

01161.
2es

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
SECCION DE ESTRUCTURAS

TESIS QUE PRESENTA
ROBERTO GOMEZ MARTINEZ
para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERIA

CREDITOS POR TESIS

JURADO

Dr. Roberto Meli P.

Dr. Gustavo Ayala M.

Dr. Eduardo Rukos

Dr. Francisco J. Sánchez Sesna

M.I. Enrique Bazán Zurita

[Handwritten signatures of the jury members]

12 créditos
12 créditos
12 créditos
12 créditos
12 créditos

[Handwritten signature]
JEFE DE LA SECCION

Ing. Julio Dany R.

[Handwritten note]
Vobos
Bach
3/enero/1980

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

CAPITULO 1	INTRODUCCION
CAPITULO 2	DESCRIPCION Y FUNDAMENTACION DEL PROBLEMA
CAPITULO 3	METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS
CAPITULO 4	METODO DE LAS CARACTERISTICAS
CAPITULO 5	METODO DEL ELEMENTO FINITO
CAPITULO 6	METODO DEL ELEMENTO DE FRONTERA
CAPITULO 7	APLICACION ASINTOTICA DEL METODO DE LA INTE- GRAL DE FRONTERA
	CONCLUSIONES
	REFERENCIAS
	APENDICE A
	APENDICE B
	APENDICE C
	FIGURAS

INTRODUCCION

Debido a la necesidad de diseñar apropiadamente las estructuras que se localizan en zonas sísmicas se han originado varios estudios relacionados con el fenómeno de propagación y amplificación de ondas sísmicas, sin embargo, los resultados obtenidos indican que aún son necesarios mas estudios para comprender -- las características de los movimientos en la superficie de la tierra.

Dado que las características de los suelos dependen de muchos factores y sabiendo que el factor de amplificación para un sitio dado varía considerablemente de acuerdo con el movimiento, es necesario tratar de explicar estos factores para comprender de forma general el movimiento del terreno en un sitio dado.

Para definir los movimientos en la superficie de un depósito -

de suelo dado es necesario conocer las características del movimiento en la base del mismo, las propiedades dinámicas del suelo y un método adecuado para calcular dicho movimiento.

Entre los primeros métodos numéricos de análisis para calcular la respuesta en un sitio se encuentra el que idealiza una capa semi-infinita de suelo con una serie de masas concentradas conectadas por medio de resortes y amortiguadores (Idriss y Seed) con los cuales se simulan las propiedades del suelo, se requiere que las propiedades del material sean constantes a lo largo de planos horizontales y que el movimiento que se aplica en la base sea horizontal, o sea, se estudia el suelo como una viga de cortante. Este modelo solo es aplicable en aquellos sitios donde la pendiente en la superficie del depósito y en la base del mismo sea muy poco pronunciada y además, la excitación está dada por ondas sísmicas del tipo S que se propagan verticalmente.

Dada la complejidad del problema de propagación de ondas en medios de geometría irregular los modelos unidimensionales solo proporcionan una idea vaga del problema real. Un paso hacia -- adelante lo representan los modelos bidimensionales, que aunque más costosos, incluyen factores no manejables con una teoría unidimensional, dentro de esta línea se han realizado varios trabajos (Idriss et al), sin embargo su utilidad práctica en el campo de la ingeniería sísmica es cuestionable debido a lo limitado del rango de frecuencias investigado y a las incertidumbres inherentes en los modelos numéricos empleados.

Desde 1977 hasta la fecha se han venido desarrollando en el Instituto de Ingeniería (UNAM) varios proyectos para tratar de analizar el fenómeno de Amplificación Dinámica, entre ellos se encuentran el que utiliza el método de las características (Ayala y Reyes) para el estudio de amplificaciones de ondas P y SV, el que utiliza el método del elemento finito junto con el concepto de Fronteras activas (Aranda y Ayala) para el estudio de amplificación de ondas SH y el que emplea ecuaciones integrales y distribución de fuentes sísmicas para resolver el problema de amplificación (Sánchez). Con estos métodos se han obtenido resultados bastante aceptables, sin embargo, algunos de ellos han sido interrumpidos por diversas causas y su aplicabilidad práctica aun no ha sido completamente explotada.

En este trabajo se estudia la formulación numérica del fenómeno de Amplificación Dinámica originado por ondas del tipo P, SV y SH.

En el capítulo 2 se describe el problema y se fundamenta el mismo con base en la teoría de propagación de ondas en medios elásticos. En el capítulo 3 se presenta la forma de aplicar el método de las diferencias finitas al fenómeno de amplificación de ondas SH, se discuten algunas aproximaciones utilizadas por varios autores y se hace énfasis en el tratamiento de fronteras e interfases. En el siguiente capítulo se desarrolla el método de las características para ondas del tipo SH tomando como base el trabajo realizado por Ayala y Reyes para ondas P y SV y se plantea el conjunto de ecuaciones necesario para la modela-

ción de fronteras e interfaces.

En el capítulo 5 se plantea el método del elemento finito, se revisa y extiende el concepto de fronteras activas, se calculan los coeficientes de reflexión para ondas P, SV y SH con base en este concepto y se comparan con los obtenidos mediante otro criterio, así mismo, se presentan y comparan las amplitudes normalizadas de los desplazamientos para la incidencia normal de ondas SH sobre un valle aluvial semicilíndrico y para la incidencia normal de ondas P y SV sobre un cañon con la misma geometría.

En el capítulo 6 se presenta la formulación directa e indirecta del método de los elementos de frontera derivados del principio de los trabajos virtuales como un procedimiento general para la solución de problemas de elastodinámica, así mismo, se plantea el tratamiento de fronteras infinitas y se presenta una posible forma de tratar numéricamente las singularidades.

Por último, en el capítulo 7 se describe una forma aproximada de aplicar los elementos de frontera en el estudio de problemas de radiación ya que con ellos se pueden definir condiciones -- aproximadas en las fronteras de regiones que se encuentran alejadas del dominio en estudio.

DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Hasta la fecha no ha sido posible definir un modelo general mediante el cual se pueda evaluar la influencia de las condiciones locales en las características de los sismos. La aplicabilidad de los modelos existentes esta restringida ya que no cubren todo el rango de situaciones que se pueden presentar en la realidad. Por lo regular, estos modelos consideran solo de manera aproximada la influencia de las características geológicas y topográficas de un sitio dado (refs 1,2)

El conocimiento de la influencia de las condiciones locales es útil en los estudios de microregionalización donde es necesario formular criterios que permitan definir para un sitio dado espectros de diseño. Estudios realizados han demostrado la influencia que las características locales de algunos sitios han tenido sobre el daño observado en las estructuras (ref 3)

Entre los factores que mas influyen en las características de los movimientos sísmicos se encuentran las características del mecanismo generador y la trayectoria que siguen las ondas para llegar al sitio en consideración. Ambos factores determinan el tipo o tipos de ondas que dan lugar al movimiento.

Observaciones realizadas han demostrado que dependiendo del mecanismo generador se originan diferentes tipos de ondas, mismas que al viajar a través de las diferentes capas de la corteza terrestre sufren fenómenos de reflexión, refracción y dispersión que modifican radicalmente sus características en la fuente. Estos fenómenos normalmente se concentran en las capas de suelo superficial, de aquí, la importancia que tiene para el ingeniero el estudio de la influencia del suelo y la topografía local en los movimientos sísmicos

La evaluación de daños producidos en sismos recientes ha proporcionado pruebas cada vez más convincentes de la importancia de las condiciones locales. Se ha visto que aún en zonas localizadas a poca distancia una de la otra existen marcadas diferencias en el movimiento de la superficie (ref 4). Estas diferencias se deben principalmente a los cambios

en espesor de los depósitos de suelo bajo la superficie y a las diferentes características topográficas, sobre todo si se tienen zonas de transición entre suelo y roca como se muestra en la fig 1. En este caso, el tamaño de la irregularidad topográfica, el tipo de suelo y la longitud de onda dominante son factores muy importantes en este fenómeno ya que si la irregularidad es muy pequeña en relación a la longitud de onda el fenómeno de amplificación se puede despreciar. Lo mismo sucede si la irregularidad es muy grande en relación a la longitud de onda. Por lo regular en los estudios sismológicos se consideran estas condiciones, sin embargo, para fines de Ingeniería Sísmica es necesario considerar por ejemplo pendientes pronunciadas y longitud de ondas de interés en el diseño sísmico.

En la ref 5 se proponen para su estudio algunas condiciones topográficas y geológicas de utilidad en ingeniería sísmica, así mismo, se sugiere que se utilicen frecuencias mayores de 1 Hz o longitudes de onda menores de 1000 m. Sin embargo, independientemente del método que se utilice, la evaluación de la respuesta en un sitio para diferentes frecuencias puede resultar, demasiado costosa, por lo que es necesario utilizar métodos de interpolación con ayuda de los cuales se pueden construir las funciones de transferencia para el rango de frecuencias de interés.

Ya que la experiencia ha demostrado que la influencia de las configuraciones topográficas y geológicas es muy importantes en la distribución local de amplificaciones, las que pueden ser críticas en algunas estructuras, estas se deben considerar en las especificaciones de diseño. Por lo regular, los reglamentos no consideran las variaciones posibles de los movimientos en la superficie.

Se considera (ref 5) que las condiciones topográficas y geológicas como las que se muestran en la fig 2 pueden formar las bases para la modelación y evaluación de los futuros modelos ingenieriles, así mismo es conveniente, desde el punto de vista de costo y eficiencia, considerar como superficie plana a la que se encuentra junto a la irregularidad.

PROPAGACION DE ONDAS EN MEDIOS ELASTICOS

Con el objeto de fundamentar el contenido de los capítulos siguientes, en esta sección se presentara una introducción a la teoría de propagación de ondas en medios elásticos

Consideremos un cuerpo en equilibrio definido por su volumen V y su frontera S (fig 3).

El cuerpo esta sometido a un sistema de fuerzas por unidad de masa \underline{b} y por unidad de volumen definido por \underline{B} y en su frontera actúan fuerzas exteriores o tracciones \underline{t}

El equilibrio se establece de forma general con la segunda ley de Newton, misma que en notación indicial se escribe como

$$\int_S t_i dS + \int_V \rho B_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i dV \quad 2.1$$

donde ρ es la densidad de masa del cuerpo, t_i , B_i , u_i son las componentes de los vectores de fuerzas externas, fuerzas de cuerpo y desplazamiento (\underline{u}) respectivamente, el punto indica derivación con respecto al tiempo. Al sustituir en la ec 2.1 la relación de esfuerzos de Cauchy (ref 6) dada por

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad 2.2$$

donde σ_{ij} , son las componentes del tensor de esfuerzos y n_j es el vector normal unitario a la superficie, se obtiene

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho B_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i dV \quad 2.3$$

Si ahora en esta ecuación se aplica el teorema de Gauss (ref 7) que relaciona una integral de volumen con una integral de superficie se obtiene

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho B_j - \rho \ddot{u}_j \right) dV = 0 \quad 2.4$$

y como esto se cumple para cualquier volumen V, entonces la ecuación de equilibrio quedará finalmente.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + p B_j = \rho \ddot{u}_j \quad 2.5$$

Si se supone que el material que ocupa el volumen V es elástico, lineal, homogéneo e isótropo, entonces de acuerdo con la ley de Hooke (ref 6) las relaciones constitutivas del material se definen como

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad 2.6$$

donde λ y G son las constantes elásticas de Lamé, δ_{ij} es una delta de Kronecker que se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

y las ϵ_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones (ref 6) definido por las relaciones desplazamiento-deformación como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 2.7$$

Al sustituir las relaciones desplazamiento-deformación en las ecuaciones constitutivas del material y a su vez esta en las ecuaciones de equilibrio se llega a las siguientes relaciones

$$G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + p B_i = \rho \ddot{u}_i \quad 2.8$$

conocidas como ecuaciones de movimiento de Navier

En forma vectorial y despreciando las fuerzas de cuerpo, la ecuación anterior se puede expresar como

$$G \nabla^2 \underline{u} + (\lambda + G) \nabla \nabla \cdot \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad 2.9$$

donde ∇ es el gradiente, $\nabla \cdot$ es la divergencia y ∇^2 es el operador Laplaciano.

Según el teorema de Helmholtz la ec. 2.9 admite una solución si \underline{u} se expresa como una combinación de un potencial escalar ψ y un potencial vectorial $\underline{\psi}$, es decir

$$\underline{u} = \nabla \psi + \nabla \wedge \underline{\psi} \quad 2.10$$

donde $\nabla \wedge$ representa al rotacional

Ya que la ec 2.9 relaciona las tres componentes del vector de desplazamiento con cuatro funciones, es necesario para definir el problema una restricción adicional, o sea debe existir una restricción entre los componentes de $\underline{\psi}$. Esta restricción se escribe como

$$\nabla \cdot \underline{\psi} = 0 \quad 2.11$$

Si se sustituye la ec 2.10 en la 2.9 y se considera esta restricción se obtiene

$$\nabla \left[(\lambda + 2G) \nabla^2 \psi - \rho \ddot{\psi} \right] - \nabla \wedge \left[G \nabla^2 \underline{\psi} - \rho \ddot{\underline{\psi}} \right] = 0$$

La cual solo se cumple si

$$\nabla \left[(\lambda + 2G) \nabla^2 \psi - \rho \ddot{\psi} \right] = 0 \quad 2.12$$

y

$$\nabla_{\Lambda} \left[G \nabla^2 \underline{\Psi} - \rho \ddot{\underline{\Psi}} \right] = 0 \quad 2.13$$

la primera de estas ecuaciones nos lleva a

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{C_p^2} \ddot{\varphi} \quad 2.14$$

y la segunda a

$$\nabla^2 \underline{\Psi} = \frac{1}{C_s^2} \ddot{\underline{\Psi}} \quad 2.15$$

donde

$$C_p^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \quad C_s^2 = \frac{G}{\rho} \quad 2.16$$

La aplicación del teorema de Helmholtz permite desacoplar el sistema de ecuaciones original dado por la ec 2.9 en un sistema de ecuaciones definido por las ecs 2.14 y 2.15. Cualquiera de ellas se conoce con el nombre genérico de ecuación de onda. De aquí, es posible demostrar (ref 8) que a través de un medio elástico infinito se pueden propagar dos tipos de perturbaciones, una con velocidad C_p asociada al potencial φ y la otra con velocidad C_s , asociada al potencial $\underline{\Psi}$. La primera se conoce con el nombre de onda de dilatación (onda P, onda de compresión) y la segunda como onda de distorsión (onda S, onda de cortante). La onda de dilatación produce cambios volumétricos en el cuerpo mientras que la de cortante distorsiones en el cuerpo. El problema quedará resuelto si se determinan los potenciales φ y $\underline{\Psi}$ que satisfagan las ecs 2.14 y 2.15 y además cumplan con las condiciones iniciales y de frontera. Una alternativa de interés práctico la representa el considerar un frente de onda plano que se propaga en un espacio elástico homogéneo e isótropo. En este caso, se puede demostrar que esta solución esta dada por

$$\varphi = \varphi_1(x_1|_i + C_1 t) + \varphi_2(x_1|_i - C_1 t) \quad 2.17$$

$$\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_1(x_1|_i + C_1 t) + \underline{\Psi}_2(x_1|_i - C_1 t) \quad 2.18$$

donde φ_1 , φ_2 , ψ_1 y ψ_2 son funciones arbitrarias de sus argumentos y l_i representa los cosenos directores de la normal al frente de la onda (fig 4)

Si se considera que las ondas están polarizadas en el plano $x_1 x_3$, esto es el plano que define al frente de onda normal al plano $x_1 x_3$, los potenciales φ y ψ son funciones solo de φ_1 y ψ_2 y por lo tanto los desplazamientos se escriben de la ec 2.10 como

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \quad 2.19$$

$$u_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \quad 2.20$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \quad 2.21$$

En este caso los componentes u_1 y u_3 son los asociados a la onda P y a la componente de onda S sobre el plano de polarización, onda SV. La componente u_2 esta asociada con la componente horizontal de la onda S, onda SH. Los potenciales φ y ψ , soluciones de las ecs 2:14 y 2:15, considerando que la onda es armónica, que se propaga en la dirección positiva del eje x_1 y que incide en una superficie libre, pueden escribirse como

$$\varphi = f(x_3) \exp[ik(ct - x_1)] \quad 2.22$$

$$\psi = g(x_3) \exp[ik(ct - x_1)] \quad 2.23$$

donde c es la velocidad aparente de propagación de la onda en la dirección del eje x_1 , k es el número de onda resultado de dividir la frecuencia entre la velocidad de propagación de las ondas y $f(x_3)$ y $g(x_3)$ son funciones que describen la forma en que la amplitud de las ondas cambian con la profundidad. Al sustituir las ecs 2.22 y 2.23 en las 2.14 y 2.15 respectivamente se llega a una ecuación diferencial de 2º orden, la que al ser resuelta para el caso de ondas P y SV nos conduce a

$$f(x_3) = A_1 \exp \left[ikx_3 \sqrt{\frac{c^2}{C_p^2} - 1} \right] + A_2 \exp \left[-ikx_3 \sqrt{\frac{c^2}{C_p^2} - 1} \right] \quad 2.24$$

$$g(x_3) = B_1 \exp \left[ikx_3 \sqrt{\frac{c^2}{C_s^2} - 1} \right] + B_2 \exp \left[-ikx_3 \sqrt{\frac{c^2}{C_s^2} - 1} \right] \quad 2.25$$

por lo que los potenciales se expresaran de la siguiente forma

$$\varphi = A_1 \exp \left[ik(ct - x_1 + \sqrt{\frac{c^2}{C_p^2} - 1} x_3) \right] + A_2 \exp \left[ik(ct - x_1 + \sqrt{\frac{c^2}{C_p^2} - 1} x_3) \right] \quad 2.26$$

$$\underline{\psi} = B_1 \exp \left[ik(ct - x_1 + \sqrt{\frac{c^2}{C_s^2} - 1} x_3) \right] + B_2 \exp \left[ik(ct - x_1 + \sqrt{\frac{c^2}{C_s^2} - 1} x_3) \right] \quad 2.27$$

o en forma compacta

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2$$

Para el caso de una onda P incidente se ha demostrado (ref 9) que esta refleja tanto una onda P como una onda SV. Con estas circunstancias los potenciales se definen como

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad 2.28$$

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_2 \quad 2.29$$

y en el caso de que se tenga una onda SV incidente se reflejaran tanto una onda SV como una onda P, por lo que ahora los potenciales quedaran

$$\varphi = \varphi_2 \quad 2.31$$

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2 \quad 2.32$$

Para una onda incidente SH se ha demostrado (ref 9) que unicamente se refleja una onda SH, por lo tanto

$$\psi = \psi_2 \quad 2.32$$

Los valores A_1 , A_2 , B_1 y B_2 dependen de las condiciones que se tengan en la frontera

Rayleigh (ref 10) demostró que en la superficie libre del plano de polarización P, SV, no solo pueden viajar ondas de cuerpo sino también ondas de superficie cuya amplitud es función de la frecuencia y de la profundidad. En este caso los potenciales se expresan como

$$\varphi = A_2 \exp [ik(ct - x_1)] \quad 2.33$$

$$\psi = B_2 \exp [ik(ct - x_1)] \quad 2.34$$

Se ha demostrado que en las ondas de Rayleigh la amplitud del desplazamiento disminuye exponencialmente con la distancia a la superficie libre, es decir A_2 y B_2 son funciones exponenciales de x_3 .

Sustituyendo las ecs. 2.33 y 2.34 en los ecs 2.19 y 2.20 y a su vez sustituyendo estas en las relaciones que nos definen una superficie libre en $x_3 = 0$ se obtienen dos ecuaciones homogéneas para las amplitudes A_2 , B_2 . Eliminando de estas ecuaciones las amplitudes se obtiene una ecuación cubica en función de la relación C_R/C_S , la que puede ser resuelta si se conoce el valor del módulo de Poisson ν , con lo que se demuestra que las ondas de superficie son no dispersivas, o sea, la velocidad de propagación no es función de la frecuencia y solo depende de las propiedades elásticas del material. De esta manera se demuestra (ref 10) que las funciones que definen el desplazamiento son

$$U(kx_3) = \left[-\exp(-q/k) + \frac{2qr}{r^2+1} \exp(-r/k) \right] (kx_3) \quad 2.35$$

$$W(kx_3) = \left[\frac{2qr}{r^2+1} \exp(-r/k) + \frac{q}{k} \exp(-q/k) \right] (kx_3) \quad 2.36$$

donde

$$q = \frac{E}{C_p} \sqrt{\frac{C_p^2}{c^2} - 1} \quad 2.37$$

$$r = \frac{E}{C_s} \sqrt{\frac{C_s^2}{c^2} - 1} \quad 2.38$$

En los párrafos anteriores se ha presentado la teoría asociada con los principales tipos de ondas que se propagan en un semi-espacio elástico considerando que el frente de ondas es plano, sin embargo, cerca de los mecanismos generadores o fuentes que dan lugar a los problemas de radiación no se puede considerar que el frente de las ondas sea plano sino que existen ondas que se pueden aproximar con las llamadas ondas cilíndricas y esféricas (ref 8). Por lo cual, si se considera que la región en estudio esta a una distancia lo suficientemente lejana de la fuente, el frente de ondas se puede considerar como plano, si esto no ocurre, se debe hacer una corrección y considerar la curvatura del frente de ondas, sin embargo, esto implica un grado mayor de complejidad. Por otro lado, la existencia de estratificación e irregularidades topográficas ocasiona combinaciones de ondas que en general son dispersivas.

METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

El método de las diferencias finitas se ha utilizado en la aproximación de las ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera que gobiernan el problema de propagación de ondas. La aproximación consiste en sustituir para el punto $p_{m, n}^p$ como se muestra en la fig 5 (los subíndices se refieren a la colocación espacial del punto y el super-índice a la temporal) cada derivada de la ec 2.9 por una ecuación de diferencias en términos de los valores de la función en el punto considerado y en puntos vecinos. La derivada temporal se sustituye por valores en el intervalo considerado y en tiempos anteriores. Como resultado se obtiene un sistema de ecuaciones re cursivo, el cual se resuelve junto con las condiciones iniciales de frontera.

A continuación se presenta una aplicación de este método al problema de propagación de ondas SH, el cual está gobernado por una ecuación diferencial parcial del tipo hiperbólico.

El primer paso consiste en dividir el espacio continuo x, z, t (en este capítulo por conveniencia se utilizará notación escalar) en una malla rectangular de tal forma que el campo de desplazamientos queda determinado por los valores en los puntos nodales. Si se escoge un espaciamiento constante $\Delta x, \Delta z$ y Δt cada nodo quedará colocado de una sola forma con respecto a un origen arbitrario de coordenadas por los índices m, n, p , o sea, por ejemplo, el desplazamiento v estará dado por

$$v_{m,n}^p = v(m \Delta x, n \Delta z, p \Delta t) \quad 3.1$$

Utilizando la notación anterior se puede establecer una aproximación para la primera y segunda derivadas de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{in} = \frac{v_{m+1} - v_m}{\Delta x} \quad 3.2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{m+1} - 2v_{m,n} + v_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

este esquema se conoce como el de diferencias finitas centrales (ref. 11)

De la misma forma se aproximan las derivadas con respecto a z y t .

La ecuación diferencial parcial que rige el movimiento de una onda SH en un medio no homogéneo donde se desprecian las fuerzas de cuerpo se puede demostrar de la ec 2.9 que esta dada por

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad 3.3$$

donde

$G = G(x, z)$ es el módulo de rigidez al cortante

$\rho = \rho(x, z)$ es la densidad de masa

$v =$ desplazamiento

Si consideramos

$$G(x, z) = \text{constante}$$

$$\rho(x, z) = \text{constante}$$

entonces la ec 3.3 nos quedará

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad 3.4$$

al sustituir las aproximaciones para la segunda derivada definidas con la ec 3.2 y agrupando términos se obtiene una ecuación para el desplazamiento en una forma explícita

$$v_{m,n}^{p+1} = 2v_{m,n}^p - v_{m,n}^{p-1} + C_s^2 \Delta t \left[\frac{v_{m+1,n}^p - 2v_{m,n}^p + v_{m-1,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{m,n+1}^p - 2v_{m,n}^p + v_{m,n-1}^p}{(\Delta z)^2} \right]$$

esta ecuación junto con las condiciones de frontera y condiciones iniciales nos definen por completo el problema. En el caso de que el medio en que se propagan las ondas no sea homogéneo podemos escribir la ec 3.3 de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[C_s^2(x, z) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_s^2(x, z) \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$

donde $C_s^2 = G/\rho$ es la velocidad de propagación, que se considera varía espacialmente. Kelly et al (ref 12) discuten algunas aproximaciones para este tipo de derivadas y concluyen que las que mejor se comportan son

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_s^2(x, z) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{C_{s,m+1/2,n}^2 (v_{m+1,n}^p - v_{m,n}^p) - C_{s,m-1/2,n}^2 (v_{m,n}^p - v_{m-1,n}^p)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[C_s^2(x, z) \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \frac{C_{s,m,n+1/2}^2 (v_{m,n+1}^p - v_{m,n}^p) - C_{s,m,n-1/2}^2 (v_{m,n}^p - v_{m,n-1}^p)}{(\Delta z)^2}$$

donde

$$C_{s_{m+1/2},n} = \frac{C_{s_{m+1},n}^2 + C_{s_{m,n}}^2}{2}$$

$$C_{s_{m-1/2},n} = \frac{C_{s_{m-1},n}^2 + C_{s_{m,n}}^2}{2}$$

Se ha demostrado (ref 13) que para una discretización espacial uniforme los esquemas más elementales de diferencias finitas y de elementos finitos son idénticos. Se puede demostrar que si se utilizan las ideas de isoparametría desarrolladas en el método de los elementos finitos es posible derivar esquemas para mallas no uniformes (ref 14). Nótese que en todas las expresiones, se ha considerado Δx y Δz como constantes, sin embargo, se puede incluir dentro del programa de cálculo valores variables de estos incrementos aunque esto implica un aumento en el costo del mismo.

CONDICIONES DE FRONTERA

Cuando se tienen cambios de rigidez dentro de la superficie que se está estudiando, o sea, existen interfases, las condiciones que se deben cumplir son las de continuidad de esfuerzos normales y de desplazamiento a través de las mismas. Estas condiciones se expresan de la siguiente forma

$$\left(G \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_I = \left(G \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_II$$

$$v_I = v_{II}$$

donde los subíndices I y II se refieren a los materiales que se encuentran a ambos lados de la interfase y η es la normal a la interfase. La condición definida en las ecuaciones anteriores presenta problemas cuando la interfase es curva. Una forma de resolver este problema es utilizando el artificio que presenta Boore (ref 15) el cual consiste en construir una normal a la curva en el punto donde se quiere calcular el desplazamiento (fig 6), enseguida se calculan los desplazamientos mediante una interpolación lineal en los puntos donde la recta normal interseca a la malla y la aproximación se establece con la siguiente ecuación

$$G_1 \frac{v_D^{p+1} - v_C^{p+1}}{DC} = G_2 \frac{v_{C'}^{p+1} - v_D^{p+1}}{DC'}$$

con la cual se obtiene el nuevo desplazamiento en el punto de la interfase D, o sea, v_D^{p+1} . DC y DC' son las longitudes a lo largo de la recta normal de los puntos C y C' a D (fig 6).

La condición de frontera en la superficie libre se expresa como

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

FRONTERAS ARTIFICIALES

Las fronteras artificiales son necesarias para restringir la extensión del medio debido a las limitaciones que se tienen, tanto económicas como en capacidad de memoria de las computadoras. Las condiciones que se deben definir en estas fronteras dependen del tipo de problema que se este estudiando.

Si consideramos el de una onda SH incidiendo verticalmente sobre un estrato superficial que tiene una interfase irregular pero simétrica, se puede considerar que el plano de simetría es una frontera con la condición $\partial v / \partial \eta = 0$, o sea es una superficie libre (fig 7). Para otros casos, se han desarrollado varios esquemas para el estudio de las fronteras verticales, entre ellos destaca el de Boore (ref 15) el cual considera las siguientes opciones.

- i) Si la irregularidad es periódica se puede considerar como superficie libre (fig 8)
- ii) Se pueden calcular las condiciones de frontera considerando que la onda incide verticalmente sobre un estrato de espesor h (fig 9). Esto es, se ignora el efecto de irregularidad.

Para la frontera inferior las condiciones de frontera se calculan con la solución analítica al problema unidimensional ignorando también el efecto de la irregularidad. La inclusión de fronteras artificiales, cualquiera que sea la forma en que se consideren originan la aparición de fuentes secundarias que producen movimientos espurios en la superficie ya que la onda al ser reflejada cuando choca con la superficie vuelve a ser reflejada por las fronteras artificiales.

Por otra parte, Engquist y Majda (ref 16) han desarrollado una jerarquía de condiciones de frontera locales que aproximan

condiciones no-locales tanto en el espacio como en el tiempo. Desde el punto de vista de cálculo, las condiciones son imprácticas, ya que para conocer el valor del desplazamiento en un punto de la frontera para un determinado intervalo de tiempo es necesario conocer la información en todos los intervalos de tiempo anteriores y sobre todos los puntos de la frontera. Para las condiciones de frontera locales, fundamentados en una aproximación paraxial proponen la siguiente jerarquía de condiciones de frontera absorbentes con $C_g = 1$

$$1) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad 3.6$$

$$2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad 3.7$$

$$3) \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} - \frac{3}{4} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial z^2} = 0 \quad 3.8$$

etc

donde se considera que el eje x es paralelo a la dirección de propagación y el origen se encuentra en la frontera. Para incidencia normal la reflexión casi es nula mientras que para incidencias a 45° estas condiciones de frontera reflejan el 17%, 3% y .5% respectivamente de la amplitud de la onda incidente. La primera de estas, ec 3.6 tiene el mismo significado físico que la condición de absorción de Lysmer y Kuhmeyer (ref 17) mientras que para las dos restantes aún no se conoce alguna interpretación física. Por ejemplo utilizando el esquema de diferencias finitas centrales, las ecs 3.6 y 3.7 se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{v_{m+1,n}^p - v_{m,n}^p}{2\Delta x} - \frac{v_{m,n}^{p+1} - v_{m,n}^{p-1}}{2\Delta t} = 0$$

$$\frac{(v_{m+1,n}^{p+1} - v_{m+1,n}^{p-1}) - (v_{m-1,n}^{p+1} - v_{m-1,n}^{p-1})}{4\Delta x \Delta t} - \left[\frac{v_{m,n}^{p+1} - 2v_{m,n}^p + v_{m,n}^{p-1}}{(\Delta t)^2} \right] + \left[\frac{v_{m,n+1}^p - 2v_{m,n}^p + v_{m,n-1}^p}{(\Delta z)^2} \right] \frac{1}{2} = 0$$

En las expresiones anteriores, se puede apreciar que a medida que aumenta el grado de aproximación aumenta el número de puntos necesarios para encontrar el valor del desplazamiento en la frontera, así mismo aumenta el tiempo de cálculo. En la derivación de estas condiciones de frontera se consideró que la incidencia de las ondas es normal; en el caso de que se tenga información sobre el ángulo de incidencia de las ondas las aproximaciones se deben desarrollar sobre esta dirección. Si no se tiene información respecto al ángulo de incidencia es posible desarrollar condiciones aproximadas del tipo de las que se presentan en el capítulo 5 donde se considera para cada punto sobre la frontera un cierto rango de ángulos de incidencias.

Ang y Newmark (ref 18) también utilizan el esquema de las diferencias finitas centrales para modelar fronteras transmisoras definidas a partir del principio de D'Alembert aplicado a modelos discretos. Se aproxima la ecuación de movimiento unidimensional de la siguiente forma

$$\frac{\sigma^{p+1} - \sigma^{p-1}}{\Delta x} = \rho \ddot{u}^p(b) \quad 3.9$$

donde $u(b)$ es la aceleración en el punto b de la frontera en el instante p y $\sigma^{p(b+1)}$ y $\sigma^{p(b-1)}$ son los esfuerzos en el instante p en los puntos $b+1$ y $b-1$ respectivamente (fig 10). Como el esfuerzo $\sigma^{p(b+1)}$ es desconocido, su valor se calcula considerando que la onda de esfuerzos recorre la distancia entre dos masas concentradas en el siguiente tiempo

$$p = \frac{\Delta x}{c}$$

donde c es la velocidad de propagación, además se considera que el esfuerzo en el tiempo $(p-n)$ en el punto $(b-1)$ está dado por

$$\sigma^{p-n}(b-1)$$

el cual es igual al esfuerzo en el punto $b+1$ para el tiempo p , o sea

$$\sigma^p(b+1) = \sigma^{p-n}(b-1)$$

por lo que la ec 3.9 quedará

$$\frac{\sigma^{p-n}(b-1) - \sigma^p(b-1)}{\Delta x} = \rho \ddot{u}^p(b)$$

Esta formulación es equivalente a las fronteras viscosas propuestas por Lysmer y Kuhmeyer mismas que se discuten en el capítulo 5. Sin embargo dadas las incertidumbres en los ángulos de incidencia una formulación en dos dimensiones no se

justifica analíticamente.

Entre los problemas que se presentan en la formulación del método de las diferencias finitas se encuentra la elección de los intervalos tanto espaciales como del tiempo, ya que pueden conducir a errores de convergencia y de dispersión de ondas. Los errores por dispersión se minimizan si se aumenta la densidad de puntos en la malla o bien se utilizan esquemas de un orden superior (ref 12). Un modelo convergente se logra si la ecuación de diferencias se aproxima a la solución del modelo continuo a medida que se disminuyen los incrementos espaciales. La convergencia está muy relacionada con la estabilidad. Para el caso de diferencias finitas centrales el límite de estabilidad está dado por (ref 15)

$$\Delta t \leq \frac{1}{C_1} \frac{\Delta x}{\sqrt{2}}$$

INICIALIZACION DEL PROBLEMA

El empleo de diferencias finitas centrales en el tiempo implica que para iniciar el problema se requiere de artificios ya que la solución en el tiempo $t = -\Delta t$ no se conoce.

En este caso es posible diseñar esquemas de diferencias hacia adelante que solo incluyan como dato el valor de la función en el tiempo $t = 0$.

Como se mencionó anteriormente, el fenómeno de dispersión está

asociado con los intervalos espaciales y temporales. En la fig 11 se puede apreciar la influencia de estos factores. En ella se grafica la variación del desplazamiento con respecto al tiempo para un pulso de presión variable que incide sobre una cuña de 90° en la cual, la velocidad es nula. Dicha cuña se encuentra dentro de un medio acústico (ref 12). La línea llena representa la solución analítica mientras que los puntos representan la solución obtenida con el método de las diferencias finitas.

De lo anterior se deduce que dados los mejores resultados que se obtienen utilizando esquema de diferencias de orden superior o aumentando la densidad de puntos del dominio, las principales limitaciones prácticas de este método son el tiempo de computadora y la capacidad de memoria de la misma.

METODO DE LAS CARACTERISTICAS

En este capítulo se presenta el método de las características aplicado al problema de propagación de ondas SH. Si el problema se idealiza como lineal y bidimensional, las ecuaciones que lo gobiernan son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de primer orden que puede resolverse eficientemente por el método convencional (ref 19) de las características. Se ha demostrado que la utilización de aproximaciones comunes en el método de los elementos finitos conduce a un procedimiento numérico de integración paso a paso (ref 14).

Para el cálculo de los valores de las funciones y de sus derivadas en los puntos seleccionados del dominio discretizado de solución se aplican las funciones de interpolación empleadas en el método del elemento finito..

Para eliminar las reflexiones artificiales que aparecen en las fronteras ficticias se utiliza una aproximación de la ecuación escalar de onda (ref 16) con la que se establece una ecuación diferencial parcial para cada una de las fronteras, esta ecuación junto con las establecidas mediante el método de las características minimizan las reflexiones falsas.

Finalmente se establece el conjunto de ecuaciones y condiciones necesarias para resolver el problema de medios con diferentes tipos de materiales.

FORMULACION ANALITICA

La propagación de onda del tipo SH polarizadas esta gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales dado por la ecuación de equilibrio dinámico establecida en la ec 2.3

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = 0 \quad 4.1$$

y de las relaciones constitutivas dada por la ec 2.6

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{yx}}{\partial x} - G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = 0 \quad 4.2$$

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{yz}}{\partial z} - G \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = 0 \quad 4.3$$

siendo $\hat{\tau}_{yx}$, $\hat{\tau}_{yz}$ los componentes del tensor de esfuerzos, \hat{v} el componente del tensor de velocidades, ρ la densidad de masa y G el módulo de rigidez al cortante.

Al definir las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{t}}{b} \frac{C_s}{b} & v &= \hat{v}/C_s \\ x &= \frac{\hat{x}}{b} & \tau_{yx} &= \hat{\tau}_{yx}/\rho C_s^2 \\ z &= \frac{\hat{z}}{b} & \tau_{yz} &= \hat{\tau}_{yz}/\rho C_s^2 \end{aligned}$$

donde b es el ancho característico del elemento y sustituir las en las ecs 4.1, 4.2 y 4.3 se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas adimensionales de primer

orden

$$\frac{\partial r_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial r_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial r_{yx}}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad 4.4$$

$$\frac{\partial r_{yz}}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Este sistema lo podemos escribir de manera compacta como

$$a_{\mu\nu i} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} = 0 \quad \mu, \nu, i = 1, 2, 3 \quad 4.5$$

donde $a_{\mu\nu i}$ son coeficientes conocidos, y

$$x_i = \begin{Bmatrix} x \\ z \\ t \end{Bmatrix} \quad u_\nu = \begin{Bmatrix} r_{yx} \\ r_{yz} \\ v \end{Bmatrix}$$

Si en la ec 4.5 realizamos una transformación a las coordenadas independientes x'_i , obtendremos

$$a_{\mu\nu j} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_\nu}{\partial x'_i} = 0$$

Si se establece que en $x'_3 = \text{cte}$ u_ν es una función conocida de x'_1 y x'_2 se tiene

$$a_{\mu\nu} \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial u_\nu}{\partial x'_i} = b_j$$

donde

$$b_\mu = -a_{\mu\nu} \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial u_\nu}{\partial x'_i} \quad i = 1, 2$$

son funciones conocidas.

Las superficies $x'_3 = \text{cte}$ se definen como características (ref 20) si

$$\left| a_{\mu\nu} \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} \right| = 0$$

o

$$\left[A_{m\frac{\partial x'_i}{\partial x'_m}} \right] \left[B_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x'_l} \right] = 0 \quad 4.6$$

Esta ecuación se satisface si

$$A_{m\frac{\partial x'_i}{\partial x'_m}} = 0 \quad 4.7$$

$$B_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x'_l} = 0 \quad 4.8$$

donde $\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j}$ son proporcionales a los cosenos directores n_1, n_2, n_3 de las normales a las superficies $x'_3(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}$.

Se ha demostrado (ref 21) que la ec 4.7 representa una familia de planos normales al eje t y no proporciona información útil, mientras que la ec 4.8 ahora escrita como

$$B_{ij} n_i n_j = 0$$

define un cono cuádrico, la que junto con la restricción

$$n_i n_i = 1 \quad 4.9$$

definen las normales para una familia de superficies x'_j como funciones de un parámetro independiente θ el cual por conveniencia se elige como el ángulo entre el eje x_1 y la proyección de la normal n_1 en el plano x_1, x_3 (fig 12). La normal n_1 nos define un conjunto infinito de superficies características a través de cada punto del espacio x_i y tienen como envolvente un cono cuya ecuación es

$$B_{ij}^{-1} dx_i dx_j = 0$$

Para definir los puntos que se localizan en el conoide utilizamos el parámetro independiente τ , por lo tanto, las curvas $\theta = \text{cte}$ se encuentran simultáneamente en el cono y en la superficie característica definida por ese valor particular de θ , a estas líneas se les conoce con el nombre de bicaracterísticas y tienen como ecuaciones paramétricas

$$dx_j = [\lambda_j + \mu_j \cos \theta + \nu_j \sin \theta] d\tau$$

donde λ_i, μ_i, ν_i son coeficientes constantes.

Se ha demostrado (ref 20) que si $x'_3(x_1, x_2, x_3) = \text{cte}$, es una superficie característica entonces existe un vector nulo tal que

$$l_\mu a_{\mu\nu j} \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 0$$

y que las combinaciones lineales

$$l_\mu a_{\mu\nu j} \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 0 \quad 4.10$$

proporcionan ecuaciones diferenciales a lo largo de las bicaracterísticas conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

De las ecs 4.9 y 4.10 obtenemos el vector nulo

$$l = \left\langle 1, -\frac{\sqrt{\alpha\beta} \cos \theta}{\rho}, -\frac{\sqrt{\alpha\beta} \sin \theta}{\rho} \right\rangle$$

el cual a promultiplicar al sistema de ecuaciones 4.4 nos conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} - \alpha \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\rho} \cos \theta \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial t} + \sqrt{\alpha\beta} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} \\ - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\rho} \sin \theta \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial t} + \sqrt{\alpha\beta} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad 4.11$$

De la regla de la cadena se tiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

si la sustituimos en la ec 4.11 obtenemos la llamada ecuación diferencial de continuidad

$$\alpha dv + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} d\tau_{yx} \cos \theta + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} d\tau_{yz} \sin \theta = \left[\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cos^2 \theta \right) \right. \\ \left. \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial z} \sin \theta \right) \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha \right) - \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \theta \cos \theta \right] dt \quad 4.12$$

FORMULACION NUMERICA

La ec 4.12 representa un conjunto infinito de soluciones, sin embargo, si sustituimos en ella los valores de $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ y los integramos a lo largo de las bicaracterísticas correspondientes y además integramos las ecs 4.2 y 4.3 a lo largo del eje del tiempo t , obtenemos un conjunto de relaciones diferenciales las que al combinarse eliminan de la formulación a las primeras derivadas de las funciones en el plano $t = t_0 + k$, donde k es el intervalo de tiempo seleccionado.

$$\Delta v \left| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - (2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1) \alpha a \right.$$

$$\left. \Delta \tau_{yx} \left| \frac{\beta}{2\alpha} (\alpha_1 - \alpha_2) - \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) b b \right. \quad 4.13$$

$$\left. \Delta \tau_{yz} \left| \frac{\beta}{2\alpha} (\alpha_2 - \alpha_4) - \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) c c \right.$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 representan a la ecs 4.12 integrada a lo largo de las bicaracterísticas $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ respectivamente, y aa, bb, cc representan la integración de las ecs 4.4 a lo largo del eje del tiempo t

Para la evaluación de las ecs 4.13 se discretiza la región en estudio mediante una malla cuadrilátera. Ya que los puntos en el plano $t = t_0$ no coinciden en general con los puntos de la malla original, el cálculo de las funciones y de sus derivadas se hace utilizando las funciones de interpolación de la teoría de elementos finitos isoparamétricos (ref 22), o sea

$$\begin{aligned} v &= \underline{N}^T \underline{V} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial x} \underline{V} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial z} \underline{V} \\ \gamma_{yx} &= \underline{N}^T \underline{\gamma}_{yx} \quad ; \quad \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial x} \underline{\gamma}_{yx} \quad ; \quad \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} = \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial z} \underline{\gamma}_{yx} \\ \gamma_{yz} &= \underline{N}^T \underline{\gamma}_{yz} \quad ; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial x} \underline{\gamma}_{yz} \quad ; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial z} \underline{\gamma}_{yz} \end{aligned}$$

donde $\underline{V}, \underline{\gamma}_{yx}, \underline{\gamma}_{yz}$ son vectores que contienen los valores de las funciones en los nodos del elemento finito, \underline{N} representa un vector que contiene las funciones de interpolación en términos de las coordenadas locales ξ y η .

Para el elemento que se muestra en la fig 13, las funciones de interpolación se definen como

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

las restantes se obtienen fácilmente por simetría.

Las derivadas de las funciones de interpolación N con respecto a las variables espaciales se obtienen mediante un procedimiento indirecto (ref 22) y se ha demostrado que son iguales a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} \\ \frac{\partial N^T}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^T}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

donde J es el Jacobiano de la transformación.

FRONTERAS

La inclusión de las fronteras ficticias en nuestra formulación numérica se logra al eliminar de las ecs 4.13 la relación o relaciones diferenciales que se encuentren fuera de nuestro dominio con lo que obtenemos un sistema indeterminado de ecuaciones. La ecuación o ecuaciones faltantes se obtienen a partir de una aproximación de la ecuación escalar de onda (ref 16) esta aproximación se establece para $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3}{2}\pi$, como

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}} = 0$$

al combinarse las correspondientes ecuaciones anteriores con las resultantes de eliminar la relación diferencial que cae fuera de nuestro dominio e integrarla a lo largo del eje del tiempo nos conduce a un simple sistema determinado de ecuaciones lineales.

INTERFASES

Para el caso de la interfases entre dos materiales diferentes, fig 14, se establecen las ecs 4.13 para cada uno de ellos, y en cada uno de estos sistemas de ecuaciones se elimina la relación diferencial que se encuentra en el dominio del otro material, obteniéndose

para I:

$$\Delta v + \frac{\alpha}{\rho} \Delta T_{yz} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} (a_1 - a_3 - 2a_4) - a_2 (2 \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} - 1) + c_2 (1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}) \right]$$

$$\Delta T_{yz} \left[\frac{\rho}{2\alpha} (a_1 - a_3) - (\sqrt{\frac{\rho}{\alpha}} - 1) b b \right]$$

para II:

$$\Delta v' + \Delta \tau_{yz} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho'}{\alpha'}} (\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha\alpha' (2 \sqrt{\frac{\rho'}{\alpha'}} - 1) - cc' (1 - \sqrt{\frac{\rho'}{\alpha'}}) \right]$$

$$\Delta \tau_{yz} \left[\frac{\rho'}{2\alpha'} (\alpha_1 - \alpha_3) - (\frac{\rho'}{\alpha'} - 1) bb' \right]$$

este, es un sistema de ecuaciones indeterminado, para encontrar su solución establecemos en la interfase las siguientes condiciones

$$\Delta v = \Delta v'$$

$$\Delta \tau_{yz} = \Delta \tau'_{yz}$$

Se puede apreciar que la formulación anterior no es muy difícil de aplicar, sin embargo, existen otro tipo de fronteras con las cuales se permite transmitir eficientemente ondas que se propagan en diferentes direcciones (ref 23), la inclusión, en nuestro modelo, de este tipo de fronteras será el objetivo de estudios posteriores.

EJEMPLO NUMERICO

Con el objeto de mostrar la aplicabilidad numérica de este método, se estudió el problema de una onda SH que incide verticalmente en una capa horizontal de suelo como se muestra en la fig 15. En ella se grafica la variación de la velocidad con respecto al tiempo para un punto localizado en la superficie libre de la capa así como para un punto en la base de la misma.

Dado que el problema se idealizó como bidimensional, las condiciones necesarias para esta modelación se obtuvieron de la forma explicada anteriormente.

De los resultados obtenidos se observa que este método proporciona una buena aproximación, sin embargo, sus principales limitaciones son la cantidad de tiempo invertida en la preparación de los datos y la inclusión en el modelo de fronteras que no sean rectas.

METODO DEL ELEMENTO FINITO

INTRODUCCION

Entre los métodos numéricos que se utilizan para estudiar el fenómeno de propagación de ondas se encuentra el método del elemento finito, el cual consiste en discretizar o dividir el dominio, o región en estudio en un conjunto equivalente de elementos finitos, de tal forma que el ensamble de todos ellos represente la región original.

Las ecuaciones que gobiernan el problema se aproximan dentro de cada elemento finito mediante funciones de forma o funciones de interpolación con lo cual se caracteriza el comportamiento del dominio en cada elemento finito. Los valores de las incógnitas en cada punto nodal sirven como coeficientes de participación para las funciones de interpolación. Se utilizan principios energéticos o variacionales para determinar las combinaciones de las funciones de interpolación que mejor satisfacen las ecuaciones. Se realiza un ensamble de las contribuciones de cada elemento finito obteniéndose un sistema de ecuaciones general, el cual al ser resuelto proporciona los valores de las incógnitas en los puntos nodales de los elementos finitos.

FORMULACION

Si consideramos un sólido tridimensional en equilibrio como el que se muestra en la fig 3 sobre el que actúan las tracciones en la superficie t , las fuerzas de cuerpo B_f , las fuerzas concentradas F y aplicamos el principio de los trabajos virtuales el cual establece que dado un desplazamiento virtual, el trabajo virtual interno desarrollado en el cuerpo es igual al trabajo virtual externo realizado por las fuerzas sobre él, se puede es

tablecer (ref 22) como

$$\int_V \bar{\epsilon}^T G dV = \int_V \bar{U}^T B_i dV + \int_S \bar{U}^T t dS + \sum_I \bar{U}_i^T F_i \quad 5.1$$

donde \bar{U}^T

es el vector de desplazamiento del cuerpo en la configuración deformada.

$\bar{\epsilon}$ son las deformaciones virtuales correspondientes a

G Son los esfuerzos correspondientes a las deformaciones en la configuración no deformada.

El subíndice i está asociado a los puntos donde se aplican las fuerzas concentradas. En el método del elemento finito se emplea una técnica mediante la cual un cuerpo se subdivide con líneas o superficies imaginarias en una serie de subdominios, estos subdominios o elementos finitos están conectados entre sí por medio de puntos nodales que se encuentran en sus fronteras. La aproximación es local mediante una serie de funciones que definen de una sola forma en cada elemento los desplazamientos y deformaciones en función de los desplazamientos de los puntos nodales, o sea:

$$U^{(m)} = N^{(m)} U \quad 5.2$$

$$\epsilon^{(m)} = B^{(m)} U \quad 5.3$$

el superíndice m se refiere al elemento m , las matrices $N^{(m)}$ y $B^{(m)}$ no son mas que las matrices de transformación para definir los desplazamientos y la deformación respectivamente y U es el vector de desplazamientos de los puntos nodales. Para relacionar los esfuerzos con las deformaciones en cada elemento finito se emplea la siguiente expresión (Ref 22)

$$G^{(m)} = D^{(m)} \epsilon^{(m)} \quad 5.4$$

donde la matriz D depende de las propiedades del material en cada elemento finito. Las tres ecuaciones anteriores nos definen el estado de desplazamientos, deformación y esfuerzos dentro de cada elemento finito.

Si aplicamos el principio de los trabajos virtuales a una serie de elemen

tos finitos de tal forma que el conjunto o suma de todos ellos constituya el volumen total del cuerpo podremos escribir la ec.5.1 de la siguiente forma:

$$\sum_m \int \bar{e}^{(m)T} \sigma^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{U}^{(m)T} B_i^{(m)} dV^{(m)} + \sum_m \int_{S^{(m)}} \dot{U}^{(m)T} t^{(m)} dS^{(m)} + \sum_m \dot{U}_i F_i$$

y si en esta ecuación se incluyen relaciones del tipo de las establecidas en las ecs. 5.2, 5.3 y 5.4 se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{U}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} B_i^{(m)T} \sigma^{(m)} dV^{(m)} \right] U &= \dot{U}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} N_i^{(m)T} B_i^{(m)} dV^{(m)} \right] U + \\ &\quad \dot{U}^T \left[\sum_m \int_{S^{(m)}} N_i^{(m)T} t^{(m)} dS^{(m)} \right] + \dot{U}^T F \end{aligned} \quad 5.5$$

donde F es un vector de fuerzas concentradas cuya componente i-ésima es la fuerza nodal concentrada que corresponde al i-ésimo componente de desplazamiento en U.

Se puede apreciar que esta ecuación nos define el equilibrio estático del conjunto de elementos finitos, sin embargo, en problemas dinámicos como lo es el de propagación de ondas se deben considerar las fuerzas de inercia que obran en el cuerpo. Para la inclusión de las fuerzas de inercia se considera que las aceleraciones se aproximan de la misma forma que los desplazamientos, es decir

$$\ddot{U}^{(m)} = N^{(m)} \ddot{U}$$

Si llamamos a $\rho^{(m)}$ la densidad de masa del elemento m y aplicando el principio de D'Alembert, podemos reescribir la ec.5.5 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{U}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} B_i^{(m)T} \sigma^{(m)} dV^{(m)} \right] U &= \dot{U}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} N_i^{(m)T} [B_i^{(m)} - \rho^{(m)} N^{(m)} \ddot{U}] dV^{(m)} \right] U + \\ &\quad \dot{U}^T \left[\sum_m \int_{S^{(m)}} N_i^{(m)T} t^{(m)} dS^{(m)} \right] - \dot{U}^T F \end{aligned} \quad 5.6$$

Debido a que \bar{U}^{-T} no es más que un desplazamiento virtual y lo suponemos igual a la unidad para todos los componentes del desplazamiento lo podemos eliminar de la ecuación anterior, la que al ser escrita en forma compacta nos queda

$$M\ddot{U} + KU = P \quad 5.7$$

donde

$$M = \sum_m \int_{V^{(m)}} N^{T(m)} \rho^{(m)} N^{(m)} dV^{(m)} \quad 5.8$$

es la matriz de masas del sistema también conocida como matriz consistente

$$K = \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{T(m)} D B^{(m)} dV^{(m)} \quad 5.9$$

es la matriz de rigideces del sistema, y

$$P = \sum_m \int_{V^{(m)}} N^{T(m)} B_i^{(m)} dV^{(m)} + \sum_m \int_{S^{(m)}} N^{T(m)} L^{(m)} dS^{(m)} + P \quad 5.10$$

es el vector de cargas del sistema

Para la evaluación de la matriz de masas se han utilizado los criterios de masas concentradas y masas consistentes. El primero de estos criterios utiliza un procedimiento físico "razonable" para la concentración. Se obtienen matrices diagonales, lo que desde el punto de vista de cálculo es muy útil y económico. Cuando se utilizan elementos finitos simples, la concentración es bastante obvia, pero para elementos de orden superior se debe realizar un procedimiento sistemático aceptable. Se han desarrollado varias formas para lograr lo anterior (Ref. 22) pero independientemente del método que se siga, se debe conservar la masa total del elemento.

Para el cálculo de la matriz de masas consistente, basta con sustituir las funciones de interpolación que se utilizaron para aproximar los desplazamientos en la ec. 5.8 y realizar la integración, obteniéndose matrices llenas.

Existe también la posibilidad de calcular la matriz de masas por medio de una combinación lineal de la matriz de masas concentradas y la matriz de m_1 mas consistente, o sea

$$M = \alpha M_1 + (1-\alpha) M_c$$

donde M_1 = matriz de masas concentradas, M_c es la matriz de masas consistente α es un parámetro tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. Se ha observado que cuando se considera que $\alpha = 0.5$, el elemento finito tiene un mejor comportamiento cuando se estudian problemas de propagación de frecuencias altas (ref 24).

La utilización de α implica que para una frecuencia dada el número de elementos requerido para obtener un resultado es menor que cuando no se utiliza la combinación de las matrices de masas.

Actualmente se está llevando a cabo un estudio en el que se trata de determinar los valores de $\alpha = \alpha(\omega)$ que producen la dispersión mínima. Desafortunadamente los valores de α que minimizan los cambios de velocidad de fase no son los mismos que los correspondientes a los cambios de velocidad de grupo.

La extrapolación de estos conceptos al dominio del tiempo requiere de un proceso de minimización tomando en cuenta el espectro de la excitación.

Un ejemplo del efecto de α en la representación de una solución en el dominio de la frecuencia se muestra en la fig 16. En los resultados que se muestran en las figs 30, 31 y 32 se utilizaron 5 elementos por longitud de onda, se puede observar que este tamaño de longitud de onda proporciona resultados bastante aceptables.

FRONTERAS DE LYSMER

A partir de la relación de energía definida como el cociente de la energía reflejada y la energía producida por las ondas incidentes, Lysmer y Kuhlmeyer (ref 17) encontraron que las siguientes expresiones son la forma más sencilla de representar las condiciones de frontera absorbente

$$\sigma = a \rho C_p \dot{u}_n \quad 5.11$$

$$\tau = b \rho C_s \dot{u}_t \quad 5.12$$

donde σ y τ son los esfuerzos normales y tangenciales en la frontera respectiva, \dot{u}_n y \dot{u}_t son la velocidad normal y tangencial en un punto de la frontera y a , b son parámetros adimensionales a ser determinados. Estas condiciones son análogas a la colocación de amortiguadores orientados normal y tangencialmente a la frontera.

Las expresiones para el cálculo de la energía son las siguientes

Onda P

$$E_i = \frac{1}{2s} \rho C_s \omega^2 \sin^2 \theta$$

$$E_r = \frac{1}{2s} \rho C_s \omega^2 A^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \rho C_s \omega^2 \sin \gamma$$

Onda S

$$E_i = \frac{1}{2} \rho C_s \omega^2 \sin^2 \gamma$$

$$E_r = \frac{1}{2} \rho C_s B^2 \omega^2 \sin^2 \gamma + \frac{1}{2s} \rho C_s A^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

donde E_i es la energía incidente, E_r la energía reflejada, θ es el ángulo de incidencia y reflexión de las Ondas P, γ = ángulo de incidencia y reflexión de ondas S, A =amplitud de Onda P reflejadas, B =amplitud de ondas S reflejadas, ω =frecuencia de las ondas y $C_s/C_p = s$.

Se encontró que $a=b=1$ son los valores que mejor definen este tipo de fronteras viscosas ya que para ondas P incidentes se alcanza a absorber hasta el 95.5% de la energía reflejada para ángulos de incidencia mayores de 30° y para ondas S incidentes se absorbe hasta un 95% de las ondas reflejadas.

FRONTERAS DE SMITH

Smith (fig 25) emplea una técnica mediante la cual elimina completamente las reflexiones espurias. Su formulación analítica es exacta e independiente de la

frecuencia y del ángulo de incidencia de las ondas. Se utiliza una superposición de dos soluciones, la primera corresponde a considerar que la frontera es libre y se representa con la condición de Neumann y la segunda considera que la frontera es fija y se representa mediante la condición de Dirichlet.

Por ejemplo, en el caso de propagación unidimensional de una onda plana que incide con un ángulo θ sobre la frontera $x=0$ (fig 17), el campo de desplazamiento está dado por

$$u = \exp \frac{j\omega}{c} (x \cos \theta + z \sin \theta - ct) + A \exp \frac{j\omega}{c} (-x \cos \theta + z \sin \theta - ct)$$

Al aplicar la condición de Neumann ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$) en $x=0$ se obtiene $A=1$ y de la condición de Dirichlet ($u=0$) en $x=0$: $A=-1$. La suma de estas dos soluciones elimina completamente la reflexión. De forma similar se aplica este criterio para el caso de ondas P y SV.

De lo anterior se deduce que si el dominio en estudio está modelado con n fronteras (fig 18) entonces se requieren 2^n soluciones independientes para eliminar las reflexiones, la cual aumenta obviamente el tiempo y costo de cálculo. Además para poder realizar la superposición se requiere que el material sea lineal, con la desventaja adicional de que las reflexiones espurias que alcanzan fronteras reales no pueden ser eliminadas por este proceso de superposición. Esto, sin embargo, se puede evitar empleando una aproximación (ref 26) que permite eliminar estas reflexiones a medida que se avanza en el tiempo, con esto, aunque la absorción no es perfecta, el número de soluciones requeridas es independiente del número de fronteras e igual a 2.

FRONTERAS ACTIVAS

En el caso de propagación unidimensional de ondas planas de corte con velocidad C_3 a lo largo del eje X_1 , (fig. 19) la ec 2.8 se transforma en

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \frac{1}{C_3^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

donde u_3 es la componente de desplazamiento normal a la dirección de propagación y se han despreciado las componentes de las fuerzas de cuerpo. Esta ecuación acepta como solución (ref 27)

$$u_3 = f_3(x_1 - C_3 t) + F_3(x_1 + C_3 t)$$

donde f_3 y F_3 son funciones con argumentos arbitrarios y diferenciables con respecto a los mismos. La primera de ellas representa una perturbación que se desplaza en la dirección positiva del eje X_1 y la segunda representa otra perturbación pero que se desplaza su dirección contraria a la anterior, es decir, f_3 esta asociada con las ondas incidentes y F_3 con obtener las ondas reflejadas

De la ec 2.6 el esfuerzo σ_{13} asociado a una partícula con desplazamiento u_3 se expresa como

$$\sigma_{13} = G \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad 5.13$$

pero

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [f(x_1 - C_3 t) + F(x_1 + C_3 t)] = f'_3 + F'_3$$

la coma indica derivación con respecto al argumento de la función, por lo tanto

$$\sigma_{13} = G [f'_3 + F'_3]$$

De la ec. 16 se tiene que

$$G = \rho C_s^2$$

y además como

$$u_3 = -C_s f_3' + C_s F_3'$$

entonces la ec. 5.13 quedará

$$\sigma_{13} = \rho C_s [f_3' + F_3'] = 2\rho C_s^2 f_3' + \rho C_s u_3$$

Ya que

$$\dot{f}_3 = -C_s f_3'$$

la ec 5.13 se transforma finalmente en

$$\sigma_{13} = -\rho C_s [2\dot{f}_3 - \dot{u}_3]$$

la que al ser expresada como esfuerzo externo a una frontera cuya normal es de sentido contrario al de la propagación de la onda incidente queda como

$$t_3 = \rho C_s [2\dot{f}_3 - \dot{u}_3]$$

De la misma forma se obtiene una expresión para el caso de ondas de compresión, o sea

$$t_1 = \rho C_p [2\dot{f}_1 - \dot{u}_1]$$

En forma general, los esfuerzos en esta frontera para un tren de ondas P y SV que se propagan en la misma dirección se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 &= \rho C_p [2\dot{\tilde{f}}_1 - \dot{\tilde{u}}_1] \\ \tilde{t}_i &= \rho C_s [2\dot{\tilde{f}}_i - \dot{\tilde{u}}_i] \quad i = 2, 3 \end{aligned}$$

los tildes indican que las variables están referidas a la dirección de propagación definida por los cosenos directores l_1, l_2, l_3 (fig 4). De lo

anterior se deduce que el estado de esfuerzos de una partícula ubicada en el frente de ondas de cuerpo P y SV que se propaga en dirección del eje X₁ (fig. 20) está dado por

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= -\rho C_p [2 \dot{\hat{r}}_1 - \dot{\hat{u}}_1] \\ \bar{\sigma}_{13} &= -\rho C_s [2 \dot{\hat{r}}_3 - \dot{\hat{u}}_3] \\ \bar{\sigma}_{33} &= -\rho [C_p - 2s C_s] [2 \dot{\hat{r}}_1 - \dot{\hat{u}}_1]\end{aligned}$$

donde $s = C_s/C_p$

En forma matricial la ecuación se escribe como

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{Bmatrix} C_p & & 0 \\ H & & 0 \\ 0 & & C_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{u}}_1 \\ \dot{\hat{u}}_3 \end{Bmatrix}$$

siendo

$$H = (C_p - 2s C_s); \dot{\hat{u}}_1 = 2\dot{\hat{r}}_1 - \dot{\hat{u}}_1; \dot{\hat{u}}_3 = 2\dot{\hat{r}}_3 - \dot{\hat{u}}_3$$

o en forma compacta $\bar{\sigma} = A \dot{\hat{u}}$

Utilizando las reglas de transformación tanto para matriz A' y el vector $\dot{\hat{u}}$ al estado de esfuerzos de una partícula en el frente de onda se expresa en el sistema de coordenadas X₁X₃, de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{Bmatrix} C_p \cos^2 \theta & & (C_p - 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ (H + 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & & + H \sin^3 \theta \\ (C_p - 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & & + C_p \sin^3 \theta \\ + H \cos^3 \theta & & (H + 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ (C_p - H - C_s) \sin \theta \cos^2 \theta & & (C_p - H - C_s) \sin^2 \theta \cos \theta \\ + C_s \sin^3 \theta & & + C_s \cos^3 \theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} \quad 5.14$$

Se puede apreciar que el estado de esfuerzos depende únicamente del ángulo de incidencia de las ondas y de las propiedades del material

En general, los esfuerzos externos asociados a una frontera se derivan de la expresión

$$t_i = \sum_j n_j$$

5.15

donde n_j son los cosenos directores de la normal a la frontera considerada.

Si se utiliza la ec 5.15 en la ec 5.14 se tiene que en forma matricial,

$$t = A \underline{U}$$

Como el intervalo de incidencia de las ondas que llegan a una frontera es difícil de predecir, la matriz A se puede aproximar por medio de una matriz A^* cuyos elementos sean independientes del ángulo de tal forma que

$$|a_{ij} - a_{ij}^*| < \epsilon, \forall i, j$$

donde ϵ es el error.

Lo que se quiere es encontrar los elementos de A^* tales que el valor de los elementos de ϵ sean mínimos, dado que dichos valores pueden ser positivos o negativos es conveniente elevarlos al cuadrado y aplicar un criterio de minimización. Para esto sean a_{ij} y a_{ij}^* los elementos de las matrices A & A^* respectivamente y sea

$$J_{ij} = \int (a_{ij} - a_{ij}^*)^2 d\theta$$

el error cuadrático medio, entonces aplicando un criterio de mínimos cuadrados

$$\frac{\partial J}{\partial a_{ij}^*} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}^*} \int (a_{ij} - a_{ij}^*)^2 d\theta$$

de donde al despejar se obtiene

$$a_{ij}^* = \frac{\int a_{ij} d\theta}{\int d\theta}$$

5.16

Por lo anterior, la ec 5.16 queda como

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{33} \\ t_{13} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} C_p \cos \theta + \frac{2C_s}{3C_p} [C_p - C_s] \sin^2 \theta & \frac{2C_s}{3C_p} [C_p - C_s] \cos^2 \theta + \frac{2C_s^2 C_p^2}{C_p^2} \cos \theta \\ \frac{C_p - 2C_s}{C_p} \sin \theta - \frac{2C_s}{3C_p} [C_p - C_s] \sin^2 \theta & -C_p \cos \theta - \frac{2C_s}{3C_p} [C_p - C_s] \cos^2 \theta \\ \frac{2C_s}{3C_p} [C_p - C_s] \cos^2 \theta + C_s \cos \theta & -\frac{2C_s}{3C_p} [C_p - C_s] \sin^2 \theta + C_s \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} \quad 5.17$$

donde θ_2 y θ_1 determinan los límites para el intervalo de incidencia de las ondas sísmicas.

El criterio anterior no incluye ninguna consideración respecto a la energía que estas fronteras pueden reflejar lo cual es de mucha importancia, ya que la energía reflejada depende del ángulo de incidencia de las ondas, o sea, ondas de igual amplitud pero con diferentes ángulos de incidencia reflejan diferentes cantidades de energía. Por lo tanto se debe tratar de minimizar esta energía incluyendo la influencia del ángulo de incidencia y considerando que la energía en un frente de ondas es proporcional al coseno del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas.

Aplicando este criterio, el error cuadrático medio se define como

$$J = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\Lambda - \Lambda^*) \cos^2 \theta \, d\theta$$

el cual después de ser minimizado nos proporciona los elementos de Λ^* o sea

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial a_{ij}^*} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(a_{ij} - a_{ij}^*) \cos^2 \theta \, d\theta = 0$$

La ec 5.16 se expresa ahora de la siguiente forma

$$a_{ij}^* = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} i_j \cos^2 \theta \, d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta \, d\theta} \quad 5.18$$

Por ejemplo, para una frontera vertical (fig 21) el rango de incidencia está comprendido entre $\pi/2$ y $-\pi/2$ por lo que la ec 5.14 se transforma en

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} = \frac{8G}{15\pi \text{ absorción}} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_B} \left(\frac{5}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_B} (3 + 2s) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1 - f_1) \\ (u_3 - f_3) \end{Bmatrix} \quad 5.19$$

y para una frontera horizontal (fig 22) el rango de incidencia está cubierto entre 0 y π , por lo tanto la ec 5.14 se modifica y queda como

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} = \frac{8G}{15\pi \text{ absorción}} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_B} \left(\frac{5}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_B} (2s + 3) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} (u_3 - f_3) \\ (u_1 - f_1) \end{Bmatrix} \quad 5.20$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior se pueden derivar las condiciones de frontera para el caso de ondas SH que se propagan a lo largo del eje x_1' . El estado de esfuerzos de una partícula referido al sistema de ejes $x_1 x_3$ está dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \cos \theta \bar{\sigma}_{11} \\ \sigma_{31} &= \sin \theta \bar{\sigma}_{31} \end{aligned}$$

donde

$$\bar{\sigma}_{12} = -\rho C_g (2\dot{f}_2 - \dot{u}_2)$$

Aplicando el criterio anterior se obtiene como condición de frontera activa tanto para una frontera vertical como horizontal

$$t_c = \frac{8G}{3\pi C_g} (\dot{u}_2 - \dot{f}_2) \quad 5.21$$

sin embargo es importante mencionar que cuando se tiene alguna irregularidad topográfica como la que se muestra en la fig 23 y se emplea el concepto de fronteras activas el rango de incidencia de las ondas no es fácil de definir como el de los dos casos anteriores ya que las ondas al chocar con la irregularidad sufren reflexiones con direcciones que no pueden ser determinadas mediante la teoría de reflexión de ondas. Por lo anterior, en este trabajo se ha supuesto un modelo de reflexión basado en criterios meramente físicos aproximar el rango de ángulo de reflexión como se explica con la fig 24.

Por otra parte no se debe olvidar la existencia de las ondas superficiales anteriormente mencionadas en el cap 2. En este caso los potenciales se expresan de la siguiente forma (ref 10)

$$\varphi = A_2 \exp[-q_2 x_3 + ik(ct - x_3)]$$

$$\psi = b_2 \exp[-r_2 x_3 + ik(ct - x_3)]$$

donde se ha supuesto que las ondas son armónicas y que se propagan por un semiespacio elástico en la dirección del eje x_1 (fig 25); q y r están dadas por las ecs 2.37 y 2.38

La relación entre A_2 y B_2 se determina del sistema de ecuaciones que se obtiene al sustituir las condiciones de frontera como se mencionó en el cap 2 y está dada por

$$B_2 = -A_2 \frac{2qk}{r^2 + k^2} i$$

Los desplazamientos u_1 y u_3 están dados por

$$u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}$$

$$u_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$$

y los esfuerzos en la frontera como

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad 5.22$$

$$\sigma_{33} = G \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad 5.23$$

Dadas las expresiones para los potenciales y para los desplazamientos, se pueden sustituir en las ecs 5.19 y 5.20 obteniéndose

$$\sigma_{11} = a(kz) \rho C_p \ddot{u}_1 \quad 5.24$$

$$\sigma_{33} = b(kz) \rho C_s \ddot{u}_3 \quad 5.25$$

donde $a(kz)$ y $b(kz)$ están dadas por:

$$a(kz) = \frac{1}{5C_5} \left[1 + (1-2\zeta^2) \frac{(1-\alpha^2) \exp(-kz \sqrt{1-\alpha^2}) - [2\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\beta^2} \exp(-kz \sqrt{1-\beta^2})] / (2-\beta^2)}{-\exp(-kz \sqrt{1-\alpha^2}) + 2\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\beta^2} \exp(-kz \sqrt{1-\beta^2}) / (2-\beta^2)} \right]$$

$$b(kz) = \frac{1}{C_5} \left[-1 + \frac{\sqrt{1-\alpha^2} \exp(-kz \sqrt{1-\alpha^2}) - [2\sqrt{1-\alpha^2} (1-\beta^2) \exp(-kz \sqrt{1-\beta^2})] / (2-\beta^2)}{\sqrt{1-\alpha^2} \exp(-kz \sqrt{1-\alpha^2}) + [2\sqrt{1-\alpha^2} \exp(-kz \sqrt{1-\beta^2})] / (2-\beta^2)} \right]$$

donde

$$\alpha = \frac{c}{C_p}$$

$$\beta = \frac{c}{C_s}$$

y z es la profundidad medida a partir del eje x_1 . Nótese que los esfuerzos postulados en los cas 5.24 y 5.25 son los mismos que los de Lysmer y Kulhmyer utilizados para absorción de ondas superficiales.

En la fig 26 se muestra la variación de $a(kz)$ y $b(kz)$ para un valor del módulo de Poisson $\nu = 0.25$, se puede apreciar que a partir de un cierto valor los parámetros a y b tienden a la unidad. Así mismo se aprecia que existe una singularidad en la curva correspondiente al parámetro "a", dicha singularidad corresponde al punto donde la componente de la velocidad en la dirección del eje x_1 es nula como se aprecia en la fig 26 así mismo se puede observar que a partir de una cierta profundidad los valores de las velocidades tienden a ser nulas. De lo anterior se deduce que los principales problemas en la definición de condiciones de absorción para ondas superficiales son el

tratamiento de la singularidad y la definición de una profundidad hasta la cual se deben considerar los efectos de las ondas superficiales. Dado que la singularidad coincide con el punto de velocidad nula, la condición que se puede suponer en ese punto es la de esfuerzo normal nulo. Por lo que respecta a la profundidad ésta se puede definir de acuerdo con la fig 26 , es decir, la influencia de las ondas superficiales se desprecia a partir del valor de z donde las componentes de la velocidad tiende a ser nulas.

El argumento anterior es solo una aproximación del problema real ya que su validez depende de que las ondas reflejadas sean solo de Rayleigh

COEFICIENTES DE REFLEXION

Onda P

Para este caso los desplazamientos u_1 y u_3 al ser expresados en función de los potenciales φ y ψ quedan de la siguiente manera

$$u_1 = \frac{\partial(\psi_i + \varphi_i)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} \quad 5.26$$

$$u_3 = \frac{\partial(\psi_i + \varphi_i)}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_r}{\partial x_3} \quad 5.27$$

Los esfuerzos asociados con estos desplazamientos se pueden expresar de acuerdo con la ley de Hooke de la siguiente forma:

$$G_{33} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad 5.28$$

$$G_{31} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad 5.29$$

Al sustituir las ecuaciones 5.26 y 5.27 en las 5.28 y 5.29 obtenemos

$$G_{33} = C_p^2 \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\psi_i + \psi_r) + \left(1 - \frac{2C_p^2}{C_t^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\psi_i + \psi_r) - \frac{2C_p^2}{C_t^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \quad 5.30$$

$$G_{31} = C_p^2 \rho \left[\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} (\psi_i + \psi_r) \right] \quad 5.31$$

De la Ley de Snell (ref 8):

$$C_p \cos \theta' = C_s \cos \theta \quad \cos \theta' = \frac{C_s}{C_p} \cos \theta = \nu \cos \theta \quad 5.32$$

donde los ángulos θ y θ' se definen en la fig 27

Al hacer $A = 1$, $B = 0$ en las expresiones para los potenciales y sustituyendolas en las ecs 5.30 y 5.31 y utilizando la ec 5.32 se llega a

$$A' (1 - 2\nu^2 \cos^2 \theta) - B' 2\nu \cos \theta \sin \theta' + 1 - 2\nu^2 \cos^2 \theta = G_{33} / \rho \quad 5.33$$

$$A' 2\nu^2 \cos \theta \sin \theta + B' (\nu \sin^2 \theta' - \nu^2 \cos^2 \theta) - 2\nu^2 \cos \theta \sin \theta = G_{31} / \rho \quad 5.34$$

Las condiciones de esfuerzo según el criterio de las fronteras activas eficientes están dadas por las ecs 5.19 y 5.20, o sea

$$G_{31} = -\frac{8G}{15\pi\rho C_s} (3 + 2\nu) \dot{u}_1 \quad 5.35$$

$$G_{33} = -\frac{8G}{15\pi\rho C_s} \left(\frac{5}{\nu} + 2 - 2\nu \right) \dot{u}_3 \quad 5.36$$

Al sustituir estas ecuaciones en la 5.33 y 5.34 respectivamente obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 - 2s^2 \cos^2 \theta - c_1 \sin \theta & -2r \cos \theta \sin \theta' - c_1 \cos \theta' \\ 2c^2 \cos \theta - c_2 \cos \theta & \sin^2 \theta' - s^2 \cos^2 \theta + c_1 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \sin \theta + 2s^2 \cos^2 \theta \cdot 1 \\ -c_2 \cos \theta + 2s^2 \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix} \quad 5.37$$

donde $c_1 = \frac{B}{15\pi} (5 + 2u - 2s^2)$ y $c_2 = \frac{B}{15\pi} (3s + 2s^2)$

Onda SV

En este caso se tiene las siguientes relaciones

$$u_1 = \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} + \frac{\partial (\psi_i - \psi_r)}{\partial x_3}$$

$$u_3 = \frac{\partial \psi_r}{\partial x_3} - \frac{\partial (\psi_i - \psi_r)}{\partial x_1}$$

las que al ser sustituidas en las ecs 5.30 y 3.31 dan lugar a

$$G_{33} = C_p^2 \rho \left[\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2} (1 - 2 \frac{C_i^2}{C_p^2}) - \frac{2C_i^2}{C_p^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} (\psi_i + \psi_r) \right] \quad 5.38$$

$$G_{11} = C_p^2 \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\psi_i + \psi_r) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\psi_i + \psi_r) + 2 \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x_3 \partial x_1} \right] \quad 5.39$$

Para este caso la ley de Snell se establece como sigue (ref 8):

$$\cos \theta' = \frac{C_p}{C_s} \cos \theta = \frac{1}{s} \cos \theta \quad 5.40$$

donde θ' y θ se definen en la figura 27

Al hacer $B = 1$, $A = 0$ en las expresiones para los potenciales en

las ecs 5.33 y 5.34 utilizando la ec 5.40 y reemplazando las condiciones de esfuerzo establecidas en las ec 5.35 y 5.36 se obtiene otro sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 - 2 \cos^2 \theta + c_1 \sin \theta' & -2 \sin \theta \cos \theta - c_1 \\ 2s \sin \theta' \cos \theta + \frac{c_2}{s} \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{c_2}{s} \sin \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \frac{c_2}{s} \sin \theta \end{bmatrix} \quad 5.41$$

CRITERIO DE LYSNER

W Onda P

Como se estableció en las ecs 5.11 y 5.12 los esfuerzos están dados por

$$G_{33} = C_{33} \dot{u}_3 = a \rho C_p \dot{u}_3 \quad 5.42$$

$$G_{31} = C_{31} \dot{u}_1 = b \rho C_s \dot{u}_1 \quad 5.43$$

donde se ha considerado que $a = b = 1$

Al sustituir las ecs 5.42 y 5.43 en las 5.28 y 5.29 respectivamente, utilizando las expresiones para los potenciales y la relación establecida con la ec 5.32 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 - 2s^2 \cos^2 \theta + a \sin \theta & 2s \cos \theta \sin \theta' + a \cos \theta \\ b \cos \theta' + s^2 \sin^2 \theta & 1 - 2s^2 \cos^2 \theta - b \sin \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2 \cos^2 \theta - 1 + a \sin \theta \\ s^2 \sin^2 \theta - b \cos \theta \end{bmatrix} \quad 5.44$$

A partir de este sistema de ecuaciones se determinan A' y B' en función del ángulo θ y de valores específicos de a y b .

Onda SV

Procediendo de manera similiar a la anterior, Lysmer estableció el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2a \cos \theta \sin \theta' + b \cos \theta & \cos 2\theta - b \sin \theta \\ -\cos 2\theta + a \sin \theta' & \sin 2\theta + \frac{\cos \theta}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta - b \sin \theta \\ \sin 2\theta - \frac{a \cos \theta}{s} \end{bmatrix} \quad 5.45$$

De la misma forma que para el caso anterior se calculan A' y B' en función del ángulo θ y de valores específicos de a y b.

En las figs 28 y 29 se grafican las amplitudes de las ondas reflejadas utilizando el criterio de fronteras activas eficientes y el de Lysmer, estas gráficas se obtienen con solo resolver los sistemas de ecuaciones planteados con las ecuaciones 5.37, 5.41, 5.44 y 5.45

En estas figuras se aprecia que el criterio de fronteras activas proporciona una mejor absorción para un rango mayor de ángulos de incidencia que el criterio empleado por Lysmer. Se puede observar que si el rango de los ángulos de incidencia de las ondas difractadas que llegan a una frontera artificial son conocidos, los resultados mejoran dentro de este rango, figs 30, 31 y 32, sin embargo, como se explicó anteriormente, la determinación a priori de este rango de incidencia requiere de una sensibilización con el problema lo que no es fácilmente lograble.

Por lo que respecta a las ondas superficiales, también existe la duda acerca de la profundidad hasta la cual deben ser consideradas. De hecho, el problema es bastante complejo ya que se debe decidir si se consideran ondas superficiales o de cuerpo únicamente, o si se consideran ambas. Hasta la fecha no se han logrado establecer los criterios que permitan incluir de una manera formal estas consideraciones.

En este trabajo se encontró que la mejor opción la representa el considerar y restringir hasta cierta profundidad el efecto de las ondas superficiales. Dicha profundidad debe ser consistente con aquella que predice poco efecto de las ondas superficiales y más allá de este valor sustituir el criterio de absorción por el equivalente para ondas P y SV.

EJEMPLOS NUMERICOS

Con el objeto de mostrar la aproximación obtenida al utilizar el método de los elementos finitos junto con el concepto de fronteras activas, se estudió la amplificación dinámica de ondas SH en un valle aluvial semicilíndrico como el que se muestra en la fig 30-a. El arreglo de elementos finitos utilizado se muestran en la fig 30-b. En las figs 30-c y 30-d se grafican la amplitud de los desplazamientos contra un parámetro adimensional definido por x_1/a , en la primera de ellas se empleó una frecuencia normalizada $\Omega = 0.25$ mientras que en la segunda la frecuencia normalizada fue de 0.50. En estas figuras se puede apreciar que la solución numérica mejora al

considerar un cierto rango de ángulos de reflexión sobre las fronteras activas, dichos ángulos se fijaron con el criterio mostrado en la fig 24.

Cabe hacer notar, que la discrepancia observada entre la solución de Trifunac (ref 1) y la solución numérica para el punto sobre la superficie donde $x_1/a = 0$, disminuía al modificar el arreglo de elementos finitos en esa zona, es decir, si se cambiaba el elemento finito en esa zona por dos elementos finitos como se muestra con la línea punteada en la fig 30-b se obtenían resultados en los que la solución en ese punto cambiaba hasta en un 20%, sobre todo para la frecuencia de 0.5.

En la fig 31 se muestran los primeros resultados obtenidos con esta formulación para el caso de incidencia normal de ondas P, en este caso se estudió la amplificación de un cañón simicircular se comparan los resultados con los obtenidos por Sánchez(ref 28). Se grafican tanto la amplitud de los desplazamientos verticales como horizontales. Así mismo, en la fig 32 se presentan los resultados para el caso de incidencia normal de ondas SV.

El programa de computadora que se utilizó fue originalmente desarrollado por Aranda y Ayala (ref 23), el cual se documentó y modificó para hacerlo mas eficiente desde el punto de vista de tiempo de cálculo, así como las modificaciones de necesarias para incluir cualquier tipo de ondas de las mencionadas, o sea, ondas P, SV, SH y de Rayleigh.

METODO DEL ELEMENTO DE FRONTERA

INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se han presentado algunos métodos con los cuales se discretiza al dominio en estudio en un conjunto de elementos (método del elemento finito y método de las características) o puntos discretos (método de las diferencias finitas)

En estos métodos se presenta la dificultad de representar en una forma apropiada las condiciones en las fronteras necesarias para limitar la región o dominio en estudio. Dichas condiciones se deben definir de la mejor manera posible de tal forma que representen la continuidad del medio y permitan la transmisión y absorción de la energía de las ondas sísmicas.

Sin embargo, sus principales ventajas están en la capacidad para estudiar medios no homogéneos y problemas no lineales, aunque el grado de complejidad es mayor (ref 29).

Ultimamente se ha desarrollado otra técnica que se conoce con el nombre de Método de los Elementos de Frontera (ref 30) en la cual, las funciones que aproximan la solución satisfacen las ecuaciones que gobiernan al problema en el dominio pero no satisfacen las condiciones de frontera, lo cual no ocurre con los métodos formulados en los capítulos anteriores ya que en ellos las funciones que aproximan la solución satisfacen las ecuaciones que gobiernan al problema y satisfacen parcial o

completamente las condiciones de frontera.

La técnica de los elementos de frontera consiste en dividir la superficie externa de un dominio o región en una serie de elementos en los cuales las funciones o incógnitas del problema se pueden aproximar de la misma forma que en el método de los elementos finitos.

Las ventajas que ofrece este método son la capacidad de definir únicamente la superficie del cuerpo por lo cual se necesita una menor cantidad de datos para resolver el problema, sistemas de ecuaciones más pequeños y la posibilidad de estudiar problemas con dominios que se extienden al infinito.

Por otra parte, este método es difícil de aplicar para resolver problemas no homogéneos ya que las soluciones fundamentales para este tipo de problemas son muy escasas. Su aplicación también es difícil para el estudio de problemas no lineales.

FORMULACION ANALITICA

Las relaciones de equilibrio para un cuerpo de volumen V y frontera S como el que se muestra en la fig 3 se establecieron de la siguiente forma

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + s_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad 6.1$$

Para definir las condiciones de frontera considérese que la misma está formada por dos partes: S_G y S_u , la primera de ellas se asocia con fuerzas de superficie prescritas y la

segunda con desplazamientos prescritos.

Las condiciones anteriores se escriben como sigue

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \\ u_i &= \bar{u}_i \end{aligned} \quad 6.2$$

donde \bar{t}_i son las tracciones prescritas, n_j son los cosenos directores de la normal exterior n con respecto a los ejes x_i

y \bar{u}_i son los valores prescritos del desplazamiento

Para encontrar una solución aproximada del problema planteado con las ecs 6.1 y 6.2 se aplica el principio de los trabajos virtuales, el cual para un cuerpo elástico se define como

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + n_j - \rho \bar{u}_i \right) u_i^* dV &= \int_S (t_i - \bar{t}_i) u_i^* dS - \\ &- \int_S (u_i - \bar{u}_i) t_i^* dS \end{aligned} \quad 6.3$$

donde u_i^* son los desplazamientos virtuales y $t_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$ son las fuerzas o tracciones correspondientes al sistema de desplazamientos u_i^* .

Si se integra por partes el primer término del primer miembro de la ecuación anterior y además se aplica el teorema de Gauss se obtiene

$$\int_V \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_j} u_i^* dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (G_{ij} u_i^*) - G_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right] dV = - \int_V G_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \int_S u_i^* t_i^* dS$$

la que al ser sustituida en la ec 6.3 y eliminando términos conduce a

$$-\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} dV + \int_V (B_i u_i^* - \rho \ddot{u}_i u_i^*) dV = -\int_{S_0} \bar{T}_i u_i^* dS - \int_{S_u} (\bar{u}_i - u_i) t_i^* dS$$

Al sustituir en esta ecuación las relaciones esfuerzo-deformación se obtiene

$$\int \left[\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) + \rho \ddot{u}_i u_i^* \right] dV - \int_{S_0} \bar{T}_i u_i^* dS + \int \rho \ddot{u}_i u_i^* dV - \int_{S_u} (\bar{u}_i - u_i) t_i^* dS \quad (8) \quad 6.4$$

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

De acuerdo con la teoría del elemento finito, el vector de desplazamientos se puede aproximar como

$$u_i = \phi_{il} U_l \quad 6.5$$

donde $\phi_{il} = \phi_{il}(x_k)$ son funciones de interpolación que satisfacen las condiciones de frontera de desplazamiento y U_l son los desplazamientos nodales del elemento finito los cuales son las incógnitas del problema.

Al sustituir la ec 6.5 en la 6.4 y aplicando el Método de Galerkin el cual establece que las funciones que se utilizan para aproximar la solución - ϕ_{il} - deben ser las mismas que definen las funciones de peso, en este caso los desplazamientos virtuales, se obtiene

$$\int_V \lambda \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial \phi_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_{km}}{\partial x_i} \right) dV U_l + \int_V \rho \phi_{il} \ddot{\phi}_{im} dV U_l - \int_{S_0} \bar{T}_i \phi_{im} dS + \int_{S_u} B_i \phi_{im} dV \quad 6.6$$

donde se ha supuesto como se mencionó anteriormente que

$$u_i^* = \delta_{11}$$

En forma compacta la ec 6.6 se escribe como

$$k_{lm} u_l + m_{lm} \ddot{u}_l = p_m$$

donde k_{lm} es la matriz de rigideces, m_{lm} es la matriz de masas consistentes y p_m el vector de cargas de cada elemento finito.

Si la formulación anterior se aplica a cada uno de los elementos finitos de la región en estudio y se realiza un ensamble de contribuciones se obtiene

$$KV + M\ddot{V} = P \quad 6.7$$

donde M es la matriz de masas del sistema, K la matriz de rigideces del sistema y P el vector global de cargas.

Nótese que esta ecuación es idéntica a la 5.7 lo que difiere es el tipo de formulación que se emplea para llegar a ellas. La primera formulación se basa en un enfoque energético mientras que la última utiliza el principio de los trabajos virtuales como método aproximado de solución que es el método de Galerkin.

FORMULACION INDIRECTA DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERA

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, en este método se supone que se satisfacen a priori las ecuaciones de equilibrio en el interior de un cuerpo elástico pero no se satisfacen las condiciones de frontera, por lo tanto, la ec 6.3

se escribe ahora como

$$\int_{S_0} (t_i - \bar{t}_i) u_i^* - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) t_i^* = 0 \quad 6.8$$

En otras palabras, las funciones que aproximan la solución β_{11} satisfacen la ecuación diferencial de equilibrio y únicamente se aproximan las condiciones de frontera. Por lo tanto, las funciones que se utilicen para aproximar t_i y u_i deben satisfacer la ecuación de equilibrio. Ya que como en el caso de los elementos finitos la aproximación global del problema es difícil conviene dividir la frontera $S = S_\sigma + S_u$ en elementos y aplicar la ec 6.8 para cada uno de ellos. Dada la escasez de soluciones que satisfagan lo anterior, se utiliza una superposición de soluciones elementales o de Green definidas para acciones distribuidas sobre una superficie auxiliar que puede o no coincidir con la frontera del cuerpo.

El conocimiento de soluciones elementales que además de satisfacer las ecuaciones de equilibrio del sistema satisfacen algunas condiciones de frontera (por ejemplo, solución estática de Mindlin para una carga puntual dentro de un semiespacio elástico), generalmente simplifican la aplicación de la ec 6.8. Desafortunadamente lo escaso de estas soluciones y dificultades involucradas en su obtención generalmente conducen a que solo se utilice la solución elemental para una carga puntual dentro de un cuerpo elástico de extensión infinita (solución estática de Kelvin).

Si se utiliza una superficie auxiliar (S_A) como la que se muestra en la fig 33 que no coincida con la frontera, el vector de desplazamiento se puede definir como un potencial de capa simple del tipo (ref 31)

$$u_i(x_k) = \int_{S_A} G_{ij}(x_k, y_k) d_j(y_k) dS \quad 6.9$$

donde

- x_k punto sobre la superficie real
- y_k punto sobre la superficie auxiliar
- G_{ij} componente i del desplazamiento en el punto x_k debido a una fuerza unitaria en la dirección j aplicada en el punto y_k (ver apéndice A)
- d_j densidad desconocida de carga en la dirección j definida en la superficie auxiliar

El tensor de esfuerzo asociado a G_{ij} se puede escribir de la ley de Hooke como

$$\tau_{ijm} = \lambda \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l} \delta_{lm} + G \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_m} + \frac{\partial G_{mj}}{\partial x_i} \right) \quad 6.10$$

Por tanto, el tensor de esfuerzo σ_{ij} asociado a u_i se define como el potencial de capa doble

$$\sigma_{im} = \int_{S_A} \tau_{ijm}(x_k, y_k) d_j(y_k) dS \quad 6.11$$

Para evaluar las ecs 6.9 y 6.11 es conveniente dividir la superficie auxiliar S_A en subregiones usando el mismo número de

puntos nodales que para la frontera real, y para cada uno de estos elementos aproximar la densidad de carga d_j como

$$d_j = \phi_{j\ell} D_\ell \tag{6.12}$$

donde $\phi_{j\ell}$ son funciones de interpolación definidas sobre el elemento de frontera considerado y D_ℓ los valores nodales des conocidos de la densidad de carga.

Al sustituir las ecs 6.9 y 6.12 en 6.8, se encuentra una aproximación para el principio de los trabajos virtuales dada por

$$\int_{S_\sigma} \left\{ \int_{S_A} \gamma_{ijm}(x_k, y_k) n_m \phi_{j\ell} dS D_\ell - \bar{t}_i \right\} u_i^* dS - \int_{S_u} \left\{ \int_{S_A} g_{ij}(x_k, y_k) \phi_{j\ell} dS D_\ell - \bar{u}_i \right\} t_i^* dS = 0 \tag{6.13}$$

Las funciones prescritas \bar{t}_i y \bar{u}_i se pueden representar de manera aproximada mediante funciones de interpolación $\phi_{j\ell}$ definidas dentro de cada elemento sobre la frontera S. Así, para un elemento, se tiene

$$\bar{t}_i = \bar{\phi}_{in} T_n \tag{6.14}$$

$$\bar{u}_i = \bar{\phi}_{in} U_n$$

donde T_n y U_n representan los valores nodales prescritos de las funciones \bar{t}_i y \bar{u}_i , respectivamente. Para un elemento de frontera dado, la ec 6.13 se puede escribir

$$\int_{S_{\sigma}} \left\{ \sum_{S_{\Lambda}} \int T_{ijm}(x_k, y_k) n_m \phi_{j\ell} dS \, D_{\ell} - \bar{\phi}_{in} T_n \right\} \dot{u}_i^* dS -$$

6.15

$$- \int_{S_u} \left\{ \sum_{S_{\Lambda}} \int G_{ij}(x_k, y_k) \phi_{j\ell} dS \, D_{\ell} - \bar{\phi}_{in} U_n \right\} \dot{t}_i^* dS = 0$$

Nótese que si la ec 6.15 se considera como expresión del método de los residuos ponderados, el método de colocación nodal requiere la utilización de funciones de peso definidas como

$$\dot{t}_i^* = \delta_i(x_k - x_k^{\alpha})$$

6.16

$$u_i^* = \delta_i(x_k - x_k^{\alpha})$$

donde δ_i es el delta de Dirac y x_{ik} las coordenadas del punto nodal α del elemento (puntos de colocación).

La inclusión de la ec 6.11 en la 6.15 da lugar a una formulación equivalente a la indirecta del método de elementos de frontera, donde la frontera y la solución están definidas en superficies diferentes, esto es

$$\sum_{S_{\Lambda}} \int T_{ijm}(x_k^{\alpha}, y_k^{\alpha}) n_m \phi_{j\ell} dS \, D_{\ell} - t_i(x_k^{\alpha}) = 0$$

6.17

$$\sum_{S_{\Lambda}} \int G_{ij}(x_k^{\alpha}, y_k^{\alpha}) \phi_{j\ell} dS \, D_{\ell} - u_i(x_k^{\alpha}) = 0$$

6.18

De los párrafos anteriores se deduce que la formulación numérica dada por la ec 6.15 es general, ya que la selección de distintas funciones de peso da lugar a las diversas versiones del método de los residuos pesados.

En el caso del método de Galerkin las funciones u_i y t_i

sobre la frontera S están dadas por

$$u_l^+ = \bar{\varphi}_{ln} \quad 6.19$$

$$t_l^+ = \bar{\varphi}_{ln} \quad 6.20$$

La sustitución de las ecs 6.19 y 6.20 en la 6.15 da lugar a

$$\begin{aligned} & \int_{S_U} \sum_{S_A} \int_{S_A} T_{ijm}(x_k, y_k) u_m \phi_{jl} dS_{\Lambda} D_{\lambda} \bar{\varphi}_{ip} dS - \int_{S_U} \bar{\varphi}_{ln} \bar{c}_{ipn} T_n dS - \\ & - \int_{S_U} \sum_{S_A} \int_{S_A} G_{ij}(x_k, y_k) \phi_{jl} dS_{\Lambda} D_{\lambda} \bar{\varphi}_{ip} dS + \int_{S_U} \bar{\varphi}_{ln} \bar{c}_{ipn} U_n dS = 0 \end{aligned} \quad 6.21$$

o bien, en forma compacta, a

$$\begin{aligned} a_{pl} D_{\lambda} - \bar{c}_{pn} T_n - b_{pl} D_{\lambda} + \bar{c}_{pn} U_n &= 0 \\ \ell &= 1, 2, \dots, N \\ p, n &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad 6.22$$

donde N es el número total de valores nodales de la densidad de carga sobre la superficie auxiliar S_A y M el número de grados de libertad en el elemento de frontera considerado.

La ec 6.21 permite tener en un elemento de frontera restricciones de esfuerzo y de desplazamiento simultáneamente. Sin embargo, si solo existen condiciones de frontera de desplazamiento, resulta

$$- b_{pl} D_{\lambda} + \bar{c}_{pn} U_n = 0 \quad 6.23$$

y si solo existen condiciones de frontera de esfuerzo

$$a_{pl} D_{\lambda} - \bar{c}_{pn} T_n = 0 \quad 6.24$$

El ensamble de las contribuciones correspondientes a cada elemento de frontera da lugar a una ecuación matricial similar a la resultante de aplicar el método de elementos finitos, esto es

$$A_{ij}D_j - B_{ij}D_j = \bar{C}_{ij}T_j + \bar{C}_{ij}U_j \quad 6.25$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

donde las matrices A_{ij} , B_{ij} y C_{ij} son las globales resultado del ensamble de la ec 6.22 para cada elemento. Así, para la respuesta al problema planteado en párrafos anteriores que se requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales no simétrico. Al resolver esta ecuación y encontrar los valores nodales de la densidad de carga, D_j , la formulación para obtener esfuerzos y desplazamientos en cualquier punto dentro del cuerpo se hace directamente de la versión discreta de las ecs 6.9 y 6.11, o sea

$$u_i(x_k) = \epsilon \int_{S_A} G_{ij}(x_k, y_k) \phi_{jl} D_l dS \quad 6.26$$

$$\sigma_{ij}(x_k) = \epsilon \int_{S_A} T_{ijm}(x_k, y_k) \phi_{jm} D_l dS \quad 6.27$$

Una alternativa para la solución aproximada de la ec 6.8 es considerar que la superficie auxiliar sobre la que se definen los potenciales de las ecs 6.9 y 6.11 coincide con la frontera del cuerpo. En este caso es necesario considerar la discontinuidad de los potenciales de capa doble cuando la superficie auxiliar se acerca a la frontera S . El problema ha sido

tratado por Cruse (ref 31), encontrándose que el potencial de capa simple no se modifica, es decir

$$u_i(x_k) = \int_S G_{ij}(x_k, y_k) d_j(y_k) dS \quad 6.28$$

Sin embargo, el potencial de capa doble tiene una discontinuidad en la frontera S medida por

$$[\sigma_{im}^+(x_k) - \sigma_{im}^-(x_k)] n_m = 2\beta d_j(x_k) \quad 6.29$$

o sea que la ec 6.11 se transforma en

$$\sigma_{im}^-(x_k) n_m = \beta d_j(x_k) + \int_S T_{ijm}(x_k, y_k) n_m d_j(x_k) dS \quad 6.30$$

donde

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y_k \rightarrow x_k \text{ desde el interior del cuerpo} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } y_k \rightarrow x_k \text{ desde el exterior del cuerpo} \end{cases} \quad 6.31$$

Como en el caso en que la superficie auxiliar no coincide con la frontera S, las ecs 6.28 y 6.30 proporcionan una solución exacta para u_i y σ_{im} . Los errores que puedan existir son debidos a la aproximación de la función $d_j(x_k)$ como una función seccionalmente continua.

Tratamiento de fronteras infinitas

Una situación un tanto común en la formulación numérica de problemas de geomecánica es la existencia de regiones limitadas por fronteras que se extienden a distancias tales que hacen impráctica, y hasta en ocasiones imposible, la aplicación

directa de métodos discretos de solución del tipo del de los elementos de frontera.

Esta dificultad, que también aparece en las aplicaciones del método de los elementos finitos, se puede resolver al emplear elementos de frontera especialmente diseñados para modelar condiciones al infinito.

En el presente estudio se optó por usar elementos de frontera del tipo de los de la ref 32 en aplicaciones del método de los elementos finitos a problemas relativos a propagación de ondas. Una geometría típica para un elemento de frontera plano, aquí denominado seminfinito se presenta en la fig 34. Este tipo de elemento se conecta a los elementos de frontera convencionales a lo largo del lado $x_2 = 0$.

De igual manera, para elementos finitos las funciones de interpolación pueden ser las definidas por polinomios de Lagrange. Con objeto de garantizar que las integrales de la ec 6.8 tiendan a un valor finito, es necesario multiplicar las funciones de interpolación por funciones con comportamiento asintótico. Por ejemplo, las funciones de interpolación para un elemento de frontera como el de la fig 34 se pueden definir como una combinación de polinomios de Lagrange en dirección x_2 y funciones de interpolación definidas a lo largo del eje x_1 como (ref 33)

$$\eta_1 = e^{(x_1^I - x_1)/L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^{N-1} \frac{(x_1^j - x_1)}{(x_1^j - x_1^I)} \quad (\text{no suma}) \quad 6.31$$

$I = 1, 2, \dots, N-1$

donde L es un parámetro que mide la rapidez con que decae la función exponencial.

La función de interpolación para $i = N$ se obtiene de

$$N_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} N_{ij} \quad 6.32$$

En el Apéndice B se presentan las funciones de interpolación asociadas a un elemento seminfinito plano como el de la fig 34. Para elementos de forma distorsionada es posible definir una representación paramétrica similar a la empleada en los elementos de frontera convencionales.

3.4 Equivalencia del método de Galerkin y el método de Colocación Ortogonal

La evaluación analítica de las integrales de la ec 6.21 no es práctica por la complejidad de los núcleos y la posible irregularidad de la región de integración. Una forma alternativa de formular numéricamente el problema es utilizar las ideas de integración numérica comúnmente empleadas en el método de los elementos finitos (Apéndice C).

La integración numérica de la ec 6.21 se obtiene de remplazar las integrales sobre S y S_A por sus cuadraturas numéricas. Si se considera solo la integración numérica sobre S , resulta

$$\begin{aligned} & \int_{S_A} T_{ijm}(x_k^{\alpha}, y_k) n_m \phi_{jz}(y_k) dS D_L \phi_{ip}(x_k^{\alpha}) W^{\alpha} - \phi_{in}(x_k^{\alpha}) \phi_{ip}(x_k^{\alpha}) W_n^{\alpha} - \\ & - \int_{S_A} G_{ij}(x_k^{\alpha}, y_k) \phi_{jz}(y_k) dS D_L \phi_{ip}(x_k^{\alpha}) W^{\alpha} + \phi_{in}(x_k^{\alpha}) \phi_{ip}(x_k^{\alpha}) W_n^{\alpha} U_n = 0 \end{aligned} \quad 6.33$$

donde el superíndice α indica el punto de integración considerado y W^α el factor de peso correspondiente.

Por simplicidad la ec 6.33 se puede escribir en forma compacta

$$\begin{aligned} E_{i\ell} D_x \phi_{ip}(x_k^\alpha) W^\alpha - \phi_{in}(x_k^\alpha) T_n \phi_{ip}(x_k^\alpha) W^\alpha - \\ - F_{i\ell} D_x \phi_{ip}(x_k^\alpha) W^\alpha + \phi_{in}(x_k^\alpha) U_n \phi_{ip}(x_k^\alpha) W^\alpha = 0 \end{aligned} \quad 6.34$$

donde

$$E_{i\ell} = \Sigma \int_{S_A} T_{ijm}(x_k^\alpha, y_k^\alpha) n_m \phi_{j\ell}(y_k^\alpha) dS \quad 6.35$$

$$F_{i\ell} = \Sigma \int_{S_A} G_{ij}(x_k^\alpha, y_k^\alpha) \phi_{j\ell}(y_k^\alpha) dS \quad 6.36$$

Nótese que el número de operaciones involucradas en la aplicación numérica del método de Galerkin es excesivo. Esta desventaja, sin embargo, puede ser superada si en vez del método de Galerkin se emplea otra modalidad del método de los residuos pesados, conocido como colocación ortogonal (ref 34).

En ese método las funciones de peso son deltas de Dirac evaluadas en puntos correspondientes a los ceros de los polinomios de Legendre, que para elementos de frontera regular coinciden con los puntos de integración Gaussiana, x_k . Para elementos seminfinitos los puntos de colocación son los ceros de los polinomios de Laguerre (ref 34).

La aplicación del método de colocación ortogonal en la ec 6.15 conduce a

$$\int_{S_D} \left\{ \sum_{S_A} \int T_{ijm}(x_k, y_k) n_m \phi_{j\ell}(y_k) dS_{D_\ell} - \phi_{in}(x_k) T_n \right\} \delta(x_k - x_k^\alpha) dS - \quad 6.37$$

$$- \int_{S_n} \left\{ \sum_{S_A} \int G_{ij}(x_k, y_k) \phi_{j\ell}(y_k) dS_{D_\ell} - \phi_{in}(x_k) U_n \right\} \delta(x - x_k^\alpha) dS = 0$$

o sea

$$\sum_{S_A} \int T_{ijm}(x_k^\alpha, y_k) n_m \phi_{j\ell}(y_k) dS_{D_\ell} - \phi_{in}(x_k^\alpha) T_n - \quad 6.38$$

$$- \sum_{S_A} \int G_{ij}(x_k^\alpha, y_k) \phi_{j\ell}(y_k) dS_{D_\ell} + \phi_{in}(x_k^\alpha) U_n = 0$$

Finalmente, de las ecs 6.35 y 6.36 se obtiene

$$E_{i\ell} D_\ell - \phi_{in}(x_k^\alpha) T_n - F_{i\ell} D_\ell - \phi_{in}(x_k^\alpha) U_n = 0 \quad 6.39$$

que es equivalente a la ec 6.34 resultante de la integración numérica en el método de Galerkin. Este resultado es importante, ya que si los errores de cuadratura en la aplicación de la ec 6.34 son pequeños, los resultados del método de colocación ortogonal son los mismos que los de la aplicación directa de la ec 6.21, esto es, un mismo resultado con un esfuerzo computacional menor.

3.5 Tratamiento de singularidades

La aplicación del método de los elementos de frontera presenta dificultades cuando la solución aproximada se construye sobre una superficie auxiliar que coincide con la frontera en la cual se utiliza la discretización, ya que al coincidir los

puntos x_k y y_k , los integrandos de las ecs 6.9 y 6.11 presentan singularidades. Estos integrandos son en general difíciles de integrar analíticamente, por lo que se necesita una integración numérica de ellos.

Lachat y Watson (ref 35) presentan un algoritmo que permite una integración numérica de estas singularidades; sin embargo, su procedimiento es difícil de implantar en un programa de computadora; además su aplicación requiere un gran esfuerzo computacional.

Tomando en cuenta la simplificación que se introduce al emplear el método de colocación ortogonal como el equivalente a la aplicación numérica del método de Galerkin, es factible integrar numéricamente de manera simplificada las singularidades. Esto se logra si una vez definidos los puntos de colocación, la integración numérica de las soluciones aproximadas se efectúa con reglas de cuadratura de orden superior a la necesaria para lograr la equivalencia del método de Galerkin con el de colocación ortogonal, a fin de que los puntos de colocación (donde se presentan las singularidades) nunca coincidan con los correspondientes a la integración numérica.

Esta manera de integrar resulta más sencilla que la propuesta en la ref 35; sin embargo, es necesario verificar su efectividad en el programa de computadora

FORMULACION DIRECTA

El principio de los trabajos virtuales para un problema elástico-lineal se estableció en el cap 5 y se escribe de la siguiente forma

$$\int_V \left(-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{b}_i - \rho u_i \right) u_i^* dV = \int_{S_G} (\bar{t}_i - \bar{t}_i) u_i^* dS + \int_{S_u} (\bar{u}_i - u_i) t_i^* dS$$

Si se considera que las relaciones desplazamiento-deformación y las propiedades del material son lineales y se integra por partes se obtiene

$$\int_V \bar{b}_i u_i^* dV + \int_V \rho u_i^* \ddot{u}_i dV - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} dV = \int_{S_G} t_i u_i^* dS - \int_{S_G} \bar{t}_i u_i^* dS - \int_{S_G} \bar{t}_i u_i^* dS + \int_{S_u} (\bar{u}_i - u_i) t_i^* dS$$

y considerando que $s = S_u + S_G$, entonces,

$$\int_V \bar{b}_i u_i^* - \rho u_i^* \ddot{u}_i + \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = - \int_{S_u} t_i u_i^* dS - \int_{S_G} \bar{t}_i u_i^* dS + \int_{S_u} (\bar{u}_i - u_i) t_i^* dS \quad 6.40$$

Si se utiliza la siguiente relación

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$$

y se integra por partes la ec 6.40 se obtiene

$$\int_V (\bar{b}_i u_i^* - \rho u_i^* \ddot{u}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} u_i) dV = - \int_{S_u} t_i u_i^* dS - \int_{S_G} \bar{t}_i u_i^* dS + \int_{S_u} \bar{u}_i t_i^* dS - \int_{S_u} u_i t_i^* dS + \int_S u_i t_i^* dS$$

y finalmente

$$\int_V \bar{b}_i u_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} u_i - \rho u_i^* \ddot{u}_i dV = - \int_{S_u} t_i u_i^* dS - \int_{S_G} \bar{t}_i u_i^* dS - \int_{S_u} \bar{u}_i t_i^* dS - \int_{S_G} u_i t_i^* dS$$

Si se considera como solución fundamental el valor de los desplazamientos virtuales u_i^* de tal forma que se satisfaga la

siguiente ecuación

$$\frac{\partial G_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho \ddot{u}_i^1 + \Delta_k^1 = 0$$

donde Δ_k^1 es una función Delta de Dirac y representa una carga unitaria aplicada en 1 y en dirección k

Esta ecuación tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial G_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho \ddot{u}_i^1 + \Delta_k^1 \right) u_i \, dV &= \int_V \left(\frac{\partial G_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho \ddot{u}_i^1 \right) u_i \, dV + \int_V (\Delta_k^1) \dot{u}_i \, dV \\ &= \int_V \left(\frac{\partial G_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho \ddot{u}_i^1 \right) u_i \, dV + u_k^1 \end{aligned}$$

donde u_k^1 es el valor desconocido de u en el punto donde se aplica la fuente o carga, o sea, es el desplazamiento en 1 en la dirección k.

De lo anterior se deduce que

$$\int_V \left(\frac{\partial G_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho \ddot{u}_i^1 \right) u_i \, dV = u_k^1$$

por lo que la ec 6.40 se transforma en

$$u_k^1 + \int_{\Sigma_u} \dot{u}_i \dot{t}_i \, dS + \int_{\Sigma_\sigma} u_i t_i \, dS = \int_V \beta_i u_i^* \, dV + \int_{\Sigma_u} t_i u_i^* \, dS + \int_{\Sigma_\sigma} \dot{t}_i u_i^* \, dS$$

o en general

$$u_k^1 + \int_{\Sigma} \dot{u}_i \dot{t}_i \, dS = \int_{\Sigma} t_i u_i^* \, dS + \int_V \beta_i u_i^* \, dV \quad 6.41$$

Los valores de u_i^* y t_i^* son los desplazamientos tracciones originados por una carga concentrada que actúa en el punto 1 y

en la dirección "k".

Si se consideran cargas concentradas unitarias actuando en las tres direcciones, la ec 6.41 se escribe como

$$u_k^1 + \int_S u_i t_{ki}^* dS = \int_S t_i u_{ki}^* dS + \int_V u_{ki}^* B_i dV \quad 6.42$$

donde u_{ki}^* son los valores de los desplazamientos y tracciones en la dirección "i" debidos a fuerzas unitarias actuando en la dirección "k" y sus expresiones se presentan en el apéndice A. Nótese, que esta última expresión es válida para cualquier punto dentro del dominio V. Con el objeto de formular el problema como uno de frontera, se debe considerar que el punto "1" está sobre la frontera, aunque, en general, la ec 6.42 se puede escribir para un punto como

$$c_1 u_k^1 + \int_S u_i t_{ki}^* dS = \int_S t_i u_{ki}^* dS + \int_V u_{ki}^* B_i dV \quad 6.43$$

donde el valor de c_1 depende de la localización del punto. Se ha demostrado (ref 35) que $c_1 = 1$ para un punto interno, $c_1 = 0$ para un punto externo y $c_1 = 1/2$ para un punto sobre una frontera suave.

En forma matricial la ecuación anterior se escribe como

$$c_1 \underline{u}^1 + \int_S \underline{t}^* \underline{u} dS = \int_S \underline{u}^* \underline{t} dS + \int_V \underline{u}^* \underline{B} dV \quad 6.44$$

donde u , t , B son los vectores de desplazamiento, de tracciones superficiales y de fuerzas de cuerpo respectivamente y

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

La ec 6.44 se aplica sobre la frontera del dominio en estudio, la cual se puede considerar dividida en elementos y aproximar los vectores u y t utilizando las funciones de interpolación ϕ^T , o sea

$$\underline{u} = \phi^T u_j$$

$$\underline{t} = \phi^T t_j$$

donde u_j y t_j son los valores desconocidos de los desplazamientos y tracciones en los nodos del elemento, los que son similares a los del elemento finito, solo que este caso los nodos y los elementos solo estan únicamente sobre la frontera S .

Por lo tanto, la ec 6.44 se discretiza como

$$c^T u^T + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} (\phi^T \phi^T dS) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} u_j^T \phi^T dS \right) t_j + \sum_{i=1}^M \int_{V_i} \phi^T B dV$$

donde N es el número de elementos de frontera y M es el número de celdas o regiones internas sobre las que se deben calcular

las integrales para las fuerzas de cuerpo y S_j es la superficie del elemento "j".

Generalmente la integración de estas ecuaciones es numérica y las funciones de interpolación que se utilizan son las mismas que las empleadas en el método de los elementos finitos. Si se realiza la integración de la ecuación anterior para cada nodo se obtiene

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j + B_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} t_j \quad 6.45$$

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j + B_i = \sum_{j=1}^n G_{ij}$$

donde $H_{ij} = \hat{H}_{ij}$ para $i \neq j$, $H_{ij} = \hat{H}_{ij} + e_i$ para $i = j$, B_i es el resultado de realizar la integral sobre el dominio V y n es el número total de puntos nodales.

En forma matricial la ec 6.45 se escribe como

$$HU + B = GT$$

y al reordenar términos y colocar todas las incógnitas del lado izquierdo se llega a

$$AX = F$$

donde X es un vector que contiene los valores desconocidos de u y t ya que de los n puntos nodales, n_1 tienen como incógnitas los valores de u y n_2 tienen como incógnita los valores

de u y ϕ sea, $n = n_1 + n_2$.

Al resolver este sistema de ecuaciones se conocen los valores de u y ϕ en cualquier parte de la frontera y si se desea calcular los desplazamientos en cualquier punto interno del dominio se utiliza la ec 6.43, quedando

$$u_k^i = \int_{S_1}^* u_{ki}^* t_i dS - \int_{S_2}^* t_{ki}^* u_i dS + \int_V B_i u_{ki} dV$$

Así mismo, para el cálculo de los esfuerzos en los puntos internos del dominio se aplican las relaciones esfuerzo-desplazamiento obteniéndose

$$\begin{aligned} G_{ij} = & \int_{S_1} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} S_{ij} \frac{\partial u_{ki}^*}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial u_{mi}^*}{\partial x_n} - \frac{\partial u_{ni}^*}{\partial x_m} \right) \right] t_i dS \\ & - \int_{S_2} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} S_{ij} \frac{\partial t_{ki}^*}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial t_{mi}^*}{\partial x_n} - \frac{\partial t_{ni}^*}{\partial x_m} \right) \right] u_i dS \\ & + \int_V \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} S_{ij} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_n} - \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_m} \right) \right] B_i dS \end{aligned}$$

En la actualidad, se están formulando los programas de computadora para ambos casos, o sea, tanto para el método directo como indirecto.

APLICACION ASINTOTICA DEL METODO DE LA INTEGRAL DE FRONTERA

Debido a que la definición de fronteras ficticias en el estudio de problemas de extensión ilimitada (como lo puede ser el de difracción de onda en depósitos de suelos) no se ha podido lograr de manera exacta con los métodos presentados en los capítulos 3, 4 y 5 es posible con el método de la integral de frontera definir condiciones matemáticas que eliminen la utilización de fronteras ficticias y aproximen la extensión infinita de los dominios considerados.

A manera de completar este trabajo se presenta la forma de aplicar esta idea al método de la integral de frontera a la ecuación escalar de onda, obteniéndose como primera aproximación la condición de radiación de Sommerfeld. Dicha aproximación se obtiene utilizando las funciones de Green, así mismo, se presenta la derivación matemática de una segunda aproximación utilizando estas mismas funciones.

En los siguientes párrafos se presenta el desarrollo matemático para la definición de las ideas expuestas en el párrafo anterior y finalmente se presentan las soluciones fundamentales para el caso de ondas P y SV a partir de las cuales se podrían obtener las condiciones de radiación en los elementos de frontera para este problema

Para ondas armónicas la ecuación escalar de onda se transforma en la ecuación de Helmholtz al separar la dependencia con respecto al tiempo, o sea de la ec 2.9 se obtiene

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad 7.1$$

Transformándola a coordenadas polares queda como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0$$

donde r y θ están dados por

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$

Para encontrar la solución de esta ecuación, se aplica el método de separación de variables, o sea

$$u(r, \theta) = V(r)T(\theta) = VT$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{dV}{dr} T \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{d^2V}{dr^2} T \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{d^2T}{d\theta^2} V$$

por lo tanto la ec 7.1 queda como

$$\frac{d^2V}{dr^2} T + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} T + \frac{1}{r^2} \frac{d^2T}{d\theta^2} V + k^2 (VT) = 0$$

manipulando algebraicamente se llega a

$$\frac{r^2 \frac{d^2V}{dr^2} + r \frac{dV}{dr} + r^2 k^2 V}{V} = - \frac{\frac{d^2T}{d\theta^2}}{T} = n^2 \quad 7.2$$

Considerando solo la parte derecha de esta ecuación se tiene

$$-\frac{d^2T}{d\theta^2} + n^2 T = 0$$

la que admite como solución

$$V = A \operatorname{sen} n\theta + B \cos n\theta$$

donde A y B son constantes arbitrarias

Considerando ahora el miembro izquierdo de la ec 7.2 se tiene

$$r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + r \frac{dV}{dr} + r^2 k^2 V - n^2 V = 0$$

y si hacemos $x = kr$ se obtiene la siguiente relación

$$x^2 \frac{d^2 V}{dx^2} + x \frac{dV}{dx} + V(x^2 - n^2) = 0$$

mejor conocida como ecuación de Bessel, la que acepta como soluciones funciones del mismo nombre de primera y segunda clase ($J_0(kr)$, $Y_0(kr)$) y las funciones de Hankel de primera y segunda clase (ref 36). Si se escoge como solución la función de Hankel de orden cero y primera especie, $H_0^{(1)}(kr)$, y la dependencia con respecto al tiempo como $\exp(i\omega t)$ donde $i = \sqrt{-1}$ se satisface la condición de radiación, o sea, si se considera que $r \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} (H_0^{(1)}(kr)) \exp(-i\omega t) &= \left[J_0(kr) + i Y_0(kr) \right] \left[\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[\cos \left(kr - \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp i \left(kr - \frac{\pi}{4} - \omega t \right) \end{aligned}$$

$$H_0^{(1)}(kr) \exp(i\omega t) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{4} - \omega t\right)\right)$$

la cual es la representación clásica de una onda que se aleja en la dirección que aumenta r , o sea, $f(r - ct)$.

Por lo tanto, la solución fundamental de la ec 7.1 está dada por (ref 37)

$$u^* = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr) \quad 7.3$$

Para el estudio del problema de propagación, supongamos que tenemos una región R_1 discretizada con elementos finitos y una región R_2 que se extiende al infinito en cualquier dirección y una superficie S que une a ambas (fig 35), entonces, si aplicamos el principio de los trabajos virtuales en la ec 7.1 y considerando como desplazamiento virtual la solución fundamental u^* e integrando en todo el dominio $R = R_1 + R_2$ se obtiene

$$\int_R (\nabla^2 u + k^2 u) u^* dR = 0$$

la que al ser integrada por partes dos veces como se mostró en el cap 6 nos lleva a

$$\int_S \left(u^* \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u^*}{\partial n} u \right) dS = 0 \quad 7.4$$

donde n es la normal exterior a la frontera S (ref 7).

Sustituyendo la ec 7.3 en la ec 7.4

$$\int_S \left[\frac{i}{4l} H_0^{(m)}(kr) \right] \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{i}{4l} H_0^{(m)}(kr) \right] u \Big|_S = 0 \quad 7.5$$

Si se considera que $r \approx a$, entonces el segundo término de la ecuación anterior se modificará

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{i}{4l} H_0^{(m)}(kr) \right] &= \frac{i}{4l} \frac{\partial}{\partial r} \left[H_0^{(m)}(kr) \right] \\ &= \frac{k}{4l} \left[\frac{\partial H_0^{(m)}(kr)}{\partial (kr)} \right] \end{aligned}$$

por lo que la ec 7.5 quedará como

$$\frac{i}{4l} \int_S \left[H_0^{(m)}(kr) \frac{\partial u}{\partial n} - k \frac{\partial H_0^{(m)}(kr)}{\partial (kr)} u \right] dS = 0$$

Empleando las fórmulas para las derivadas de las funciones de Bessel y las relaciones entre ellas (ref 36) se puede establecer

$$\frac{\partial H_0^{(m)}(kr)}{\partial (kr)} = H_1^{(m)}(kr) = -H_{-1}^{(m)}(kr) \quad 7.6$$

expresión que al ser sustituida en la ec 7.5 nos conduce a

$$\frac{i}{4l} \int_S \left[\left[H_0^{(m)}(kr) \frac{\partial u}{\partial n} \right] - k \left[H_1^{(m)}(kr) u \right] \right] dS = 0 \quad 7.7$$

Una de las propiedades matemáticas de las funciones de Hankel es su expansión asintótica, o sea

$$H_0^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[P_0(0, kr) - i Q_0(0, kr) \right] \exp i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$H_0^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[P_0(0, kr) + i Q_0(0, kr) \right] \exp i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right)$$

donde P y Q son los polinomios con los que se efectúa la expansión.

Si se considera como primera aproximación únicamente los elementos de la expansión donde aparezcan términos de primer orden y se sustituyen en la ec 7.7 se llega a

$$\iint_S \left[\left(1 - \frac{i}{8kr} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - ik \left(1 - \frac{3i}{8kr} \right) u \right] dS = 0$$

y si además se considera que r es muy grande

$$\frac{\partial u}{\partial n} - ik u = 0 \quad 7.8$$

expresión mejor conocida como la condición de radiación de Sommerfeld (ref 37). Si por otra parte se hubiera considerado como solución fundamental la función de Hankel de orden cero y de segunda especie (ref 37), o sea

$$u^* = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr)$$

y la dependencia con respecto al tiempo como $\exp(i\omega t)$ se llegaría a la siguiente expresión

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ikn = 0$$

7.9

que se conoce como la condición de absorción de Sommerfeld (ref 37).

Ambas expresiones (ecs 7.8 y 7.9) tienen un sentido físico, considerando por ejemplo la dependencia con respecto al tiempo como $\exp(-i\omega t)$, la primera de ellas establece que las ondas no son reflejadas por la región exterior R_2 , mientras que en la segunda se establece que todas las ondas convergen hacia la región interior R_1 , es decir, cada una de ellas está asociada con un problema exterior o interior respectivamente.

Como se mencionó anteriormente, en el estudio del problema de propagación de ondas se presenta el problema de modelar matemáticamente las fronteras del dominio por lo que la condición en la frontera S será la que se define con la ec 7.8 o sea, la condición de radiación.

Manipulando algebraicamente con la ec 7.8 se puede llegar a la siguiente expresión

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{64k^2r^2 - 3}{64k^2r^2 + 1} kiu - \frac{32kr}{64k^2r^2 + 1} u$$

lo que se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial n} \doteq iku - \frac{1}{2r} u$$

7.10

si r es grande

Al comparar esta ecuación con la que se obtiene como condición de frontera transmisora para una onda cilíndrica que abandona una región (ref 38) se observa cierta similitud, por lo que se infiere que la condición de radiación en la frontera del dominio discretizado con elementos finitos está asociada a ondas cilíndricas.

Si el problema estuviera definido en el dominio del tiempo se tiene que la ecuación de propagación en coordenadas polares se escribe como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{C_f^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

en este caso la solución está dada por

$$u = f(r, t)g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r-ct)g(\theta)$$

Tseng y Robinson (ref 38) demuestran que la condición de frontera transmisora está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{2r} \quad 7.11$$

Nótese la similitud entre las ecs 7.10 y 7.11. Sin embargo Tseng y Robinson emplean el método de las diferencias finitas para resolver el problema de propagación, siendo la estabilidad y la convergencia los problemas más serios que presenta su formulación.

Si ahora como segunda aproximación se consideran los términos de segundo orden en la expansión de la función de Hankel, la condición de frontera queda como

$$\frac{\partial u}{\partial n} = ik \left[\frac{1638 k^4 r^4 - 1536 k^3 r^3 - 135}{1638 k^4 r^4 + 14080 k^3 r^3 + 61} \right] u - \left[\frac{1532 k^4 r^4 - 192 k^3 r^3}{1638 k^4 r^4 + 14080 k^3 r^3 + 61} \right] u$$

Se puede apreciar en esta expresión que el hecho de considerar que r es grande no implica que se puede deducir de manera sencilla la condición de frontera transmisora para ondas cilíndricas además, el cálculo de esta expresión implica un poco más de tiempo de computadora.

De la misma forma que el desarrollo anterior se pueden establecer las condiciones de radiación en los elementos de frontera para el caso de ondas P y SV, para ello se considera como solución fundamental la respuesta de un medio infinito elástico e isotrópico a una fuerza armónica concentrada en un punto (ref 39), o sea

$$U_{ij} = \frac{1}{2\pi r C_3^2} \left[\psi \delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right]$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[\left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right] \left[\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right] - \frac{2}{r} \chi \left[n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} + \left[\frac{C_1^2}{C_3^2} - 2 \right] \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right] \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right]$$

donde las funciones χ y ψ se definen como

$$\chi = K_2\left(\frac{i\omega r}{C_4}\right) - \frac{C_4^2}{C_3^2} K_2\left(\frac{j\omega r}{C_3}\right)$$

$$\psi = K_0\left(\frac{i\omega r}{C_3}\right) + \frac{C_3}{\nu \omega r} \left\{ K_1\left(\frac{-i\omega r}{C_3}\right) - \frac{C_3}{C_4} K_1\left(\frac{i\omega r}{C_4}\right) \right\}$$

K_ν son funciones de Bessel de segunda clase y de orden ν , C_S y C_P son las velocidades de propagación de las ondas P y SV respectivamente, δ_{ji} es una delta de Kronecker y ρ es la densidad de masa.

El procedimiento analítico consistiría en sustituir estas expresiones en la ecuación del trabajo virtual y hacer el desarrollo matemático correspondiente; dado lo extenso de estas expresiones y lo tedioso de este procedimiento únicamente se ha planteado el problema.

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudiaron varios métodos para modelar numéricamente depósitos finitos de suelo considerando al mismo como un medio elástico, homogéneo e isótropo. Se supuso conocido el tipo de onda incidente y la dirección de propagación. La formulación al momento está restringida a ondas incidentes planas.

Se presentó la formulación numérica y analítica del problema de amplificación dinámica a partir del método de las diferencias finitas, del método de las características, del método del elemento finito y el método de los elementos de frontera.

De la misma forma se presentaron las condiciones de absorción necesarias para la minimización de las reflexiones artificiales en las fronteras ficticias, así como también las condiciones para resolver el problema de medios con estratificación.

Se encontró que las principales limitaciones que presenta el método de las diferencias finitas son la modelación de fronteras e interfases curvas y la densidad de puntos requerida para logra una buena aproximación.

El método de las características presenta también la dificultad de modelar dominios con fronteras curvas. Para la utilización de alguno de estos dos métodos se requiere una gran cantidad de tiempo en la preparación de los datos lo que implica un aumento en el costo de aplicación de los mismos.

No obstante que los resultados obtenidos con el método del elemento finito indican una excelente aproximación, no se puede considerar a este método como el que proporciona la mejor solución para este tipo de problemas ya que no se debe olvidar que aún no ha sido posible definir de manera exacta condiciones en fronteras ficticias requeridas por el modelo. De igual manera existen dudas acerca de la influencia y contribución de las ondas superficiales y de las ondas de cuerpo y de los efectos que pueden ocasionar al incidir en las fronteras ficticias.

Es de importancia mencionar que los resultados obtenidos de un análisis con elementos finitos dependen fuertemente del tipo de elemento y de la discretización empleada. Una conclusión de este trabajo es que el uso de elementos cuadrangulares con 4 nodos parece ser el más adecuado.

Un punto de importancia es la definición del número de elementos por longitud de onda; lo cual está íntimamente relacionado con el tipo de matriz de masas (consistente, concentrada o una combinación de ambas) empleada. En general los resultados hasta ahora presentados en la literatura son correspondientes a frecuencias bajas de poco interés en ingeniería sísmica.

Es necesario explorar frecuencias más altas lo que implica investigación adicional para definir cual método de los aquí discutidos es mejor. Cabe hacer notar que el tiempo de

computadora empleado para el análisis de estos problemas cuando se utiliza el método del elemento finito es bastante menor comparado con el obtenido con el de otros métodos.

Dada la complejidad que tiene el problema de amplificación dinámica en depósitos de suelo de extensión infinita es posible extender las fronteras al infinito utilizando elementos de frontera de extensión semi-infinita, con los cuales se aproximen las condiciones de absorción mencionados en párrafos anteriores, sin embargo, como se estableció en el capítulo 6 esto implica un alto grado de dificultad numérica.

No obstante el empleo de la analogía entre el método de Galerkin y el de colocación ortogonal actualmente se está estudiando la posibilidad de utilizar elementos de frontera en una frontera ficticia y aplicar las expansiones asintóticas para la solución fundamental con lo cual se obtienen condiciones de frontera locales como se discutió en el capítulo 7.

La conclusión general de este trabajo es que la utilidad de estos métodos solo se podrá verificar a través de registros obtenidos en el campo. La información hasta ahora disponible no es suficiente dada la incertidumbre en los parámetros que definen la excitación sísmica.

REFERENCIAS

1. Trifunac, M D, "Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves", Bull. Seism. Soc. Am. Vol 64, No 5, pp 1429-2454, 1971
2. Aki, K y Larner, K L, "Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves", Journal of Geophysical Research, 75, pp 933-954, 1970.
3. Contribution to the study of Friuli earthquake of May 1976, CNEN-ENEL, Commission on seismic problems associated with the installation of nuclear plants, noviembre 1976
4. Wojcik, G L, Resonance zones on the surface of dipping layer due to plane SH seismic input, N.S.F., Grant Report GR-11, Weidlinger Associates, junio 1978
5. Strong-Motion Earthquake Instrument Arrays, Proceedings of the International Workshop on Strong-Motion Earthquake Instrument Arrays, Honolulu, Hawai, mayo 1978
6. Malvern, L, Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.
7. Karamcheti, K, Vector analysis and cartesian tensors with selected applications, Holden, Day, 1967
8. Achenbach, J D, Wave propagation in elastic solids, North Holland Publishing Company, 1975

9. Ewing, W H, y Jardetzky, W S, y Press, F., Elastic waves in layered media, Mc Graw Hill Book Company, Inc, Nueva York, 1957
10. Richart, F E, Woods, R D, y Hall Jr. J R, Vibrations of soils and foundations, Prentice Hall, 1970.
11. Smith, G D, "Numerical Solution of partial differential equations", Oxford University Press, 1969
12. Kelly, K R, Alford, R N, Treitel, S y Word, R W, "Application of finite difference methods to Exploration Seismology", Topics in Numerical Analysis II, Proceedings of the Royal Irish Academy Conference on Numerical Analysis, Academic Press, 1974.
13. Pian, T H H, "Variational formulations of numerical methods in solid continua", Proceedings of the Symposium in Computer Aided Engineering, University of Waterloo, Vol 5, pp 421-449, mayo 1971
14. Ayala, G A, y Reyes A, The characteristics method in two-dimensional wave propagation problems, Instituto de Ingenieria, UNAM, E 31, 1978
15. Boore, D M "Finite difference methods for seismic-wave propagation in heterogeneous materials", Methods in Computational Physics, Vol II, Academic Press, 1972

16. Engquist, B y Hajda, A, "Absorbing boundary conditions for numerical simulations of waves", Mathematics of Computation, Vol 31, pp 629-651, 1977
17. Lysmer, J y Kuhlemeyer, R L, "Finite dynamic model for infinite media", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 95, EM 4, pp 859-877, 1969
18. Ang, A H S, y Newmark, N M, "Development of a transmitting boundary for numerical wave motion calculations", N M: Newmark Consulting Engineering Services, Urbana, Illinois, 1971
19. Butler, D S, "The numerical solution of hiperbolic system of partial differential equations in three independent variables", Proceedings of the Royal Society of London, A, pp 232-252, 1960
20. Courant, R y Hilbert, D, Methods of Mathematical Physics, Interscience, 2, Nueva York, 1962
21. Clifton, R J, "The difference method for plane problems in dynamic elasticity", Quarterly of Applied Mathematics, 25, pp 97-116, 1976
22. Zienkiewics, O C, The finite element method in engineering science, Mc Graw Hill Book Company, 1977
23. Ayala G A, Aranda, G R, "Modelo numérico eficiente de aplicación en estudios de amplificación dinámica",

Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D F, 1978

24. Pin Tong, "On the numerical problems of the finite element method", Proceedings of the Symposium in Computer Aided Engineering, University of Waterloo, Vol 5, pp 539-559, mayo 1971
25. Smith, W D, "A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems", Journal of Computational Physics, Vol 15, No 4, 1974
26. Frazier, G A, Alexander J H, y Petersen, C M, 3-D Seismic Code for ILLIAC IV, Systems, Science and Software, ARPA, Arlington, Virginia, febrero 1973
27. Aranda, G R, "Formulación numérica del problema de propagación de ondas", Tesis de Maestría, DEPEI, UNAM, México, 1977
28. Sánchez, S F J, "Movimiento sísmico en cañones de forma arbitraria", Tesis Doctoral, DEPEI, UNAM, México 1978
29. Bathe, K J, Wilson, E L y Iding, H, R, "NONSAP -- A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems", Reporte UCSESN 74-3, Universidad de California, Berkeley, 1974
30. Brebbia, C A, The boundary element method for engineers, Pentech Press, 1978
31. Cruse, T, "Mathematical foundations of the boundary-integral equation method in solid mechanics", AFOSR,

32. Ayala, G A, "Numerical solution of wave propagation problems in saturated media", Tesis Doctoral, Universidad de Southampton, Gran Bretaña, 1973
33. Bettles, P, "Infinite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 11, pp 53-64, 1977
34. Fynlanson, B A, The method of weighted residuals and variational principles, Academic Press, 1972
35. Lachat, J C, y Watson, J O, "Effective numerical treatment of boundary integral equation. A formulation for three dimensional elastostatics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, pp 991-1006, 1976
36. Abramowitz, M y Stegun, I A, Handbook of mathematical functions, Dover Publications Inc, 1970
37. Sommerfeld, A, Partial differential equations in physics, Academic Press, 1949
38. Tseng, M N, y Robinson, A R, "A transmitting boundary for finite difference analysis of wave propagation in solids", Universidad de Illinois, Urbana, 1970
39. Domínguez J, "Dynamic stiffness of rectangular foundations", Publicación No R78-20, Instituto Tecnológico de Massachussets, agosto de 1978

40. Solomon, L, Elasticite lineaire, Masson, Parfs, 1978
41. Wardle, L J, "Integral transform methods for multilayered cross-anisotropic elastic systems", 27, Division of Applied Geomechanics, Australia, 1977
42. Stroud, A H y Secrest, D, Gaussian quadrature formulas, Prentice Hall, Englewood Cliffs N J, 1966
43. Idriss, I M, y Seed, H B, "Seismic response of horizontal soil layers", Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol 94, No SM4, julio 1968
44. Ayala, G A y López, M A, Investigación en proceso, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1979

APENDICE A. SOLUCIONES ELEMENTALES EN LA TEORÍA DE ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

Las soluciones elementales o de Green en la teoría de la elasticidad lineal son generalmente escasas. Sin embargo, existen en la teoría tridimensional dos soluciones de gran utilidad en la aplicación del método de elementos de frontera: la solución de Kelvin y la solución de Mindlin (ref 40).

La de Kelvin es la respuesta al problema de una carga concentrada en un punto dentro de un cuerpo elástico lineal homogéneo e isótropo de extensión infinita (fig 36). Esta solución se escribe

$$G_{IJ}(A,B) = \frac{(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)Er} \left[(3-4\nu) \delta_{IJ} + \frac{E_I E_J}{r^2} \right]$$

$$T_{IJK}(A,B) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^3} \times (-\delta_{IJ} x_k + \delta_{IK} x_j + \delta_{JK} x_i) + \frac{3 E_I E_J E_k}{r^5} \right]$$

donde

$$E_i = (y_i - x_i)$$

$$E_j = (y_j - x_j)$$

$$E_k = (y_k - x_k)$$

$$r^2 = (y_i - x_i) (y_j - x_j)$$

δ_{ij} delta de Kronecker

E módulo de elasticidad

ν relación de Poisson

El significado de las otras literales se ilustra en la fig 34.

A partir de la solución de Kelvin es posible encontrar la solución para una carga concentrada en un punto dentro de un semiespacio elástico (fig 31).

En este caso la solución, conocida como de Mindlin, satisface condiciones de tracción nula en la frontera, con lo cual basta que en la aplicación del método de los elementos de frontera o problemas como el del cañón, la discretización solo se requiera sobre el mismo.

El campo de desplazamientos y de esfuerzos para la solución de Mindlin se escribe para el caso de una fuerza de magnitud unitaria en la dirección x_1 ,

$$G_{11} = \frac{x_1}{2G} \left[\frac{x_3 - c}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(x_3 - c)}{R_2^3} - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + x_3 + c)} + \frac{6cx_3(x_3 + c)}{R_2^5} \right]$$

$$G_{21} = \frac{x_2}{2G} \left[\frac{x_3 - c}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(x_3 - c)}{R_2^3} + \frac{6cx_3(x_3 + c)}{R_2^5} - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + x_3 + c)} \right]$$

$$G_{31} = \frac{1}{2G} \left[\frac{3 - 4\nu}{R_1} + \frac{8(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu)}{R_2} + \frac{(x_3 - c)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(x_3 + c)^2 - 2cx_3}{R_2^3} + \frac{6cx_3(x_3 + c)^2}{R_2^5} \right]$$

$$T_{111} = \frac{(1 - 2\nu)(x_3 - c)}{R_1^3} + \frac{(1 - 2\nu)[3(x_3 - c) - 4\nu(x_3 + c)]}{R_2^3} + \frac{6c(x_3 + c)[(1 - 2\nu)x_3 - 2\nu c]}{R_2^5}$$

$$- \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + x_3 + c)} - x_1^2 \left[\frac{3(x_3 - c)}{R_1^5} + \frac{3(3 - 4\nu)(x_3 - c)}{R_2^5} + \frac{30cx_3(x_3 + c)}{R_2^7} \right]$$

$$- \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)(2R_2 + x_3 + c)}{R_2^3(R_2 + x_3 + c)^2} \Big]$$

$$T_{223} = \frac{(1-2\nu)(x_3-c)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu) [3(x_3-c) - 4\nu(x_3+c)]}{R_2^3} + \frac{6c(x_3+c) [(1-2\nu)x_3 - 2\nu c]}{R_2^5}$$

$$- \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+x_3+c)} - x_2^2 \left[\frac{3(x_3-c)}{R_1^5} + \frac{3(3-4\nu)(x_3-c)}{R_2^5} + \frac{30cx_3(x_3+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)(2R_2+x_3+c)}{R_2^3(R_2+x_3+c)} \right]$$

$$T_{333} = (1-2\nu)(x_3-c) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) - \frac{3(x_3-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x_3(x_3+c)^2 - 3c(x_3+c)(5x_3-c)}{R_2^5}$$

$$- \frac{30cx_3(x_3+c)^2}{R_2^7}$$

$$T_{233} = x_2 \left[(1-2\nu) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) - \frac{3(x_3-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x_3(x_3+c) - 3c(3x_3+c)}{R_2^5} - \frac{30cx_3(x_3+c)^2}{R_2^7} \right]$$

$$T_{333} = x_1 \left[(1-2\nu) \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x_3(x_3+c) - 3c(3x_3+c)}{R_2^5} - \frac{30cx_3(x_3+c)^2}{R_2^7} \right]$$

$$T_{123} = x_1 x_2 \left[-\frac{3(x_3 - c)}{R_1^5} - \frac{3(3 - 4\nu)(x_3 - c)}{R_2^5} + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)(2R_2 + x_3 + c)}{R_2^3(R_2 + x_3 + c)^2} - \frac{30cx_3(x_3 + c)}{R_2^7} \right]$$

donde

G módulo de cortante

ν relación de Poisson, y el significado de las otras literales se ilustra en la figura 31.

Las soluciones correspondientes a fuerzas unitarias en las direcciones x_2 y x_3 se encuentran por ejemplo en la ref 40.

Para un medio estratificado que consista en capas paralelas, el uso en el método de los elementos de frontera de una solución elemental que satisfaga las condiciones en las interfaces simplificaría el problema, ya que no sería necesario utilizar elementos de frontera sobre ellas. Este tipo de soluciones pueden derivarse si se usan métodos de transformadas integrales como los de la ref 41.

APENDICE B. FUNCIONES DE INTERPOLACION

La representación isoparamétrica de la geometría de un elemento de frontera se puede lograr si se utilizan las ideas correspondientes desarrolladas en el método de elementos finitos. Así, un elemento de frontera isoparamétrico es uno en que las funciones de interpolación que definen la variación de los desplazamientos u_i y tracciones t_i son las mismas que las que se utilizan para definir su geometría (ref 22). Con un elemento como el de la fig 3a se puede demostrar que las funciones de interpolación del tipo *Serendipity* son adecuadas para definir la variación de desplazamientos u_i y/o tracciones t_i sobre un elemento de frontera como el que se muestra en la fig 3b si $\xi_3 = 1$.

En general, la variación de los desplazamientos y/o tracciones sobre un elemento de frontera plano se escribe como

$$u_i(\xi) = N^a(\xi)U_i^a$$

$$t_i(\xi) = N^a(\xi)T_i^a$$

donde

$N^a(\xi)$ las funciones de interpolación

U_i^a, T_i^a los valores de los desplazamientos y de las tracciones en el nodo a de cada elemento de frontera

ξ_1, ξ_2 las coordenadas intrínsecas del elemento.

Para una variación lineal, $a = 1, 2, 3, 4$

$$N^1 = \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 + \xi_2)$$

$$N^2 = \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 + \xi_2)$$

$$N^3 = \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2)$$

$$N^4 = \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2)$$

Para una variación cuadrática, $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$N^1 = \frac{1}{8} (1 + \xi_1) (1 + \xi_2) (\xi_1 + \xi_2 - 1)$$

$$N^2 = \frac{1}{8} (1 - \xi_1) (1 + \xi_2) (-\xi_1 + \xi_2 - 1)$$

$$N^3 = \frac{1}{8} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2) (-\xi_1 - \xi_2 - 1)$$

$$N^4 = \frac{1}{8} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2) (\xi_1 - \xi_2 - 1)$$

$$N^5 = \frac{1}{8} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2^2)$$

$$N^6 = \frac{1}{8} (1 + \xi_2) (1 - \xi_1^2)$$

$$N^7 = \frac{1}{8} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2^2)$$

$$N^8 = \frac{1}{8} (1 - \xi_2) (1 - \xi_1^2)$$

Si el elemento de frontera considerado no es plano, las funciones de interpolación se consideran como casos particulares de las correspondientes a los elementos tridimensionales a los que se van a acoplar. Así, por ejemplo, si el acoplamiento ocurre en la cara del elemento tridimensional $\xi_3 = -1$ (fig 39a), bastará sustituir el valor anterior de ξ_3 en las funciones de interpolación del elemento considerado.

Cuando se utilizan elementos de frontera seminfinitos, las funciones de interpolación se obtienen al combinar las funciones definidas en la ec 6.31 con los polinomios convencionales de Lagrange en la dirección x_2, x_3 y se obtienen las correspondientes a elementos rectangulares que se extienden al inf

nito en la dirección x_1 , esto es

$$N_i^{x_1 x_2} = N_i^{x_1} N_i^{x_2}, \quad N_i^{x_1 x_3} = N_i^{x_1} N_i^{x_3}$$

donde $N_i^{x_1}$ son las funciones de interpolación en la dirección que se extiende al infinito y $N_i^{x_2}$, $N_i^{x_3}$ las funciones de interpolación en la dirección x_2, x_3 , respectivamente.

Como ilustración, a continuación se derivan las funciones de interpolación para un elemento rectangular como el de la fig 3Bc.

En la dirección x_1

$$N_i = e^{(x_1 - x_1)/L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \left(\frac{x_1^j - x_1}{x_1^j - x_1^i} \right)$$

En la dirección x_2

$$N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x_2^j - x_2}{x_2^j - x_2^i} \right)$$

$$N_i = \left[1 - e^{(x_1^n - x_1)/L} \left(\frac{x_1^j - x_1}{x_1^j - x_1^n} \right) - e^{(x_1^j - x_1)/L} \left(\frac{x_1^n - x_1}{x_1^n - x_1^j} \right) \right] \left(\frac{x_2^m - x_2}{x_2^m - x_2^i} \right) \left(\frac{x_2^k - x_2}{x_2^k - x_2^i} \right)$$

$$N_j = \left[e^{(x_1^j - x_1)/L} \left(\frac{x_1^n - x_1}{x_1^n - x_1^j} \right) \right] \left[\frac{x_2^k - x_2}{x_2^k - x_2^j} \right] \left[\frac{x_2^o - x_2}{x_2^o - x_2^j} \right]$$

$$N_k = \left[e^{(x_1^k - x_1)/L} \left(\frac{x_1^p - x_1}{x_1^p - x_1^k} \right) \right] \left[\frac{x_2^o - x_2}{x_2^o - x_2^k} \right] \left[\frac{x_2^j - x_2}{x_2^j - x_2^k} \right]$$

$$N_l = \left[1 - e^{(x_1^p - x_1)/L} \left(\frac{x_1^k - x_1}{x_1^k - x_1^p} \right) - e^{(x_1^k - x_1)/L} \left(\frac{x_1^p - x_1}{x_1^p - x_1^k} \right) \right] \left[\frac{x_2^m - x_2}{x_2^m - x_2^l} \right] \left[\frac{x_2^i - x_2}{x_2^i - x_2^l} \right]$$

$$N_m = \left[1 - e^{(x_1^q - x_1)/L} \left(\frac{x_1^o - x_1}{x_1^o - x_1^q} \right) - e^{(x_1^o - x_1)/L} \left(\frac{x_1^q - x_1}{x_1^q - x_1^o} \right) \right] \left[\frac{x_2^i - x_2}{x_2^i - x_2^m} \right] \left[\frac{x_2^k - x_2}{x_2^k - x_2^m} \right]$$

$$N_n = \left[e^{(x_1^n - x_1)/L} \left(\frac{x_1^j - x_1}{x_1^j - x_1^n} \right) \right] \left[\frac{x_2^q - x_2}{x_2^q - x_2^n} \right] \left[\frac{x_2^p - x_2}{x_2^p - x_2^n} \right]$$

$$N_o = \left[e^{(x_1^o - x_1)/L} \left(\frac{x_1^q - x_1}{x_1^q - x_1^o} \right) \right] \left[\frac{x_2^j - x_2}{x_2^j - x_2^o} \right] \left[\frac{x_2^k - x_2}{x_2^k - x_2^o} \right]$$

$$N_p = \left[e^{(x_1^p - x_1)/L} \left(\frac{x_1^k - x_1}{x_1^k - x_1^p} \right) \right] \left[\frac{x_2^q - x_2}{x_2^q - x_2^p} \right] \left[\frac{x_2^n - x_2}{x_2^n - x_2^p} \right]$$

$$N_q = \left[e^{(x_1^q - x_1)/L} \left(\frac{x_1^o - x_1}{x_1^o - x_1^q} \right) \right] \left[\frac{x_2^n - x_2}{x_2^n - x_2^q} \right] \left[\frac{x_2^p - x_2}{x_2^p - x_2^q} \right]$$

donde los superíndices indican el nodo al que está asociado la coordenada.

APENDICE C. INTEGRACION NUMERICA

La evaluación numérica de las integrales que aparecen en los métodos de los elementos finitos y de los elementos de frontera puede hacerse eficientemente con la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre, que en el caso unidimensional se escribe

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i) + E_n \quad (C.1)$$

donde

- W_i factores de peso
- ξ_i coordenada del punto de integración
- n número de puntos de integración
- E_n error

Los factores de peso y los puntos de integración se escogen de tal manera que la fórmula es exacta cuando $f(\xi)$ es un polinomio de grado menor que $2n$. Las cuadraturas correspondientes a integrales bi y tridimensionales se encuentran al combinar la ec C.1 para el número de dimensiones. Por ejemplo, la

cuadratura bidimensional resulta

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (C.2)$$

Cuando el límite superior de integración es infinito, como en el caso de las integrales que aparecen en la formulación de los elementos de frontera seminfinitos, esto es, integrales del tipo

$$\int_0^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \quad (C.3)$$

su evaluación numérica en la dirección que tiende a infinito se hace al emplear el procedimiento de integración de Gauss-Laguerre, o sea

$$\int_0^{\alpha} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) + E_n \quad (C.4)$$

con factores de peso y puntos de integración derivados de los polinomios de Laguerre. La integración en la otra dirección, al ser con límites finitos, se efectúa con el procedimiento clásico de Gauss-Legendre.

Los puntos de integración y los factores de pesos para las cuadraturas de Gauss-Legendre y de Gauss-Laguerre se encuentran tabulados en la ref 41 para diferentes valores de n .



Fig. 1 Esquema de un depósito de suelo sobre una base inclinada de roca.

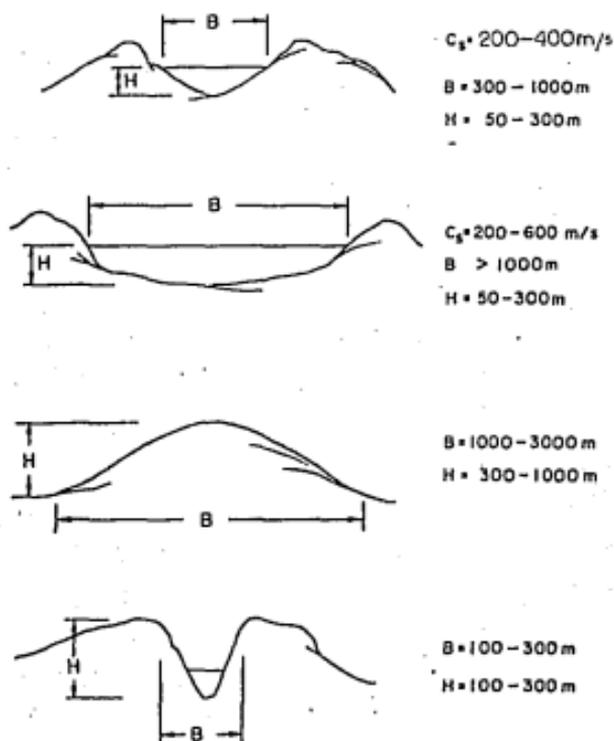


Fig. 2 Condiciones topográficas y geológicas de utilidad en estudios de amplificación dinámica.

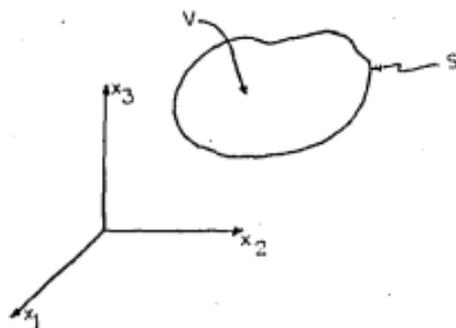


Fig. 3 Definición de la frontera y volumen de un sólido - tridimensional.

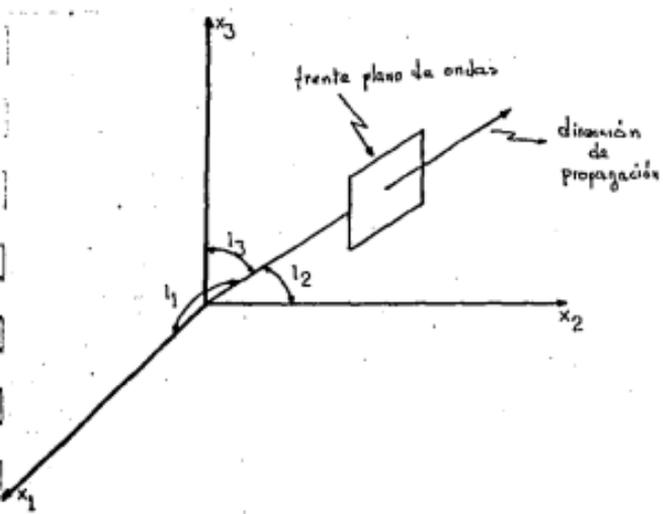


Fig. 4 Definición de los cosenos directores.

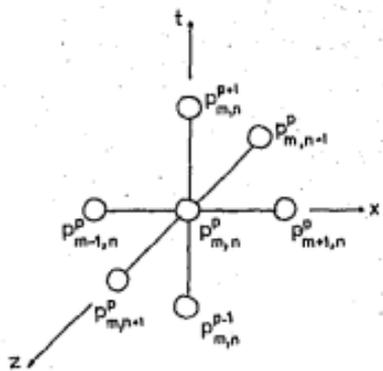


Fig. 5 Ilustración del esquema de diferencias finitas.

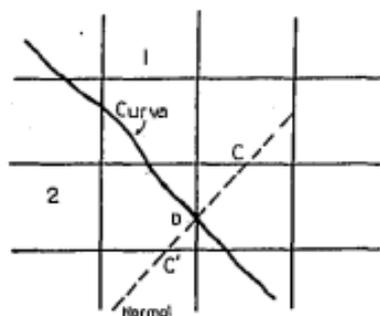


Fig. 6 Puntos utilizados en las fronteras curvas para el empleo del método de las diferencias finitas.

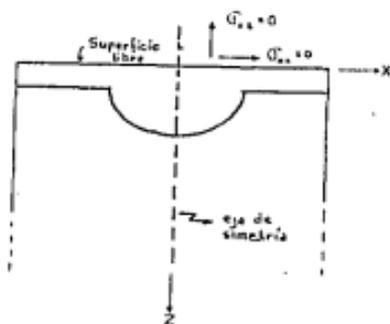


Fig. 7 Condición de frontera para una interfase regular y simétrica.

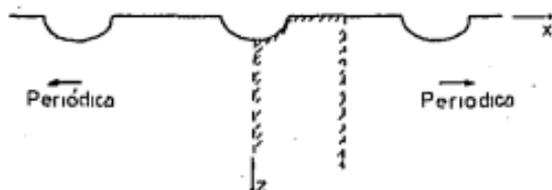


Fig. 8 Irregularidad periódica.

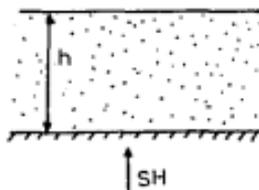


Fig. 9 Ondas SH incidiendo en un estrato de espesor h .

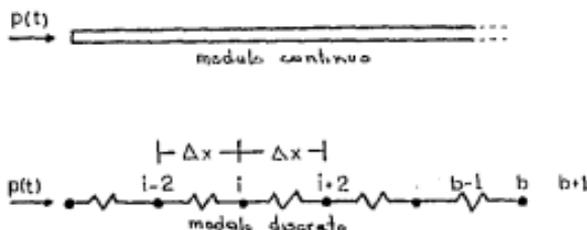


Fig. 10 Frontera transmisora según Ang y Newmark

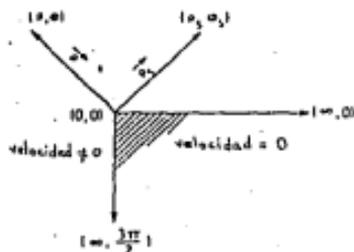


Fig. 11.a Geometría y coordenadas utilizadas para el modelo de la cuña.

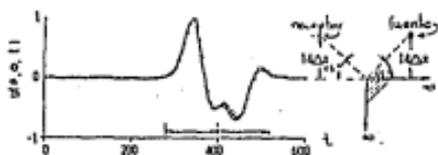


Fig. 11.b Algoritmo de diferencias finitas de segundo orden. 11 puntos por longitud de onda.

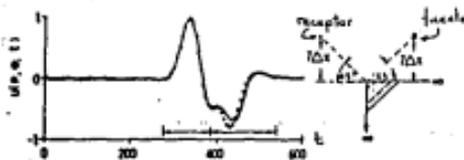


Fig. 11.d Algoritmo de diferencias finitas de cuarto orden. 5 puntos por longitud de onda.

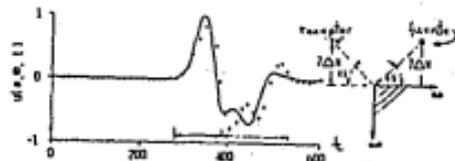


Fig. 11.c Algoritmo de diferencias finitas de segundo orden. 5 puntos por longitud de onda.

Fig. 11 Representación gráfica del desplazamiento para diferentes aproximaciones de diferencias finitas.

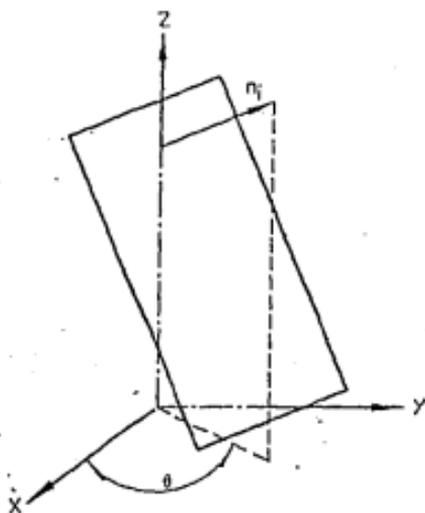


Fig. 12 Superficie característica

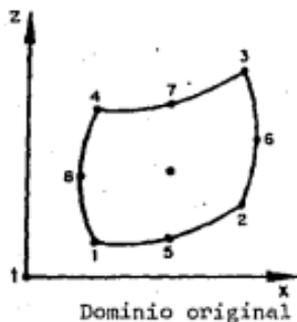


Fig. 13 Mapeo isoparamétrico.

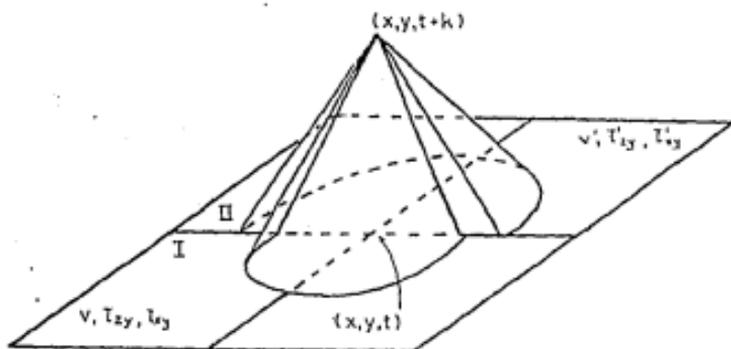


Fig. 14 Conos característicos para un punto localizado en una interfase.

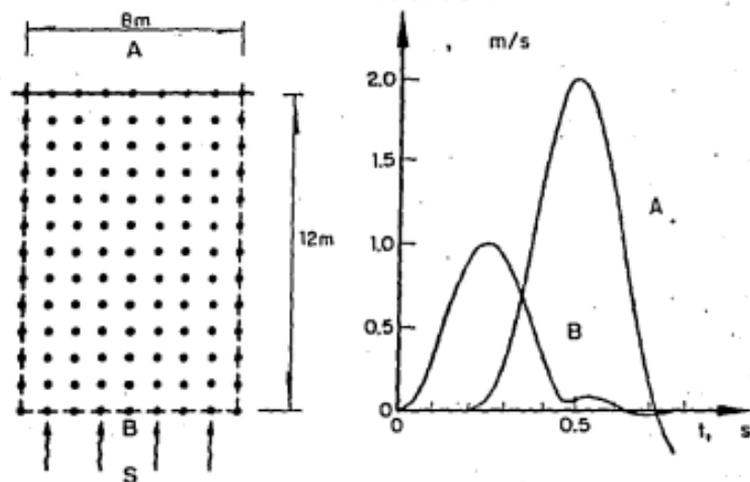


Fig. 15 Ejemplo numérico.

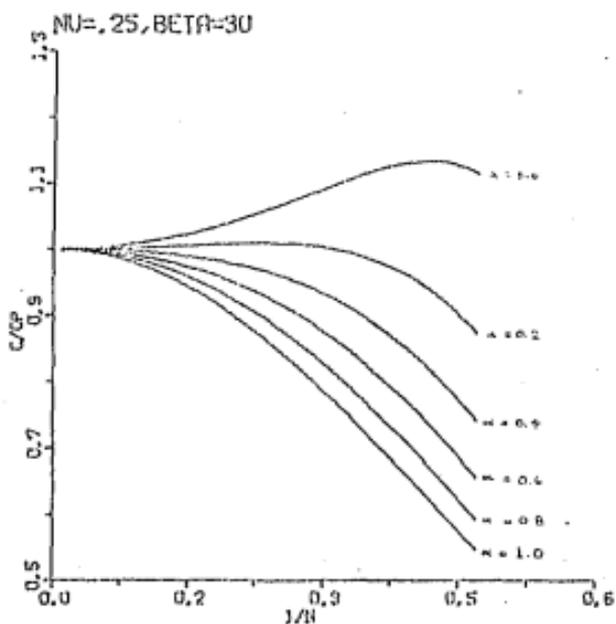


Fig. 16.a Cambio de velocidad de fase vs número de elementos por longitud de onda (ref 44)

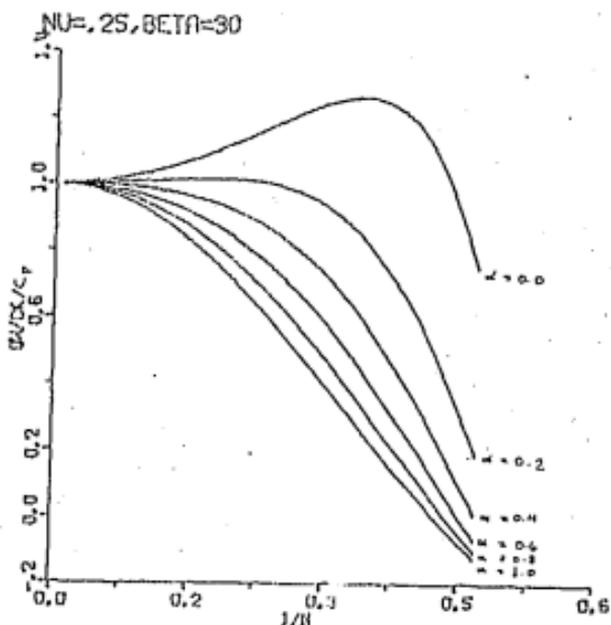


Fig. 16.b Cambio de velocidad de grupo vs número de elementos por longitud de onda (ref 44)

ESTA TERCERA COPIA
 BALBUENA DE LA BIBLIOTECA

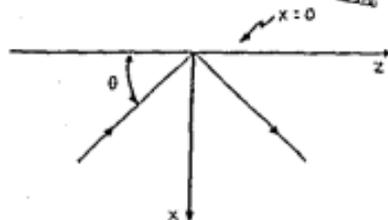


Fig. 17 Onda plana inciendiendo en la frontera $x=0$

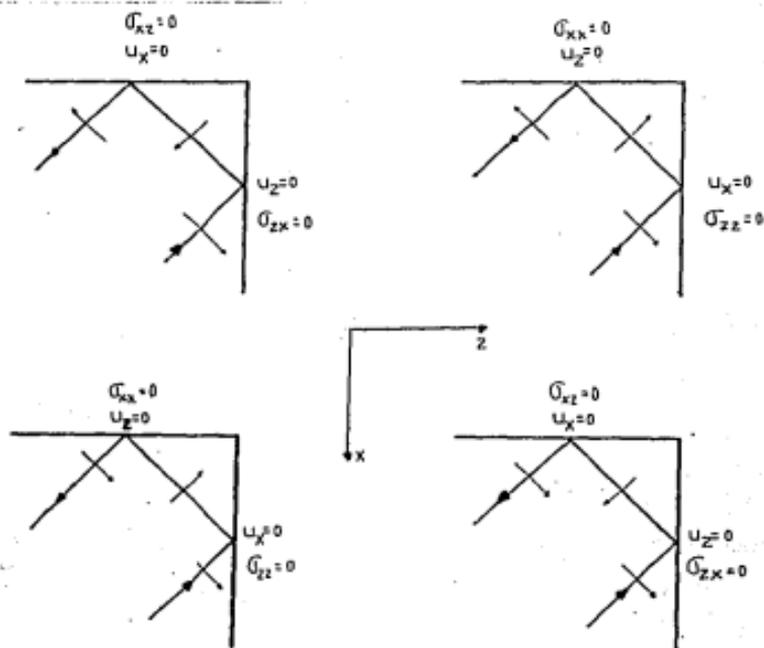


Fig. 18 Esquema de reflexiones múltiples según Smith.

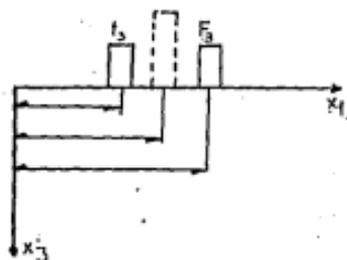


Fig. 19 Onda de corte propagándose en la dirección del eje x_1

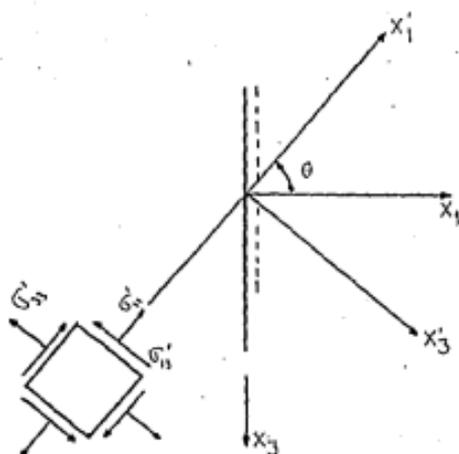


Fig. 20 Frente de ondas planas que inciden en una frontera activa.

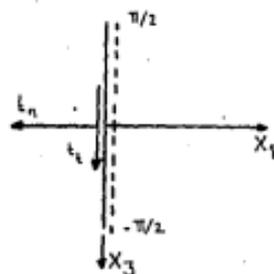


Fig. 21 Condición de esfuerzos para una frontera activa vertical.

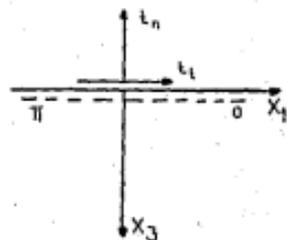


Fig. 22 Condición de esfuerzo para una frontera activa horizontal.

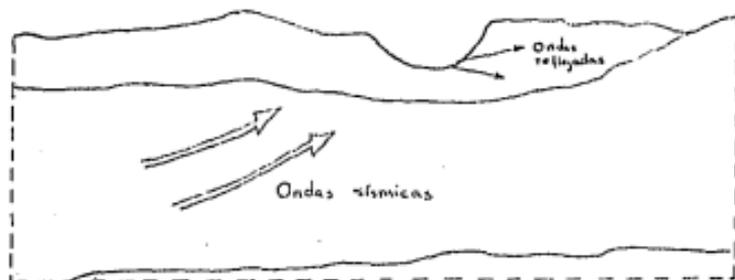


Fig. 23 Ondas sísmicas que inciden en una irregularidad.

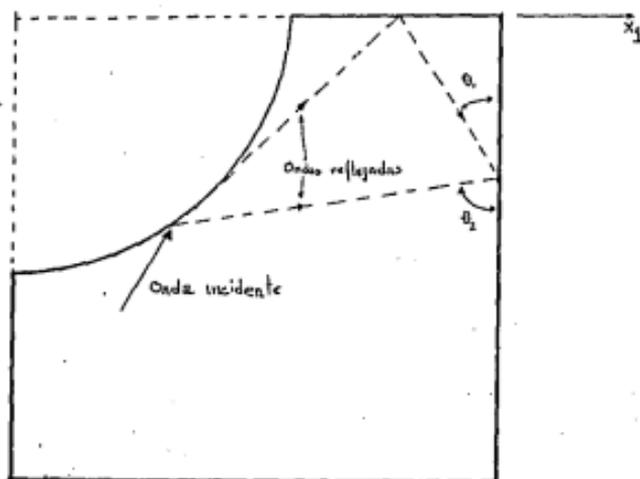


Fig. 24 Esquema para representar de forma aproximada el rango de ángulo de reflexión de ondas en la frontera del dominio.

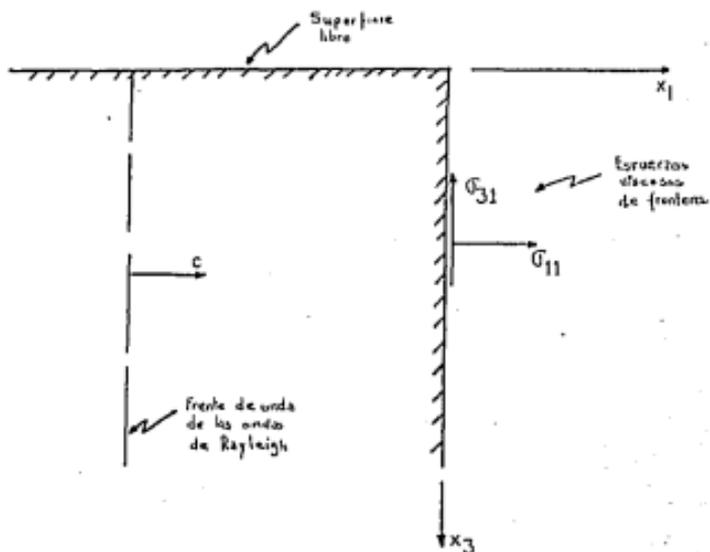


Fig. 25 Esquema para la absorción de ondas de Rayleigh .

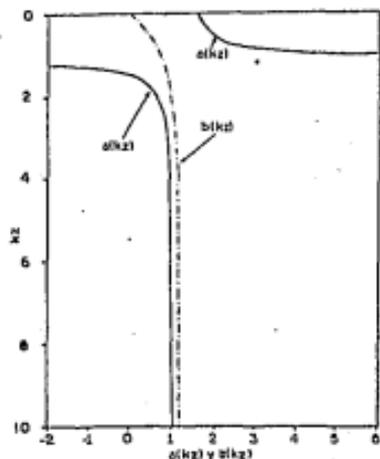


Fig. 26 Características de los coeficientes dimensionales de Rayleigh.

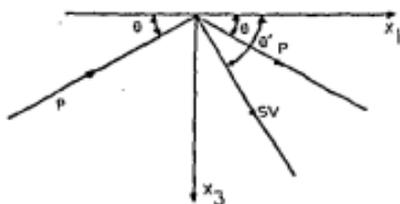


Fig. 27.a Onda P incidente

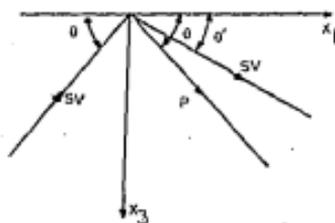


Fig. 27.b Onda SV incidente

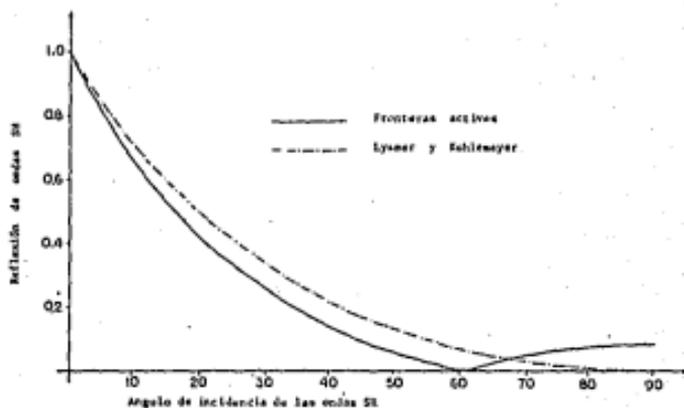


Fig. 28.a Coeficientes de reflexión para ondas SV

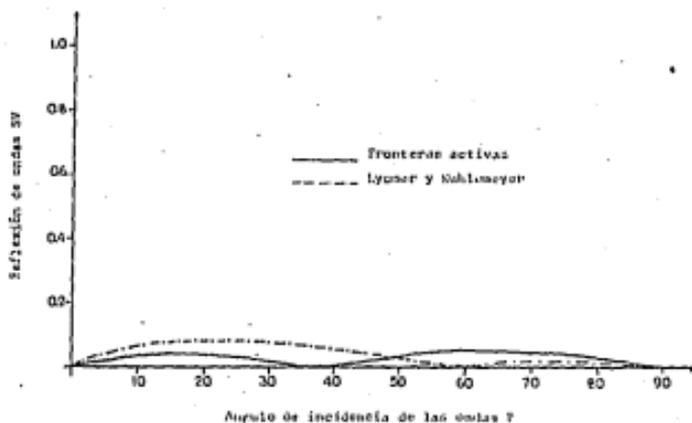


Fig. 28.b Coeficientes de reflexión para ondas SV. Onda P incidente.

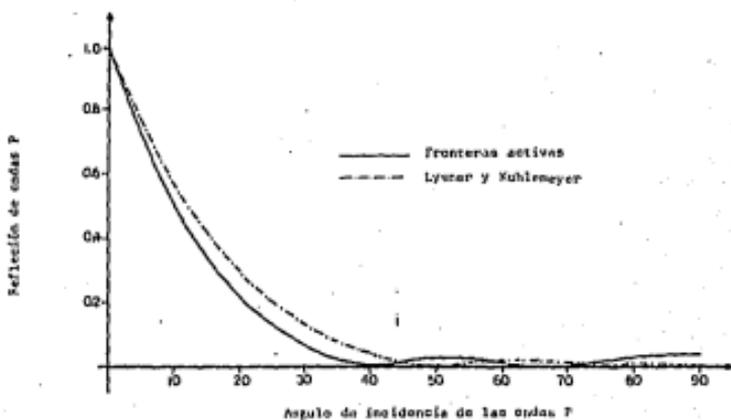


Fig. 28.c Coeficientes de reflexión para ondas P. Onda P incidente.

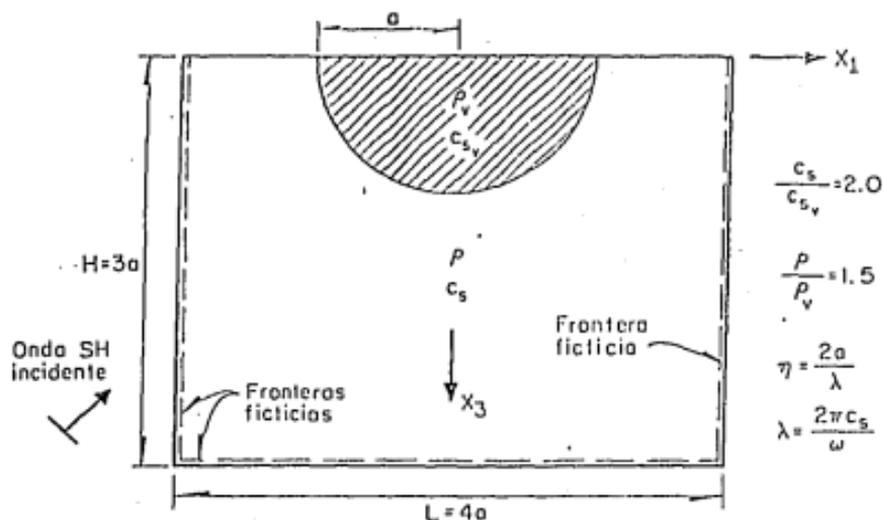


Fig. 30.a Valle aluvial contenido en un semi-espacio.

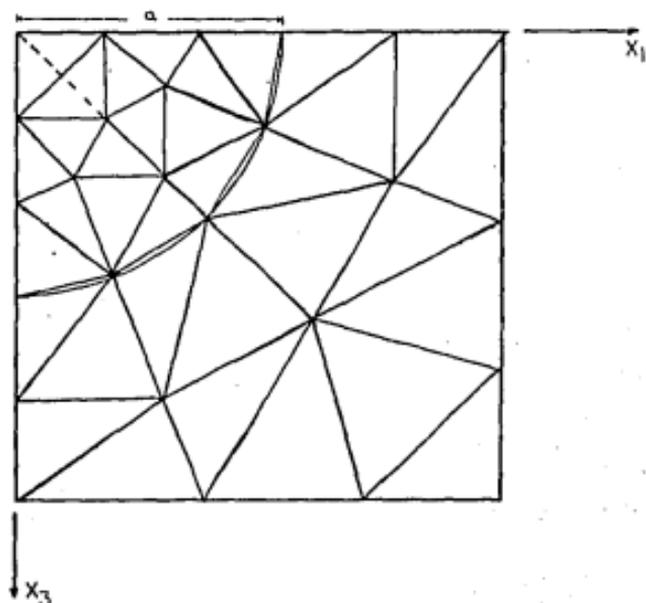
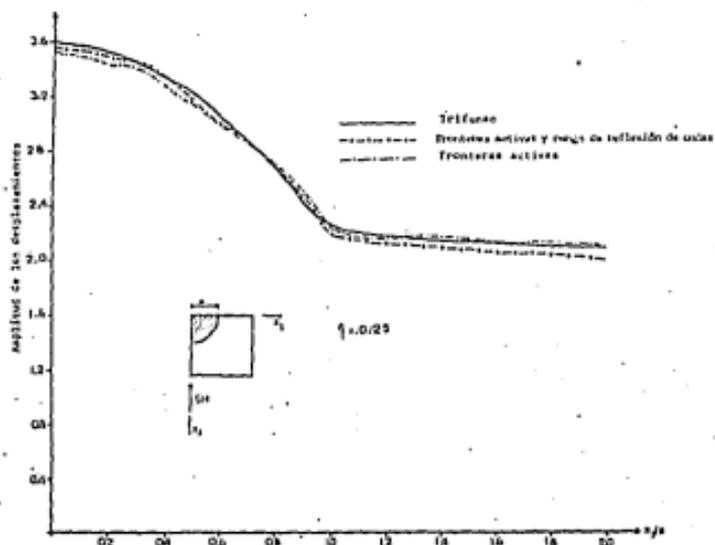
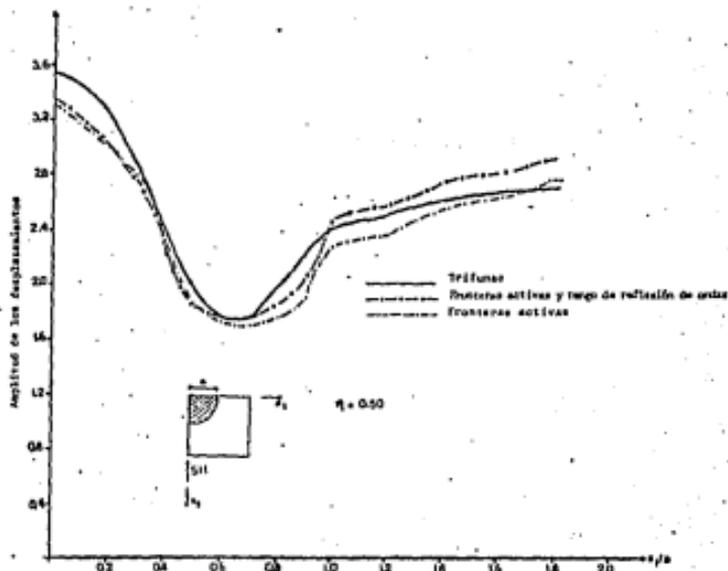


Fig. 30.b Modelo de elementos finitos utilizado para el valle aluvial.



30.a Desplazamiento en la superficie originado por ondas SH que inciden verticalmente en el valle.



30.d Desplazamiento en la superficie originado por ondas SH que inciden verticalmente en el valle.

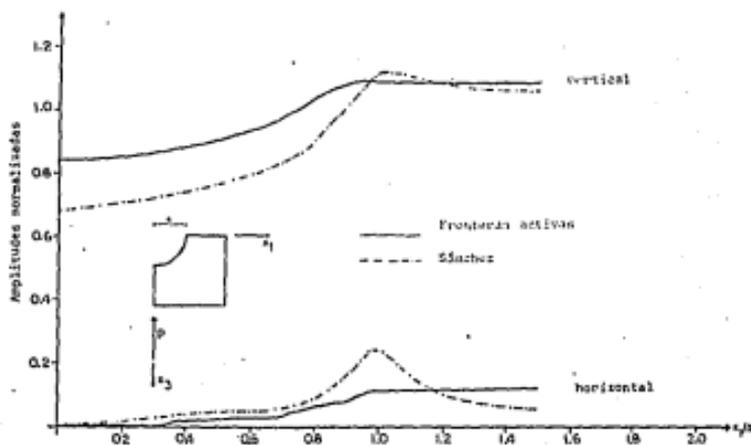


Fig. 31 Amplitudes normalizadas de desplazamiento vertical y horizontal en un cañón semi-circular. Incidencia de ondas P

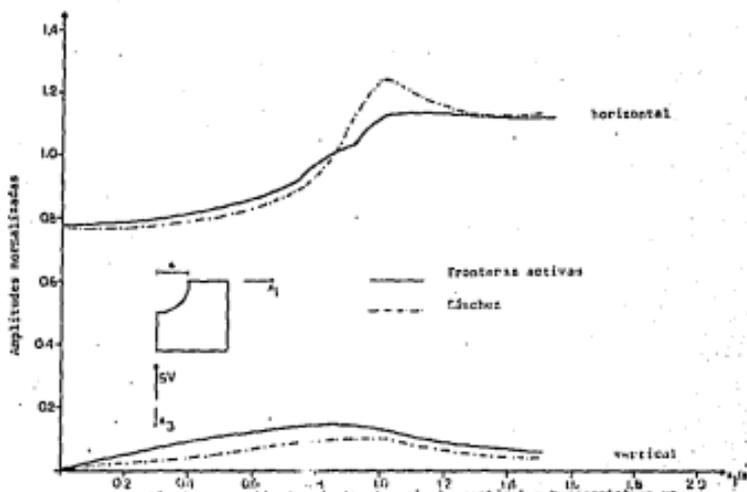


Fig. 32 Amplitudes normalizadas de desplazamiento vertical y horizontal en un cañón semi-circular. Incidencia de ondas SV

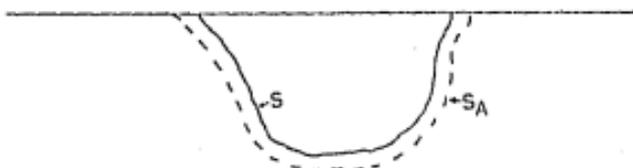


Fig. 33 Esquema de las superficies S y S_A

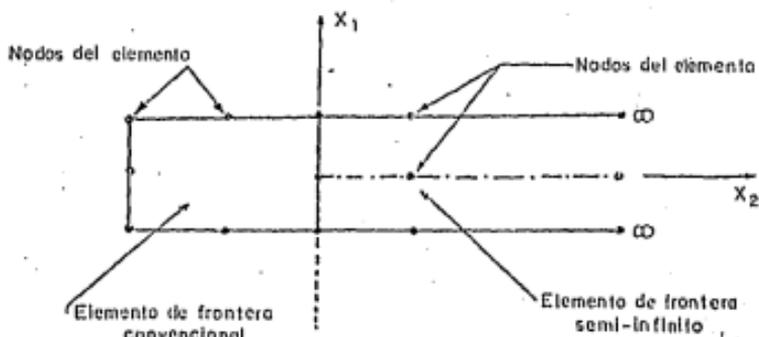


Fig. 34 Geometría de un elemento semi-infinito plano

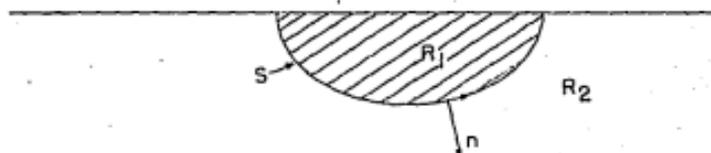


Fig. 35 Dominio de interés

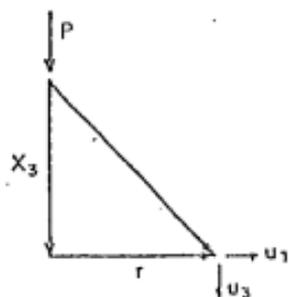
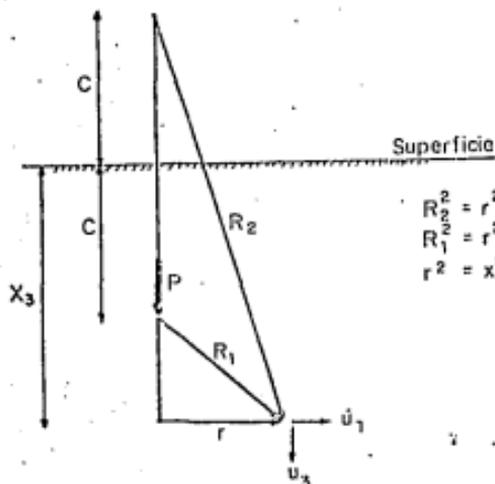


Fig. 36. Solución de Kelvin



$$R_2^2 = r^2 + (z-c)^2$$

$$R_1^2 = r^2 + (z+c)^2$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Fig. 37. Solución de Mindlin

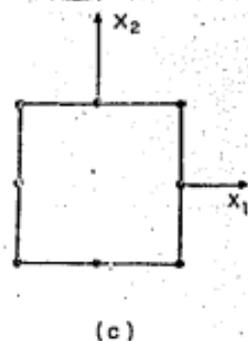
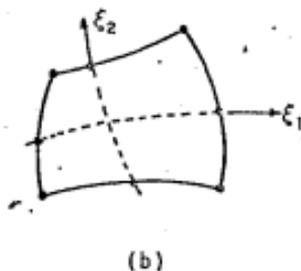
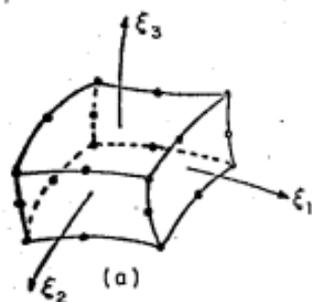


Fig. 38. Geometrías utilizadas para definir las funciones de interpolación