \sum_{\mu} \varphi_{\mu}(z_0) \varphi_{\mu}^*(\xi). \quad (\text{IV.18})$$

Tomando en cuenta que la base está dada por (IV.12), se tiene

$$H(z_0, \xi^*) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu} (z_0 \xi^*)^{\mu}, \quad (\text{IV.19})$$

$$H(\mathbf{z}, \xi^n) = \frac{1}{2\pi(1-\mathbf{z} \cdot \xi^n)} \quad ; \quad (IV.20)$$

expresión que coincide con la que aparece en (IV.6), y, a partir de la cual (como se mostró en la sección anterior) se determina el kernel de Poisson que es a su vez la función de densidad buscada.

Este análisis, en términos de una base ortonormal completa, es fácilmente generalizable como se verá en la sección IV.3. Sin embargo, la determinación del Kernel de Cauchy está sujeta a la determinación de una base ortonormal explícita para el problema general. Según Hua se conoce un teorema de H. Cartan sobre la existencia de esta base⁴⁴). De hecho, en la subsección IV.3.1, señalaremos, esquemáticamente, el procedimiento que sigue Hua para obtener dicha base. Aparentemente, el problema no es simple.

Para determinar explícitamente el kernel de Cauchy elige Hua una variante que se basa fundamentalmente en las propiedades de transformación de los espacios Euclidianos en consideración. En la subsección IV.2.2 ilustraremos este procedimiento para el caso de un canal.

44. Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, J. Math. Pures Appl. (9) 10 (1931) 1 - 114

IV.2.2 Deducción del kernel de Cauchy con base en propiedades de transformación.

Sean $\mathcal{R} = \{z / |z| < 1\}$ y $\mathcal{E} = \{\xi / |\xi| = 1\}$. El subespacio \mathcal{E} se denomina la variedad característica de \mathcal{R} . Consideremos ahora el grupo Γ de transformaciones que mapean $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ y $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, un subgrupo que deja invariante el origen. Cada elemento de Γ se puede caracterizar* por una matriz unitaria U .

Si se considera el conjunto de cosets Γ/Γ_0 , el grupo de transformaciones que pertenecen al mismo coset llevan hacia el origen uno y el mismo punto p . De acuerdo con esto las transformaciones determinadas por elementos de Γ están caracterizadas en la forma

$$w = f(z, p, U) \quad \xi = f(\xi, p, U) \quad (\text{IV.21})$$

Más específicamente el grupo Γ está constituido por las transformaciones del tipo

$$w = \frac{az + b}{b^*z + a^*} ; \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (\text{IV.22})$$

* para más detalles véase capítulo IV de la ref. (39)

es fácil verificar que si $b = -ap$, la transformación (IV.22) lleva el punto p al origen.

Si aplicamos la transformación (IV.22) a un punto en \mathbb{E} y diferenciamos, se tiene

$$d\xi = \frac{d\xi}{(b^* \xi + a^*)^2} ; \quad d\mu(\xi) = \frac{d\mu(\xi)}{|b^* \xi + a^*|^2}, \quad (\text{IV.23})$$

ya vimos que existe en \mathbb{E} una base ortonormal $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ para la cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \int \varphi_\mu(\xi) \varphi_\nu^*(\xi) d\mu(\xi) &= \int \varphi_\mu(f(\xi)) \varphi_\nu^*(f(\xi)) \frac{d\mu(\xi)}{|b^* \xi + a^*|^2}, \\ &= \delta_{\mu\nu} ; \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

consiguientemente, el sistema de funciones

$$\psi_\mu(\xi) = \varphi_\mu(f(\xi)) (b^* \xi + a^*)^{-1}, \quad (\text{IV.25})$$

constituye también una base ortonormal. Después de estas consideraciones, retomemos el problema de determinar el kernel de Cauchy. Para esto, regresemos a la expresión (IV.18) y --- reescribamosla en términos de la base $\{\psi_\mu(\xi)\}$ definida en (IV.25), se tiene entonces que

$$H(z, \xi^*) = \sum_{\mu} \varphi_\mu(\omega_\mu) (b^* z + a^*)^{-1} \psi_\mu^*(\xi) (b^* \xi + a^*)^{-1} \quad (\text{IV.26})$$

$$H(z_0, \xi^*) = H(\omega_0, \xi^*) (b^* z_0 + a^*)^{-1} (b \xi^* + a)^{-1} \quad (\text{IV.27})$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$1 - \omega_0 \xi^* = \frac{1 - z_0 \xi^*}{(b^* z_0 + a^*)(b \xi^* + a)} \quad (\text{IV.28})$$

de manera que la relación (IV.27) se transforma en

$$H(z_0, \xi^*) (1 - z_0 \xi^*) = H(\omega_0, \xi^*) (1 - \omega_0 \xi^*), \quad (\text{IV.29})$$

$$= c, \quad (\text{IV.30})$$

en donde c es una constante. En consecuencia, tenemos

$$H(z_0, \xi^*) = \frac{c}{(1 - z_0 \xi^*)} \quad (\text{IV.31})$$

De esta forma volvemos a obtener la expresión (IV.6) para el kernel de Cauchy del problema de un canal. Se puede mostrar que c es precisamente el inverso del volumen $V(\xi) = 2\pi$.

Con esta introducción pasamos a considerar el tema central de este capítulo.

IV.3 El problema general, n canales abiertos y absorción arbitraria.

Para completar la formulación de la teoría que estamos estudiando trataremos ahora el problema general de n canales abiertos con absorción arbitraria en todos ellos.

Gracias a resultados de Hua (1958) en la teoría de varias variables complejas, es posible determinar la función de densidad $\rho(\bar{S}, S)$ que satisface la condición de Analiticidad - Ergodicidad a todo orden y definir así el ensemble de matrices simétricas y unitarias de interés.

En las subsecciones que siguen resumiremos y presentaremos algunos cálculos y resultados que aparecen en el libro de Hua. En primer lugar nos referiremos de un modo muy general y abstracto a la cuestión de la base ortonormal y los "kernels" reproductores de Cauchy y Poisson en términos de esta base. En la subsección IV.3.2, el objeto es el kernel de Poisson en sí mismo y mostramos sucintamente el procedimiento para obtener una expresión concreta de este kernel.

Antes de entrar en tema, conviene establecer las siguientes definiciones. En el lenguaje de Hua, se tiene por una parte el "dominio clásico" \mathcal{R} de las matrices simétricas de orden n y

elementos complejos que satisfacen la condición

$$I - 2Z^* > 0. \quad (IV.32)$$

Este espacio de matrices subunitarias corresponde en nuestro caso a un espacio de matrices ópticas \bar{S} de dimensión compleja $\frac{n(n+1)}{2}$.

Por otra parte se define una variedad característica \mathcal{E} del espacio de matrices simétricas tal que:

- 1) Cada función que es analítica en \mathcal{R} adquiere su módulo máximo en la variedad \mathcal{E} .
- 2) Para cualquier punto ξ en \mathcal{E} existe una función $f(z)$, analítica en \mathcal{R} , que adquiere su módulo máximo en ξ .

La variedad \mathcal{E} constituye en nuestro caso el espacio Euclideo de las matrices de colisión cuya dimensión real es $\frac{n(n+1)}{2}$. La medida de este espacio ha sido definida en la subsección -- II.1.3

IV.3.1 Una base ortonormal y los kernels de Cauchy y Poisson

Mencionaremos brevemente cómo se define el sistema $\{\varphi_j^f(z)\}$ en \mathcal{R} ; como el análisis es análogo para el sistema $\{\varphi_j^f(\xi)\}$ en \mathcal{E} , solamente allí donde sea necesario escribiremos la expresión correspondiente.

Sean

$$m = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{y} \quad l_1 + l_2 + \dots + l_m = f. \quad (\text{IV.33})$$

Consideremos un vector $z^{[f]}$ de componentes

$$z_{1,1}^{l_1}, z_{1,2}^{l_2}, \dots, z_{n-1,n}^{l_{m-1}}, z_{n,m}^{l_m} \quad (\text{IV.34})$$

y dimensión

$$N_f = \frac{1}{f!} m(m+1) \dots (m+f-1) = \binom{m+f-1}{f} \quad (\text{IV.35})$$

para el cual se tiene la siguiente relación

$$\int_{\mathcal{Q}} (z^{[f]})' z^{[g]} d\mu_z = \delta_{f,g} H_1, \quad (\text{IV.36})$$

$$\int_{\mathcal{E}} (\xi^{[f]})' \xi^{[g]} d\mu(\xi) = \delta_{f,g} H_2 \quad (\text{IV.37})$$

donde el apóstrofo señala transposición, $d\mu_z$ es la medida en el espacio de las matrices simétricas, H_1 y H_2 son matrices hermitianas positivo definidas de orden N_f . La relación ---- (IV.37) es consistente con (III.9). Si recordamos la discusión del problema de dos canales del capítulo anterior es fácil ver que los elementos de H_2 son proporcionales a los elementos $g(L+\mu+\nu, N-L-\mu-\nu)$ definidos en (III.47) y (III.48), correspondiendo el índice f al N definido en (III.41). En aquel ca-

so, para resolver el problema se diagonalizaron numéricamente las matrices que resultaban. Aquí diremos simplemente que existe una matriz T tal que (\dagger corresponde a T^*)

$$T^{\dagger} H_1 T = \Lambda \quad , \quad T^{\dagger} H_2 T = I \quad (\text{IV.38a,b})$$

en donde $\Lambda = [\beta_1^f, \beta_2^f, \dots, \beta_{N_f}^f]$ es una matriz diagonal. Dada la matriz T se construyen los vectores

$$\xi_f = \xi^{[f]} T \quad , \quad z_f = z^{[f]} T \quad (\text{IV.39a,b})$$

cuyas componentes son las funciones $\psi_\nu^f(\xi)$ ($\nu = 1, \dots, N_f$) y $\psi_\nu^f(z)$ respectivamente y para las cuales se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}} (\psi_\nu^f(z))^* \psi_\mu^f(z) d\mu_z = \delta_{\mu\nu} \delta_{fg} \beta_\nu^f \quad (\text{IV.40})$$

$$\int_{\mathcal{E}} (\psi_\nu^f(\xi))^* \psi_\mu^f(\xi) d\mu(\xi) = \delta_{\mu\nu} \delta_{fg} \quad (\text{IV.41})$$

el supraíndice f clasifica las funciones por el grado de los monomios de z_j y el subíndice μ los elementos de una base en el subespacio de funciones de grado f , cuya dimensión es N_f

En términos de estas bases se puede definir de manera única, - por un procedimiento semejante al que se siguió en el sección anterior*, el Kernel de Cauchy

*véase la discusión que comienza después de la ec. (IV.12) y concluye en (IV.18)

$$H(z, \xi^*) = \sum_f \sum_{\mu} \psi_{\mu}^f(z) [\psi_{\mu}^f(\xi)]^* \quad (\text{IV.42})$$

que posee la propiedad obvia de que para cualquier función analítica $f(\xi)$ se cumple la relación

$$f(z) = \int_{\mathcal{E}} H(z, \xi^*) f(\xi) d\mu(\xi) \quad (\text{IV.43})$$

Vimos ya que si se considera la función analítica

$$f(\xi) = u(\xi) H(z^*, \xi) \quad (\text{IV.44})$$

se obtiene la importante ecuación

$$u(z) = \int_{\mathcal{E}} \frac{|H(z, \xi^*)|^2}{H(z, z^*)} u(\xi) d\mu(\xi), \quad (\text{IV.45})$$

en la cual la función

$$P(z, \xi) = \frac{|H(z, \xi^*)|^2}{H(z, z^*)} \quad (\text{IV.46})$$

en el kernel de Poisson para el dominio \mathcal{R} y es positivo definido. En notación de matrices S y \bar{S} el kernel de Poisson es --- nuestra función de densidad

$$P(\bar{S}, S) = \frac{|H(\bar{S}, S^*)|^2}{H(\bar{S}, \bar{S}^*)} \quad (\text{IV.47})$$

En la sección siguiente nos ocuparemos de la forma explícita -

del Kernel de Cauchy y por lo mismo de la de Poisson.

IV.3.2. Decucción del Kernel de Cauchy, La función de densidad en el problema general

Consideremos el grupo de transformaciones Γ del tipo

$$W = \frac{AZ + B}{B^*Z + A^*}, \quad (\text{IV.48})$$

con

$$AA^+ - B^+B = I, \quad B'A^* = A^+B \quad (\text{IV.49})$$

que mapean \mathcal{R} en \mathcal{R} y \mathcal{E} en \mathcal{E} . También se puede mostrar⁴⁵⁾ que

$$A'A^* - B^+B = I, \quad B'A^* = A^+B. \quad (\text{IV.50})$$

Si aplicamos la transformación (IV.48) a un punto ξ en \mathcal{E} y diferenciamos se tiene que

$$d\xi = \frac{d\xi}{(\xi B^+ + A^*)(B^*\xi + A^*)} \quad (\text{IV.52})$$

Definiendo la métrica

$$ds^2 = \text{Tr} (d\xi d\xi^*) \quad (\text{IV.53})$$

se encuentra que el elemento de volumen se transforma de acuerdo

45. Loo-Keng Hua, Am. J. Math. 66 (1944) 470, 531

do con la relación

$$d\mu(\xi) = \frac{d\mu(\xi)}{|\det(B^* \xi + A^*)|^{n+1}} \quad (\text{IV.54})$$

Si $\{\varphi_\nu^f(\xi)\}$ es una base ortonormal, también lo es

$$\psi_\nu^f(\xi) = \varphi_\nu^f(\xi) [\det(B^* \xi + A^*)]^{-\frac{n+1}{2}}; \quad (\text{IV.55})$$

en términos de esta última, el Kernel de Cauchy toma la forma

$$\begin{aligned} H(z, \xi^*) &= \sum_f \sum_\nu \psi_\nu^f(z) [\psi_\nu^f(\xi)]^* \\ &= \sum_{f, \nu} \varphi_\nu^f(w) [\varphi_\nu^f(\xi)]^* (\det(B^* z + A^*))^{-\frac{n+1}{2}} (\det(B^* \xi + A^*))^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

$$= H(w, \xi^*) [\det(B^* z + A^*)]^{-\frac{n+1}{2}} [\det(B^* \xi + A^*)]^{-\frac{n+1}{2}} \quad (\text{IV.57})$$

Por otra parte, se obtiene la siguiente relación

$$I - w \xi^* = \frac{I - z \xi^*}{(B^* z + A^*)' (B^* \xi + A^*)} \quad (\text{IV.58})$$

tomando determinantes, resulta

$$\det(I - w \xi^*) = \det(I - z \xi^*) [\det(B^* z + A^*) \det(B^* \xi + A^*)]^{-1} \quad (\text{IV.59})$$

Combinando (IV.59) con (IV.57), tenemos

$$H(z, \xi^*) \left[\det(I - z \xi^*) \right]^{-\frac{n+1}{2}} = H(w, \xi^*) \left[\det(I - w \xi^*) \right]^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (\text{IV.60})$$

$$F(z, \xi^*) = F(w, \xi^*) = c \quad (\text{IV.61})$$

siendo c una constante, consiguientemente

$$H(z, \xi^*) = \frac{c}{\left[\det(I - z \xi^*) \right]^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{IV.62})$$

Se puede mostrar que

$$\frac{1}{c} = \int d\mu(\xi) = v(\xi) \quad (\text{IV.63})$$

Finalmente obtenemos para el Kernel de Poisson la expresión

$$P(z, \xi) = \frac{1}{v(\xi)} \frac{\left[\det(I - |z|^2) \right]^{\frac{n+1}{2}}}{\left| \det(I - z \xi^*) \right|^{n+1}}. \quad (\text{IV.64})$$

En consecuencia, la función de densidad $\rho(\bar{s}, s)$ consistente con la condición de Analiticidad Ergodicidad y en el caso general, resulta ser

$$\rho(\bar{s}, s) = \frac{1}{v(\xi)} \frac{\left[\det(I - |\bar{s}|^2) \right]^{\frac{n+1}{2}}}{\left| \det(I - \bar{s} s^*) \right|^{n+1}}. \quad (\text{IV.65})$$

Siendo

$$V(\epsilon) = 2^{\frac{n(3n+1)}{4}} \pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n-\nu}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(n-\nu+1)}. \quad (\text{IV.66})$$

De esta manera queda definido el ensemble de matrices de colisión que se utilizará para calcular promedios de interés. En particular calcularemos secciones de fluctuación. Hasta ahora, solamente en el caso especial de $n - 1$ canales con absorción completa y uno de absorción arbitraria, discutido en el capítulo III, y en el caso de dos canales equivalentes que estudiaremos a continuación, ha sido posible obtener analíticamente las secciones. Otros dos casos que se analizarán en forma completamente análoga a la del capítulo III son las aproximaciones de las distribuciones marginales en el límite $n \gg 1$ en los casos de absorción arbitraria para uno y dos canales. Por último calculamos numéricamente secciones en los siguientes casos. 1) Canales equivalentes $n = 2, 3, \dots, 10$ y, 2) absorción arbitraria en el problema de dos canales.

Incidentalmente, debemos señalar que la expresión (III.17) es un caso particular de (IV.65) y también que la función de densidad que se utilizó en los trabajos iniciales se puede obtener como una aproximación de la función de densidad (IV.65). Para mostrar esto consideremos que existe una matriz V que -- diagonaliza al producto \overline{SS}^* tal que

$$\det (I - \bar{S} S^*) = \det (I - \Lambda) \quad (\text{IV.67})$$

siendo $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ una matriz diagonal, de manera que es posible reescribir

$$\det (I - \bar{S} S^*) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) \quad (\text{IV.68})$$

$$= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ln (1 - \lambda_i) \right\} \quad (\text{IV.69})$$

dado que $|\lambda_i| < 1$ se puede desarrollar el logaritmo en serie de potencias de λ_i y se tiene

$$\det (I - \bar{S} S^*) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \dots \right\} \quad (\text{IV.70})$$

y puesto que

$$\sum_i \lambda_i^k = \text{Tr} (\bar{S} S^*)^k \quad (\text{IV.71})$$

la función de densidad la reescribimos en la siguiente forma

$$p(\bar{S}, S) \propto \left| \exp \left\{ \frac{n+1}{2} \left[\text{Tr} (\bar{S} S^*) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\text{Tr} (\bar{S} S^*)^k}{k} \right] \right\} \right|^2 \quad (\text{IV.72})$$

Es evidente que en el límite de absorción fuerte en todos los canales, la función de densidad se aproxima por la expresión

$$p(\bar{S}, S) \approx \left| \exp \left\{ \frac{n+1}{2} \text{Tr} (\bar{S} S^*) \right\} \right|^2, \quad (\text{IV.73})$$

que coincide con (I.71) cuando $\beta = -\frac{n+1}{2} \bar{S}$. Esto explica

por qué en este límite la descripción del Modelo de la Entropía era buena.

Haremos dos comentarios más en relación al kernel de Poisson. En primer lugar queremos mostrar que es posible definir una familia de kernels positivo definidos que satisfacen la condición de AE. Para ésto, consideremos el kernel de Cauchy expresado en términos de una base ortonormal como en la ec. (II.42), que transcribimos aquí

$$H(z, \xi^n) = \sum_f \sum_{\mu} \varphi_{\mu}^f(z) \left[\varphi_{\mu}^f(\xi) \right]^n \quad (\text{IV.74})$$

Definamos ahora la familia de kernels

$$H_r(z, \xi^n) = \sum_{f=r}^{\infty} \sum_{\mu} \varphi_{\mu}^f(z) \left[\varphi_{\mu}^f(\xi) \right]^n \quad r=1,2,\dots \quad (\text{IV.75})$$

Es claro que estos kernels no satisfacen con la propiedad reproductora de funciones analíticas, a menos que estas sean de grado mínimo $\geq r$. Supongamos que $g(\xi)$ es una función analítica cualquiera. La función

$$u_r(\xi) = g(\xi) H_r(z, \xi^n) \quad (\text{IV.76})$$

es también de grado mínimo $\geq r$ y por lo tanto

$$u_r(z) = \int H_r(z, \xi^n) u_r(\xi) d\mu(\xi), \quad (\text{IV.77})$$

$$g(z) H_r(z, z^n) = \int |H_r(z, \xi^n)|^2 g(\xi) d\mu(\xi), \quad (\text{IV.78})$$

nos interesa reescribir la anterior expresión en la forma

$$g(z) = \int \frac{|H_r(z, \xi^*)|^2}{H_r(z, z^*)} g(\xi) d\mu(\xi). \quad (\text{IV.79})$$

Encontramos así que la familia de kernels

$$P_r(z, \xi^*) = \frac{|H_r(z, \xi^*)|^2}{H_r(z, z^*)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (\text{IV.80})$$

satisfacen la condición de reproducibilidad, igualmente diremos que las funciones

$$p_r(\bar{s}, s^*) \equiv \frac{|H_r(\bar{s}, s^*)|^2}{H_r(\bar{s}, \bar{s}^*)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (\text{IV.81})$$

satisfacen el requerimiento de AE (a todo orden). ¿ Qué significa esto ? Dada una base ortonormal se tiene una familia infinita de kernels positivo definidos del tipo (IV.81) y el que se definió en (IV.46). Por otra parte, con base en las propiedades de transformación, se dedujo el kernel de la expresión (IV.65). Por construcción (IV.46) y (IV.65) son dos representaciones del mismo kernel.

Si nos preguntamos cuál de todos estos kernels vamos a utilizar, intuimos que debería ser el kernel definido en (IV.65) (o su equivalente (IV.46)), después de todo, como no tenemos la base ortonormal, excepto en el caso de un solo canal, no estamos en condiciones de utilizar los kernels $p_r(\bar{s}, s^*)$. Obviamente, la intuición no puede ser razón suficiente para justificar el uso del kernel (IV.65); independientemente y en su favor acudimos al análisis de la propiedad de covarianza unita-

ria bajo el automorfismo

$$S \rightarrow S' = U^{\circ} S U^{\circ T}, \quad (\text{IV.82})$$

donde U° es una matriz unitaria. Hofmann et al.²⁴⁾ analizaron el efecto de la transformación (IV.82) sobre el ensemble de matrices S construidas numéricamente en términos de matrices K (véase cap. I) y encontraron que el ensemble transformado tiene la misma estructura que el original excepto por los valores diferentes de los parámetros. ¿Qué hay sobre esto en nuestro caso ?

Consideremos la medida asociada con el kernel de Poisson definida como

$$d\mu_{\bar{s}}(S) = h(\bar{s}, S^*) d\mu(S), \quad (\text{IV.83})$$

$$= \frac{1}{V} \frac{[\det(I - I\bar{s}'^*)]^{n+1}}{|\det(I - \bar{s}S^*)|^{n+1}} d\mu(S). \quad (\text{IV.84})$$

Se sabe que la medida $d\mu(S)$ es invariante bajo la transformación (IV.82). Por otra parte, en vista de que

$$\begin{aligned} \det(I - \bar{s}S^*) &= \det(U^{\circ}(I - \bar{s}S^*)U^{\circ T}), \\ &= \det[I - U^{\circ}S U^{\circ T}(U^{\circ}S U^{\circ T})^*], \\ &= \det(I - \bar{s}'S'^*), \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

resulta que la medida asociada al kernel de Poisson (IV.65) es covariante bajo (IV.82) en el siguiente sentido

$$dp_{\bar{s}}(s) = dp_{\bar{s}'}(s') \quad (\text{IV.86})$$

Es interesante que el kernel de Poisson definido en (IV.65) satisfaga la propiedad de covarianza bajo el automorfismo (IV.82). Es posible que esta propiedad junto con AE definen unívocamente el ensemble apropiado, es decir, la solución del problema.

El otro comentario es con respecto a la entropía del ensemble. En el Modelo de la Entropía⁶⁾ se postula una función de densidad $p(s)$ que maximiza la entropía sujeta a la restricción $\langle s \rangle = \bar{s}$. Más específicamente, se propone desde un principio, para la función de densidad una expresión del tipo

$$p_0(s) \propto |e^{\varphi(s)}|^2 \quad (\text{IV.87})$$

con $\varphi(s) = -\text{Tr} \beta S$, y se determina β con la restricción $\langle s \rangle = \bar{s}$. De hecho el procedimiento que se siguió en el capítulo III es el de máxima entropía sujeto a un número infinito de restricciones (AE a todo orden). Encambio, la discusión en este capítulo, giró esencialmente en torno a los requerimientos de AE a todo orden (propiedad de reproducibilidad) y así se obtuvieron los kernels en cuestión. Nos interesa mostrar ahora que si además de satisfacer con AE, el kernel se puede expresar como

$$p(\bar{s}, s^*) \propto |e^{\varphi(s)}|^2 \quad (\text{IV.88})$$

con $\varphi(s)$ una función analítica, entonces el ensemble es de máxima entropía.

Supongamos que $q(\bar{s}, s^*)$ y $p(\bar{s}, s^*)$ son dos funciones de densidad (normalizadas) que satisfacen con la propiedad de reproducibilidad de una función analítica y $p(\bar{s}, s^*)$ del tipo (IV.88), entonces es fácil ver que

$$\int q \ln q \, d\mu \leq \int q \ln p \, d\mu \quad (\text{IV.89})$$

en tanto que para la entropía se tiene la relación

$$S(q) \equiv - \int q \ln q \, d\mu \leq - \int p \ln p \, d\mu \equiv S(p) \quad (\text{IV.90})$$

Como corolario resulta que si q se puede expresar como en (IV.88) entonces $S(q) = S(p)$ y además $q = p$!!

Ahora bien, mostramos líneas arriba (al comentar la aproximación del kernel de Poisson en el límite de absorción fuerte), que el kernel definido en (IV.65) se puede escribir en la forma

$$p(\bar{s}, s^*) \propto \left| \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_r(\bar{s} s^*)^k}{k} \right\} \right|^2 \quad (\text{IV.91})$$

Esto significa que el ensemble definido por la medida

$$d\rho_{\bar{s}}(s) = \frac{1}{V} \frac{[\det(I - |\bar{s}|^*)]^{\frac{N+1}{2}}}{|\det(I - \bar{s}s^*)|^{N+1}} d\mu(s) \quad (\text{IV.92})$$

es un ensemble de máxima entropía. Por otra parte teniendo en cuenta que

$$\left| e^{\Psi(s)} \right|^2 = \left| 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\Psi(s)]^k}{k!} \right|^2 \quad (\text{IV.93})$$

los kernels $p_r(\bar{s}, s)$ que carecen del término constante no maximizan la entropía. Esto nos lleva a la conclusión de que el requere

rimiento de AE no es condición suficiente para que se maximice la entropía.

Finalmente, nos preguntamos si máxima entropía y AE es equivalente a imponer covarianza y AE. Aparentemente sí.

Capítulo V

APLICACIONES

Contamos ahora con una formulación de la teoría estadística de reacciones nucleares en la que se cuida el riguroso cumplimiento de unitariedad, simetría y analiticidad. Por otra parte, la matriz óptica que es el parámetro relevante de la teoría, es completamente arbitraria. Naturalmente conviene tener presente la transformación de Engelbrecht y Weidenmüller y considerar S diagonal.

Presentaremos en este capítulo resultados calculados para las secciones de fluctuación. En la primera sección se consideran los mismos casos que se estudiaron en el capítulo II, es decir, absorción arbitraria en uno y dos canales y total en los restantes $n-1$ y $n-2$ respectivamente; análogamente, nos referiremos a las distribuciones marginales de algunos elementos de matriz y sus aproximaciones en el límite $n \rightarrow \infty$; el propósito es completar la discusión iniciada en el capítulo II acerca de la relación entre los valores de las secciones de fluctuación elástica e inelástica y las propiedades de conservación de flujo, reversibilidad temporal y causalidad. En la sección V.2, calcularemos secciones de fluctuación. En el problema de dos canales consideraremos los dos casos siguientes; a) canales equivalentes (con resultados analíticos) y b) absorción arbitraria en ambos canales (resultados numéricos). Dado que el problema de dos canales equivalentes se estudió ya en el capítulo III, so-

lamente escribiremos las expresiones analíticas que se obtienen para las secciones en este caso particular. Finalmente, reportaremos algunos valores de las secciones y el "elastic enhancement factor" para un número mayor de canales equivalentes $n=2,3,\dots,10$

V.1 Absorción arbitraria en uno y dos canales. Funciones de distribución marginal. Límite $n \gg 1$.

Es claro que el análisis que haremos en esta sección será semejante al de la sección II.4.2, con la diferencia de que ahora tenemos otra función de densidad (consistente con AE a todo orden).

En el caso particular de absorción arbitraria en un sólo canal y total en los $n - 1$ restantes, la función de densidad marginal para el elemento S_{11} es evidentemente

$$p(S_{11}) \propto \frac{(1 - |S_{11}|^2)^{\frac{n-3}{2}}}{|1 - \bar{S}_{11} S_{11}^*|^{\frac{n-1}{2}}} \quad (V.1)$$

Para aproximar esta función en el límite n grande procedemos - como en el capítulo II, tenemos así

$$p(S_{11}) \tilde{\propto} \exp \left[\frac{n}{2} \ln (1 - |S_{11}|^2) - n \ln |1 - \bar{S}_{11} S_{11}^*| \right] \quad (V.2)$$

Si usamos la notación $S_{ab} = X_{ab} + i Y_{ab}$ y además consideramos que

$$S_{11} = \bar{S}_{11} + \epsilon_{11} + i \gamma_{11} \quad (V.3)$$

después de sustituir y desarrollar el logaritmo en serie de potencias, se encuentra la aproximación siguiente para la función de densidad

$$p(S_{11}) \approx \exp \left[-\frac{n}{(1-\bar{S}_{11}^2)^2} \frac{\xi^2}{2} - \frac{n}{(1-\bar{S}_{11}^2)^2} \frac{y_1^2}{2} + O(n^{-1}) \right] \quad (V.3)$$

Nuevamente, resulta que en el límite n grande X_{11} y Y_{11} están distribuidas como Gaussianas, de manera que para la sección de fluctuación, se tiene

$$\sigma_{11}^2 = \text{var } \xi_{11} + \text{var } y_{11} = \frac{2(1-\bar{S}_{11}^2)^2}{n} = \frac{2P_1P_1}{n} \quad (V.4)$$

Antes de comentar este resultado, pasemos a considerar la función de densidad marginal conjunta de S_{11} y S_{12} , que ahora es

$$p(S_{11}, S_{12}) \propto \frac{(1-|S_{11}|^2)^{\frac{1-n}{2}} (1-|S_{12}|^2-|S_{11}|^2)^{\frac{n-3}{2}}}{|1-\bar{S}_{11}S_{12}|^{n+1}} \quad (V.5)$$

la aproximación, en el límite n grande, viene dada por

$$p(S_{11}, S_{12}) \approx \exp \left[-\frac{n}{(1-\bar{S}_{11}^2)^2} (\xi_{11}^2 + y_{11}^2) - \frac{2n}{1-\bar{S}_{11}^2} (x_{12}^2 + y_{12}^2) + O(n^{-1}) \right] \quad (V.6)$$

Tomando en cuenta que $P_2 = 1$, las secciones de fluctuación que se obtienen se pueden escribir como sigue

$$\sigma_{11}^2 = \frac{2(1-\bar{S}_{11}^2)^2}{n} = \frac{2P_1P_1}{n} \quad (V.7)$$

$$\sigma_{12}^2 = \frac{2(1-\bar{S}_{11}^2)}{n} = \frac{P_1P_2}{n}$$

Observemos en primer lugar la coincidencia de estos resultados con los obtenidos para este mismo límite por Agassi y Weidenmuller y en segundo lugar si comparamos con los que se obtuvieron en el capítulo II, concluimos que el factor adicional que aparece en los resultados (II.147) se debe simplemente a que no estaba considerado el requerimiento de AE a todo orden.

Para concluir esta sección, nos referiremos brevemente a la situación particular de absorción arbitraria en dos canales y total en las $n - 2$ restantes. La distribución marginal conjunta para los elementos $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ es

$$p(S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}) \propto \frac{(1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - 2|S_{12}|^2 + |S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}|^2)^{\frac{n-2}{2}}}{|(1 - \bar{S}_{11}S_{11}^*)(1 - \bar{S}_{22}S_{22}^*) - S_{12}^2|^{n+1}} \quad (V.8)$$

Suponiendo que

$$S_{ij} = \bar{S}_{ij} + \xi_{ij} + i \eta_{ij} \quad j = 1, 2 \quad (V.9)$$

y después de un poco de algebra encontramos para la función de densidad (V.8) la siguiente forma aproximada

$$p(S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}) \approx \exp \left\{ -\frac{n}{2} \frac{\xi_{11}^2 + \eta_{11}^2}{(1 - \bar{S}_{11}^2)^2} - \frac{n}{2} \frac{\xi_{22}^2 + \eta_{22}^2}{(1 - \bar{S}_{22}^2)^2} - \frac{n(\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2)}{(1 - \bar{S}_{11}^2)(1 - \bar{S}_{22}^2)} + O(n^{-1}) \right\} \quad (V.10)$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^H &= 2 \frac{P_1 P_1}{m} & \sigma_{12}^H &= \frac{P_1 P_2}{m} \\ \sigma_{21}^H &= \frac{P_1 P_2}{m} & \sigma_{22}^H &= 2 \frac{P_2 P_2}{m} \end{aligned} \quad (V.11)$$

Estos resultados reiteran el hecho de que en el límite n grande los elementos de la matriz de colisión tienen distribución Gaussiana⁴⁶⁾ y para las secciones de fluctuación obtenemos los resultados de Agassi y Weidenmuller, es decir, un "elastic enhancement factor" $W = 2$. En la sección V.3, nos ocuparemos de las secciones de fluctuación. Iniciaremos la sección discutiendo aspectos de carácter general relativos al cálculo de las secciones, después de lo cual, en el apartado V.2.1., mostraremos resultados en el problema de dos canales. Para el caso de dos canales equivalentes fué posible obtener las secciones en forma analítica. En el caso de absorción arbitraria en dos canales así como para los otros casos considerados en el apartado V.2.2., se utilizaron procedimientos numéricos.

V.2 Secciones de fluctuación⁴⁷⁾

Para determinar las secciones, debemos calcular expresiones del tipo

46. C. Mahaux y H.A. Weidenmuller, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 29 (1979) 1
 47. P.A. Mello, P. Pereyra y T.H. Seligman (por publicarse).

$$\langle |S_{ab}|^2 \rangle = \frac{1}{V(\mathcal{E})} \int \frac{[d\mathcal{I}(I-|\bar{S}|^2)]^{\frac{n+1}{2}}}{|d\mathcal{I}(I-\bar{S}\bar{S}^*)|^{n+1}} |S_{ab}|^2 d\mu(s) \quad (V.12)$$

Aparte del caso particular de absorción arbitraria en un solo canal, discutido en el capítulo III y para el cual

$$\bar{S} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{S}_n & 0 \\ \hline \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{array} \right) \quad (V.13)$$

no ha sido posible evaluar directamente la integral (V.12). - Para los cálculos que se realizaron escogimos la representación en términos de las eigenfases de la matriz de colisión, también denominada representación de coordenadas polares. Para esto, consideramos que existe una matriz ortogonal Γ , tal que

$$s = \Gamma \Theta \Gamma' \quad (V.14)$$

$$d\mu(s) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq \nu < \mu \leq n} |e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| d\theta_1 \dots d\theta_n dh(\Gamma) \quad (V.15)$$

siendo

$$\Theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}; \quad \pi \geq \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n \geq -\pi \quad (V.16)$$

y $dh(\Gamma)$ la medida de Haar del grupo ortogonal de la que ya hablamos en el capítulo II (sección II.1.1).

Mello y Seligman²⁰⁾ mostraron que en esta representación

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{\mu} &= \langle |S_{ab}^{\mu}|^2 \rangle \\ &= [1 - \langle E_a^{\mu} E_b^{\mu} \rangle] X_{ab} + [\langle E_a^{\mu} E_b^{\mu} \rangle - \langle E_a^{\mu} \rangle \langle E_b^{\mu} \rangle] \delta_{ab} \end{aligned} \quad (V.17)$$

siendo

$$\langle E_a^{\mu} E_b^{\mu} \rangle = \langle e^{-i\theta_a} e^{i\theta_b} \rangle \quad (V.18)$$

Esto significa que el problema consiste en calcular las integrales (V.18). Por la estructura de la medida, es relativamente más cómodo calcular primero la parte inelástica que, de acuerdo con (V.17), está expresada en la forma

$$\sigma_{12}^{\mu} = \frac{2}{m+2} \langle \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \rangle \quad (V.19)$$

más explícitamente tenemos

$$\sigma_{12}^{\mu} = \frac{2 [\det(I - \bar{S})]^{m+1}}{(m+2) V(\bar{S})} \int \frac{\sin^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \prod_{i=1}^{m+1} |\sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2}|}{|\det(I - \bar{S} \Gamma \Theta \Gamma')|^{m+1}} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{m+1} \quad (V.20)$$

En el caso especial de que \bar{S} es diagonal y los canales son equivalentes, la integración en la parte ortogonal es directa. Después de realizar la integral en la parte ortogonal y substituir el valor de $V(\bar{S})$, queda la siguiente integral para la sección de fluctuación inelástica

$$\bar{\sigma}_{12}^M = \left(\frac{1 + \bar{\sigma}_1^2}{1 - \bar{\sigma}_1^2} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}} (n+2)} \int \frac{\sin^2(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}) \prod_{i=1}^n | \sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2} |}{\prod_{i=1}^n (1 - \frac{2\bar{\sigma}_i}{1 + \bar{\sigma}_i^2} \cos \theta_i)^{\frac{n+1}{2}}} d\theta_1 \dots d\theta_n$$

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \dots = \bar{\sigma}_n \equiv \bar{\sigma}_n; \quad \pi > \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n > -\pi \quad (V.21)$$

En los apartados siguientes nos ocuparemos del cálculo de estas integrales.

V.2.1. El problema de dos canales

Nos referiremos tanto al caso de canales equivalentes como al más general de canales con absorción arbitraria. Debido a que en el capítulo III, ya se discutió y se presentaron resultados para el problema de dos canales equivalentes, nos limitaremos a mostrar, a continuación, el resultado que analíticamente se obtiene para la sección de fluctuación

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}^M = & \left(\frac{1 + \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \right)^3 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\rho^2 (1 + \rho^2)^{1/2}} \left\{ \frac{3\pi}{16} \left[F\left(\frac{1}{2}, 1; 3; -\rho^2\right) - F\left(2, \frac{1}{2}; 3; -\rho^2\right) \right] \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_r (\frac{1}{2})_r}{(3/2)_r r!} (-\rho^2)^r \left[4B\left(\frac{1}{2}, r+3\right) \left(F\left(\frac{1}{2}, r+\frac{3}{2}; r+3; -\rho^2\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(-)^r}{(1+\rho^2)^{r-1/2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; r+3; -\rho^2\right) \right) - \right. \\ & \left. \left. - 3B\left(\frac{1}{2}, r+\frac{3}{2}\right) \left(F\left(\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}; r+2; -\rho^2\right) - \frac{(-)^r}{(1+\rho^2)^{r-1}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; r+2; -\rho^2\right) \right) \right] \right\} \quad (V.22) \end{aligned}$$

en donde

$$k^2 = \frac{\mu \bar{\Sigma}_a}{(1 - \bar{\Sigma}_a^2)^2} \quad \text{y} \quad (\alpha)_r = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{V.23})$$

En el caso de canales no equivalentes, la integración sobre las variables correspondientes a la parte ortogonal ya no se puede realizar analíticamente y por separado. En este problema como en los que se consideran después, se procedió numéricamente, haciendo uso del algoritmo de integración VEGAS ⁴⁸⁾ que usa métodos de integración de Monte Carlo.

Este algoritmo, esquemáticamente, consiste en lo siguiente:

- 1) Dado el volumen de integración V y la función $f(x)$ a integrar, se procura (mediante un proceso iterativo) establecer una óptima partición (V_1, V_2, \dots, V_N) del volumen, de manera que las evaluaciones del integrando se concentran a aquellas regiones donde el integrando es grande en magnitud.
- 2) Se computa un error estimado para el valor de la integral en cada iteración. Es posible, si se quiere, acumular los valores de las integrales y errores estimados calculados en cada iteración y obtener a partir de ellos una especie de valor medio para la integral y el error. Para establecer la confiabilidad de los resultados, se han calculado las integrales de normalización correspondientes a los distintos casos considerados, encontrándose que evidentemente son confiables.

Después de esta digresión, regresemos al problema de dos canales no necesariamente equivalentes, en el cual, el "elastic enhancement factor" ya no es más el cociente $\sigma_{11}^{el} / \sigma_{12}^{el}$. Mencionamos

48. G.P. Lepage, J. Comput. Phys. 27 (1978) 192

en el Capítulo I, que Hofmann et al. consideran que las secciones de fluctuación se pueden factorizar en la forma

$$\sigma_{aa}^H = \frac{V_a^2}{\sum_c V_c} W_a \quad ; \quad \sigma_{ab}^H = \frac{V_a V_b}{\sum_c V_c} \quad a \neq b$$

En función de esto, una cantidad que conviene definir para fines de comparación es la siguiente

$$W = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{11}^H \sigma_{22}^H}{(\sigma_{12}^H)^2}} \quad (V.24)$$

En la tabla V.I se muestran los valores que se obtienen para W tanto de las fórmulas ajustadas por Moldauer y HRTW como los que calculamos aquí. Se advierte un mejor acuerdo con HRTW que que con la predicción de la fórmula de Moldauer que da valores más grandes cuando T_1 y $T_2 \approx 1$ (absorción fuerte en ambos canales), valores muy pequeños cuando T_1 y T_2 son marcadamente diferentes, y resultados bastante coincidentes con HRTW y los nuestros cuando T_1 y T_2 son próximos a cero (absorción débil en ambos canales).

Para ilustrar el comportamiento de las secciones elástica e inelástica como funciones de T_1 y T_2 , mostramos en la fig. V.1 varias curvas que corresponden al cociente $K_1 = \sigma_{11}^H / \sigma_{12}^H$ como función de T_2 (a T_1 fija). Se observa que a T_1 dada, el cociente K_1 , crece cuando la absorción en el canal 2 decrece. Mientras que a T_2 dada, el cociente K_1 crece con T_1 .

En muchas ocasiones, se ha mencionado las desviaciones con respecto a las predicciones de la fórmula de Hauser - Feshbach y

Tabla V.1

Resultados de $W = \sqrt{W_1 W_2}$ para diferentes valores de T_1 y T_2 en el problema de dos canales abiertos. En cada columna de tres números, el primero corresponde al calculado con esta teoría y los dos siguientes se obtienen de las fórmulas de ajuste de HRTW y Moldauer (1980) respectivamente.

T ₂	T ₁				
	.19	.36	.75	.91	1.
	2.70	2.634	2.566	2.543	2.53
.19	2.702	2.625	2.511	2.46	2.43
	2.684	2.565	2.366	2.305	2.27
		2.50	2.366	2.328	2.308
.36		2.49	2.343	2.298	2.274
		2.466	2.291	2.237	2.211
			2.16	2.111	2.085
.75			2.15	2.100	2.076
			2.158	2.116	2.095
				2.056	2.028
.91				2.049	2.024
				2.078	2.059
					2.000
1.					2.000
					2.04

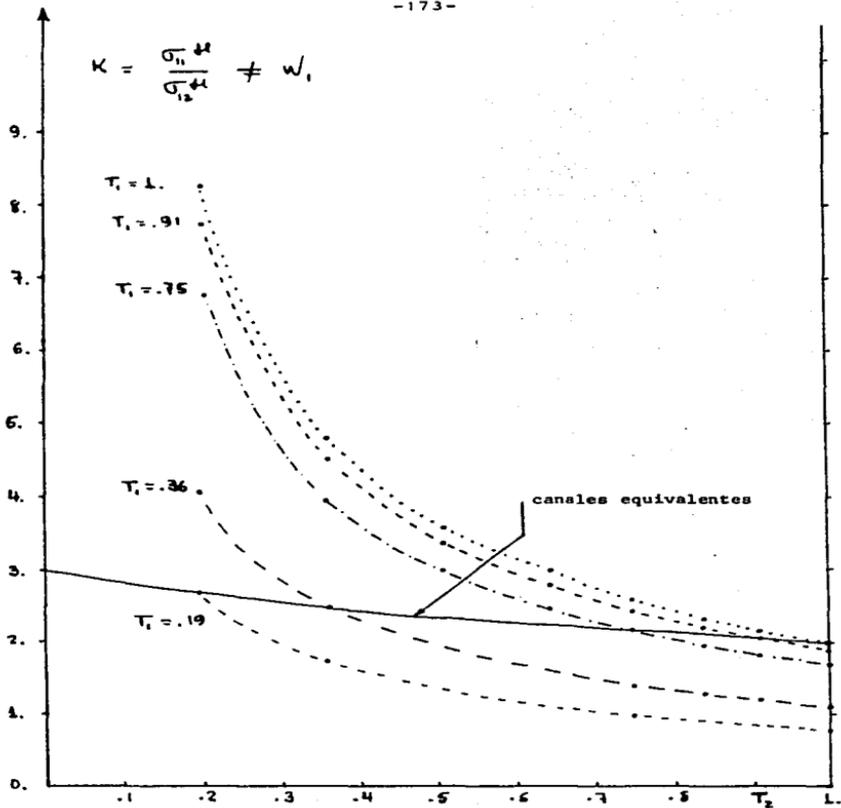


fig. V.1 Cociente de las secciones de fluctuación elástica y la inelástica para el problema de dos canales con absorción arbitraria en ambos canales

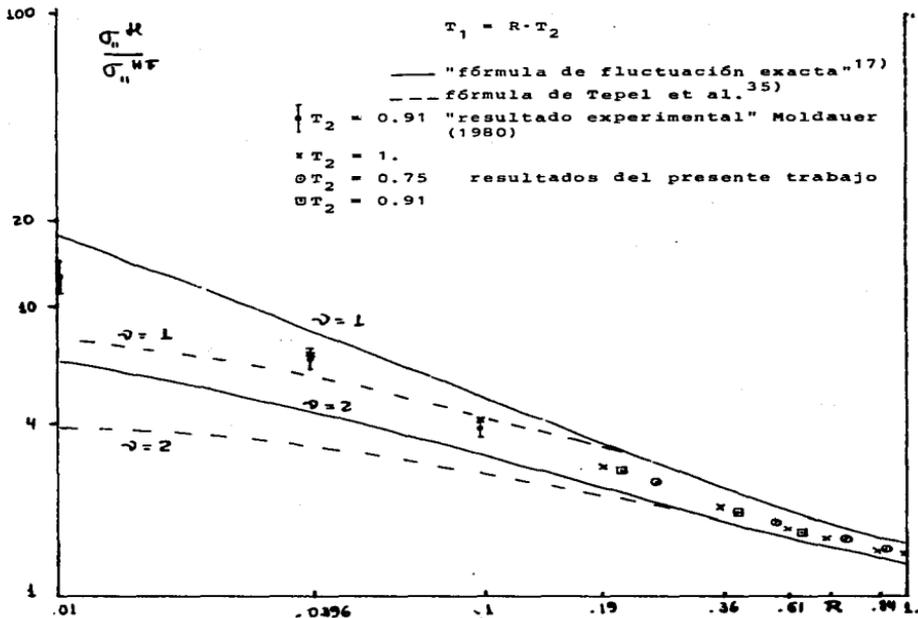


fig. V.2 Cociente entre la sección de fluctuación elástica calculada en el presente trabajo (y en otras teorías) y la que predice la fórmula de Hauser - Feshbach para el problema de dos canales con absorción arbitraria en ambos.

este hecho lo consideramos casi sistemáticamente en términos del "elastic enhancement factor" que nos da una medida del grado de intensificación de la parte elástica con respecto a la parte inelástica, que no predice dicha fórmula. En la fig. V.2 se tiene una comparación en términos de secciones elásticas. Más específicamente, se muestra los resultados que se obtiene para el cociente $\sigma_n^M / \sigma_n^{MF}$ entre la sección de fluctuación elástica calculada con esta teoría (también aparecen predicciones de la teoría de Moldauer y algunos resultados "experimentales") y la que predice la fórmula de Hauser - Feshbach para diferentes valores de $R = \frac{T_1}{T_2}$.

V.2.2 Algunos resultados de las secciones de fluctuación para varios canales equivalentes.

Se calculó la expresión (V.21) para diversos valores del número de canales y de \bar{S}_a ($T = T_a = \bar{S}_a^2$) a n fija. La evaluación numérica es más difícil cuando \bar{S}_a tiende a 1 (absorción débil). Solo en el problema de dos canales se calculó esta integral para valores tan grandes como $\bar{S}_a = 0.999$. Para otros valores de n solo se llegó hasta $\bar{S}_a \approx .9$. A medida que crece n , también crecen las dificultades puesto que aumenta la dimensionalidad del espacio de integración. En la Tabla V.2, se muestran valores del "elastic enhancement factor" para distintos valores de n . Aparecen también los valores que se obtienen a partir de las fórmulas ajustadas de HRTW y Moldauer. El acuerdo y las tendencias presentan la siguiente característica: en la región de absorción débil se coincide más con Moldauer y en la región de absorción fuerte con HRTW.

Tabla V.2

El "elastic enhancement factor" para n canales equivalentes y diferentes valores del coeficiente de transmisión T. En cada columna de tres números, el primero es el calculado en el presente trabajo, el segundo se obtiene de la fórmula de ajuste de HRTW y el tercero es un resultado de Moldauer, ya sea de su fórmula de ajuste (1980) o si aparece un número entre paréntesis (error en la última cifra significativa) es un resultado "experimental" obtenido en base a cálculos de Monte Carlo.

n	$T = T_a = 1 - \frac{2}{S_{aa}}$								
	.0199	.0975	.19	.36	.51	.64	.75	.91	1.0
2		2.83	2.70	2.50	2.35	2.247	2.162	2.056	2.000
		2.84	2.69	2.49	2.34	2.23	2.15	2.049	2.000
		2.83	2.69(7)	2.51(8)	2.32	2.25(4)	2.158	2.078	2.04
3			2.65	2.449	2.30	2.20	2.13	2.042	2.000
			2.58	2.387	2.26	2.176	2.115	2.038	2.000
			2.65	2.43	2.297	2.21	2.15	2.087	2.057
5	2.926		2.575	2.368	2.23	2.15			2.000
	2.825		2.46	2.297	2.199	2.13			2.000
	2.949		2.57	2.33(4)	2.256	2.15(3)			2.08
10			2.36	2.28			2.064	2.02	2.000
			2.357	2.228			2.064	2.02	2.000
			2.42(5)	2.25(4)			2.164	2.115	2.12

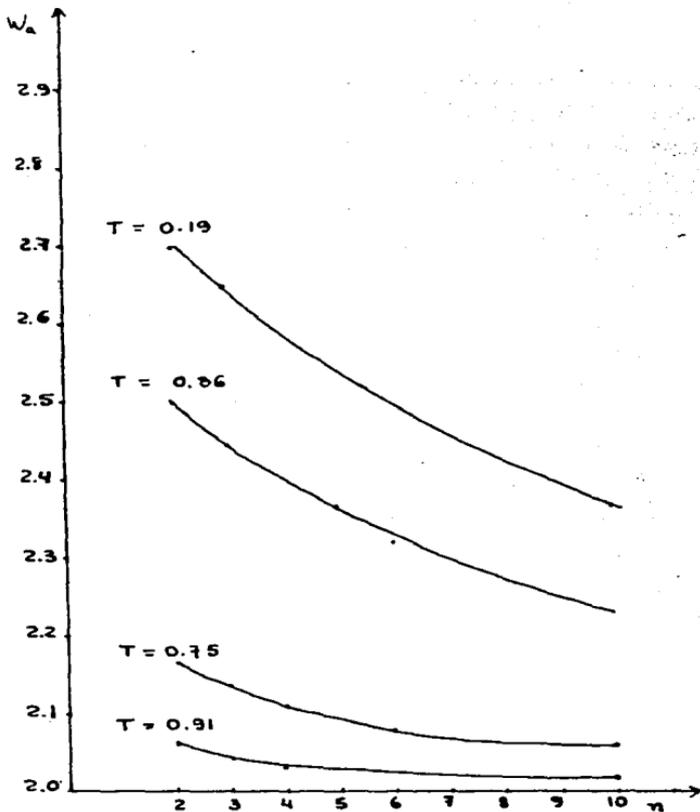


fig. V.3 El "elastic enhancement factor" $W_a = \sigma_{aa}^H / \sigma_{ab}^H$ para canales -- equivalentes como función del número de canales.

A partir de los datos de la Tabla V.2, se han dibujado las curvas que se ven en la fig. V.3. En esta figura la intención es mostrar cómo cambia el "elastic enhancement factor" como función del número de canales abiertos, advirtiéndose la tendencia hacia el valor límite $W = 2$ que predicen Agassi et al. y ésta misma teoría para los casos discutidos en la sección V.1.

Finalmente, debemos decir que queda pendiente el problema técnico de calcular analíticamente la integral (V.12), lo cual no es más que un aspecto de la teoría que aquí formulamos y demostramos que funciona muy bien. En algunos casos especiales estas integrales se han realizado analíticamente y en otras numéricamente. Estamos investigando en relación con la base ortonormal del espacio de matrices simétricas y unitarias, las cuales están expresadas en términos de potencias de elementos de matriz; de forma que con las técnicas e integrales que se realizaron en el capítulo II, puede en principio, abordarse el problema de la integral arriba mencionada.

CONCLUSIONES

Del análisis y los cálculos realizados en este trabajo, llegamos a algunas conclusiones importantes.

En el capítulo II fué posible obtener funciones de distribución marginal para los elementos de la matriz S, y también se confirmó que en el límite de muchos canales abiertos, estos elementos de matriz se comportan como variables Gaussianas. Se vió, además, que la propiedad de reversibilidad temporal, es decir la simetría de la matriz de colisión, es la responsable de la diferencia entre la sección elástica y la inelástica (lo cual refleja un cierto grado de correlación entre el canal de entrada y el de salida).

La incorporación del requerimiento de Analiticidad-Ergodicidad o sea la propiedad de causalidad junto con la que hemos llamado hipótesis de ergodicidad que se discutió para dos casos especiales - en el capítulo III y en forma general en el capítulo IV, se ha realizado con éxito; los resultados obtenidos independientemente de los valores que se asignen a los coeficientes de transmisión T_a y al número de canales de la reacción nuclear en cuestión, están en excelente acuerdo con los resultados basados en cálculos de MonteCarlo -los llamados "experimentos", de computadora. Como se sabe y se ha señalado en este trabajo, con las teorías analíticas existentes solamente es posible una descripción en los casos especiales de absorción débil ($T_a \ll 0$) y absorción fuerte ($T_a \gg 1$), en tanto que, las fórmulas de ajuste son válidas únicamente para un número reducido de canales. Con esto se concluye que para los

propósitos de calcular secciones de fluctuación, el análisis y la información física contenida en las propiedades e hipótesis asociadas a las variables microscópicas puede en última instancia, substituirse por una formulación basada en el cumplimiento riguroso de propiedades generales y macroscópicas del sistema: la condición de analiticidad y ergodicidad AE, unitaridad y simetría de la matriz de colisión y además covariancia unitaria (o maximización de entropía).

Para afirmar que este formalismo, el cual, según se vió funciona muy bien y sin restricciones, es la solución del problema, debe mostrarse que la función de densidad (Kernel de Poisson) que aparece en (IV.65) es única. En este sentido vimos que entre los kernels positivo definidos que satisfacen el requerimiento de AE, el kernel de Poisson

$$p(\bar{s}, S) = \frac{[\det(I - |\bar{s}|^2)]^{\frac{n+1}{2}}}{|\det(I - \bar{s}S^*)|^{n+1}}$$

es covariante bajo el automorfismo $S \rightarrow S = USU^T$ y maximiza la entropía. En el capítulo IV señalamos algunas consecuencias de estas propiedades e hicimos la conjetura de que AE más covariancia unitaria (o tal vez AE y la condición de máxima entropía) fijan unívocamente la solución. Lo anterior parece plausible pero es necesario encontrar una prueba rigurosa.

Como ya dijimos en el texto, este tratamiento se aplica a todos aquellos procesos de reacción nuclear en los que las componentes

directa y de núcleo compuesto son relevantes. Una extensión y aplicación de estas ideas a procesos en los que también se tienen emisiones de preequilibrio está comenzando a estudiarse. Para ésto, será necesario identificar alguna propiedad general - asociada al mecanismo de evolución hacia el equilibrio que se refleje en la matriz de colisión o condiciones sobre ésta, y - después traducir esta propiedad en alguna de naturaleza matemática (de la misma forma que causalidad-ergodicidad (AE) se traduce en la propiedad de reproducibilidad de funciones analíticas).

Por otra parte, el formalismo que se utilizó en esta teoría, - puede ser aplicado a otros problemas físicos y de ingeniería en los que el análisis pasa por una descripción muy complicada en términos de componentes microscópicas sobre las cuales no se conoce mucho y por lo tanto, los ensembles de interés, tienen que generarse estocásticamente suponiendo leyes de distribución para las variables subyacentes, con el resultado final de que toda la información microscópica se diluye en favor de un comportamiento o propiedad macroscópica. Con el formalismo que aquí se estudió construimos analíticamente el ensemble completo de las variables de interés (en nuestro caso la matriz de colisión) con propiedades matemáticas bien definidas. Esto evita el problema - de construir, uno por uno, los elementos del ensemble.

APENDICES

Apéndice I.1. Sobre el factor de "corrección de fluctuación de anchuras" de Moldauer (absorción débil).

Presentamos una síntesis del análisis para determinar la corrección de fluctuación de anchuras.

En general se supone para las anchuras parciales distribuciones χ^2 de ν grados de libertad dadas por

$$F_{\nu}(x) = \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} \quad (\text{AI.1})$$

Si se factoriza la corrección de fluctuación de anchuras en la forma

$$W_{ab} = G_{ab} C_{ab} \quad (\text{AI.2})$$

donde

$$G_{ab} = \frac{\langle T_{aa} T_{bb} / T_{aa} \rangle}{\langle T_{aa} T_{bb} \rangle / \langle T_{aa} \rangle} \quad (\text{AI.3})$$

$$C_{ab} = \langle T_{aa} T_{bb} \rangle / \langle T_{aa} \rangle \langle T_{bb} \rangle \quad (\text{AI.4})$$

y se considera la distribución (AI.1) se obtiene

$$G_{ab} = \int_0^{\infty} dt \prod_c \left(1 + \frac{2 \langle T_{ac} \rangle}{\nu_c \langle T_{aa} \rangle} t \right)^{-\left(\frac{\nu}{2} + \delta_{ac} + \delta_{bc} \right)} \quad (\text{AI.5})$$

en tanto que el factor C_{ab} puede expresarse en términos de los coeficientes de correlación de anchuras en la forma

$$C_{ab} = 1 + \frac{2 P_{ab}}{(\nu_a \nu_b)^{1/2}}, \quad (\text{AI.6})$$

obteniéndose así

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \left(1 + \frac{2 P_{ab}}{(\nu_a \nu_b)^{1/2}} \right) G_{ab} \quad (\text{AI.7})$$

En ausencia de reacciones directas $P_{ab} = \delta_{ab}$, entonces

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \left(1 + \frac{2 \delta_{ab}}{\nu_a} \right) G_{ab} \quad (\text{AI.8})$$

Apéndice I.2. Análisis de Moldauer sobre los parámetros de polo de la matriz S. Cancelación de M en la ecuación I.46.

Además de referirnos a los parámetros de polo de la matriz S, nos interesa exhibir "la cancelación M"

En la teoría de la matriz R se define una constante de normalización $N_\mu > 1$ para los eigenvectores de la matriz de niveles. Por otra parte estos eigenvectores están relacionados con las amplitudes $q_{\mu a}$ y los eigenvalores con los polos $E_\mu - i\frac{\Gamma_\mu}{2}$. En base a estas relaciones se encuentra que

$$\Gamma_{\mu a} = \frac{|q_{\mu a}|^2}{N_\mu} \quad (\text{AI.9})$$

Del uso del formalismo de la matriz de niveles se aprende entre otras cosas que la distribución de espaciamentos en el límite $\Gamma \gg D$ ya no sigue más una distribución de Wigner: sino una exponencial. Por otra parte la anchura total tiene una distribución más abierta de la que se esperaría si las anchuras parciales tuviesen distribuciones de Porter-Thomas independientes. Es decir, las leyes estadísticas para espaciamentos y anchuras en los límites extremos no son las mismas.

Si definimos el parámetro

$$\Theta_{\mu a} = \frac{2\pi}{D} N_A |g_{\mu a}|^2 \quad (\text{AI.10})$$

y tomamos en cuenta la relación (AI.9), la ecuación (I.46) se transforma en

$$\sigma_{ab}^{\mu} = \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{\Theta_{\mu a} \Theta_{\mu b}}{\Theta_{\mu}} \right\rangle - M_{ab} \quad (\text{AI.11})$$

La semejanza del primer término de esta ecuación con (I.33) sugiere la posibilidad de escribir

$$\sigma_{ab}^{\mu} = \frac{\langle \Theta_{\mu a} \rangle \langle \Theta_{\mu b} \rangle}{\sum_c \langle \Theta_{\mu c} \rangle} G_{ab} C_{ab} - M_{ab} \quad (\text{AI.12})$$

Con G_{ab} y C_{ab} definidas como en las ecuaciones (AI.3) y (AI.4). Si M_{ab} se anulase, se tendría nuevamente una expresión semejante a la de Hauser Feshbach con un factor de corrección. Sin embargo esto no es posible sin llegar a una inconsistencia*. Pero, si se supone el caso de n canales estadísticamente equivalentes y distribuciones χ^2 con ν grados de libertad para las $\Theta_{\mu a}$ se obtiene para las secciones de fluctuación elástica e inelástica - las siguientes expresiones

$$\sigma_{aa}^H = \frac{\frac{C}{D} T_a}{\frac{C}{D} + n - 1} - \frac{n-1}{\frac{C}{D} + n - 1} \left(M - \frac{C}{D} P \right) \quad (\text{AI.13a})$$

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a}{\frac{C}{D} + n - 1} + \frac{1}{\frac{C}{D} + n - 1} \left(M - \frac{C}{D} P \right) \quad (\text{AI.14b})$$

donde

$$M = M_{aa}, \quad \frac{C}{D} = \frac{2 \cdot D}{2P_{ab} + D}, \quad P = M_{ab} \quad a \neq b \quad (\text{AI.14})$$

Se ve inmediatamente que si

$$\frac{M}{P} = \frac{D}{C}; \quad C' \equiv \frac{C}{D} \quad (\text{AI.15})$$

las secciones estarían dadas por

$$\sigma_{ab}^H = \frac{T_a}{C' + n - 1} \left[1 + S_{ab} (C' - 1) \right] \quad (\text{AI.16})$$

De hecho, la condición (AI.15) para la cancelación de los términos de las secciones dependientes de M , ha sido numéricamente justificada por Moldauer (1975). Por ejemplo, para 10 canales equivalentes y $T_a = .75$ encuentra que

$$\frac{P}{M} = 0.6 \pm .08, \quad \frac{D}{C} = 0.48 \pm .05$$

y para el "elastic enhancement factor" el valor $W_e = C' = 2.08 \pm .02$

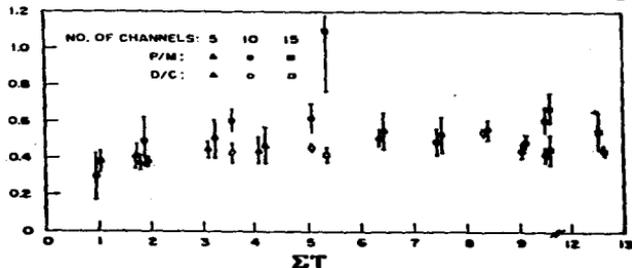


Fig. A I.1

Como se ve, la cancelación parece justificarse. En la fig. AI.1 se muestran más resultados de estos, advirtiéndose un comportamiento global según el cual el "elastic enhancement factor" ν_a varía desde ≈ 3 para $\sum_c T_c$ pequeña a ≈ 2 para $\sum_c T_c$ grande con fluctuaciones relativamente marcadas.

Para calcular las secciones, en el supuesto de que la cancelación de M sea exacta, se necesita especificar n parámetros ν_c , n(n-1)/2 coeficientes de correlación canal-canal y los -- coeficientes de transmisión. Sin embargo, Moldauer propuso definir un "elastic enhancement factor" efectivo de manera que

$$\sigma_a^{eff} = \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \left(1 + \frac{2 \delta_{ab}}{\nu_a'} \right) G_{ab}, \quad (AI.17)$$

la cual es exactamente de la misma forma que (AI.8), estando G_{ab} determinada como en la ecuación (AI.5), en tanto que ν_a' es en general dependiente de los coeficientes de transmisión.

Según los cálculos numéricos, ν' varía desde $\nu' = 1$ (distribución de Porter - Thomas) en el límite $\Gamma \ll D$ hasta $\nu' \approx 2$ (distribución exponencial) en el límite $\Gamma \gg D$.

Apendice I.3 Breve resumen del formalismo de Agassi, Weidenmuller y Mantzouranis en la región de absorción fuerte.

En primer lugar señalemos que en la teoría de Agassi, Weidenmuller y Mantzouranis, se considera un parámetro de desarrollo definido como

$$y = \max \left(\frac{D}{\Gamma \downarrow}, \frac{D}{\Gamma \uparrow}, \frac{\Gamma \uparrow}{\Delta E}, \frac{\Gamma \downarrow}{\Delta E} \right). \quad (AI.18)$$

En la subsección I.33 se definieron los parámetros que aparecen en (AI.18).

La teoría está formulada para incluir, en general, procesos de preequilibrio. En este fin se introducen clases de estados de modelo de capas con, excitones (partículas + agujeros) Se supone además que el tiempo $T_{mem,m}$ que transcurre para que el sistema evolucione desde una configuración de estado puro a una mezcla de estados dentro de la misma clase, es muy pequeño comparado con el tiempo de transición de una clase a otra $T_{coll,m}$ o que el de decaimiento $T_{dec,m}$, es decir

$$T_{mem,m} \ll (T_{coll,m}, T_{dec,m}). \quad (AI.19)$$

Los estados ligados en el continuo, se agrupan en clases de m excitones y se supone que el Hamiltoniano completo es diagonal en los estados de una clase con eigenfunciones $\psi_{m\mu}$ y eigenvalores $E_{m\mu}$, siendo μ el índice que corre en la clase m . Los elementos de matriz del Hamiltoniano están dados por

$$\langle \psi_{m\mu} | H | \psi_{n\nu} \rangle = \delta_{mn} \delta_{\mu\nu} E_{m\mu} + (1 - \delta_{mn}) \langle \psi_{m\mu} | V | \psi_{n\nu} \rangle,$$

$$\sqrt{\pi} \langle \psi_{m\mu} | H | \chi_E^c \rangle = \delta_{m\mu}^c, \quad (AI.20)$$

$$\langle \chi_E^c | H | \chi_{E'}^c \rangle = \delta_{cc} \delta(E - E') E + \langle \chi_E^c | V | \chi_{E'}^c \rangle$$

donde ψ^c es la función de onda del canal c y V denota la interacción residual que en el caso de que se considere ausencia de reacciones directas no se toma en cuenta.

Para el cálculo de los promedios, se postula que las cantidades ψ^c y $\langle \psi_{m\mu} | V | \psi_{n\nu} \rangle$ son variables aleatorias con distribución Gaussiana centrada en cero. Sus distribuciones están completamente especificadas por sus segundos momentos que se proponen así

$$\begin{aligned} \overline{\psi_{m\mu}^c \psi_{m'\mu'}^c} &= \delta_{cc'} \delta_{mm'} \delta_{\mu\mu'} (\overline{\psi_m^c})^2 \\ \langle \psi_{m\mu} | V | \psi_{n\nu} \rangle \overline{\psi_{m'\mu'}^c} &= 0, \\ \langle \psi_{m\mu} | V | \psi_{n\nu} \rangle \langle \psi_{n'\nu'} | V | \psi_{m'\mu'} \rangle &= (\delta_{m,\mu,n,\nu; m',\nu',\mu'} + \delta_{m,\nu,n,\nu'; m',\mu',\mu}) \overline{\psi_{mn}}^2 \end{aligned} \quad (\text{AI-21})$$

Estas suposiciones son consistentes con el postulado de que el Hamiltoniano nuclear tiene distribución de sus elementos de matriz dado por TBRE que implica que los elementos de matriz $\langle \psi_{m\mu} | V | \psi_{n\nu} \rangle$ se anulan a menos que $|m - n| = 2$

El resultado central para la sección eficaz promedio al orden más importante en el parámetro γ , es

$$\overline{|S_{ab}^a|^2} = (1 + \delta_{ab}) \sum_{m,n} T_m^a \Pi_{mn} T_m^b \quad (\text{AI-22})$$

Aquí T_m^a es el coeficiente de transmisión asociado a la transición desde el canal a al estado de m exitones, Π_{mn} se puede interpretar como la probabilidad relativa de alcanzar la clase m desde la n ; obedece la ecuación de balance de probabili-

dad. En el caso especial, de que una sola clase de niveles - contribuyan a la reacción (ausencia de emisiones de preequilibrio) se tiene el resultado siguiente

$$\sigma_{ab}^H = |\overline{S_{ab}^H}|^2 = (1 + S_{ab}) \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \quad (\text{AI.23})$$

que es precisamente la fórmula de Hauser - Feshbach en factor de agrandamiento elástico igual a 2, como predice Vager.

Apéndice II.1 Prueba de la ecuación II.53

Para integrar la función

$$p(R_{11}, \dots, R_{1n}) \propto \delta(1 - \sum_{i=1}^k R_{1i}^2) \delta(1 - \sum_{i=k+1}^n R_{1i}^2) \delta(\sum_{i=1}^n R_{1i} R_{2i}), \quad (\text{AII.1})$$

sobre los $n - k$ elementos de matriz de cada renglón definimos los vectores

$$\begin{aligned} \underline{r}_i &= (R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{in}) \\ \underline{r}_i' &= (R_{i, k+1}, \dots, R_{in}) \end{aligned} \quad (\text{AII.2})$$

y los escalares

$$\alpha_{i1}^2 = 1 - r_i^2, \quad \alpha_{i2} = \underline{r}_i \cdot \underline{r}_i' \quad m = n - k \quad (\text{AII.3})$$

La función de distribución que buscamos viene dada por la integral

$$p(\underline{r}_1, \underline{r}_1') = \int \delta(\alpha_{11}^2 - r_1^2) \delta(\alpha_{12}^2 - r_1'^2) \delta(\alpha_{12} - \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_1') d^m r_1' d^m r_1 \quad (\text{AII.4})$$

Haremos coincidir el vector \underline{r}_1' con el eje Z del espacio n dimensional, de manera que si expresamos en coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned} \underline{r}_1' &= r_1' (1, 0, \dots, 0) \\ \underline{r}_1 &= r_1 (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (\text{AII.5})$$

$$d^m r_1' = r_1'^{m-1} dr_1' d\Omega, \quad d^m r_1 = r_1^{m-1} dr_1 d\Omega$$

La integración es inmediata y se obtiene el siguiente resultado (\odot es la función escalón usual).

$$\begin{aligned}
 p(\underline{r}_1, \underline{r}_2) &\propto (a_1^2 a_2^2 - \alpha_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \Theta(a_1^2) \Theta(a_2^2) \\
 &\propto (1 - r_1^2 - r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - (r_1 \cdot r_2)^2)^{\frac{n-k-3}{2}} \Theta(1-r_1^2) \Theta(1-r_2^2)
 \end{aligned}
 \tag{AII.6}$$

Apéndice II.2 Prueba de la ecuación II.75

tenemos la función

$$\begin{aligned}
 p\left(\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right) &\propto e^{-(\beta_{11} R_{11} + \beta_{22} R_{22})} \left[1 - R_{11}^2 - R_{12}^2 - R_{21}^2 - R_{22}^2 + (R_{11}^2 + R_{12}^2)(R_{21}^2 + R_{22}^2) \right. \\
 &\quad \left. - (R_{11} R_{21} + R_{12} R_{22})^2 \right]^{\frac{n-5}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{AII.7}$$

para encontrar una aproximación de esta expresión en el límite n grande, procedemos de la misma manera que en los otros casos considerados en el texto, es decir, reescribimos el factor en paréntesis cuadrado como la exponencial de un logaritmo, tomamos

$$R_{11} = \bar{R}_{11} + \xi_{11} \quad \text{y} \quad R_{22} = \bar{R}_{22} + \xi_{22}
 \tag{AII.8}$$

y expandimos el logaritmo en serie de potencias de ξ_{11} y ξ_{22} (suponiendo que $\xi_{\alpha\alpha}$, $R_{\alpha\alpha} \approx O(n^{-1})$) se tiene la aproximación siguiente

$$\begin{aligned}
 p\left(\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right) &\approx \exp \left\{ -\frac{n}{2} \left[\frac{1 + \bar{R}_{11}^2}{(1 - \bar{R}_{11}^2)^2} \xi_{11}^2 + \frac{1 + \bar{R}_{22}^2}{(1 - \bar{R}_{22}^2)^2} \xi_{22}^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{R_{11}^2 + R_{21}^2 + 2\bar{R}_{11}\bar{R}_{22}R_{12}R_{21}}{(1 - \bar{R}_{11}^2)(1 - \bar{R}_{22}^2)} \right] \right\} + O(n^{-1})
 \end{aligned}
 \tag{AII.9}$$

Para diagonalizar la expresión bilineal en R_{12} y R_{21} , observemos que

$$(R_{11}, R_{21}) \begin{pmatrix} 1 & \bar{R}_{11} \bar{R}_{21} \\ \bar{R}_{11} \bar{R}_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{21} \end{pmatrix} = R_{12}^2 + R_{21}^2 + 2\bar{R}_{11} \bar{R}_{21} R_{12} R_{21}$$

$$rGr^T \equiv \quad \quad \quad \text{(AII.10)}$$

$$\text{(AII.11)}$$

considerando que

$$rGr^T = rODO^T r^T = r'Dr'^T = D_1 R_{11}^2 + D_2 R_{21}^2 \quad \text{(AII.12)}$$

todo lo que se necesita es encontrar la matriz ortogonal O que diagonalice a G. Para esto resolvemos la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1-D & \bar{R}_{11} \bar{R}_{21} \\ \bar{R}_{11} \bar{R}_{21} & 1-D \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(AII.13)}$$

y obtenemos los eigenvalores

$$D_i = 1 + (-)^i \bar{R}_{11} \bar{R}_{21} \quad i=1,2 \quad \text{(AII.14)}$$

y eigenvectores

$$V_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-)^i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i=1,2 \quad \text{(AII.15)}$$

de manera que

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(AII.16)}$$

Si tomamos en cuenta que $\Gamma = \Gamma' O^T$, $\text{Var } R'_{12} = \frac{P_1 P_2}{2D_1}$, $\text{Var } R'_{21} = \frac{P_2 P_1}{2D_2}$, es claro que

$$\text{Var } R_{12} = \text{Var } R'_{12} O_{12}^2 + \text{Var } R'_{21} O_{21}^2 = \frac{P_1 P_2}{2(1 - \bar{R}_{11}^L \bar{R}_{22}^L)} \quad (\text{AII.17})$$

además

$$\text{Var } R_{12} = \text{Var } R_{21} \quad (\text{AII.18})$$

Por tanto

$$p \left(\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right) \propto \exp \left\{ -\frac{\eta}{2} \left[\frac{1 + \bar{R}_{11}^L}{(1 - \bar{R}_{11}^L)^2} \xi_{11}^2 + \frac{1 + \bar{R}_{22}^L}{(1 - \bar{R}_{22}^L)^2} \xi_{22}^2 + \frac{2(1 - \bar{R}_{11}^L \bar{R}_{22}^L)}{(1 - \bar{R}_{11}^L)(1 - \bar{R}_{22}^L)} (R_{12}^2 + R_{21}^2) \right] + O(\eta^1) \right\} \quad (\text{AII.19})$$

Apéndice II.3 función de distribución para el elemento R_{11} cuando se tiene "absorción fuerte en todos los canales"

En este caso, queremos calcular la integral

$$p(R_{11}') \propto \int \delta(R_{11} - R_{11}') e^{-\sum_i \beta_{ii} R_{ii}} \frac{dh(R)}{dh(R)} \quad (\text{AII.20})$$

La función de densidad está normalizada. Supongamos que en el límite de absorción fuerte en todos los canales sea válido --- aproximar la exponencial por su expansión a segundo orden en β_{ii} , entonces

$$p(R'_n) \approx \int \delta(R_n - R'_n) \bar{e}^{\beta_n R_n} \left(1 - \sum_{i \neq 1} \beta_{ii} R_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i, j \neq 1} \beta_{ij} \beta_{ji} R_{ii} R_{jj} \right) \frac{dh(R)}{\int dh(R)}$$

(AII.21)

en principio es posible considerar que en el canal 1 se tiene absorción arbitraria, por esta razón se conserva completa la exponencial en R_{11} .

Si tomamos en cuenta que:

$$a) \sum_{i \neq 1} \beta_{ii} \int \delta(R_n - R'_n) R_{ii} dh(R) = 0 ;$$

(AII.22)

$$b) \sum_{\substack{i, j \\ \neq 1}} \longrightarrow \sum_{\substack{i \neq j \\ \neq 1}} + \sum_{\substack{i=j \\ \neq 1}}^{\circ}$$

se tiene la integral

$$p(R'_n) = \int \delta(R_n - R'_n) \bar{e}^{\beta_n R_n} \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \beta_{ii}^2 R_{ii}^2 \right) \frac{dh(R)}{\int dh(R)}$$

(AII.23)

$$= \frac{1}{\int dh(R)} \left[\int \delta(R_n - R'_n) \bar{e}^{\beta_n R_n} dh(R) + \right.$$

(AII.24)

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \beta_{ii}^2 \int \delta(R_n - R'_n) \bar{e}^{\beta_n R_n} R_{ii}^2 dh(R) \right]$$

Es evidente que si se tiene la función de distribución $p(R_{11}, R_{22})$, la expresión anterior se reduce y toma la forma simple

$$p(R_{11}) \propto e^{-\beta_{11} R_{11}} \int p(R_{11}, R_{22}) \left[1 + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} R_{22}^i \right] dR_{22} \quad (\text{AII.25})$$

Antes de continuar, debemos obtener la función de distribución de R_{11} y R_{22} ; para esto es necesario realizar la integral

$$p_0(R_{11}, R_{22}) = \int p_0 \left(\frac{R_{11}}{R_{21}}, \frac{R_{22}}{R_{21}} \right) dR_{12} dR_{21} \quad (\text{AII.26})$$

en donde $p_0 \left(\frac{R_{11}}{R_{21}}, \frac{R_{22}}{R_{21}} \right)$ es la función de distribución calculada en el apéndice AII.2 con $k = 2$. Si definimos

$$\begin{aligned} A &\equiv 1 - R_{11}^2 - R_{22}^2 + R_{11}^2 R_{22}^2 - R_{12}^2 & ; & \quad D = -2 R_{11} R_{22} R_{21} \\ E &\equiv 1 - R_{21}^2 & ; & \quad \mu = \frac{u-v}{2} \end{aligned} \quad (\text{AII.27})$$

entonces

$$\begin{aligned} p_0(R_{11}, R_{22}) &\propto (-)^{\dagger} \int E^{\dagger} \left(R_{12}^2 - \frac{D}{E} R_{12} - \frac{A}{E} \right)^{\dagger} dR_{12} dR_{21} \quad (\text{AII.28}) \\ &\propto \int E^{\dagger} dR_{21} \int_u^v (R_{12} - u)^{\dagger} (v - R_{12})^{\dagger} dR_{12} \end{aligned}$$

en donde u y v son las raíces menor y mayor de

$$R_{12}^2 - \frac{D}{E} R_{12} - \frac{A}{E} = 0 \quad (\text{AII.29})$$

integrando sobre R_{12} obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(R_{11}, R_{22}) &\propto \int E^{\nu} (\sigma-u)^{2\nu+1} B(\nu+1, \nu+1) dR_{21} \\ &\propto \int (1-R_{21}^2)^{\nu-1} [G + H R_{21}^2 + R_{21}^4]^{\frac{2\nu+1}{2}} dR_{21} \end{aligned} \quad (\text{AII.30})$$

donde

$$G = 1 - R_{11}^2 - R_{22}^2 - R_{11}^2 R_{22}^2 ; \quad H = R_{11}^2 + R_{22}^2 - 2 \quad (\text{AII.31})$$

La integral en (AII.30), se puede reescribir en la siguiente forma

$$\phi(R_{11}, R_{22}) \propto \int (1-R_{21}^2)^{\nu-1} (R_{21}^2 - 1 + R_{11}^2) (R_{21}^2 - 1 + R_{22}^2)^{\nu+\frac{1}{2}} dR_{21} \quad (\text{AII.32})$$

Para, nuestro uso en (AII.25), nos basta esta expresión para $P_0(R_{11}, R_{22})$. Solo por completar calcularemos también la integral sobre R_{21} . En primer lugar señalemos que el dominio de integración está definido por las relaciones

$$\begin{aligned} R_{21}^2 &\leq 1 - R_{11}^2 = \alpha^2 \\ R_{21}^2 &\leq 1 - R_{22}^2 = \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{AII.33})$$

de manera que

$$\begin{aligned}
 p(R_{11}, R_{21}) \propto & \left[s(\alpha - \gamma) \int_0^{\delta} (1 - R_{21}^2)^{-\beta-1} (R_{21}^2 - \alpha^2)^{\beta+\frac{1}{2}} (R_{21}^2 - \gamma^2)^{\beta+\frac{1}{2}} dR_{21} + \right. \\
 & \left. + s(\gamma - \alpha) \int_0^{\alpha} (1 - R_{21}^2)^{-\beta-1} (R_{21}^2 - \alpha^2)^{\beta+\frac{1}{2}} (R_{21}^2 - \gamma^2)^{\beta+\frac{1}{2}} dR_{21} \right]
 \end{aligned}
 \tag{AII.34}$$

con

$$s(\alpha - \gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma < \alpha \\ 0 & \gamma > \alpha \\ \frac{1}{2} & \gamma = \alpha \end{cases}
 \tag{AII.35}$$

la integración es inmediata y se tiene

$$\begin{aligned}
 p_0(R_{11}, R_{21}) \propto & \left\{ s(\alpha - \gamma) (1 - R_{21}^2)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, -\beta - \frac{1}{2}, \beta + 1, \beta + \frac{3}{2}; \delta^2, \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right) + \right. \\
 & \left. + s(\gamma - \alpha) (1 - R_{21}^2)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, -\beta - \frac{1}{2}, \beta + 1, \beta + \frac{3}{2}; \alpha^2, \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{AII.36}$$

Retornemos ahora a nuestro problema, utilizaremos para $p_0(R_{11}, R_{21})$ la representación que tenemos en (AII.32), la cual substituímos en (AII.25). La integración es inmediata si antes de integrar sobre R_{21} se integra sobre R_{22} . Se obtiene así que

$$p(R_n) \propto \bar{e}^{\beta_n R_n} p_0(R_n) \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\beta_n} \beta_{kk}^2 \frac{n-2+R_n^2}{(n-1)^2} + \dots \right]
 \tag{AII.37}$$

Apéndice II.4. Prueba de la ecuación II.88.

La densidad de probabilidad conjunta para los primeros k elementos del primer y segundo renglones, pueden obtenerse por integración de la ecuación (II.86) sobre las $2(n-k)$ restantes. Para empezar escribiremos la densidad de probabilidad conjunta de los dos primeros renglones como

$$p_2 \left(\begin{matrix} U_{11}, \dots, U_{1n} \\ U_{21}, \dots, U_{2n} \end{matrix} \right) = \delta(1 - |R_1|) \delta(1 - |R_2|) \delta(R_1 \cdot R_2) \cdot \delta(R_1 \cdot MR_2) \quad (\text{AII.38})$$

$$R_a \equiv (x_{a1}, y_{a1}, \dots, x_{an}, y_{an}) \quad (\text{AII.39})$$

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AII.40})$$

Ahora es conveniente separar las variables que se integran y -- las que no se integran. Con este propósito definimos los vectores

$$R'_a \equiv (x_{a1}, y_{a1}, \dots, x_{ak}, y_{ak}) \quad (\text{AII.41})$$

$$R''_a \equiv (x_{a,k+1}, y_{a,k+1}, \dots, x_{an}, y_{an})$$

tal que $R_a = (R'_a, R''_a)$ y $MR_a = (M'R'_a, M''R''_a)$. M' y M'' se escogen adecuadamente y se tiene

$$p_0 \left(\begin{matrix} R_1', R_1'' \\ R_1', R_1'' \end{matrix} \right) = \delta(1 - |R_1'|^2 - |R_1''|^2) \delta(1 - |R_1'|^2 - |R_1''|^2) \delta(R_1' R_1' + R_1'' R_1'') \cdot \delta(R_1' M' R_1' + R_1'' M'' R_1'') \quad (\text{AII.42})$$

Para integrar expresemos R_1' y R_1'' en coordenadas esféricas, así

$$p \left(\begin{matrix} R_1' \\ R_1' \end{matrix} \right) = \int \dots \int \delta(a_1^2 - R_1'^2) \delta(a_2^2 - R_1''^2) \delta(\alpha + R_1' R_1'') \delta(\beta + R_1'' M' R_1'') \cdot R_1'^{2m-1} dR_1' d^{(2m)}\Omega_1 R_1''^{2m-1} dR_1'' d^{(2m)}\Omega_2 \quad (\text{AII.43})$$

donde

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1 - R_1'^2, & m &= n-k \\ \alpha &= R_1' R_1', & \beta &= R_1' M' R_1' \end{aligned} \quad (\text{AII.44})$$

$$d^{(2m)}\Omega_a = (\sin \theta_a)^{2m-2} d\theta_a (\sin \varphi_a)^{2m-2} d\varphi_a \dots$$

Como no todas las variables angulares están involucradas en las funciones delta, escribiremos explícitamente solamente aquellas que supuestamente están, es decir

$$d^{(2m)}\Omega_a = (\sin \theta_a)^{2m-2} d\theta_a d\omega_a \quad (\text{AII.45})$$

En el procedimiento de integración comenzamos evaluando la siguiente integral

$$I = \int \delta(\alpha - \underline{a} \cdot \underline{r}) \delta(\beta - \underline{b} \cdot \underline{r}) d^{(m)}\Omega \quad (\text{AII.46})$$

donde \underline{a} y \underline{b} son cualesquiera dos vectores y \underline{x} un vector real de dimensión n cuya orientación se integra, después de expresarlo en coordenadas esféricas. No existe problema alguno, y es conveniente, alinear por ejemplo el vector \underline{a} con el "eje z " de tal manera que

$$\underline{a} = a (1, 0, \dots, 0)$$

$$\underline{b} = b (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0)$$

$$\underline{r} = r (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \dots, \sin \varphi_{m-2})$$

(AII.47)

$$d^{(m)}\Omega = (\sin \theta)^{m-2} d\theta d\omega$$

obteniéndose para I el siguiente resultado

$$I = \frac{(\sin \theta_0)^{3m}}{a b r^2} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{ar} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{br} \right)^2 - \frac{2\alpha\beta}{abr^2} \cos \theta_0 \right]^{\frac{m-4}{2}}$$

(AII.48)

Utilizando este resultado en nuestra integral principal, ésta se reduce a

$$p(R_i) \propto \int \dots \int \delta(a^2 - R_i^2) \delta(a^2 - R_i'^2) \frac{[\sin(R_i, M R_i')]}{R_i' |M R_i'| R_i'^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{R_i' R_i} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{|M R_i'| R_i} \right)^2 - \frac{2\alpha\beta \cos(R_i, M R_i')}{R_i'^2 R_i' |M R_i'|} \right]^{m-2} \cdot R_i'^{2m-1} R_i^{2m-1} dR_i' dR_i dQ_i^{(2m)}$$

(AII.49)

aquí, se puede ver que

$$\cos (R_i'', M'' R_i'') = \frac{R_i'' \cdot M'' R_i''}{|R_i''| |M'' R_i''|} = 0. \quad (\text{AII.50})$$

y la integral toma la forma

$$p(R_i') \propto \int \dots \int \delta(a_i^2 - R_i'^2) \delta(a_i^2 - R_i''^2) (R_i'' R_i')^{2m-3} \left[1 - \frac{a_i^2 \beta^2}{R_i'^2 R_i''^2} \right]^{m-2} dR_i'' dR_i' \\ \propto (a_i^2 a_i^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{m-2} \Theta(a_i^2) \Theta(a_i^2) \quad (\text{AII.51})$$

$\Theta(a_i^2)$ es la función escalón usual y es importante cuando la densidad de probabilidad se usa para integrar sobre variables como U_{12} , U_{21} , por ejemplo. De otra manera no se preserva unitaridad. Finalmente, para escribir en una forma más transparente, definimos los vectores complejos

$$\underline{r}_1 = (U_{11}, \dots, U_{1k}) \\ \underline{r}_2 = (U_{21}, \dots, U_{2k}) \quad (\text{AII.52})$$

en términos de los cuales, tenemos

$$p(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \propto \Theta(1 - |\underline{r}_1|^2) \Theta(1 - |\underline{r}_2|^2) \cdot \\ \cdot [1 - |\underline{r}_1|^2 - |\underline{r}_2|^2 + |\underline{r}_1|^2 |\underline{r}_2|^2 - |\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2|^2]^{m-2} \quad (\text{AII.53})$$

Apéndice II.5. Prueba de la ecuación II.103

Queremos mostrar que cuando

$$\bar{x}_{..} = \langle x_{..} \rangle \neq 0; \quad \bar{y}_{..} = \langle y_{..} \rangle \neq 0; \quad \langle U_{12} \rangle = \dots = \langle U_{nn} \rangle = 0, \quad (\text{AII.54})$$

la densidad de probabilidad

$$p(U_{..}) = e^{-\text{Re} \beta_{..} U_{..}} (1 - |U_{..}|^2)^{n-2} \quad (\text{AII.55})$$

se aproxima por la expresión II.103 del texto. Como en los otros casos, reescribimos la densidad en la forma

$$p(U_{..}) \propto \exp \left\{ -\beta U_{..} + (n-2) \ln(1 - |U_{..}|^2) \right\} \quad (\text{AII.56})$$

Si consideramos que

$$U_{..} = \bar{x}_{..} + i \bar{y}_{..} + \xi_{..} + i \eta_{..} \quad (\text{AII.57})$$

y tomamos la expansión de la función logaritmo a orden se tiene

$$p(U_{..}) \propto \exp \left\{ -\text{Re} \beta_{..} (\xi_{..} + i \eta_{..}) + (n+2) \left[\frac{\xi_{..}^2 + \eta_{..}^2 + 2(\bar{x}_{..} \xi_{..} + \bar{y}_{..} \eta_{..})}{1 - \bar{x}_{..}^2 - \bar{y}_{..}^2} + \frac{2(\bar{x}_{..}^2 \xi_{..}^2 + \bar{y}_{..}^2 \eta_{..}^2 + 2\bar{x}_{..} \bar{y}_{..} \xi_{..} \eta_{..})}{(1 - \bar{x}_{..}^2 - \bar{y}_{..}^2)^2} \right] + O(n^{-1}) \right\} \quad (\text{AII.58})$$

La condición (AII.54) fija β_{11} y se cancela el término lineal. Tenemos entonces

$$p(U_{11}) \propto \exp \left\{ (n-2) \left[\frac{1 + \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2}{(1 - \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2)} \xi_{11}^2 + \frac{1 - \bar{x}_{11}^2 + \bar{y}_{11}^2}{(1 - \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2)} \eta_{11}^2 + \frac{2\bar{x}_{11}\bar{y}_{11}\xi_{11}\eta_{11}}{(1 - \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2)^2} \right] + O(n^{-1}) \right\} \quad (\text{AII.59})$$

Las variables ξ_{11} y η_{11} no son independientes; pero como

$$\begin{aligned} (\xi_{11}, \eta_{11}) \begin{pmatrix} p_1 p_2 & \bar{x}_{11} \bar{y}_{11} \\ \bar{x}_{11} \bar{y}_{11} & p_1 p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \eta_{11} \end{pmatrix} &= \\ &= (1 - \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2) \xi_{11}^2 + (1 + \bar{x}_{11}^2 - \bar{y}_{11}^2) \eta_{11}^2 + 2\bar{x}_{11}\bar{y}_{11}\xi_{11}\eta_{11} \end{aligned} \quad (\text{AII.60})$$

$$= u G u^T \quad (\text{AII.61})$$

Diagonalizando la matriz G y después de un análisis semejante a la del apéndice AII.2, se tiene

$$p(U) \propto \exp \left[-n \left(\frac{1+|U|}{p_1 p_2} \right)^4 (\xi_{11}^2 + \eta_{11}^2) \right] \quad (\text{AII.62})$$

de la cual resulta que

$$\sigma_{ii}^2 = \text{Var} \sum_{a=1}^n U_{ia} + \text{Var} \eta_{ii}. \quad (\text{AII.63})$$

Apéndice II.6. Prueba de la ecuación II.124.

Para determinar la densidad de probabilidad $f_0(S_n)$ dada por

$$f_0(S_n) \propto \int \delta(S_n - \sum_{a=1}^n (U_{ia})^2) \delta(1 - \sum_{a=1}^n |U_{ia}|^2) dU_{11} \dots dU_{1n} \quad (\text{AII.64})$$

$$U_{ab} = x_{ab} + iy_{ab} \quad dU_{ab} = dx_{ab} dy_{ab} \quad (\text{AII.65})$$

definimos los vectores:

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \\ \underline{y}_i &= (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}) \end{aligned} \quad (\text{AII.66})$$

y los expresamos en coordenadas esféricas para tener

$$\begin{aligned} f_0(S_n) &= \int \delta(x_{ii} - x_i^2 - y_i^2) \delta(y_{ii} - 2\underline{x}_i \cdot \underline{y}_i) \delta(1 - x_i^2 - y_i^2) \\ &\cdot x_i^{n-1} dx_i (\sin \theta_i)^{n-2} d\theta_i d\omega_i y_i^{n-1} dy_i (\sin \theta_i)^{n-2} d\theta_i d\omega_i \end{aligned} \quad (\text{AII.67})$$

donde $S_{ii} = x_{ii} + iy_{ii}$ y $d\omega_i$ es una notación compacta para simbolizar la parte angular restante.

La integración puede realizarse directamente con ayuda del ya usado truco de fijar por un momento uno de los vectores a lo largo del "eje \underline{x} ", de tal manera que el ángulo relativo $(\underline{x}_i, \underline{y}_i)$ sea identificado con el correspondiente ángulo θ_a . Así obtenemos

$$f_0(S_n) \propto (1 - x_{ii}^2 - y_{ii}^2)^{\frac{n-3}{2}} = (1 - |S_{ii}|^2)^{\frac{n-3}{2}} \quad (\text{AII.68})$$

Apéndice II.7. Prueba de la ecuación I.135

Para obtener la densidad de probabilidad conjunta de los elementos $\{S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}\}$ debemos realizar la siguiente integral

$$p_0 \left(\begin{matrix} S_{11}, S_{12} \\ S_{21}, S_{22} \end{matrix} \right) = \int \prod_{i=1}^2 \delta(S_{ii} - \sum_c (U_{ic})^2) \prod_{i=1}^2 \delta(1 - \sum_c |U_{ic}|^2) \cdot \\ \cdot \delta(S_{12} - \sum_c U_{1c} U_{2c}) \delta(S_{21} - \sum_c U_{2c} U_{1c}) \\ \delta(\sum_c (x_{1c} x_{2c} + y_{1c} y_{2c})) \delta(\sum_c (x_{1c} y_{2c} - x_{2c} y_{1c})) dU_{11} \dots dU_{2n} \quad (\text{AII.69})$$

Donde nuevamente $U_{ab} = x_{ab} + i y_{ab}$. Definiendo los vectores

$$\underline{x}_a = (x_{a1}, x_{a2}, \dots, x_{an}) \quad a = 1, 2, \\ \underline{y}_a = (y_{a1}, y_{a2}, \dots, y_{an}) \quad a = 1, 2, \quad (\text{AII.70})$$

y expresando en coordenadas esféricas, escribimos la densidad de probabilidad conjunta como

$$p_0 \left(\begin{matrix} S_{11}, S_{12} \\ S_{21}, S_{22} \end{matrix} \right) = \int \delta(y_{n-2} z \underline{x}_1 \underline{y}_1) \delta(x_{12} - \underline{x}_1 \underline{x}_2 + \underline{y}_1 \underline{y}_2) \delta(y_{12} - \underline{y}_1 \underline{x}_2 - \underline{x}_1 \underline{y}_2) \cdot \\ \cdot \delta(x_{12} - \underline{x}_1 \underline{x}_2 + \underline{y}_1 \underline{y}_2) \delta(y_{21} - \underline{y}_1 \underline{x}_2 - \underline{x}_1 \underline{y}_2) \delta(y_{22} - z \underline{x}_2 \underline{y}_2) \\ \cdot \delta(\underline{x}_1 \underline{x}_2 + \underline{y}_1 \underline{y}_2) \delta(\underline{x}_1 \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \underline{x}_2) \delta(x_{11} - \underline{x}_1^2 + \underline{y}_1^2) \delta(x_{22} - \underline{x}_2^2 + \underline{y}_2^2) \\ \cdot \delta(1 - \underline{x}_1^2 - \underline{y}_1^2) \delta(1 - \underline{x}_2^2 - \underline{y}_2^2) \underline{x}_1 d\underline{x}_1 d\underline{Q}_{x_1} \dots \underline{y}_2 d\underline{y}_2 d\underline{Q}_{y_2} \quad (\text{AII.71})$$

Ahora comencemos evaluando la parte angular de \underline{y}_2 . Para esto, seleccionamos todas las funciones delta en cuyo argumento aparece el producto punto de \underline{y}_2 con los otros vectores. Así tenemos la integral

$$\begin{aligned}
 I = \int & \delta(x_{1z} - z_1 \cdot z_2 + y_1 \cdot y_2) \delta(y_{1z} - y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) \delta(x_{2z} - z_1 \cdot z_2 + y_1 \cdot y_2) \\
 & \cdot \delta(y_{2z} - y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) \delta(y_{2z} - 2 z_2 \cdot y_2) \delta(z_1 \cdot z_2 + y_1 \cdot y_2) \\
 & \cdot \delta(z_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot z_2) d\Omega_{y_2}
 \end{aligned} \tag{AII.72}$$

sea

$$\begin{aligned}
 \rho & \equiv y_{1z} & \alpha & \equiv x_{1z} - z_1 \cdot z_2 & \beta & \equiv y_{1z} - y_1 \cdot z_2 \\
 \nu & \equiv y_{2z} & \sigma & \equiv x_{2z} - z_1 \cdot z_2 & \tau & \equiv y_{2z} - y_1 \cdot z_2 \\
 \mu & \equiv y_1 \cdot z_2 & \nu & \equiv z_1 \cdot z_2
 \end{aligned} \tag{AII.73}$$

Es evidente que la integral I se reduce a

$$\begin{aligned}
 I = & \delta(\sigma - \alpha) \delta(\tau - \beta) \delta(\nu - \alpha) \delta(\mu - \beta) \int \delta(\alpha + y_1 \cdot y_2) \cdot \\
 & \cdot \delta(\beta - z_1 \cdot y_2) \delta(\nu - 2 z_2 \cdot y_2) d\Omega_{y_2}
 \end{aligned} \tag{AII.74}$$

o equivalentemente a

$$I = \delta(s_1 - s_2) \delta(\nu - \alpha) \delta(\mu - \beta) \int \delta(\alpha + y_1 \cdot y_2) \delta(\beta - z_1 \cdot y_2) \delta(\nu - 2 z_2 \cdot y_2) d\Omega_{y_2} \tag{AII.75}$$

Claramente la primera función delta es una consecuencia de la simetría de la matriz S. Para obtener la integral I necesitamos resolver la siguiente integral

$$I_1 = \int \delta(\alpha + \underline{a} \cdot \underline{r}) \delta(\beta + \underline{b} \cdot \underline{r}) \delta(\nu + \underline{c} \cdot \underline{r}) d^{(m)}\Omega_r \tag{AII.76}$$

donde \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} son cualesquier vectores y \underline{r} el vector -- real de dimensión m cuya parte angular se integra. Es conveniente fijar, por un momento, el vector \underline{a} a lo largo del "eje \hat{z} ", el vector \underline{b} en el plano definido por el "eje \hat{z} " y el -- segundo vector direccional y así sucesivamente, tal que

$$\underline{a} = a (1, 0, \dots, 0)$$

$$\underline{b} = b (\cos \theta_{ab}, \sin \theta_{ab}, 0, \dots, 0) \quad (\text{AII.77})$$

$$\underline{c} = c (\cos \theta_{ac}, \sin \theta_{ac} \cos \varphi_c, \sin \theta_{ac} \sin \varphi_c, 0, \dots, 0)$$

$$\underline{r} = r (\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi \cos \psi, \dots)$$

$$d\Omega_r = (\sin \theta)^{m-2} (\sin \varphi)^{m-3} (\sin \psi)^{m-4} d\theta d\varphi d\psi d\omega$$

Como en el apéndice AII.6, $d\omega$ es la parte angular restante y cuya integral es constante. La integración es directa, obteniéndose para I_1 el siguiente resultado

$$I_1 \propto \frac{[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{\frac{n-5}{2}}}{abc r^3 \sin \theta_{ab} \sin \theta_{ac} \sin \varphi_c} \quad (\text{AII.78})$$

con

$$x = -\frac{\alpha}{ar} \quad (\text{AII.79})$$

$$y = -\frac{\beta + brx \cos \theta_{ab}}{\sqrt{1-x^2} br \sin \theta_{ab}}$$

$$z = -\frac{\gamma + crx \cos \theta_{ab} + cr\gamma \sqrt{1-x^2} \sin \theta_{ac} \cos \varphi_c}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} cr \sin \theta_{ac} \sin \varphi_c}$$

Si usamos este resultado para evaluar la integral que aparece - en la ecuación () donde escogemos

$$x_1 = x_1 (1, 0, \dots, 0)$$

$$y_1 = y_1 (\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0, \dots, 0)$$

$$x_2 = x_2 (\cos \theta_2, \sin \theta_2 \cos \varphi_2, \sin \theta_2 \sin \varphi_2, 0, \dots, 0) \quad (\text{AII.80})$$

$$y_2 = y_2 (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi \cos \psi, \dots)$$

esta se transforma en

$$I \propto \frac{\delta(S_{12} - S_{21}) \delta(r - \alpha) \delta(\mu - \beta)}{x_1 y_1 x_2 y_2^3 \sin^{n-4} \theta_1 \sin^{n-4} \theta_2 \sin^{n-4} \varphi_2} \cdot J(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, x_1, x_2, y_1, y_2)$$

(AII.81)

con

$$\begin{aligned} J(\theta_1, \dots, y_2) = & 1 - \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 - \left(\frac{\beta}{x_1 y_2}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) \\ & - \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 \\ & + \left(\frac{\beta}{x_1 y_2}\right)^2 (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \theta_1 \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2) \\ & - \left(\frac{\alpha}{y_1 y_2}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta_2) - \left(\frac{\gamma}{x_2 y_2}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta_1) - \frac{2\alpha\beta}{x_1 y_1 y_2^2} (\cos \theta_1 - \\ & - \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_2) + \frac{\gamma\alpha}{x_2 x_2 y_2^2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_2 \cos^2 \theta_1 - \\ & - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos \varphi_2) - \frac{\mu\beta}{y_1 x_2 y_2^2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ & + \frac{2\alpha}{x_1 y_2} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (\text{AII.82})$$

Una vez que tenemos la función I, evaluamos la integral

$$I_1 \propto \delta(S_{12} - S_{21}) \int \delta(y_{11} - 2x_1 y_1) \delta(x_{12} - 2x_1 z_2) \delta(y_{12} - y_1 z_2) \\ \cdot \frac{J(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_2)}{x_1 y_1 z_2^2 \sin^{n-4} \theta_1 \sin^{n-4} \theta_2 \sin^{n-4} \theta_2} d\Omega_{\theta_1}^{(n)} d\Omega_{\theta_2}^{(n)} d\Omega_{z_2}^{(n)} \quad (\text{AII.83})$$

que da

$$I_1 \propto \frac{\delta(S_{12} - S_{21})}{x_1^2 y_1^2 z_2^2 y_2^2} H(x_1, \dots, y_2, x_{11}, \dots, y_{22}) \quad (\text{AII.84})$$

cón

$$H(x_1, \dots, y_{22}) = \left[1 - \left(\frac{y_{11}}{2x_1 y_1} \right)^2 - \left(\frac{x_{12}}{2x_1 z_2} \right)^2 - \left(\frac{y_{12}}{2x_1 y_2} \right)^2 - \left(\frac{y_{22}}{2y_1 y_2} \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{x_{12}}{2y_1 y_2} \right)^2 - \left(\frac{y_{22}}{2x_1 z_2} \right)^2 + \frac{y_{12} y_{11} x_{12}}{4 x_1^2 y_1^2 z_2^2} + \frac{y_{12} y_{22} x_{12}}{4 x_1^2 z_2^2 y_2^2} \right. \\ \left. - \frac{x_{12} y_{12} y_{11}}{4 x_1^2 y_1^2 y_2^2} - \frac{y_{12} y_{22} x_{12}}{4 y_1^2 z_2^2 y_2^2} + \left(\frac{1}{4 x_1 y_1 z_2 y_2} \right)^2 \left(y_{12}^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + x_{12}^4 + y_{11}^2 y_{22}^2 + 2 x_{12}^2 y_{11} y_{22} - 2 y_{11}^2 y_{12}^2 y_{22} + 2 x_{12}^2 y_{12}^2 \right) \right]^{\frac{n-5}{2}}$$

(AII.85)

Finalmente, realizando la integración sobre las magnitudes tenemos, después de un poco de álgebra, el siguiente resultado para la densidad de probabilidad conjunta

$$p_0 \left(\begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right) \propto \delta(s_{11} - s_{21}) \left[1 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 - 2|s_{12}|^2 + |s_{11}s_{22} - (s_{12})^2| \right]^{\frac{n-5}{2}}$$

(AII.86)

que es la expresión que aparece en I.135.

REFERENCIAS

1. Tomado de BNL-325 2da. Ed. Supl. No.2.
2. G.Breit y E.P.Wigner, Phys. Rev. 49 (1936) 519,642.
3. C.E.Porter y R.G.Thomas, Phys.Rev. 104 (1956) 483.
4. G.M.Temmer y N.P.Heydenburg, Phys. Rev. 104 (1956) 967.
5. T.Ericson, Ann. Phys. (N.Y.) 23 (1963) 390.
6. P.A.Mello, Phys. Lett. B81 (1979) 103.
7. N.Bohr, Nature 137 (1936) 344.
8. H.B. Burrows, W.M.Gibson y J.Rotblat, Phys. Rev. 80 (1950) 1095; S.T.Butler, Phys. Rev. 80 (1950) 1095; H.H.Barshall, Phys. Rev. 86 (1952) 431.
9. H.Feshbach, C.E.Porter y V.F.Weisskopf, Phys. Rev. 96 (1954) 448.
10. L.Wolfenstein, Phys. Rev. 82 (1951) 690.
11. W.Hauser y H.Feshbach, Phys. Rev. 87 (1952) 366.
12. J.M.Blatt y V.F.Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics (John Wiley & Sons, Inc. New York, 1952).
13. T.A.Brody, J.Flores, J.B.French, P.A.Mello, A.Pandey y S.S.M.Wong, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 385.
14. A.M.Lane y J.E.Lynn, Proc. Phys- Soc. (London) Sect. A70 (1957) 557.
15. P.A.Moldauer, Phys. Rev. 123 (1961) 968.
16. A.B.Tucker, J.T.Wells y W.E.Meyerhof, Phys. Rev. 137 (1965) B1181.
17. P.A.Moldauer, Phys. Rev. 135 (1964) B642; Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1047; Phys. Rev. C11 (1975) 426, ibid, 12 (1975) 774; Statistical Theory of Neutron Nuclear Reactions, Course on nuclear theory for applications, en el Centro Internacional para Física Teórica, Trieste, Italia, 1978.
18. M.Kawai, A.K.Kerman y K.W.McVoy, Ann. of Phys. 75 (1973) 156.
19. D.Agassi, H.A.Weidenmüller y G.Mantzouranis, Phys. Reprts 22 (1975) 145.
20. P.A.Mello y T.H.Seligman, Nucl. Phys. A344 (1980) 489.
21. G.R.Satchler, Phys. Lett. 7 (1963) 55.
22. Z.Vager, Phys. Lett. 36B (1971) 269.
23. W.Kretshmer y M.Wangler, Phys. Lett. 41 (1978) 1224.
24. H.M.Hofmann, J.Richert, J.W.Tepel y H.A.Weidenmüller, Ann. of Phys. 90 (1975) 403.

25. P.A.Moldauer, Nucl. Phys. A344 (1980) 185.
26. C.A.Engelbrecht y H.A.Weidenmüller, Phys. Rev. C8 (1973) 859.
27. G.López, P.A.Mello y T.H.Seligman, Z. Phys. A302 (1981) 351.
28. J.de los Reyes, P.A.Mello y T.H.Seligman, Z. Phys. A302 (1980) 247.
29. H.Barshall, Bokelman y Seagondollar, Phys. Rev. 73 (1948) - 659. (Fe, Ni, Bi); Adair, Barshall, Bokelman y Sala, *ibid.* 75 (1949) 1124 (Be, O, Na, Ca); Bokelman, Peterson, Adair y Barshall, *ibid.* 76 (1949) 277 (Zr, Ag, In, Sb, I, Ta, Pb); Peterson, Adair y Barshall, *ibid.* 79 (1950) 935 (isótopos del plomo); Bokelman Miller, Adair, y Barshall, *ibid.* 84 (1951) 69 (Li, Be, B, C, O); Barshall, *ibid.* 86 (1952) 31 L (revisión). etc.
30. K.W.Ford y D.Bohm, Phys. Rev. 79 (1950) 745; S.T.Butler, Proc. Roy. Soc. (London) A208 (1951) 559.
31. H.Feshbach, Peaslee y Weisskopf, Phys. Rev. 71 (1947) 145.
32. F.L.Friedman y V.F.Weisskopf en Niels Bohr on the Development of Physics, Pergamon Press, London, 1955.
33. N.Bohr, P.L.Peierls y G. Placzek, Nature 144 (1939) 200.
34. M.Simonius, Phys. Lett. 52B (1974) 279.
35. J.W.Tepel, H.M.Hofmann y H.A.Weidenmüller, Phys. Lett. 49B (1974) 1.
36. T.H.Seligman, Z.Phys. A304 (1982)
37. H.M.Hofmann, J.Richert y J.W.Tepel, Ann. Phys. (N.Y.) 90 (1975) 391; M.L.Metha, Statistical Properties of Nucleous (J.B.Garg. ed.) p.179, Plenum Publishing Co. New York 1972.
38. T.J.Krieger, Ann. of Phys. (N.Y.) 42 (1967) 275.
39. L.K.Hua, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Clasical Domains, Am. Math. Soc. (Providence, Rhode Island) 1963. versión china de 1958.
40. F.Dyson, J. Math. Phys. 3 (1962) 140.
41. P.Pereyra y P.A.Mello, J. Phys. A16 (1983) 237.
42. M.Gaudin y P.A.Mello, J. Phys. 67 (1981) 1085.
43. I.S.Gradshiteyn y I.M.Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products, pgs. 284, 850, Academic Press Inc., 1980.
44. H.Cartan, Les Fonctions de deux Variables Complexes et le Probleme de la Representation Analytique, J. Math. Pures Appl. (9) 10 (1931) 1-114.
45. Loo-Keng Hua, Am. J. Math. 66 (1944) 470, 531.
46. C.Mahaux y H.A.Weidenmüller, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 29 (1979)
47. P.A.Mello, P.Pereyra y T.H.Seligman (por publicarse)
48. G.P.Lepage, J. Comput. Phys. 27 (1978) 192.