

00382
/
14

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSFORMACIONES CANONICAS EN CUANTIZACION
GEOMETRICA

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA
ARMANDO ANTILLON DIAZ

00382
1983

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1.	INTRODUCCIÓN	1
2.	TÓPICOS CLÁSICOS DE TRANSFORMACIONES CANÓNICAS	9
3.	ELEMENTOS DE CUANTIZACIÓN GEOMÉTRICA	15
4.	REPRESENTACIONES UNITARIAS A TRAVÉS DEL KERNEL DE BKS	41
5.	HOJAS DE RIEMANN DENTRO DE CUANTIZACIÓN GEOMÉTRICA	56
6.	ESPIN DE AMBIGUEDAD EN CUANTIZACIÓN GEOMÉTRICA	63
7.	ALGUNAS PERSPECTIVAS	68
	BIBLIOGRAFÍA	69

1. INTRODUCCION

Desde las primeras etapas del desarrollo de la mecánica cuántica, las transformaciones canónicas fueron muy importantes para entender la estructura de esta nueva teoría¹⁻⁵⁾, basta mencionar el ejemplo de la representación unitaria (kernel de Fourier) que transforma los estados entre los espacios de configuración y momento. Durante varios años las transformaciones canónicas quedaron relegadas y es hasta las últimas décadas en que el interés por ellas se ha despertado, ya sea por la importancia que tienen en aplicaciones directas⁶⁻¹⁹⁾, o bien por su utilidad en la cuantización geométrica²⁰⁻²⁸⁾.

Este trabajo se basa fundamentalmente en conceptos desarrollados por algunos de estos autores¹⁵⁻¹⁹⁾ en el marco del lenguaje clásico de la mecánica cuántica y su extensión al formalismo de cuantización geométrica. Dos de ellos, Moshinsky y Seligman, han estudiado en forma sistemática las transformaciones canónicas NO BIYECTIVAS y sus representaciones en mecánica cuántica¹⁶⁻¹⁸⁾, así como la estructura de los espacios fases involucrados en la transformación¹⁹⁾. Uno de los objetivos del presente trabajo es indagar a que nivel surgen en cuantización geométrica conceptos como espín de ambigüedad y estructura de hojas de Riemann, que los autores anteriores introducen. Dada una transformación canónica no biyectiva $\bar{p} = \bar{p}(p, q)$, $\bar{q} = \bar{q}(p, q)$; $\{\bar{p}, \bar{q}\} = 1$, los operadores $\hat{\bar{p}}$, $\hat{\bar{q}}$ asociados a las variables \bar{p}, \bar{q} del espacio fase original tienen espectro continuo de $-\infty$ a $+\infty$.

En general, los operadores \hat{p} , \hat{q} asociados al nuevo espacio, tienen espectro muy diferente por lo que a primera vista parece imposible encontrar un operador unitario tal que

$$\hat{p} = u \hat{p} u^{-1} \quad , \quad \hat{q} = u \hat{q} u^{-1} \quad (1.1)$$

Se ha observado que aún en la mecánica clásica la no biyectividad de la transformación implica la existencia de un grupo de ambigüedad, i.e. un grupo de transformaciones que deja invariantes las variables \bar{p} , \bar{q} . Así, la biyectividad se ha recobrado introduciendo una estructura de hojas de Riemann en los espacios fase en forma análoga a las funciones multivaluadas sobre el plano complejo. También con el auxilio del espín de ambigüedad, índice que etiqueta la representación irreducible del grupo de ambigüedad, estos autores han conservado la estructura de una hoja en los espacios fases y la no biyectividad la han mandado a las funciones sobre los espacios, que se representan ahora como espinores.

Para el problema mencionado en la ecuación (1.1) el espín de ambigüedad permite hacer más grande el espacio de Hilbert y extender el espectro de \bar{p} , \bar{q} , de tal forma que coincida con el de p , q .

Por otro lado, la cuantización geométrica trata de entender las estructuras matemáticas necesarias para cuantizar un sistema clásico. Empezando con un espacio fase clásico, que en términos geométricos es una variedad simpléctica,

uno busca construir un espacio de Hilbert y el espacio de operadores para la teoría cuántica, de tal forma que no dependa explícitamente de un sistema de coordenadas particular. Más ambicioso sería poder aplicar cuantización geométrica a sistemas en los que la forma normal de cuantización no resulta obvia como en espacios con curvatura. Es en este contexto en el que queremos analizar las transformaciones canónicas no biyectivas.

Las transformaciones canónicas y sus representaciones en mecánica cuántica han sido estudiadas por varios autores^{6,11,15-18,30}). Uno de estos trabajos¹⁵⁾ presenta la representación unitaria como la solución de un par de ecuaciones diferenciales (ecuaciones M-M) parciales. En muchos casos estas ecuaciones son difíciles, no sólo de resolver, sino también de expresar explícitamente, debido a que surgen de la construcción de operadores autoadjuntos. En algunos casos de transformaciones no biyectivas, ha sido posible incorporar también el espín de ambigüedad en estas ecuaciones³¹⁾.

La comprensión matemática, soñada, de la mecánica cuántica engloba la correspondencia entre ésta y la teoría clásica. A este respecto, aún quedan algunas preguntas sin una respuesta definitiva, como el caso de si, a una transformación canónica dada, le corresponde una transformación unitaria en el espacio de Hilbert de estados cuánticos. Al parecer, esto fue tomado como un principio por los fundadores de la mecánica cuántica. Actualmente el problema no ha

sido sistemáticamente investigado, y no existe ningún algoritmo que permita enviar una transformación canónica en una unitaria. En conexión con esto, en este trabajo se ha buscado una respuesta en dos direcciones diferentes, pero no se ha logrado obtener algo definitivo. Una a través de la descomposición de la transformación canónica en una secuencia de transformaciones puntuales y de Fourier, y otra vía el kernel de Blattner-Kostant-Sternberg que surge en la cuantización geométrica.

El contenido de este trabajo lo podemos bosquejar como sigue. En el capítulo 2 se presenta la idea de que las secuencias infinitas de transformaciones puntuales y de Fourier, alternados, son densas en el conjunto de transformaciones canónicas, y se investiga si las ecuaciones Mello-Moshinsky nos dan un homomorfismo para estas sucesiones. En el capítulo 3 describimos someramente algunos métodos recientes que permiten relacionar, con objetos geométricos, las mecánicas clásica y cuántica. La cuantización de una variedad simpléctica (X, ω) consiste básicamente en encontrar un mapeo que mande observables clásicas $f \in C^\infty(X)$ a operadores autoadjuntos \hat{f} sobre un espacio de Hilbert H tal que: i) $\widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g}$; ii) $\widehat{(\lambda f)} = \lambda \hat{f}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; iii) $\widehat{\{f, g\}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{g}]$; iv) $\hat{1} = I$ ($1 =$ función constante; $I =$ operador identidad).

El espacio fase X tiene un elemento natural de volumen $|\omega^n|$ y un espacio de Hilbert $L^2(X)$ de funciones complejas sobre X de cuadrado integrable, con

producto interior $\langle \varphi, \psi \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \int_X \bar{\varphi} \psi |\omega|$; $\varphi, \psi \in L^2(X)$

Cada observable clásica f actúa sobre $L^2(X)$ como un operador simétrico bajo la correspondencia $f: \varphi \mapsto -i\hbar \mathfrak{z}_f \varphi$.

Aunque el mapeo $f \mapsto -i\hbar \mathfrak{z}_f$ satisface las reglas de cuantización, su kernel es distinto de cero, por lo cual no es isomorfismo. Esto puede tratarse de corregirse agregando otro término en la forma $\varphi \mapsto -i\hbar \mathfrak{z}_f \varphi + f\varphi$.

La constante actúa sobre $L^2(X)$ por multiplicación, pero la condición iii) ya no se cumple. Si uno aún fuerza el razonamiento agregando otro término $\hat{f} = -i\hbar [\mathfrak{z}_f - \frac{i}{\hbar} (\mathfrak{z}_f \lrcorner \theta)] + f$

donde θ es la 1-forma canónica, la condición iii) se cumple, pero aún persiste otra dificultad. La construcción de \hat{f} depende de la elección de θ y por lo tanto \hat{f} no puede definirse globalmente, a menos que ω sea exacta. Un escape de esta contrariedad es permitir transformaciones de norma:

si $\theta' = \theta + du$, $\varphi' = e^{\frac{i}{\hbar}u} \varphi$ por lo que $\hat{f}\varphi' = -i\hbar [\mathfrak{z}_f \varphi' - \frac{i}{\hbar} (\mathfrak{z}_f \lrcorner \theta') \varphi'] + f\varphi' = e^{\frac{i}{\hbar}u} \{-i\hbar [\mathfrak{z}_f \varphi - \frac{i}{\hbar} (\mathfrak{z}_f \lrcorner \theta) \varphi] + f\varphi\}$

Como las amplitudes de transición son invariantes, \hat{f} es independiente de la forma 1-forma canónica. Pero u se determina de θ y θ' excepto una constante de adición, luego hay una ambigüedad en la fase de φ' Esto

puede ordenarse un poco, haciendo actuar \hat{f} , no sobre funciones, sino sobre secciones de un haz lineal hermitiano sobre

X . Este espacio de secciones es demasiado grande. Una forma de restringirlo es considerar únicamente secciones que sean constantes en ciertas direcciones, y por esto es necesario introducir el concepto de polarización. Se puede construir ade-

más un apareamiento entre objetos asociados a diferentes polarizaciones, cuando se cumple una condición apropiada de transversalidad.

En el capítulo 4 tratamos de hacer la conexión entre el apareamiento antes mencionado, conocido como kernel de BKS, y las representaciones unitarias. Dada la transformación canónica

$\bar{q} = \bar{q}(p, q)$, $\bar{p} = \bar{p}(p, q)$, F_q y $F_{\bar{q}}$ son las polarizaciones generadas por los campos Hamiltonianos \mathcal{H}_q y $\mathcal{H}_{\bar{q}}$. Los espacios de representaciones $\mathcal{H}_q = \Gamma(L \otimes \wedge^1 F_q)$ y $\mathcal{H}_{\bar{q}} = \Gamma(L \otimes \wedge^1 F_{\bar{q}})$ están asociados a F_q y $F_{\bar{q}}$.

En el kernel de BKS es necesario construir secciones $\lambda_q, \lambda_{\bar{q}}$ de L que son covariantemente constantes sobre F_q y $F_{\bar{q}}$.

λ_q cumple con esta condición si se escoge la conexión en la forma $\nabla \lambda_q = -i \theta \otimes \lambda_q$. Para construir $\lambda_{\bar{q}}$ tal que $\nabla_{\mathcal{H}_{\bar{q}}} \lambda_{\bar{q}} = 0$, se expresa $\lambda_{\bar{q}}$ en términos de λ_q : $\lambda_{\bar{q}} = f \lambda_q$ y se encuentran dos ecuaciones diferenciales de primer orden $\mathcal{H}_{\bar{q}} f = i p b f$ y $\mathcal{H}_p f = i(p d - \bar{p}) f$ que determinan f a través de

$f = \exp \left[i \int L_{\bar{p}} d\bar{q} + i \int (\mathcal{H}_{\bar{q}} \circ \theta(\mathcal{H}_{\bar{q}}) d\bar{p}) d\bar{q} - i \int \theta(\mathcal{H}_{\bar{q}}) d\bar{p} \right]$
donde $L_{\bar{p}} = \theta(\mathcal{H}_{\bar{q}}) - \bar{p}$. En la solución de varios ejercicios encontramos que el objeto importante conectado

con las representaciones unitarias, es f , y no el operador

$U: \mathcal{H}_{\bar{q}} \rightarrow \mathcal{H}_q$ inducido por el kernel de BKS a través de

$K(\sigma_{\bar{q}}, \sigma_q) = (\sigma_q | U \sigma_{\bar{q}})$.

Esto se debe a que f , excepto factores de normalización, es la representación unitaria, mientras que U ,

además de contener a f , tiene otros factores que nada tienen que ver con los que se deben agregar para tener la unitariedad. En consecuencia, la esperanza de algunos autores^{24,26}), de que el kernel de BKS induzca operadores unitarios, es errónea excepto para transformaciones canónicas lineales. También aquí exploramos los primeros términos de las secuencias de transformaciones canónicas: puntual-Fourier-puntual... y los resultados concuerdan con los que se obtienen en el capítulo 2 usando las ecs. M-M.

En el capítulo 5 usamos un ejemplo específico de transformación canónica no biyectiva para ilustrar como interviene cuantización geométrica en la estructura de hojas de Riemann. Al hacer esto sobre un ejemplo, no creemos que se pierda generalidad en el razonamiento. Básicamente lo que tenemos es que el grupo de ambigüedad determina la estructura del espacio cubriente, en nuestro caso $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$, y se hace la extensión a este espacio, de los conceptos del capítulo 3, tales como haz de marcos metaplécticos, polarización, haz de medias-formas, haz lineal complejo, conexión, etc. De esta manera, se puede construir, en relación con una hoja de Riemann, una función que hace que $\nabla_{\bar{p}} \lambda_{\bar{p}} = 0$ se cumpla. Excepto un factor de normalización, esta función es la representación de la transformación canónica. Pero necesitamos extenderla a un espacio mayor con el fin de que sea unitaria. Esto se logra construyendo una suma directa de espacios de Hilbert.

En el capítulo 6 examinamos, nuevamente en ejemplos, la forma en que interviene el espin de ambigüedad en cuantización geométrica, para hacer unitaria una representación de una trans-

formación canónica no biyectiva. Para obtener un espacio mayor $L^2(-\infty, +\infty) \otimes L^2(0, 1)$, se hace uso del grupo de ambigüedad y de sus representaciones irreducibles al nivel de las funciones que hacen la sección $\lambda_{\bar{p}}$ covariante sobre la polarización $F_{\bar{p}}$.

2. TOPICOS CLASICOS DE TRANSFORMACIONES CANONICAS

En este capítulo haremos algunas consideraciones que permitirán complementar el material desarrollado por Moshinsky y colaboradores.

En primer lugar veamos las transformaciones puntuales y biyectivas, del tipo

$$\bar{q} = \phi(q) \quad , \quad \bar{p} = \frac{p}{\phi'(q)} \quad (2.1a) \quad , \quad (2.1b)$$

Las ecuaciones Mello-Moshinsky (M-M)¹⁵ de esta transformación, son

$$\bar{q} \langle q | u | \bar{q} \rangle = \phi(q) \langle q | u | \bar{q} \rangle \quad (2.2a)$$

$$y \quad \frac{1}{2} \{ p [\phi'(q)]^{-1} + [\phi'(q)]^{-1} p \} \langle q | u | \bar{q} \rangle = i \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \langle q | u | \bar{q} \rangle \quad (2.2b)$$

A continuación mostraremos que si tomamos la representación

$$\langle q | u | \bar{q} \rangle \quad \text{por} \quad \langle q | u | \bar{q} \rangle = [\phi'(q)]^{\frac{1}{2}} \delta(\bar{q} - \phi(q)) \quad (2.3)$$

entonces las dos ecuaciones anteriores se satisfacen. La ecuación (2.2a) es trivial. La segunda ecuación toma la forma

$$-\frac{i}{2} \left[\frac{2}{\phi'(q)} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\phi''(q)}{[\phi'(q)]^2} \right] \langle q | u | \bar{q} \rangle = i [\phi'(q)]^{\frac{1}{2}} \delta'(\bar{q} - \phi(q)) = i \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \langle q | u | \bar{q} \rangle$$

y por tanto la ecuación (2.2b) también se satisface.

Nuestro interés en este tipo de transformaciones radica en que se tiene la sospecha de que las secuencias infinitas de transformaciones puntuales y de Fourier, alternadas, son densas en el conjunto de transformaciones canónicas, i.e. creemos que cualquier transformación canónica puede escribirse como una sucesión infinita de las transformaciones anteriores mencionadas. Al final de este capítulo mostraremos un ejemplo de una transformación que se deja descomponer en la forma puntual-Fourier-puntual-Fourier (PFPF). Por lo pronto tenemos el hecho interesante de que esta clase de transformaciones (PFP....) for-

man un grupo bajo aplicaciones sucesivas. Esto se debe a que la composición de dos transformaciones (PF...), tiene por representación la composición de las representaciones correspondientes. En otras palabras, las ecuaciones M-M nos dan un homomorfismo para la composición de transformaciones del tipo (PF...). Vamos a hora a trabajar este homomorfismo para casos sencillos, porque queremos conectarlos al final del capítulo con un ejemplo concreto bien conocido. Posteriormente veremos si en cuantización geométrica se preserva también esta estructura.

Para el caso de una transformación puntual seguida de una Fourier (PF), tenemos;

$$q_1 = \phi(q) \quad (2.4a) \quad q_2 = P_1 \quad (2.5a) \quad q_2 = \frac{P}{\phi'(q)} \quad (2.6a)$$

$$P_1 = \frac{P}{\phi'(q)} \quad (2.4b) \quad P_2 = -q_1 \quad (2.5b) \quad P_2 = -\phi(q) \quad (2.6b)$$

De la ecuación (2.3) sabemos que la transformación canónica dada por el sistema de ecuaciones (2.4) tiene por representación

$$H(q, q_1) = [\phi'(q)]^{1/2} \delta(q_1 - \phi(q)) \quad (2.7)$$

donde ahora usaremos la notación $H_1(q, q_1) \equiv \langle q_1 | U_1 | q \rangle$; y la representación de la ecuación (2.5) es

$$H_2(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_1 q_2} \quad (2.8)$$

Por lo tanto, si componemos (2.7) y (2.8) encontramos una representación, para las ecuaciones (2.6), dada por

$$H_2'(q, q_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(q, q_1) H_2(q_1, q_2) dq_1 = \left[\frac{\phi'(q)}{2\pi} \right]^{1/2} e^{iq_2 \phi(q)} \quad (2.9)$$

Veremos ahora que $H_2'(q, q_2)$ satisface las ecuaciones M-M correspondientes a la transformación (2.6), esto es

$$y \quad -\phi(q) H_2'(q, q_2) = i \frac{\partial}{\partial q_2} H_2'(q, q_2)$$

$$-\frac{i}{2} \left[\frac{2}{\phi'(q)} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\phi''(q)}{[\phi'(q)]^2} \right] H_2'(q, q_2) = q_2 H_2'(q, q_2)$$

El siguiente punto en complejidad es tomar las transformaciones biyectivas PFP, de la forma

$$q_1 = \phi(q) \quad (2.10) \quad q_2 = p_1 \quad (2.11a) \quad q_3 = \psi(q_2) \quad (2.12a)$$

$$p_1 = \frac{P}{\phi'(q)} \quad (2.10b) \quad p_2 = -q_1 \quad (2.11b) \quad p_3 = \frac{P_2}{\psi'(q_2)} \quad (2.12b)$$

de donde

$$q_3 = \psi\left(\frac{P}{\phi'(q)}\right) \quad (2.13a)$$

$$p_3 = -\frac{\phi(q)}{\psi'\left(\frac{P}{\phi'(q)}\right)} \quad (2.13b)$$

En este caso tenemos que

$$H_1(q, q_1) = [\phi'(q)]^{1/2} \delta(q_1 - \phi(q)) \quad (2.14a)$$

$$H_2(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_1 q_2} \quad (2.14b)$$

$$H_3(q_2, q_3) = [\psi'(q_2)]^{1/2} \delta(q_3 - \psi(q_2)) \quad (2.14c)$$

Luego, la representación unitaria para la transformación (2.13) será

$$H'_3(q, q_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(q, q_1) H_2(q_1, q_2) H_3(q_2, q_3) dq_1 dq_2 = \left[\frac{\phi'(q) (\psi')^{-1}(q_3)}{2\pi} \right] e^{i\phi(q)\psi^{-1}(q_3)} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.13) se pueden expresar más fácilmente como

$$\Psi^{-1}(q_3) = \frac{P}{\phi'(q)} \quad (2.16a)$$

$$p_3 \tilde{\Psi}'(q_3) = -\phi(q) \quad ; \quad \tilde{\Psi}' = (\psi' \circ \psi^{-1}) \quad (2.16b), (2.16c)$$

Luego, las ecuaciones M-M correspondientes son

$$-\frac{i}{2} \left[\frac{2}{\phi'(q)} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\phi''(q)}{[\phi'(q)]^2} \right] H'_3(q, q_3) = \Psi^{-1}(q_3) H'_3(q, q_3)$$

$$y \frac{i}{2} \left[2 \tilde{\Psi}'(q_3) \frac{\partial}{\partial q_3} + \tilde{\Psi}''(q_3) \right] H_3'(q, q_3) = -\phi(q) H_3'(q, q_3) \quad (2.16d)$$

$$\tilde{\Psi}'' = (\psi'_0 \psi^{-1})'$$

que se satisfacen con $H_3'(q, q_3)$ dado por la ecuación (2.15).

Para el caso de cuatro transformaciones sucesivas del tipo PPF tenemos, aparte de las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12)

$$q_4 = p_3 \quad (2.17a) \quad q_4 = - \frac{\phi(q)}{\psi' \left(\frac{p}{\phi'(q)} \right)} \quad (2.18a)$$

$$p_4 = -q_3 \quad (2.17b) \quad p_4 = -\psi \left(\frac{p}{\phi'(q)} \right) \quad (2.18b)$$

$$\text{Como} \quad H_4(q_3, q_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i q_3 q_4}$$

la representación unitaria de (2.18) será

$$\begin{aligned} H_4'(q, q_4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(q, q_1) H_2(q_1, q_2) H_3(q_2, q_3) H_4(q_3, q_4) dq_1 dq_2 dq_3 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_3'(q, q_3) H_4(q_3, q_4) dq_3 = \\ &= \left[\frac{\phi'(q)}{2\pi} \right]^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\psi^{-1})'(q_3)]^{1/2} e^{i\phi(q)\psi^{-1}(q_3) + i q_3 q_4} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Obviamente la representación (2.19) se puede escribir en una forma no integral más sencilla:

$$H_4''(q, p_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_4'(q, q_4) e^{i q_4 p_4} dq_4 = \left[\phi'(q) (\psi^{-1})'(p_4) \right]^{1/2} e^{i\phi(q)\psi^{-1}(p_4)} \quad (2.20)$$

Veremos ahora que la expresión (2.19) efectivamente cumple con las ecuaciones M-M relacionadas con la transformación

(2.18), la que, por simplicidad, escribiremos en la forma

$$q_4 \tilde{\psi}'(-p_4) = -\phi(q) \quad (2.21a)$$

$$\psi^{-1}(-p_4) = \frac{\rho}{\phi'(q)} \quad (2.21b)$$

Ahora, las ecuaciones M-M son

$$-\frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\tilde{\psi}''(-p_4) + 2 \tilde{\psi}'(-p_4) \frac{\partial}{\partial p_4} \right) \mathcal{F}(H_4'(q, q_4)) \right] = -\phi(q) H_4'(q, q_4) \quad (2.22a)$$

$$-\frac{i}{2} \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\frac{2}{\phi'(q)} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\phi''(q)}{[\phi'(q)]^2} \right) H_4'(q, q_4) \right] = \psi^{-1}(-p_4) \mathcal{F}(H_4'(q, q_4)) \quad (2.22b)$$

donde

$$\mathcal{F}(g(q, q_4)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(q, q_4) e^{-i(q\rho - q_4 p_4)} dq dq_4$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}(k(p, p_4)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(p, p_4) e^{i(q\rho - q_4 p_4)} dp dp_4$$

Los cálculos muestran que efectivamente las ecuaciones

(2.22) se satisfacen.

Aprovecharemos lo desarrollado en este capítulo para introducir ingenuamente la transformación canónica NO BIYECTIVA a variables de ángulo y acción del oscilador armónico. Es obvio que como esta transformación es no biyectiva, la expresión que obtendremos en seguida, NO SERA UNITARIA, pero mostrará el hecho de que una transformación que aparentemente nada tiene que ver con transformaciones puntuales, se puede superponer con transformaciones de la forma (PFPF). Otros autores³¹⁾ han incorporado ya, en lenguaje de ecuaciones M-M, el espín de ambigüedad, obteniendo la representación unitaria correspondiente. En el capítulo 6 se obtiene esta representación mediante cuantización geométrica. Tomemos pues, las siguientes transformaciones canónicas

$$q_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(q) q^2 \quad (2.23a) \quad q_2 = p_1 \quad (2.24a) \quad q_3 = \arctan q_2 \quad (2.25a)$$

$$p_1 = \operatorname{sg}(q) \frac{p}{q} \quad (2.23b) \quad p_2 = -q_1 \quad (2.24b) \quad p_3 = p_2 (1 + q_2^2) \quad (2.25b)$$

$$q_4 = -p_3 \quad (2.26a)$$

$$p_4 = q_3 \quad (2.26b)$$

Tomando la composición resulta

$$q_4 = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(q) (p^2 + q^2) \quad ; \quad p_4 = \operatorname{arc tan} \left(\operatorname{sg}(q) \frac{p}{q} \right) \quad (2.27a); (2.27b)$$

Como $\phi(q) = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(q) q^2$ y $\psi(q_2) = \operatorname{arc tan} q_2$, entonces, usando la ecuación (2.19) tenemos que la representación es

$$H_4^1(q, q_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sg}(q) q \operatorname{sec}^2 q_2]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \operatorname{sg}(q) q^2 \tan q_2 - i q_2 q_4} dq_2 \quad (2.28)$$

o bien, en términos de la expresión (2.20), el resultado anterior es más simple. Volveremos a este ejemplo en los capítulos 5 y 6.

3. ELEMENTOS DE CUANTIZACION GEOMETRICA²⁶⁾

Sea X variedad diferenciable y ω una 2-forma cerrada y no degenerada sobre X . La pareja (X, ω) se llama variedad simpléctica.

Un haz lineal L sobre X es una terna (L, π, X) donde:

- 1) L es una variedad C^∞ llamada el espacio total del haz.
- 2) π es un mapeo C^∞ de L sobre X
- 3) Para cada $x \in X$, la fibra en x : $L_x = \pi^{-1}(x)$ tiene estructura de un espacio vectorial complejo de dimensión uno.

4) Es localmente trivial; i.e. cada $x \in X$ debe tener una vecindad U tal que $L_U \sim U \times \mathbb{C}$. Una sección s de L ($s \in \Gamma(L)$) es un mapeo C^∞ tal que $\pi \circ s = \text{id}$, i.e. $s(x) \in L_x$, $\forall x \in X$. El conjunto de secciones de L ; $\Gamma(L)$ forman un $C^\infty(X)$ -módulo con la ley de multiplicación

$$(fs)(x) = f(x)s(x) \quad ; \quad f \in C^\infty(X), \quad s \in \Gamma(L)$$

Para definir la derivada de s en la dirección del campo vectorial ξ es necesario introducir un concepto que nos permita comparar vectores de fibras diferentes. Esto es la conexión.

Una conexión (L, ∇) de L es un mapeo $\nabla: T_x X \times \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L)$ que se denota por

$$\nabla(\xi, s) = \nabla_\xi s \quad ; \quad \xi \in T_x X, \quad s \in \Gamma(L),$$

que satisface

- a) $\nabla_{\bar{z}}(s_1 + s_2) = \nabla_{\bar{z}} s_1 + \nabla_{\bar{z}} s_2$
 b) $\nabla_{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} s = \nabla_{\bar{z}_1} s + \nabla_{\bar{z}_2} s$
 c) $\nabla_{\bar{z}} f s = f \nabla_{\bar{z}} s$
 d) $\nabla_{\bar{z}}(f s) = (\bar{z} f) s + f \nabla_{\bar{z}} s$, $f \in C^\infty(X)$

La forma de conexión de (L, ∇) es la única 1-forma α sobre $L_\pi = L - \{\text{sección } 0\}$ tal que

$$\nabla_{\bar{z}} s = 2\pi i \langle S^* \alpha, \bar{z} \rangle s(x), \quad \bar{z} \in T_x X$$

En cada fibra de L se define un producto escalar C^∞ , $(s, t): X \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto (s(x), t(x))$, $s, t \in \Gamma(L)$, llamado métrica hermitiana, que se preserva (es invariante) ante transporte paralelo, en el sentido

$$\nabla_{\bar{z}}(s_1, s_2) = (\nabla_{\bar{z}} s_1, s_2) + (s_1, \nabla_{\bar{z}} s_2)$$

La conexión (L, ∇) tiene una estructura Hermitiana invariante si y solo si $2\pi i(\kappa - \bar{\alpha})$ es exacta sobre L_π .

Como el espacio de estas secciones resulta demasiado grande para formar el espacio de representación, una forma de discriminarlas es considerar aquellas que son constantes en ciertas direcciones. Por esto es necesario el concepto de polarización.

Sea (X, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una polarización de (X, ω) es una distribución compleja involutiva $F \subseteq T_x X = TX \otimes \mathbb{C}$ de dimensión n tal que $\omega|_{F_x F_x} = 0$ y $\dim\{F_x \cap \bar{F}_x\}$ es constante.

Un marco lineal de F en $x \in X$ es

una base ordenada $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$ de F_x .
 La colección de todos los marcos lineales de F forman
 un haz fibrado principal \mathcal{BF} sobre X , con grupo estructural
 $GL(n, \mathbb{C})$. Asociado a \mathcal{BF} se tiene el haz li-
 neal complejo $\wedge^n F$. El espacio de secciones de $\wedge^n F$
 es isomorfo al espacio de funciones complejas sobre \mathcal{BF} que cum-
 plen con

$\mu^*(\underline{w}A) = [\det(A^{-1})]^{1/2} \mu^*(\underline{w})$; $\underline{w} \in \mathcal{B}_x F$, $A \in GL(n, \mathbb{C})$
 a través de

$$\mu(x) = \mu^*(w_1, \dots, w_n) \tilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{w}_n$$

donde \sim significa el dual.

Como el $(\det)^{1/2}$ es doblemente valuado, es conve-
 niente eliminar esta ambigüedad pasando al grupo doblemente cu-
 briente de $GL(n, \mathbb{C})$, llamado grupo metalinear $ML(n, \mathbb{C})$.
 $\rho: ML(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ tal que $ML(n, \mathbb{C}) = \rho^{-1}(GL(n, \mathbb{C}))$
 es el mapeo de cobertura. Explícitamente $ML(n, \mathbb{C})$ es
 un subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm(\det A)^{1/2} \end{bmatrix}; \quad A \in GL(n, \mathbb{C}),$$

y

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm(\det A)^{1/2} \end{bmatrix}\right) = A$$

Se tiene además el homomorfismo $\chi: ML(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$
 tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} ML(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\chi^2} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow \rho & & \uparrow \\ GL(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

conmuta.

Con esto se puede definir el haz de marcos metalineales \tilde{BF} como el haz fibrado principal sobre X con grupo de estructura $ML(n, \mathbb{C})$, junto con la proyección $\tau: \tilde{BF} \longrightarrow BF$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{BF} \times ML(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \tilde{BF} \\ \downarrow \tau \times \rho & & \downarrow \tau \\ BF \times GL(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & BF \end{array}$$

Asociado con \tilde{BF} se tiene el haz lineal complejo $V \wedge^n F$ sobre X , cuyas fibras son \mathbb{C} , y $ML(n, \mathbb{C})$ actúa sobre ellas con la multiplicación $\chi(A)$, $A \in ML(n, \mathbb{C})$.

El espacio de secciones $\Gamma(V \wedge^n F)$ es isomorfo al espacio de funciones complejas $C^\infty(\tilde{BF})$ que satisfacen

para $\underline{U}^\circ(\underline{W}A) = \chi(A^{-1}) \underline{U}^\circ(\underline{W})$
 $\underline{W} \in \tilde{BF}$, $A \in ML(n, \mathbb{C})$ y $\underline{U}^\circ \in C^\infty(\tilde{BF})$

Consideremos que el conjunto de campos hamiltonianos complejos $\{\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_n\}$ generan F en el conjunto abierto contractible $W \subseteq X$, y denotemos por $\underline{\xi}: W \longrightarrow BF$ el campo de marcos definido por $\underline{\xi}(x) = (\underline{\xi}_1(x), \dots, \underline{\xi}_n(x))$ para $x \in W$. Entonces existe un levantamiento de metalinear $\tilde{\underline{\xi}}: W \longrightarrow \tilde{BF}$ a un campo de marcos $\tilde{\underline{\xi}}$. Supongamos que $\underline{U}_{\tilde{\underline{\xi}}} \in \Gamma(V \wedge^n F)$ es la única sección sobre W

tal que

$$\nu_{\underline{x}}^{\circ} \cdot \frac{1}{\mu_{\underline{x}}} = 1 \quad (3.0)$$

Entonces toda $\nu \in \Gamma(V \wedge^n F)$ puede representarse sobre W como $\nu|_W = (\nu^{\circ} \cdot \frac{1}{\mu_{\underline{x}}}) \mu_{\underline{x}}$

Una sección local $\nu \in \Gamma(V \wedge^n F)$ sobre $W \subseteq X$ se dice que es covariantemente constante en F , si $\nu^{\circ} \cdot \frac{1}{\mu_{\underline{x}}}$ es constante en F , y se define por

$$(\nabla_u \nu)|_W = u(\nu^{\circ} \cdot \frac{1}{\mu_{\underline{x}}}) \mu_{\underline{x}}, \quad u \in F|_W$$

Esta diferenciación en $\Gamma(V \wedge^n F)$ y la conexión en $\Gamma(L)$ inducen una diferenciación en $\Gamma(L \otimes V \wedge^n F)$ en la dirección F . Las secciones covariantemente constantes en la dirección F representarán los estados cuánticos del sistema. Para construir este espacio, primeramente se asocia al par de secciones (σ_1, σ_2) de $L \otimes V \wedge^n F$ constantes sobre F , la densidad $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{X/D}$ sobre X/D donde $D \otimes C = F \cap \bar{F}$. Sobre la vecindad V de $x \in X$, las secciones σ_1 y σ_2 son de la forma $\sigma_1|_V = \lambda_1 \otimes \nu_1$, $\sigma_2|_V = \lambda_2 \otimes \nu_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma(L|_V)$ y $\nu_1, \nu_2 \in \Gamma(V \wedge^n F|_V)$ constantes sobre F . La densidad $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{X/D}$ se define como

$$\langle \lambda_1(x), \lambda_2(x) \rangle \nu_1^{\circ}(\tilde{w}) \overline{\nu_2^{\circ}(\tilde{w})}$$

donde $\tilde{w} \in \tilde{B}F$. Depende en forma lineal de σ_1 , antilineal en σ_2 y además $\langle \sigma, \sigma \rangle_{X/D} \geq 0$

El producto escalar Hermitiano (σ_1, σ_2) se define integrando $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{X/D}$ sobre X/D

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \int_{X/D} \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{X/D}$$

El conjunto de secciones de $L \otimes \sqrt{\Lambda^n F}$ para el cual el producto escalar es finito, forman un pre-espacio de Hilbert del espacio de representaciones. Desafortunadamente reducir el espacio de Hilbert en esta forma, también reduce las observables que pueden cuantizarse a la clase que preserve F , i.e. las observables $\phi \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(X)$ tales que

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \eta \in F, \quad \forall \eta \in F.$$

Ahora introducimos el concepto de variedad metapléctica, que es útil cuando se investiga la existencia de mapeos entre espacios de Hilbert asociados con polarizaciones que cumplen con ciertas condiciones, i.e. se requiere escoger una estructura metalinear en cada subespacio Lagrangiano de TX .

El haz de marcos simpléctico es el haz $\mathcal{B}(TX, \omega)$ sobre X de todas las bases ordenadas $(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n)$ de $T_x X$, $x \in X$ tales que

$$\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad \omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$$

$\mathcal{B}(TX, \omega)$ es un haz principal, con el grupo simpléctico $Sp(n, \mathbb{R})$ como grupo de estructura.

Los elementos del grupo $Sp(n, \mathbb{R})$ son matrices $T \in GL(2n, \mathbb{R})$ con la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$$

donde T_1, T_2, T_3, T_4 son matrices de $n \times n$ que

satisfacen $\tilde{T}_1 T_1 - \tilde{T}_2 T_3 = I$ y $\tilde{T}_3 T_1$ y $\tilde{T}_4 T_2$ son simétricas.

El grupo doblemente cubriente de $Sp(n, \mathbb{R})$ se denota por $M_p(n, \mathbb{R})$ y se conoce como el grupo metapléctico, con mapeo de proyección $\rho: M_p(n, \mathbb{R}) \rightarrow Sp(n, \mathbb{R})$. Análogamente al caso metalineal, se introduce el haz de marcos metapléctico de (X, ω) como el haz principal $\tilde{B}(TX, \omega)$ sobre X con grupo de estructura $M_p(n, \mathbb{R})$, junto con el mapeo

$$\tau: \tilde{B}(TX, \omega) \longrightarrow B(TX, \omega)$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}(TX, \omega) \times M_p(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \tilde{B}(TX, \omega) \\ \downarrow \tau \times \rho & & \downarrow \tau \\ B(TX, \omega) \times Sp(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & B(TX, \omega) \end{array}$$

conmuta.

Una variedad X junto con una estructura metapléctica, se llama variedad metapléctica.

Un haz de marcos Lagrangianos positivos de (X, ω) , es el haz $\mathcal{P}(TX, \omega)$ sobre X de todas las n -tuplas ordenadas $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$ de vectores de $T_x^+ X$, tales que w_1, \dots, w_n son linealmente independientes sobre \mathbb{C} y $\omega(w_j, w_k) = 0$ y $i\omega(w_k, \bar{w}_n) \geq 0$

Queremos ahora ver que el haz $\mathcal{P}(TX, \omega)$ es un haz fibrado sobre X cuyas fibras son

$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \text{rank} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = n; \bar{u}v \text{ es simétrica; } i(V^t u - u^t v) \right.$
 es positiva semidefinida }

y grupo de estructura que actúa sobre \mathcal{P} es $S_{\mathcal{P}}(n, \mathbb{R})$.

Para esto veamos que un marco Lagrangiano positivo \underline{w} se puede expresar en forma única en términos de un marco simpléctico $(\underline{u}, \underline{v})$ como

$$\underline{w} = \underline{u} u + \underline{v} v = (u, v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

con $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y V matrices complejas de $n \times n$ tales que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$.

Primeramente notemos que (3.1) establece una biyección entre $\mathcal{P}(T_x X, \omega)$ y \mathcal{P} . Luego $S_{\mathcal{P}}(n, \mathbb{R})$ actúa sobre \mathcal{P} en la forma

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 u + T_2 v \\ T_3 u + T_4 v \end{pmatrix}$$

Si además consideramos que

$$(\underline{u}'; \underline{v}') = (\underline{u}, \underline{v}) \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$$

es otro marco simpléctico en $x \in X$, entonces

$$\underline{w} = \underline{u}' u' + \underline{v}' v' = (\underline{u}', \underline{v}') \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Esto nos induce a identificar $\mathcal{P}(T_x X, \omega)$ con

el espacio de funciones $\underline{w}^\circ : \mathcal{B}(T_x X, \omega) \rightarrow \mathcal{P}$ a través de

$$\underline{w} = (\underline{u}, \underline{v}) \underline{w}^\circ(\underline{u}, \underline{v})$$

donde \underline{w}° satisface

$$\underline{w}^\circ((\underline{u}, \underline{v})g) = \tilde{g}' \underline{w}^\circ(\underline{u}, \underline{v}), \quad g \in S_T(n, \mathbb{R}).$$

Ahora queremos introducir el concepto de un haz de marcos Lagrangianos metalineares positivos.

Siendo los elementos de $\mathcal{P}(TX, \omega)$ marcos lineales complejos, $GL(n, \mathbb{C})$ actúa sobre este haz en la forma $\underline{w}' = \underline{w} C$, con $\underline{w}, \underline{w}' \in \mathcal{P}(TX, \omega)$, $C \in GL(n, \mathbb{C})$.

Esta acción se traduce en \mathcal{P} en la forma

$$\begin{pmatrix} \underline{u}' \\ \underline{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u} C \\ \underline{v} C \end{pmatrix}$$

Si definimos las matrices

$$C = U - iV \tag{3.2}$$

y

$$W = (U + iV)(U - iV)^{-1}$$

las condiciones en la definición de \mathcal{P} implican que C es no singular, $W = \tilde{W}$ y $\|W\| \leq 1$.

Denotemos por B la bola unitaria cerrada en el espacio de matrices simétricas complejas de $n \times n$

$$B = \{ w : w \in GL(n, \mathbb{C}), \tilde{w} = w, \|w\| \leq 1 \}.$$

\mathcal{P} se puede identificar con $B \times GL(n, \mathbb{C})$ a través de la biyección (3.2). $GL(n, \mathbb{C})$ actuará sobre

$B \times GL(n, \mathbb{C})$ en la forma

$$((w, c)C') \longmapsto (w, cC')$$

mientras que $S_p(n, \mathbb{R})$ lo hará en la forma

$$g(w, c) = (g_w, \alpha(g, w)c)$$

donde

$$g = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \in S_p(n, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} g_w &= (u' + iV')(u' - iV') = (T_1 u + T_2 v + i(T_3 u + T_4 v)) \\ &= [(T_1 + iT_3)(I + w) - (T_4 - iT_2)(I - w)] \\ &\quad [(T_1 - iT_3)(I + w) + (T_4 + iT_2)(I - w)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(g, w) &= C'C^{-1} = (u' - iV')C^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left((T_1 - iT_3)(I + w) + (T_4 + iT_2)(I - w) \right) \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\alpha: S_p(n, \mathbb{R}) \times B \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

satisface

$$\alpha(g_1, g_2, w) = \alpha(g_1, g_2 w) \alpha(g_2, w)$$

del mapeo

$U(n)$

se puede encajar en

$S_p(n, \mathbb{R})$

a través

$$A + iB \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Si en (3.3) escogemos $T_1 = T_4 = A$ y $T_2 = -T_3 = B$

tendremos que

$$\alpha(g, w) = A + iB \in U(n)$$

Existe un levantamiento único de $\alpha: \tilde{\alpha}: M_p(n, \mathbb{R}) \times B$

$\longrightarrow ML(n, \mathbb{C})$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 M_p(n, \mathbb{R}) \times B & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & ML(n, \mathbb{C}) \\
 \downarrow \rho \times \text{id} & & \downarrow \rho \\
 S_p(n, \mathbb{R}) \times B & \xrightarrow{\alpha} & GL(n, \mathbb{C})
 \end{array}$$

\tilde{P} definido por $B \times ML(n, \mathbb{C})$ es un haz principal sobre \tilde{B} con grupo de estructura $ML(n, \mathbb{C})$. Para este haz se tiene una acción izquierda de $M_p(n, \mathbb{R})$ de la forma

$$\tilde{g}(w, \tilde{c}) = (\rho(g)w, \tilde{\alpha}(\tilde{g}, w)\tilde{c}), \quad \tilde{g} \in M_p(n, \mathbb{R}), \quad (w, \tilde{c}) \in B \times ML(n, \mathbb{C}) \quad (3.4)$$

\tilde{P} además, es el espacio doblemente cubriente de P con proyección $\tau: \tilde{P} \rightarrow P$ dado por

$$\tau(w, \tilde{c}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (I+w)\rho(\tilde{c}) \\ i(I-w)\rho(\tilde{c}) \end{pmatrix}$$

Ahora podemos definir un haz de marcos Lagrangianos metalineares positivos de (X, ω) , como el haz fibrado

$\tilde{P}(TX, \omega)$ sobre X , con fibras \tilde{P} sobre las que actúa

$M_p(n, \mathbb{R})$ en la forma (3.4). Podemos también identificar $\tilde{P}(TX, \omega)$ con el espacio de funciones

$\tilde{W}^\circ: \tilde{B}(T_x X, \omega) \rightarrow \tilde{P}$ a través de la relación

$$\tilde{W}^\circ((\bar{u}, \bar{v})\tilde{g}) = \tilde{g}^{-1} \tilde{W}^\circ(\bar{u}, \bar{v})$$

Luego $\tilde{P}(TX, \omega)$ es el haz doblemente cubriente de $P(TX, \omega)$ con proyección $\tau: \tilde{P}(TX, \omega) \rightarrow P(TX, \omega)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{B}(T_x X, \omega) & \xrightarrow{\tilde{W}^\circ} & \tilde{P} \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
 B(T_x X, \omega) & \xrightarrow{W^\circ} & P
 \end{array}$$

y también

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{P}}(TX, \omega) \times ML(n, \epsilon) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}(TX, \omega) \\ \downarrow \tau \times \mathcal{F} & & \downarrow \tau \\ \mathcal{P}(TX, \omega) \times GL(n, \epsilon) & \longrightarrow & \mathcal{P}(TX, \omega) \end{array}$$

conmuta. Como $\mathcal{B}\mathcal{F}$ es un subhaz de $\mathcal{P}(TX, \omega)$ y $\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{F}$ es un subhaz de $\tilde{\mathcal{P}}(TX, \omega)$, entonces el siguiente diagrama también conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{F} \times ML(n, \epsilon) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{F} \\ \downarrow \tau \times \mathcal{F} & & \downarrow \tau \\ \mathcal{B}\mathcal{F} \times GL(n, \epsilon) & \longrightarrow & \mathcal{B}\mathcal{F} \end{array}$$

Otro concepto que es de utilidad en la cuantización es el de polarizaciones fuertemente admisibles. Para esto consideremos la polarización F y denotemos por \mathcal{D} y \mathcal{E} las distribuciones

$$\mathcal{D}^c = F \cap \bar{F}, \quad \mathcal{E}^c = F + \bar{F}$$

\mathcal{D} es involutiva debido a que F lo es. Cuando también \mathcal{E} es involutiva, se dice que F es fuertemente admisible.

Si F_1 y F_2 son polarizaciones fuertemente admisibles, y si

$$\mathcal{D}_{1,2} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2, \quad \mathcal{E}_{1,2} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

entonces el par de polarizaciones (F_1, F_2) se dice que es fuertemente admisible si $\mathcal{E}_{1,2}$ es una distribución involutiva.

Ahora tenemos los elementos para empezar a describir el proceso de cuantización de funciones sobre (X, ω) que

generan grupos uniparamétricos de transformaciones canónicas bajo ciertas condiciones.

Si $f \in C^\infty(X)$, ϕ_f^t denotará el grupo uniparamétrico generado por el campo vectorial $\tilde{\xi}_f$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, la polarización F será trasladada por el mapeo $T\phi_f^t: TX \rightarrow TX$ a la polarización $T\phi_f^t(F)$. El diagrama siguiente muestra los sucesivos levantamientos canónicos del mapeo ϕ_f^t , así como las conexiones entre los diferentes haces fibrados.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\mathcal{P}}(TX, \omega) & \xrightarrow{\tilde{\phi}_f^{*t}} & \tilde{\mathcal{P}}(TX, \omega) & \supset & \tilde{B}F \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \searrow \nu^* \\
 BF \subset \mathcal{P}(TX, \omega) & \xrightarrow{\phi_f^{*t}} & \mathcal{P}(TX, \omega) & & \mathbb{R} \\
 \uparrow \tilde{\xi}_f & & \uparrow \tilde{\xi}_f & & \nearrow \nu \\
 \Lambda^n F \xleftarrow{\mu} X & \xrightarrow{F \xrightarrow{T\phi_f^t} T\phi_f^t(F)} & X & \xrightarrow{\nu} & \sqrt{\Lambda^n F} \\
 \downarrow \mu & \searrow \pi & \downarrow \pi & & \downarrow \phi_f^t \mu \\
 \sqrt{\Lambda^n F} & & \sqrt{\Lambda^n T\phi_f^t(F)} & &
 \end{array}$$

Dado que F es transportada continuamente por $T\phi_f^t$, entonces en cada t se tendrá un haz de marcos $BT\phi_f^t(F) \subset \mathcal{P}(TX, \omega)$ y $\tau^{-1}(BT\phi_f^t(F)) = \tilde{B}T\phi_f^t(F) \subset \tilde{\mathcal{P}}(TX, \omega)$.

Dado $\tilde{w} \in \tilde{B}F$ entonces $\tilde{\phi}_f^{*t}(\tilde{w}) \in \tilde{B}T\phi_f^t(F)$ y por tanto $\tilde{B}F \sim \tilde{B}T\phi_f^t(F)$. Si denotamos por $\sqrt{\wedge^n T\phi_f^t(F)}$ el haz fibrado asociado a $\tilde{B}T\phi_f^t(F)$ cuyas fibras son \mathcal{C} y $ML(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ actúa sobre ellas multiplicándolas por $\mathcal{U}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \in ML(\mathcal{U}, \mathcal{C})$. Las secciones de $\sqrt{\wedge^n F}$ serán trasladadas por ϕ_f^t al haz $\sqrt{\wedge^n T\phi_f^t(F)}$, y se escogen en la forma

$$(\phi_f^t \nu)^\circ(\tilde{w}) = \nu^\circ(\tilde{\phi}_f^{*t}(\tilde{w})), \quad \tilde{w} \in \tilde{B}T\phi_f^t(F) \quad (3.5)$$

Si ν es covariantemente constante en F , entonces $\phi_f^t \nu$ es covariantemente constante en $T\phi_f^t(F)$. Si los espacios de representaciones \mathcal{H} y \mathcal{H}_t se construyen con secciones covariantemente constantes de $L \otimes \sqrt{\wedge^n F}$ y $L \otimes \sqrt{\wedge^n T\phi_f^t(F)}$ respectivamente, entonces ϕ_f^t es un isomorfismo de \mathcal{H} y \mathcal{H}_t definido por $\phi_f^t \sigma = \phi_f^t \lambda \otimes \phi_f^t \nu$, donde $\sigma = \lambda \otimes \nu$, $\phi_f^t \lambda$ se define por $(\phi_f^t \lambda)^\circ = \lambda^\circ \circ \phi_f^{*-t}$, con $\lambda^\circ \in C^\infty(L^*)$ tales que $\lambda^\circ(cz) = c^{-1}z$, $c \in C^*$, $z \in L^*$, y $\phi_f^t \nu$ definido por (3.5).

En el caso en que ϕ_f^t preserva la polarización, i.e.

$$T\phi_f^t(F) = F, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

es posible encontrar un método para cuantizar f . La condición (3.6) es equivalente a pedir que

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_f} \mathbb{Z}_f(x) = [\mathbb{Z}_f, \mathbb{Z}_f](x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \mathbb{Z}_j(x) \quad (3.6a)$$

para $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_1, \dots, \mathbb{Z}_n)$ campo de marcos para F .

El operador cuántico asociado a f se define por

$$\hat{f}(\sigma) = i\hbar \frac{d}{dt} (\phi_f^t \sigma) \Big|_{t=0}, \quad \sigma \in \mathcal{H}$$

que es un operador diferencial de primer orden. Por supuesto otra técnica deberá desarrollarse para encontrar un operador de orden más alto.

Una fórmula explícita para este operador puede encontrarse en la forma siguiente. Sea \tilde{M} un campo de marcos meta lineal tal que $\tau(\tilde{M}) = \tilde{M}$, y $\nu_{\tilde{M}} \in \Gamma(\sqrt{\Lambda^* F})$ sección local, definida por

$$\nu_{\tilde{M}} \circ \tilde{M}^{-1} = 1$$

Localmente σ puede escribirse como

$$\sigma|_u = \lambda \otimes \nu_{\tilde{M}} \quad , \quad u \in X$$

para alguna $\lambda \in \Gamma(L|_u)$. Entonces se tiene

$$\hat{f}(\sigma) = i\hbar \frac{d}{dt} (\phi_f^t \lambda) \Big|_{t=0} \otimes \nu_{\tilde{M}} + \lambda \otimes i\hbar \frac{d}{dt} (\phi_f^t \nu_{\tilde{M}}) \Big|_{t=0} \quad (3.7)$$

Evaluemos el primer término de esta expresión. Primeramente veamos que L_* es el haz fibrado sobre X asociado a L , con grupo de estructura C_* . Se establece un isomorfismo entre $\Gamma(L)$ y $C^\infty(L_*)$ a través de

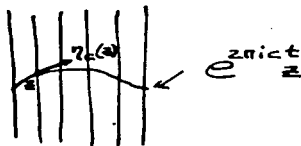
$$\lambda(\pi(z)) = \lambda^\circ(z) z \quad (3.8)$$

para $c \in C_*$, $z \in L_*$ y $\pi: L \rightarrow X$ proyección canónica. Además λ° satisface la condición

$$\lambda^\circ(cz) = c' \lambda^\circ(z) \quad (3.9)$$

Para cada $c \in C$ se denota por η_c el campo

vectorial sobre L^* .



$\eta_c(z)$ es el vector tangente en $z \in L^*$ a la curva $e^{2\pi i c t} z$, por tanto

$$(\eta_c g)(z) = \frac{d}{dt} g(e^{2\pi i c t} z) \Big|_{t=0}, g \in C^\infty(L^*)$$

En particular, para $g = \lambda^0$ se tiene

$$\eta_c \lambda^0 = -2\pi i c \lambda^0$$

Para $f \in C^\infty(X)$ se define η_f sobre L^* como

$$\eta_f(z) = \eta_f(\pi(z)) \lambda^0(z)$$

Luego

$$\eta_f \lambda^0 = -2\pi i (f \circ \pi) \lambda^0 \quad (3.10)$$

Denotemos por α la 1-forma de conexión sobre L^*

tal que

$$\alpha(\eta_c) = c, \quad c \in \mathbb{C} \quad (3.11)$$

α define la distribución horizontal $\text{hor} TL$ en L^* en la forma

$$\text{hor} TL^* = \{ u \in TL^* : \alpha(u) = 0 \}$$

TL^* es la suma directa de las distribuciones

$$TL^* = \text{hor} TL^* \oplus \text{ver} TL^*$$

donde los elementos de $\text{ver} TL^*$ son vectores tangentes a las fibras de L^* .

El levantamiento horizontal de un campo vectorial \bar{Z} sobre X es el único campo vectorial Z^* sobre L^* que satisface

$$\alpha(\xi^*) = 0 \quad \text{y} \quad T\pi(\xi^*(z)) = \xi(\pi(z)), \quad z \in L^*$$

Se define la derivada covariante de $\lambda \in \Gamma(L)$ en la dirección ξ sobre X , como la sección $\nabla_{\xi} \lambda \in \Gamma(L)$ dada por

$$\nabla_{\xi} \lambda(\pi(z)) = (\xi^* \lambda^*)(z) \bar{z} \quad (3.12)$$

Para $x \in X$, $T\lambda(\xi(x)) \in T_{\lambda(x)} L^*$ puede descomponerse en la forma

$$\begin{aligned} T\lambda(\xi(x)) &= \text{hor } T\lambda(\xi(x)) + \text{ver } T\lambda(\xi(x)) \\ &= \xi^*(\lambda(x)) + \eta_{\alpha}(T\lambda(\xi(x))) (\lambda(x)) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (\xi^* \lambda^*)(\lambda(x)) &= d\lambda^0[\xi^*(\lambda(x))] \\ &= d\lambda^0[T\lambda(\xi(x)) - d\lambda^0[\eta_{\alpha}(T\lambda(\xi(x))) (\lambda(x))]] \end{aligned}$$

El primer término es cero debido a que

$$d\lambda^0(T\lambda(\xi(x))) = T\lambda(\xi(x)) \lambda^0 = \xi(\lambda^0 \lambda)$$

Como $\lambda(x) = \lambda^0(\lambda(x)) \lambda(x) \Rightarrow \lambda^0 \lambda = 1$

y por tanto $d\lambda^0(T\lambda(\xi(x))) = 0$

Para calcular el segundo término tenemos

$$\begin{aligned} d\lambda^0[\eta_{\alpha}(T\lambda(\xi(x))) (\lambda(x))] &= (\eta_{\alpha}(T\lambda(\xi(x))) \lambda^0) (\lambda(x)) \\ &= -2\pi i \alpha(T\lambda(\xi(x))) (\lambda^0 \lambda)(x) = -2\pi i \lambda^* \alpha(\xi(x)) \end{aligned}$$

por lo que

$$(\xi^* \lambda^*)(\lambda(x)) = 2\pi i \lambda^* \alpha(\xi(x)) \quad \text{y}$$

$$(\nabla_{\xi} \lambda)(x) = [2\pi i \lambda^* \alpha(\xi) \lambda](x) \quad (3.13)$$

En general tenemos que para dos campos vectoriales ξ y ξ' sobre X , ∇_{ξ} y $\nabla_{\xi'}$ no conmutan, y la conexión tendrá una curvatura definida por

$$[\nabla_{\xi}, \nabla_{\xi'}] - \nabla_{[\xi, \xi']}$$

y tomando en cuenta (3.12) tiene un valor

$$2\pi i \lambda^* d\alpha (\xi, \xi')$$

donde $d\alpha$ es la 2-forma de curvatura.

Considerando que

$$\mathcal{L}_{\eta_c} d\alpha = \eta_c \lrcorner d(d\alpha) + d(\eta_c \lrcorner d\alpha)$$

y ecuación (3.11) entonces se tiene

$$\eta_c \lrcorner d\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{\eta_c} d\alpha = 0 \quad (3.14)$$

Si además denotamos por ξ el campo vectorial \mathfrak{r}_ξ al sobre L^* que preserva α , i.e. $\mathcal{L}_\xi \alpha = 0$, tenemos, usando (3.14) que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \alpha)(\eta_c) &= (\xi \lrcorner d\alpha)(\eta_c) + d(\alpha(\xi))(\eta_c) \\ &= \eta_c(\alpha(\xi)) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (3.15)$$

y por tanto $\alpha(\xi)$ es constante sobre las fibras de L^* y es imagen de una función $f \in C^0(X)$ tal que

$$\alpha(\xi) = -\frac{1}{\hbar} \pi^* f = -\frac{1}{\hbar} \alpha(\eta_{f \circ \pi}) = \alpha(\text{ver } \xi)$$

por tanto

$$\text{ver } \xi = -\frac{1}{\hbar} \eta_f$$

La ecuación (3.15) la podemos escribir en la forma

$$(\text{ver } \xi) \lrcorner d\alpha + (\text{hor } \xi) \lrcorner d\alpha = -d(\alpha(\xi)) = \frac{1}{\hbar} d(f \circ \pi) \quad (3.16)$$

Usando la ecuación (3.14) el primer término es cero.

La condición de precuantización establece que la forma de curvatura y la forma simpléctica están relacionadas por

$$d\alpha = -\frac{1}{\hbar} \pi^* \omega \quad (3.17)$$

Luego (3.16) se escribe como

$$\text{hor } \xi \lrcorner \pi^* \omega = -d(f \circ \pi)$$

hor ξ
 ξ_f

es el levantamiento horizontal del campo Hamiltoniano. Luego si denotamos ξ así construido, por ξ_f .

$$\zeta_f = \bar{\zeta}_f^* - \frac{1}{h} \eta_f$$

Considerando (3.10) y (3.13) se tiene

$$\zeta \lambda = \left[\nabla_{\bar{\zeta}_f} \lambda + \frac{i}{h} f \lambda \right]^0 \quad (3.18)$$

Como $f \in C^\infty(X)$ genera el grupo uniparamétrico ϕ_f^t que a su vez induce el grupo ϕ_f^{*t} de difeomorfismos de L_* tal que el diagrama siguiente conmuta para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} L_* & \xrightarrow{\phi_f^{*t}} & L_* \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\phi_f^t} & X \end{array}$$

El grupo ϕ_f^{*t} es generado por el campo vectorial ζ_f . Como $\lambda \in C^\infty(L_*)$, entonces $\phi_f^{*-t} \lambda = \lambda \circ \phi_f^{-t} \equiv (\phi_f^t \lambda) \circ \in C^\infty(L_*)$ está conectada con un elemento de $\Gamma(L)$ que se denota por $\phi_f^t \lambda$, y debido a que ζ_f genera ϕ_f^{*t} , se tiene

$$i\hbar \frac{d}{dt} (\phi_f^t \lambda) \Big|_{t=0} = i\hbar \zeta_f (\phi_f^t \lambda) \Big|_{t=0} = -i\hbar \zeta_f \lambda^0$$

De (3.18) se tiene

$$i\hbar \frac{d}{dt} (\phi_f^t \lambda) \Big|_{t=0} = -i\hbar \nabla_{\bar{\zeta}_f} \lambda + f \lambda \quad (3.19)$$

que es el primer término de (3.7). Aún tenemos que evaluar el segundo término. Para ello definamos el campo de marcos metalineal de F : $\phi_f^t \bar{\zeta}$ por

$$\phi_f^t \bar{\zeta}(x) = \tilde{\phi}_f^{*t} (\bar{\zeta}(\phi_f^{-t}(x))) \quad (3.20)$$

Los marcos $\phi_f^t \bar{\zeta}(x)$ y $\bar{\zeta}(x)$ se relacionan por

$$\phi_f^t \bar{\zeta}(x) = \bar{\zeta}(x) \tilde{C}_t(x); \quad \tilde{C}_t(x) \in ML(n, \mathbb{C})$$

Usando las ecuaciones (3.5) y las dos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\phi_f^t \nu_{\tilde{z}})^o (\tilde{z}(x)) &= \nu_{\tilde{z}}^o (\tilde{\phi}_f^{*-t} (\tilde{z}(x))) & 34 \\
&= \nu_{\tilde{z}}^o (\phi_f^{-t} \tilde{z} (\phi_f^{-t}(x))) \\
&= \nu_{\tilde{z}}^o (\tilde{z} (\phi_f^{-t}(x)) \tilde{C}_{-t}^{-1} (\phi_f^{-t}(x))) \\
&= \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1} (\phi_f^{-t}(x))) \nu_{\tilde{z}}^o (\tilde{z} (\phi_f^{-t}(x))) \\
&= \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1} (\phi_f^{-t}(x))) (\nu_{\tilde{z}}^o \circ \tilde{z}) (\phi_f^{-t}(x)) \\
\text{usando la ecuación (3.0)} \\
&= \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1} (\phi_f^t(x))) (\nu_{\tilde{z}}^o \circ \tilde{z}) (x)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\phi_f^t \nu_{\tilde{z}}(x) = \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1} (\phi_f^t(x))) \nu_{\tilde{z}}(x)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\phi_f^t \nu_{\tilde{z}}(x)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1} (\phi_f^t(x))) \Big|_{t=0} \nu_{\tilde{z}}(x) \\
&= \frac{d}{dt} \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1}(x)) \Big|_{t=0} \nu_{\tilde{z}}(x) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

El primer factor se escribe como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \chi (\tilde{C}_{-t}^{-1}(x)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} (\det (\tilde{C}_{-t}^{-1}(x)))^{1/2}; \quad C_t(x) \in GL(n, \mathbb{R}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\det (\tilde{C}_{-t}^{-1}(x))) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\det C_t(x)) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{d}{dt} C_t(x) \right) \Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

Como además $C_t(x)$ es tal que

$$\phi_f^t \tilde{z}(x) = \tilde{z}(x) C_t(x)$$

entonces, usando (3.6a) tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{z}(x) \frac{d}{dt} C_t(x) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} (\phi_f^t \tilde{z}_1(x), \dots, \phi_f^t \tilde{z}_n(x)) \Big|_{t=0} \\
&= (-[\tilde{z}_1, \tilde{z}_1](x), \dots, -[\tilde{z}_1, \tilde{z}_n](x)) = \left(-\sum_j a_{1j}(x) \tilde{z}_j(x), \dots, -\sum_j a_{nj}(x) \tilde{z}_j(x) \right)
\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{d}{dt} C_t(x) \Big|_{t=0} = - \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$\text{tr} \frac{d}{dt} C_t(x) \Big|_{t=0} = - \sum_j a_{jj}(x)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \chi(\tilde{c}_{-t}^{-1}(x))|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_j a_{jj}(x) \quad (3.22)$$

De aquí tenemos que la ecuación (3.21) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} (\phi_f^t \mu_{\tilde{f}}(x))|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_j a_{jj}(x) \mu_{\tilde{f}}(x) \quad (3.23)$$

Substituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.23) en (3.7), tenemos finalmente que

$$\hat{f}(\sigma) = (-i\hbar \nabla_{\tilde{f}} + f) \lambda \otimes \mu_{\tilde{f}} + \lambda \otimes \left(-\frac{i\hbar}{2} \sum_j a_{jj}\right) \mu_{\tilde{f}}$$

i.e.
$$\hat{f}(\lambda \otimes \mu_{\tilde{f}}) = (-i\hbar \nabla_{\tilde{f}} + f - \frac{1}{2} i\hbar \sum_j a_{jj}) \lambda \otimes \mu_{\tilde{f}} \quad (3.24)$$

Esta ecuación nos da un isomorfismo entre el álgebra de funciones que preservan la polarización y el espacio de operadores sobre \mathcal{H} , ya que

$$i\hbar \widehat{\{f, g\}} = [\hat{f}, \hat{g}]$$

En el caso en que la condición (3.6a) no se cumpla, pero las polarizaciones F_1 y F_2 de (X, ω) sean tales que

$$F_1 + \bar{F}_2 = T_x X \quad (3.25)$$

i.e. F_1 y F_2 sean transversales, es posible utilizar otro método conocido como kernel de Blattner-Konstant-Sternberg.

Algunas generalidades de este método son las siguientes. Consideremos los espacios de representaciones \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 correspondientes a F_1 y F_2 , i.e. $\mathcal{H}_1 = \Gamma(L \otimes \nu \wedge^n F_1)$ y

$\mathcal{H}_2 = \Gamma(L \otimes \nu \wedge^n F_2)$. En una vecindad de x , $\sigma_1 \in \mathcal{H}_1$ y $\sigma_2 \in \mathcal{H}_2$ se pueden factorizar en la forma

$$\sigma_1 = \lambda_1 \otimes \nu_1 \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \lambda_2 \otimes \nu_2, \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma(L) \quad (3.26)$$

y $\nu_i \in \Gamma(\nu \wedge^n F_i)$

Se puede definir la función $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle: X \rightarrow \mathbb{C}$ en la forma

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \langle \lambda_1(x), \lambda_2(x) \rangle \nu_1^\circ(\tilde{w}_1) \nu_2^\circ(\tilde{w}_2) \quad (3.27)$$

donde $\tilde{w}_j \in \tilde{B}_x F_j$ que se proyectan en los marcos lineales

$$\underline{w}_j = (w_j^1, \dots, w_j^n) \in B_x F_j, \text{ tales que} \\ i\omega(w_1^i, \bar{w}_2^j) = h \delta_{ij} \quad (3.28)$$

Si además suponemos que ν_1 y ν_2 en (3.26) se escogen tales que

$$\nu_1^\circ \circ \tilde{\xi}_1 = \nu_2^\circ \circ \tilde{\xi}_2 = 1 \quad (3.29)$$

donde $\tilde{\xi}_i$ son los levantamientos de los marcos de campos Hamiltonianos $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n)$ de F_i . En términos de éstos se define la matriz d^{jk} como

$$d^{jk} = \frac{i}{h} \omega(\xi_1^j, \bar{\xi}_2^k) \in GL(n, \mathbb{C}) \quad (3.30)$$

Si $\xi_2^i = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^n) \begin{pmatrix} \bar{d}_{11} & \dots & \bar{d}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{d}_{n1} & \dots & \bar{d}_{nn} \end{pmatrix}$ tal que

$$\sum_k d^{jk} \bar{d}_{km} = \delta_{jm} \quad (3.31)$$

entonces

$$\begin{aligned} (\nu_1^\circ \circ \tilde{\xi}_1) (\nu_2^\circ \circ \tilde{\xi}_2) &= \det(d_{jk})^{-1/2} = \\ &= \det(d^{jk})^{1/2} = \left(\frac{i}{h}\right)^{n/2} [\det \omega(\xi_1^j, \bar{\xi}_2^k)]^{1/2} \end{aligned}$$

por lo que podemos escribir la ecuación (3.27) como

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \left(\frac{i}{h}\right)^{n/2} [\det \omega(\xi_1^j, \bar{\xi}_2^k)]^{1/2} \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (3.32)$$

En el caso en que $\sigma_1 \in \mathcal{H}_1$, y $\sigma_2 \in \mathcal{H}_2$ sean secciones integrables al cuadrado, se define el kernel de BKS como el mapeo $K: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$K(\sigma_1, \sigma_2) = \int_X \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle |w^n| \quad (3.33)$$

Ahora supongamos que la segunda polarización está dada por

$T\phi_f^t(F)$ y que \mathcal{H}_t es el espacio de representaciones correspondiente. Entonces $K_t: \mathcal{H} \times \mathcal{H}_t \rightarrow \mathbb{C}$ induce el mapeo $U_t: \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{H}$ a través de la relación

$$K(\sigma, \sigma_t) = (\sigma | U_t \sigma_t); \quad \sigma \in \mathcal{H}, \sigma_t \in \mathcal{H}_t \quad (3.34)$$

Luego el operador cuántico correspondiente a $f \in C^\infty(X)$ se define por

$$\hat{f} = i\hbar \frac{d}{dt} \Phi_t |_{t=0} \quad (3.35)$$

donde $\Phi_t = U_t \circ \phi_f^t$, esto es,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\phi_f^t} & \mathcal{H}_t \\ & \searrow \Phi_t & \swarrow U_t \\ & \mathcal{H} & \end{array}$$

En el caso en que la polarización F sea real y las hojas de X/D sean simplemente conexas, es posible dar una forma explícita para la expresión (3.35). Para ello escojamos un sistema de coordenadas en la siguiente forma: sea $V \subset X/D$ contractible y sea $\pi_D: X \rightarrow X/D$ la proyección canónica. Supongamos además que sobre $\pi_D^{-1}(V) \subset X$ existen $2n$ funciones reales q_1, \dots, q_n y p_1, \dots, p_n , tales que $\sum q_1, \dots, \sum q_n$ generan $F | \pi_D^{-1}(V)$ y la 1-forma θ definida por

$$\theta = \sum p_i dq_i \quad (3.36)$$

satisface

$$\omega | \pi_D^{-1}(V) = d\theta$$

Definamos la sección $\lambda_0 \in \Gamma(L)$ tal que

$$\nabla \lambda_0 = -\frac{i}{\hbar} \theta \otimes \lambda_0 \quad (3.37)$$

y

$$\langle \lambda_0, \lambda_0 \rangle = 1 \quad (3.38)$$

Denotemos por $\underline{\lambda}$ el marco de campos metalineal que se proyecta en $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Sea $\nu_{\underline{\xi}}: \pi_0^{-1}(V) \rightarrow \bigwedge^n F$ tal que

$$\nu_{\underline{\xi}} \circ \underline{\xi} = 1 \quad (3.39)$$

La sección $\sigma = \lambda \otimes \nu \in \Gamma(L \otimes \bigwedge^n F)$ se puede representar en $\pi_0^{-1}(V)$ como

$$\sigma = \psi(q_1, \dots, q_n) \lambda_0 \otimes \nu_{\underline{\xi}} \quad (3.40)$$

con $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que $q = (q_1, \dots, q_n): \pi_0^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Las funciones q_1, \dots, q_n definen un sistema coordinado $\check{q}_1, \dots, \check{q}_n$ sobre V en la forma

$$\begin{array}{ccc} \pi_0^{-1}(V) & \xrightarrow{q_i = \check{q}_i \circ \pi_0} & \mathbb{R} \\ \downarrow \pi_0 & \nearrow q_i & \\ V & & \end{array} \quad (3.41)$$

Las secciones λ_0 y $\nu_{\underline{\xi}}$ se escogen de forma tal

$$\begin{aligned} \text{que } \langle \lambda_0 \otimes \nu_{\underline{\xi}}, \lambda_0 \otimes \nu_{\underline{\xi}} \rangle &= d^n \check{q} = |d\check{q}_1 \wedge \dots \wedge d\check{q}_n| \\ &= \nu_{\underline{\xi}}^{\circ}(\underline{b}) \nu_{\underline{\xi}}^{\circ}(\underline{b}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $\underline{b} \in \tilde{B}_x F | \pi_0^{-1}(V)$.

El producto escalar en $\mathcal{H} = \Gamma((L \otimes \bigwedge^n F) | V)$ se puede expresar como

$$(\lambda' \otimes \nu_{\underline{\xi}} | \lambda \otimes \nu_{\underline{\xi}}) = \int_V \psi'(\check{q}) \overline{\psi(\check{q})} d^n \check{q} \quad (3.43)$$

donde $\lambda' = \psi'(\check{q}) \lambda_0$ y $\lambda = \psi(\check{q}) \lambda_0$.

Como $K(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1 | U_t \sigma_2)$ entonces

$$K(\sigma_1, \phi_{\check{q}}^t \sigma_2) = (\sigma_1 | U_t \cdot \phi_{\check{q}}^t \sigma_2) = (\sigma_1 | \Phi_t \sigma_2) \quad (3.44)$$

donde $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H} = \Gamma((L \otimes \bigwedge^n F) | V)$ y $\phi_{\check{q}}^t \sigma_2 \in \Gamma((L \otimes \bigwedge^n T\phi_{\check{q}}^t(F)) | V)$.

Esto es

$$\begin{aligned}
K(\lambda' \otimes \nu_{\underline{x}}, \phi_f^t(\lambda \otimes \nu_{\underline{z}})) &= K(\psi'(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}}, \phi_f^t(\psi(\underline{z})\lambda_0) \otimes \phi_f^t \nu_{\underline{z}}) = \\
&= K(\psi'(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}}, \psi(\underline{z} \circ \phi_f^{-t})\phi_f^t \lambda_0 \otimes \phi_f^t \nu_{\underline{z}}) = \\
&= (\psi'(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}} | \Phi_t(\psi(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{z}})) \\
&= (\psi'(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}} | \psi_t(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{z}}) \\
&= \int_V \psi'(\underline{z}) \bar{\psi}_t(\underline{z}) d^n \underline{z}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde ψ_t se ha definido por la relación

$$\psi_t(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}} = \Phi_t(\psi(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{z}}) \tag{3.46}$$

Por otro lado, se tiene también

$$\begin{aligned}
&K(\psi'(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}}, \psi(\underline{z} \circ \phi_f^t)\phi_f^t \lambda_0 \otimes \phi_f^t \nu_{\underline{z}}) = \\
&= \int_{\pi_0^{-1}(V)} \langle \psi'(\underline{z})\lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}}, \psi(\underline{z} \circ \phi_f^t)\phi_f^t \lambda_0 \otimes \phi_f^t \nu_{\underline{z}} \rangle |(\omega | \pi_0^{-1}(V))|^n \tag{3.47}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.32), (3.45) y (3.47) tenemos que

$$\int_V \psi'(\underline{z}) \bar{\psi}_t(\underline{z}) d^n \underline{z} = \left(\frac{i}{h}\right)^{n/2} \int_{\pi_0^{-1}(V)} [\det \omega(\underline{z}_i, \phi_f^t \underline{z}_{jk})]^{1/2} \langle \lambda_0, \phi_f^t \lambda_0 \rangle \psi'(\underline{z}) \bar{\psi}(\underline{z} \circ \phi_f^t) d^n \underline{z} \tag{3.48}$$

por lo que

$$\psi_t(\underline{z}) = (ih)^{-n/2} \int_{\pi_0^{-1}(V)} [\det \omega(\underline{z}_i, \phi_f^t \underline{z}_{jk})]^{1/2} \langle \phi_f^t \lambda_0, \lambda_0 \rangle \psi(\underline{z} \circ \phi_f^t) d^n \underline{z} \tag{3.49}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \phi_f^t \lambda_0, \lambda_0 \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \phi_f^t \lambda_0, \lambda_0 \right\rangle + \left\langle \phi_f^t \lambda_0, \frac{d}{dt} \lambda_0 \right\rangle = \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} \phi_f^{-t*} \lambda_0, \lambda_0 \right\rangle = - \left\langle \phi_f^{-t*} \zeta_f \lambda_0, \lambda_0 \right\rangle =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\langle \phi_f^t \zeta_f \lambda_0, \lambda_0 \rangle = (i\hbar)^{-1} \langle \phi_f^t ((-i\hbar \nabla_{\zeta_f} + f) \lambda_0), \lambda_0 \rangle = \\
 &= (i\hbar)^{-1} \langle \phi_f^t ((-\theta(\zeta_f) + f) \lambda_0), \lambda_0 \rangle = \\
 &= (i\hbar)^{-1} ((-\theta(\zeta_f) + f) \circ \phi_f^t) \langle \phi_f^t \lambda_0, \lambda_0 \rangle
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\langle \phi_f^t \lambda_0, \lambda_0 \rangle = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t [\theta(\zeta_f) - f] \circ \phi_f^{-s} ds \right)$$

y

$$\psi_t(\underline{x}) = (i\hbar)^{-n/2} \int_{\pi_0^{-1}(v)} [\det \omega(\zeta_f, \phi_f^t \zeta_{q_k})]^{1/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t [\theta(\zeta_f) - f] \circ \phi_f^{-s} ds \right) \psi(\underline{x} \circ \phi_f^{-t}) d^m p \quad (3.50)$$

Luego, de las ecuaciones (3.35) y (3.46) se tiene que el operador cuántico correspondiente a $f \in C^\infty(X)$ es

$$\widehat{f}(\psi \lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}}) = i\hbar \frac{d}{dt} \psi_t \Big|_{t=0} \lambda_0 \otimes \nu_{\underline{x}} \quad (3.51)$$

4. REPRESENTACIONES UNITARIAS A TRAVES DEL KERNEL DE B.K.S.

En esta sección queremos considerar representaciones de transformaciones canónicas finitas en una dimensión:

$\bar{q} = \bar{q}(q, p)$, $\bar{p} = \bar{p}(q, p)$. Para esto, denotaremos por F_q y $F_{\bar{q}}$ las polarizaciones generadas por los campos Hamiltonianos Ξ_q y $\Xi_{\bar{q}}$. Los espacios de representaciones asociados con F_q y $F_{\bar{q}}$ se denotarán por $\mathcal{H}_q = \Gamma(L \otimes \nu^* F_q)$ y $\mathcal{H}_{\bar{q}} = \Gamma(L \otimes \nu^* F_{\bar{q}})$. El kernel BKS induce el mapeo $u: \mathcal{H}_{\bar{q}} \rightarrow \mathcal{H}_q$ a través de $K(\sigma_q, \sigma_{\bar{q}}) = (\sigma_q | u \sigma_{\bar{q}})$, donde $\sigma_q = \psi(q) \lambda_q \otimes \nu^* \bar{q}$ y $\sigma_{\bar{q}} = \varphi(\bar{q}) \lambda_{\bar{q}} \otimes \nu^* \Xi_{\bar{q}}$. Además, λ_q y $\lambda_{\bar{q}}$ son covariantemente constantes sobre F_q y $F_{\bar{q}}$, i.e.

$$\nabla \lambda_q = -i \theta \otimes \lambda_q \quad (\hbar = 1) . \quad \langle \lambda_q, \lambda_q \rangle = 1 \quad \text{y} \quad \nabla_{\Xi_{\bar{q}}} \lambda_{\bar{q}} = 0 .$$

Para construir $\lambda_{\bar{q}}$ que sea covariantemente constante sobre $F_{\bar{q}}$ tomemos primeramente

$$\lambda_{\bar{q}} = f(q, \bar{q}) \lambda_q \tag{4.1}$$

y

$$\Xi_{\bar{q}} = a(p, q) \frac{\partial}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial}{\partial q} \tag{4.2}$$

donde

$$a = - \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} \quad \text{y} \quad b = \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \tag{4.3}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{\Xi_{\bar{q}}} \lambda_{\bar{q}} &= \nabla_{\Xi_{\bar{q}}} f \lambda_q = \lambda_q \Xi_{\bar{q}} f + f \nabla_{\Xi_{\bar{q}}} \lambda_q \\ &= \lambda_q \Xi_{\bar{q}} f - i f \lambda_q p dq(\Xi_{\bar{q}}) = 0 \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\Xi_{\bar{q}} f = i p b f \tag{4.4}$$

Uno puede interpretar esta ecuación en términos de q, p , si tomamos $\Xi_{\bar{q}}$ como en la ecuación (4.2), pero en general es una ecuación diferencial parcial complicada. Una

forma de solucionar esto es aprovechar la estructura simpléctica tomando $\bar{z}_q = -\frac{\partial}{\partial \bar{p}}$, y mediante la transformación canónica expresar p, b y f como funciones de \bar{p}, \bar{q} , i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = -i p(\bar{p}, \bar{q}) b(\bar{q}, \bar{p}) f \quad (4.5a)$$

Esta ecuación nos determina f hasta una función arbitraria de \bar{q} . Para fijar esta función, debemos encontrar otra condición. Para ello procederemos en la siguiente forma.

Construyamos $\bar{z}_{\bar{p}}$ como

$$\bar{z}_{\bar{p}} = c(p, q) \frac{\partial}{\partial p} + d(p, q) \frac{\partial}{\partial q} \quad (4.6)$$

donde

$$c = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}} \quad \text{y} \quad d = \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} \quad (4.7)$$

Queremos también que $\lambda_{\bar{p}} = g(\bar{p}, \bar{q}) \lambda_{\bar{q}}$ sea covariantemente constante sobre $F_{\bar{p}}$. Entonces

$$\nabla_{\bar{z}_{\bar{p}}} \lambda_{\bar{p}} = \nabla_{\bar{z}_{\bar{p}}} g \lambda_{\bar{q}} = \lambda_{\bar{q}} \bar{z}_{\bar{p}} g + g \nabla_{\bar{z}_{\bar{p}}} \lambda_{\bar{q}} = 0 \quad (4.8)$$

Como $\lambda_{\bar{q}}$ es covariantemente constante sobre $F_{\bar{q}}$,

podemos expresar esto en las coordenadas \bar{p}, \bar{q} como

$$\nabla \lambda_{\bar{q}} = -i \bar{p} d\bar{q} \otimes \lambda_{\bar{q}} \quad (4.9)$$

ya que ω es invariante.

Es posible agragar a la 1-forma $\bar{p} d\bar{q}$ la diferencial dA donde $A = A(\bar{q})$, pero esto sólo se traduce en una fase para f . Con ayuda de la ecuación (4.9) podemos escribir la ecuación (4.8) como

$$\bar{z}_{\bar{p}} g - i g \bar{p} d\bar{q} (\bar{z}_{\bar{p}}) = 0$$

cuya solución es

$$g(\bar{p}, \bar{q}) = B(\bar{p}) e^{i \bar{p} \bar{q}} \quad (4.10)$$

donde $B(\bar{p})$ es arbitraria.

Pero por otro lado tenemos también que

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{z}_p} \lambda_{\bar{p}} &= \nabla_{\bar{z}_p} g f \lambda_q = \lambda_q \bar{z}_p (g f) + g f \nabla_{\bar{z}_p} \lambda_q = \\ &= \lambda_q (g \bar{z}_p f + f \bar{z}_p g - i g f p d q (\bar{z}_p)) = 0 \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = i [p(\bar{p}, \bar{q}) d(\bar{p}, \bar{q}) - \bar{p}] f \quad (4.5b)$$

que es la segunda condición para la f .

A continuación trataremos algunos ejemplos para ilustrar estos resultados. El más sencillo que podemos considerar es el caso lineal

$$1) \quad \bar{q} = -a q + b p \quad (4.11)$$

$$\bar{p} = -c q + d p$$

con la condición $bc - ad = 1$ para que ω sea invariante.

De la ecuación (4.5a) se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = -i (c \bar{q} - a \bar{p}) b f$$

que tiene por solución

$$f(\bar{p}, \bar{q}) = \psi(\bar{q}) e^{-ib (c \bar{q} \bar{p} - \frac{a}{2} \bar{p}^2)} \quad (4.12)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \left[-ib c \bar{p} \psi(\bar{q}) + \frac{d\psi}{d\bar{q}} \right] e^{-ib (c \bar{q} \bar{p} - \frac{a}{2} \bar{p}^2)}$$

Luego, la ecuación (4.5b) establece que

$$-ib c \bar{p} \psi + \frac{d\psi}{d\bar{q}} = (ic d \bar{q} - ic b \bar{p}) \psi$$

por lo que

$$\frac{d\psi}{d\bar{q}} = ic d \bar{q} \psi$$

cuya solución es

$$\psi(\bar{q}) = e^{i \frac{cd}{2} \bar{q}^2} \quad (4.13)$$

De las ecuaciones (4.12) y (4.13) resulta

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i \left(\frac{cd}{2} \bar{q}^2 - bc \bar{q} \bar{p} + \frac{ba}{2} \bar{p}^2 \right)} \quad (4.14)$$

Como f hace que $\lambda_{\bar{q}}$ sea covariantemente constante sobre $F_{\bar{q}}$, entonces necesitamos escribirla en términos de q, \bar{q} , con el objeto de que el kernel de BKS tenga sentido. Así tenemos que

$$\tilde{f}(q, \bar{q}) \equiv f(\bar{q}, \bar{p}(q, \bar{q})) = e^{-\frac{i}{2b}(d\bar{q}^2 - 2q\bar{q} - aq^2)} \quad (4.15)$$

Esta expresión la podemos identificar inmediatamente, excepto el factor de normalización, con la obtenida por Moshinsky-Quesne⁶⁾ para la representación de la transformación (4.11).

Como $\det \omega(\bar{z}_q, \bar{z}_{\bar{q}}) = -b$ (4.16) entonces el kernel de BKS será

$$K(\sigma_{\bar{q}}, \sigma_{\bar{q}}) = (\sigma_{\bar{q}} | U \sigma_{\bar{q}}) = \int_{\mathbb{R}^2} b^{1/2} i^{1/2} \langle \lambda_q, \lambda_{\bar{q}} \rangle \psi(q) \bar{\varphi}(\bar{q}) dp dq \\ = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} b^{1/2} e^{3\pi i} e^{-\frac{i}{2b}(d\bar{q}^2 - 2q\bar{q} - aq^2)} \bar{\varphi}(\bar{q}) dp \right] \psi(q) dq$$

El operador U lo podemos representar mediante su acción

$$U(\psi(\bar{q}) \lambda_{\bar{q}} \otimes \nu_{\bar{z}_{\bar{q}}}) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} b^{1/2} e^{-3\pi i} e^{-\frac{i}{2b}(d\bar{q}^2 - 2q\bar{q} - aq^2)} \varphi(\bar{q}) dp \right\} \lambda_q \otimes \nu_{\bar{z}_q} \quad (4.17a)$$

Definamos por

$$U(\psi(\bar{q}) \lambda_{\bar{q}} \otimes \nu_{\bar{z}_{\bar{q}}}) = [U\psi(\bar{q})](q) \otimes \nu_{\bar{z}_q}$$

al operador lineal $U: L^2(\mathbb{R}, d\bar{q}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, dq)$. Entonces, de (4.17) se tiene

$$[U\psi(\bar{q})](q) = \int_{\mathbb{R}} b^{1/2} e^{-3\pi i} e^{-\frac{i}{2b}(d\bar{q}^2 - 2q\bar{q} - aq^2)} \varphi(\bar{q}) dp \quad (4.17b)$$

Observamos que el factor del kernel de U no es el correcto para tener la unitariedad. En este ejemplo esto no importa mucho porque sólo es un número, pero a continuación veremos ejemplos en que el factor es fundamental.

2) Consideremos ahora la función $(qp)^2$ y definamos

$$(qp)^2_{op} \equiv \{ (qp)^2, \cdot \}_{qp} \quad (4.18)$$

$(qP)_{op}^2$

nos genera la transformación canónica BIYECTIVA

$$\bar{q} = q e^{-2Pq} \quad (4.19a)$$

$$\bar{p} = p e^{2Pq} \quad (4.19b)$$

a través de

$$\begin{aligned} \bar{q} &= e^{(qP)_{op}^2} q \\ \bar{p} &= e^{(qP)_{op}^2} p \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para este caso la condición (4.5a) nos da

$$\frac{\partial f}{\partial p} = i \bar{p} \bar{q}^2 f$$

que tiene por solución

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \psi(\bar{q}) e^{i \bar{p}^2 \bar{q}^2}$$

y de la condición (4.5b) tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = (2i \bar{q} \bar{p}^2 \psi + \frac{d\psi}{d\bar{q}}) e^{i \bar{p}^2 \bar{q}^2} = i 2\bar{q} \bar{p}^2 \psi e^{i \bar{p}^2 \bar{q}^2}$$

lo cual implica que $\psi = \text{cte}$ y por tanto

$$f(\bar{p}, \bar{q}) = e^{i \bar{p}^2 \bar{q}^2} \quad (4.21)$$

o bien

$$\tilde{f}(q, \bar{q}) = e^{\frac{i}{4} (\ln^2 q - 2 \ln q \ln \bar{q} + \ln^2 \bar{q})} \quad (4.22)$$

Utilizaremos la expresión (4.22) para construir la representación unitaria. Definamos primeramente la función $F(q, \bar{q})$ en la forma

$$F(q, \bar{q}) = \left| \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{4} (\ln^2 q - 2 \ln q \ln \bar{q} + \ln^2 \bar{q}) \right)}{\partial q \partial \bar{q}} \right|^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(q, \bar{q}) \quad (4.21a)$$

La forma explícita de la expresión anterior será

$$F(q, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{1}{\sqrt{q\bar{q}}} e^{\frac{i}{4} (\ln^2 q - 2 \ln q \ln \bar{q} + \ln^2 \bar{q})} \quad (4.21b)$$

El siguiente cálculo mostrará que $F(q, \bar{q})$ es u-

nitaria

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(q', \bar{q}') F(q, \bar{q}) d\bar{q} &= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{q\bar{q}}} e^{\frac{i}{4} (\ln^2 q - \ln^2 q')} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{1}{4} (\ln q' - \ln q) \ln \bar{q}} d(\ln \bar{q}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q\bar{q}}} e^{\frac{i}{4} (\ln^2 q - \ln^2 q')} \delta(\ln q' - \ln q) = \delta(q - q') \end{aligned}$$

Por el otro lado tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(q, \bar{q}) F(q, \bar{q}) dq = \frac{1}{8\pi \sqrt{\bar{q} \bar{q}^*}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\ln^2 \bar{q} - \ln^2 \bar{q}^*)} e^{i(\ln \bar{q} - \ln \bar{q}^*) \ln q} d(\ln q) = \delta(\bar{q} - \bar{q}^*)$$

3) Consideremos la siguiente transformación canónica BIYECTIVA para el potencial lineal

$$\bar{q} = \frac{p^2}{2} + q \quad (4.22a)$$

$$\bar{p} = p \quad (4.22b)$$

Tanto en este ejemplo, como en otros que mostraremos, la selección de las polarizaciones es fundamental para tener la unitariedad. En este caso la polarización $F_{\bar{q}}$ generada por

$$\bar{S}_{\bar{q}} = -\frac{\partial}{\partial p} + p \frac{\partial}{\partial q} \quad (4.23)$$

conduce a complicaciones debido a que aparece un término adicional. La polarización apropiada es $F_{\bar{p}}$ generada por

$$\bar{S}_{\bar{p}} = \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \quad (4.24)$$

De la condición (4.5a) tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = -i \bar{p}^2 f$$

de donde

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \psi(\bar{q}) e^{-i \frac{\bar{p}^3}{3}}$$

La condición (4.5b) implica que $\psi(\bar{q}) = cte$ y por

tanto

$$h(\bar{q}, \bar{p}) \equiv f(\bar{q}, \bar{p}) g(\bar{q}, \bar{p}) = e^{-i \frac{\bar{p}^3}{3} + i \bar{p} \bar{q}} \quad (4.25)$$

en donde $g(\bar{p}, \bar{q})$ la tomamos de la ecuación (4.10) con

$B(\bar{p}) \varphi(\bar{p}) = 1$. Pero ahora estamos utilizando las polarizaciones F_q y $F_{\bar{p}}$, entonces debemos de poner la ecuación (3.25) en términos de q y \bar{p} . Análogamente a (4.15) y (4.21)

$$\bar{h}(q, \bar{p}) \equiv h(\bar{q}(q, \bar{p}), \bar{p}) = e^{i \frac{\bar{p}^3}{6} + i \bar{p} q} \quad (4.26)$$

$$y \quad H(q, \bar{p}) = \left| \frac{\partial^2 (\bar{p}^3/6 + \bar{p}q)}{\partial \bar{p} \partial q} \right|^{1/2} \tilde{h}(q, \bar{p}) = \tilde{h}(q, \bar{p})$$

La representación que se ha construido está en términos de las variables q y \bar{p} . Mediante transformadas de Fourier podemos expresarla en términos de coordenadas o momentos, i.e.

$$H(p, \bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(q, \bar{p}) e^{-i p q} dq = e^{i \bar{p}^3/6} \delta(\bar{p} - p) \quad (4.27)$$

es la representación unitaria en variables de momentos, y

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, \bar{q}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(p, \bar{p}) e^{i(p\bar{q} - q\bar{p})} dp d\bar{p} \quad (4.28) \\ &= \frac{2^{1/3}}{\sqrt{\pi}} \Phi(2^{1/3}(\bar{q} - q)) \end{aligned}$$

es la representación unitaria en coordenadas. En la ecuación (4.28) Φ es la función de Airy. Este resultado concuerda con el encontrado por García Calderón y Moshinsky,³²⁾ usando funciones de Wigner.

4) Transformaciones canónicas puntuales BIYECTIVAS del tipo

$$\bar{q} = \frac{q}{\phi'(p)} \quad (4.29a)$$

$$\bar{p} = \phi(p) \quad (4.29b)$$

Este problema lo podemos resolver exactamente como el anterior, considerando las polarizaciones $F_{\bar{q}}$ y $F_{\bar{p}}$. Para aplicar la condición (4.5a), tenemos primeramente que

$$b = \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} = - \frac{\bar{q} (\phi'' \cdot \phi')(\bar{p})}{(\phi' \cdot \phi')(\bar{p})} \quad (4.30)$$

ya que $p = \phi^{-1}(\bar{p})$ (4.31)

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial que resulta de (4.5a) y de las dos ecuaciones anteriores es

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \mathcal{K}(\bar{q}) e^{i \bar{q} \int \frac{\phi'(\bar{p}) (\phi'' \cdot \phi')(\bar{p})}{(\phi' \cdot \phi')(\bar{p})} d\bar{p}} \quad (4.32)$$

La condición (4.5b) establece la siguiente ecuación para $\chi(\bar{q})$

$$\frac{d\chi}{d\bar{q}} = i \left[\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p}) - \bar{p} - \int \frac{\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p})}{(\phi'' - \phi')(\bar{p})} d\bar{p} \right] \chi$$

que tiene por solución

$$\chi(\bar{q}) = e^{i \left[\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p}) - \bar{p} - \int \frac{\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p})}{(\phi'' - \phi')(\bar{p})} d\bar{p} \right] \bar{q}} \quad (4.33)$$

Como χ es solamente función de \bar{q} y no de \bar{p} , entonces los términos dentro del paréntesis deben sumar a una constante. Podemos ver, integrando por partes, que

$$\int \left[\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p}) / (\phi'' - \phi')(\bar{p}) \right] d\bar{p} = \phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p}) - \bar{p}$$

De las ecuaciones (4.32) y (4.33) se tiene que

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i\bar{q}(\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p}) - \bar{p})} \quad (4.33a)$$

$$y \quad h(\bar{q}, \bar{p}) \equiv f(\bar{q}, \bar{p})g(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i\bar{q}\phi'(\bar{p})(\phi'' - \phi')(\bar{p})}$$

Pasando la expresión anterior a variables q, \bar{p} se tiene

$$y \quad \bar{h}(q, \bar{p}) = e^{iq\phi'(\bar{p})}$$

$$H(q, \bar{p}) = \left| \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 (q\phi'(\bar{p}))}{\partial q \partial \bar{p}} \right|^{1/2} \bar{h}(q, \bar{p}) = \left[\frac{(\phi'')'(\bar{p})}{2\pi} \right]^{1/2} e^{iq\phi'(\bar{p})} \quad (4.34)$$

La función (4.34) cumple con las propiedades de unitariedad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^*(q', \bar{p}) H(q, \bar{p}) d\bar{p} = \delta(q - q')$$

$$y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(q, \bar{p}') H(q, \bar{p}) dq = \delta(\bar{p} - \bar{p}')$$

Expresiones equivalentes se pueden encontrar en otras variables mediante transformadas de Fourier, i.e.

$$HI(p, \bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(q, \bar{p}) e^{-iqp} dq = \sqrt{(\phi'')'(\bar{p})} \delta(\phi'(\bar{p}) - p) \quad (4.35)$$

o bien

$$H(q, \bar{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} HI(p, \bar{p}) e^{i(p\bar{q} - q\bar{p})} dp d\bar{p}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{(\phi'')'(\bar{p})} e^{i(\bar{q}\phi'(\bar{p}) - q\bar{p})} d\bar{p} \quad (4.36)$$

En el caso en que la transformación puntual dada por la ecuación (4.29) es no BIYECTIVA, veremos más adelante que la

expresión (4.35) debe modificarse por una fase que involucra el espín de ambigüedad.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de transformaciones canónicas NO BIYECTIVAS y veremos que se presentan problemas con la unitariedad. Este tipo de problemas se resolverán mediante el espín de ambigüedad, en el capítulo 6.

5) Consideremos la transformación NO BIYECTIVA

$$\bar{q} = qP \quad (4.37a)$$

$$e^{2\bar{P}} = \mu \frac{P}{q} \quad , \quad \mu = \text{sg}(Pq) \quad (4.37b)$$

La condición (4.5a) nos da para este caso

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{P}} = -i\bar{q}f$$

por lo que $f(\bar{q}, \bar{P}) = \varphi(\bar{q}) e^{-i\bar{q}\bar{P}}$

De la condición (4.5b) tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \left(\frac{d\varphi}{d\bar{q}} - i\bar{P}\varphi \right) e^{-i\bar{q}\bar{P}} = i \left(\frac{1}{2} - \bar{P} \right) \varphi e^{-i\bar{q}\bar{P}}$$

luego $\varphi(\bar{q}) = e^{\frac{1}{2}\bar{q}}$ y $f(\bar{q}, \bar{P}) = e^{-i\bar{q}\bar{P} + \frac{1}{2}\bar{q}}$. Análogamente

$$h(\bar{q}, \bar{P}) = e^{\frac{1}{2}\bar{q}} \quad ; \quad \tilde{h}(q, \bar{P}) = e^{i\frac{\mu}{2}q^2} e^{2\bar{P}}$$

$$y \quad H(q, \bar{P}) = \sqrt{\frac{q}{\pi}} e^{\bar{P}} e^{i\frac{\mu}{2}q^2} e^{2\bar{P}} \quad (4.38)$$

Analícemos ahora que sucede con las condiciones de unitariedad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^*(q', \bar{P}') H(q, \bar{P}) d\bar{P} = \frac{\sqrt{q'q'}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\mu}{2}e^{2\bar{P}}(q'^2 - q'^2)} d(e^{2\bar{P}}) \quad (4.39a)$$

$$= 2\sqrt{q'q'} \delta(q^2 - q'^2) = \delta(q - q') + \delta(q + q')$$

$$y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(q, \bar{P}') H(q, \bar{P}) dq = \frac{e^{\bar{P} + \bar{P}'}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\mu}{2}q^2} \frac{d(e^{2\bar{P}} - e^{2\bar{P}'})}{d(q^2)} \quad (4.39b)$$

$$= 2e^{\bar{P} + \bar{P}'} \delta(e^{2\bar{P}} - e^{2\bar{P}'}) = \delta(\bar{P} - \bar{P}')$$

El hecho de que en la ecuación (4.39a) aparezca la suma de dos deltas, se debe justamente a la no biyectividad de la transformación (4.37), la cuál es invariante bajo el intercambio $p \rightarrow -p$, $q \rightarrow -q$

6) Transformación canónica a variables de ángulo y acción para el oscilador armónica repulsivo

$$\bar{p} = \frac{\mu}{2} (p^2 - q^2) \quad (4.40a)$$

$$\bar{q} = \frac{\mu}{2} \ln(p+q)^2 \quad ; \quad \mu = \text{sg}(p+q) \quad (4.40b)$$

La condición (4.5a) toma la forma de la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = -i \left(\frac{\mu}{2} + \bar{p} e^{-2\mu \bar{q}} \right) f$$

que tiene por solución

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \varphi(\bar{q}) e^{-\frac{i}{2} (\mu \bar{p} + \bar{p}^2 e^{-2\mu \bar{q}})} \quad (4.41)$$

La segunda condición (4.5b) implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} &= \left(i\mu \bar{p}^2 \varphi e^{-2\mu \bar{q}} + \frac{d\varphi}{d\bar{q}} \right) e^{-\frac{i}{2} (\mu \bar{p} + \bar{p}^2 e^{-2\mu \bar{q}})} \\ &= i \left(\mu \bar{p}^2 e^{-2\mu \bar{q}} + \frac{\mu}{4} e^{2\mu \bar{q}} \right) \varphi e^{-\frac{i}{2} (\mu \bar{p} + \bar{p}^2 e^{-2\mu \bar{q}})} \end{aligned}$$

de donde resulta la ecuación diferencial para φ

$$\frac{d\varphi}{d\bar{q}} = \frac{i\mu}{4} e^{2\mu \bar{q}} \varphi$$

cuya solución es

$$\varphi(\bar{q}) = e^{\frac{i}{8} e^{2\mu \bar{q}}}$$

Substituyendo la expresión anterior en la ecuación

(4.41) se tiene que

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{-\frac{i}{2} (\mu \bar{p} + \bar{p}^2 e^{-2\mu \bar{q}} - \frac{1}{4} e^{2\mu \bar{q}})}$$

de donde

$$\tilde{f}(q, \bar{q}) = e^{-i \left(\frac{q^2}{2} - \mu q e^{\mu \bar{q}} + \frac{1}{4} e^{2\mu \bar{q}} \right)}$$

$$y \quad F(q, \bar{q}) = \frac{e^{\mu \bar{q}/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(q^2/2 - \mu q e^{\mu \bar{q}} + \frac{1}{4} e^{2\mu \bar{q}})} \quad (4.42)$$

Las condiciones de unitariedad nos dicen ahora que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(q', \bar{q}) F(q, \bar{q}) d\bar{q} = \frac{1}{\mu} e^{i/2(q'^2 - q^2)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\mu} e^{\mu \bar{q}} (q - q') d(e^{\mu \bar{q}})$$

$$= \frac{1}{\mu} e^{i/2(q'^2 - q^2)} \delta(q - q') = \frac{1}{\mu} \delta(q - q')$$

$$y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(q, \bar{q}') F(q, \bar{q}) dq = e^{\pm(\mu \bar{q} + \mu' \bar{q}')} e^{i/4(e^{2\mu \bar{q}} - e^{2\mu' \bar{q}'})}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bar{q}(\mu e^{\mu \bar{q}} - \mu' e^{\mu' \bar{q}'})} d\bar{q} = \delta\left(\bar{q} - \frac{\mu'}{\mu} \ln \frac{\mu'}{\mu} \bar{q}'\right)$$

Los problemas con las deltas nos hacen ver que la expresión (4.42) no es unitaria. Lo que si podemos verificar, de paso, es que esta expresión cumple con las ecuaciones de Mello-Moshinsky. Escribamos primeramente (4.40) en la forma

$$\bar{p} = \frac{\mu}{2} (p^2 - q^2)$$

$$e^{2\mu \bar{q}} = (p+q)^2$$

y trabajemos en la representación de coordenadas. Las ecuaciones M-M serán

$$\frac{\mu}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^2\right) F(q, \bar{q}) = i \frac{\partial}{\partial \bar{q}} F(q, \bar{q})$$

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{q}} + q\right)^2 F(q, \bar{q}) = e^{2\mu \bar{q}} F(q, \bar{q})$$

Como

$$\frac{\mu}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^2\right) F(q, \bar{q}) = \left(i \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} e^{2\mu \bar{q}} - q e^{\mu \bar{q}}\right) F(q, \bar{q})$$

$$= i \frac{\partial}{\partial \bar{q}} F(q, \bar{q})$$

la primera ecuación se satisface, y la segunda es trivial.

7) Analicemos ahora el mismo ejemplo anterior, pero ahora modificamos la variable de ángulo

$$\bar{p} = \frac{\mu}{2} (p^2 - q^2) \quad (4.43a)$$

$$\bar{q} = \frac{\mu}{4} \ln \left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2 ; \quad \mu = A g(p+q) \quad (4.44b)$$

En este caso la ecuación (4.5a) nos da

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = \frac{i\epsilon}{2} \operatorname{senh} 2\bar{q} f \quad ; \quad \epsilon = \operatorname{sg}(p^2 - q^2)$$

cuya solución es

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \varphi(\bar{q}) \cdot e^{\frac{i\epsilon}{2} \bar{p} \operatorname{senh} 2\bar{q}} \quad (4.45)$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \left(i\epsilon \bar{p} \operatorname{cosh} 2\bar{q} + \frac{d\varphi}{d\bar{q}} \right) e^{\frac{i\epsilon}{2} \bar{p} \operatorname{senh} 2\bar{q}} = i\epsilon \bar{p} \operatorname{cosh} 2\bar{q} e^{\frac{i\epsilon}{2} \bar{p} \operatorname{senh} 2\bar{q}}$$

De aquí obtenemos que $\varphi = \text{cte}$, y la ecuación (4.45) es simplemente

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{\frac{i\epsilon}{2} \bar{p} \operatorname{senh} 2\bar{q}}$$

o bien

$$\bar{f}(q, \bar{q}) = \begin{cases} e^{i\frac{\epsilon}{2} q^2 \operatorname{ctgh} \bar{q}} & , \quad \mu = +1 \\ e^{i\frac{\epsilon}{2} q^2 \operatorname{tanh} \bar{q}} & , \quad \mu = -1 \end{cases}$$

y

$$F_+(q, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{q} \operatorname{csch} \bar{q} e^{i\frac{\epsilon}{2} q^2 \operatorname{ctgh} \bar{q}} \quad , \quad \mu = +1 \quad (4.46a)$$

$$F_-(q, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{q} \operatorname{sech} \bar{q} e^{i\frac{\epsilon}{2} q^2 \operatorname{tanh} \bar{q}} \quad \mu = -1 \quad (4.46b)$$

Se puede ver con facilidad que las expresiones de (4.46) casi son unitarias. Nuevamente la no biyectividad entra en juego, obteniéndose suma de deltas, i.e.

$$y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\mu}^*(q', \bar{q}') F_{\mu}(q, \bar{q}) d\bar{q} = \delta(q - q') + \delta(q + q')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{\mu}^*(q, \bar{q}') F_{\mu}(q, \bar{q}) d\bar{q} = \delta(\bar{q}' - \bar{q})$$

8) Transformación canónica a variables de ángulo y acción para el oscilador armónico.

Consideremos la transformación

$$\bar{q} = \frac{\mu}{2} (p^2 + q^2) \quad (4.47a)$$

$$\bar{p} = \arctan \mu \frac{p}{q} \quad ; \quad \mu = \sin \varphi \quad (4.47b)$$

y apliquemos las condiciones de las ecuaciones (4.5). De la primera se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = -i 2\bar{q} \operatorname{sen}^2 \bar{p} f$$

con solución

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \varphi(\bar{q}) e^{\frac{i}{2} \bar{q} \operatorname{sen} 2\bar{p} - i\bar{p}\bar{q}} \quad (4.48)$$

La condición (4.5b) implica que $\varphi(\bar{q}) = c t e$ y por

tanto

$$h(\bar{q}, \bar{p}) = e^{\frac{i}{2} \bar{q} \operatorname{sen} 2\bar{p}}$$

o bien

$$\tilde{h}(q, \bar{p}) = e^{\frac{i}{2} \mu q^2 \tan \bar{p}}$$

Introduciendo la normalización se tiene

$$H(q, \bar{p}) = \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \sec \bar{p} e^{\frac{i}{2} \mu q^2 \tan \bar{p}} \quad (4.49)$$

La representación en coordenadas tiene la forma

$$\mathcal{H}(q, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(q, \bar{p}) e^{-i\bar{p}\bar{q}} d\bar{p} = \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sec \bar{p} e^{\frac{i}{2} \mu q^2 \tan \bar{p} - i\bar{p}\bar{q}} d\bar{p} \quad (4.50)$$

Si se calculan las condiciones de unitariedad se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^*(q', \bar{q}) \mathcal{H}(q, \bar{q}) d\bar{q} = \delta(q - \sqrt{\mu} q') + \delta(q + \sqrt{\mu} q')$$

$$\text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(q, \bar{q}') \mathcal{H}(q, \bar{q}) d\bar{q} = \delta(\bar{q}' - \bar{q})$$

Para hacer unitaria la expresión (4.50) es necesario incorporar el spin de ambigüedad para tomar en cuenta la no biyectividad de la transformación. Esto lo hacemos en el capítulo 6.

Ahora podemos preguntarnos si el kernel de BKS contiene el homomorfismo que presentan las ecuaciones M-M para los casos tratados en el capítulo 2. Antes de entrar en este punto, es

conveniente dar una expresión explícita para $f(\bar{q}, \bar{p})$. Esta es

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i \int L_{\bar{p}} d\bar{q} + i \int (\bar{z}_{\bar{p}} \int \theta(\bar{z}_{\bar{q}}) d\bar{p}) d\bar{q} - i \int \theta(\bar{z}_{\bar{q}}) d\bar{p}} \quad (4.49)$$

donde $L_{\bar{p}} = \theta(\bar{z}_{\bar{p}}) - \bar{p}$ o equivalente

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i \int p d\bar{q} + i \int (\frac{\partial}{\partial \bar{q}} \int p b d\bar{p}) d\bar{q} - i \int p b d\bar{p} - i \bar{p} \bar{q}} \quad (4.50)$$

Es obvio que si $p b$ es factorizable en la forma

$p b = \alpha_1(\bar{q}) \alpha_2(\bar{p})$, entonces el 2º y el 3º término de la última exponencial son iguales, y por tanto

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i \int p d\bar{q} - i \bar{p} \bar{q}} \quad (4.51)$$

Veamos la representación unitaria de la transformación

(2.1). En este caso

$$b = \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} = 0 \quad ; \quad p d = p \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} = \frac{p}{\phi'(\bar{q})} = \bar{p} \quad (4.52a), (4.52b)$$

por lo que $f(\bar{p}, \bar{q}) = 1$, $h(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i \bar{p} \bar{q}}$

$\tilde{h}(\bar{q}, \bar{p}) = [2\pi \phi'(\bar{q})]^{1/2} e^{i \bar{p} \phi(\bar{q})}$, y la representación unitaria es

$$H(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\bar{q}, \bar{p}) e^{-i \bar{p} \bar{p}} d\bar{p} = [\phi'(\bar{q})]^{1/2} \delta(\bar{q} - \phi(\bar{q})) \quad (4.53)$$

que como ya vimos cumple con las ecuaciones M-M de las ecuaciones (2.3).

Para la transformación (2.6), tenemos $p b = q_2$, luego la ecuación (4.51) es aplicable. Como $d=0$ y $p_2 = -\phi(q)$

$$\text{entonces } H_2'(q_1, q_2) = \left(\frac{\phi'(q)}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i q_2 \phi(q)} \quad (4.54)$$

en donde se agragó a la función f el factor de normalización.

Para el caso de la transformación (2.13) se tiene

$$p b = \bar{\psi}'(q_3) \psi^{-1}(q_3) ; \quad p d = -p_3 \psi^{-1}(q_3) \bar{\psi}''(q_3) \quad \cdot \text{La ecuación (4.51) es aplicable a este caso, y por lo tanto sólo basta hacer}$$

la integral $\int p d q_3 = - p_3 \psi^{-1}(q_3) \tilde{\psi}'(q_3) + p_3 q_3$. Luego
 $f(\bar{q}, \bar{p}) = \int e^{-i p_3 \psi^{-1}(q_3) \tilde{\psi}'(q_3)}$. Considerando la ecuación (2.13b) e introduciendo el factor de normalización se tiene

$$H_3'(q, q_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\phi'(q) (\psi^{-1})'(q_3))^{1/2} e^{i \phi(q) \psi^{-1}(q_3)}$$

que concuerda con la expresión (2.15).

Ahora analicemos la transformación (2.18):

$$p_4 = - q_4 \psi^{-1}(-p_4) \tilde{\psi}''(-p_4), \quad p_4 d = - \tilde{\psi}'(-p_4) \psi^{-1}(-p_4), \quad \text{luego}$$

$$f(q_4, p_4) = \int e^{-i q_4 \tilde{\psi}'(-p_4) \psi^{-1}(-p_4) - i q_4 p_4}$$

En este caso necesitamos ir hasta la polarización generada por el campo vectorial $\vec{\beta}$, en donde

$$h(q_4, p_4) = \int e^{-i q_4 \tilde{\psi}'(-p_4) \psi^{-1}(-p_4)}$$

por lo que la representación unitaria es

$$H_4''(q, p_4) = [\phi'(q) (\psi^{-1})'(-p_4)]^{1/2} e^{i \phi(q) \psi^{-1}(-p_4)}$$

que es la misma expresión que (2.20).

Adicionalmente debemos hacer notar la forma en que se incluye el factor de la normalización. Supongamos que mediante el kernel de BKS obtenemos $\tilde{S}(q, x) = e^{i \beta_1(q) \beta_2(x)}$ donde β_1 , β_2 son funciones únicamente de la variable que se indica, x puede ser \bar{q} o \bar{p} y \tilde{S} puede ser \tilde{F} o \tilde{h} respectivamente, entonces la representación unitaria será³³⁾

$$S(q, x) = k \left| \frac{\partial^2 \beta_1(q) \beta_2(x)}{\partial q \partial x} \right|^{1/2} e^{i \beta_1(q) \beta_2(x)} \quad (4.55)$$

donde k es la constante de normalización y $S = F$ para $x = \bar{q}$, $S = H$, $x = \bar{p}$.

5. HOJAS DE RIEMANN DENTRO DE CUANTIZACION GEOMETRICA

El problema de las transformaciones canónicas sencillas (lineales, cuadráticas, puntuales) puede ser resuelto desde diversos puntos de vista^{6,33}) Pero la física real, es en su mayor parte no lineal, y muchos ejemplos de transformaciones de interés son no biyectivas. A nivel clásico se ha encontrado¹⁹⁾ que los espacios fase involucrados en una transformación canónica no biyectiva tienen una estructura semejante al plano complejo bajo transformaciones conformes. En esta forma, partes de un espacio fase se puede mapear en forma biyectiva sobre una hoja de Riemann del otro espacio. En este capítulo se hará una presentación de las hojas de Riemann en el marco de cuantización geométrica, pues otros autores han hecho la formulación matemática en otro contexto³⁴⁾.

En esta parte seguiremos usando la notación del capítulo 3. Por simplicidad, supondremos que la transformación canónica no biyectiva es de tal forma que todo el nuevo espacio fase $[\bar{p}, \bar{q}]$ se mapea sólo en una banda del espacio original $[p(\bar{p}, \bar{q}), q(\bar{p}, \bar{q})]$ y por tanto el mapeo inverso llevará los puntos (p, q) y $(p + m\pi, q)$, $m \in \mathbb{Z}$, en el mismo punto (\bar{p}, \bar{q}) , a menos que en el espacio $[\bar{p}, \bar{q}]$ se tome la estructura de hojas de Riemann. En este último caso, cada banda de $[p, q]$ va a dar a una hoja de Riemann en $[\bar{p}, \bar{q}]$. Denotemos por $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ el espacio cubriente de $[\bar{p}, \bar{q}]$, i.e. \mathbb{Z} es la fibra en (\bar{p}, \bar{q}) . Luego

$$R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [\bar{p}, \bar{q}]_m \quad (5.1)$$

donde $[\bar{p}, \bar{q}]_m$ es el espacio fase de la m -ésima hoja de Riemann.

Cada $[\bar{p}, \bar{q}]_m$ tiene una 2-forma $\omega_m = d\theta_m$ donde θ_m es la 1-forma canónica sobre $[\bar{p}, \bar{q}]_m$. Sea $\tilde{B}\omega_m T[\bar{p}, \bar{q}]_m$ el haz de marcos metaplécticos de $([\bar{p}, \bar{q}]_m, \omega_m)$ y F_m la polarización generada por vectores tangentes de $[\bar{p}, \bar{q}]_m$. El haz $\tilde{B}\omega_m T[\bar{p}, \bar{q}]_m$ induce el haz lineal complejo $\sqrt{\lambda'} F_m$ sobre $[\bar{p}, \bar{q}]_m$. L_m será el haz lineal complejo sobre $([\bar{p}, \bar{q}]_m, \omega_m)$ con una conexión ∇ que satisface la condición de precuantización (3.17), $\lambda_{0m}: [\bar{p}, \bar{q}]_m \rightarrow L_m$ es la sección trivial de L_m tal que $\nabla \lambda_{0m} = -\frac{i}{\hbar} \theta_m \otimes \lambda_{0m}$ y $\langle \lambda_{0m}, \lambda_{0m} \rangle = 1$.

La colección de los haces fibrados anteriores darán lugar a los haces $\tilde{B}\omega T(R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z}))$, F , $\sqrt{\lambda'} F$ y L sobre $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ tales que para cada $m \in \mathbb{Z}$

$\tilde{B}\omega T(R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z}))|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \tilde{B}\omega_m T[\bar{p}, \bar{q}]_m$, $F|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = F_m$, $\sqrt{\lambda'} F|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \sqrt{\lambda'} F_m$ y $L|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = L_m$. También se tiene que las secciones $\lambda_m: [\bar{p}, \bar{q}]_m \rightarrow L_m$ induce una sección $\lambda: R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z}) \rightarrow L$ tal que $\lambda|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \lambda_m$, para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Las conexiones en los haces L_m se extenderán a una conexión en L , pidiendo que $\nabla \lambda = -\frac{i}{\hbar} \theta \otimes \lambda$, donde θ es una 1-forma sobre $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ tal que $\theta|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \theta_m$ y $\omega = d\theta$ es la 2-forma simpléctica extendida, $\omega|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \omega_m$.

Supongamos por el momento que conocemos $k_m \in C^\infty([\bar{p}, \bar{q}]_m)$.

$\Phi_{k_m}^t$ denotará el grupo uniparamétrico generado por el campo vectorial $\tilde{\Xi}_{k_m}$. k puede extenderse a $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ a través de $k|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = k_m$ y también $\Phi_k^t|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \Phi_{k_m}^t$. Escogida k , cada hoja $[\bar{p}, \bar{q}]_m$ tiene un espacio de Hilbert \mathcal{H}_m . El

espacio de representaciones de $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ será

$$\mathcal{H} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_m \quad (5.2)$$

La acción de ϕ_{km}^t puede levantarse al haz $\tilde{\mathcal{P}}_\omega \text{TR}([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{P}}_\omega T([\bar{p}, \bar{q}])_m$ donde $\tilde{\mathcal{P}}_\omega T([\bar{p}, \bar{q}])_m$ es el haz de marcos metalineales Lagrangianos positivos para $([\bar{p}, \bar{q}]_m, \omega_m)$. Denotaremos por $\tilde{\Phi}_k^{x,t}$ el grupo de automorfismos de $\tilde{\mathcal{P}}_\omega \text{TR}([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ inducido por ϕ_k^t . La distribución F no es invariante bajo la acción de ϕ_k^t y por tanto la imagen $T\phi_k^t(F)$ de F bajo ϕ_k^t en general será diferente de F . Para cada $m \in \mathbb{Z}$, la distribución $T\phi_k^t(F)|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = T_m \phi_k^t(F)$ es una polarización de $([\bar{p}, \bar{q}]_m, \omega_m)$. Sea $\tilde{\mathcal{B}} T_m \phi_k^t(F)$ el haz de marcos metalineales para $T_m \phi_k^t(F)$ inducidos por el haz de marcos metapléctico $\tilde{\mathcal{B}}_\omega T([\bar{p}, \bar{q}])_m$, y $\sqrt{\lambda'} T_m \phi_k^t(F)$ el haz lineal asociado. Denotemos por $\sqrt{\lambda'} T \phi_k^t(F)$ el haz lineal complejo sobre $R([\bar{p}, \bar{q}], \mathbb{Z})$ tal que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{\lambda'} T \phi_k^t(F)|_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \sqrt{\lambda'} T_m \phi_k^t(F)$. Para cada sección $\nu \in \Gamma(\sqrt{\lambda'} F)$, definimos la sección $\phi_k^t \nu \in \Gamma(\sqrt{\lambda'} T \phi_k^t(F))$ a través de $(\phi_k^t \nu)^\circ(\tilde{\omega}) = \nu^\circ(\tilde{\omega})$ con $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{B}} T \phi_k^t(F) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{B}} T_m \phi_k^t(F)$

De una manera análoga podemos definir la acción de ϕ_k^t sobre secciones de L . Para cada sección $\lambda \in \Gamma(L)$, definimos la sección $\phi_k^t \lambda \in \Gamma(L)$ por $(\phi_k^t \lambda)^\circ = \lambda^\circ \circ \phi_{km}^{-t}$. Denotemos por \mathcal{H}_m^t el espacio de representaciones definido por la polarización $T_m \phi_k^t(F)$ de $([\bar{p}, \bar{q}]_m, \omega_m)$, de tal forma que para $\sigma_m \in \mathcal{H}_m^t$, se tiene $\sigma_m = \lambda_m \otimes \nu_m$, con $\lambda_m \in \Gamma(L_m)$ y $\nu_m \in \Gamma(\sqrt{\lambda'} F_m)$ es covariantemente constante a lo largo de F_m . La acción de ϕ_k^t sobre secciones de L y $\sqrt{\lambda'} F$ induce un mapeo $\Phi_{km}^t: \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_m^t$ definido por $\Phi_{km}^t \sigma_m = \phi_{km}^t \lambda_m \otimes \phi_{km}^t \nu_m$. Supondremos además que para $t > 0$ pequeña, las polarizacio-

nes F_m y $T_m \phi_m^t(F)$ son transversas, y tanto se puede construir el kernel de BKS

y $U_m^t: \mathcal{H}_m^t \rightarrow \mathcal{H}_m$
 $\sigma_m \in \mathcal{H}_m$ y $\sigma_m^t \in \mathcal{H}_m^t$

$$K_m^t: \mathcal{H}_m \times \mathcal{H}_m^t \rightarrow \mathbb{C}$$

será el mapeo lineal inducido por K_m^t en la forma

$$K_m^t(\sigma_m, \sigma_m^t) = (\sigma_m | U_m^t \sigma_m^t) \text{ con}$$

lineal de \mathcal{H}_m en \mathcal{H}_m :

$$U_m^t \circ \Phi_{k_m}^t: \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_m$$

La colección de mapeo lineales $\{U_m^t \circ \Phi_{k_m}^t: \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_m, m \in \mathbb{Z}\}$, induce un mapeo $\Phi_k^t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$\Phi_k^t | \mathcal{H}_m = U_m^t \circ \Phi_{k_m}^t$$

Aunque lo anterior es válido para cualquier $k_m \in C^\infty([\bar{p}, \bar{q}]_m)$, nuestro interés se centra en las funciones $k_m = \bar{p}_m, \bar{q}_m$, donde \bar{p}_m y \bar{q}_m denotan el sistema coordenado para la m -ésima hoja $[\bar{p}, \bar{q}]_m$.

Antes de pasar a ver aplicaciones de lo que se ha expuesto anteriormente, introduciremos de manera informal el concepto de grupo de ambigüedad. Dada la transformación canónica $\bar{p} = \bar{p}(p, q), \bar{q} = \bar{q}(q, p)$, supongamos que existe un grupo discreto \mathcal{A} que deja \bar{p}, \bar{q} invariantes; esto es, $\bar{p} = \bar{p}(p\mathcal{z}, q\mathcal{z}) = \bar{p}(p, q)$ y $\bar{q} = \bar{q}(p\mathcal{z}, q\mathcal{z}) = \bar{q}(p, q), \forall \mathcal{z} \in \mathcal{A}$, entonces \mathcal{A} se llama grupo de ambigüedad. Como ilustración, revisemos la transformación puntual de la expresión (4.29), en donde supondremos, como lo hicimos al inicio de este capítulo, que el grupo de ambigüedad traslada la variable de momentos por $m\pi, m \in \mathbb{Z}$, i.e. $\mathcal{A} = \mathcal{T} \ni T_m: (q, p) \mapsto (q, p + m\pi)$. Entonces tenemos

$$\phi(p + m\pi) = \phi(p), \quad \phi'(p + m\pi) = \phi'(p) \quad (5.3a), (5.3b)$$

donde la derivación es respecto al argumento. $\tilde{\phi}'$ queda invariante

riante bajo la acción de \mathcal{T} , ya que

$$\tilde{\phi}'(\bar{p}) = \phi'(\phi^{-1}(\bar{p})) = \phi'(\rho) = \phi'(\rho + m\pi) \quad (5.4a)$$

y

$$\phi^{-1}(\bar{p}) = \phi_0^{-1}(\bar{p}) + m\pi \quad ; \quad -\pi/2 \leq \phi_0^{-1}(\bar{p}) \leq \pi/2 \quad (5.4b)$$

Para el caso biyectivo vimos que el kernel de BKS está conectado con la expresión (4.34). Como el ejemplo que ahora tratamos es no biyectivo, tendremos un kernel de BKS K_m^c por cada $[\bar{p}, \bar{q}]_m$. Por tal motivo la ecuación (4.33a):

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i\bar{q}\phi'(\bar{p})} \tilde{\phi}'(\bar{p}) - i\bar{q}\bar{p} \quad \text{nos conduce a un kernel}$$

$$f_m(\bar{p}, \bar{q}) = e^{i\bar{q}(\phi_0^{-1}(\bar{p}) + m\pi)} \tilde{\phi}'(\bar{p}) - i\bar{q}\bar{p} \quad (5.5)$$

relacionado con K_m^+ . Adicionando el factor de normalización y pasando a la polarización $F_{\bar{p}}$, como en el ejemplo (4.4), se tiene

$$h_m(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tilde{\phi}'(\bar{p})} e^{i\bar{q}(\phi_0^{-1}(\bar{p}) + m\pi)} \phi'(\bar{p}) \quad ; \quad \tilde{\phi}'(\bar{p}) = \frac{1}{(\phi_0^{-1})'(\bar{p})} \quad (5.6a)$$

$$\bar{h}_m(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tilde{\phi}'(\bar{p})} e^{i\bar{q}(\phi_0^{-1}(\bar{p}) + m\pi)} \quad (5.6b)$$

Ahora queremos hacer de \mathcal{H} algo análogo a la descomposición de una variedad en la suma directa de complementos ortogonales, i.e., si se tiene un espacio de Hilbert³⁵⁾ \mathcal{H} y

$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{H}$ es subespacio de \mathcal{H} , entonces \mathcal{X} se puede escribir como $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_1^\perp$ donde \mathcal{X}_1^\perp es el complemento ortogonal de \mathcal{X}_1 . En el caso general, \mathcal{X} se

puede descomponer en la suma directa de una secuencia arbitraria de subespacios ortogonales $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$, es decir, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{X}_k$

$\oplus \dots \equiv \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_k$. Como además existe una correspondencia natural entre operadores de proyección y subespacios de \mathcal{X} , entonces tenemos que $P_k: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_k$, tal que $P_k(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_k, k=1, 2, \dots, \infty$. Para nosotros es aún más importante el hecho de que dada una fa-

milia $\{X_k\}$ de espacios de Hilbert, uno siempre puede construir un espacio de Hilbert X' más grande, que se ve como la suma directa de los espacios dados, i.e. $X' = \bigoplus_{k=1}^{\infty} X_k$. Dado $x_k \in X_k$ podemos construir la secuencia

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in X' \quad (5.7)$$

El producto interior en X' se define, para $x, y \in X'$, como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y_k \rangle_{X_k} \quad (5.8a)$$

Con el fin de que $\langle x, y \rangle_{X'} < \infty$, la secuencia en (5.7) debe cumplir además con la condición

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{X_k}^2 < \infty \quad (5.8b)$$

Volviendo a nuestro ejemplo, queremos construir, a partir de los espacios de Hilbert \mathcal{H}_m , un espacio mayor dado por la suma directa. Escribiremos la extensión (5.2) en la forma

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_m \quad (5.9)$$

El operador de proyección que introduciremos en \mathcal{H} es justamente la restricción $r_m: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_m$ tal que $r_m(\mathcal{H}) = \mathcal{H} |_{[\bar{p}, \bar{q}]_m} = \mathcal{H}_m$. En este caso tenemos que para $\sigma_m \in \mathcal{H}_m$, la secuencia $(\dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots) = \sigma \in \mathcal{H}$. Pero como en \mathcal{H} necesitamos un producto escalar y como en este ejemplo el grupo de ambigüedad ha conducido a una secuencia infinita de espacios de Hilbert \mathcal{H}_m , entonces no todas las secuencias de elementos de \mathcal{H}_m son permitidas, sino solamente aquellas que hacen que el producto escalar en \mathcal{H}

$$\langle \sigma^1, \sigma^2 \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \sigma_m^1, \sigma_m^2 \rangle_{\mathcal{H}_m} < \infty \quad (5.10)$$

sea acotado; i.e. $\sigma \in \mathcal{H}$ si $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \sigma_m, \sigma_m \rangle_{\mathcal{H}_m}^2 < \infty$.

Por otro lado sabemos que $\tilde{h}_m(q, \bar{p})$, excepto el factor de normalización, es consecuencia de un producto escalar en \mathcal{H}_m , como el que aparece en (5.10), y además es el kernel del operador $U_m^t \Phi_{\bar{p}}^t$ que efectúa la transformación canónica (4.29), sujeta a las condiciones (5.4). El kernel (5.6b) es la representación del operador mencionado, actuando sobre el espacio $L^2(-\infty, +\infty)$. La extensión de \tilde{h}_m se puede hacer a través de la secuencia

$$\tilde{h}_{\bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} L_m^2(-\infty, +\infty)} = (\dots, \tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots) \quad (5.11)$$

$$\text{de forma tal que } \tilde{h} |_{L_m^2(-\infty, +\infty)} = \tilde{h}_m |_{L_m^2(-\infty, +\infty)} \quad (5.12)$$

La unitariedad de $\bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} L_m^2(-\infty, +\infty)$ se puede expresar como

$$\langle \tilde{h}, \tilde{h}' \rangle_{\bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} L_m^2(-\infty, +\infty); d\mathcal{P}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{h}_m, \tilde{h}'_m \rangle_{L_m^2(-\infty, +\infty); d\mathcal{P}} \quad (5.13)$$

donde $\tilde{h} = (\dots, \tilde{h}_m, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots)$, $\tilde{h}' = (\dots, \tilde{h}'_m, \tilde{h}'_0, \tilde{h}'_1, \dots)$ y $\mathcal{P} = q, \bar{p}$

Luego $\tilde{h} |_{\bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} L_m^2(-\infty, +\infty)}$ es unitaria si $\tilde{h} |_{L_m^2(-\infty, +\infty)}$ es unitaria. Esto último lo podemos comprobar, haciendo uso de la ecuación (5.6b) i.e.

$$\langle \tilde{h}_m, \tilde{h}'_m \rangle_{L_m^2(-\infty, +\infty); dq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_m^*(q, \bar{p}') \tilde{h}_m(q, \bar{p}) dq = \delta(\bar{p}' - \bar{p})$$

y

$$\langle \tilde{h}_m, \tilde{h}'_m \rangle_{L_m^2(-\infty, +\infty); d\bar{p}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_m^*(q', \bar{p}) \tilde{h}_m(q, \bar{p}) d\bar{p} = \delta(q' - q)$$

En este capítulo se ha estudiado un ejemplo, en el que, el grupo de ambigüedad es el grupo de translaciones, y por ello el espacio de Hilbert se construyó como una suma directa INFINITA. En otros casos, el grupo de ambigüedad nuevamente determinará la estructura del espacio cubriente de alguno de los dos espacios fase involucrados en la transformación y el número de espacios de Hilbert quedará también determinado.

6. ESPIN DE AMBIGUEDAD EN CUANTIZACION GEOMETRICA

Hemos visto que para transformaciones canónicas no biyectivas, los espacios fases involucrados presentan una estructura geométrica semejante a hojas de Riemann del plano complejo. Sin embargo, llevar esta estructura a la mecánica cuántica resulta complicado. El espin de ambigüedad ha sido introducido como una alternativa a las hojas de Riemann, con la ventaja de que su traducción a la mecánica cuántica es inmediata. Usando el spin de ambigüedad, en el caso clásico, la biyectividad de la transformación se recobra preservando la estructura de una hoja de los espacios fase, e incrementando el espacio base de las funciones. En el caso cuántico, se incrementa el espacio de Hilbert que requiere del spin de ambigüedad.

Como la mecánica clásica puede formularse en términos de geometría diferencial, y la cuantización geométrica trata de incorporar la mecánica cuántica en este lenguaje, nos podemos preguntar a qué nivel surge el spin de ambigüedad en la cuantización geométrica. A continuación veremos casos concretos de transformaciones canónicas no biyectivas. El primer caso que trataremos será el que vimos en el capítulo anterior, i.e. la transformación canónica NO BIYECTIVA (4.29).

Las componentes de Fourier de la representación unitaria involucran el espin de ambigüedad λ en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{h}^\lambda(q, \bar{p}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_m(q, \bar{p}) e^{im\pi\lambda} = \frac{e^{iq\phi'_0(\bar{p})}}{\sqrt{2\pi\dot{\phi}'_0(\bar{p})}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2nim\left(\frac{q-\lambda}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{iq\phi'_0(\bar{p})}}{\sqrt{2\pi\dot{\phi}'_0(\bar{p})}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(q-\lambda+2m) \quad ; \quad \tilde{\phi}'_0(\bar{p}) \equiv (\phi'_0 - \phi'_0)(\bar{p}) \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado la identidad

$$\begin{aligned} \sum_N \delta(N+x) &= \sum_N e^{2\pi i N x} \quad \text{Luego } H^\lambda(\rho, \bar{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}^\lambda(q, \bar{\rho}) \bar{e}^{i q x} dq = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Phi_0^+(\bar{\rho})}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i q (\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho)} \delta(q - \lambda + 2m) dq \quad (6.1) \\ &= \frac{e^{i\lambda (\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho)}}{\sqrt{\Phi_0^+(\bar{\rho})}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho + m\pi) = \frac{e^{i\lambda (\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho)}}{\sqrt{\Phi_0^+(\bar{\rho})}} \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho) \end{aligned}$$

Esta expresión ha sido también obtenida por otros autores³¹⁾ directamente de las ecuaciones M-M. Veamos ahora sus relaciones de unitariedad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 H^{\lambda^*}(\bar{\rho}, \rho') H^\lambda(\bar{\rho}, \rho) d\lambda d\bar{\rho} = \delta(\rho - \rho') \quad (6.2a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^{\lambda^*}(\bar{\rho}, \rho) H^\lambda(\bar{\rho}', \rho) d\rho = \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}') \delta(\lambda - \lambda') \quad (6.2b)$$

La primera de ellas se obtiene como sigue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 H^{\lambda^*}(\bar{\rho}, \rho) H^\lambda(\bar{\rho}, \rho) d\lambda d\bar{\rho} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^1 e^{i\lambda(\rho' - \rho)} \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho') \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho) d\lambda d[\Phi_0^+(\bar{\rho})]$$

Haciendo las descomposiciones $\rho = \rho_0 + \pi k$ y

$\rho' = \rho'_0 + \pi k'$ se tiene que la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^1 e^{i\lambda\pi(k'-k)} e^{i\lambda(\rho'_0 - \rho_0)} \sum \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho'_0) \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho_0) \delta_{m',k'} \delta_{m,k} d\lambda d\Phi_0^+(\bar{\rho}) \\ = \delta(\rho_0 - \rho'_0) \int_0^1 \sum_{m',m'} e^{i\lambda\pi(k'-k)} d\lambda = \delta(\rho - \rho') \end{aligned}$$

La relación (6.2b) se demuestra en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H^{\lambda^*}(\bar{\rho}, \rho) H^\lambda(\bar{\rho}', \rho) d\rho = \\ = e^{i\lambda \Phi_0^+(\bar{\rho}) - i\lambda' \Phi_0^+(\bar{\rho}')} \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}') \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\pi(\lambda' - \lambda)} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\rho_0(\lambda' - \lambda)} \delta(\Phi_0^+(\bar{\rho}) - \rho_0 + \pi(m-k)) d\rho_0 \\ = \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}') \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\pi(\lambda' - \lambda)} = \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}') \delta(\lambda - \lambda') \end{aligned}$$

Veremos a continuación otro ejemplo de transformación no biyectiva en que se manipula el espín de ambigüedad. Este es el dado por las expresiones (4.47) del oscilador armónico.

Primeramente descomponemos la transformación (4.47) en las partes elementales de las ecuaciones (2.23), (2.24), (2.25) y (2.26). Como (2.23), (2.24) y (2.26) son biyectivas, sus representaciones unitarias están dadas por (2.14a) y (2.14b). La transformación (2.25) no es biyectiva, y por tanto debemos hacer la descomposición en la fibra de la función $f(\bar{q}, \bar{p})$ correspondiente. Observamos que el grupo de ambigüedad traslada la variable de posición del nuevo espacio, i.e., $T \ni T_m : (\bar{q}, \bar{p}) \mapsto (\bar{q} + m\pi, \bar{p})$ por tanto el cálculo que ahora haremos es completamente análogo al ejemplo anterior. De la ecuación (4.52b) tenemos que la función que nos hace las secciones covariantemente constantes en la polarización $F_{\bar{p}}$ es

$$h(\bar{q}, \bar{p}) = e^{i\bar{p}\bar{q}} \quad (6.3)$$

Haciendo la descomposición

$$\bar{q} = \bar{q}_0 + m\pi = \psi_0(q) + m\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \bar{q}_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (6.4)$$

tenemos

$$h_m(\bar{q}_0, \bar{p}) = e^{i\bar{q}_0 \bar{p} + im\pi \bar{p}}$$

o bien

$$\tilde{h}_m(q, \bar{p}) = [\psi_0'(q)]^{1/2} e^{i\psi_0(q)\bar{p} + im\pi \bar{p}}$$

El spin de ambigüedad entra en juego nuevamente en las componentes de Fourier de la representación

$$\tilde{h}^\lambda(q, \bar{p}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_m(q, \bar{p}) e^{-im\pi\lambda} = 2 [\psi_0'(q)]^{1/2} e^{i\psi_0(q)\bar{p}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{p} - \lambda + 2m) \quad (6.5)$$

La expresión anterior también será una representación unitaria en las variables (q, \bar{p}) . En las variables de posición, la

expresión (6.5) toma la forma

$$H^\lambda(q, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}^\lambda(q, \bar{p}) e^{-i\bar{q}\bar{p}} d\bar{p} = [2\pi \psi_0'(q)]^{1/2} e^{i\lambda(\psi_0(q) - \bar{q})} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\psi_0(q) + m\pi - \bar{q}) \quad (6.6)$$

Teniendo en cuenta que

$$\phi(q) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(q) q^2, \quad \psi_0(q_2) = \operatorname{Arc} \tan q_2; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_0(q_2) \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.7)$$

las representaciones unitarias en cada etapa son

$$H_1(q, q_1) = [\phi'(q)]^{1/2} \delta(\bar{q} - \phi(q))$$

$$H_2^{\lambda, \lambda'}(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i q_1 q_2} \delta(\lambda - \lambda')$$

$$H_3^{\lambda'}(q_2, q_3) = [2\pi \psi_0'(q_2)]^{1/2} e^{i\lambda(\psi_0(q_2) - q_3)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\psi_0(q_2) + m\pi - q_3)$$

$$H_4(q_3, q_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i q_3 q_4}$$

Luego, la representación unitaria de la transformación (4.47)

será, identificando $\bar{q} \equiv q_4$:

$$H^\lambda(q, \bar{q}) = \int_0^{+\infty} \int_0^1 H_1(q, q_1) H_2^{\lambda', \lambda}(q_1, q_2) H_3^{\lambda'}(q_2, q_3) H_4(q_3, \bar{q}) d\lambda dq_1 dq_2 dq_3$$

$$= \left[\frac{2\phi'(q)}{\pi} \right]^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{q} + \lambda + 2m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\phi(q)q_2 - i\psi_0(q_2)\bar{q}} [\psi_0'(q_2)]^{1/2} dq_2 \quad (6.8a)$$

$$= \left[\frac{2\phi'(q)}{\pi} \right]^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{q} + \lambda + 2m) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{i\phi(q)\psi_0'(u_0) - i u_0 \bar{q}} [\psi_0'(u_0)]^{1/2} du_0 \quad (6.8b)$$

En la última expresión hicimos el cambio de variable $u_0 = \psi_0(q_2)$,

$-\pi/2 \leq u_0 \leq \pi/2$. Además, como $\psi(q) = \psi_0(q) + m\pi$ entonces

$$u = u_0 + m\pi, \quad \text{con } -\infty < u < +\infty.$$

Observemos que el espín de ambigüedad está asociado al espacio original, i.e.

$$y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 H^{\lambda'}(q, \bar{q}') H^\lambda(q, \bar{q}) d\lambda dq = \delta(\bar{q} - \bar{q}')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^{\lambda'}(q', \bar{q}) H^\lambda(q, \bar{q}) d\bar{q} = \delta(q - q') \delta(\lambda - \lambda')$$

La representación (6.8) fue relativamente fácil de

obtener, debido a que la transformación puntual no biyectiva que entra en juego tiene una representación unitaria sencilla. Sin embargo, si queremos ir directamente a descomponer la función $f(\bar{q}, \bar{p})$ correspondiente a la transformación (4.47), debemos tener cuidado porque $f(\bar{q}, \bar{p})$ es invariante bajo el grupo de ambigüedad. Esto es, de la ecuación (4.48) tenemos que

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = e^{\frac{i}{2} \bar{q} \operatorname{sen} 2\bar{p} - i\bar{q}\bar{p}} \quad (6.9a)$$

$$y \quad h(\bar{q}, \bar{p}) = e^{\frac{i}{2} \bar{q} \operatorname{sen} 2\bar{p}} \quad (6.9b)$$

Invirtiendo las ecuaciones (4.47a,b) se tiene

$$q = \sqrt{2\bar{q} \operatorname{sg}(q)} \operatorname{sg}(\bar{q}) \operatorname{sen} \bar{p} \quad (6.10a)$$

$$p = \sqrt{2\bar{q} \operatorname{sg}(q)} \operatorname{cos} \bar{p} \quad (6.10b)$$

El grupo de ambigüedad traslada la variable momental del nuevo espacio en la forma $T \ni T_m : (\bar{q}, \bar{p}) \mapsto (\bar{q}, \bar{p} + 2m\pi)$. Por tanto $T_m h(\bar{q}, \bar{p}) = h(\bar{q}, \bar{p} + 2m\pi) = h(\bar{q}, \bar{p})$. Esto nos conduce a que la representación en las variables (q, \bar{p})

$$\bar{h}(q, \bar{p}) = [q \operatorname{sec}^2 \bar{p}]^{1/2} e^{i/2 \operatorname{sg}(q) q^2 \tan \bar{p}}$$

es invariante bajo T . Ahora nos interesa saber qué sucede con la representación en las variables (q, \bar{q}) . Procedamos tomando la transformada de Fourier correspondiente

$H(q, \bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(q, \bar{p}) e^{i\bar{p}\bar{q}} d\bar{p}$. Pero ahora el kernel de Fourier debe descomponerse en cada banda del nuevo espacio,

dadas por el grupo de ambigüedad, por lo que en cada banda tenemos

$$H_m(q, \bar{q}) = \frac{e^{-i2m\pi\bar{q}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \bar{h}(q, \bar{p}_0) e^{i\bar{q}\bar{p}_0} d\bar{p}_0$$

$$y \quad H^\lambda(q, \bar{q}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m(q, \bar{q}) e^{-i2m\pi\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{q} + \lambda + m) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \bar{h}(q, \bar{p}_0) e^{i\bar{q}\bar{p}_0} d\bar{p}_0$$

que concuerda con la expresión (6.8b).

7. ALGUNAS PERSPECTIVAS

Considero que hay varios puntos importantes por investigarse. Uno de ellos es la propuesta de que una transformación canónica arbitraria puede aproximarse como una secuencia de transformaciones puntuales y de Fourier alternadas. La representación unitaria se puede encontrar entonces, a través de las representaciones unitarias de estas últimas.

A nivel de cuantización geométrica, la libertad de escoger la segunda polarización da mayores garantías para que se cumpla la condición de transversalidad, lo cual puede usarse para implementar las ecuaciones presentadas en este trabajo, para encontrar las representaciones unitarias. Después de esto, basta precuantización para cuantizar el espacio fase. Esto puede ser de mucha utilidad en la estructura y en los objetivos de la cuantización geométrica actual.

Por otro lado, los resultados que se han obtenido del apareamiento de secciones en el kernel de BKS, pueden estar relacionados con el método de gérmenes de Plebanski³⁶⁾ para encontrar transformaciones de similitud.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- M. Born, W. Heisenberg y P. Jordan, Z. Phys. 35, 557 (1926)
- 2.- P.A.M. Dirac, "Quantum Mechanics" pp. 103-107, Oxford Univ. Press (Clarendon), 1977.
- 3.- M. Born y P. Jordan, Z. Phys. 34, 858 (1925)
- 4.- P. Jordan, Z. Phys. 37, 383 (1926)
- 5.- F. London, Z. Phys. 37, 915 (1926)
- 6.- M. Moshinsky y C. Quesne, J. Math. Phys. 12, 1772 (1971)
- 7.- J. D. Louck, M. Moshinsky y K.B. Wolf, J. Math. Phys. 14, 692 (1973).
- 8.- M. Moshinsky, T.H. Seligman y K.B. Wolf, J. Math. Phys. 13, 901 (1972).
- 9.- M. Moshinsky y T.H. Seligman, J. Math. Phys. 22, 1528 (1981)
- 10.- F. Guillod y P. Huguenin, "Canonical Scattering Transformation in quantum Mechanics", preprint (1982) J.of Phys. A.
- 11.- L. Infeld y J.F. Plebanski, Acta Phys. Polonica 14, 41 (1955)
- 12.- T.H. Seligman y W. Zahn, Helv. Phys. Acta 49, 217 (1976)
- 13.- C.P. Boyer y K.B. Wolf, J. Math Phys. 16, 1493 (1975).
- 14.- P. Kramer, M. Moshinsky y T.H. Seligman, J. Math. Phys. 19, 683 (1978)
- 15.- P.A. Mello y M. Moshinsky, J. Math. Phys. 16, 2017 (1975)
- 16.- M. Moshinsky y T.H. Seligman, Ann. Phys. 114, 243 (1978)
- 17.- M. Moshinsky y T.H. Seligman, Ann. Phys. 120, 402 (1979)
- 18.- J. Deenen, M. Moshinsky y T.H. Seligman, Ann. Phys. 127, 458 (1980).

- 19.- M. Moshinsky y T.H. Seligman, J. Math. Phys. 22, 1338 (1981).
- 20.- R. Hermann, J. Math. Phys. 6, 1768 (1965).
- 21.- B. Kostant, (1970) In "Lecture notes in mathematics", Vol. 170, Springer, Berlin.
- 22.- J. M. Sourian, "Structure des systemes dynamiques", Dunod, Paris (1970).
- 23.- R.J. Blatner, Proc. Symp. Pure. Math. 26, 147 (1973)
- 24.- V. Guillemin y S. Sternberg "Geometric asymptotics". Mathematical Surveys, Vol. 14. Amer. Math. Soc.
- 25.- D. J. Simms y N. M. Woodhouse, "Lectures in Geometric Quantizations" (Springer-Verlag, 1976)
- 26.- J. Sniatycki, "Geometric Quantization and Quantum Mechanics", (Springer-Verlag, 1980)
- 27.- N.M. Woodhouse, "Geometric Quantization" (Clarendon, Oxford, 1980),
- 28.- R. Abraham y J.E. Marsden, "Foundations of Mechanics". (Benjamin-Cumminis, 1978)
- 29.- Dado un conjunto de variables canónicas bajo el paréntesis de Poisson: $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$; $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$, la transformación $\bar{q}_i = \bar{q}_i[q_i, (p_n)]$, $\bar{p}_j = \bar{p}_j[(p_i), (q_j)]$ BIYECTIVA O NO BIYECTIVA, se llama canónica si el paréntesis de Poisson permanece invariante: $\{\bar{q}_i, \bar{p}_j\} = \delta_{ij}$ o bien en forma equivalente, $\pi: (p, q) \mapsto (\bar{p}(p, q), \bar{q}(p, q))$ es transformación canónica si $\pi^* \omega = \omega$ y es difeomorfismo local.
- 30.- M. Moshinsky y T.H. Seligman, J. Phys. A12, L135 (1979)
31. T.H. Seligman, comunicación privada.
- 32.- G. García-Calderón y M. Moshinsky, J. Phys. A, 13, L185 (1980)

- 33.- J.P. Amiet y P. Huguenin, "Quantum Mechanical representation of canonical transformation given by a generating function", preprint (1982).
- 34.- M. Boiteux, J. Math. Phys. 23, 1311 (1982).
- 35.- P. Roman, "Some Modern Mathematics for Physicists and other outsiders", Vol. 2, (Pergamon, 1975).
- 36.- J.F. Plebanski, "Notes from Lectures on Elementary Quantum Mechanical Operators", CIEA, IPN. No publicadas.