

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA

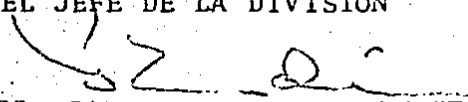


Profr. ROLANDO NIEVA GOMEZ  
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del COORDINADOR DE LA SECCION DE ELECTRICA ha sido designado como director de tesis del alumno(a) MANUEL EDUARDO RUIZ CASILLAS para obtener el grado de M EN I EN ELECTRICA.

Mucho he de agradecerle su comunicación, por escrito, de la aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a desarrollar.

Atentamente,  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria 28 de mayo de 1986  
EL JEFE DE LA DIVISION

  
DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

E.5.1



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## R E S U M E N

Se presenta un método para encontrar una solución aproximada al Problema de Asignación de Unidades Hidroeléctricas. El problema consiste en determinar, para cada uno de los intervalos del período de planeación, cuáles unidades hidroeléctricas estarán en operación y cuánto generarán, para que el costo de producción de energía termoeléctrica sea mínimo. La solución debe satisfacer ciertas políticas de operación, y restricciones de origen físico y de seguridad.

El modelado de los elementos del sistema es muy detallado, por ejemplo, se consideran: la dependencia no-lineal de la generación de las unidades respecto al gasto y la altura neta, los efectos del nivel del desfogue y de las pérdidas en conductos, y la relación volumen almacenado contra nivel en los embalses.

Matemáticamente, el problema es de Programación No-lineal, con variables continuas y discretas; además, es de gran escala: en un caso real, como el que aquí se presenta, el problema tiene 16600 variables continuas, 8400 variables binarias, y 51000 restricciones.

El método explota la estructura del problema y las características de los elementos modelados. Logra una solución en tiempos razonables de cómputo, y suministra una cota inferior al valor de la solución óptima, lo cual permite juzgar la calidad de la solución obtenida.

El algoritmo fue programado para una VAX 11/780. Problemas con un tamaño como el descrito son resueltos en 30 min. CPU. El valor de las soluciones obtenidas, cuando el 35% de la energía producida es hidroeléctrica, dista típicamente 4% de sus respectivas cotas inferiores.

# Í N D I C E

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN .....	1-1
1.1	Bosquejo del Problema de Asignación de Unidades Hidroeléctricas (PAUH) ..	1-1
1.2	Ubicación del problema dentro de lo reportado en la bibliografía .....	1-9
CAPÍTULO 2	FORMULACIÓN DE PAUH .....	2-1
2.1	Notación .....	2-2
2.2	Formulación detallada de PAUH .....	2-10
2.3	Formulación compacta de PAUH .....	2-24
CAPÍTULO 3	SOLUCIÓN AL PROBLEMA PAUH .....	3-1
3.1	Partición de PAUH en los problemas: PA, PRAU y PC .....	3-2
3.2	Definición y formulación detallada del Problema Aproximado (PA) .....	3-8
3.3	Formulación compacta del PA .....	3-11
3.4	Definición del Problema Reducido de Asignación de Unidades (PRAU) .....	3-12
3.5	Definición y formulación detallada del Problema de Coordinación (PC) ...	3-14
3.6	Formulación compacta del PC .....	3-17

CAPÍTULO 4	SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PA Y PC .....	4-1
4.1	Características de los problemas .....	4-2
4.1.1	Transformación de los problemas PA y PC en el problema PT .....	4-4
4.1.2	Propiedades de la función objetivo de PT .....	4-6
4.1.3	El desacoplamiento y la estructura de las restricciones de PT .....	4-14
4.2	Solución al problema PT .....	4-20
4.2.1	El método del gradiente condicionado...	4-20
4.2.2	Detalles de la aplicación del método del gradiente condicionado .....	4-25
CAPÍTULO 5	SOLUCIÓN AL PROBLEMA PRAU .....	5-1
5.1	Determinación de una asignación inicial .....	5-8
5.2	Previsión de violaciones a los límites de generación de los grupos ...	5-18
5.3	Previsión de cortes de carga .....	5-26
5.4	Satisfacción de la cota final en los embalses .....	5-34
CAPÍTULO 6	CÁLCULO DE UNA COTA INFERIOR AL COSTO DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PAUH .....	6-1
6.1	Fundamentos para el cálculo de la cota	6-2
6.2	Forma de calcular la cota .....	6-7

CAPÍTULO 7	APLICACIÓN DEL MÉTODO A UN PROBLEMA	
	CONCRETO .....	7-1
7.1	Datos estáticos .....	7-2
7.1.1	Estructura del sistema y nomenclatura de sus elementos .....	7-2
7.1.2	Modelos de los embalses .....	7-2
7.1.3	Modelos de las vías .....	7-5
7.1.4	Modelos de las unidades .....	7-9
7.1.5	Modelos de las pérdidas en conductos	7-13
7.2	Datos dinámicos .....	7-18
7.2.1	Descripción general del caso .....	7-18
7.2.2	Período de planeación .....	7-19
7.2.3	Descripción de las condiciones eléctricas del caso .....	7-19
7.2.4	Embalses .....	7-24
7.2.5	Vías .....	7-26
7.2.6	Unidades .....	7-26
7.3	Resultados .....	7-28
7.3.1	Observaciones sobre los resultados .	7-59
7.3.2	Discusión de las observaciones .....	7-60
7.3.3	El método visto a través de sus resultados .....	7-66
CAPÍTULO 8	CONCLUSIONES Y EXTENSIONES POSIBLES	8-1
APÉNDICE A	FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN	
	MATEMÁTICA .....	A-1

APÉNDICE B	CARACTERIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UNA ISLA-INTERVALO .....	B-1
APÉNDICE C	COMPARACIÓN DE LOS MODELOS PARA UNA PLANTA EMPLEADOS EN EL PROBLEMA APROXIMADO Y EN EL PROBLEMA DE COORDINACIÓN .....	C-1
BIBLIOGRAFÍA	.....	BI-1

## C A P Í T U L O 1.

## INTRODUCCIÓN.

1.1 BOSQUEJO DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE UNIDADES  
HIDROELÉCTRICAS ( PAUH ).

Asociados al problema existen los conceptos de período de planeación y de intervalo. El primero es el lapso de tiempo que interesa, no importa lo que ocurra fuera del período de planeación; aunque son impuestas algunas condiciones terminales para considerar que el sistema seguirá trabajando aún después del final del período de planeación. El intervalo es una unidad indivisible de tiempo, es el mínimo lapso de tiempo a considerar, los datos del problema así como la solución no cambian durante un intervalo. El período de planeación está dividido en algún número de intervalos, normalmente, todos con la misma duración.

El problema de asignación de unidades hidroeléctricas consiste en determinar para cada uno de los intervalos del período de planeación, cuáles unidades hidroeléctricas deberán estar en operación y cuánto deberá generar cada una de



ellas, de manera que el costo de operación del sistema durante el período de planeación sea mínimo.

En este problema se conoce en cada intervalo la asignación de unidades termoeléctricas, con lo cual quedan definidos tanto el límite superior como el inferior de generación termoeléctrica por intervalo, y por cada una de las fracciones eléctricamente independientes (llamadas islas), si el sistema eléctrico estuviese dividido durante el intervalo. También queda definido el costo en el que se incurre por generar a cierto nivel durante cada intervalo en cada una de las islas.

La demanda de energía en cada intervalo y cada isla se conoce. La demanda debe tratar de satisfacerse con los recursos de generación tanto termoeléctricos como hidroeléctricos. Si no es posible satisfacerla será declarado un corte de carga en el intervalo y la isla en que esto ocurra.

Las pérdidas por transmisión deben ser tomadas en cuenta.

Para considerar, aunque sea indirectamente, la red eléctrica y su incapacidad o la inconveniencia de transmitir grandes cantidades de potencia de los centros de producción a los de consumo, se definen grupos de plantas hidroeléctricas. A

cada grupo se le asigna un límite superior de generación y una reserva, de tal suerte que, si se operase el sistema tal como la solución al problema lo propone, siempre sería posible aumentar la generación de cualquier grupo en una cantidad hasta del tamaño de su reserva, sin violar su límite superior de generación. Con una estimación de la capacidad de generación disponible en un grupo es posible calcular el valor máximo que se le permitirá generar al grupo para asegurar la reserva requerida. A este valor le llamaremos simplemente generación máxima del grupo. En cada intervalo podrán definirse los grupos y sus características en la forma que más convenga.

Para cada uno de los embalses y para cada intervalo se conocen en forma determinista: las aportaciones de cuenca propia - una estimación de evaporaciones y filtraciones puede incluirse aquí -, las extracciones para usos distintos al de producción de energía eléctrica y los vertidos programados. Los volúmenes de agua turbinados, los volúmenes de agua almacenados, y las demás entradas y salidas de agua conocidas, deben verificar el balance de agua en cada embalse y cada intervalo. También son datos: el volumen almacenado en cada embalse al inicio del período de planeación y el volumen que se desea tener almacenado, con una pequeña tolerancia, por embalse al final del período de planeación.

El gasto en cada vía debe estar comprendido entre los límites inferior y superior especificados. Para las vías que acoplan dos de los embalses considerados se conoce el tiempo medio de viaje del agua. Si este tiempo no se puede considerar nulo, se tendrán como datos los volúmenes de agua que están viajando al inicio del período de planeación y que arribarán al embalse aguas abajo en cada uno de los primeros intervalos. En este tipo de vías con tiempo de viaje distinto de cero es necesario especificar el volumen de agua que debe quedar viajando, con una tolerancia, al final del período de planeación. Si no se impusiera esta restricción, cualquier algoritmo que intente minimizar el costo de operación tratará de dejar viajando la menor cantidad de agua, esto es, disminuirá el costo de operación del período de planeación a costa de disminuir la energía almacenada en el sistema hidráulico al final del período de planeación. De hecho, el especificar un volumen final para los diversos embalses y el volumen de agua que quedará en tránsito son las condiciones terminales; estas condiciones terminales toman en cuenta que el sistema continuará operando después del final del período de planeación, y permite resolver el problema con un esquema que considera un período limitado.

Toda unidad hidroeléctrica tiene definido un estado en cada intervalo. El estado de la unidad queda determinado

por tres características: disponibilidad, asignabilidad y coordinabilidad. Cuando la unidad no es disponible, no deberá ser puesta en operación. La asignabilidad y la coordinabilidad sólo están definidas cuando la unidad es disponible. Cuando la unidad no es asignable, deberá estar en operación; si la unidad es asignable, puede decidirse que esté en o fuera de operación. Cuando la unidad es coordinable, en caso de estar en operación, puede decidirse el punto de operación; si no es coordinable, en caso de estar en operación su generación está de antemano especificada.

La generación de cada unidad que esté en operación está acotada por un límite superior y otro inferior; estos límites se especifican por intervalo. El gasto de cada unidad que esté en operación está limitado inferior y superiormente, estos límites dependen de la altura neta a la que opera; la forma particular de esta dependencia es una propiedad de la unidad que se considera invariante en el período de planeación.

Se le llama planta a un conjunto de unidades conectadas al mismo nodo eléctrico, con la misma característica gasto-generación-altura neta, que toman agua del mismo embalse y la descargan sobre la misma vía.

La generación de una planta es la suma de las generaciones de las unidades que la forman. El gasto de la planta es la suma de los gastos de sus unidades. La generación de una planta dependerá en términos generales de: el gasto de la planta, la forma en la que el gasto de la planta se distribuye entre sus unidades, y todo aquello que afecte la generación de una unidad. La forma de repartir el gasto de la planta entre sus unidades debe ser aquella que produzca la máxima generación de la planta, sin violar las restricciones de operación de las unidades.

Por todo lo anterior, la generación de una planta depende de:

1. El gasto de la planta.
2. La forma de repartir el gasto de la planta entre sus unidades; que a su vez depende de:
  - a) Cuáles unidades de la planta están en operación.
  - b) El estado definido para las unidades de la planta.
  - c) Los límites máximo y mínimo tanto de generación como de gasto para las unidades de la planta.
3. La altura neta de cada una de las unidades, ya que la generación de cada unidad depende tanto del gasto como

de la altura neta. La altura neta depende de:

a) El nivel del embalse que es una función de:

- El volumen almacenado en el embalse.

b) El nivel del desfogue; que depende de:

- El gasto turbinado por todas las plantas que descargan sobre la vía.
- Las posibles extracciones a través de la vía para usos distintos al de producción de energía eléctrica.
- Los posibles vertidos programados sobre la vía.
- En algunos casos, del nivel del embalse aguas abajo.

c) Las pérdidas en conductos; que se suponen dependientes únicamente de:

- El gasto de la unidad.

En resumen, la generación de una planta se considera como el resultado de un proceso de maximización cuyas variables de decisión son la asignación de unidades y el gasto turbina-  
do por cada unidad; en este proceso entran como parámetros algunas variables de decisión del problema global, como son:

los volúmenes almacenados en los embalses y los gastos turbinados por las plantas. La generación de las diversas plantas son las funciones que ligan las variables hidráulicas con las variables eléctricas del problema.

## 1.2 UBICACIÓN DEL PROBLEMA DENTRO DE LO REPORTADO EN LA BIBLIOGRAFÍA.

Un problema como el que se definió en la sección anterior no se encuentra en la bibliografía. Sin embargo, existen definidos y resueltos [5, 6, 10, 11, 14 a 17, y 19 a 21] problemas con mayor o menor grado de similitud al que aquí se presenta. El factor común es, que todos se refieren a la planeación a corto plazo de la operación de un sistema de potencia con recursos hidroeléctricos y, en la mayoría de los casos, también termoeléctricos.

Los problemas que se plantean tienen muy diversos enfoques. Así pues, mientras en algún caso se resuelven simultáneamente la asignación de unidades termoeléctricas y la utilización de las plantas hidroeléctricas [16] ; en otros, sólo se trata la parte hidroeléctrica [5, 6, 20] . Algunos consideran la red únicamente como un gran nodo, en el cual debe verificarse el balance entre lo que se consume y lo que se produce [14, 15, 16, 17, 19, 21] ; en tanto que otros la consideran con mucho más detalle [10, 11] . También hay enfoques predominantemente prácticos [5] , que tratan de resolver un problema que se acerque lo más posible a la realidad, sin la intención de buscar la aplicación de un método elegante; por otro lado, hay trabajos académicos [15, 21] que in-



tentan aplicar un método atractivo a un problema que, permitiendo la aplicación del método, no se aleje mucho de la realidad.

La diversidad de enfoques da origen a diversas formulaciones y a diversos métodos de solución. Esta diversidad de formulaciones ha contribuido a que no exista un conjunto de problemas típicos sobre los cuales se ensayen los métodos y se puedan hacer comparaciones entre ellos. Esta carencia ha sido indicada en la bibliografía [4, 17] .

La gran variedad de enfoques se origina debido a:

- Las características particulares de cada sistema.
- La interacción con otras fases del proceso de planeación.
- El método que se desea aplicar (principalmente cuando son trabajos académicos).

Hay un punto que debe mencionarse y se refiere al modelado de la realidad. Se han criticado, tanto las simplificaciones, como las complicaciones excesivas en el modelado. En el caso del modelado de las plantas hidroeléctricas ha sido más criticada la sobresimplificación. Otras simplificaciones, como son: tratar en forma determinista la carga eléctrica y los escurrimientos, han sido ampliamente aceptadas.

Respecto a los métodos empleados se puede decir que hay casi tantos como formulaciones se han presentado. No es para sorprender que así haya sucedido. Por ejemplo: es relativamente sencillo, dados una formulación y el método que se aplica, encontrar un tipo de restricciones que al añadirlas a la formulación, hacen que el método ya no se pueda aplicar, o bien, que resulte más eficiente un método distinto.

Enseguida se presenta un resumen de los aspectos que se han considerado en algunos trabajos. Todos estos trabajos han formulado su problema en términos de un problema de optimización; por esto, uno de los incisos del resumen es la función objetivo del problema. Otros incisos se refieren a cómo han sido tratadas las diversas componentes del sistema. Por último, en dos incisos, se indican los métodos utilizados y los resultados computacionales. La formulación que se presenta en este trabajo tiene las características marcadas con [\*] en el resumen.

### 1. Función objetivo.

- Maximizar la energía potencial hidroeléctrica al final del período de planeación.

[5]

- Minimizar el costo de operación.

[10,15,16,17,  
19,21,\*]

- Minimizar el valor esperado del costo de operación. [14]
- Minimizar una función lineal de la generación, el vertido, y el volumen almacenado. [20]
- Minimizar una función lineal de la generación. [11]
- Maximizar un beneficio supuesto de la energía hidroeléctrica. [6]

## 2. La red eléctrica.

- Restricción de balance de las energías en el sistema. [15,16,17,19, 21,\*]
- Restricción de balance de las energías por subsistema. [5]
- Balance de las energías del sistema con la demanda considerada como una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es conocida. [14]
- Restricción del balance de las energías empleando coeficientes de pérdidas. [11]
- Ecuaciones de flujos. [10]

- Se consideran las pérdidas de energía eléctrica. [15,19,\*]
  - Reserva rápida por subsistema. [\*]
  - Generación hidroeléctrica máxima por subsistema. [\*]
  - Límites sobre las diferencias entre los ángulos del voltaje nodal. [10]
  - Límites a los flujos de "DC" en líneas. [11]
  - Límites a la inyección de potencia reactiva. [10]
  - Límites a la magnitud de los voltajes. [10]
3. Tratamiento de la parte termoeléctrica.
- La asignación de unidades termoeléctricas es una variable de decisión. [16]
  - La asignación de unidades termoeléctricas es conocida. [10,11,14,15,17,19,21,\*]
  - Reserva rodante termoeléctrica mínima. [16]
  - Límite máximo a la generación termoeléctrica del sistema. [\*]
  - Límite mínimo a la generación termoeléctrica del sistema. [\*]

- Límite máximo de generación por planta. [10,11,14,15]
- Límite mínimo de generación por planta. [10,11,14,15]
- Límite máximo de generación por unidad. [16]
- Límite mínimo de generación por unidad. [16]
- Tiempos mínimos de operación y paro de las unidades termoeléctricas. [16]

#### 4. Tratamiento de las cuencas.

- Embalses desacoplados. [15,19,21]
- Embalses acoplados. [5,6,10,14,16,17,20,\*]
- Embalses agregados. [11]

#### 5. Tratamiento de los embalses.

- El nivel no cambia. [19]
- El nivel depende del volumen almacenado en el embalse. [6,10,15,17,20,\*]
- El nivel depende del volumen almacenado y del gasto medio que fluye a través del embalse. [5]

- Límite máximo sobre el nivel. [5,6,10,14,  
15,16,17,  
20,21,\*]
  - Límite mínimo sobre el nivel. [5,6,10,14,  
15,16,17,  
20,21,\*]
  - Se especifica el nivel al final del período de planeación. [5,6,10,14,  
15,16,17,  
19,20,21,\*]
  - Se especifica la energía a producir durante el período de planeación. [11]
  - Se vigila la rapidez de cambio del nivel. [5]
  - Se especifica un almacenamiento mínimo por grupos de embalses. [6]
6. Tratamiento de las vías.
- El nivel del desfogue es constante. [6,10,15,17,  
19,20,21]
  - El nivel del desfogue depende del gasto turbinado, del vertido, y del nivel del embalse aguas abajo. [5,\*]
  - El vertido es un dato. [10,15,19,\*]

- El vertido es una variable de decisión. [6,14,16, 17,20]
- El límite superior del vertido depende del volumen almacenado. [6]
- Límite máximo al gasto sobre la vía. [5,6,\*]
- Límite mínimo al gasto sobre la vía. [5,6,\*]
- Límite a la rapidez de cambio de la descarga sobre la vía. [5]
- Tiempo de viaje del agua nulo. [16]
- Tiempo de viaje del agua constante. [6,10,14, 17,20,\*]
- Distintos tiempos de viaje para fracciones constantes del gasto descargado sobre la vía. [5]

#### 7. Tratamiento de las plantas hidroeléctricas.

- La potencia generada depende linealmente del gasto. [20,21]
- La potencia generada depende no-linealmente del gasto. [16,19]
- La potencia generada depende linealmente del gasto y del volumen almacenado. [6]

- La potencia generada depende no-linealmente del gasto y de la altura bruta. [5,15,17,\*]
- La potencia generada depende del producto del gasto y la altura bruta. [10]
- La potencia generada es una función cóncava del gasto y el volumen almacenado. [14]
- Límite máximo constante para el gasto. [10,14,15,16,17,20,21,\*]
- El límite máximo al gasto depende de la altura bruta. [5,6]
- Límite mínimo constante para el gasto. [6,10,14,15,16,17,20,21,\*]
- Límite máximo constante para la potencia generada. [11,15,\*]
- Límite mínimo constante para la potencia generada. [11,15,\*]

#### 8. Métodos utilizados.

Frecuentemente cada técnica de solución es una composición de varios métodos conocidos; por esto, en cada caso se mostrará la composición empleada:



- [5] Funciones de penalización.
  - Gradientes conjugados.
  
- [6] Funciones de penalización.
  - Simplex primal especializado para problemas en redes.
  - Quasi-Newton.
  - Gradientes conjugados.
  
- [10] Aplicación del principio de optimalidad progresiva.
  
- [11] Descomposición por Dantzig-Wolfe.
  - Simplex dual.
  
- [14] Descomposición coordinando los subproblemas por un mecanismo de precios (variables duales).
  - Gradientes conjugados.
  
- [15] Direcciones factibles.
  
- [16] Descomposición coordinando los subproblemas por un mecanismo de precios (variables duales).
  - Programación Dinámica.
  - Funciones de penalización.
  - - Método de Newton especializado.Técnicas heurísticas.

[17] En este trabajo se presentan tres técnicas para resolver el mismo problema:

- a. Aplicación del principio de optimalidad progresiva.
- b. Aplicación del principio del máximo.
- c. Direcciones factibles.

[19] Barrido sucesivo.

[20] Método primal-dual especializado para problemas en redes.

[21] Método de costos marginales.

[\*] Funciones de penalización.

- Gradiente condicionado.
- - Simplex primal especializado para problemas en redes.

Técnicas heurísticas.

## 9. Resultados computacionales.

En la tabla 1.1 se muestran el tamaño de los problemas reportados, el tiempo de cómputo y la computadora en la que se resolvieron.

Como se puede apreciar del resumen anterior, el planteamiento del problema que se trata de resolver en este trabajo es de los que modelan la parte hidroeléctrica en forma más

TABLA 1.1

Resultados Computacionales.

Artículo	Cuencas	Embalases	Vías	PHE	Unidades	Intervalos	Tiempo de CPU	Computadora
5	1	15	15	15		21	10 - 15 min.	CDC6500
6	1	13		12		36	60.3 seg.	NAS-9050
10	1	2	2	2		6		
11				10		24	7 min.	PDP-11/70
14	1	4	4	4		12	8 min.	PDP-10
15	1	2	2	2		12	1.7 min.	Ryad 1030
16	1	6	6	6	111 T	168	120 min.	VAX-11/780
17a	1	4	4	4		168	3.23 min.	IBM 370/233
17b	1	3	3	3		7	0.6 seg.	IBM 370/165
17c	1	7	7	7		168	? > 5 min.	IBM 370/168
19	2	2	2	2		24	47.2 seg.	IBM S/360
20	1	15	15	30		24	10 - 15 min.	Hitachi M180
21	1	1	1	1		24	0.75 seg.	DEC-20
*	7	10	10	13	50 H	168	25 min.	VAX-11/780

PHE: Plantas hidroeléctricas; T: Termoeléctricas; H: Hidroeléctricas.

? El programa fue abortado después de cinco minutos de ejecución.

completa. Este planteamiento tiene una característica adicional: se decide hasta el nivel de unidades y no sólo hasta el nivel de plantas.

Desde el punto de vista del usuario de un programa de computadora, emplear el programa que resuelve el problema que aquí se presenta le permite:

- Modelar con gran fidelidad el comportamiento de sus cuencas, embalses, vías, plantas y unidades hidroeléctricas.
- Definir situaciones más reales, que consideren por ejemplo, la disponibilidad esperada de las unidades.
- Forzar algunas respuestas, que en base a su experiencia él sabe que son necesarias; como tener en operación algunas unidades en ciertos intervalos para garantizar: la presencia de fuentes o consumidores de potencia reactiva, o bien, la existencia de reserva rodante en determinadas áreas. Sin la facilidad de declarar las unidades como no-asignables, no-coordinables, le sería muy difícil inducir estas respuestas.
- Interpretar en forma más directa los resultados, puesto que el programa le dice cuáles unidades emplear y cómo emplearlas. En la realidad siempre tiene que tomarse esta de cisión, aunque no sea un programa el que lo haga.

Desde el punto de vista matemático el problema es muy complicado. Por considerar los arranques y paros de unidades

en su formulación hay variables discretas mezcladas con las variables continuas. Por dar la facilidad de modelar más fielmente, tiene relaciones no-lineales. Por permitir resolver casos reales, el problema es de gran escala.

En resumen, el planteamiento que se presenta facilita la transición, tanto de la realidad a los datos requeridos para alimentar un programa de computadora, como de la solución que se obtiene hacia su realización; el método que se describirá en los capítulos siguientes se esfuerza en ser eficiente, permitiendo así emplear los recursos computacionales en manejar modelos más complicados que representan más fielmente a la realidad.

## C A P Í T U L O 2 .

## FORMULACION DE PAUH.

Este capítulo consta de tres secciones. En la primera, se presenta la notación que se empleará en la formulación detallada del problema. En la segunda, se presenta la formulación detallada, con los razonamientos y artificios necesarios para llegar a ella desde el bosquejo del problema, que se hizo en el capítulo anterior. En la última, se muestra la formulación compacta del problema; ésta es necesaria cuando se analizan las características estructurales del mismo; la notación empleada en esta formulación se describe en la misma sección. En el resto del trabajo, exceptuando los apéndices, se respeta la notación definida aquí; los símbolos nuevos que se requieran serán definidos oportunamente.

## 2.1 NOTACIÓN.

### Subíndices:

Los siguientes subíndices son de uso general y en cada caso se indicará su significado: j, k, m.

Los subíndices siguientes tienen un uso específico:

- e Embalses.
- i Intervalos.
- l Vías.
- o Grupos-intervalo.
- p Plantas.
- s Islas-intervalo.
- u Unidades.
- v Cuencas.

### Superíndices:

Se usan como identificación complementaria de aquéllo que los usa. A diferencia de los subíndices no son variables que puedan adquirir diversos valores.

Conjuntos:

- $E_v$  Conjunto de los embalses en la cuenca v.
- $L_e^c$  Conjunto de las vías que descargan sobre el embalse e ( vías convergentes ).
- $L_e^d$  Conjunto de las vías sobre las que descarga el embalse e ( vías divergentes ).
- $O_s$  Conjunto de los grupos de plantas hidroeléctricas definidos en la isla-intervalo s; sinónimamente: conjunto de grupos-intervalo en s.
- $P_l$  Conjunto de las plantas hidroeléctricas que descargan en la vía l.
- $P_o$  Conjunto de las plantas hidroeléctricas en el grupo-intervalo o.
- $S_i$  Conjunto de islas que existen durante el intervalo i; sinónimamente: conjunto de islas-intervalo en i.
- $U_p$  Conjunto de unidades hidroeléctricas que forman la planta p.
- $U_s^t$  Conjunto de las unidades termoeléctricas en la isla-intervalo s.



Variables:

- $a_{ui}$  Asignación de la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ . Si  $a_{ui} = 1$ , la unidad estará en operación en el intervalo  $i$ ;  $a_{ui} = 0$ , en caso contrario.
- $b_{ui}$  Generación de la unidad termoeléctrica  $u$  en el intervalo  $i$ .
- $g_s$  Generación termoeléctrica neta en la isla-intervalo  $s$  ( más adelante se aclara este término ).
- $h_{pi}$  Generación de la planta hidroeléctrica  $p$  en el intervalo  $i$ .
- $n_{ui}$  Altura neta a la cual opera la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ .
- $q_{pi}$  Volumen turbinado por la planta  $p$  durante el intervalo  $i$ .
- $\xi_{ui}$  Volumen turbinado por la unidad  $u$  durante el intervalo  $i$ .
- $r_o$  Componente penalizada de la generación del grupo-intervalo  $o$  que contribuye a satisfacer la demanda.
- $t_o$  Componente no-penalizada de la generación del grupo-intervalo  $o$  que contribuye a satisfacer la demanda.
- $w_{ei}$  Volumen almacenado en el embalse  $e$  al inicio del intervalo  $i$ .
- $x_s$  Corte de carga en la isla-intervalo  $s$ .
- $y_s$  Excedente de generación en la isla-intervalo  $s$ .

Funciones:

- $C_s^g$  ( $g_s$ ) Costo por unidad de tiempo en el que se incurre por producir  $g_s$  unidades de potencia termoeléctrica neta en la isla-intervalo  $s$ .
- $C_o^r$  ( $r_o$ ) Penalización aplicada a la componente de la generación del grupo-intervalo  $o$ , que contribuye a la satisfacción de la demanda, y que representa una violación a la generación máxima del grupo.
- $C_s^x$  ( $x_s$ ) Penalización aplicada al corte de carga en la isla-intervalo  $s$ .
- $C_s^y$  ( $y_s$ ) Penalización aplicada al excedente de generación en la isla-intervalo  $s$ .
- $f_{pi}$  ( . ) Función que asocia un valor a la generación de la planta  $p$  en el intervalo  $i$ , dadas las variables hidráulicas relevantes; más adelante se define con precisión esta función, Ecs. (2.20) a (2.25).
- $\alpha_e$  ( $w_{ei}$ ) Nivel del agua en el embalse  $e$  cuando almacena el volumen  $w_{ei}$ .
- $\beta_{li}$  ( $q_{ki}, w_{ji}$ ) Nivel del desfogue en la vía  $l$ , dados los volúmenes turbinados sobre ella:  $q_{ki}$  para toda  $k \in P_l$ ; y el volumen del embalse aguas abajo, por lo cual:  $j/l \in L_j^C$ . Se indica que la función depende del intervalo porque hay datos que afectan el nivel del desfogue y que pueden cambiar de un intervalo a otro; ejemplos son: el volumen de agua

vertido sobre la vía y las posibles extracciones a través de ella para usos distintos al de producción de energía eléctrica.

- $\gamma_u$  (  $\xi_{ui}$  ,  $n_{ui}$  ) La generación de la unidad  $u$  cuando turbinata un gasto  $\xi_{ui}$  y opera con una altura neta  $n_{ui}$ .
- $\delta_u$  (  $\xi_{ui}$  ) Pérdida de altura en los conductos para la unidad  $u$  causada por su propio gasto. Se sabe que hay casos en los que varias unidades comparten los conductos; en este caso, se calculará la pérdida de altura como si las otras unidades no estuvieran en operación. También se supondrá, que la función de pérdidas en conductos es la misma para todas las unidades de una planta.
- $\Delta D_s$  (  $b_{ui}$  ,  $h_{pi}$  ) Las pérdidas eléctricas en la isla-intervalo  $s$ , dadas las generaciones de las unidades termoeléctricas,  $b_{ui}$ , para toda:  $u \in U_s^t$  y  $s \in S_i$ ; y las generaciones de las plantas hidroeléctricas,  $h_{pi}$ , para toda:  $p \in P_o$ ,  $o \in O_s$  y  $s \in S_i$ .

Constantes:

- $\bar{a}_{ui}$  Se define según el estado de la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ , como sigue:  
 Vale 1 si la unidad  $u$  está disponible en el intervalo  $i$ .  
 Su valor es 0 si la unidad  $u$  no está disponible en el intervalo  $i$ .

- $a_{ui}$  Igual que en el caso anterior, depende del estado de la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ :  
Su valor es 1 cuando la unidad  $u$  no es asignable en el intervalo  $i$ .  
Vale 0 cuando la unidad  $u$  es asignable, o bien, no está disponible en el intervalo  $i$ .
- $A_{ei}$  Aportación neta al embalse  $e$  durante el intervalo  $i$ . Es el resultado de sumar las aportaciones de cuenca propia y los volúmenes vertidos por embalses aguas arriba, y restar, los volúmenes programados para ser vertidos por el embalse y las demás extracciones para usos distintos a la producción de energía eléctrica.
- $B_{ui}^0$  Generación de la unidad termoeléctrica  $u$  en el punto base de operación supuesto para el intervalo  $i$ .
- $D_s$  Demanda en la isla-intervalo  $s$ .
- $\hat{D}_s$  Pronóstico de carga para la isla-intervalo  $s$ .
- $\underline{G}_s$  Límite inferior de la generación termoeléctrica neta en la isla-intervalo  $s$ .
- $\bar{G}_s$  Límite superior de la generación termoeléctrica neta en la isla-intervalo  $s$ .
- $H_{pi}^0$  Generación de la planta hidroeléctrica  $p$  en el punto base de operación supuesto para el intervalo  $i$ .
- $I$  Número de intervalos del período de planeación.
- $Q_{pi}$  Volumen turbinado durante un intervalo anterior al inicio del período de planeación ( $i \leq 0$ ) por la planta  $p$ ; este

volumen está viajando al inicio del período de planeación; y arribará al embalse aguas abajo en el intervalo  $i + \tau_{\ell}$ , donde  $\ell/p \in P_{\ell}$ .

- $Q_{\ell}^{\text{trn}}$  Volumen turbinado sobre la vía  $\ell$ , que se desea dejar en tránsito al final del período de planeación.
- $Q_{\ell i}^{\text{via}}$  Volumen mínimo a turbinar sobre la vía  $\ell$  en el intervalo  $i$ .
- $\bar{Q}_{\ell i}^{\text{via}}$  Volumen máximo a turbinar sobre la vía  $\ell$  en el intervalo  $i$ .
- $T_0$  Generación máxima del grupo-intervalo  $o$ , que permite tener la reserva requerida.
- $V$  Número de cuencas del sistema hidroeléctrico.
- $\underline{W}_e$  Volumen almacenado en el embalse  $e$ , al nivel mínimo de operación.
- $\bar{W}_e$  Volumen almacenado en el embalse  $e$ , al nivel máximo de operación.
- $W_{e,1}$  Volumen almacenado en el embalse  $e$ , al inicio del período de planeación.
- $W_{e,I+1}$  Volumen que se desea tener almacenado en el embalse  $e$ , al final del período de planeación.
- $\Delta D_s^0$  Pérdidas eléctricas en el punto base de operación supuesto para la isla-intervalo  $s$ .
- $\Delta W_e$  Tolerancia en el volumen final del embalse  $e$ .
- $\Delta Q_{\ell}^{\text{trn}}$  Tolerancia en el volumen turbinado que quedará en tránsito sobre la vía  $\ell$ .

- $\xi_{ui}^{\max}$  Gasto máximo de la unidad  $u$  si está en operación en el intervalo  $i$ .
- $\xi_{ui}^{\min}$  Gasto mínimo de la unidad  $u$  si está en operación en el intervalo  $i$ .
- $\tau_l$  Tiempo medio de viaje del agua en la vía  $l$ .
- $\nabla_{us}^t$  Derivada parcial de las pérdidas respecto a la generación de la unidad termoeléctrica  $u$ , evaluada en el punto base de operación supuesto para la isla-intervalo  $s$ .
- $\nabla_{ps}^h$  Derivada parcial de las pérdidas respecto a la generación de la planta hidroeléctrica  $p$ , evaluada en el punto de operación supuesto para la isla-intervalo  $s$ .

## 2.2 FORMULACIÓN DETALLADA DE PAUH.

En la formulación del problema se distinguen con facilidad tres tipos de restricciones: las restricciones eléctricas, las hidráulicas y las restricciones que ligan las variables eléctricas con las hidráulicas.

Para simplificar la presentación, se suponen todos los intervalos con una misma duración; pero no hay impedimento alguno para que se consideren de diversas magnitudes.

En la formulación se recurre a menudo al empleo de variables artificiales. Este recurso siempre tiene como causa proporcionar alguna flexibilidad que requiere el método que se intenta aplicar, o bien, evitar que para algún conjunto de datos incompatibles, el algoritmo simplemente responda que no hay solución factible. Se espera que en la solución, los valores de las variables artificiales sean nulos, o tan pequeños que puedan considerarse nulos. Siempre que alguna variable artificial no resulte con un valor despreciable, se supone que es debido a la incompatibilidad de los datos del problema. Cuando esto ocurre, el análisis de los valores de las variables artificiales puede dar algún indicio de cuáles son los datos incompatibles. Las variables artificiales serán penalizadas apropiadamente en la función objetivo, de manera que, en verdad tengan las características mencionadas.

Restricciones Eléctricas:

Debe verificarse el balance de potencia en cada isla-in<sub>t</sub>ervalo. En la restricción de balance de potencia se añade la variable artificial llamada excedente de generación. Por lo cuál, la generación termoeléctrica, más la hidroeléctrica, más el corte de carga, menos el excedente de generación debe ser igual a la demanda más las pérdidas:

$$\sum_{u \in U_s} b_{ui} + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} h_{pi} + x_s - y_s = D_s + \Delta D_s \quad (2.1)$$

para toda:  $s \in S_i; i=1, \dots, I$

Si se toma una aproximación lineal para las pérdidas alrededor de un punto de operación -considerando que la experiencia con los resultados del pasado permitirá seleccionar un punto de operación en el que la aproximación lineal es aceptable-; entonces, la expresión para las pérdidas será:

$$\Delta D_s = \Delta D_s^0 + \sum_{u \in U_s} v_{us}^t (b_{ui} - B_{ui}^0) + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h (h_{pi} - H_{pi}^0) \quad (2.2)$$

para toda:  $s \in S_i; i=1, \dots, I$



Substituyendo (2.2) en (2.1) y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
 x_s - y_s + \sum_{u \in U_s} \{ b_{ui} - v_{us}^t ( b_{ui} - B_{ui}^0 ) \} + \\
 + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} h_{pi} = \\
 = D_s + \Delta D_s^0 + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h ( h_{pi} - H_{pi}^0 )
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

para toda:  $s \in S_i; i=1, \dots, I$

Puesto que el pronóstico de carga es en realidad un pronóstico de la demanda más las pérdidas, se puede considerar que el resultado del pronóstico de carga ( $\hat{D}_s$ ) es la demanda más las pérdidas en el punto base, o sea:  $\hat{D}_s = D_s + \Delta D_s^0$ .

El término  $\sum_{u \in U_s} \{ b_{ui} - v_{us}^t ( b_{ui} - B_{ui}^0 ) \}$  es la generación termoeléctrica corregida por el cambio de las pérdidas debido, a su vez, a la desviación de la generación termoeléctrica respecto al punto base. A este término le llamaremos generación termoeléctrica neta, lo representaremos por  $g_s$ ; y se supondrán conocidos tanto sus límites superior e inferior como la función que asocia un costo por unidad de tiempo a cada valor de  $g_s$ .

Por lo anterior, la expresión del balance de potencia (2.3) queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 & x_s - y_s + g_s + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} h_{pi} = \\
 & = \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h (h_{pi} - H_{pi}^0) + \hat{D}_s
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

para toda:  $s \in S_i; i=1, \dots, I$

La restricción de la generación máxima por grupo-intervalo es:

$$\sum_{p \in P_o} h_{pi} \leq T_o \tag{2.5}$$

para toda:  $o \in O_s; s \in S_i; i=1, \dots, I$

Esta forma de restringir la generación de los grupos es fácil de comprender, es sencilla, va de acuerdo a la intuición, pero no es fácil de manejar con la metodología que se intenta aplicar. Se presentará una forma distinta de considerar el límite máximo de generación por grupo que matemáticamente no es equivalente a la anterior, pero en esencia representa el mismo problema y, desde el punto de vista práctico, los resultados son iguales.

En esta nueva forma, la generación de cada grupo es la síntesis de tres componentes, todas ellas contribuyen al cambio en las pérdidas. La primera componente,  $t_o$ , debe ser menor o igual que el límite superior de generación, esto es:  $t_o \leq T_o$ ; y contribuye a satisfacer la demanda. La segunda componente,  $r_o$ , contribuye a satisfacer la demanda pero está penalizada. La tercera componente no contribuye a satisfacer la demanda y no está penalizada. La suma de la primera y segunda componentes debe ser menor o igual a la generación del grupo, esto es:

$$t_o + r_o \leq \sum_{p \in P_o} h_{pi} ; \text{ así se asegura que sólo puede contribuirse}$$

a la satisfacción de la demanda en la medida que se produzca potencia con el grupo; la holgura en esta restricción es precisamente la tercera componente.

Con esta descomposición de la generación de cada grupo hidroeléctrico, siempre será posible obtener una solución factible para el conjunto de restricciones eléctricas, cuando se fijan a priori las variables hidráulicas y, por tanto, las generaciones de las plantas hidroeléctricas.

Dado que las variables y restricciones que se acaban de definir son empleadas en un proceso de minimización, siempre se cumplirá que  $t_o$  es la componente que primero adquiere valor. Sólo si la generación del grupo es mayor que el límite superior de generación, la componente  $r_o$  podrá ser distinta de cero, el valor que adquiera estará limitado, ya sea por costos, o por el

valor de la generación del grupo. Siempre que la componente  $r_o$  sea mayor que cero, se verificará que:  $t_o = T_o$ . El valor de  $r_o$  representa el envío de potencia hidroeléctrica para satisfacer demanda a costa de violar el límite superior de generación del grupo. Ajustando la penalización a  $r_o$ , se puede controlar el tamaño máximo de la violación que representa. Si en alguna iteración la tercera componente llegara a ser mayor que cero; entonces, el proceso de minimización tendería a disminuir la generación de ese grupo en la siguiente iteración, puesto que se está desperdiciando el recurso limitado agua, para producir potencia que no contribuye a la satisfacción de la demanda, mientras que tal vez en otro intervalo, la potencia que se generara sí contribuiría a satisfacer la demanda. En resumen, si los datos del problema son correctos, al final del proceso de minimización debe esperarse que sean nulos o muy pequeños los valores de la segunda y tercera componentes.

Con estas nuevas variables, el conjunto de restricciones eléctricas finalmente queda como sigue:

Para la restricción del balance de potencia:

$$\begin{aligned}
 x_s - y_s + g_s + \sum_{o \in O_s} (t_o + r_o) &= \\
 = \hat{D}_s + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h (h_{pi} - H_{pi}^0) & \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

para toda:  $s \in S_i; i=1, \dots, I$

El límite inferior al corte de carga:

$$x_s \geq 0 \quad \text{para toda: } s \in S_i; i=1, \dots, I \quad (2.7)$$

El límite inferior del excedente de generación:

$$y_s \geq 0 \quad \text{para toda: } s \in S_i; i=1, \dots, I \quad (2.8)$$

Los límites inferior y superior de la generación termoeléctrica neta:

$$\underline{G}_s \leq g_s \leq \bar{G}_s \quad \text{para toda: } s \in S_i; i=1, \dots, I \quad (2.9)$$

El límite superior a la primera componente de la generación de cada grupo:

$$t_o \leq T_o \quad \text{para toda: } o \in O_s; s \in S_i; i=1, \dots, I \quad (2.10)$$

El límite superior a la suma de la primera y segunda componentes de la generación de cada grupo:

$$t_o + r_o \leq \sum_{p \in P_o} h_{pi} \quad (2.11)$$

$$\text{para toda: } o \in O_s; s \in S_i; i=1, \dots, I$$

Restricciones Hidráulicas:

Debe verificarse el balance de agua en cada embalse y cada intervalo:

$$w_{e,i+1} - w_{ei} + \sum_{\ell \in L_e^d} \sum_{p \in P_\ell} q_{pi} - \sum_{\ell \in L_e^c} \sum_{p \in P_\ell} q_{p,i-\tau_\ell} = A_{ei}$$

para toda:  $i=1, \dots, I$ ;  $e \in E_v$ ;  $v=1, \dots, V$  (2.12)

En la expresión anterior son datos los volúmenes turbinados antes del primer intervalo del período de planeación, o sea:

$$q_{p,i-\tau_\ell} = Q_{p,i-\tau_\ell} \quad \text{para toda: } i=1, \dots, \tau_\ell; p \in P_\ell;$$

$$\ell \in L_e^c; e \in E_v; v=1, \dots, V \quad (2.13)$$

También son datos los volúmenes almacenados en los embalses al inicio del período de planeación:

$$w_{e,1} = W_{e,1} \quad \text{para toda: } e \in E_v; v=1, \dots, V$$

(2.14)

En cada embalse, los volúmenes almacenados están acotados inferior y superiormente por los volúmenes correspondientes a los niveles mínimo y máximo de operación:

$$\underline{w}_e \leq w_{ei} \leq \bar{w}_e \quad \text{para toda: } i=2, \dots, I; \quad (2.15)$$

$$e \in E_v; v=1, \dots, V$$

El volumen almacenado al final del período de planeación en cada embalse está acotado inferior y superiormente por el volumen final deseado, más o menos una tolerancia:

$$W_{e,I+1} - \Delta W_e \leq W_{e,I+1} \leq W_{e,I+1} + \Delta W_e \quad (2.16)$$

para toda:  $e \in E_v$ ;  $v=1, \dots, V$

La suma de los volúmenes turbinados por las diversas plantas que descargan sobre una vía está acotada inferior y superiormente. Estas cotas deben calcularse de manera que se garantice que no habrá problemas en ningún punto sobre la vía; para esto, se requiere el conocimiento de las necesidades, las capacidades y las entradas y salidas de agua a lo largo de la vía. La siguiente restricción considera lo anterior:

$$\underline{Q}_{li}^{via} \leq \sum_{p \in P_\ell} q_{pi} \leq \overline{Q}_{li}^{via} \quad (2.17)$$

para toda:  $i=1, \dots, I$ ;  $\ell \in L_e^d$ ;

$e \in E_v$ ;  $v=1, \dots, V$

El volumen turbinado que queda en tránsito al final del período de planeación en las vías con tiempo de viaje distinto de

cero está especificado con una tolerancia:

$$Q_{\ell}^{\text{trn}} - \Delta Q_{\ell}^{\text{trn}} \leq \sum_{p \in P_{\ell}} \sum_{i=I+1-\tau_{\ell}}^{i=I} q_{pi} \leq Q_{\ell}^{\text{trn}} + \Delta Q_{\ell}^{\text{trn}} \quad (2.18)$$

para toda  $\ell/\tau_{\ell} > 0$

El gasto de cada planta en cada intervalo está acotado inferior y superiormente:

$$\sum_{u \in U_p} \underline{a}_{ui} \xi_{ui}^{\min} \leq q_{pi} \leq \sum_{u \in U_p} \bar{a}_{ui} \xi_{ui}^{\max} \quad (2.19)$$

para toda  $p$ , y todo  $i$

Recuérdese que:

$\bar{a}_{ui} = 1$  si la unidad  $u$  es disponible en el intervalo  $i$ .

$\underline{a}_{ui} = 0$  si la unidad  $u$  no es disponible en el intervalo  $i$ .

$\bar{a}_{ui} = 1$  si la unidad  $u$  no es asignable en el intervalo  $i$ .

$\underline{a}_{ui} = 0$  si la unidad  $u$  es asignable, o bien, si no es disponible en el intervalo  $i$ .



Restricciones que ligan las variables eléctricas con las hidráulicas:

La liga entre las variables eléctricas y las hidráulicas ocurre en la función de generación de las plantas hidroeléctricas.

La generación de una planta es una función de su gasto, el gasto de las plantas con las que comparte la vía de desfogue, el volumen almacenado en el embalse del cual toma agua, y en casos especiales, del volumen del embalse aguas abajo; esto es:

$$h_{pi} = f_{pi} ( q_{pi}, q_{ki}, w_{ei}, w_{ji} ) \quad (2.20)$$

$$\text{con: } k, p \in P_i; \ell \in L_e^d; j/\ell \in L_j^c; i=1, \dots, I$$

La generación de una planta se define como el máximo de la suma de las generaciones de sus unidades, dados: los volúmenes almacenados en los embalses y los gastos turbinados por las plantas. La definición formal es la siguiente:

$$f_{pi} ( q_{pi}, q_{ki}, w_{ei}, w_{ji} ) = \max_{a_{ui}, \xi_{ui}} \sum_{u \in U_p} a_{ui} \gamma_u ( \xi_{ui}, n_{ui} ) \quad (2.21)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

El gasto de la planta es igual a la suma de los gastos de las unidades:

$$\sum_{u \in U_p} \xi_{ui} = q_{pi} \quad (2.22)$$

La altura neta para cada unidad es el nivel del embalse, menos el nivel del desfogue, menos las pérdidas de altura en los conductos:

$$n_{ui} = \alpha_e (w_{ei}) - \beta_{li} (q_{ki}, w_{ji}) - \delta_u (\xi_{ui}) \quad (2.23)$$

$$\text{para toda: } u \in U_p; \text{ con: } l/p \in P_l; k \in P_l; \\ j/l \in L_j^c; e/l \in L_e^d$$

El gasto de cada unidad está acotado inferior y superiormente:

$$a_{ui} \xi_{ui}^{\min} \leq \xi_{ui} \leq a_{ui} \xi_{ui}^{\max} \quad (2.24)$$

$$\text{para toda: } u \in U_p$$

En la expresión anterior, los límites al gasto de las unidades,  $\xi_{ui}^{\min}$  y  $\xi_{ui}^{\max}$ , se suponen constantes para el problema que se resuelve; pero deberán ser calculados tomando en consideración:

- Las generaciones máxima y mínima de la unidad.
- La generación especificada cuando la unidad no es coordinable.
- Los límites al gasto de la unidad que se conocen como función de la altura neta.
- Una estimación de la altura neta en base a niveles medios en el embalse y en el desfogue y pérdida de altura media en los conductos.

Las variables  $a_{ui}$  son enteras, y están restringidas de la siguiente forma:

$$\underline{a}_{ui} \leq a_{ui} \leq \bar{a}_{ui} \quad \text{para toda } u \text{ y toda } i \quad (2.25)$$

Las restricciones anteriores aseguran que el valor de  $a_{ui}$  no viola el estado definido para la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ .

La definición de generación por planta no sería completa sin especificar el valor de la generación cuando no exista solución factible a las restricciones: (2.21) a (2.25); en este caso, se define que el valor de la generación es cero. En esta forma, se desalientan soluciones que violan algunas restricciones de operación de la planta.

Función Objetivo:

La función, que se quiere minimizar, es:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{s \in S_i} \{ C_s^x (x_s) + C_s^y (y_s) + C_s^g (g_s) + \sum_{o \in O_s} C_o^r (r_o) \} \quad (2.26)$$

En resumen, la formulación detallada del Problema de Asignación de Unidades Hidroeléctricas está constituida por las expresiones: (2.6) a (2.26).

## 2.3 FORMULACIÓN COMPACTA DE PAUH.

En forma compacta el problema se puede presentar como sigue:

minimizar:  $F ( \bar{x} )$

sujeto a:

$$J \bar{x} = \bar{j} ( \bar{h} )$$

$$K \bar{x} \leq \bar{k} ( \bar{h} )$$

$$M \bar{y} = \bar{m}$$

$$N \bar{y} \leq n'$$

$$\bar{h} = H' ( \bar{y} )$$

- $\bar{x}$  Representa a las variables eléctricas: y, x, t, r, g; que aparecen en la formulación detallada.
- $\bar{y}$  Representa a las variables hidráulicas: q, w; que aparecen en la formulación detallada.
- $\bar{h}$  Representa a las generaciones hidroeléctricas: h; de la formulación detallada.
- F (.) Es una función definida para toda  $\bar{x}$  que satisface las restricciones del problema; considera el costo de producción de energía termoeléctrica y las penalizaciones a variables eléctricas artificiales ( ver Exp. 2.26 ).

- $\bar{J}$  (.) Vector de funciones de la generación hidroeléctrica, considera todos los "lados derechos" de las restricciones de balance en la formulación detallada Ec. (2.6).
- $\bar{K}$  (.) Vector de funciones de la generación hidroeléctrica, considera todos los "lados derechos" de las restricciones eléctricas de desigualdad en la formulación detallada Exps. (2.7) a (2.11). En realidad, sólo los lados derechos correspondientes a las restricciones (2.11) son funciones de la generación hidroeléctrica; en los demás casos son constantes.
- $H'$  (.) Vector de funciones que asocian a cada valor de las variables hidráulicas un valor de generación hidroeléctrica. En la formulación detallada, estas funciones están definidas con las expresiones (2.20) a (2.25).
- $J, K$  Matrices constantes, formadas por los coeficientes de las variables eléctricas en las restricciones eléctricas.  $J$  está asociada con las restricciones definidas en (2.6);  $K$  con las definidas en las expresiones (2.7) a (2.11).
- $M, N$  Matrices constantes, formadas por los coeficientes de las variables hidráulicas en las restricciones hidráulicas.  $M$  está asociada con las restricciones definidas en las ecuaciones (2.12) a (2.14);  $N$  con las definidas en las expresiones (2.15) a (2.19).

$\bar{m}$ ,  $n'$  Vectores constantes, formados por los "lados derechos" de las restricciones hidráulicas.  $\bar{m}$  está asociado con las restricciones (2.12) a (2.14);  $n'$  con las restricciones (2.15) a (2.19).

## C A P Í T U L O 3 .

## SOLUCIÓN AL PROBLEMA PAUH.

El Problema de Asignación de Unidades Hidroeléctricas tiene un alto grado de dificultad. La complejidad del problema se deriva de tres características principales:

1. La presencia de variables enteras ( las  $a_{ui}$  ).
2. Relaciones no-lineales entre las variables.
3. La dimensión del problema: problemas de tamaño real, como el que se presenta en el capítulo 7, tienen 8,400 variables enteras, 16,600 variables continuas y 51,000 restricciones.

La conjunción de estas tres características hace suponer que, para resolver el problema en forma estricta, se requiere de recursos de cómputo prohibitivos. Se decidió partir el problema original en tres problemas de menor complejidad. Estos tres problemas se resolverán en forma sucesiva. La definición de los subproblemas aprovecha el comportamiento de las plantas.

En la siguiente sección, se indica en qué forma se aprovecha el comportamiento de las plantas, y cuáles son las características generales de los subproblemas.



### 3.1 PARTICIÓN DE PAUH EN LOS PROBLEMAS: PA, PRAU Y PC.

Al agrupar en plantas a las unidades, la función de generación resultante, es tal que, permite aproximarla con una función que no requiere considerar variables enteras.

La figura 3.1 ejemplifica lo que se acaba de mencionar. En la figura, la curva punteada es la función aproximada que se propone; mientras que las cinco curvas con línea continua, representan la generación de la planta como función del gasto turbinado, operando desde con una hasta con cinco unidades, para un nivel especificado del embalse. Cuando el gasto de la planta se puede obtener sin violar los límites al gasto de sus unidades, la curva punteada es una muy buena aproximación al valor de la generación de la planta.

Para el caso de la figura 3.1, se han supuesto: un cierto nivel en el embalse, que las cinco unidades son asignables y coordinables, y que el nivel del desfogue sólo depende del gasto de la planta. Es posible mantener la calidad de la aproximación para otros niveles en el embalse, para otros estados de las unidades de la planta, y para las diversas condiciones de operación que afectan el nivel del desfogue.

La idea fundamental del método de solución es que, en una etapa inicial, se resuelva el problema considerando que las plantas tienen el comportamiento aproximado. Al problema que resulta se le llamará: "Problema Aproximado". El resultado de es-

Generación, MW.

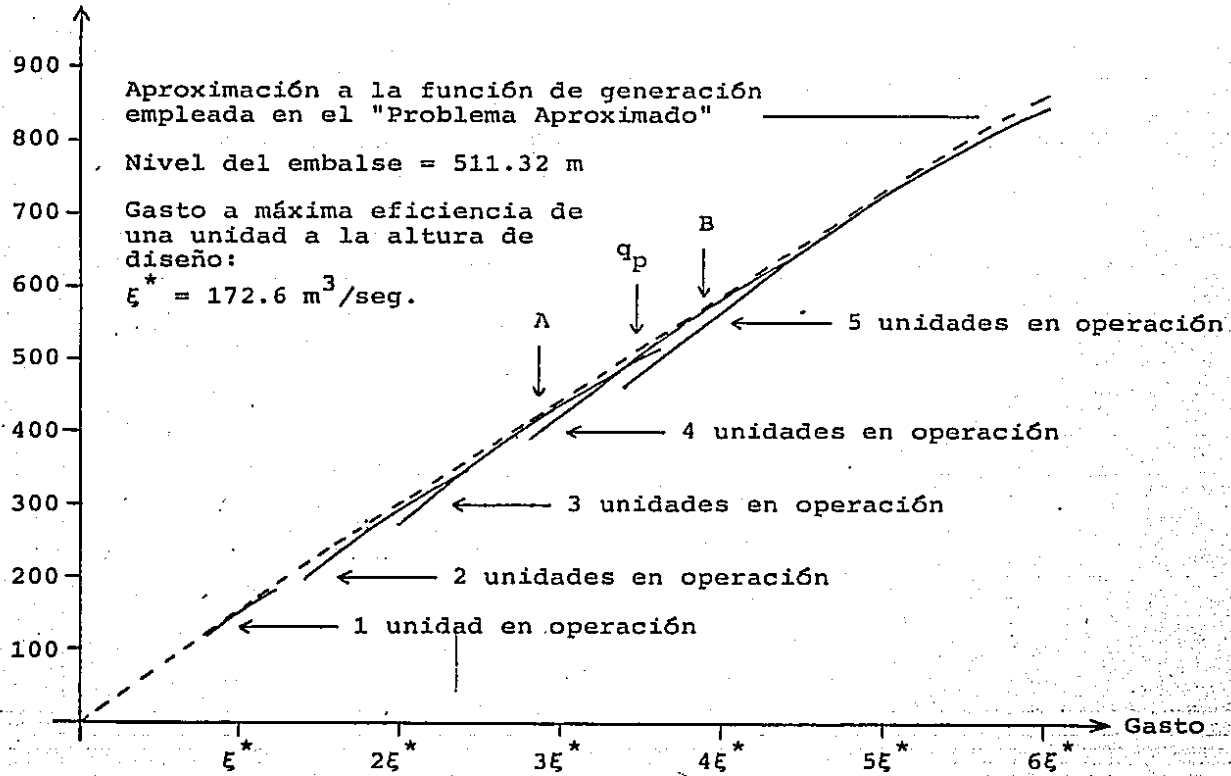


Figura 3.1 Función de generación de una planta con sus cinco unidades: disponibles, asignables y coordinables.

ta primera etapa son: los volúmenes turbinados por cada planta en cada intervalo y los volúmenes almacenados en los embalses al final de cada intervalo.

En una segunda etapa se decidirá la asignación de las unidades, tomando como guía los resultados de la primera etapa. Por ejemplo: supóngase que en algún intervalo, para la planta de la figura 3.1, el gasto que resultó en la primera etapa fue de  $621 \text{ m}^3/\text{seg.}$ ; que el volumen almacenado en el embalse asociado corresponde a un nivel de 511.32 m.s.n.m.; y que el nivel del desfogue resultó ser 422.39 m.s.n.m. La altura bruta a la que opera la planta deberá ser de 88.93 m. Si se calculan los gastos a máxima eficiencia con tres y con cuatro unidades operando con una altura neta igual a la altura bruta ( el despreciar las pérdidas de altura en conductos en este cálculo, no afecta sensiblemente los resultados ), los resultados son: 507 y  $676 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , que corresponden a los puntos marcados con A y B en la figura 3.1. Por el hecho de que el gasto de la planta está entre los puntos A y B, se considera que las tres primeras unidades estarán en operación, mientras que la quinta unidad es tará fuera de operación. Falta por decidir si la cuarta unidad estará o no en operación.

En efecto, el problema de asignación se ha reducido a decir, cuando más, si una unidad por planta e intervalo estará en operación; por esto, al problema que se resuelve en esta segunda etapa se le llama: "Problema Reducido de Asignación de Unidades".

La decisión para la unidad mencionada se toma considerando varios criterios, como son: la cercanía del gasto, ya sea al punto A, o bien, al B; tratar de evitar violación al límite superior de generación del grupo asociado; tratar de evitar corte de carga en la isla; satisfacer la restricción al volumen almacenado en el embalse al final del período de planeación; y un criterio adicional -no considerado en la formulación original- que es el tratar de evitar variaciones erráticas en la asignación de la unidad en el transcurso del tiempo.

Una vez tomadas las decisiones acerca de la asignación de cada unidad en cada intervalo, falta determinar el punto de operación de las unidades coordinables que hayan quedado en operación. Al problema por resolver se le llama: "Problema de Coordinación". En este problema, en cada intervalo se usa la representación de la planta correspondiente a las unidades que quedaron en operación durante el mismo.

Por ejemplo: si para la planta de la figura 3.1, se determinó que en algún intervalo estarían en operación cuatro unidades, se usará la curva continua que corresponde a "4 unidades en operación". Los gastos máximos y mínimos para la planta, serán también los que correspondan a las unidades que se haya decidido tener en operación.

En el "Problema de Coordinación" se mantienen la misma función objetivo, y salvo por ligeras simplificaciones, las mismas restricciones que en el problema original; la diferencia princi

pal es que la asignación de las unidades ya no es una variable, sino que es constante. Esta característica le da una estructura idéntica a la del "Problema Aproximado", distinguiéndose de éste, únicamente en el comportamiento que se considera para cada planta. De hecho, el algoritmo que resuelve el "Problema de Coordinación" es, en esencia, el mismo que resuelve el "Problema Aproximado".

En resumen se tiene lo siguiente:

- a. El método de solución tiene tres etapas, en estas etapas se resuelven los siguientes problemas:
  1. El "Problema Aproximado" ( PA ).
  2. El "Problema Reducido de Asignación de Unidades" ( PRAU ).
  3. El "Problema de Coordinación" ( PC ).
  
- b. Las características principales del PA son:
  1. Mantiene las restricciones eléctricas (2.6) a (2.11), las restricciones hidráulicas (2.12) a (2.19), y la función objetivo (2.26) del problema original.
  2. El comportamiento supuesto para la planta es una buena aproximación al comportamiento considerado en la formulación original. La definición del comportamiento aproximado substituirá a la que se presenta en (2.20) a (2.25).

c. Las características del PRAU son:

1. Sólo tiene que decidirse, cuando más, si una unidad por planta e intervalo estará o no en operación.
2. Para tomar la decisión se consideran algunos criterios que son un reflejo de las restricciones del problema, en forma adicional, se aplica el criterio de evitar cambios erráticos en la asignación de una unidad en el transcurso del tiempo.

d. Las características principales del PC son:

1. Mantiene las restricciones eléctricas (2.6) a (2.11), las restricciones hidráulicas (2.12) a (2.18), y la función objetivo (2.26) del problema original. Se modifican los límites del gasto por planta en las restricciones (2.19).
2. El comportamiento de cada planta en cada intervalo es el que corresponde a la asignación de unidades ya conocida al llegar a esta etapa; salvo por ligeras simplificaciones, coincide con la definición presentada en las expresiones (2.20) a (2.25) del problema original.
3. Tiene la misma estructura que PA y se resuelve con el mismo método.

En las secciones siguientes, se definen en forma precisa los tres problemas aquí mencionados; y en los siguientes dos capítulos, se describe la forma de resolverlos.

### 3.2 DEFINICIÓN Y FORMULACIÓN DETALLADA DEL PROBLEMA APROXIMADO ( PA ).

En la definición de este problema la intención es eliminar las variables asociadas a las unidades. Estas variables aparecen únicamente en las expresiones (2.21) a (2.25) de la formulación del problema original. Estas expresiones definen un subproblema, en el que se maximiza la generación de una planta en un intervalo. En este subproblema son parámetros: los gastos turbinados por las plantas, y los volúmenes almacenados en los embalses.

Para lograr el objetivo mencionado, se define una función de generación por planta, que depende de las mismas variables que son parámetros en el subproblema de maximización presente en la formulación del problema original. Esta función es una muy buena aproximación al comportamiento de la planta, lo cual se puede apreciar en la figura 3.1 y en la comparación que se hace en el apéndice C.

La generación de la planta  $p$  en el intervalo  $i$  será igual al valor de una función de: su propio gasto, el gasto de las plantas con las que comparte la vía de desfogue, el volumen almacenado en el embalse del cual toma agua, y en casos especiales, del volumen almacenado en el embalse aguas abajo; esto es:

$$h_{pi} = \tilde{f}_{pi} ( w_{ei}, w_{ji}, q_{pi}, q_{ki}, \dots ) \quad (3.1)$$

con:  $l/p \in P_l$ ;  $k \in P_l$ ;  $e/l \in L_e^d$ ;  $j/l \in L_j^c$

En forma explícita la función es la siguiente:

$$\tilde{f}_{pi} (.) = \frac{\gamma_u ( \xi_u^* ( n_u^{dis} ), \bar{n}_{ui} )}{\xi_u^* ( n_u^{dis} )} q_{pi} \quad (3.2)$$

En donde:

$u$  es el índice de alguna unidad en  $U_p$ .

$n_u^{dis}$  es la altura de diseño de la unidad  $u$ .

$\xi_u^* (.)$  es la función que asocia, a cada valor de la altura neta, el valor del gasto a máxima eficiencia para la unidad  $u$ .

$\bar{n}_{ui}$  Un valor aproximado para la altura neta.

El valor aproximado para la altura neta está dado por:

$$\bar{n}_{ui} = \alpha_e ( w_{ei} ) - \beta_{li} ( w_{ji}, q_{pi}, q_{ki}, \dots ) - \delta_u ( \tilde{\xi}_{ui} ) \quad (3.3)$$

con:  $u \in U_p$ ;  $l/p \in P_l$ ;  $k \in P_l$ ;  $e/l \in L_e^d$ ;  $j/l \in L_j^c$



El argumento de la función  $\delta_u$  es el gasto de la unidad  $u$ ; pero como en este problema precisamente se está evitando el empleo de variables asociadas a las unidades, entonces, sólo con el propósito de tener una estimación conservadora de las pérdidas en conductos, se supone que el gasto de la planta está uniformemente repartido entre las unidades que la forman, esto es:

$$\bar{\xi}_{ui} = \frac{q_{pi}}{|U_p|} ; \text{ para toda } u \in U_p \quad (3.4)$$

En resumen, el "Problema Aproximado" queda definido de la siguiente forma:

**Restricciones eléctricas:**

Son las restricciones (2.6) a (2.11) del problema original.

**Restricciones hidráulicas:**

Son las restricciones (2.12) a (2.19) del problema original.

**Liga entre las variables eléctricas y las hidráulicas:**

Queda establecida por la función de generación por planta recientemente definida en las expresiones (3.1) a (3.4).

**Función objetivo:**

Es la misma empleada en el problema original, (2.26).

### 3.3 FORMULACIÓN COMPACTA DEL PA.

De la misma forma que en el problema original, se puede presentar una formulación compacta para el "Problema Aproximado" como sigue:

minimizar:  $F(\bar{x})$

sujeto a:

$$J \bar{x} = \bar{j}(\bar{h})$$

$$K \bar{x} \leq \bar{k}(\bar{h})$$

$$M \bar{y} = m$$

$$N \bar{y} \leq n'$$

$$\bar{h} = \bar{H}(\bar{y})$$

En esta forma compacta, se puede observar que la única diferencia con el problema original es el vector de funciones  $\bar{H}(\cdot)$ , que es el que asocia a cada valor de las variables hidráulicas, un valor aproximado para las generaciones por planta.

### 3.4 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA REDUCIDO DE ASIGNACIÓN DE UNIDADES ( PRAU ).

La definición de este problema supone que se conoce un gasto por planta e intervalo.

El problema consiste en determinar qué unidades deberán estar en operación en cada intervalo. Se deben satisfacer algunas restricciones, y las decisiones, se toman considerando ciertos criterios.

#### Las restricciones son:

- Debe respetarse el estado especificado para las unidades en todos los intervalos.
- En una planta y en un intervalo dados, las unidades declaradas como asignables-coordinables tienen preferencia sobre las asignables-no-coordinables para ser puestas en operación.
- La asignación debe permitir, con las tolerancias especificadas, que se alcancen las cotas finales establecidas para los diversos embalses.
- El gasto conocido por planta e intervalo determinará la asignación de todas, excepto quizá, de una de las unidades de la planta. La única unidad cuya asignación no se deter-

mina en esta forma, debe tener la siguiente característica: el gasto conocido para la planta está entre dos valores de lo que se llama "gasto preferido para la planta", calculados con y sin la unidad en operación. El gasto preferido para la planta con un cierto número de unidades en operación es: la suma sobre las unidades consideradas, del gasto a máxima eficiencia a la altura bruta, o del gasto más cercano a éste que permitan los límites operativos de cada unidad; la suma está afectada por un factor, sintonizable externamente, cuyo valor normalmente es uno. Las unidades de la planta que se hayan tenido que poner en operación hasta llegar a la unidad con la característica mencionada quedan en operación; mientras que, las unidades que no llegaron a ser consideradas quedan fuera de operación.

Los criterios considerados, en orden de importancia, son:

- Minimizar los arranques y paros erráticos de cada unidad en el transcurso del tiempo.
- Eliminar los cortes de carga.
- Eliminar las violaciones a los límites de generación de los grupos.
- Minimizar la diferencia absoluta entre el gasto conocido por planta e intervalo y el gasto preferido para la planta, correspondiente a las unidades que queden en operación.

### 3.5 DEFINICIÓN Y FORMULACIÓN DETALLADA DEL PROBLEMA DE COORDINACIÓN ( PC ).

En este problema la asignación de unidades es conocida. Por esto, los límites al gasto de las plantas se redefinirán. Así mismo, las funciones que ligan las variables hidráulicas con las eléctricas.

Sea  $a_{ui}^*$  la asignación de la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ , que fue encontrada al resolver el "Problema Reducido de Asignación de Unidades". Si  $a_{ui}^* = 1$ , la unidad correspondiente estará en operación en el intervalo  $i$ ;  $a_{ui}^* = 0$ , en caso contrario.

La restricción al gasto por planta e intervalo (2.19) de la formulación del problema original será substituida por la siguiente:

$$\sum_{u \in U_p} a_{ui}^* \xi_{ui}^{\min} \leq q_{pi} \leq \sum_{u \in U_p} a_{ui}^* \xi_{ui}^{\max} \quad (3.5)$$

para toda  $p$  y todo  $i$ .

La liga entre las variables eléctricas y las hidráulicas se define enseguida. La generación de cada planta es una función del volumen almacenado en el embalse del cual toma agua, en casos especiales del volumen del embalse aguas abajo, de su propio gasto y del gasto de las plantas con las que comparte la vía de desfogue, esto es:

$$h_{pi} = \hat{f}_{pi} ( w_{ei}, w_{ji}, q_{pi}, q_{ki}, \dots ) \quad (3.6)$$

con  $l/p \in P_l$ ;  $k \in P_l$ ;  $e/l \in L_e^d$ ;  $j/l \in L_j^c$

La función de generación de la planta está definida como el máximo de la suma de las generaciones de sus unidades, sujeto a ciertas restricciones. La definición formal es la siguiente:

$$\hat{f}_{pi} (.) = \max_{\xi_{ui}} \sum_{u \in U_p} a_{ui}^* \gamma_u ( \xi_{ui}, n_{ui} ) \quad (3.7)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

La suma del gasto de las unidades es igual al gasto de la planta:

$$\sum_{u \in U_p} \xi_{ui} = q_{pi} \quad (3.8)$$

La altura neta de cada unidad está dada por:

$$n_{ui} = \alpha_e ( w_{ei} ) - \beta_{li} ( w_{ji}, q_{pi}, q_{ki}, \dots ) - \delta_u ( \xi_{ui} ) \quad (3.9)$$

para toda  $u \in U_p$ ;  $l/p \in P_l$ ;  $k \in P_l$ ;  $e/l \in L_e^d$ ;  $j/l \in L_j^c$

El gasto de cada unidad está acotado inferior y superiormente:

$$a_{ui}^* \xi_{ui}^{\min} \leq \xi_{ui} \leq a_{ui}^* \xi_{ui}^{\max}; \text{ para toda } u \in U_p \quad (3.10)$$

En resumen, el "Problema de Coordinación" queda definido de la siguiente manera:

Restricciones eléctricas:

Son las restricciones (2.6) a (2.11) del problema original.

Restricciones hidráulicas:

Son las restricciones (2.12) a (2.18) del problema original, más, la restricción (3.5) recientemente definida.

Liga entre las variables eléctricas y las hidráulicas:

Queda definida por la función de generación por planta, mostrada en las expresiones (3.6) a (3.10).

Función objetivo:

Es la misma empleada en el problema original, (2.26).

### 3.6 FORMULACIÓN COMPACTA DEL PC.

Se presenta la formulación compacta del "Problema de Coordinación", con el mismo estilo que el empleado para el problema original y para el "Problema Aproximado":

minimizar:  $F(\bar{x})$

sujeto a:

$$J \bar{x} = \bar{j}(\bar{h})$$

$$K \bar{x} \leq \bar{k}(\bar{h})$$

$$M \bar{y} = \bar{m}$$

$$N \bar{y} \leq \hat{n}$$

$$\bar{h} = \hat{H}(\bar{y})$$

Se observa que las únicas diferencias, tanto con el problema original, como con el "Problema Aproximado", son: el vector del lado derecho,  $\hat{n}$ , de las restricciones hidráulicas de desigualdad; y el vector de funciones  $\hat{H}(\cdot)$ , que es el que asocia a cada valor de las variables hidráulicas, un valor para las generaciones por planta, dada la asignación de unidades.



## C A P Í T U L O 4 .

## SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PA Y PC.

Ambos problemas estructuralmente son iguales, por lo cual, el método de solución es el mismo. Primero, se harán notar las características de los problemas. A continuación, se describirá el método general de solución que fue escogido en base a las características de los problemas; también, se describirán los detalles de la aplicación del método general a los problemas particulares.

#### 4.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS.

Tanto el problema PA como el PC se pueden llevar a la forma del problema PG' ( véanse secciones 3.3 y 3.6 ):

(PG') minimizar:  $F ( \bar{x} )$

sujeto a:

$$J \bar{x} = \bar{j} ( \bar{h} )$$

$$K \bar{x} \leq \bar{k} ( \bar{h} )$$

$$M \bar{y} = \bar{m}$$

$$N \bar{y} \leq \bar{n}$$

$$\bar{h} = H ( \bar{y} )$$

Otra forma de presentar a PG' es como PG:

(PG) minimizar:  $F ( \bar{x} )$

sujeto a:

$$J \bar{x} = \bar{j} ( H ( \bar{y} ) ) = \bar{c} ( \bar{y} )$$

$$K \bar{x} \leq \bar{k} ( H ( \bar{y} ) ) = \bar{b} ( \bar{y} )$$

$$M \bar{y} = \bar{m}$$

$$N \bar{y} \leq \bar{n}$$

donde las variables de decisión son:  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ .

Considérese el problema PT que se define como:

(PT) minimizar:  $Z(\bar{y})$

sujeto a:

$$M \bar{y} = \bar{m}$$

$$N \bar{y} \leq \bar{n}$$

En PT,  $Z(\bar{y})$  se define así:

$$Z(\bar{y}) = \min \{ F(\bar{x}) \mid J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y}), \\ K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y}) \}$$

El objetivo de esta sección es demostrar que:

1. Tanto el problema PA como el PC se pueden llevar a la forma del problema PT.
2. La función objetivo de PT está definida para toda  $\bar{y}$  factible en PT; su primera derivada: existe, se puede evaluar, y es una función de Lipschitz en la región factible de PT.
3. Las restricciones de PT, además de ser lineales, tienen una estructura que permite una explotación especial; esto augura eficiencia computacional.

#### 4.1.1 Transformación de los problemas PA y PC en el problema PT.

Los problemas PA y PC se pueden llevar a la forma del problema PG. El problema PG es equivalente al problema PGT que se define enseguida:

$$\begin{aligned} \text{(PGT) minimizar:} & \quad Z(\bar{y}) \\ & \quad \text{con:} \quad \bar{y} \in \bar{Y} \end{aligned}$$

En PGT se considera:

$$\bar{Y} = \{ \bar{y} \mid M \bar{y} = \bar{m}, N \bar{y} \leq \bar{n}, \text{ existe alguna } \bar{x} \text{ para la cual se verifica: } K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y}), J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y}) \}$$

$$Z(\bar{y}) = \min \{ F(\bar{x}) \mid K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y}), J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y}) \}$$

Para demostrar la equivalencia de PGT con PT, y por lo tanto, que PA o PC se pueden llevar a la forma de PT, basta con demostrar que, para toda  $\bar{y}$  factible en PT, siempre existe una  $\bar{x}$  para la cual se verifican:  $K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y})$ , y,  $J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y})$ ; ya que esto implica que:

$$\bar{Y} = \{ \bar{y} \mid M \bar{y} = \bar{m}, N \bar{y} \leq \bar{n} \}.$$

Tanto para el problema PA como para el PC, la formulación detallada de las restricciones  $J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y})$ , y,  $K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y})$  es:

Para toda  $i=1, \dots, I$ ; y toda  $s \in S_i$

$$x_s - y_s + q_s + \sum_{o \in O_s} (t_o + r_o) =$$

$$= \hat{D}_s + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h (h_{pi} - H_{pi}^0)$$

$$- x_s \leq 0$$

$$q_s \leq \bar{G}_s$$

$$- q_s \leq - \underline{G}_s$$

$$- y_s \leq 0$$

$$t_o \leq T_o; \text{ para toda } o \in O_s$$

$$t_o + r_o \leq \sum_{p \in P_o} h_{pi}; \text{ para toda } o \in O_s$$

La forma de calcular  $h_{pi}$  depende de cuál problema se esté considerando: el PA o el PC; pero en ambos casos, el valor de  $h_{pi}$  estará definido siempre que el valor de las variables al que corresponde satisfaga las restricciones hidráulicas del problema que se trata. Por otra parte,  $\bar{G}_s$  y  $\underline{G}_s$  son datos que deben cumplir:  $\bar{G}_s \geq \underline{G}_s$ ; el caso contrario no tiene sentido, simplemente el problema PAUH no tendría solución factible. Hechas estas dos aclaraciones, por inspección, se concluye que para cualquier valor de las variables hidráulicas  $\bar{y}$ ; factible respecto a las restricciones hidráulicas:

$M \bar{y} = \bar{m}$ ,  $y$ ,  $N \bar{y} \leq \bar{n}$ ; existe un valor de las variables eléctricas,  $\bar{x}$ , que satisface las restricciones eléctricas:  $J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y})$ ,  $y$ ,  $K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y})$ . Esto es lo que se quería demostrar.

#### 4.1.2 Propiedades de la función objetivo de PT.

Las propiedades de  $Z(\bar{y})$  que se pondrán en relieve son:

- $Z(\bar{y})$  está definida para toda  $\bar{y}$  factible en PT.
- La primera derivada de  $Z(\bar{y})$ : existe, se puede evaluar, y es una función de Lipschitz en la región factible de PT.

$Z(\bar{y})$  se definió así:

$$Z(\bar{y}) = \min \{ F(\bar{x}) \mid J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y}), \\ K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y}) \}.$$

Puesto que:

- $\bar{x}$  se puede partir en tantos subvectores como islas-intervalo existan, o sea,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s, \dots)$
- $F(\bar{x})$  es aditivamente separable (véase exp. 2.26), es to es, se puede expresar en la siguiente forma:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^I \sum_{s \in S_i} F_s(\bar{x}_s)$$

3. Las restricciones:  $K \bar{x} \leq \bar{b}(\bar{y})$ ,  $J \bar{x} = \bar{c}(\bar{y})$ ; se pueden expresar como sigue:

$$K_s \bar{x}_s \leq \bar{b}_s(\bar{y}); J_s \bar{x}_s = \bar{c}_s(\bar{y});$$

para toda  $s \in S_i$ , con  $i=1, \dots, I$ . Esto es, tanto  $K$  como  $J$  son matrices con una estructura que presenta bloques en diagonal sin acoplamiento (véanse exps. 2.6 a 2.11).

Entonces,  $Z(\bar{y})$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$Z(\bar{y}) = \sum_{i=1}^I \sum_{s \in S_i} Z_s(\bar{y})$$

en donde:

$$Z_s(\bar{y}) = \min \{ F_s(\bar{x}_s) \mid K_s \bar{x}_s \leq \bar{b}_s(\bar{y}), J_s \bar{x}_s = \bar{c}_s(\bar{y}) \}.$$

Dada la relación tan simple entre  $Z(\bar{y})$  y las diversas  $Z_s(\bar{y})$ ; la primera tendrá las características (a) y (b) deseadas, si las últimas también las tienen. Así pues hay que estudiar a  $Z_s(\bar{y})$ .

El problema asociado a una isla-intervalo es: dado  $\bar{y}$ , encontrar algún  $\bar{x}_s$  para el cual:

$$(PII) \quad Z_s(\bar{y}) = \bar{w}_s(\bar{b}_s(\bar{y}), \bar{c}_s(\bar{y})) = \min_{\bar{x}_s} F_s(\bar{x}_s)$$

$$\text{sujeto a: } K_s \bar{x}_s \leq \bar{b}_s(\bar{y}), J_s \bar{x}_s = \bar{c}_s(\bar{y}).$$

El problema PII se presenta a continuación en forma detallada, mostrándose en el margen izquierdo de cada restricción la variable asociada en su problema dual:

$$(PII) \text{ minimizar: } C_S^X (x_S) + C_S^G (g_S) + C_S^Y (y_S) + \\ \sum_{o \in O_S} C_O^R (r_o)$$

sujeto a:

$$(\lambda_S) x_S + g_S - y_S + \sum_{o \in O_S} (t_o + r_o) =$$

$$\hat{D}_S + \sum_{o \in O_S} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h (h_{pi} - H_{pi}^0); \quad i/s \in S_i$$

$$(\mu_{1,s}) \quad -x_S \leq 0$$

$$(\mu_{2,s}) \quad g_S \leq \bar{G}_S$$

$$(\mu_{3,s}) \quad -g_S \leq -\underline{G}_S$$

$$(\mu_{4,s}) \quad -y_S \leq 0$$

$$(\mu_{3+2o,s}) \quad t_o \leq T_o; \quad \text{para todo } o \in O_S$$

$$(\mu_{4+2o,s}) \quad t_o + r_o \leq \sum_{p \in P_o} h_{pi}; \quad \text{para todo } o \in O_S; \quad i/s \in S_i$$

No se puede avanzar más en el análisis sin especificar las funciones que componen la expresión a minimizar.

Para simplificar la presentación, se supondrá que



$C_s^g (g_s)$  es una función cuadrática de la forma:

$$C_s^g (g_s) = \frac{1}{2} K_{0,s} g_s^2 + K_{1,s} g_s; \text{ con: } K_{0,s} > 0, \text{ y, } K_{1,s} \geq -K_{0,s} \underline{G}_s$$

En realidad,  $C_s^g (g_s)$  puede estar formada de varios segmentos de funciones cuadráticas, sólo se exige que la función resultante sea convexa, continua, y que su primera derivada sea continua.

La función de penalización al excedente de generación será también una cuadrática, tal que, su primera derivada evaluada en  $y_s = 0$ , sea igual al negativo de la primera derivada de  $C_s^g (\cdot)$  evaluada en  $g_s = \underline{G}_s$ ; esto es:

$$C_s^y (y_s) = \frac{1}{2} K_{2,s} y_s^2 - (K_{0,s} \underline{G}_s + K_{1,s}) y_s; \text{ con: } K_{2,s} > 0$$

La función de penalización al corte de carga será una cuadrática, definida de manera que su primera derivada evaluada en  $x_s = 0$ , sea igual a la primera derivada de  $C_s^g (\cdot)$  evaluada en  $g_s = \bar{G}_s$ ; o sea:

$$C_s^x (x_s) = \frac{1}{2} K_{3,s} x_s^2 + (K_{0,s} \bar{G}_s + K_{1,s}) x_s; \text{ con: } K_{3,s} > 0$$

La función de penalización al exceso de generación de un grupo respecto a su límite será una cuadrática:

$$C_o^r (r_o) = \frac{1}{2} K_{3+o,s} r_o^2; \text{ con: } K_{3+o,s} > 0; \text{ para toda } o \in O_s.$$

Según la definición 2 del apéndice A, el Lagrangiano asociado a PII es:

$$\begin{aligned}
 L(x_s, g_s, y_s, r, t, \lambda_s, \mu) = & \frac{1}{2} K_{0,s} g_s^2 + K_{1,s} g_s + \frac{1}{2} K_{2,s} y_s^2 - \\
 & (K_{0,s} \underline{G}_s + K_{1,s}) y_s + \frac{1}{2} K_{3,s} x_s^2 + (K_{0,s} \bar{G}_s + K_{1,s}) x_s + \\
 & \sum_{o \in O_s} \frac{1}{2} K_{3+o,s} r_o^2 + \lambda_s \left( \hat{D}_s + \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h (h_{pi} - H_{pi}^0) - \right. \\
 & x_s - g_s + y_s - \left. \sum_{o \in O_s} (t_o + r_o) \right) + \mu_{1,s} (-x_s) + \\
 & \mu_{2,s} (g_s - \bar{G}_s) + \mu_{3,s} (\underline{G}_s - g_s) + \mu_{4,s} (-y_s) + \\
 & \sum_{o \in O_s} \mu_{3+2o,s} (t_o - T_o) + \sum_{o \in O_s} \mu_{4+2o,s} (t_o + r_o - \sum_{p \in P_o} h_{pi})
 \end{aligned}$$

Según la definición 3 del apéndice A, el problema dual (PDII) de PII es:

$$\text{(PDII) maximizar: } \min_{x_s, g_s, y_s, r, t} L(x_s, g_s, y_s, r, t, \lambda_s, \mu)$$

con:  $(\lambda_s, \mu) \in A = \{ (\lambda_s, \mu) \mid \mu \geq 0, \text{ existe el mínimo del Lagrangiano respecto a las variables del problema primal} \}$

En el apéndice B se analiza el problema PII y se concluye que, cuando  $\bar{G}_s \geq \underline{G}_s$ :

1. Siempre existe solución tanto al problema PII como a su dual PDII.
2. La solución a PDII es única.
3. La solución a PDII es una función de Lipschitz respecto a la parte del lado derecho de las restricciones de PII que depende de las generaciones hidroeléctricas ( D y H en el apéndice B ).
4. La solución única a PDII acompañada de alguna solución a PII dan origen a un punto silla del Lagrangiano asociado.

Por otra parte, se tiene lo siguiente:

- Según la definición 5 del apéndice A, la función  $\bar{w}_s(\dots)$  que aparece en la formulación compacta de PII es la función de perturbación asociada a PII.
- Puesto que basta con que  $\underline{G}_s \leq \bar{G}_s$  para que exista solución a PII, entonces, el dominio de definición de  $\bar{w}_s(\dots)$  está formado por todos los lados derechos de las restricciones de PII para los cuales  $\underline{G}_s \leq \bar{G}_s$ . Cuando  $\underline{G}_s < \bar{G}_s$ , el lado de recho correspondiente es un punto interior del dominio de definición de la función de perturbación.
- La suposición 1 del apéndice A es satisfecha por el problema PII. Para satisfacer esta suposición se requiere que exista solución ( se alcance el mínimo ) siempre que el la

do derecho de las restricciones sea tal que el conjunto de soluciones factibles no sea vacío. Este requisito es cubierto, ya que, cuando  $\underline{G}_s > \bar{G}_s$  el conjunto de soluciones factibles es vacío, y cuando  $\underline{G}_s \leq \bar{G}_s$  siempre existe solución.

- La suposición 2 del apéndice A, que se refiere a tratar con problemas convexos, claramente es satisfecha por el problema PII.
- Si  $\underline{G}_s < \bar{G}_s$ , por el teorema 6 del apéndice A, se puede asegurar que la función de perturbación asociada a PII es diferenciable; y además, que el valor de la primera derivada es el negativo de la solución al problema PDII. El teorema se puede aplicar porque cuando  $\underline{G}_s < \bar{G}_s$ , sin importar los valores de las variables hidráulicas, existe un punto silla en el cual las coordenadas definidas por la solución a PDII son únicas; además, se satisfacen las suposiciones 1 y 2 del apéndice A, y el lado derecho de las restricciones de PII es un punto interior del dominio de definición de la función de perturbación.
- Como la solución a PDII es una función de Lipschitz respecto a la parte del lado derecho de las restricciones de PII que depende de las generaciones hidroeléctricas, para cualquier valor de éstas; entonces, la primera derivada

de la función de perturbación asociada a PII también es una función de Lipschitz, respecto a la misma parte del lado derecho, y para cualquier valor de las generaciones hidroeléctricas.

- La solución a PDII, y por tanto la primera derivada de la función de perturbación, estará acotada sólo si está acotado el conjunto de los posibles lados derechos de PII generados por los valores factibles de las variables hidráulicas. Este conjunto está acotado, porque los elementos del lado derecho de PII dependientes de las variables hidráulicas se han supuesto funciones de Lipschitz en la región factible de PT; y esta región está acotada ( véanse las expresiones 2.14 a 2.19 y la 3.5 ). Así mismo, las primeras derivadas de los elementos del lado derecho de PII dependientes de las variables hidráulicas se han supuesto funciones de Lipschitz en la región factible de PT, por lo cual, en esta región las derivadas mencionadas están acotadas.

Por todo lo anterior, se asegura que la composición de la función de perturbación con los elementos del lado derecho de PII dependientes de las variables hidráulicas es una función definida para todo punto en la región factible de PT; su primera derivada respecto a las variables hidráulicas: existe, se puede evaluar, y es una función de Lipschitz en la

región factible de PT.

Como se observa en la formulación compacta de PII,  $Z_s(\bar{y})$  no es más que la composición de la función de perturbación de PII y los elementos del lado derecho de PII dependientes de  $\bar{y}$ . Por lo cual, cuando  $G_s < \bar{G}_s$  para toda  $s$ , las diversas  $Z_s(\bar{y})$ , y por consecuencia  $Z(\bar{y})$ , tienen las características deseadas, a saber:

- Están definidas para toda  $\bar{y}$  factible en PT.
- Su primera derivada: existe, se puede evaluar, y es una función de Lipschitz en la región factible de PT.

#### 4.1.3 El desacoplamiento y la estructura de las restricciones de PT.

Las restricciones de PT corresponden, en la formulación detallada del "Problema Aproximado", a las expresiones (2.12) a (2.19); mientras que, en la formulación del "Problema de Coordinación", a las expresiones (2.12) a (2.18), más, la (3.5). Estas restricciones se pueden separar en tantos conjuntos totalmente desacoplados, como cuencas tenga el sistema hidroeléctrico. Cada conjunto independiente de restricciones tiene la estructura de una red de transporte con reembarques.

Se entiende por red de transporte con reembarques, a un

conjunto de nodos conectados entre sí mediante arcos dirigidos. Asociada a cada arco existe una variable, cuyo valor es la cantidad de bienes que se transportan entre el par de nodos extremos, en el sentido de referencia indicado en cada caso. La variable mencionada está acotada inferior y superiormente; en el modelo matemático de la red, dos restricciones de desigualdad modelan las cotas de cada variable. En cada nodo existe un suministro o una demanda de bienes, ambos pueden ser nulos; según el caso, los nodos serán: de suministro, de demanda, o bien, de reembarque. En los nodos no se almacenan bienes, por lo cual, debe existir un equilibrio entre los bienes que entran y salen de cada nodo. Este equilibrio se modela matemáticamente con una ecuación, que viene a ser una restricción de igualdad sobre los posibles valores de las variables.

Se usará un ejemplo para mostrar la estructura de red de las restricciones y variables asociadas a una cuenca. Considérese una cuenca con dos embalses en cascada. Los embalses están acoplados por una vía en la que el agua tiene un tiempo de viaje medio de dos intervalos. El embalse que se encuentra aguas arriba tiene dos plantas, mientras que el otro tiene una planta. El período de planeación tiene cinco intervalos. La figura 4.1 muestra la disposición descrita.

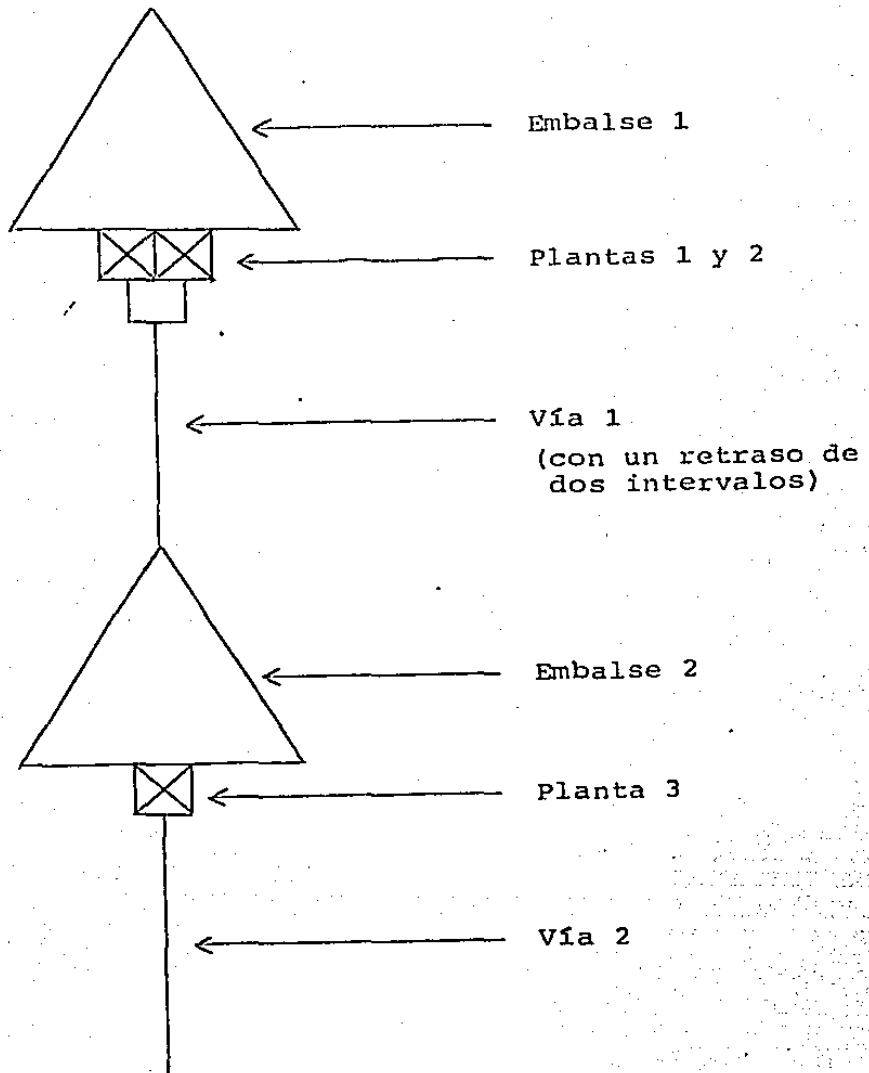


Figura 4.1



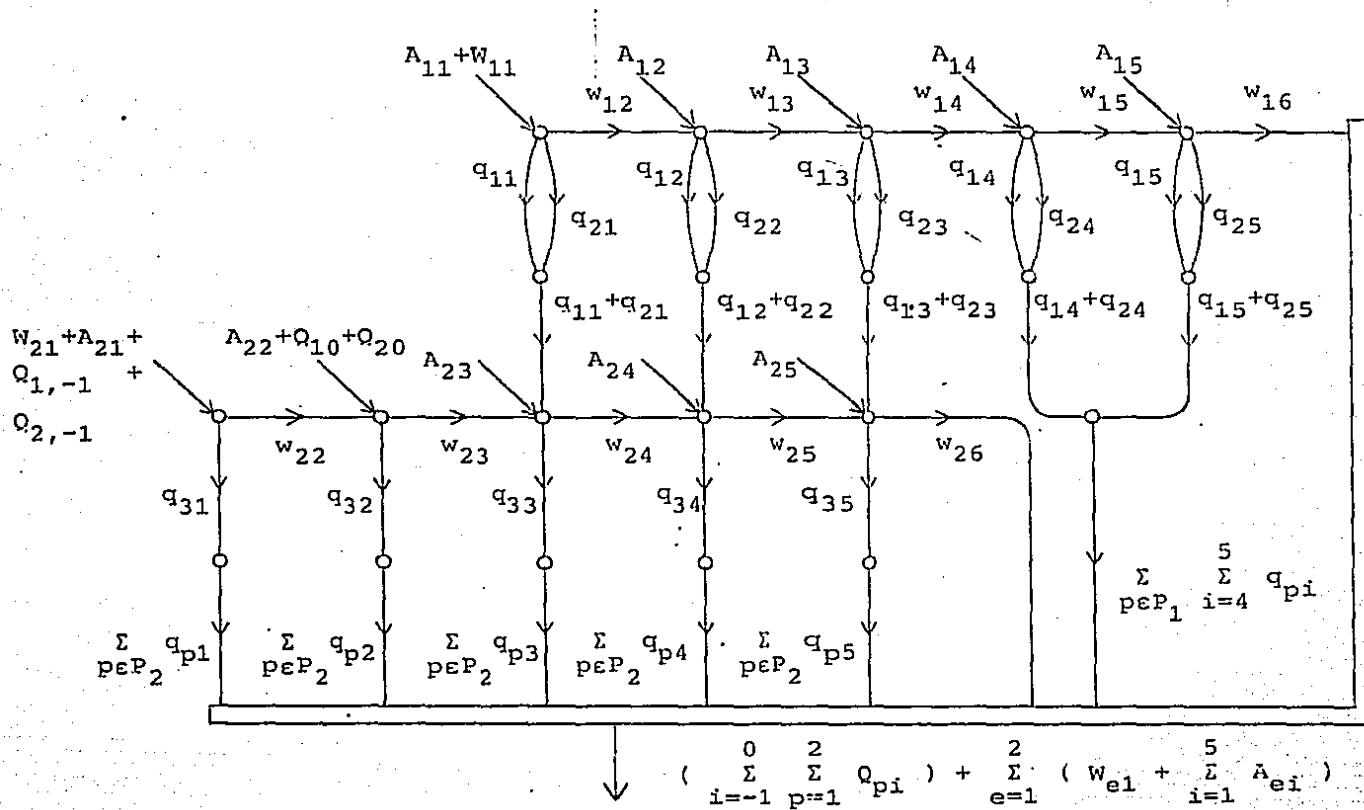


Figura 4.2 Red correspondiente a la cuenta mostrada en la figura 4.1

La figura 4.2 muestra la red asociada al conjunto de variables hidráulicas y restricciones de la cuenca considerada. En esta figura se indican las demandas y los suministros de agua, igualmente, las variables correspondientes a los arcos, tales como: los volúmenes turbinados por planta e intervalo y los volúmenes almacenados por embalse al inicio de cada intervalo. Hay arcos que corresponden a los volúmenes turbinados sobre las vías, o a los volúmenes que quedan en tránsito al final del período de planeación; estas variables no aparecen explícitamente en las formulaciones, pero en la red se crearon los arcos para poder considerar las restricciones de desigualdad de las expresiones (2.17) y (2.18). También se creó el único nodo de demanda para completar la red, pero se sabe que la ecuación asociada a este nodo es redundante, y de hecho, no existe en la formulación de los problemas.

Es una característica valiosa el que las restricciones de PT tengan la estructura de una red de transporte con reembarques. El valor radica en que este tipo de estructuras se prestan a una explotación especial. Se han desarrollado y están descritos en la literatura [ 8,13 ] algoritmos muy eficientes para resolver problemas totalmente lineales que tienen este tipo de estructura. Actualmente, este tipo de problemas, con miles de restricciones y miles de variables, se resuelven en tiempos de cómputo del orden de segundos. En particular, una rutina que se hizo para este trabajo, siguen

do el algoritmo y los detalles sobre la organización y manejo de información descritos por Bradley et al. [ 1 ], cuando se aplica a problemas con una red como la de la figura 4.2, supera en rapidez al conocido algoritmo "Out-of-kilter" ( en los ensayos efectuados resultó ser entre 5 y 50 veces más rápido ), y es aproximadamente 1000 veces más rápido, que un paquete comercial de Programación Lineal [ 9 ].

Se enfatiza sobre estos métodos porque el algoritmo de solución del problema PT, cuya función objetivo es no-lineal, / requerirá resolver aproximaciones lineales, como se explicará en la siguiente sección.

## 4.2 SOLUCIÓN AL PROBLEMA PT.

Tanto el problema PA como el PC, se pueden llevar a la forma del problema PT, cuyas características principales son:

### 1. Respecto a sus restricciones:

- a. Son lineales.
- b. Forman conjuntos completamente desacoplados ( uno por cuenca ).
- c. Tienen una estructura de red de transporte con reembarques.
- d. La región factible que definen es un conjunto compacto y convexo.

### 2. Respecto a la función objetivo:

- a. No es lineal.
- b. Se puede evaluar la primera derivada.
- c. La primera derivada es una función de Lipschitz en la región factible del problema.

Estas características permiten que se aplique el método del gradiente condicionado.

#### 4.2.1 El método del gradiente condicionado.

- Este método descrito con gran detalle en la referencia

[12 pags. 170-177] , es recomendado para resolver el problema de minimización de una función no-lineal, en una región tal, que la minimización de una función lineal pueda efectuarse sin grandes dificultades.

La aplicación del método requiere que la región factible sea compacta y convexa. Respecto a la función a minimizar, requiere que sea diferenciable en la región factible, y que el gradiente de la función satisfaga la condición de Lipschitz para todas las parejas de puntos de la región factible.

Se asegura [12] que el método converge a un punto que satisface las condiciones necesarias para ser un mínimo, esto es, la sucesión  $\{\bar{y}_k\}$  ,  $k=0,1,\dots$ , converge a algún punto  $\bar{y}_*$  en el cual se verifica:

$$\nabla Z(\bar{y}_*) (\bar{y} - \bar{y}_*) \geq 0$$

$$\text{para toda } \bar{y} \in \bar{Y} = \{ \bar{y} \mid M \bar{y} = \bar{m}; N \bar{y} \leq \bar{n} \}$$

A continuación se presenta el algoritmo, empleándose los términos en los que está definido PT:

## PROC. 4.1 "MÉTODO DEL GRADIENTE CONDICIONADO"

1. Sean:  $\bar{y} \in \bar{Y}$ ;  $k + 0$ ;  $\bar{\eta} + \infty$ ;  $\bar{w}^a + \infty$ ;  $\bar{w} + Z(\bar{y})$
2. Mientras,  $\bar{\eta} \neq 0$ ,  $k$  menor que el número máximo de iteraciones, y  $(\bar{w}^a - \bar{w})$  mayor que una tolerancia; hágase lo siguiente:
  - a. Actualícese el valor de la función objetivo en la iteración anterior:  $\bar{w}^a + \bar{w}$
  - b. Calcúlese el gradiente de la función objetivo,  $\nabla Z(\bar{y})$ , en la mejor solución encontrada.
  - c. Encuéntrese un punto que minimiza la función lineal  $\nabla Z(\bar{y}) \bar{u}$ , con  $\bar{u} \in \bar{Y}$ . Llámese a este punto  $\bar{u}_*$ .
  - d. Actualícese lo siguiente:  

$$\bar{p} + \bar{u}_* - \bar{y}; \bar{\eta} + \nabla Z(\bar{y}) \bar{p}.$$
  - e. Si  $\bar{\eta} < 0$ 
    1. Sea  $\bar{\alpha} = 2^{-j}$ , en donde  $j$  es el primero de los índices:  $0, 1, 2, \dots$ , para el cual se satisface la desigualdad:  

$$Z(\bar{y} + 2^{-j} \bar{p}) \leq Z(\bar{y}) + 2^{-j-1} \bar{\eta}.$$
    2. Actualícense:  $\bar{y} + \bar{y} + \bar{\alpha} \bar{p}$ ,  $\bar{w} + Z(\bar{y})$ ,  $k + k+1$
3. Fin del Proceso.

La figura 4.3 ilustra la forma en la que procede el método en un caso simple. Se suponen restricciones lineales y función objetivo no-lineal. En la figura, la región factible es la delimitada por el poliedro A-B-C-D-E; se muestran también los contornos equicosto de la función objetivo. El proceso parte de un punto factible 0. La dirección de movimiento no necesariamente es la del gradiente, por ejemplo: la dirección 0-A es distinta a la de  $\nabla_0$ . La dirección de movimiento siempre estará definida por la mejor solución encontrada y un punto extremo del poliedro: como la dirección 1-B, cuando el proceso ha llegado al punto 1. El punto extremo se determina resolviendo el problema con una aproximación lineal a la función objetivo: el punto C es la solución óptima cuando la aproximación lineal se hace en el punto 2.

La magnitud del movimiento es tal que nunca se pierde la factibilidad. Por lo común, el movimiento no es el que minimiza la función sobre la dirección elegida, sino el que permite dar una garantía respecto a la menor disminución de la función objetivo. La ventaja es que la búsqueda sobre la dirección se termina en un número finito de intentos y se garantiza la convergencia global del método.

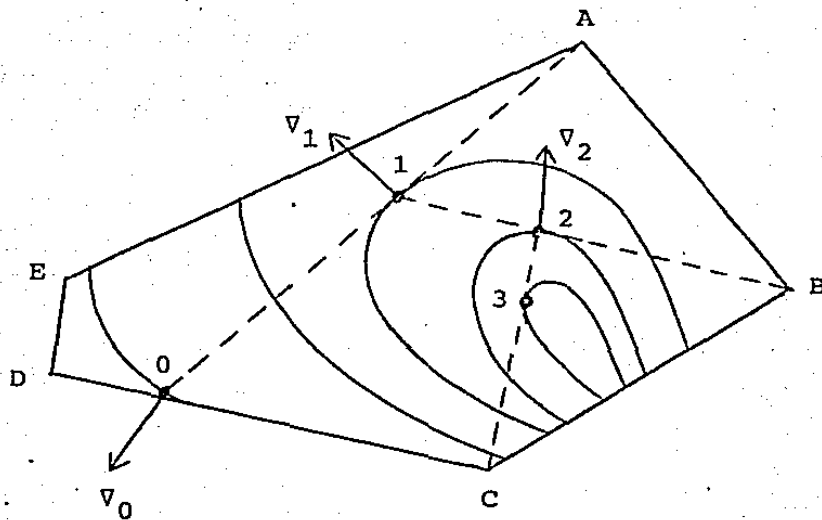


Figura 4.3 Ilustración de la forma en la que se avanza hacia el mínimo con el método del Gradiente Codicionado.



#### 4.2.2 Detalles de la aplicación del método del gradiente condicionado.

La aplicación del método requiere de cuatro cálculos no-triviales; que son:

1. La determinación del punto factible inicial.
2. El valor de la función objetivo en algún punto de la región factible.
3. El gradiente de la función objetivo en algún punto de la región factible.
4. La determinación del punto extremo, que junto a la mejor solución encontrada definen la dirección de movimiento.

El punto factible inicial se determina empleando el método que resuelve el problema de transporte con reembarques. El método se aplica a cada una de las redes, que representan las variables y restricciones, de cada una de las cuencas. La función objetivo de cada problema de transporte es nula: sólo se quiere una solución factible.

Cada vez que se evalúa la función objetivo para un valor de las variables hidráulicas, se debe calcular la generación de las plantas y resolver cada uno de los problemas por isla-intervalo. En el apéndice B, se hizo un amplio análisis del problema por isla-intervalo. En este apéndice se mostró

la manera de resolver el problema dual asociado. Con el apoyo de los razonamientos hechos en el apéndice, se presenta el siguiente proceso para resolver cada problema asociado a una isla-intervalo:

- a. Fórmense las curvas mostradas en la figura B.1.
- b. Hágase la suma de las curvas mencionadas.
- c. Si la gráfica de la suma cruza el eje horizontal; entonces, el valor óptimo de la variable dual asociada a la restricción de igualdad,  $\lambda_s^*$ , es la abscisa del punto de cruce.
- d. Si la gráfica de la suma no cruza el eje horizontal ( la gráfica sólo está definida para valores no-negativos de  $\lambda_s$  ); entonces, la solución es  $\lambda_s^* = 0$ .
- e. El valor de la función objetivo, afectada por una constante de integración, se obtiene calculando el área bajo la gráfica de la suma, desde  $\lambda_s = 0$ , hasta  $\lambda_s = \lambda_s^*$ .
- d. El valor de otras variables duales, por ejemplo el de las necesarias para determinar el gradiente, se calcula usando las expresiones (B.2) a (B.5).

Para calcular el gradiente de la función objetivo se requiere aplicar la regla de la cadena; ya que esta función es el resultado de múltiples composiciones de funciones, como

se puede apreciar por lo siguiente:

- a. La función objetivo es la suma del valor óptimo, de cada una de las funciones objetivo, de los problemas por isla-intervalo.
- b. El valor óptimo de la función objetivo de cada problema por isla-intervalo es función del lado derecho de las restricciones de este problema. Su derivada está dada por el negativo de los valores, en el óptimo, de las variables duales asociadas a las restricciones.
- c. El lado derecho de las restricciones del problema por isla-intervalo es una función simple de la generación de los grupos.
- d. La generación de los grupos es la suma de las generaciones de las plantas que los componen.
- e. La generación de las plantas, como ya se indicó, depende de las variables hidráulicas, pasando por las funciones del nivel del embalse, del nivel del desfogue, etc.

Para determinar el punto extremo, que junto con la mejor solución encontrada definen la dirección de búsqueda, deben resolverse los problemas de transporte con reembarques asociados a las diversas cuencas del sistema. En este caso,

los coeficientes de las variables hidráulicas en la función objetivo son las correspondientes componentes del gradiente calculado en la mejor solución encontrada.

## C A P Í T U L O 5 .

## SOLUCIÓN AL PROBLEMA PRAU.

El método tiene cuatro etapas principales. En la primera, se propone una asignación de unidades inicial, considerándose como datos, los resultados obtenidos al resolver el "Problema Aproximado". En la segunda, se determina si pueden llegar a producirse violaciones al límite superior de los grupos, en caso afirmativo, se modifica la asignación inicial bajo ciertas restricciones. En la tercera, se verifica si pueden llegar a producirse cortes de carga, en tal caso, se modifica la asignación en forma apropiada. Debe notarse que en la fase anterior la acción a tomar es dejar fuera de operación algunas unidades; mientras que en esta etapa la acción es inversa, pero, entre otras restricciones, se encuentra la de no aumentar las violaciones al límite superior de generación para los grupos. En la última etapa, si con la asignación actual no se alcanza la cota final en algún embalse, aun considerando la tolerancia permitida, o bien, si el volumen que debe quedar en tránsito en alguna vía al final del período de planeación no es el especificado, aun considerando la tolerancia; se modificará la asignación, sin destruir las previsiones hechas en la segunda y tercera etapas.

Entre las restricciones impuestas en la segunda y tercera etapas, existe una que permite garantizar el logro del objetivo de la cuarta etapa.

Para simplificar la presentación del método, se ha considerado que el tiempo de viaje del agua entre embalses es nulo. Cuando los tiempos de viaje no son nulos, la forma de vigilar que el volumen en tránsito al final del período de planeación es el especificado, es idéntica a la forma de vigilar que el volumen turbinado por las plantas de un embalse es el que permite alcanzar la cota final especificada para éste. En tal condición, en la cuarta etapa primero se satisfaría la restricción del volumen en tránsito, y luego, la restricción de alcanzar la cota final establecida.

El procedimiento 5.1 muestra, en resumen, las acciones a tomar para resolver el "problema Reducido de Asignación de Unidades":

#### PROC. 5.1 "ASIGNACIÓN HEURÍSTICA"

1. Determinación de una asignación inicial mediante el procedimiento 5.1.1.
2. Previsión de violaciones al límite superior de generación de los grupos, mediante el procedimiento 5.1.2.

continúa...

## PROC. 5.1 (continuación)

3. Previsión de cortes de carga, mediante el procedimiento 5.1.3.
4. Modificación a la asignación para alcanzar las cotas finales en los embalses, por medio del procedimiento 5.1.4.

Para poder explicar en forma detallada los diversos subprocesos, se requiere definir algunos conceptos:

- Gasto filtrado de una planta en algún intervalo  $q_{pi}^{fil}$ . Es una función de los gastos de la planta obtenidos de la solución del "Problema Aproximado". Depende de los gastos de la planta, en el intervalo considerado y en los dos intervalos anteriores y posteriores, cuando estos están contenidos en el período de planeación. El filtrado atenúa totalmente las frecuencias de 0.5 ciclos/intervalo, y pasa sin atenuación la componente de frecuencia cero. Esto último, implica que el volumen turbinado por la planta durante el período de planeación es el mismo antes y después del filtrado. Esta característica la determinan tres parámetros que se identifican como:  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ , y  $\eta_2$ .
- Gasto preferido para una unidad en algún intervalo  $\xi_{ui}^{pre}$ . Es el gasto a máxima eficiencia a la carga bruta, multiplicado por un factor ( $\eta_3$ ) especificado externamente. Si los límites al gasto de la unidad impiden que el valor así calculado

sea factible; entonces, se tomará el valor del límite más restrictivo como el gasto preferido para la unidad. En el resultado final, las unidades consideradas en operación tenderán a turbinar un gasto cercano al gasto preferido; por lo anterior,  $\eta_3$  es un parámetro externo de sintonización, mediante el cual se afecta la tendencia de las unidades a turbinar, ya sea por encima, o por debajo del gasto a máxima eficiencia.

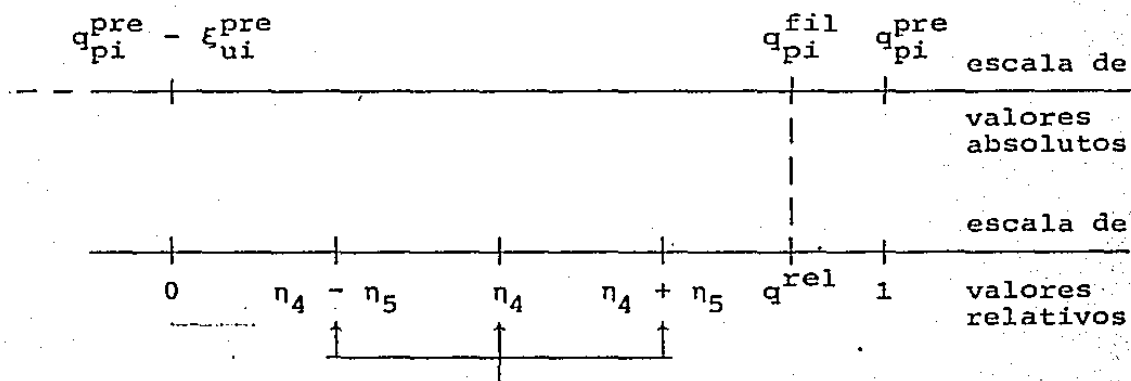
- Gasto preferido de una planta en algún intervalo  $q_{pi}^{pre}$ . Es la suma de los gastos preferidos de las unidades de la planta que se suponen en operación en el intervalo considerado.
- Valor relativo del gasto filtrado  $q^{rel}$ . Este concepto es útil en el momento de decidir sobre la asignación de una unidad. Supóngase que el gasto preferido para una planta con la unidad considerada en operación es  $q_{pi}^{pre}$ , por consiguiente, el gasto preferido para la planta sin que opere la unidad considerada, será:  $q_{pi}^{pre} - \xi_{ui}^{pre}$ ; el valor relativo del gasto filtrado se define como:

$$q^{rel} = \frac{q_{pi}^{fil} - (q_{pi}^{pre} - \xi_{ui}^{pre})}{\xi_{ui}^{pre}} = \frac{q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre}}{\xi_{ui}^{pre}} + 1 \quad (5.1)$$

- Límite de decisión. Es la combinación de dos parámetros sintonizables externos, que serán identificados como:  $\eta_4$  y  $\eta_5$ . Los valores de  $\eta_4$  y  $\eta_5$  deben cumplir las siguientes reglas:



$0 \leq \eta_4 \leq 1$ ;  $0 \leq \eta_5 \leq 0.5$ ;  $0 \leq \eta_4 - \eta_5$  y  $\eta_4 + \eta_5 \leq 1$ . El límite de decisión tiene alguno de los siguientes tres posibles valores:  $\eta_4 - \eta_5$ ;  $\eta_4$  ó  $\eta_4 + \eta_5$ . La decisión sobre la asignación de alguna unidad, se hace comparando el valor relativo del gasto filtrado con el límite de decisión elegido. En cada caso, el límite de decisión se elegirá tratando de evitar cambios erráticos en la asignación de una unidad en el transcurso del tiempo. La Figura 5.1 ilustra este concepto junto con el denominado valor relativo del gasto filtrado.



Posibles valores del límite de decisión

Figura 5.1 Ilustración de los conceptos: "Valor relativo del gasto filtrado" y "Límite de decisión".

- Volumen excedente de un embalse  $\Delta w_e^{exc}$ . Cuando se decide, aunque sea temporalmente, la asignación de las unidades en una planta, se supone que la planta turbinará el gasto preferido que corresponda a las unidades en operación. La diferencia entre el gasto filtrado y el preferido para la planta representa un excedente, positivo si el gasto filtrado es mayor que el preferido. La suma de estos excedentes para todas las plantas de un embalse y para todos los intervalos es el volumen excedente en un embalse. Hay dos casos en los que el excedente causado por una planta en algún intervalo no contribuye al excedente del embalse. El primer caso es cuando quedan en operación únicamente las unidades no-asignables de la planta y el gasto filtrado es menor que el gasto preferido de la planta. El otro, cuando quedan en operación todas las unidades disponibles de la planta y el gasto filtrado es mayor o igual que el gasto preferido de la planta. Si el excedente del embalse no se reduce a valores tolerables, las unidades coordinables que queden en operación tenderán a desviarse de su gasto preferido; siendo ésta la única manera de alcanzar el nivel final especificado para el embalse. En términos generales, el efecto mencionado es indeseable; porque significa operar en forma menos eficiente. En los casos de excepción, el excedente no se contabiliza, precisamente para permitir desviaciones respecto al gasto preferido de las plantas; esto se hace en atención a lo que sugiere el gasto filtrado, que es el

resultado de un proceso que tiene visión del problema completo.

- Volumen excedente máximo de un embalse  $\Delta w_e^{\max}$ . Es la suma de los gastos preferidos de las unidades asociadas al embalse, que en algún intervalo están tentativamente consideradas como fuera de operación, más, el volumen final máximo del embalse, menos, el volumen final en la solución del "Problema Aproximado". En ningún paso del proceso el volumen excedente del embalse debe ser mayor que el excedente máximo. Si esto ocurriera, se ocasionaría el que las unidades coordinables se desviarán forzosamente de sus gastos preferidos, y hasta se podría llegar a la infactibilidad.

- Volumen excedente mínimo de un embalse  $\Delta w_e^{\min}$ . Es el volumen final mínimo, menos, el volumen final en la solución del "Problema Aproximado", menos, la suma de los gastos preferidos de las unidades asociadas al embalse que en algún intervalo están tentativamente en operación. En ningún paso del proceso el volumen excedente del embalse debe ser menor que el excedente mínimo. Si esto ocurriera, las consecuencias serían similares a las mencionadas para el excedente máximo.

## 5.1 DETERMINACIÓN DE UNA ASIGNACIÓN INICIAL.

Por medio de este proceso quedan con una asignación definitiva un gran número de unidades, y con una asignación tentativa, cuando más, una unidad por planta e intervalo. Entre las unidades que resultan con asignación definitiva están, por supuesto, las unidades no-disponibles y las no-asignables en los intervalos que corresponda. De las unidades asignables, las declaradas coordinables tienen preferencia para ser puestas en operación. Se decide la asignación de las unidades de cada planta en orden cronológico, empezando con el intervalo uno. Para un intervalo y una planta dadas se hacen las siguientes consideraciones:

- Si el gasto filtrado de la planta es menor que el gasto preferido estando en operación sólo las unidades no-asignables, ya no se intentará poner en operación más unidades; en este caso, todas las unidades de la planta quedan con asignación definitiva.
- Si el caso no es el del inciso anterior, se empieza a poner en operación unidades asignables-coordinables hasta que se terminen, o bien, hasta que el gasto preferido de la planta con la última unidad considerada en operación sea mayor que el gasto filtrado.
- Si en el proceso del inciso anterior se terminan las unidades asignables-coordinables, se procederá a poner en operación unidades asignables-no-coordinables, si estas también se ago-

tan, el resultado es que todas las unidades disponibles de la planta quedan en operación en forma definitiva.

- Si no se llega al extremo de poner en operación todas las unidades disponibles, se deberá decidir sobre la asignación, que será tentativa, de la última unidad considerada. Las unidades que ya no se consideraron, quedarán fuera de operación en forma definitiva; mientras que las anteriores a la última, quedarán en operación también en forma definitiva.
- La decisión tentativa, que en algún caso ha de tomarse, será a favor de que la unidad quede en operación, si el valor relativo del gasto filtrado es mayor o igual que el límite de decisión. El valor del límite de decisión será:  $\eta_4$ , si el intervalo considerado es el número uno;  $\eta_4 - \eta_5$ , si la unidad está en operación en el intervalo anterior; y  $\eta_4 + \eta_5$ , si la unidad no está en operación en el intervalo anterior.

El procedimiento 5.1.1 describe en forma detallada el proceso de asignación inicial:

## PROC. 5.1.1 "ASIGNACIÓN INICIAL"

1. Sea  $q_{pi}^{pa}$ , el gasto de la planta  $p$  en el intervalo  $i$ , que resulta al resolver el "Problema Aproximado". Se filtra la solución del "Problema Aproximado" para cada una de las plantas, como sigue:

$$q_{pi}^{fil} + \eta_0 q_{pi}^{pa} + \eta_1 ( q_{pi-1}^{pa} + q_{pi+1}^{pa} ) +$$

$$\eta_2 ( q_{pi-2}^{pa} + q_{pi+2}^{pa} ); \text{ para: } i=3, \dots, I-2$$

$$q_{p1}^{fil} + ( \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 ) q_{p1}^{pa} + \eta_1 q_{p2}^{pa} + \eta_2 q_{p3}^{pa}$$

$$q_{p2}^{fil} + ( \eta_0 + \eta_2 ) q_{p2}^{pa} + \eta_1 ( q_{p1}^{pa} + q_{p3}^{pa} ) + \eta_2 q_{p4}^{pa}$$

$$q_{pI-1}^{fil} + ( \eta_0 + \eta_2 ) q_{pI-1}^{pa} + \eta_1 ( q_{pI-2}^{pa} + q_{pI}^{pa} ) + \eta_2 q_{pI-3}^{pa}$$

$$q_{pI}^{fil} + ( \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 ) q_{pI}^{pa} + \eta_1 q_{pI-1}^{pa} + \eta_2 q_{pI-2}^{pa}$$

2. Sea  $w_{ei}^{pa}$ , el volumen almacenado en el embalse  $e$  al inicio del intervalo  $i$ , que resulta al resolver el "Problema Aproximado". Se determina la altura bruta a la que operarán las unidades de cada planta en cada intervalo:

$$h_{pi}^{bru} + \alpha_e ( w_{ei}^{pa} ) - \beta_{li} ( w_{ji}^{pa}, q_{ki}^{fil} ); \text{ para toda: } i, p.$$

$$\text{con: } l/p \in P_p, e/l \in L_e^d, j/l \in L_j^c, k \in P_p.$$

continúa...

## PROC. 5.1.1 ( continuación )

3. Determinése el gasto preferido para cada una de las unidades coordinables en cada intervalo, como sigue:

$$\xi_{ui}^{pre} \leftarrow \max \{ \min \{ \xi_{ui}^{max}, \eta_3 \xi_u^* ( \eta_{pi}^{bru} ) \}, \xi_{ui}^{min} \}$$

para toda u coordinable en el intervalo i.

4. En el caso de las no-coordinables, el gasto preferido es:

$$\xi_{ui}^{pre} \leftarrow \xi_{ui}^{max}; \text{ para toda u no-coordinable en el intervalo i}$$

5. Inicialmente se supone que ninguna unidad estará en operación:

$$a_{ui} \leftarrow 0; \text{ para toda u, y toda i.}$$

6. El estado de las unidades no-asignables obliga a que estén en operación:

$$a_{ui} \leftarrow 1; \text{ para toda u no-asignable en el intervalo i,}$$

para toda i.

7. Para:  $v=1, \dots, V$ ; y para cada:  $e \in E_v$ ; hágase lo siguiente:

continúa...

## PROC. 5.1.1 ( continuación )

- a. Iniciar el volumen excedente y las cotas inferior y superior al volumen excedente que garantizan disminuirlo a la tolerancia permitida:

$$\Delta w_e^{exc} \leftarrow 0$$

$$\Delta w_e^{max} \leftarrow W_{eI+1} + \Delta W_e - w_{eI+1}^{pa}$$

$$\Delta w_e^{min} \leftarrow W_{eI+1} - \Delta W_e - w_{eI+1}^{pa}$$

- b. Para cada:  $i=1, \dots, I$ ; cada  $l \in L_e^d$ ; y cada:  $p \in P_l$ ; hágase lo siguiente:

1. Fórmense los conjuntos  $U_p^{aco}$  y  $U_p^{anc}$ , el primero con las unidades de la planta  $p$  que son asignables-coordinables en el intervalo  $i$ ; el segundo, con las unidades de la planta  $p$  que son asignables-no-coordinables en el intervalo  $i$ .
2. Determinar el gasto preferido para la planta con la asignación presente:

$$q_{pi}^{pre} \leftarrow \sum_{u \in U_p} a_{ui} \epsilon_{ui}^{pre}$$

continúa...



## PROC. 5.1.1 ( continuación )

3. Si  $q_{pi}^{pre} > q_{pi}^{fil}$

- a. Sólo estarán en operación las unidades no-asignables. La asignación para esta planta en este intervalo es definitiva, y se indica anulando un indicador:

$$\zeta_{pi} = 0$$

- b. Determinar la generación de la planta en el intervalo considerado, suponiendo que las unidades asignadas para estar en operación turbinan su gasto preferido:

$$h_{pi} = \sum_{u \in U_p} a_{ui} \gamma_u ( \xi_{ui}^{pre}, n_{pi}^{bru} )$$

4. Si  $q_{pi}^{pre} \leq q_{pi}^{fil}$  y  $|U_p^{aco}| \neq 0$ , se pondrán en operación unidades asignables-coordinables:

- a. Ejecútase el procedimiento 5.1.1.1, en el cual  $U^a + U_p^{aco}$  ( este procedimiento pone en operación unidades del conjunto  $U^a$  mientras:  $q_{pi}^{pre} \leq q_{pi}^{fil}$  y  $|U^a| \neq 0$ ; por lo cual, modifica, entre otras variables, a  $q_{pi}^{pre}$  ).

continúa...

## PROC. 5.1.1 ( continuación )

5. Si aún:  $q_{pi}^{pre} \leq q_{pi}^{fil}$ , se pondrán en operación unidades asignables-no-coordinables:

a. Ejecútese el proceso 5.1.1.1 en el cual

$$U^a + U_p^{anc}$$

6. Si aún:  $q_{pi}^{pre} \leq q_{pi}^{fil}$ ; entonces:

a. Todas las unidades disponibles de la planta estarán en operación en el intervalo considerado, esta es una decisión definitiva y se indica como sigue:

$$\zeta_{pi} = 0$$

b. Determinar la generación de la planta en el intervalo considerado, suponiendo que las unidades en operación turbinarán su gasto preferido:

$$h_{pi} = \sum_{u \in U_p} a_{ui} \gamma_u ( \zeta_{ui}^{pre}, n_{pi}^{bru} )$$

8. Fin del procedimiento.

## PROC. 5.1.1.1 "PUESTA EN OPERACIÓN DE UNIDADES"

1. Sea  $u$  alguna unidad de  $U^a$ , póngase en operación en el intervalo considerado  $i$ :

$$a_{ui} \leftarrow 1$$

2. Eliminar la unidad  $u$  del conjunto  $U^a$ :

$$U^a \leftarrow U^a - \{u\}$$

3. Actualizar el gasto preferido para la planta:

$$q_{pi}^{pre} \leftarrow q_{pi}^{pre} + \xi_{ui}^{pre}$$

4. Si  $q_{pi}^{pre} \leq q_{pi}^{fil}$  y  $|U^a| \neq 0$ ; retornar al paso 1.

5. Si  $q_{pi}^{pre} > q_{pi}^{fil}$

- a. La unidad considerada es la última unidad que en esta planta y en este intervalo se intenta asignar; sin embargo, la decisión que se tome en el proceso inmediato no es definitiva y se indica de la siguiente forma:

$$\zeta_{pi} \leftarrow u$$

- b. Calcular la generación de la planta con la asignación presente:

continúa...

## PROC. 5.1.1.1 ( continuación )

$$h_{pi} + \sum_{u \in U_p} a_{ui} \gamma_u ( \xi_{ui}, n_{pi}^{bru} )$$

c. Calcúlese el valor relativo del gasto filtrado:

$$q^{rel} = \frac{q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre}}{\xi_{ui}^{pre}} + 1$$

d. Si (  $q^{rel} < \eta_4 + \eta_5$  y  $a_{ui-1} = 0$ , con  $i \neq 1$  ) ó

(  $q^{rel} < \eta_4$  e  $i=1$  ) ó

(  $q^{rel} < \eta_4 - \eta_5$  y  $a_{ui-1} = 1$ , con  $i \neq 1$  ); entonces:

1. No se pondrá en operación la unidad  $u$  en el intervalo  $i$ ; sin embargo, la decisión no es definitiva:

$$a_{ui} = 0$$

2. Actualizar el volumen excedente:

$$\Delta w_e^{exc} + \Delta w_e^{exc} + q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre} + \xi_{ui}^{pre}$$

3. Se incrementa la cota superior al volumen excedente, puesto que el volumen excedente podría ser reducido si se cambiara la decisión sobre la asignación de esta unidad:

$$\Delta w_e^{max} + \Delta w_e^{max} + \xi_{ui}^{pre}$$

continúa...

## PROC. 5.1.1.1 ( continuación )

e. Si (  $q^{rel} \geq \eta_4 + \eta_5$  y  $a_{ui-1} = 0$ , con  $i \neq 1$  ) ó  
 (  $q^{rel} \geq \eta_4$  e  $i=1$  ) ó  
 (  $q^{rel} \geq \eta_4 - \eta_5$  y  $a_{ui-1} = 1$ , con  $i \neq 1$  ), entonces:

1. Se mantendrá la decisión ( aunque no en forma definitiva ) de tener en operación a la unidad; si posteriormente se cambiara la decisión, el volumen excedente podría ser disminuido, es por esto que, la cota mínima al volumen excedente se hace más negativa:

$$\Delta w_e^{min} + \Delta w_e^{min} - \xi_{ui}^{pre}$$

2. Actualizar el volumen excedente:

$$\Delta w_e^{exc} + \Delta w_e^{exc} + q_p^{fil} - q_{pi}^{pre}$$

6. Fin del procedimiento.

## 5.2 PREVISIÓN DE VIOLACIONES A LOS LÍMITES DE GENERACIÓN DE LOS GRUPOS.

Mediante este proceso se encuentran las unidades con asignación tentativa, que deben ponerse en paro definitivamente, para evitar violaciones a los límites de generación de los grupos.

Primero, se calculan las generaciones de las plantas considerando en operación a todas las unidades, excepto aquéllas cuya asignación definitiva indica que estarán fuera de operación. Enseguida, se calcula la magnitud de la violación en cada grupo en por unidad de su límite de generación.

El grupo que en algún intervalo tenga la máxima violación relativa es el elegido para intentar disminuir su violación, excepto cuando el grupo esté temporalmente "impedido". Esta cualidad la puede adquirir un grupo cuando su violación sólo puede reducirse poniendo en paro alguna unidad que, en la asignación actual, está en operación tanto en el intervalo considerado como en los intervalos anterior y posterior.

Una vez elegido un grupo, debe elegirse una unidad de éste con asignación tentativa que pueda ser puesta fuera de operación. Para que una unidad pueda ser puesta en paro, debe verificarse que el volumen excedente del embalse asociado no vaya a ser mayor que el volumen excedente máximo. La unidad seleccionada, entre las que tienen calidad de candidato, será aquélla pa-

ra la cual, el valor relativo del gasto filtrado de la planta asociada, menos, el límite de decisión, sea mínimo. Hecho lo anterior, se reduce la violación del grupo considerado según la generación de la unidad seleccionada.

En forma recursiva se selecciona otro grupo y se aplica el mismo procedimiento descrito. Los detalles del proceso completo se muestran en el procedimiento 5.1.2.

PROC. 5.1.2 "PREVISIÓN A LA VIOLACIÓN DE LÍMITES DE GRUPO"

1. Fórmese el conjunto de los grupos sin impedimento para poner fuera de operación alguna unidad:

$$O^{\text{sin}} = \{ o \mid o \in O_s, \text{ para todo } s \in S_i, \text{ para todo } i=1, \dots, I \}$$

2. Calcúlense las violaciones en por unidad del límite del grupo correspondiente:

$$\Delta t_o + (-T_o + \sum_{p \in P_o} h_{pi}) / T_o; \text{ para todo: } o \in O_s, s \in S_i,$$

$$\text{con: } i=1, \dots, I$$

3. Iníciase la máxima violación:

$$\Delta t^{\text{max}} \leftarrow \infty$$

continúa...

## PROC. 5.1.2. ( continuación )

4. Mientras  $\Delta t^{\max} > 0$  y  $|O^{\sin}| > 0$ , hágase lo siguiente:

a. Sean  $i, s$  y  $o$ , tales que

$$\Delta t_o = \max \{ \Delta t_m, \text{ con: } m \in O_s; s \in S_i; i=1, \dots, I; m \in O^{\sin} \}$$

b. Actualícese la máxima violación:

$$\Delta t^{\max} \leftarrow \Delta t_o$$

c. Si  $\Delta t^{\max} > 0$

1. Búsquese la planta  $p \in P_o$  cuya unidad con asignación temporal es el mejor candidato a quedar fuera de operación en forma definitiva, asimismo, determínese ( $\Delta q_p$ ) la diferencia entre el valor relativo del gasto filtrado y el límite de decisión; para ésto debe seguirse el procedimiento 5.1.2.1.

2. Sean:  $u \leftarrow \zeta_{pi}$  y  $e$  tal que  $l \in L_e^d$  con  $l/p \in P_o$

3. Si  $\Delta q_p = \infty$  y  $o \in O^{\sin}$

a. Como la violación ya no puede anularse dejando fuera de operación en forma definitiva unidades con asignación tentativa para este grupo, se anula la violación para que el grupo 'o' ya no

continúa...



## PROC. 5.1.2 ( continuación )

sea considerado como candidato:

$$\Delta t_0 \neq 0$$

4. Si  $\Delta q_p \neq \infty$

a. Se incluyen en  $O^{\text{sin}}$  todos los grupos asociados a las islas del intervalo considerado y las de los intervalos adyacentes:

1. Si  $i \neq 1$ , e  $i \neq I$ :

$$O^{\text{sin}} \leftarrow O^{\text{sin}} \cup \{k | k \in O_m; \forall m \in (S_{i-1} \cup S_i \cup S_{i+1})\}$$

2. Si  $i = 1$ :

$$O^{\text{sin}} \leftarrow O^{\text{sin}} \cup \{k | k \in O_m; \forall m \in (S_1 \cup S_2)\}$$

3. Si  $i = I$ :

$$O^{\text{sin}} \leftarrow O^{\text{sin}} \cup \{k | k \in O_m; \forall m \in (S_{I-1} \cup S_I)\}$$

b. Indicar que todas las unidades de la planta considerada quedan con asignación definitiva:

$$\zeta_{pi} \neq 0$$

continúa...

## PROC. 5.1.2 ( continuación )

c. Actualizar la generación de la planta:

$$h_{pi} \leftarrow h_{pi} - \gamma ( \xi_{ui}^{pre} , n_{pi}^{bru} )$$

d. Actualizar la violación del grupo:

$$\Delta t_o \leftarrow \Delta t_o - \frac{\gamma ( \xi_{ui}^{pre} , n_{pi}^{bru} )}{T_o}$$

e. Si la asignación tentativa de la unidad  $u$  indicaba que no iba a estar en operación, esto es, si  $a_{ui} = 0$ , entonces, se actualiza la cota superior al volumen excedente en el embalse:

$$\Delta w_e^{max} \leftarrow \Delta w_e^{max} - \xi_{ui}^{pre}$$

f. Si la asignación tentativa de la unidad  $u$  indicaba que estaría en operación, esto es, si  $a_{ui} = 1$ , entonces:

1. La unidad debe quedar fuera de operación:

$$a_{ui} \leftarrow 0$$

2. Se actualiza el volumen excedente del embalse asociado:

$$\Delta w_e^{exc} \leftarrow \Delta w_e^{exc} + \xi_{ui}^{pre}$$

continúa...

## PROC. 5.1.2 ( continuación )

3. Se actualiza la cota inferior al volumen excedente del embalse considerado:

$$\Delta w_e^{\min} + \Delta w_e^{\min} + \xi_{ui}^{\text{pre}}$$

5. Fin del procedimiento.

PROC. 5.1.2.1 "DETERMINACIÓN DE LA PLANTA EN LA QUE UNA UNIDAD SERÁ PUESTA EN PARO PARA EVITAR VIOLACIÓN EN SU GRUPO"

1. Sea 'o' el índice del grupo considerado. Para toda  $p \in P_o$ , hágase lo siguiente:

a.  $u + \zeta_{pi}$

b. Sea 'e' el índice del embalse del cual la planta p toma agua, esto es:

$$e/\&eL_e^d \text{ y } \&/p \in P_e$$

c. Si la planta considerada tiene una unidad con asignación tentativa, y si al poner fuera de operación la

continúa...

## PROC. 5.1.2.1 ( continuación )

unidad en forma definitiva no se produce violación a la cota final del embalse asociado, o sea, si  $u \neq 0$  y  $\Delta w_e^{exc} \leq \Delta w_e^{max} - \xi_{ui}^{pre}$ ; entonces:

1. Hágase:

$$\Delta q_p \leftarrow \frac{q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre}}{\xi_{ui}^{pre}} + 1 - \eta_4$$

2. Si  $i \neq 1$ , e  $i \neq I$ ; entonces:

a. Si  $a_{ui-1} = 0$ , y  $a_{ui+1} = 0$ ; entonces:

$$1. \Delta q_p \leftarrow \Delta q_p - \eta_5$$

b. Si  $a_{ui-1} = 1$ ,  $a_{ui} = 0$ , y  $a_{ui+1} = 1$ ; entonces:

$$1. \Delta q_p \leftarrow \Delta q_p + \eta_5$$

c. Si  $a_{ui-1} = 1$ ,  $a_{ui} = 1$ , y  $a_{ui+1} = 1$ ; entonces:

1. Se considerará al grupo como temporalmente impedido para dejar fuera de operación alguna unidad con asignación tentativa:

$$O^{sin} \leftarrow O^{sin} - \{o\}$$

$$2. \Delta q_p \leftarrow \infty$$

continúa...

## PROC. 5.1.2.1 ( continuación )

d. Si  $u \neq 0$ , y  $\Delta w_e^{exc} > \Delta w_e^{max} - \xi_{ui}^{pre}$ ; entonces:

$$1. \Delta q_p \leftarrow \infty$$

e. Si  $u = 0$ ; entonces:

$$\Delta q_p \leftarrow \infty$$

2. Elíjase la planta  $p$  cuya unidad con asignación tentativa será puesta fuera de operación en forma definitiva:

$$p \text{ es tal que: } \Delta q_p = \min_{m \in P_0} \{ \Delta q_m \}$$

3. Fin del procedimiento.

### 5.3 PREVISIÓN DE CORTES DE CARGA.

Mediante este proceso se encuentran las unidades con asignación tentativa, que deben ponerse en operación en forma definitiva, para evitar cortes de carga.

Inicialmente, se calculan las generaciones de las plantas considerando fuera de operación todas las unidades, excepto aquéllas cuya asignación definitiva indica que estarán en operación. Se calcula enseguida la magnitud del corte de carga de cada isla-intervalo en por unidad de su demanda. También se calcula la holgura existente en cada grupo en los diversos intervalos.

La isla-intervalo con el máximo corte relativo es la elegida para intentar disminuir su violación, excepto cuando la isla-intervalo esté temporalmente "impedida". Esta cualidad se puede adquirir cuando el corte de carga sólo puede reducirse poniendo en operación alguna unidad que, en la asignación actual, está en paro tanto en el intervalo considerado como en los intervalos anterior y posterior.

Una vez elegida una isla-intervalo, debe seleccionarse una unidad de la isla con asignación tentativa y que pueda ser puesta en operación. Para que una unidad pueda ser considerada como candidato, debe verificarse que en el grupo al que pertenece hay la holgura suficiente, y que el volumen excedente en el embalse no vaya a ser menor que el volumen excedente mínimo. La unidad seleccionada entre las que tienen calidad de candidato

será aquélla con la mayor diferencia del valor relativo del gas to filtrado de la planta asociada, menos, el límite de decisión. La unidad elegida se pone en operación en forma definitiva. Se reduce el corte de carga de la isla-intervalo según la generación de la unidad; también, se actualiza el valor de la holgura del grupo afectado. Se selecciona otra isla-intervalo y se aplica el mismo procedimiento. Los detalles de este proceso se encuentran en el procedimiento 5.1.3.

PROC. 5.1.3 "PREVISIÓN DE CORTES DE CARGA"

1. Fórmese el conjunto de islas-intervalo sin impedimento para poner en operación alguna unidad con asignación tentativa:

$$S^{\text{sin}} \leftarrow \{ s \mid s \in S_i, \text{ con } i=1, \dots, I \}$$

2. Para toda  $p$  y toda  $i=1, \dots, I$ ; hágase lo siguiente:

a. Si  $\zeta_{pi} \neq 0$ ; entonces:

1.  $u \leftarrow \zeta_{pi}$

2.  $\Delta h_{pi} \leftarrow \gamma_u ( \xi_{ui}^{\text{pre}}, n_{pi}^{\text{bru}} )$

continúa...

## PROC. 5.1.3 ( continuación )

b. Si  $\zeta_{pi} = 0$ ; entonces:

$$1. \Delta h_{pi} \leftarrow 0$$

3. Calcúlese la holgura disponible para todo grupo  $o \in O_s$ , para toda  $s \in S_i$  y todo  $i=1, \dots, I$ ; suponiendo que las unidades sin asignación definitiva no estarán operando, como sigue:

$$\Delta h_o^{hol} \leftarrow T_o - \min \{ T_o, \sum_{p \in P_o} ( h_{pi} - \Delta h_{pi} ) \}$$

4. Calcúlese el corte de carga en por unidad de la demanda de cada isla-intervalo  $s \in S_i$ , para toda  $i=1, \dots, I$ ; suponiendo que las unidades con asignación tentativa no estarán en operación:

$$x_s \leftarrow \hat{D}_s - \bar{G}_s + \sum_{o \in O_s} \{ ( \Delta t_o^{hol} - T_o ) + \\ + \sum_{p \in P_o} v_{ps}^h ( h_{pi} - \Delta h_{pi} - H_{pi}^0 ) \}$$

5. Iníciase el corte máximo:

$$\Delta x^{\max} \leftarrow \infty$$

6. Mientras  $\Delta x^{\max} > 0$  y  $|S^{\sin}| > 0$ , hágase lo siguiente:

continúa...



## PROC. 5.1.3 ( continuación )

a. Sea  $s$  tal que:  $\Delta x_s = \max_{k \in S^{\text{sin}}} \{ \Delta x_k \}$

b. Sea  $i$  tal que  $s \in S_i$

c. Actualícese el corte máximo:

$$\Delta x^{\text{max}} \leftarrow \Delta x_s$$

d. Si  $\Delta x^{\text{max}} > 0$ ; hágase lo siguiente:

1. Búsquese la planta  $p \in P_0$  con  $o \in O_s$ , cuya unidad con asignación tentativa en el intervalo  $i$  es el mejor candidato a ser puesta en operación en forma definitiva, asimismo, determínese  $(\Delta q_p)$ : la diferencia entre el valor relativo del gasto filtrado y el límite de decisión. Para ésto, ejecútese el procedimiento 5.1.3.1.

2. Sean:  $u \leftarrow \tau_{pi}$ ;  $o/p \in P_0$ ;  $e/l \in L_e^d$  con  $l/p \in P_l$

3. Si  $\Delta q_p \neq -\infty$ ; entonces:

a. Se incluyen en  $S^{\text{sin}}$  las islas-intervalo asociadas al intervalo considerado y a los intervalos adyacentes:

continúa...

## PROC. 5.1.3 ( continuación )

$$S^{\text{sin}} \leftarrow S^{\text{sin}} \cup S_1 \cup S_2; \text{ si } i = 1$$

$$S^{\text{sin}} \leftarrow S^{\text{sin}} \cup S_{i-1} \cup S_i \cup S_{i+1}; \text{ si } 1 < i < I$$

$$S^{\text{sin}} \leftarrow S^{\text{sin}} \cup S_{I-1} \cup S_I; \text{ si } i = I$$

- b. Indicar que la unidad  $u$  queda con asignación definitiva en el intervalo  $i$ :

$$\zeta_{pi} \leftarrow 0 .$$

- c. Actualizar la holgura del grupo afectado:

$$\Delta t_o^{\text{hol}} \leftarrow \Delta t_o^{\text{hol}} - \Delta h_{pi}$$

- d. Actualizar el posible corte de carga:

$$\Delta x_{s\dots} \leftarrow \Delta x_s + (V_{ps}^h - 1) \Delta h_{pi}$$

- e. Si temporalmente, la unidad no estaba considerada en operación; esto es, si  $a_{ui} = 0$ ; entonces:

1. La unidad se pone en operación:

$$a_{ui} \leftarrow 1$$

continúa...

## PROC. 5.1.3 ( continuación )

2. Se actualiza el volumen excedente del embalse asociado:

$$\Delta w_e^{exc} \leftarrow \Delta w_e^{exc} - \xi_{ui}^{pre}$$

3. Se actualiza la cota superior al volumen excedente del embalse afectado:

$$\Delta w_e^{max} \leftarrow \Delta w_e^{max} - \xi_{ui}^{pre}$$

- f. Si tentativamente, la unidad ya estaba considerada en operación; esto es, si  $a_{ui} = 1$ ; entonces:

1. Se actualiza la cota inferior al volumen excedente del embalse considerado:

$$\Delta w_e^{min} \leftarrow \Delta w_e^{min} + \xi_{ui}^{pre}$$

4. Si  $\Delta q_p = -\infty$  y  $s \in S^{sin}$ ; entonces:

- a. Como no hay unidad que pueda ponerse en operación en forma definitiva, se anula el posible corte en la isla-intervalo, para que ya no se intente eliminarlo:

$$\Delta x_s \leftarrow 0$$

7. Fin del procedimiento.

PROC. 5.1.3.1 " DETERMINACIÓN DE LA PLANTA DE LA CUAL  
UNA UNIDAD SERÁ PUESTA EN OPERACIÓN  
PARA EVITAR UN POSIBLE CORTE DE CARGA"

1. Sea  $s$  el índice de la isla-intervalo considerada e  $i$  el del intervalo asociado. Para todo grupo  $o \in O_s$  y toda planta  $p \in P_o$ , hágase lo siguiente:

a.  $u + \zeta_{pi}$

b. Sea  $e$  el índice del embalse del cual la planta  $p$  toma agua, o sea:  $e/l \in L_e^d$  con  $l/p \in P_l$

c. Si la planta considerada tiene una unidad con asignación tentativa, y si al ponerla en operación en forma definitiva no se produce violación a la cota final del embalse asociado, y además, si la holgura del grupo es suficiente; esto es, si  $u \neq 0$  y

$\Delta w_e^{exc} \geq \Delta w_e^{min} + \xi_{ui}^{pre}$  y  $\Delta t_o^{hol} \geq \Delta h_{pi}$ , entonces:

1. Hágase:

$$\Delta q_p + \frac{q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre}}{\xi_{ui}^{pre}} + 1 - \eta_4$$

2. Si  $i \neq 1$ , e  $i \neq I$ ; entonces:

a. Si  $a_{ui-1} = 0$ ,  $a_{ui} = 1$ , y  $a_{ui+1} = 0$

continúa...

## PROC. 5.1.3.1 ( continuación )

$$1. \Delta q_p \leftarrow \Delta q_p - \eta_5$$

$$b. \text{ Si } a_{ui-1} = 0, a_{ui} = 0 \text{ y } a_{ui+1} = 0$$

$$1. \Delta q_p \leftarrow -\infty$$

2. La isla-intervalo s se considerará temporalmente impedida:

$$s^{\text{sin}} \leftarrow s^{\text{sin}} - \{s\}$$

$$c. \text{ Si } a_{ui-1} = 1 \text{ y } a_{ui+1} = 1; \text{ entonces:}$$

$$1. \Delta q_p \leftarrow \Delta q_p + \eta_5$$

$$d. \text{ Si } u \neq 0 \text{ y } ( \Delta w_e^{\text{exc}} < \Delta w_e^{\text{min}} + \xi_{ui}^{\text{pre}} \text{ ó } \Delta t_o^{\text{hol}} < \Delta h_{pi} );$$

entonces:

$$1. \Delta q_p \leftarrow -\infty$$

$$e. \text{ Si } u = 0; \text{ entonces:}$$

$$1. \Delta q_p \leftarrow -\infty$$

$$2. \text{ Sea } p \text{ tal que: } \Delta q_p = \max_{k \in P_o, \text{ con } o \in O_s} \{ \Delta q_k \}$$

3. Fin del procedimiento.

#### 5.4 SATISFACCIÓN DE LA COTA FINAL EN LOS EMBALSES.

En este proceso se reduce la magnitud del volumen excedente en los embalses a valores tolerables. El límite superior es igual a la diferencia del volumen final máximo del embalse, menos, el volumen final en la solución del "Problema Aproximado". El límite inferior es igual a la diferencia del volumen final mínimo del embalse, menos, el volumen final en la solución del "Problema Aproximado".

Si el volumen excedente es mayor que el límite superior, se pondrán en operación unidades asociadas al embalse, que tentativamente estaban en paro. Por el contrario, si el volumen excedente es menor que el límite inferior, se pondrán en paro unidades asociadas al embalse que tentativamente estaban en operación. En cualquier caso, la selección de la unidad que cambiará su asignación está basada en la comparación de las diferencias del valor relativo del gasto filtrado, menos, el correspondiente límite de decisión.

Cuando se intenta poner en operación unidades, se toma aquella con la máxima diferencia; mientras que, cuando se intenta poner en paro unidades, se toma aquella con la mínima diferencia.

Siempre es posible reducir el excedente, puesto que en los procesos anteriores no se permitió tomar decisiones definitivas que pudieran evitarlo. Los detalles de este proceso se presentan en el procedimiento 5.1.4.

PROC. 5.1.4 "REDUCCIÓN DE LA MAGNITUD DEL VOLUMEN EXCEDENTE"

1. Para todo  $v=1, \dots, V$  y para cada  $e \in E_v$ ; hágase lo siguiente:

a. Sea  $\Delta q \leftarrow 0$

b. Mientras el volumen excedente no tenga una magnitud tolerable y exista la posibilidad de reducirla; esto es, mientras ( $\Delta w_e^{exc} < W_{eI+1} + \Delta W_e - w_{eI+1}^{pa}$ ,  $\delta$ ,  $\Delta w_e^{exc} < W_{eI+1} - \Delta W_e - w_{eI+1}^{pa}$ ) y ( $-\infty < \Delta q < \infty$ ); hágase lo siguiente:

1. Si el volumen excedente es mayor que el límite superior; esto es, si  $\Delta w_e^{exc} > W_{eI+1} + \Delta W_e - w_{eI+1}^{pa}$ ; entonces:

a. Para cada  $p \in P_\ell$  con  $\ell \in L_e^d$ , y para cada  $i=1, \dots, I$ ; hágase lo siguiente:

1. Sea  $u \leftarrow \tau_{pi}$

2. Si  $u = 0$ , entonces:

a.  $\Delta q_{pi} \leftarrow -\infty$

3. Si  $u \neq 0$ , entonces:

continúa...

## PROC. 5.1.4 ( continuación )

a. Si  $a_{ui} = 1$ , entonces:

$$1. \Delta q_{pi} \leftarrow -\infty$$

b. Si  $a_{ui} = 0$ , entonces:

$$1. \Delta q_{pi} \leftarrow \frac{q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre}}{\xi_{ui}^{pre}} + 1 - \eta_4$$

2. Si  $a_{ui-1} = 0$  y  $a_{ui+1} = 0$ ; con  $1 < i < I$

$$a. \Delta q_{pi} \leftarrow \Delta q_{pi} - \eta_5$$

3. Si  $a_{ui-1} = 1$  y  $a_{ui+1} = 1$ ; con  $1 < i < I$

$$a. \Delta q_{pi} \leftarrow \Delta q_{pi} + \eta_5$$

b. Sean  $p, i$ , tales que:

$$\Delta q_{pi} \leftarrow \max_{\substack{k \in P, \\ m=1, \dots, I}} \max_{l \in L}^d \{ \Delta q_{km} \}$$

c.  $\Delta q \leftarrow \Delta q_{pi}$

d. Si  $\Delta q \neq -\infty$ , entonces:

$$1. \text{Sea } u \leftarrow \zeta_{pi}$$

$$2. \Delta w_e^{exc} \leftarrow \Delta w_e^{exc} - \xi_{ui}^{pre}$$

continúa...



## PROC. 5.1.4 ( continuación )

$$3. a_{ui} + 1$$

2. Si el volumen excedente es menor que el límite inferior, esto es, si  $\Delta w_e^{exc} < W_{eI+1} - \Delta W_e - w_{eI+1}^{pa}$ ; entonces:

a. Para cada  $p \in P_2$  con  $l \in L_e^d$  y para cada  $i=1, \dots, I$ ; hágase lo siguiente:

$$1. \text{ Sea } u \leftarrow \zeta_{pi}$$

2. Si  $u = 0$ , entonces:

$$a. \Delta q_{pi} \leftarrow \infty$$

3. Si  $u \neq 0$ , entonces:

a. Si  $a_{ui} = 0$ , entonces:

$$1. \Delta q_{pi} \leftarrow \infty$$

b. Si  $a_{ui} = 1$ , entonces:

$$1. \Delta q_{pi} \leftarrow \frac{q_{pi}^{fil} - q_{pi}^{pre}}{\zeta_{ui}^{pre}} + 1 - \eta_4$$

2. Si  $a_{ui-1} = 0$  y  $a_{ui+1} = 0$ ; con  $1 < i < I$

continúa....

## PROC. 5.1.4 ( continuaci3n )

$$a. \Delta q_{pi} \leftarrow \Delta q_{pi} - \eta_5$$

3. Si  $a_{ui-1} = 1$  y  $a_{ui+1} = 1$ ; con  $1 < i < I$

$$a. \Delta q_{pi} \leftarrow \Delta q_{pi} + \eta_5$$

b. Sean  $p, i$ , tales que:

$$\Delta q_{pi} = \min_{\substack{k \in P, l \in L, e \\ m=1, \dots, I}}^d \{ \Delta q_{km} \}$$

$$c. \Delta q \leftarrow \Delta q_{pi}$$

d. Si  $\Delta q \neq \infty$

$$1. \text{ Sea } u \leftarrow \zeta_{pi}$$

$$2. \Delta w_e^{\text{exc}} \leftarrow \Delta w_e^{\text{exc}} + \xi_{ui}^{\text{pre}}$$

$$3. a_{ui} \leftarrow 0$$

2. Fin del proceso.

## C A P Í T U L O 6 .

CÁLCULO DE UNA COTA INFERIOR AL COSTO DE LA SOLUCIÓN  
ÓPTIMA DE PAUH.

Conocer una buena cota inferior al costo de la solución óptima es un beneficio de gran valor. Permite establecer un criterio objetivo para juzgar el desempeño de un método de solución. Si el valor de la solución que se obtiene está cercano a la cota inferior, se reafirma la confianza del diseñador en el método y ofrece una garantía a las personas que estarán en contacto con el método, aunque no hayan estado íntimamente involucrados en su desarrollo.

## 6.1 FUNDAMENTOS PARA EL CÁLCULO DE LA COTA.

El razonamiento detrás de la forma de calcular la cota es el siguiente:

- Se define un problema dual de PAUH que tenga unas variables duales convenientes.
- La teoría indica que la función objetivo del problema dual, evaluada en un punto dual factible, es una cota inferior al valor óptimo de la función objetivo del problema primal.
- El problema dual se forma de manera que el punto dual factible se obtenga directamente de alguna de las iteraciones de los procesos que resuelven el "Problema Aproximado" o el "Problema de Coordinación". Se escogió la última iteración del proceso que resuelve el "Problema Aproximado" para obtener el punto dual factible.
- Para evaluar la función dual se requiere calcular el mínimo del Lagrangiano sujeto a ciertas restricciones.
- Debido a que obtener este mínimo es casi tan difícil como resolver el problema PAUH, se redefinen algunos términos del Lagrangiano para simplificar la obtención del mínimo requerido.
- La redefinición se hace de manera que se garantiza que el

valor así obtenido sea menor o igual al que se buscaba, por lo cual, este valor también será una cota inferior al valor óptimo de la función objetivo del problema PAUH.

A continuación se presenta el desarrollo matemático, que finalmente, establecerá la forma de calcular la cota deseada.

La formulación compacta de PAUH es:

$$\text{(PAUH) } \underset{\bar{x}, \bar{h}, \bar{y}}{\text{minimizar:}} \quad F(\bar{x})$$

sujeto a:

$$J\bar{x} = \bar{j}(\bar{h})$$

$$K\bar{x} \leq \bar{k}(\bar{h})$$

$$M\bar{y} = \bar{m}$$

$$N\bar{y} \leq n'$$

$$\bar{h} = H'(\bar{y})$$

Se define el Lagrangiano como sigue:

$$L(\bar{x}, \bar{h}, \lambda, \mu) = F(\bar{x}) + \lambda ( \bar{j}(\bar{h}) - J\bar{x} ) + \mu ( K\bar{x} - \bar{k}(\bar{h}) )$$

con  $\bar{h}$  y  $\bar{y}$  restringidas de manera que se satisfagan:

$$M\bar{y} = \bar{m}; \quad N\bar{y} \leq n'; \quad \bar{h} = H'(\bar{y}) \quad (6.1)$$

La función dual correspondiente es:

$$\phi(\lambda, \mu) = \min_{\bar{x}, \bar{h}} F(\bar{x}) + \lambda ( \bar{j}(\bar{h}) - J\bar{x} ) + \mu ( K\bar{x} - \bar{k}(\bar{h}) )$$

$$\text{sujeto a: } M\bar{y} = \bar{m}; N\bar{y} \leq n'; \bar{h} = H'(\bar{y})$$

Los subproblemas por isla-intervalo tienen una función dual idéntica en forma, pero difiere de ésta en que  $\bar{h}$  no es variable sino constante, y no hay restricciones ( véase el apéndice B ). Si  $\lambda^a$  y  $\mu^a$  son los valores de las variables duales obtenidas al resolver los subproblemas por isla-intervalo en la última iteración del proceso que resuelve el "Problema Aproximado"; entonces, necesariamente  $\mu^a \geq 0$ , y como la región definida por las restricciones (6.1) es compacta, se concluye que  $\lambda^a$  y  $\mu^a$  definen un punto dual factible.

Haciendo  $\lambda = \lambda^a$  y  $\mu = \mu^a$ , y llamando  $\phi^a$  a  $\phi(\lambda^a, \mu^a)$ , resulta:

$$\phi^a = \min_{\bar{x}, \bar{h}} F(\bar{x}) + \lambda^a ( \bar{j}(\bar{h}) - J\bar{x} ) + \mu^a ( K\bar{x} - \bar{k}(\bar{h}) )$$

$$\text{sujeto a: } M\bar{y} = \bar{m}; N\bar{y} \leq n'; \bar{h} = H'(\bar{y})$$

Sea  $\bar{h}^a$  el valor de la generación hidroeléctrica en la solución obtenida para el "Problema Aproximado"; manipulando algebraicamente la función dual se obtiene:

$$\phi^a = \min_{\bar{x}} \{ F(\bar{x}) + \lambda^a ( \bar{j}(\bar{h}^a) - J\bar{x} ) + \mu^a ( K\bar{x} - \bar{k}(\bar{h}^a) ) \} +$$

$$\min_{\bar{h}} \{ \lambda^a ( \bar{j}(\bar{h}) - \bar{j}(\bar{h}^a) ) - \mu^a ( \bar{k}(\bar{h}) - \bar{k}(\bar{h}^a) ) \}$$

sujeto a las restricciones (6.1). La expresión:

$$\min_{\bar{x}} \{ F(\bar{x}) + \lambda^a ( \bar{j}(\bar{h}^a) - J\bar{x} ) + \mu^a ( K\bar{x} - k(\bar{h}^a) ) \}$$

es el valor óptimo de la función objetivo del problema dual asociado a los subproblemas por isla-intervalo que se resuelven en la última iteración del "Problema Aproximado", por lo cual, su valor es idéntico al de la solución obtenida para el "Problema Aproximado" y no requiere volver a calcularse. Sea  $z^a$  el valor de esta expresión. De esta manera, el valor de la función dual del problema original queda como sigue:

$$\phi^a = z^a + \min_{\bar{h}} \{ \lambda^a ( \bar{j}(\bar{h}) - \bar{j}(\bar{h}^a) ) - \mu^a ( \bar{k}(\bar{h}) - \bar{k}(\bar{h}^a) ) \}$$

sujeto a las restricciones (6.1).

Para continuar con el desarrollo se tiene que usar la notación detallada, como sigue:

$$\phi^a = z^a + \sum_{i=1}^I \sum_{s \in S_i} \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} ( - \lambda_s^a \nabla_{ps}^h + \mu_{4+2o,s}^a ) h_{pi}^a +$$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^I \sum_{s \in S_i} \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} ( \lambda_s^a \nabla_{ps}^h - \mu_{4+2o,s}^a ) h_{pi} \right\}$$

sujeto a las restricciones (2.12) a (2.25) de PAUH.

El primer conjunto de sumatorias es un número conocido, llámese  $z^b$ . Por otra parte, encontrar el mínimo que se requiere en la expresión anterior, es casi tan difícil como resolver el problema original; por esto, se harán redefiniciones, que permitan resolver rápidamente este problema, siempre asegurando que el valor así obtenido sea menor o igual al que se quería obtener.

Como  $h_{pi}$  siempre es mayor o igual que cero, cuando  $\lambda_{s,ps}^{a,h} - \mu_{4+2o,s}^a$  sea mayor que cero, se supondrá que es nulo este coeficiente, sólo para el problema de minimización. Hecho lo anterior, se tiene la libertad de simplificar el problema, siempre y cuando, se asegure que para cualquier valor factible de las variables hidráulicas, el valor que resulte para  $h_{pi}$  sea mayor o igual al que resultaría en la definición original.

La simplificación de la relación de  $h_{pi}$  respecto a las variables hidráulicas llegará hasta el grado de hacerla lineal por segmentos y únicamente dependiente del gasto. Para asegurar que esta nueva relación sobreestima el valor de  $h_{pi}$ , al definirla se sobreestimarán la altura neta a la que operan las unidades, para esto, se sobreestimarán los niveles en los embalses, se subestimarán los niveles de desfogue y las pérdidas en conductos; además, se sobreestimarán la eficiencia de las unidades suponiendo que siempre operarán a la máxima eficiencia a la altura neta sobreestimada.



## 6.2 FORMA DE CALCULAR LA COTA.

Un ejemplo aclarará la forma en que se define la relación de  $h_{pi}$  con las variables hidráulicas. Considérese una planta con tres unidades. La generación de la planta como función de su gasto se ilustra en la figura 6.1.

Los parámetros necesarios para definir esta relación y que aparecen en la figura se definen a continuación:

- $q_{pi}^{(1)}$  Es la suma de los gastos mínimos en operación de las unidades no-asignables de la planta.
- $q_{pi}^{(2)}$  Es  $q_{pi}^{(1)}$ , más, la diferencia entre el gasto máximo de la unidad 1 y el gasto mínimo que le permite su estado, es decir: cero si es asignable, o bien, su gasto mínimo en operación si es no-asignable. Si la unidad fuese no-disponible el segmento no existiría.
- $q_{pi}^{(3)}$  y  $q_{pi}^{(4)}$  se definen en forma similar, pero empleando las características de la unidad 2 y la 3 respectivamente.
- $c_1$  Es el valor de la derivada parcial de la generación respecto al gasto, de cualquiera de las unidades, evaluada en el punto de máxima eficiencia y suponiendo que está operando con una altura neta sobreestimada. La altura neta se calcula como el nivel en el embalse, menos, el nivel del desfogue, menos las pérdidas en conductos,

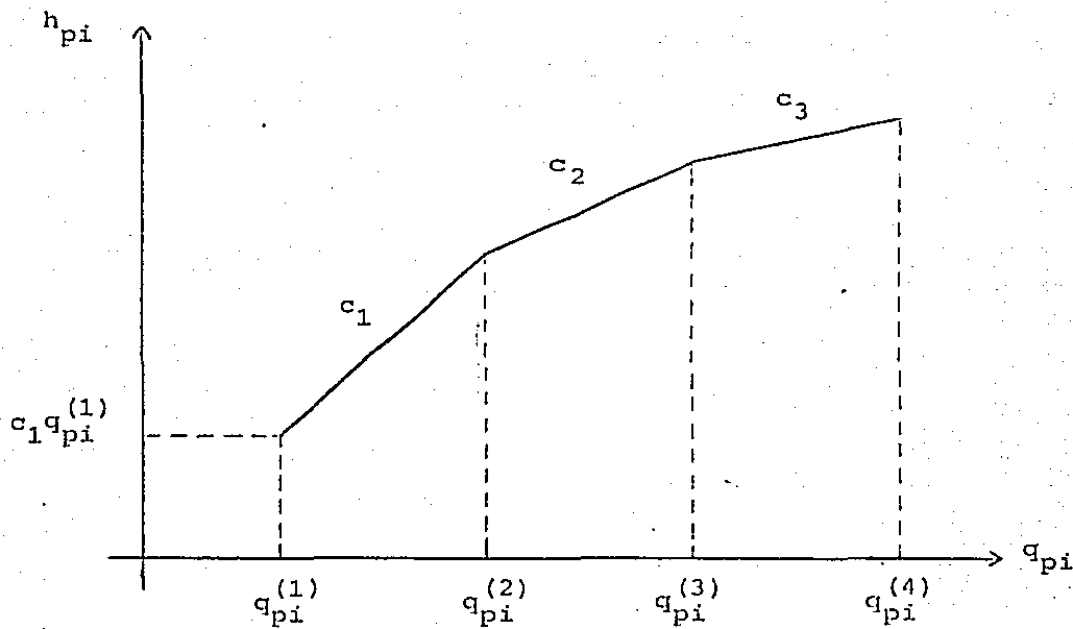


Figura 6.1 Ejemplo de la redefinición de la relación generación contra gasto por planta, empleada en el cálculo de una cota inferior al valor óptimo de la función objetivo de PAUH.

considerando:

- Un nivel en el embalse mayor o igual al máximo que puede llegar a tener en el intervalo en cuestión.
- El nivel de desfogue que resulta cuando la planta turbina el gasto  $q_{pi}^{(1)}$ . Si hay otras plantas que afecten el nivel del desfogue, se supondrá que cada una turbina la suma de los gastos mínimos en operación de sus unidades no-asignables. Si el nivel del embalse aguas abajo afecta el nivel del desfogue, se supondrá un nivel para ese embalse menor o igual que el mínimo que puede llegar a tener en el intervalo considerado.
- Las pérdidas en conductos son las que resultan cuando cada unidad turbina  $q_{pi}^{(1)} / |u_p|$ .

$c_2$  y  $c_3$  Se calculan en forma similar a  $c_1$ , cambiando  $q_{pi}^{(1)}$  por  $q_{pi}^{(2)}$  y por  $q_{pi}^{(3)}$  respectivamente. Se asegura que:

$$c_1 \geq c_2 \geq c_3.$$

Considerando la redefinición de la función de generación por planta, el problema que se resolverá es calcular  $\underline{z}$ , la cota inferior al valor óptimo de la función objetivo del problema original ( puesto que  $\underline{z} \leq \phi^a$  ) dada por:

$$\underline{z} = z^a + z^b +$$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^I \sum_{s \in S_i} \sum_{o \in O_s} \sum_{p \in P_o} (\lambda_{sps}^a h_{ps}^a - \mu_{i+2o,s}^a) h_{pi} \right\}$$

sujeto a las restricciones (2.12) a (2.19) en las que  $q_{pi}$  se substituye por la suma de las variables asociadas a los segmentos, y añadiéndose las restricciones que limitan superior e inferiormente el valor de estas variables.

El problema que resulta es un problema de Programación Lineal, cuya estructura es la de una red de transporte con reembargues, en el que se presenta el desacoplamiento absoluto por cuencas, como ocurría en los problemas PA y PC. Se distingue de estos en que por cada arco que representaba el gasto de una planta en un intervalo, habrán tantos arcos en paralelo como unidades disponibles tenga la planta en el intervalo considerado. Este problema es relativamente fácil de resolver, requiriendo un esfuerzo computacional similar al de una iteración en el proceso que resuelve el "Problema Aproximado", o bien, el "Problema de Coordinación".

## C A P Í T U L O 7 .

## APLICACIÓN DEL MÉTODO A UN PROBLEMA CONCRETO.

El algoritmo ha sido probado un gran número de veces con muy diversos conjuntos de datos. Se encuentran formalmente reportadas nueve pruebas [ 2 ] realizadas en el Instituto de Investigaciones Eléctricas. Los reportes de ellas incluyen todos los datos de entrada, resúmenes de los resultados en forma tabular y gráfica, y el análisis de estos resultados.

El ejemplo que se presenta es distinto a los ya reportados. Incluirá la totalidad de los datos de entrada, divididos en: estáticos y dinámicos. Se entiende por datos estáticos aquéllos que caracterizan el sistema hidroeléctrico y que normalmente no cambian, excepto cuando se realiza un ajuste a los modelos, o cuando se tienen que incluir los modelos de alguna ampliación en el sistema. Estos datos son los que se usaron en las pruebas [ 3 ] en el IIE, y fueron coleccionados y depurados por varios investigadores del Departamento de Análisis de Redes. Los datos dinámicos son los que caracterizan una situación particular en la que operará el sistema hidroeléctrico. Por último, se presentan los resultados en forma condensada y el análisis de los mismos.

## 7.1 DATOS ESTÁTICOS.

El conjunto de datos estáticos está integrado por la descripción de la estructura y nomenclatura de los elementos del sistema hidroeléctrico y por los modelos de: embalses, vías, unidades y pérdidas en conductos.

### 7.1.1 Estructura del sistema y nomenclatura de sus elementos.

El sistema hidroeléctrico de este ejemplo está formado por:

- 7 cuencas.
- 10 embalses.
- 10 vías.
- 13 plantas.
- 50 unidades.

La figura 7.1 muestra el sistema y la nomenclatura empleada. Las plantas están formadas por las unidades que se indican en la tabla 7.1.

### 7.1.2 Modelos de los embalses.

La tabla 7.2 muestra los niveles de agua máximos y mínimos de operación ( NAMO Y NAMINO ) de los embalses considerados. Hay dos relaciones relevantes entre las variables de los embalses: la primera, asocia el volumen útil ( $w$ ) con la elevación sobre el nivel del mar ( $\alpha$ ) del agua almacenada; la

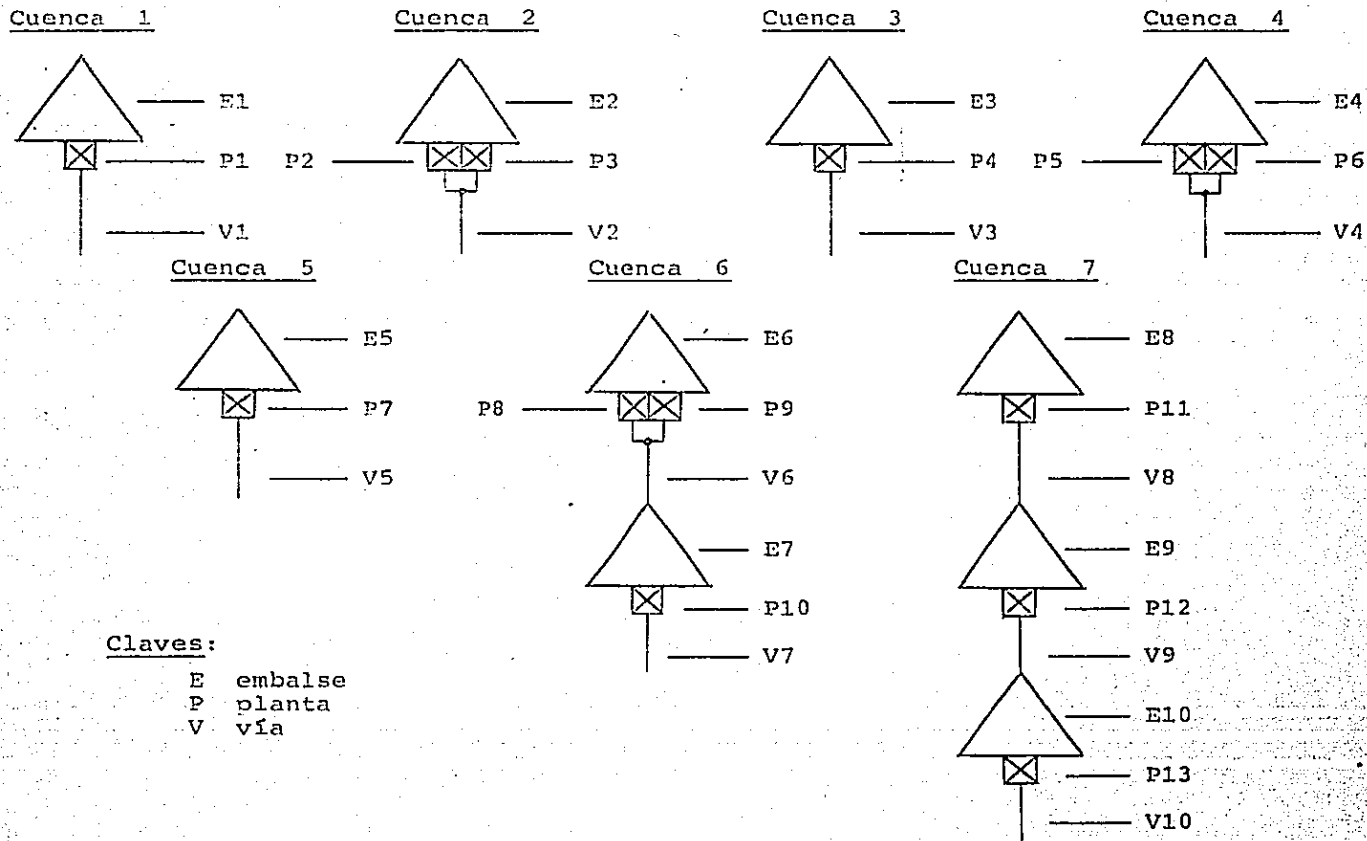


Figura 7.1 Estructura y nomenclatura del sistema hidroeléctrico.

TABLA 7.1

## Composición de las plantas

Planta	No. de Unidades	Nombre de las Unidades
P1	3	U1, U2, U3
P2	2	U4, U5
P3	1	U6
P4	4	U7, ..., U10
P5	4	U11, ..., U14
P6	6	U15, ..., U20
P7	4	U21, ..., U24
P8	4	U25, ..., U28
P9	2	U29, U30
P10	4	U31, ..., U34
P11	5	U35, ..., U39
P12	5	U40, ..., U44
P13	6	U45, ..., U50

TABLA 7.2

Niveles de agua máximos  
y mínimos de operación

Embalse	NAMINO m. s. n. m	NAMO m. s. n. m
E1	112.0	134.4
E2	270.0	286.5
E3	775.0	798.4
E4	1326.0	1350.6
E5	44.2	66.5
E6	140.0	169.9
E7	40.0	51.2
E8	496.0	528.0
E9	380.0	392.0
E10	144.0	176.0



segunda, asocia el volumen útil con la derivada de la elevación respecto al volumen ( $da/dw$ ). Cada una de las dos relaciones está definida por un conjunto de nueve parejas ordenadas. Se supone que por interpolación lineal se debe encontrar el valor en el contradominio correspondiente al valor de cada elemento en el dominio. En el caso de la relación  $w$  vs.  $\alpha$  el dominio puede ser indistintamente el conjunto de valores del volumen, o bien, el conjunto de valores del nivel. En el caso de la relación  $w$  vs.  $da/dw$ , el dominio siempre será el conjunto de valores del volumen. La tabla 7.3 muestra las parejas que definen las relaciones mencionadas.

### 7.1.3 Modelos de las vías.

El comportamiento del nivel del desfogue es el fenómeno más importante a modelar en lo relativo a vías.

Sean:

$\beta_{li}$  Nivel del desfogue en la vía  $l$  durante el intervalo  $i$ .

$q_{pi}$  El gasto de la planta  $p$  durante el intervalo  $i$ .

$\alpha_{ji}$  El nivel del embalse aguas abajo de la vía  $l$ , esto es,  $j$  es tal que  $l \in L_j^C$ .

$S_{li}^{via}$  El gasto vertido sobre la vía  $l$  durante el intervalo  $i$ .

$R_{li}^{via}$  El gasto extraído a través de la vía  $l$  durante el intervalo  $i$  para usos distintos al de generación.

TABLA 7.3

Relaciones  $w$  vs.  $\alpha$  y  $w$  vs.  $da/dw$ 

Embalse	$w$ $M(m^3)$	$\alpha$ m.s.n.m	$da/dw$ $m/K(m^3)$
E1	0.0	112.0	0.260E-04
	115.4	115.0	0.241E-04
	250.0	118.0	0.177E-04
	463.1	120.8	0.131E-04
	923.1	126.8	0.122E-04
	1361.1	131.8	0.101E-04
	2483.1	141.7	0.790E-05
	3673.1	150.0	0.600E-05
	5423.1	158.8	0.503E-05
E2	0.0	270.0	0.167E-04
	60.0	271.0	0.167E-04
	120.0	272.0	0.167E-04
	180.0	273.0	0.167E-04
	240.0	274.0	0.167E-04
	300.0	275.0	0.140E-04
	475.0	277.0	0.116E-04
	1150.0	285.0	0.115E-04
	2362.5	298.5	0.111E-04
E3	0.0	775.0	0.500E-03
	10.0	780.0	0.400E-03
	20.0	783.0	0.225E-03
	40.0	786.0	0.375E-03
	45.0	789.0	0.500E-03
	50.0	791.0	0.500E-03
	55.0	794.0	0.700E-03
	60.0	798.0	0.390E-02
	61.0	805.0	0.700E-02
E4	0.0	1326.0	0.280E-03
	5.0	1327.0	0.280E-03
	10.0	1328.0	0.250E-03
	15.0	1329.0	0.220E-03
	20.0	1330.0	0.210E-03
	25.0	1331.0	0.180E-03
	30.0	1333.0	0.155E-03
	40.0	1341.0	0.140E-03
	50.0	1354.5	0.130E-03

TABLA 7.3 ( cont. )

Relaciones  $w$  vs.  $\alpha$  y  $w$  vs.  $da/dw$ 

Embalse	$w$ $M(m^3)$	$\alpha$ m. s. n. m.	$da/dw$ $m/K(m^3)$
E5	0.0	44.2	0.632E-05
	285.0	46.0	0.594E-05
	825.0	49.0	0.502E-05
	1495.0	52.0	0.410E-05
	2570.0	56.0	0.335E-05
	3915.0	60.0	0.275E-05
	5495.0	64.0	0.236E-05
	6410.0	66.0	0.211E-05
	7890.0	69.0	0.203E-05
E6	0.0	140.0	0.645E-05
	775.0	145.0	0.590E-05
	1710.0	150.0	0.482E-05
	3110.0	156.0	0.387E-05
	3980.0	159.0	0.356E-05
	5070.0	163.0	0.340E-05
	6350.0	167.0	0.293E-05
	7450.0	170.0	0.286E-05
	8450.0	173.0	0.300E-05
E7	0.0	40.0	0.510E-04
	49.0	42.5	0.510E-04
	98.0	45.0	0.479E-04
	142.7	47.0	0.448E-04
	165.0	48.0	0.406E-04
	220.0	50.0	0.340E-04
	267.5	51.5	0.316E-04
	315.0	53.0	0.306E-04
	430.0	56.4	0.296E-04
E8	0.0	496.0	0.669E-05
	299.1	498.0	0.669E-05
	598.3	500.0	0.563E-05
	1691.1	505.0	0.398E-05
	3164.3	510.0	0.310E-05
	4949.3	515.0	0.261E-05
	7017.7	520.0	0.226E-05
	9396.2	525.0	0.201E-05
	12012.5	530.0	0.191E-05

TABLA 7.3 ( cont. )

Relaciones  $w$  vs.  $\alpha$  y  $w$  vs.  $da/dw$ 

Embalse	$w$ M(m <sup>3</sup> )	$\alpha$ m.s.n.m	$da/dw$ m/K(m <sup>3</sup> )
E9	0.0	380.0	0.554E-04
	36.1	382.0	0.555E-04
	72.1	384.0	0.555E-04
	108.2	386.0	0.554E-04
	144.3	388.0	0.555E-04
	180.3	390.0	0.555E-04
	216.4	392.0	0.555E-04
	234.4	393.0	0.555E-04
	270.5	395.0	0.554E-04
E10	0.0	144.0	0.613E-05
	163.2	145.0	0.567E-05
	1124.2	150.0	0.499E-05
	2170.0	155.0	0.460E-05
	3299.8	160.0	0.428E-05
	4509.2	165.0	0.401E-05
	5793.9	170.0	0.379E-05
	7149.0	175.0	0.360E-05
	8571.4	180.0	0.352E-05

En general se supone que  $\beta_{\lambda i}$  es una función de  $q_{pi}$  para toda  $p \in P_{\lambda}$ ,  $\alpha_{ji}$ ,  $S_{\lambda i}^{via}$  y  $R_{\lambda i}^{via}$ . En el caso de este ejemplo se consideran nulos los efectos de:  $\alpha_{ji}$ ,  $S_{\lambda i}^{via}$ ,  $R_{\lambda i}^{via}$ . Por lo anterior el nivel del desfogue sólo será una función del gasto turbinado y la función se considera invariante en el período de planeación.

Aún con las suposiciones mencionadas, en la realidad ocurren comportamientos que no permiten establecer una forma general para el modelo. Como un reflejo de esta carencia de generalidad, se presenta en la tabla 7.4 un modelo particular para el nivel del desfogue en cada vía. En el caso de la vía V2, se presentan en la tabla 7.5 seis parejas ordenadas de la forma  $(\beta, q)$ , aquí  $q$  es la suma de los gastos de las plantas P2 y P3. Los valores de  $\beta$  cuyo  $q$  asociado no coincida con alguno de los puntos dados deberán obtenerse por interpolación o extrapolación lineal. En forma similar se presentan seis parejas de la forma  $(d\beta/dq, q)$ , para calcular las derivadas parciales del nivel del desfogue respecto al gasto turbinado ya sea por la planta P2, o bien, por P3.

Otro dato necesario es el tiempo medio de viaje del agua en cada vía. Este dato se presenta en la tabla 7.4.

#### 7.1.4 Modelos de las unidades.

Se tienen trece modelos de unidades. Cada una de las cincuenta unidades consideradas tiene asociado un modelo.

TABLA 7.4

Modelos para las vías

Vía $\beta$	Nivel del desfogue ** $\beta$ , m.s.n.m.	Tiempo medio de viaje del agua, hs.
V1	$79.5 + 0.015 q_{p1}$	0
V2	Ver tabla 7.5	0
V3*	295.3	0
V4*	906.6	0
V5	$10.5 + 2.5(1 - e^{-0.011q_{p7}})$	0
V6	$64.0 - 5.0 e^{-0.0035(q_{p8} + q_{p9})}$	0
V7	$9.0 + 2.25(1 - e^{-0.0054q_{p10}})$	0
V8	$418.0 + 4.7(1 - e^{-0.0044q_{p11}})$	12
V9	$203.0 + 9.25(1 - e^{-0.0044q_{p12}})$	0
V10	$82.0 + 0.0045 q_{p13}$	0

\*\* Los gastos deben estar en  $m^3/\text{seg}$ .

\* El nivel del desfogue es constante porque las unidades correspondientes son tipo Pelton.

TABLA 7.5

Modelo del nivel de desfogue de la vía V2.

Punto	$\beta$ m.s.n.m	$d\beta/dq$ $\text{seg}/m^2$	$q$ $m^3/\text{seg}$ .
1	185.94	0.00588	0.0
2	186.20	0.01390	44.2
3	186.96	0.03280	54.5
4	188.36	0.02390	79.0
5	190.42	0.01490	109.0
6	193.08	0.01100	163.5

La tabla 7.6 muestra qué modelo corresponde a cada unidad.

La tabla 7.7 muestra algunas constantes de los trece modelos, como son: tipo, altura de diseño, gasto de diseño, y potencia de diseño.

Sean:

- $\gamma$  la potencia generada por alguna unidad (MW.).
- $\xi$  el gasto turbinado por alguna unidad ( $m^3/\text{seg.}$ ).
- $n$  altura neta a la que opera alguna unidad (m.).
- $\bar{\xi}$  gasto máximo de alguna unidad ( $m^3/\text{seg.}$ ).
- $\underline{\xi}$  gasto mínimo de alguna unidad ( $m^3/\text{seg.}$ ).

Se consideran tres relaciones entre las variables mencionadas:

$$\gamma = \gamma(\xi, n)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(n)$$

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(n)$$

La forma general de  $\gamma(\xi, n)$  es:

$$\gamma(\xi, n) = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + a_4 \xi + a_5 \xi n + a_6 \xi n^2 + a_7 \xi^2 + a_8 \xi^2 n + a_9 \xi^2 n^2$$

Para definir  $\bar{\xi}(n)$  y  $\underline{\xi}(n)$  se usaron sendos conjuntos de nueve parejas ordenadas. Los valores de  $\underline{\xi}$  o  $\bar{\xi}$  cuya  $n$  asociada no coincida con los puntos dados, deberán obtenerse por interpolación o extrapolación lineal. La tabla 7.8 muestra

TABLA 7.6

## Asociación Unidad-Modelo.

Unidad	Modelo	Unidad	Modelo	Unidad	Modelo	Unidad	Modelo	Unidad	Modelo
U1	1	U11	5	U21	7	U31	10	U41	12
U2	1	U12	5	U22	7	U32	10	U42	12
U3	1	U13	5	U23	7	U33	10	U43	12
U4	2	U14	5	U24	7	U34	10	U44	12
U5	2	U15	6	U25	8	U35	11	U45	13
U6	3	U16	6	U26	8	U36	11	U46	13
U7	4	U17	6	U27	8	U37	11	U47	13
U8	4	U18	6	U28	8	U38	11	U48	13
U9	4	U19	6	U29	9	U39	11	U49	13
U10	4	U20	6	U30	9	U40	12	U50	13

TABLA 7.7

## Constantes de los modelos de las unidades

Modelo	Tipo	Altura de diseño m	Gasto de diseño m <sup>3</sup> /seg	Potencia de diseño CV
1	Francis	48.5	49.0	28500
2	Francis	87.0	59.6	60300
3	Francis	101.0	62.8	77000
4	Pelton	480.0	13.2	87000
5	Pelton	444.0	4.9	20000
6	Pelton	444.0	2.5	11000
7	Francis	50.5	94.8	57300
8	Francis	101.0	193.9	235200
9	Francis	110.0	202.0	270000
10	Francis	45.0	192.0	108200
11	Francis	91.5	218.0	240000
12	Francis	185.0	189.7	402000
13	Francis	85.0	240.0	240000



los coeficientes "a", las nueve parejas ordenadas ( $\xi, n$ ) y las nueve parejas ordenadas ( $\bar{\xi}, n$ ).

#### 7.1.5 Modelos de pérdidas en conductos.

La forma general es:

$$\delta_u(\xi_u) = c_u \xi_u^2$$

En la tabla 7.9 se muestran los coeficientes  $c_u$  para cada una de las unidades, en esta tabla se supone que  $\delta_u(\cdot)$  está en mts. y  $\xi_u$  en  $m^3/\text{seg}$ .

TABLA 7.8

Relaciones  $\gamma$  vs.  $(\xi, n)$ ;  $\underline{\xi}$  vs.  $n$  y  $\bar{\xi}$  vs.  $n$ 

Modelo	i	$a_i$	n m	$\underline{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg	$\bar{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg
1	1	0.15608E+02	27.2	26.0	39.5
	2	-0.10443E+01	35.0	22.0	42.5
	3	0.10761E-01	40.0	20.0	44.5
	4	-0.14551E+01	42.0	19.4	46.0
	5	0.91079E-01	44.0	18.6	47.5
	6	-0.87849E-03	47.0	17.6	48.5
	7	0.22881E-01	48.5	17.0	49.0
	8	-0.12248E-02	51.0	16.0	49.5
	9	0.13151E-04	53.8	15.0	50.0
2	1	0.21333E+02	65.0	26.0	53.0
	2	-0.78633E+00	69.0	24.8	54.2
	3	0.49696E-02	73.0	23.0	56.0
	4	-0.17710E+01	77.0	23.0	57.5
	5	0.62727E-01	81.0	23.0	58.5
	6	-0.33994E-03	85.0	23.0	60.0
	7	0.21177E-01	91.0	23.0	56.0
	8	-0.63288E-03	95.0	23.0	56.0
	9	0.40815E-05	101.0	23.0	54.0
3	1	-0.81173E+02	65.0	18.8	53.0
	2	0.14494E+01	69.0	18.8	54.5
	3	-0.75988E-02	73.0	18.8	56.0
	4	0.36191E+01	79.0	18.8	58.0
	5	-0.57691E-01	85.0	18.8	60.0
	6	0.34698E-03	89.0	18.8	61.5
	7	-0.47418E-01	91.0	18.8	60.5
	8	0.92495E-03	95.0	18.8	59.5
	9	-0.48874E-05	101.0	18.8	57.5
4	1	-0.82780E+01	480.0	4.1	13.8
	2	0.54093E-01	482.0	4.1	13.8
	3	-0.11593E-03	484.0	4.1	13.8
	4	-0.42574E+01	486.0	4.1	13.8
	5	0.24731E-01	488.0	4.1	13.8
	6	-0.54271E-05	490.0	4.1	13.8
	7	0.34314E+00	492.0	4.1	13.8
	8	-0.14325E-02	494.0	4.1	13.8
	9	0.95428E-06	496.0	4.1	13.8

TABLA 7.8 ( cont. )

Relaciones  $\gamma$  vs.  $(\xi, n)$ ;  $\xi$  vs.  $n$  y  $\bar{\xi}$  vs.  $n$ 

Modelo	i	$a_i$	n m	$\xi$ m <sup>3</sup> /seg	$\bar{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg
5	1	-0.66901E+02	435.0	2.5	4.9
	2	0.27081E+00	436.0	2.5	4.9
	3	-0.29797E-03	437.0	2.5	4.9
	4	0.26398E+02	438.0	2.5	4.9
	5	-0.90623E-01	439.0	2.5	4.9
	6	0.99987E-04	440.0	2.5	4.9
	7	-0.31142E+01	441.0	2.5	4.9
	8	0.10631E-01	442.0	2.5	4.9
	9	-0.99676E-05	443.0	2.5	4.9
6	1	-0.36795E+02	435.0	1.3	2.5
	2	0.14894E+00	436.0	1.3	2.5
	3	-0.16388E-03	437.0	1.3	2.5
	4	0.28457E+02	438.0	1.3	2.5
	5	-0.97692E-01	439.0	1.3	2.5
	6	0.10779E-03	440.0	1.3	2.5
	7	-0.65799E+01	441.0	1.3	2.5
	8	0.22463E-01	442.0	1.3	2.5
	9	-0.21060E-04	443.0	1.3	2.5
7	1	-0.58723E+02	32.0	28.4	94.8
	2	0.25311E+01	34.0	28.4	94.8
	3	-0.31302E-01	36.0	28.4	94.8
	4	0.16014E+01	38.0	28.4	94.8
	5	-0.61329E-01	40.0	28.4	94.8
	6	0.88781E-03	42.0	28.4	94.8
	7	-0.12817E-01	44.0	28.4	94.8
	8	0.56196E-03	46.0	28.4	94.8
	9	-0.69182E-05	48.0	28.4	94.8
8	1	0.45026E+02	81.0	77.6	193.9
	2	-0.74619E+00	84.0	77.6	193.9
	3	-0.41523E-02	87.0	77.6	193.9
	4	-0.14042E+01	90.0	77.6	193.9
	5	0.32833E-01	93.0	77.6	193.9
	6	-0.32181E-05	96.0	77.6	193.9
	7	0.31617E-02	99.0	77.6	193.9
	8	-0.48169E-04	102.0	77.6	193.9
	9	-0.16341E-06	105.0	77.6	193.9

TABLA 7.8 ( cont. )

Relaciones  $\gamma$  vs.  $(\xi, n)$ ;  $\underline{\xi}$  vs.  $n$  y  $\bar{\xi}$  vs.  $n$ 

Modelo	i	$a_i$	n m	$\underline{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg	$\bar{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg
9	1	0.54688E+02	81.0	60.6	202.0
	2	-0.97219E+00	84.0	60.6	202.0
	3	-0.13029E-02	87.0	60.6	202.0
	4	-0.14861E+01	90.0	60.6	202.0
	5	0.33905E-01	93.0	60.6	202.0
	6	-0.31855E-04	96.0	60.6	202.0
	7	0.29569E-02	99.0	60.6	202.0
	8	-0.46360E-04	102.0	60.6	202.0
	9	-0.63233E-07	105.0	60.6	202.0
10	1	0.13723E+02	31.0	76.8	192.0
	2	-0.30977E+00	32.0	76.8	192.0
	3	-0.23243E-01	33.0	76.8	192.0
	4	-0.48610E+00	34.0	76.8	192.0
	5	0.21356E-01	35.0	76.8	192.0
	6	0.24493E-03	36.0	76.8	192.0
	7	-0.14302E-03	37.0	76.8	192.0
	8	0.43626E-04	38.0	76.8	192.0
	9	-0.18091E-05	39.0	76.8	192.0
11	1	-0.80281E+03	78.0	109.0	218.0
	2	0.15769E+02	81.0	109.0	218.0
	3	-0.84193E-01	84.0	109.0	218.0
	4	0.71202E+01	87.0	109.0	218.0
	5	-0.11861E+00	90.0	109.0	218.0
	6	0.63502E-03	93.0	109.0	218.0
	7	-0.18880E-01	96.0	109.0	218.0
	8	0.31276E-03	99.0	109.0	218.0
	9	-0.14229E-05	102.0	109.0	218.0
12	1	-0.13447E+04	178.0	56.9	189.7
	2	0.13064E+02	179.0	56.9	189.7
	3	-0.34498E-01	180.0	56.9	189.7
	4	0.13706E+02	181.0	56.9	189.7
	5	-0.11292E+00	182.0	56.9	189.7
	6	0.29901E-03	183.0	56.9	189.7
	7	-0.41763E-01	184.0	56.9	189.7
	8	0.34218E-03	185.0	56.9	189.7
	9	-0.76996E-06	186.0	56.9	189.7

TABLA 7.8 ( cont. )

Relaciones  $\gamma$  vs.  $(\xi, n)$ ;  $\underline{\xi}$  vs.  $n$  y  $\bar{\xi}$  vs.  $n$ 

Modelo	i	$a_i$	n m	$\underline{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg	$\bar{\xi}$ m <sup>3</sup> /seg
13	1	-0.46443E+02	62.0	96.0	240.0
	2	0.13706E+01	66.0	96.0	240.0
	3	-0.16784E-01	70.0	96.0	240.0
	4	0.92244E+00	74.0	96.0	240.0
	5	-0.93079E-02	78.0	96.0	240.0
	6	0.16300E-03	82.0	96.0	240.0
	7	-0.50658E-02	86.0	96.0	240.0
	8	0.83569E-04	90.0	96.0	240.0
	9	-0.52004E-06	94.0	96.0	240.0

TABLA 7.9

Coeficientes de la función de pérdidas en conductos

Unidad	$c, s^2/m^5$
U01, U02, U03	4.04E-04
U04, U05	4.89E-04
U06	5.12E-04
U07, ... , U10	5.04E-02
U11, ... , U14	3.69E-01
U15, ... , U20	1.42E+00
U21, ... , U24	1.12E-04
U25, ... , U28	5.37E-05
U29, U30	5.39E-05
U31, ... , U34	2.44E-05
U35, ... , U39	3.85E-05
U40, ... , U44	1.03E-04
U45, ... , U50	2.95E-05

## 7.2 DATOS DINÁMICOS.

Estos datos definen la la condición particular en la que operará el sistema. Primero se hace una descripción general del caso, enseguida, se describen el período de planeación y las condiciones eléctricas; por último, se presentan las condiciones en que operarán los embalses, las vías y las unidades.

### 7.2.1 Descripción general del caso.

Durante todo el período de planeación el sistema está eléctricamente conectado y la definición de grupos no cambia.

En los grupos no se exige una reserva mínima, pero sí se limita superiormente su generación.

Las características de la parte termoeléctrica se suponen constantes durante todo el período de planeación. El límite superior de generación termoeléctrica es menor que la demanda. El límite inferior es nulo. Se supuso que el costo por unidad de tiempo de la generación es una función cuadrática de la potencia generada.

No se considera el efecto de las pérdidas por transmisión.

En el embalse E7, tanto el nivel inicial como el final

son iguales al nivel de aguas máximo de operación. En los de más embalses, los niveles inicial y final son tales que no es probable que se alcancen los límites máximos ni los mínimos.

Los límites de gasto máximo y mínimo en las vías son tales que siempre pueden ser respetados. Los volúmenes vertidos sobre las vías son nulos.

Para cada unidad, su disponibilidad, asignabilidad y coordinabilidad son invariantes durante el período de planeación. La mayoría de las unidades son: disponibles, asignables y coordinables; al menos existe una unidad en cada una de las otras cuatro combinaciones posibles.

### 7.2.2 Período de planeación.

Los datos relativos al período de planeación se muestran en la tabla 7.10.

### 7.2.3 Descripción de las condiciones eléctricas del caso.

En la configuración eléctrica considerada existe una só la isla, y en la isla, cinco grupos de plantas; esto es:

$$S_i = \{i\}, \text{ para } i=1, \dots, 168; O_s = \{5(s-1) + 1, \dots, 5(s-1) + 5\}.$$

Los datos relativos a la isla son:

- La demanda por intervalo ( tabla 7.11 ).

TABLA 7.10  
Período de planeación

Duración del período	Una semana
Día de inicio	Lunes
Número de intervalos	168
Duración de los intervalos	Una hora
Configuración eléctrica	Invariante



TABLA 7.11

Demanda por intervalo

Int	Demanda (MW.)	Int	Demanda (MW.)	Int	Demanda (MW.)	Int	Demanda (MW.)
1	6270.7	2	5996.6	3	5813.4	4	5934.3
5	5779.7	6	6039.5	7	6377.2	8	6891.7
9	7462.0	10	7880.3	11	7995.9	12	8149.2
13	8142.7	14	8285.6	15	8155.7	16	8427.2
17	8627.3	18	8628.6	19	8771.5	20	9552.2
21	10123.8	22	9838.0	23	8679.2	24	7603.6
25	6972.2	26	6638.4	27	6600.7	28	6547.4
29	6577.3	30	6764.4	31	6852.7	32	7291.8
33	7241.1	34	8133.6	35	8315.5	36	8305.1
37	8294.7	38	8375.3	39	8196.0	40	8209.0
41	8619.5	42	8609.1	43	8765.0	44	9560.0
45	10386.2	46	9869.2	47	8807.8	48	7859.5
49	7172.3	50	6687.7	51	6634.5	52	6612.4
53	6643.6	54	6742.3	55	6898.2	56	7371.1
57	7855.6	58	8093.3	59	8335.0	60	8641.6
61	8627.3	62	8607.8	63	8514.3	64	8613.0
65	8700.0	66	8740.3	67	8768.9	68	9622.4
69	10387.5	70	10086.2	71	8974.1	72	7931.0
73	7155.4	74	6778.7	75	6605.9	76	6666.9
77	6708.5	78	6861.8	79	6883.9	80	7495.8
81	7867.3	82	8024.5	83	8259.6	84	8355.8

TABLA 7.11 ( cont. )

Demanda por intervalo

Int	Demanda (MW.)	Int	Demanda (MW.)	Int	Demanda (MW.)	Int	Demanda (MW.)
85	8354.5	86	8301.2	87	8332.4	88	8386.9
89	8353.2	90	8666.2	91	8718.2	92	9584.7
93	10455.1	94	10021.2	95	8813.0	96	7850.4
97	7084.0	98	6830.6	99	6564.3	100	6605.9
101	6605.9	102	6707.2	103	6805.9	104	7441.2
105	7918.0	106	8270.0	107	8370.1	108	8425.9
109	8593.5	110	8577.9	111	8550.0	112	8600.0
113	8706.5	114	8845.5	115	8852.0	116	9415.8
117	10204.4	118	9823.7	119	8993.6	120	8118.0
121	7229.5	122	7011.2	123	6764.4	124	6785.2
125	6902.1	126	6774.8	127	6722.8	128	7116.4
129	7458.1	130	7833.5	131	8006.3	132	7977.7
133	8057.0	134	8067.4	135	7721.8	136	7704.9
137	7772.5	138	7802.4	139	8167.4	140	8971.5
141	9762.7	142	9418.4	143	8500.0	144	7664.6
145	6939.8	146	6553.9	147	6359.1	148	6344.8
149	6266.8	150	6381.1	151	6004.4	152	5836.8
153	6140.8	154	6086.3	155	6222.7	156	6490.3
157	6434.4	158	6499.4	159	6355.2	160	6509.8
161	6547.4	162	6481.2	163	6705.9	164	7677.6
165	8441.5	166	8259.6	167	7564.6	168	6906.0

- La función de costos de la generación termoeléctrica. Esta función es la misma para todos los intervalos, y es como sigue:

$$C_S^g(g_S) = 0.05g_S^2 \text{ \$/h}; \quad \text{para toda } s \in S_i, \text{ con } i=1, \dots, 168.$$

$g_S$  es la potencia termoeléctrica generada en MW.

- Los límites de la generación termoeléctrica.

$$0 \leq g_S \leq 6700 \text{ MW}; \quad \text{para toda } s \in S_i \text{ con } i=1, \dots, 168.$$

- La función de penalización al corte de carga:

$$C_S^x(x_S) = \frac{33500}{D_S} x_S^2 + 670x_S \text{ \$/H}$$

para toda  $s \in S_i$ , con  $i=1, \dots, 168$ .

$x_S$  es el déficit de potencia en MW.

- La función de penalización al excedente de generación en la isla:

$$C_S^y(y_S) = 0; \quad \text{para toda } s \in S_i, \text{ con } i=1, \dots, 168.$$

La función es nula porque el mínimo costo incremental de la generación termoeléctrica es nulo. El efecto es que cualquier excedente de generación es absorbido sin beneficio alguno, esto motiva al algoritmo a que evite emplear recursos limitados en algún intervalo sin obtener una disminución en costos.

Los datos correspondientes a los grupos de la isla son:

- Los límites superiores de generación que permiten la reserva requerida y las plantas que constituyen los grupos ( tabla 7.12 ).
- La función de penalización a la violación del grupo:

$$C_{0}^{x}(r_{0}) = 67000 r_{0}^{2} / T_{0} ; \text{ para toda } \alpha \in O_{s}, s \in S_{i}, \text{ con } i=1, \dots, 168.$$

$r_{0}$  es la componente penalizada de la generación del grupo en MW.

$T_{0}$  es el límite superior de generación del grupo en MW ( ver tabla 7.12 ).

#### 7.2.4 Embalses.

La tabla 7.13 muestra para cada uno de los embalses la cota y el volumen útil, tanto iniciales como finales; además, se muestra la tolerancia especificada en el volumen final. También, aparece una columna con las aportaciones de cuenca propia en forma agregada, para este ejemplo las aportaciones se consideraron uniformemente distribuidas durante el período de planeación.

TABLA 7.12

## Grupos

Grupo-Intervalo	Límite superior T <sub>o</sub> MW.	Plantas en el grupo
1, 6, 11, ... , 836	2300.0	P11, P12, P13
2, 7, 12, ... , 837	1200.0	P8, P9, P10
3, 8, 13, ... , 838	420.0	P4, P7
4, 9, 14, ... , 839	175.0	P2, P3
5, 10, 15, ... , 840	260.0	P1, P5, P6

TABLA 7.13

## Embalses

Embalses	Valores Iniciales		Valores finales			Aportaciones* M(m <sup>3</sup> )
	Cota m.s.n.m	Volumen Útil M(m <sup>3</sup> )	Cota m.s.n.m	Volumen Útil M(m <sup>3</sup> )	Tol. en volumen M(m <sup>3</sup> )	
E1	126.80	923.1	128.31	1055.4	±0.225	165.284
E2	283.22	999.8	282.82	966.1	±0.305	7.451
E3	784.50	30.0	784.50	30.0	±0.061	12.418
E4	1331.00	25.0	1336.20	34.0	±0.049	23.934
E5	57.28	3000.4	57.53	3084.0	±0.517	164.612
E6	158.03	3698.7	158.64	3875.8	±1.608	438.760
E7	51.20	258.0	51.20	258.0	±1.153	0.000
E8	515.12	4998.9	514.81	4894.4	±1.554	152.432
E9	388.21	148.0	388.21	148.0	±1.352	0.000
E10	160.83	3500.6	160.95	3529.5	±1.864	79.716

\* Las aportaciones son las de todo el período de planeación y se consideran uniformemente repartidas.

#### 7.2.5 Vías.

La tabla 7.14 muestra para cada una de las vías el gasto máximo y el mínimo, el vertido programado sobre la vía y, para las vías en las que el tiempo de viaje del agua es mayor o igual a un intervalo, se indica el volumen en tránsito al inicio del período de planeación y el volumen que se debe dejar viajando al final del período de planeación con una tolerancia.

#### 7.2.6 Unidades.

La tabla 7.15 muestra la disponibilidad, asignabilidad, y la coordinabilidad supuestas para las unidades. Se muestran también los límites máximo y mínimo de la generación, y cuando se aplique, el valor especificado de la generación. Para este ejemplo se consideró que todos estos datos no cambiaban durante el período de planeación.

TABLA 7.14

## Vías

Vía	Gasto mínimo*	Gasto máximo*	Vertido programado	Volumen viajando al inicio	Volumen viajando al final
	m <sup>3</sup> /seg	m <sup>3</sup> /seg	m <sup>3</sup> /seg	M (m <sup>3</sup> )	M (m <sup>3</sup> )
V1	0.	200.	0.	0.0	0.0
V2	0.	1200.	0.	0.0	0.0
V3	0.	7500.	0.	0.0	0.0
V4	0.	1000.	0.	0.0	0.0
V5	0.	4000.	0.	0.0	0.0
V6	0.	13800.	0.	0.0	0.0
V7	0.	13800.	0.	0.0	0.0
V8	0.	8900.	0.	6.0**	6.0±0.811
V9	0.	8900.	0.	0.0	0.0
V10	0.	19150.	0.	0.0	0.0

\* Estos valores son constantes durante el período de planeación.

\*\* El volumen en tránsito al inicio del período de planeación está distribuido de tal forma que: en cada uno de los primeros seis intervalos llega al embalse aguas abajo 1/36 del total, y en cada uno de los siguientes seis intervalos llega 5/36 del total.

TABLA 7.15

## Unidades

Unidad	Disponible	Asignable	Coordenable	Generación, MW.		
				Fija	Mínima	Máxima
U1 , U2 , U3	Si	Si	Si		9.	20.
U4	Si	No	No	35.	14.	44.
U5	Si	Si	No	35.	14.	44.
U6	Si	Si	No	35.	12.	56.
U7	Si	No	Si		20.	63.
U8 , U9 , U10	Si	Si	Si		20.	63.
U11, ..., U14	Si	Si	Si		9.	14.
U15, ..., U20	Si	Si	Si		5.	8.
U21, ..., U24	Si	Si	Si		22.	42.
U25, ..., U28	Si	Si	Si		70.	172.
U29, U30	Si	Si	Si		60.	198.
U31, ..., U34	Si	Si	Si		24.	79.
U35	No					
U36, ..., U39	Si	Si	Si		89.	176.
U40, ..., U44	Si	Si	Si		60.	295.
U45, ..., U50	Si	Si	Si		71.	176.

### 7.3 RESULTADOS.

En las tablas de la 7.16 a la 7.18 y en las figuras de la 7.2 a la 7.29 se resumen los resultados más importantes.

Los resultados que muestran alguna violación a una restricción o a alguna especificación no han sido dejados fuera del resumen, sino por el contrario, se muestran en su totalidad y se discute sobre las causas y el impacto en la aplicabilidad del método.

En la sección de "Observaciones sobre los resultados" se hacen notar en forma objetiva ciertas características de la solución, que a nuestro juicio merecen alguna discusión.

En la sección de "Discusión de las observaciones", son consideradas cada una de las observaciones.

En la última sección, se resumen las características del método que han quedado en relieve después del análisis de los resultados de este ejemplo.



TABLA 7.16  
Resultados Generales

No. de iteraciones en el "Problema Aproximado"	20
No. de iteraciones en el "Problema de Coordinación"	13
Tiempo de ejecución * ( min CPU VAX 11/780 )	33.7
Valor de la función objetivo en el "Problema Aproximado"	266'803,040.
Valor de la función objetivo en el "Problema de Coordinación"	268'217,550.
Cota inferior a la función objetivo de PAUH	257'627,025.

\* No se incluye el tiempo necesario para estimar la cota inferior a la función objetivo del problema PAUH.

TABLA 7.17

## Niveles y volúmenes

Embalse	Nivel final	Volumen útil final
	m. s. n. m	M(m <sup>3</sup> )
E1	128.31	1055.175
E2	282.82	966.356
E3	784.49	29.939
E4	1336.16	33.951
E5	57.53	3083.483
E6/	158.64	3874.192
E7	51.16	256.847
E8	514.84	4892.846
E9	388.13	146.648
E10	160.94	3527.636

TABLA 7.18

## Violaciones en grupos

Intervalo-grupo	101
Límite de generación, MW.	2300.00
1a. Componente de la generación, MW.	2300.00
2a. Componente de la generación, MW.	2.26
3a. Componente de la generación, MW.	0.00
Violación, MW.	2.26

( MW. )

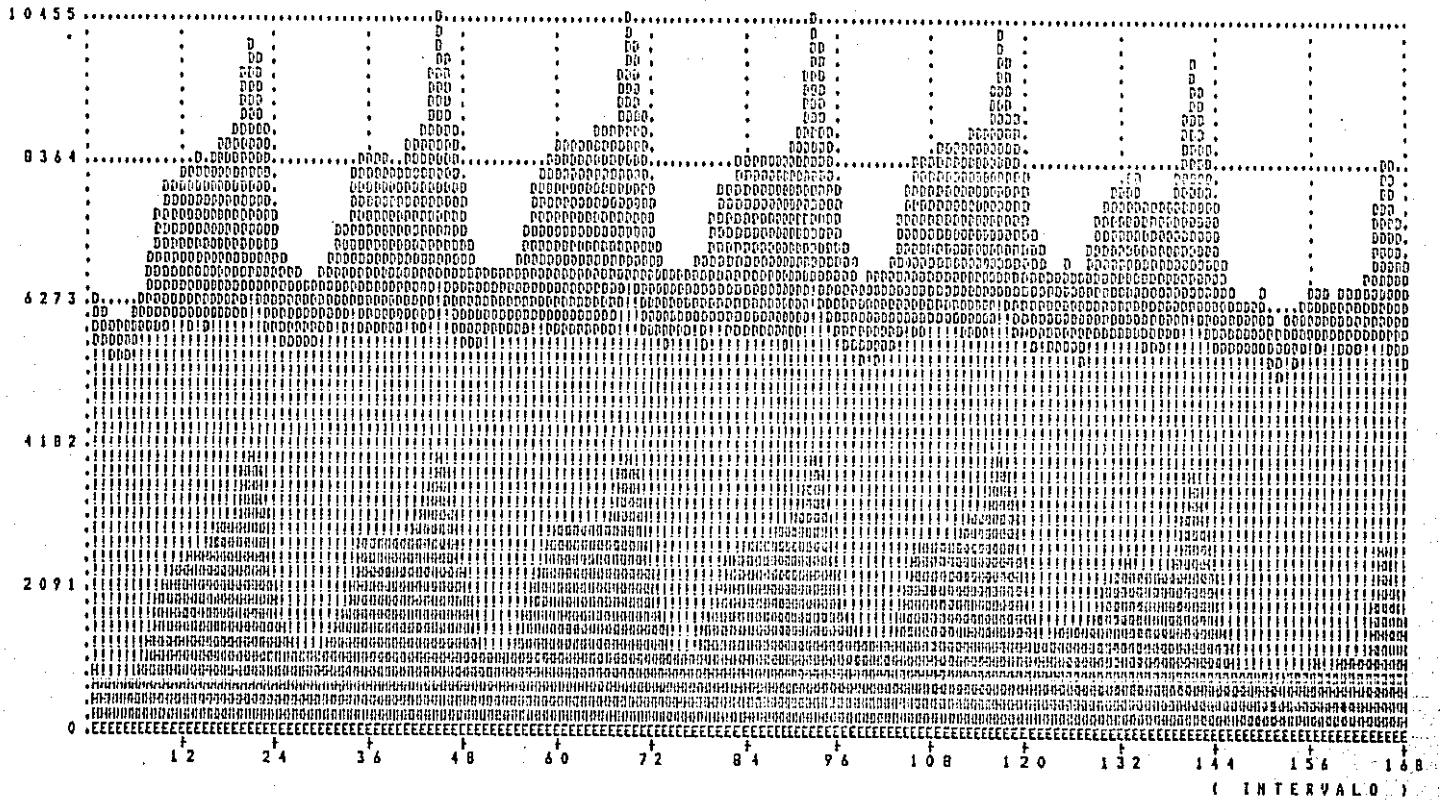


FIGURA 7.2 SUPERPOSICION DE LOS PERFILES DE DEMANDA (D), GENERACION TERMOELECTRICA (!) Y GENERACION HIDROELECTRICA (H).

( N.W. )

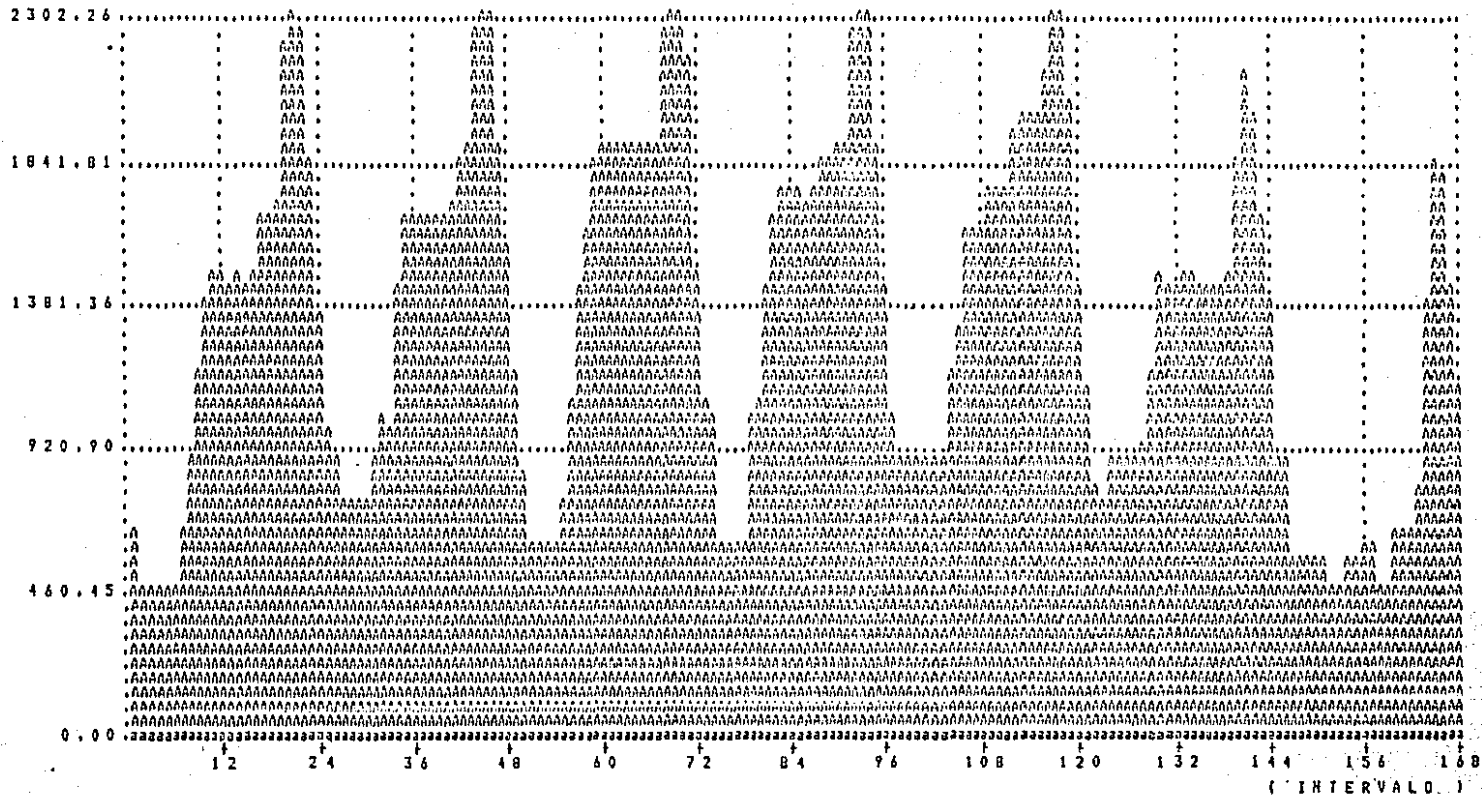


FIGURA 7.3 GENERACION DEL GRUPO COMPUESTO POR LAS PLANTAS:  
P11, P12 Y P13; EN LOS 168 INTERVALOS.

( H . S . H . H . )

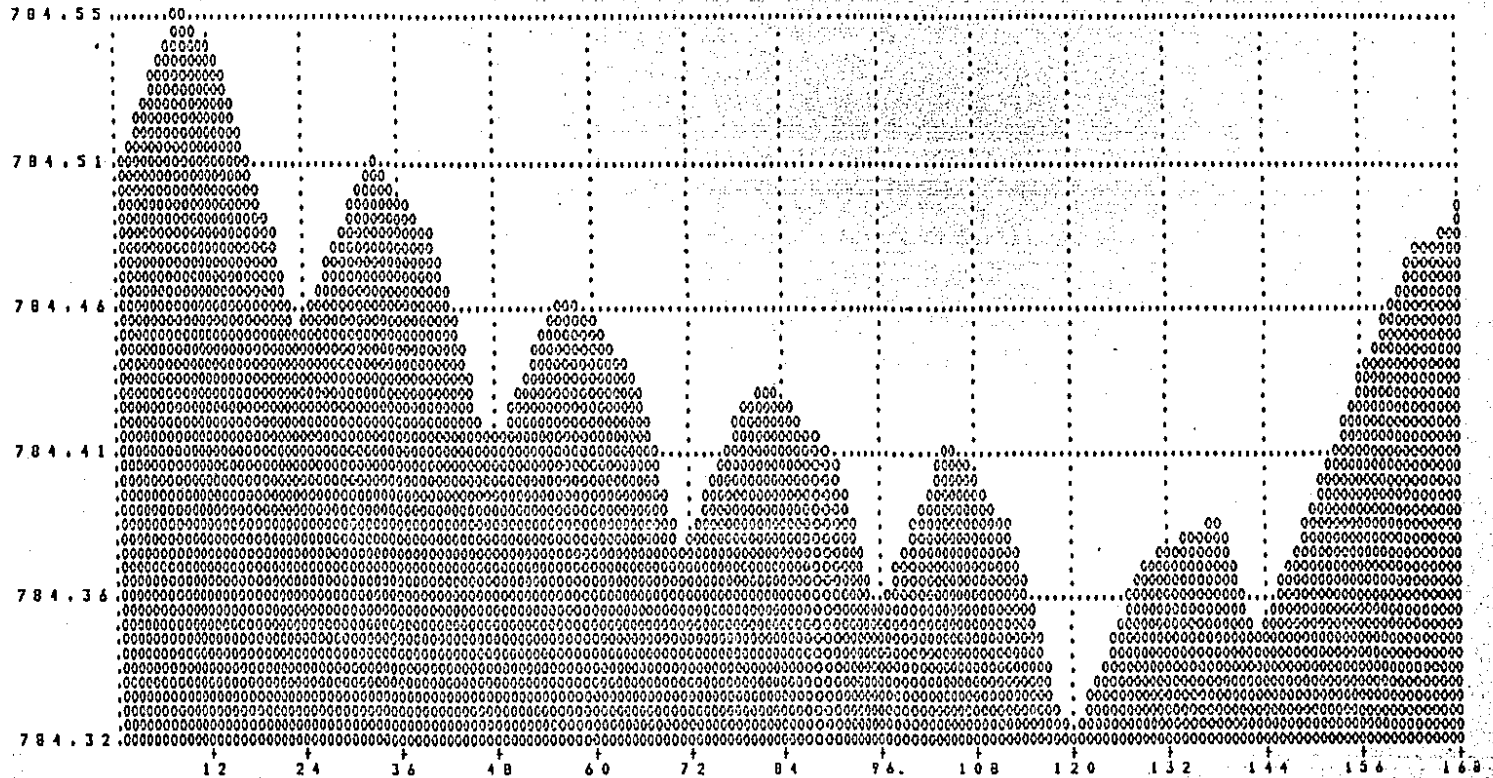


FIGURA 7.4 NIVEL EN EL EXBALSE E3.

EL NIVEL MIHIKO OCURRE EN LA HORA 24 DEL VIERNES, LUEGO EL NIVEL SE ELEVA DURANTE EL FIN DE SEMANA PARA LLEGAR AL NIVEL INICIAL.

( INTERVALO )

( M.S.N.H. )

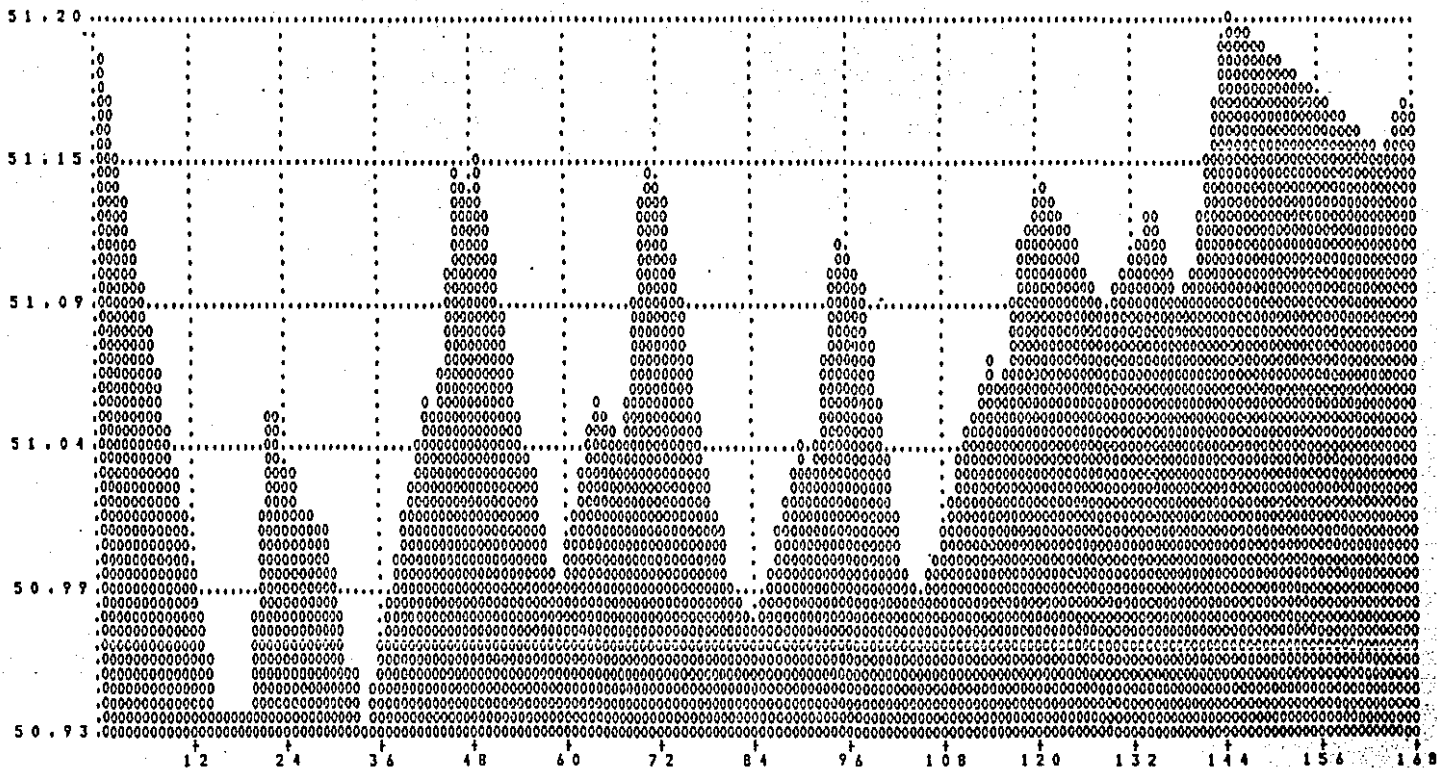


FIGURA 7.5 NIVEL EN EL EMBALSE E7.  
 EL NIVEL DE AGUAS MAXIMO DE OPERACION ES 51.2 M.S.N.H.,  
 NO FUE EXCEDIDO EN NINGUNO DE LOS INTERVALOS.

( INTERVALO )

( M.S.N.M. )

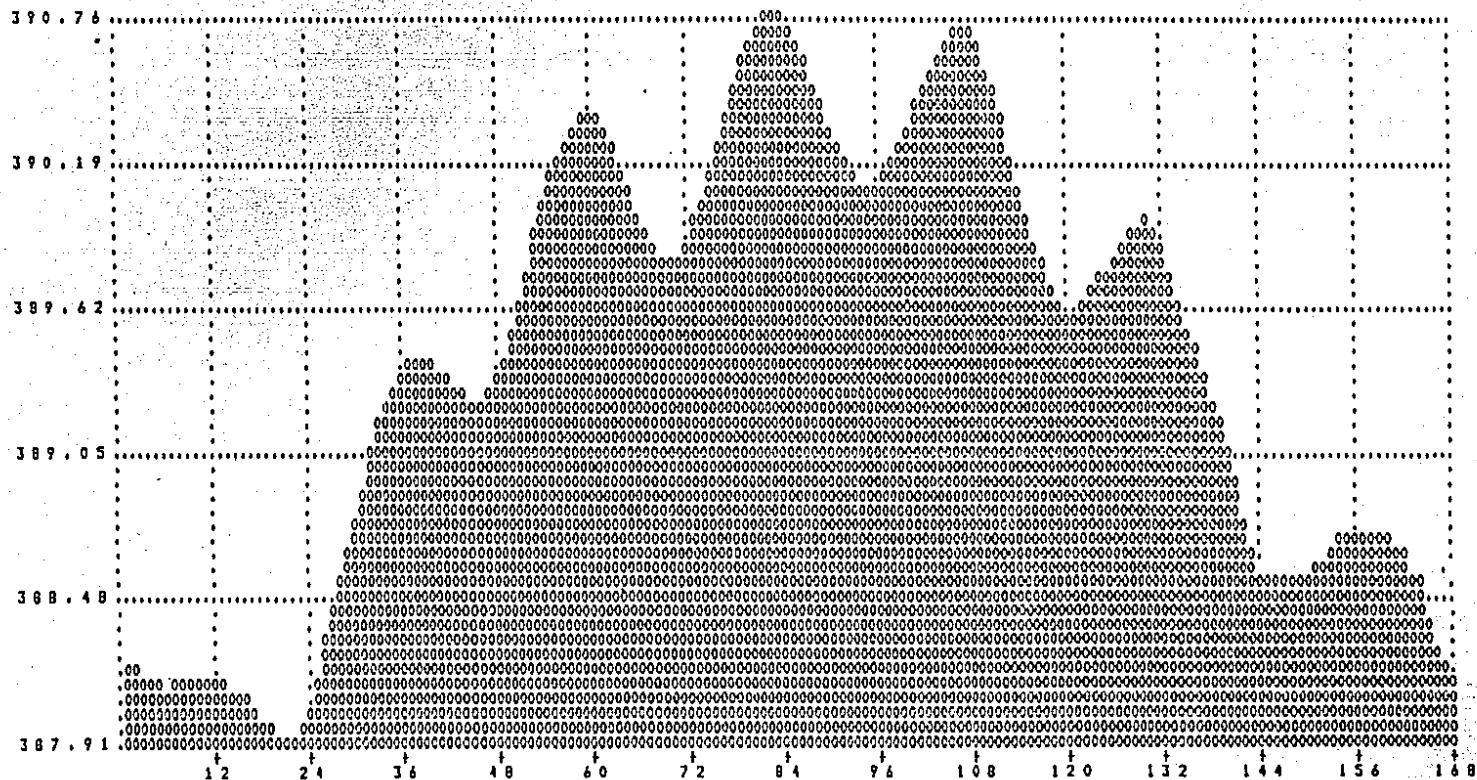


FIGURA 7.6 NIVEL EN EL EMBALSE E9.  
ES NOTORIA LA TENDENCIA A OPERAR CON NIVELES ELEVADOS.  
SE OBSERVAN VARIACIONES CICLICAS IMPORTANTES CUYO  
PERIODO ES DE UN DIA.

( HV. )

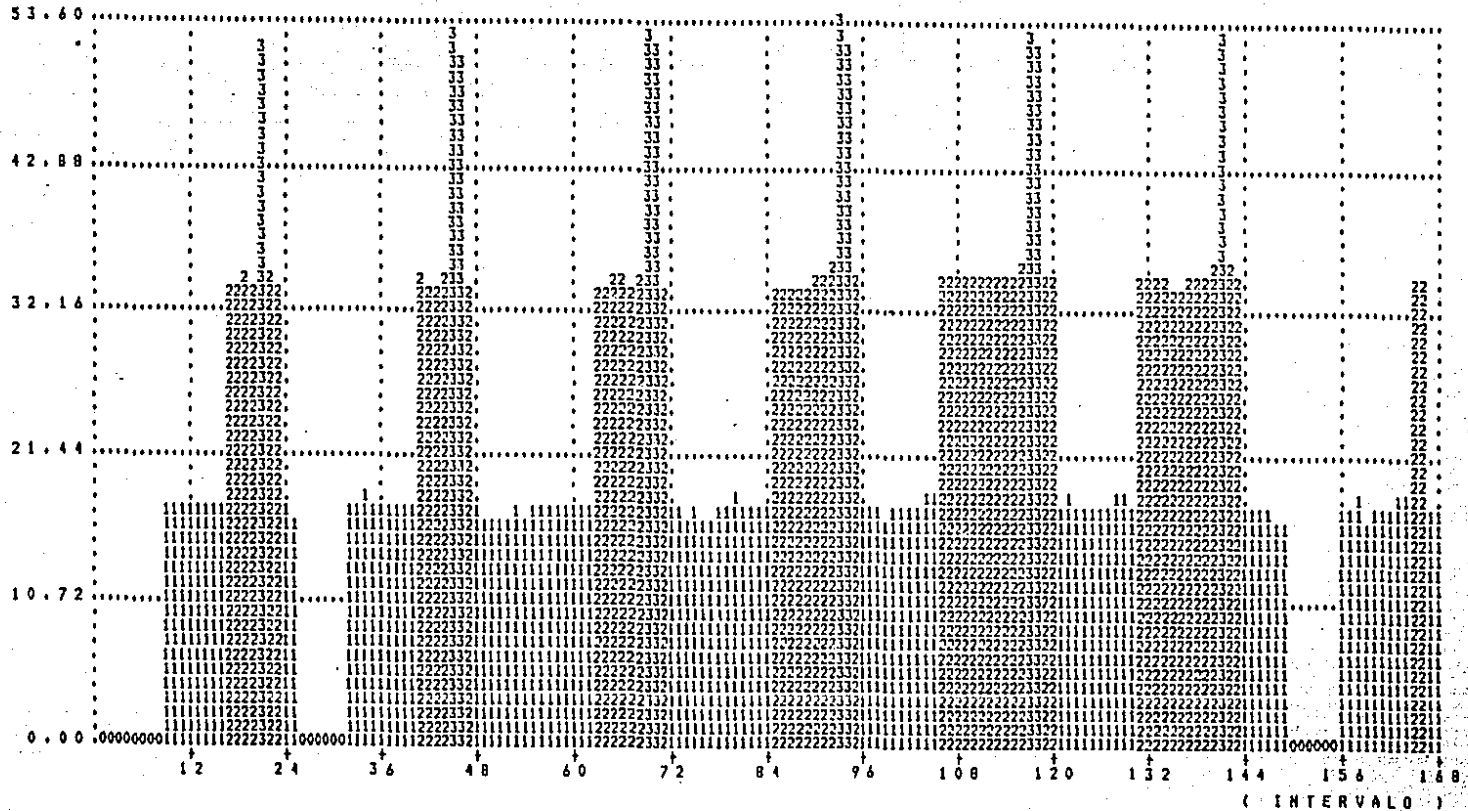


FIGURA 7.7 GENERACIONES DE LA PLANTA PI.  
 SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
 INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE,  
 EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( INTERVALO )



( MW. )

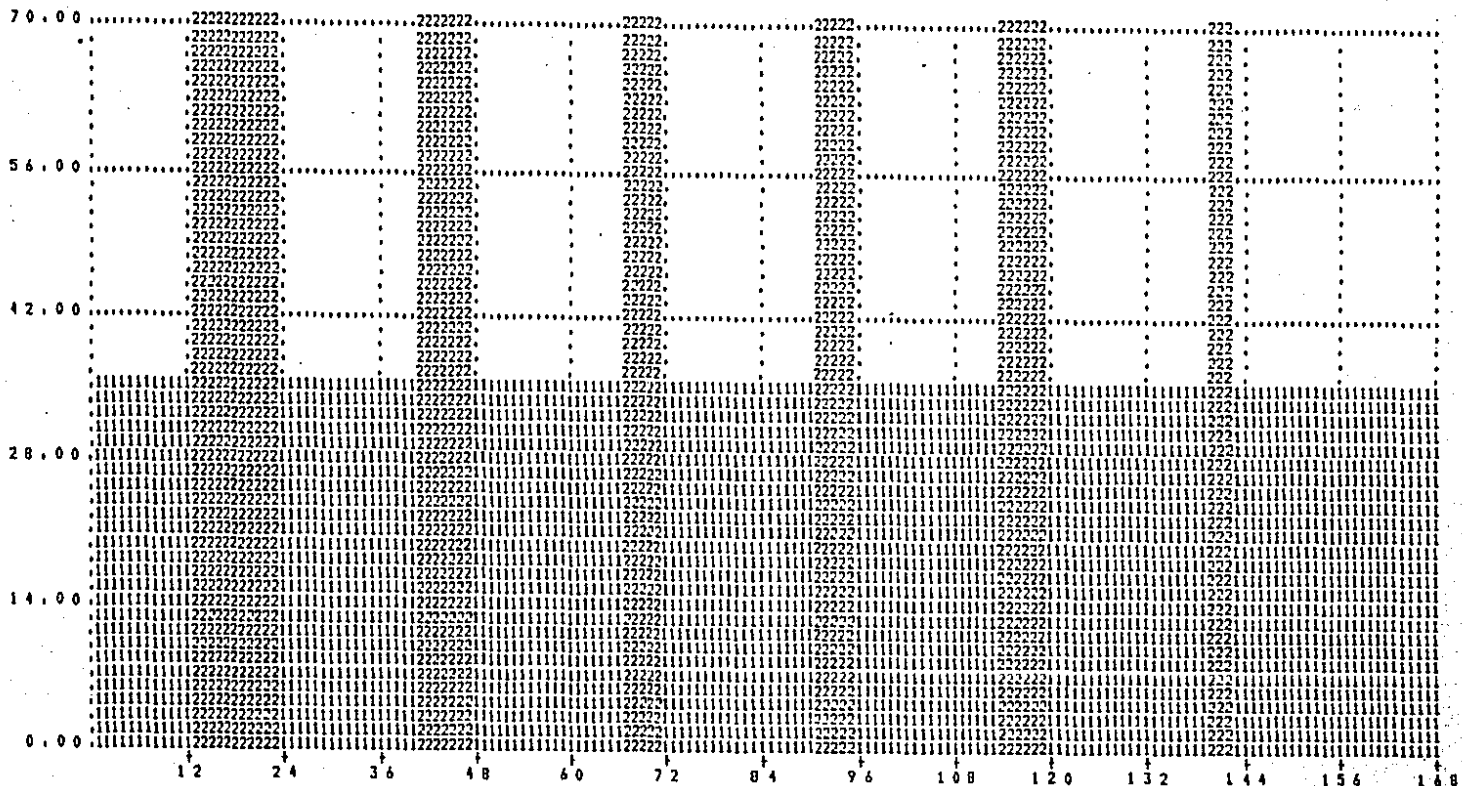


FIGURA 7.8 GENERACIONES DE LA PLANTA P2.  
SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.  
EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( MW. )

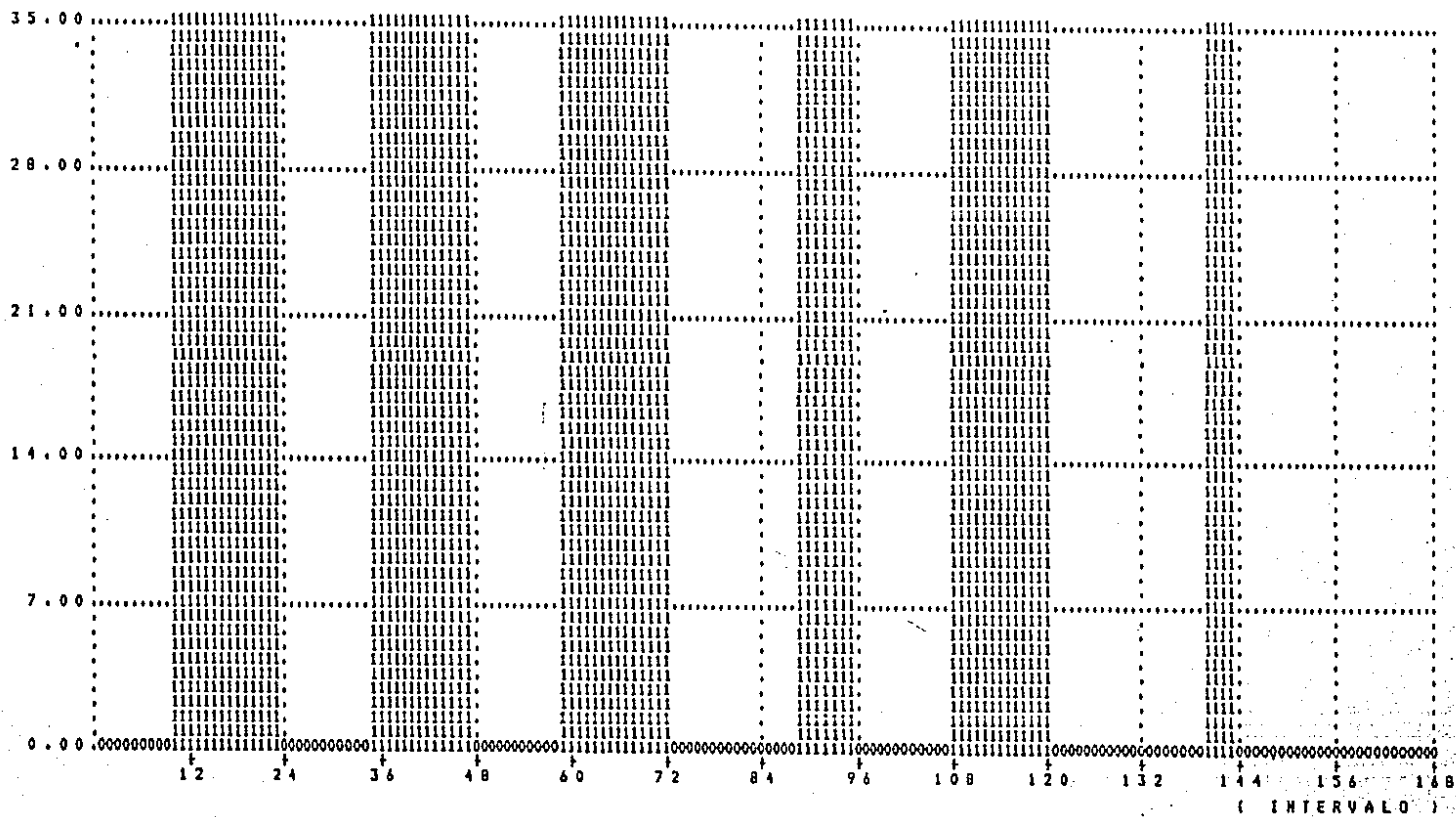


FIGURA 7.9 GENERACIONES DE LA PLANTA P3.  
SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.  
EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( MW )

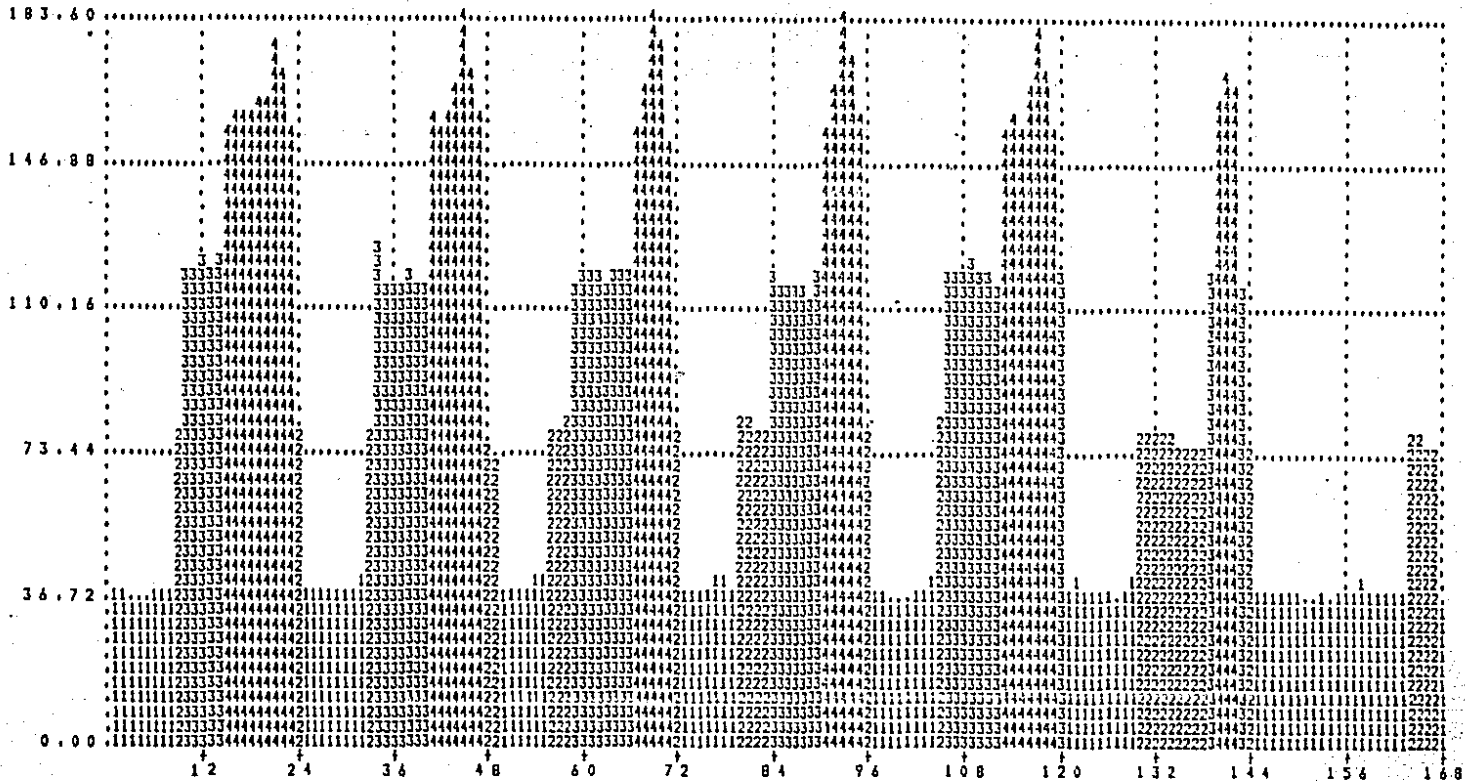


FIGURA 7.10 GENERACIONES DE LA PLANTA P4.  
 SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
 INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.  
 EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.  
 ( INTERVALO )

( MW. )

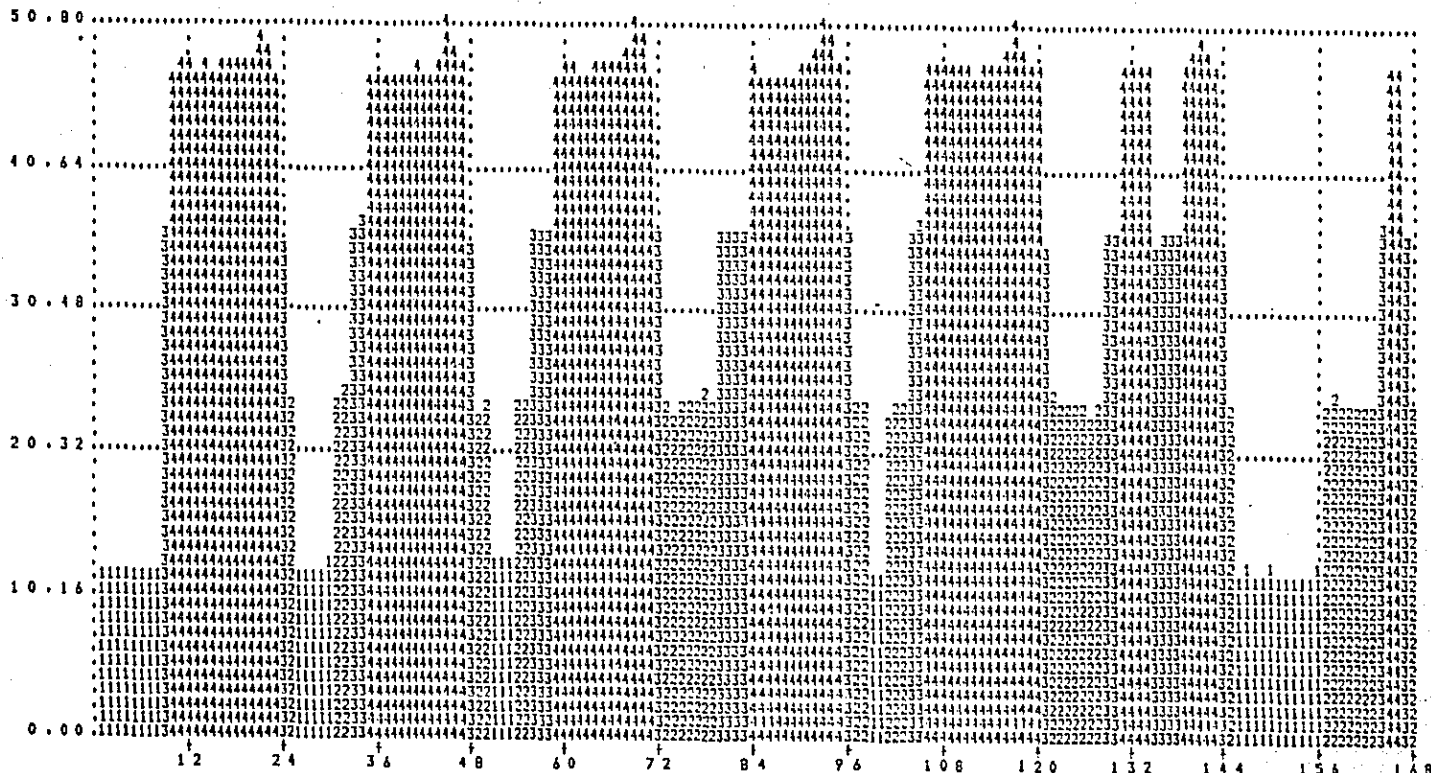
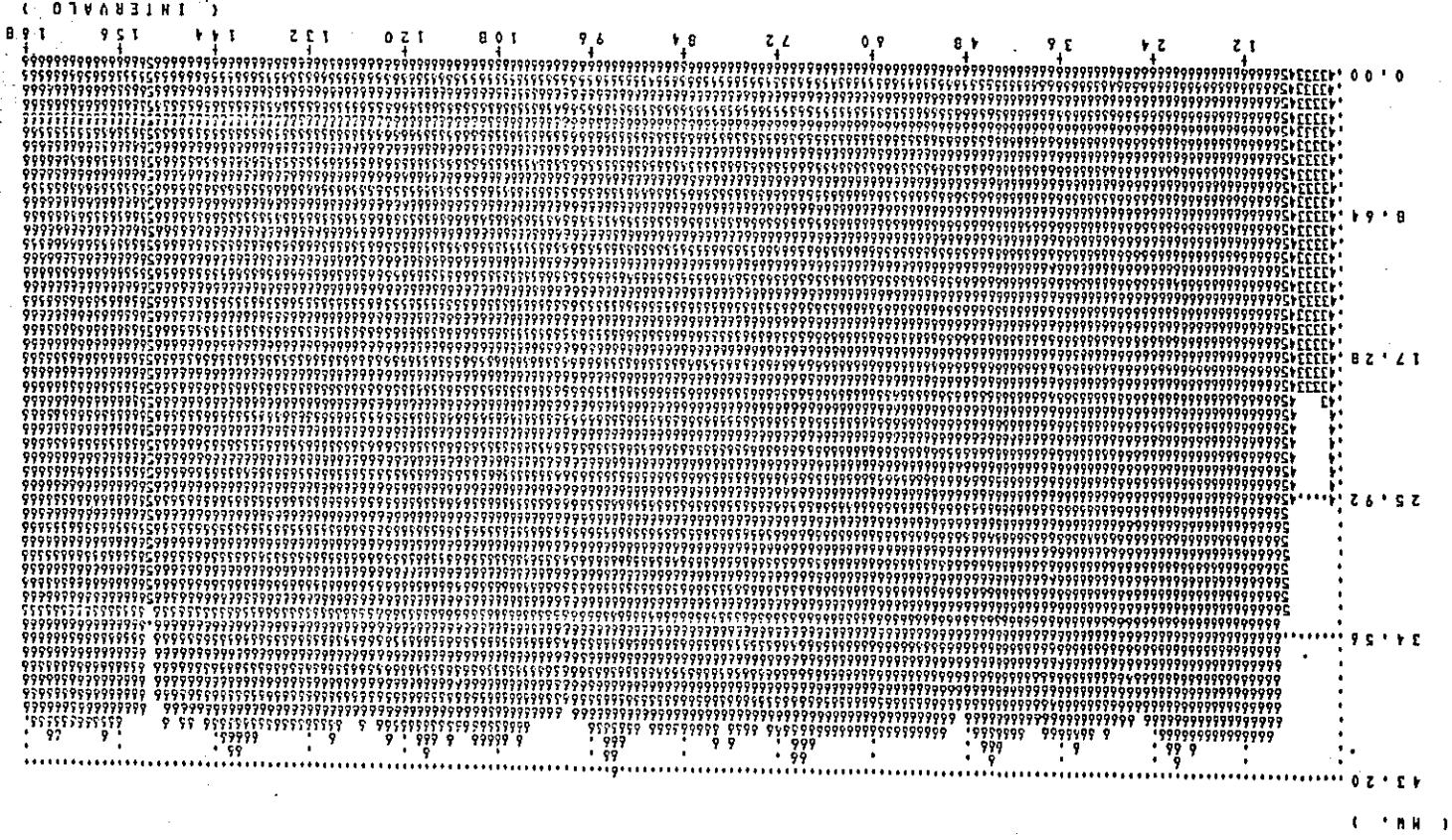


FIGURA 7.11 GENERACIONES DE LA PLANTA PS.

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.  
EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( INTERVALO )

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.  
 EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.



( MU. )

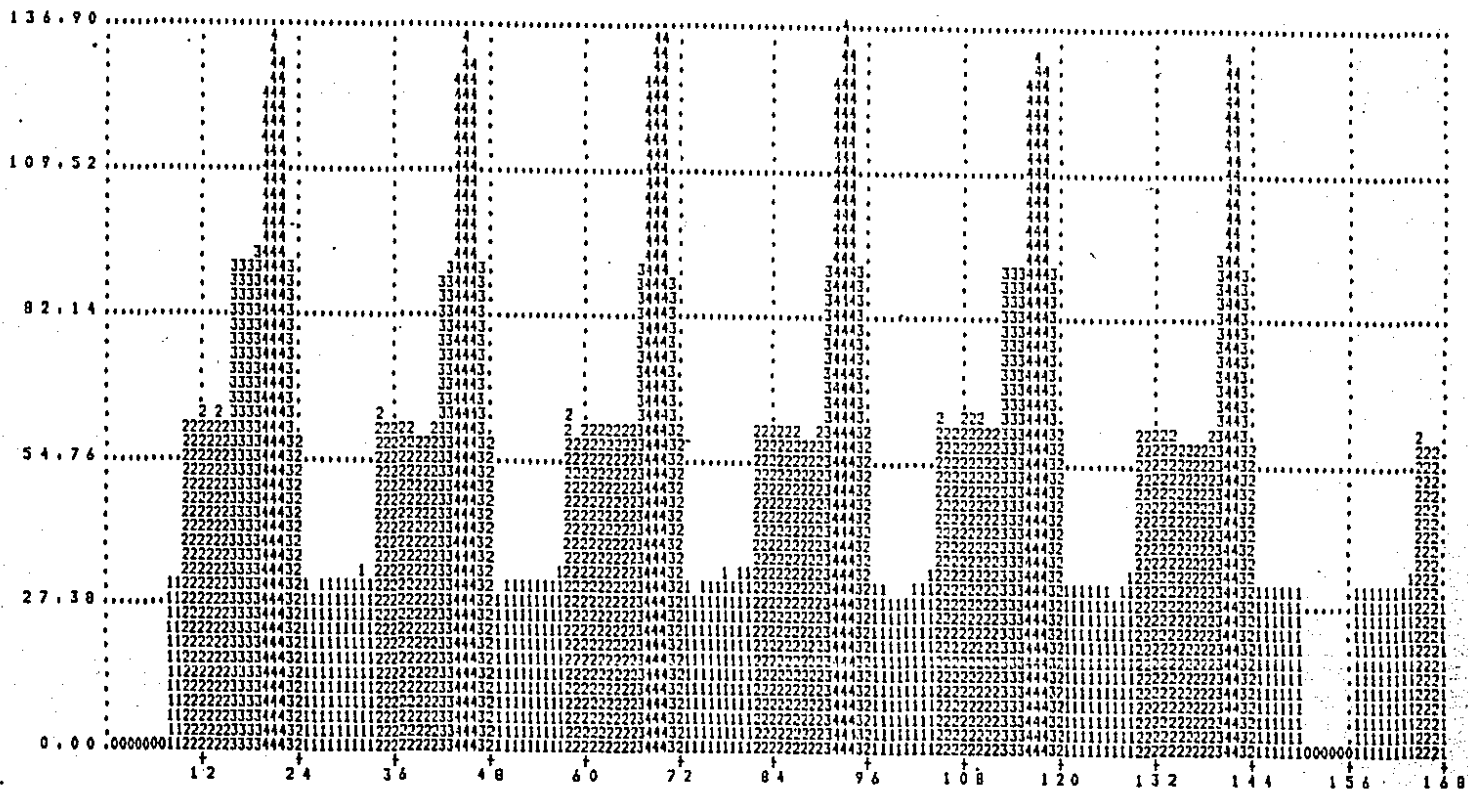


FIGURA 7.13 GENERACIONES DE LA PLANTA P7.

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE. EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( INTERVALO )

( N.V. )

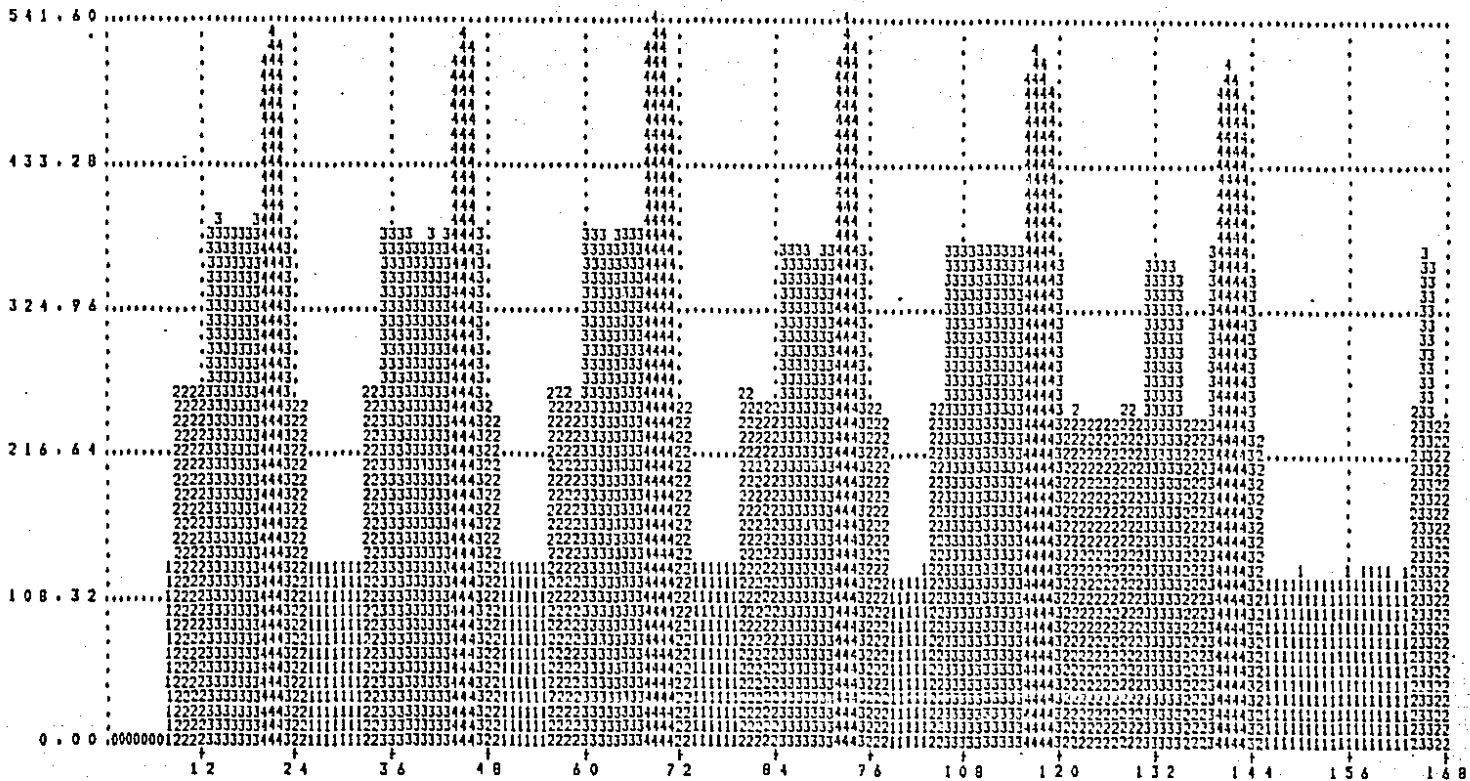


FIGURA 7.14 GENERACIONES DE LA PLANTA P8.

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.

EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( HW. )

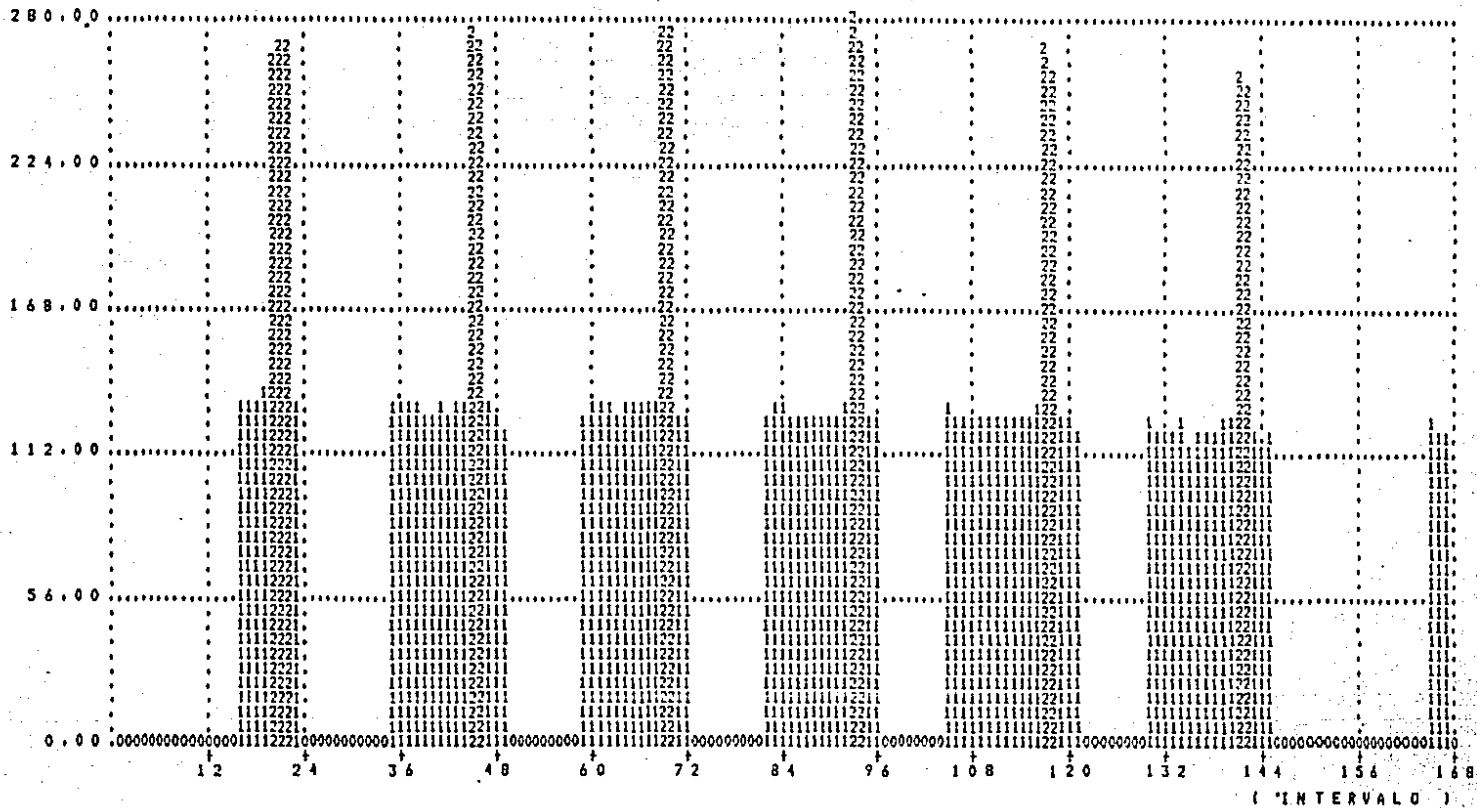


FIGURA 7.15 GENERACIONES DE LA PLANTA P9.

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.

EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.



( M U . )

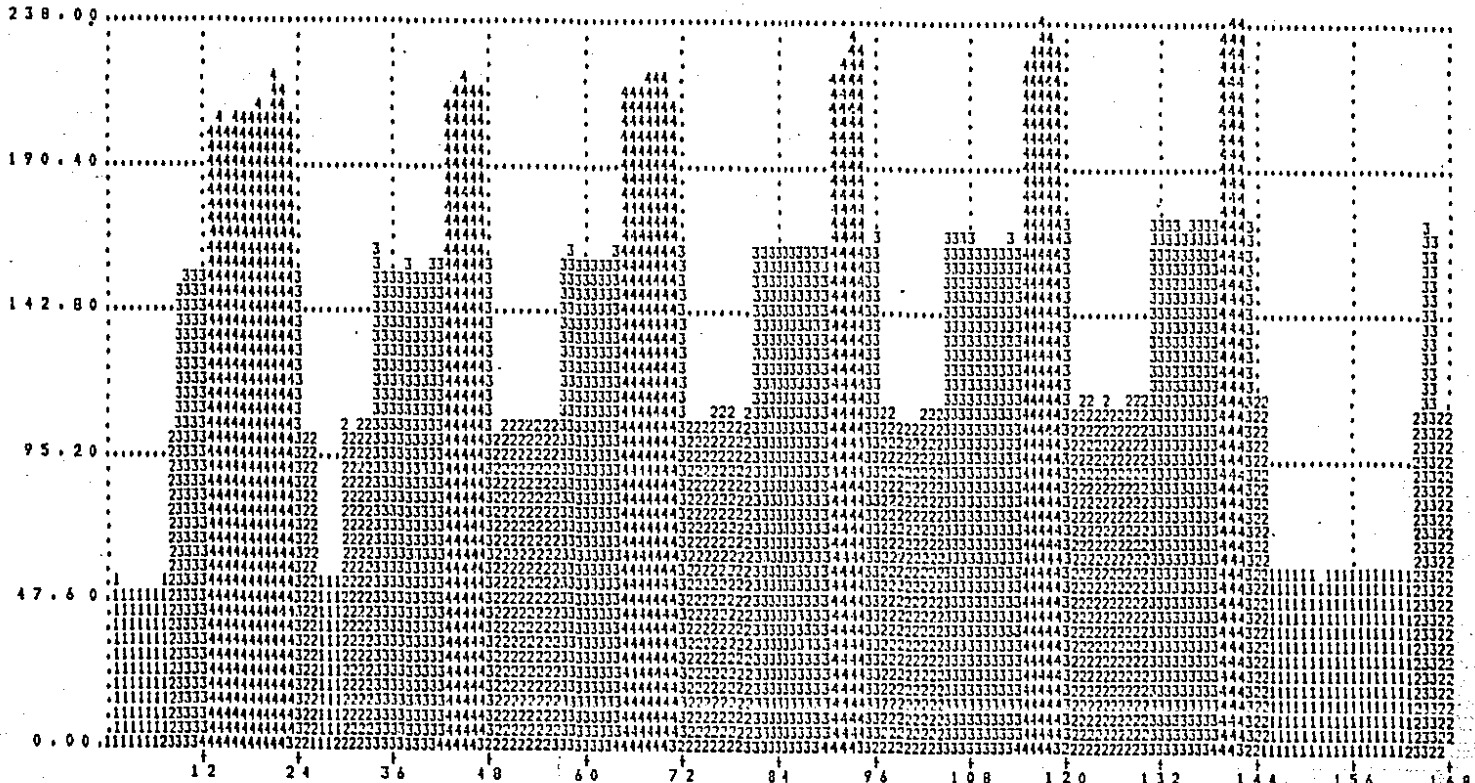


FIGURA 7.16 GENERACIONES DE LA PLANTA P10.  
 SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
 INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.  
 EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( MW. )

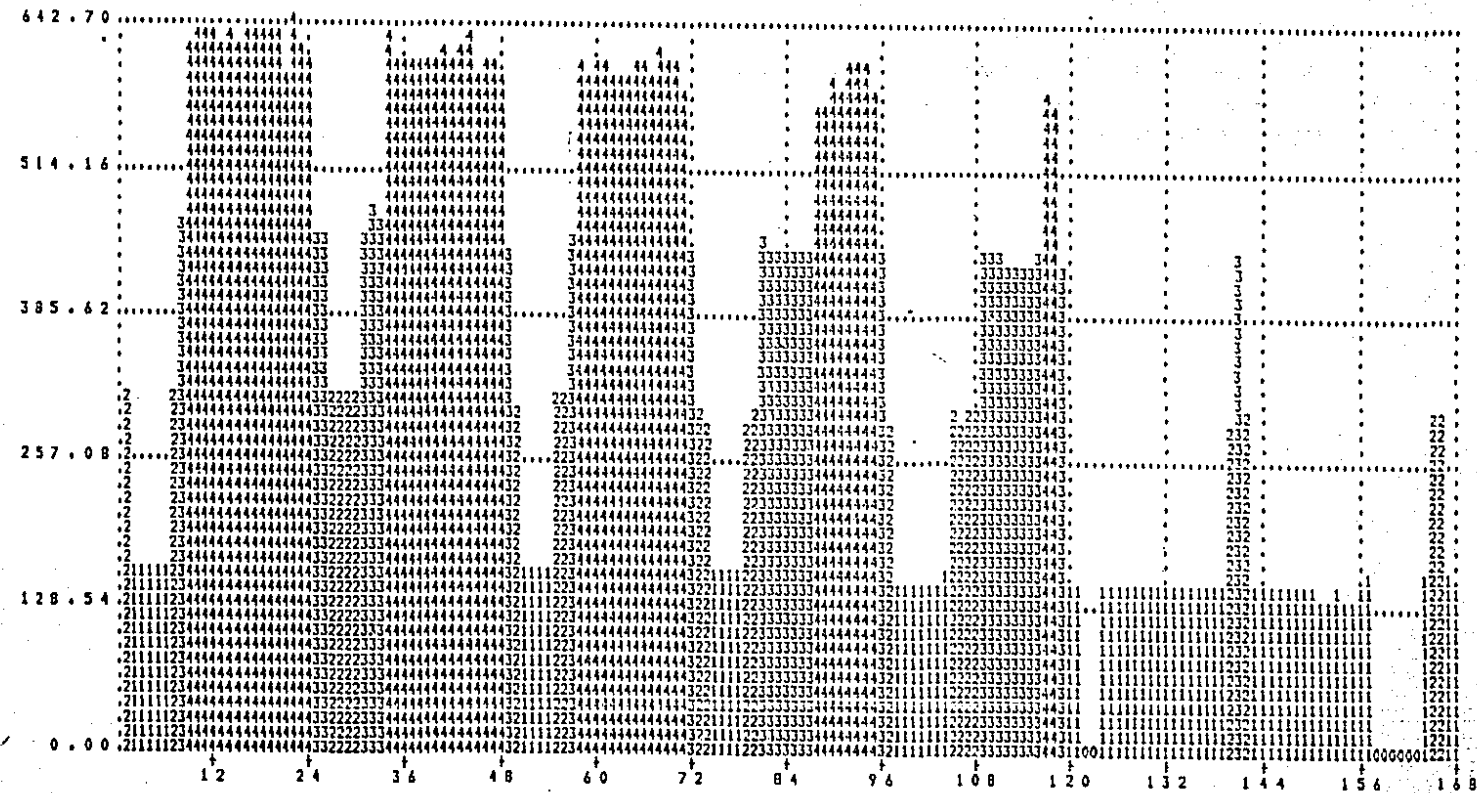


FIGURA 7.17 GENERACIONES DE LA PLANTA P11.

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA

INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.

EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( INTERVALO )

( MW. )

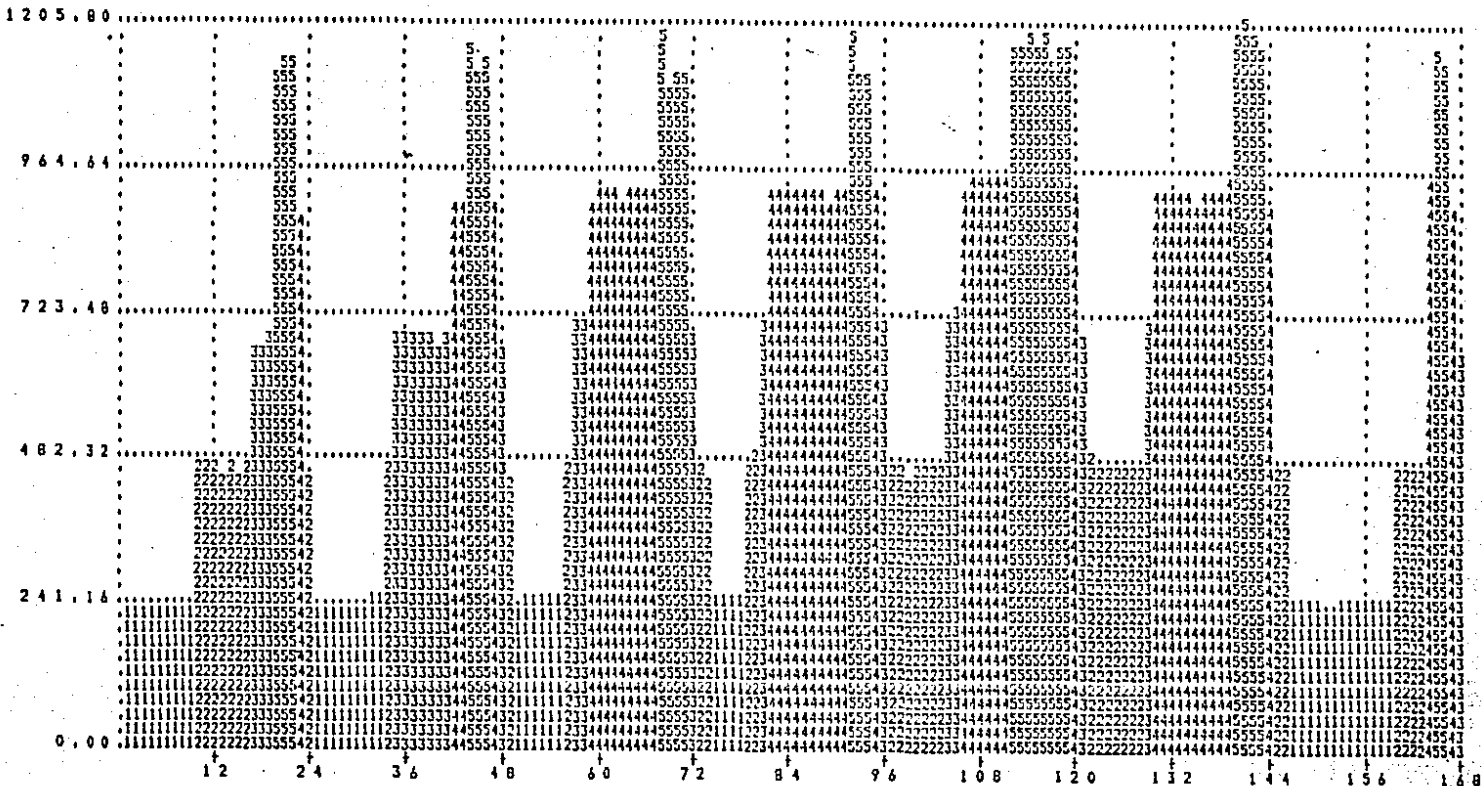


FIGURA 7.10 GENERACIONES DE LA PLANTA P13.

SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE. EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

( H V . )

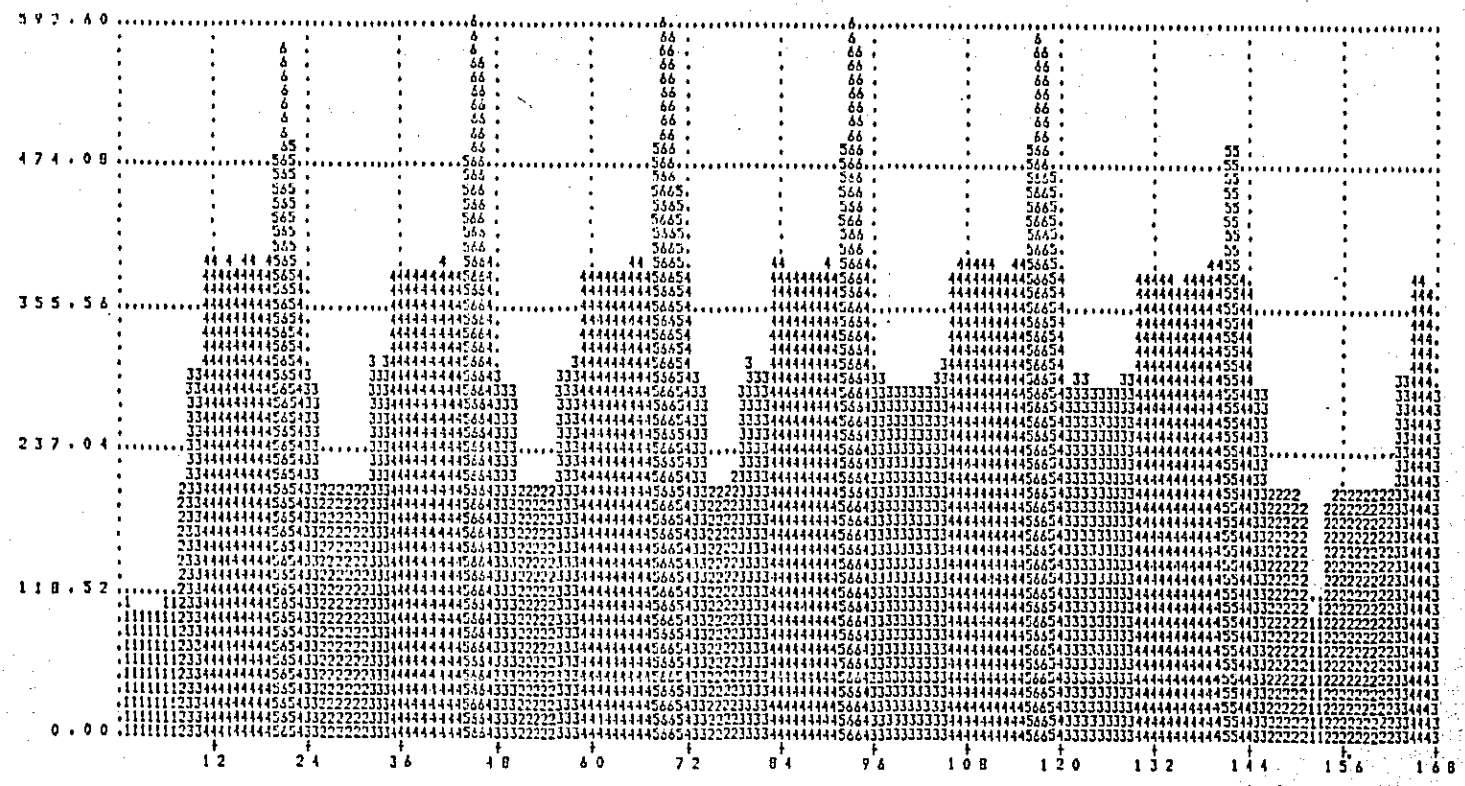


FIGURA 7.19 GENERACIONES DE LA PLANTA P13.  
 SE USA EL NUMERO DE UNIDADES EN OPERACION EN CADA  
 INTERVALO PARA FORMAR LA BARRA CORRESPONDIENTE.  
 EL NIVEL DE LA BARRA REPRESENTA LA MAGNITUD DE LA GENERACION.

7-48

( M3/5EG )

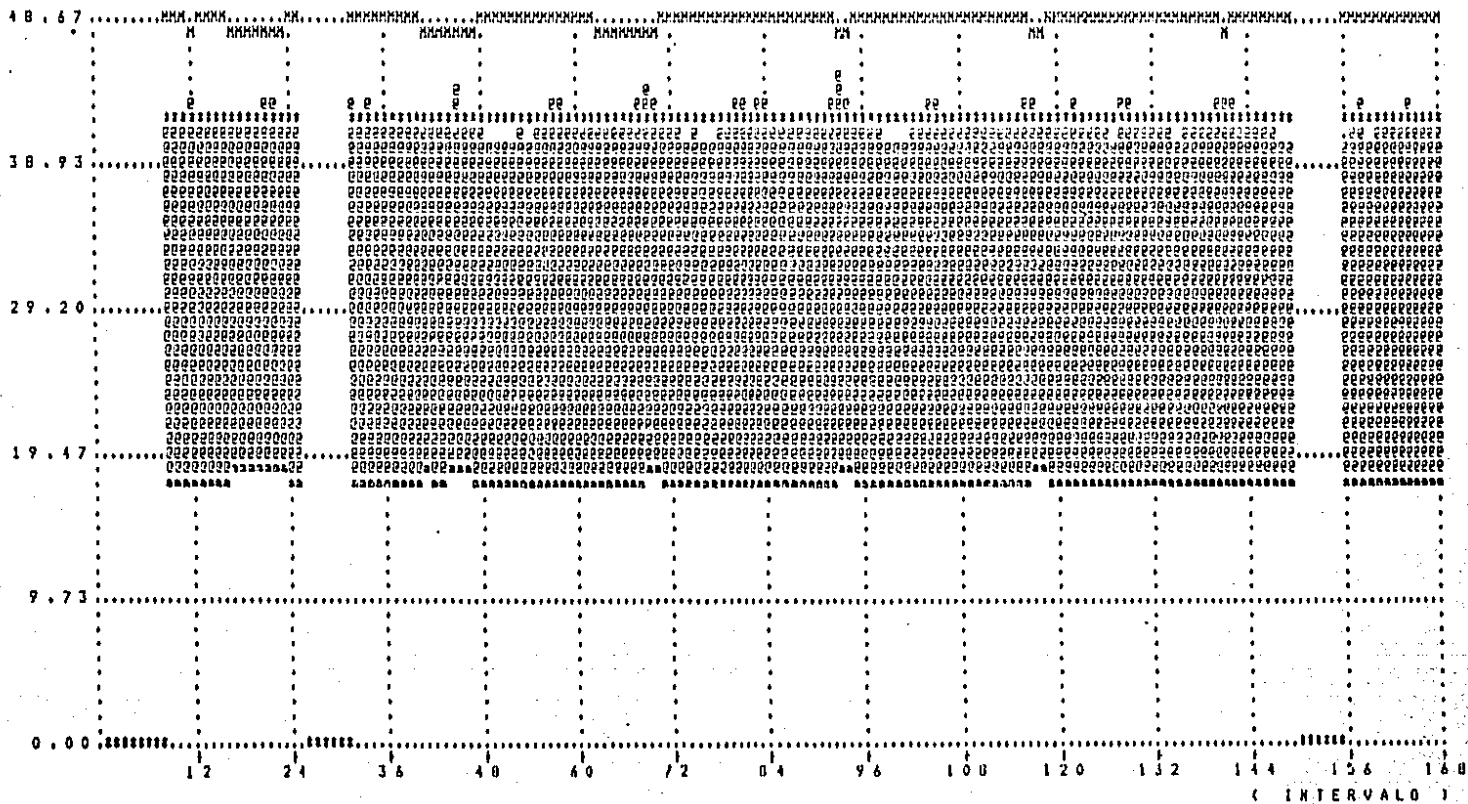


FIGURA 7.20 GASTOS DE LA UNIDAD U1.

CLAVES! K GASTO MAXIMO PARA LA ALTURA META DE OPERACION.  
 M GASTO A MAXIMA EFICIENCIA A LA ALTURA META DE OPERACION.  
 N GASTO MINIMO PARA LA ALTURA META DE OPERACION.

( M V . )

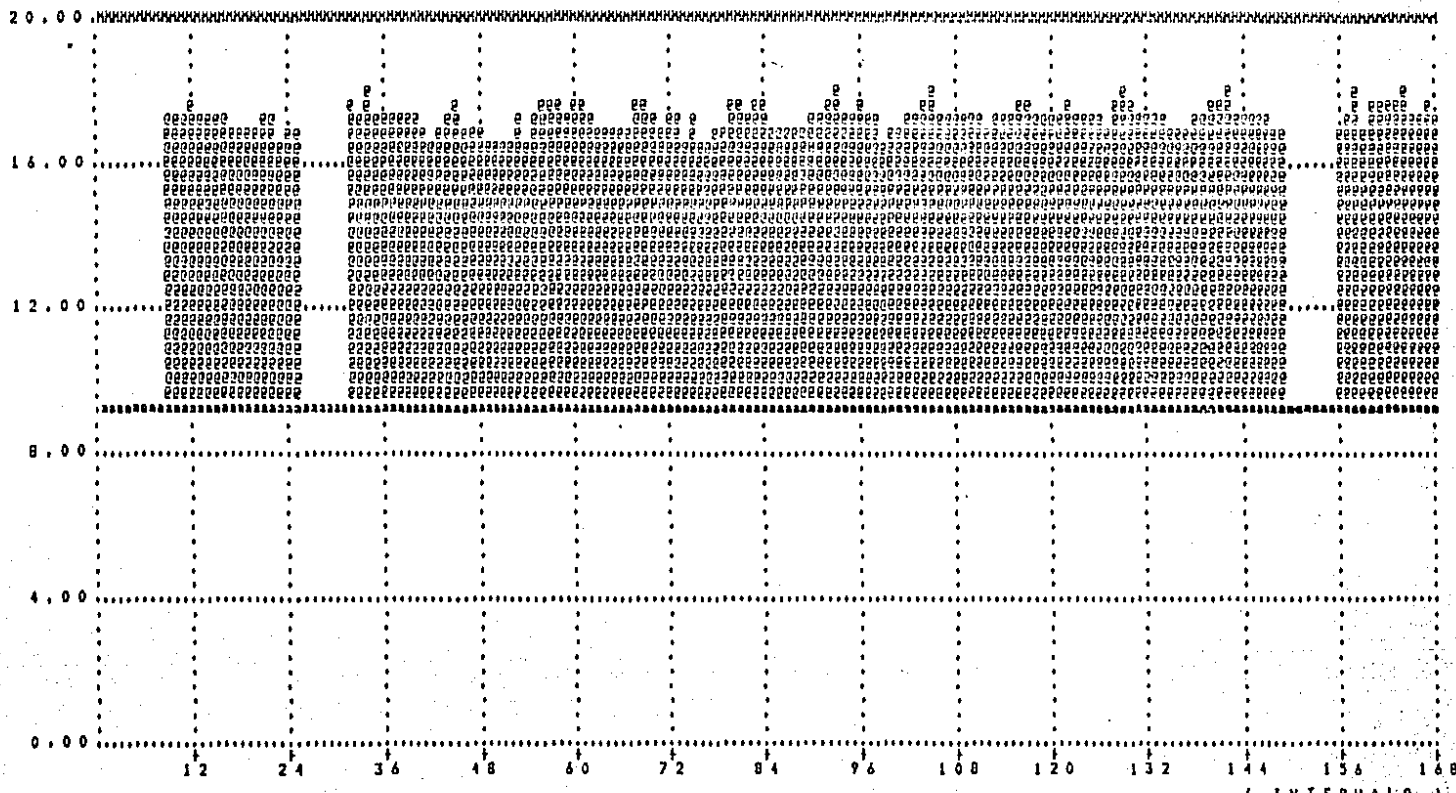


FIGURA 7.21 GENERACIONES DE LA UNIDAD UI.  
CLAVES: M GENERACION MAXIMA.  
■ GENERACION MINIMA.

( K3/SEG )

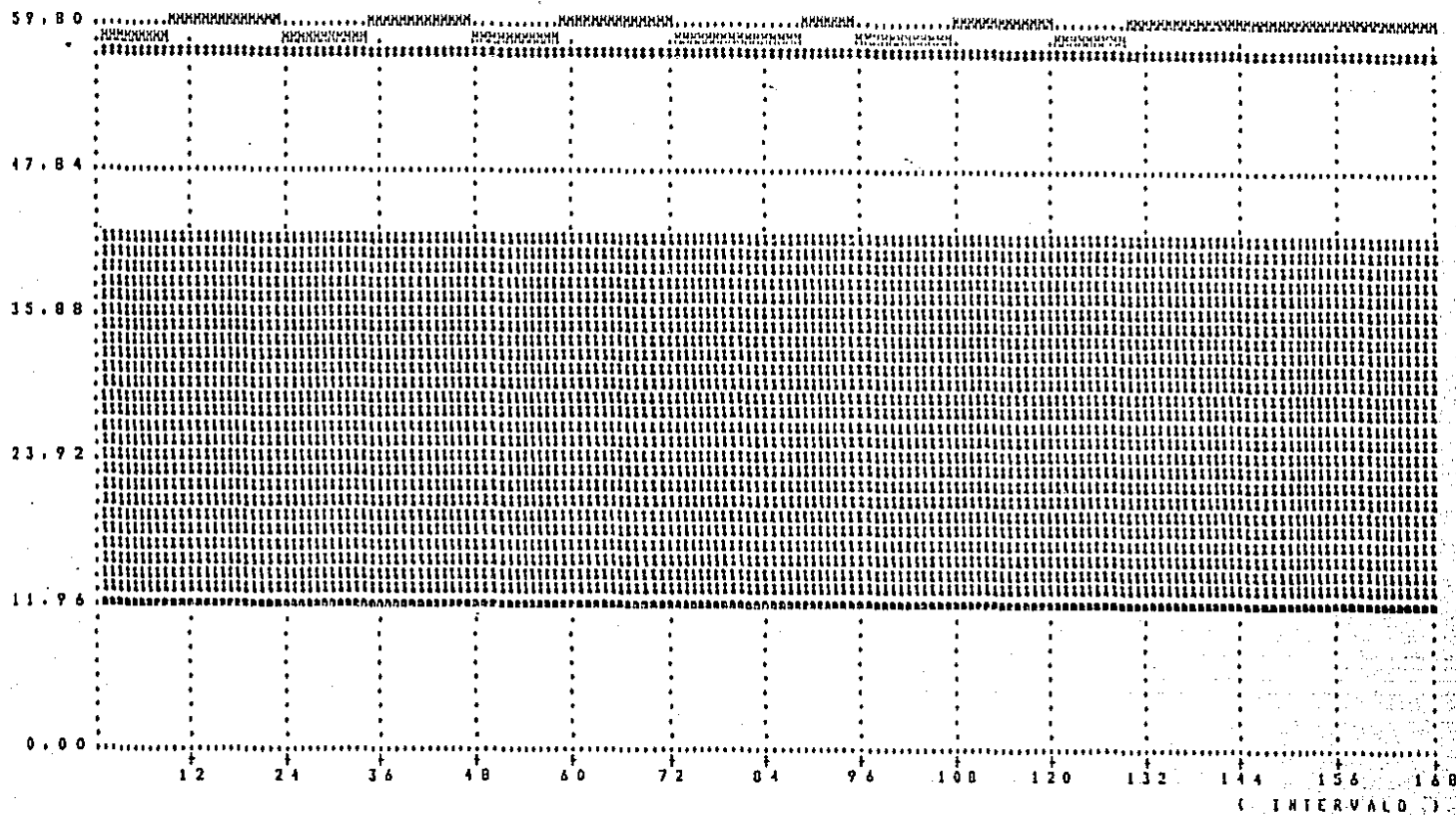


FIGURA 7.22 GASTOS DE LA UNIDAD U4.

- CLAVES: H GASTO MAXIMO PARA LA ALTURA NETA DE OPERACION,  
J GASTO A MAXIMA EFICIENCIA A LA ALTURA NETA DE OPERACION,  
A GASTO MINIMO PARA LA ALTURA NETA DE OPERACION.

( M M . )

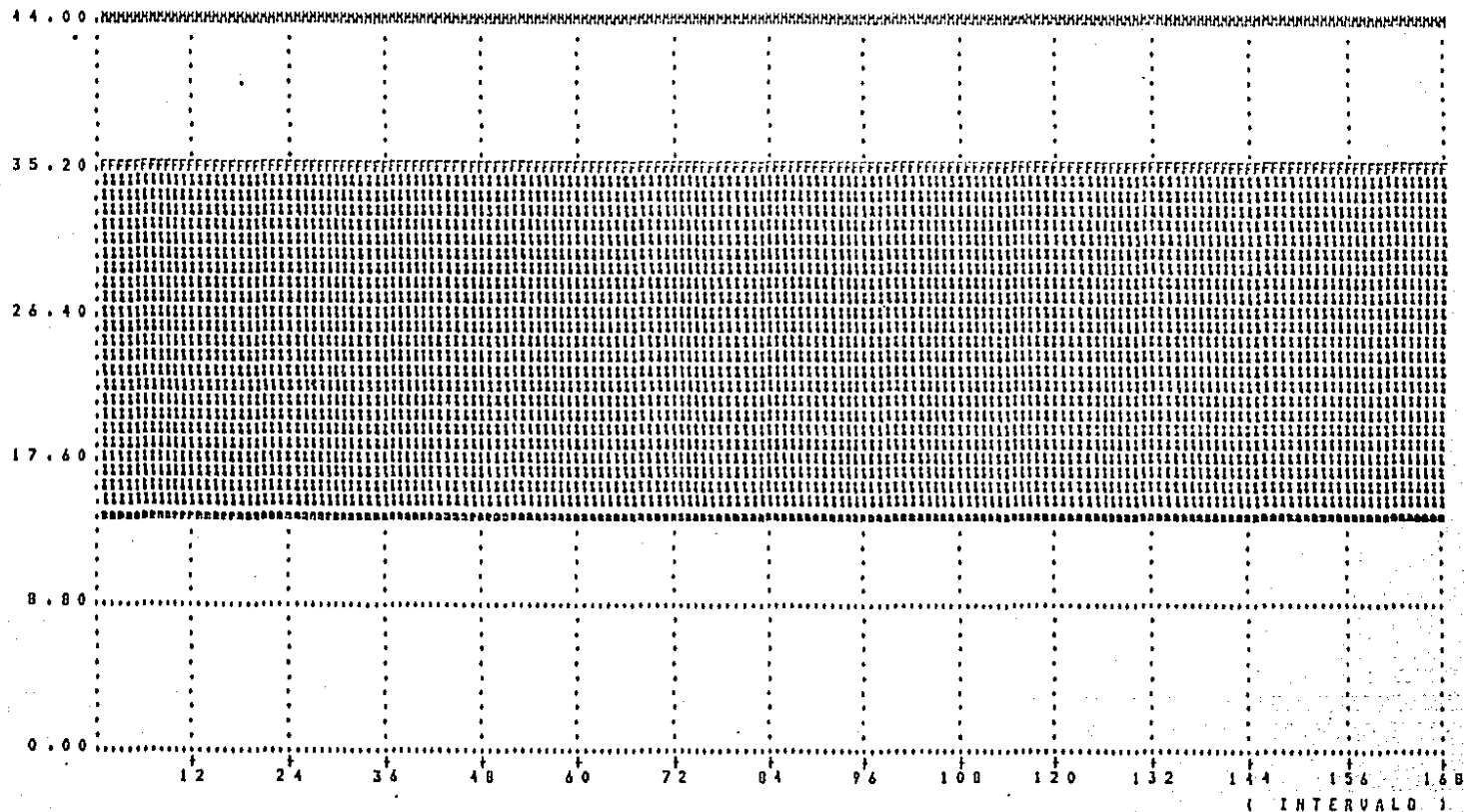


FIGURA 7.23 GENERACIONES DE LA UNIDAD U4.  
CLAVES: M GENERACION MAXIMA.  
▲ GENERACION MINIMA.



( M3/SEG )

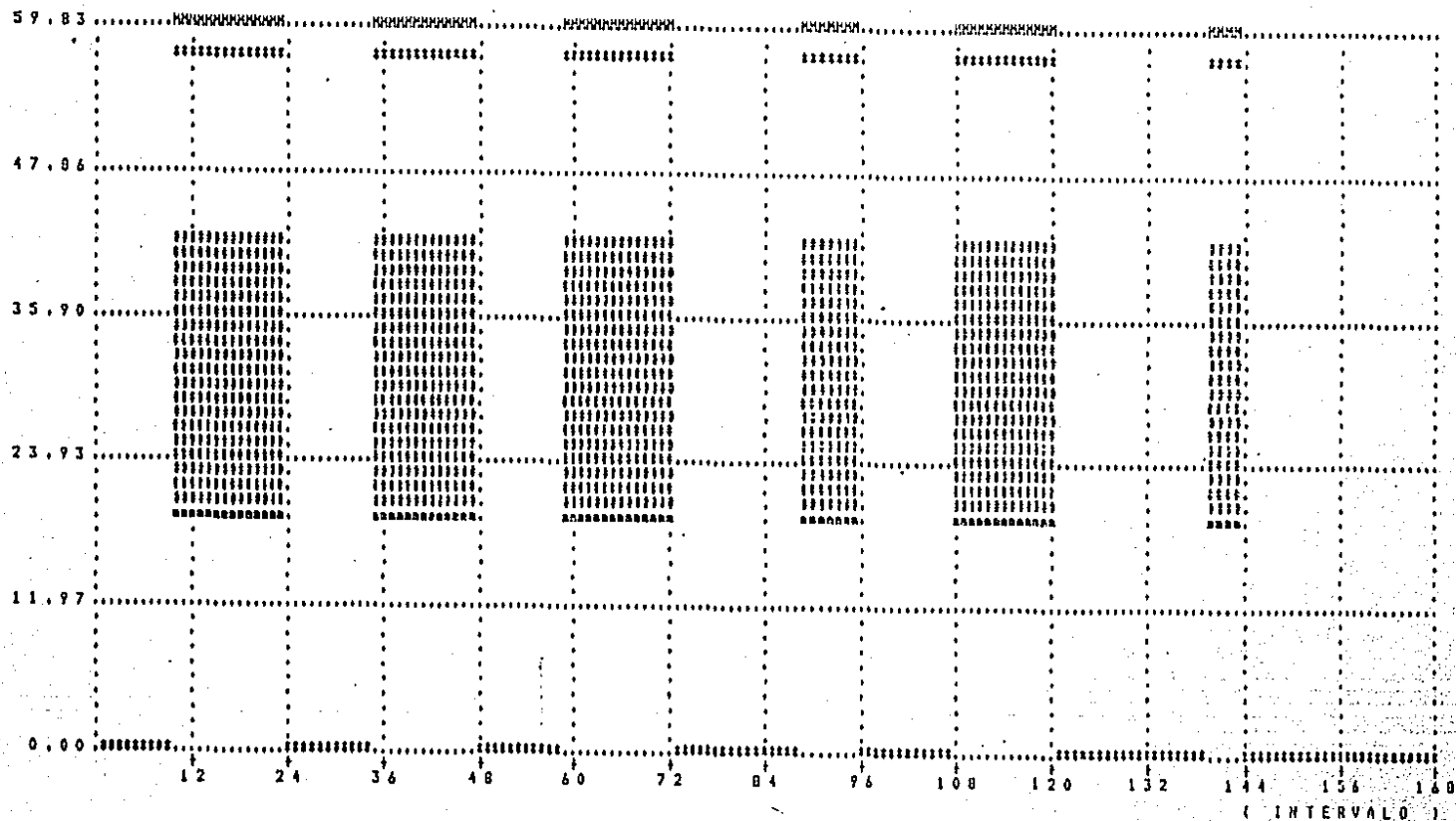


FIGURA 7.24 GASTOS DE LA UNIDAD U6.

CLAVES: ■ GASTO MAXIMO PARA LA ALTURA META DE OPERACION.

■ GASTO A MAXIMA EFICIENCIA A LA ALTURA META DE OPERACION.

■ GASTO MINIMO PARA LA ALTURA META DE OPERACION.

( M.M. )

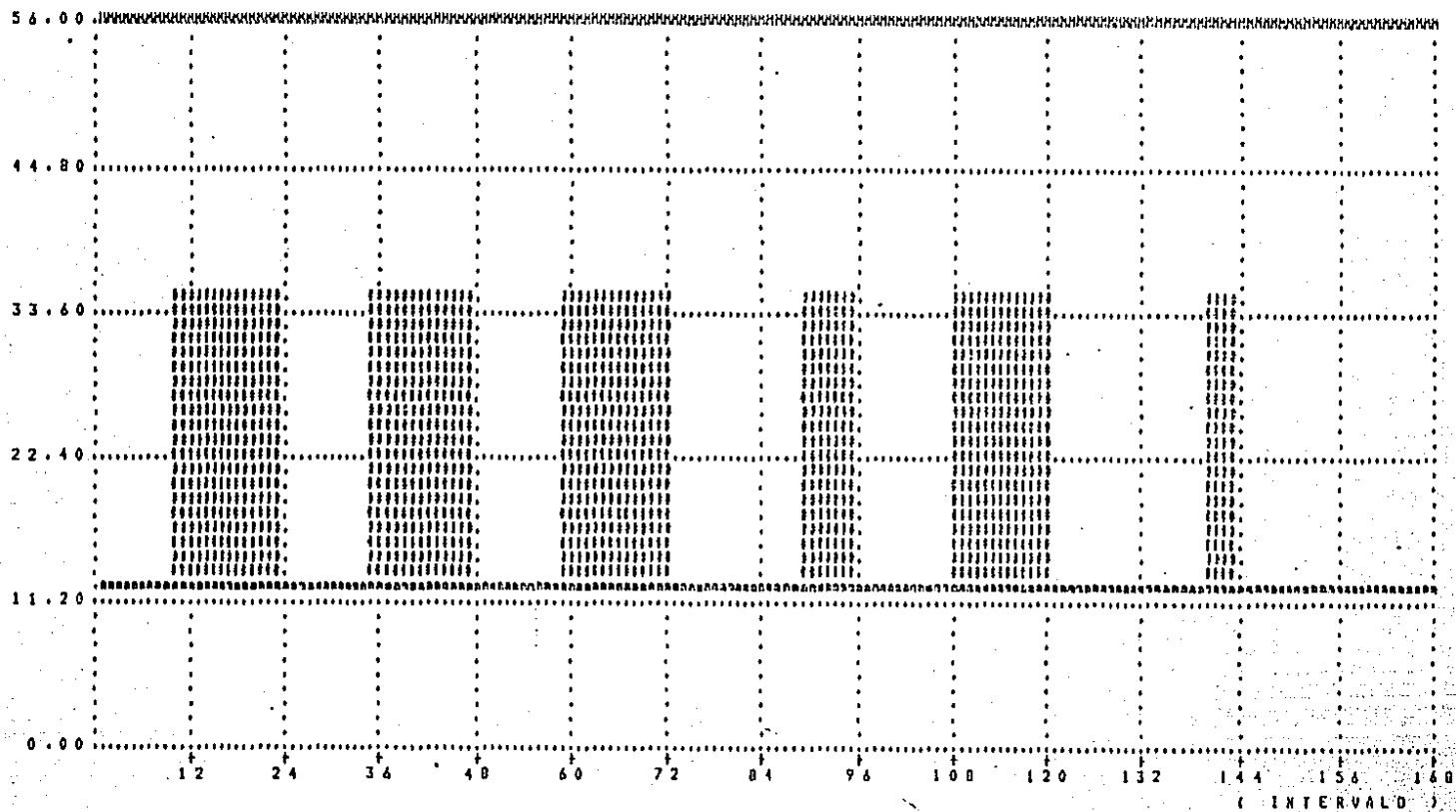


FIGURA 7.25 GENERACIONES DE LA UNIDAD U6.  
CLAVES: M GENERACION MAXIMA.  
m GENERACION MINIMA.

( H3/SEG )

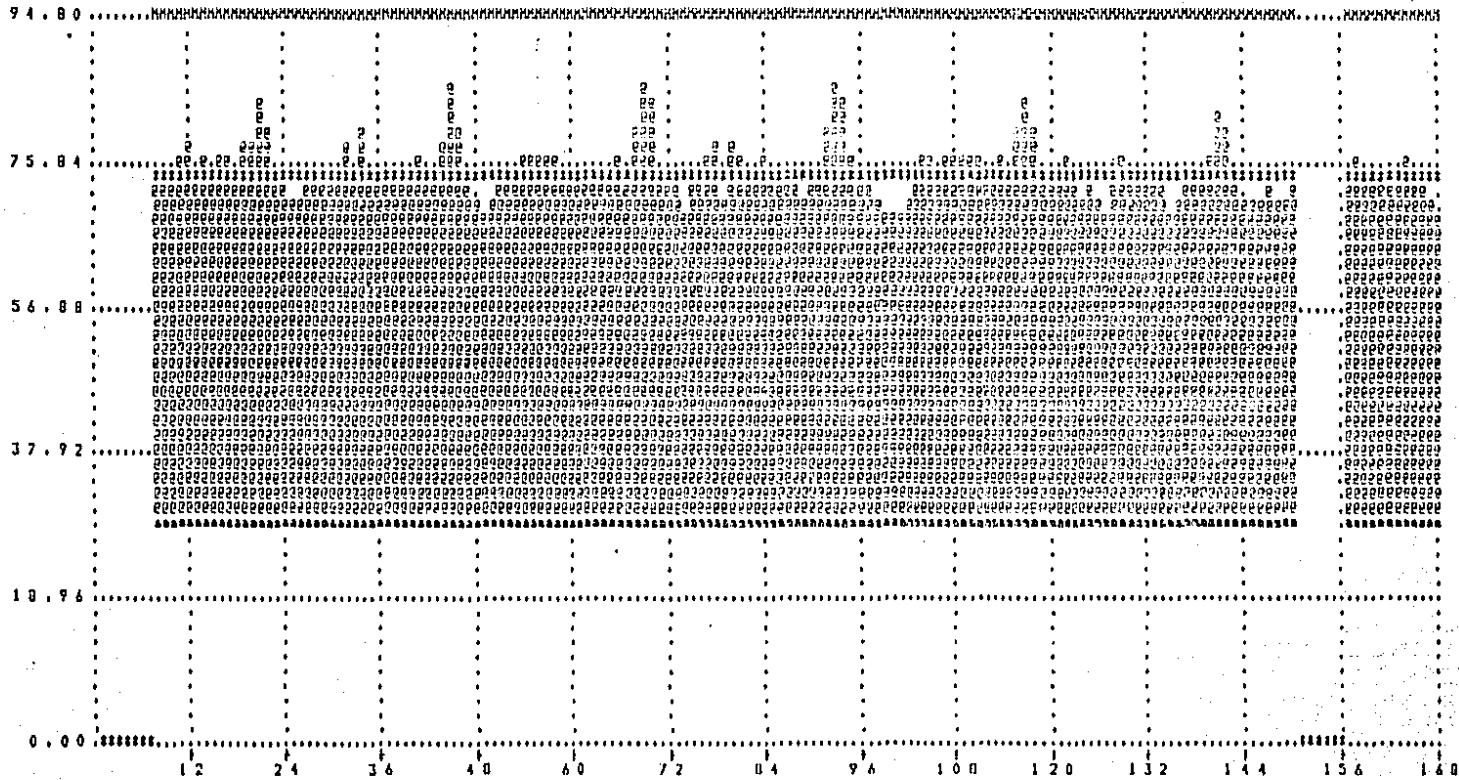


FIGURA 7.24 GASTOS DE LA UNIDAD U21.

- CLAVE H GASTO MAXIMO PARA LA ALTURA NETA DE OPERACION.
- CLAVE A GASTO A MAXIMA EFICIENCIA A LA ALTURA NETA DE OPERACION.
- CLAVE B GASTO MINIMO PARA LA ALTURA NETA DE OPERACION.

( M.V. )

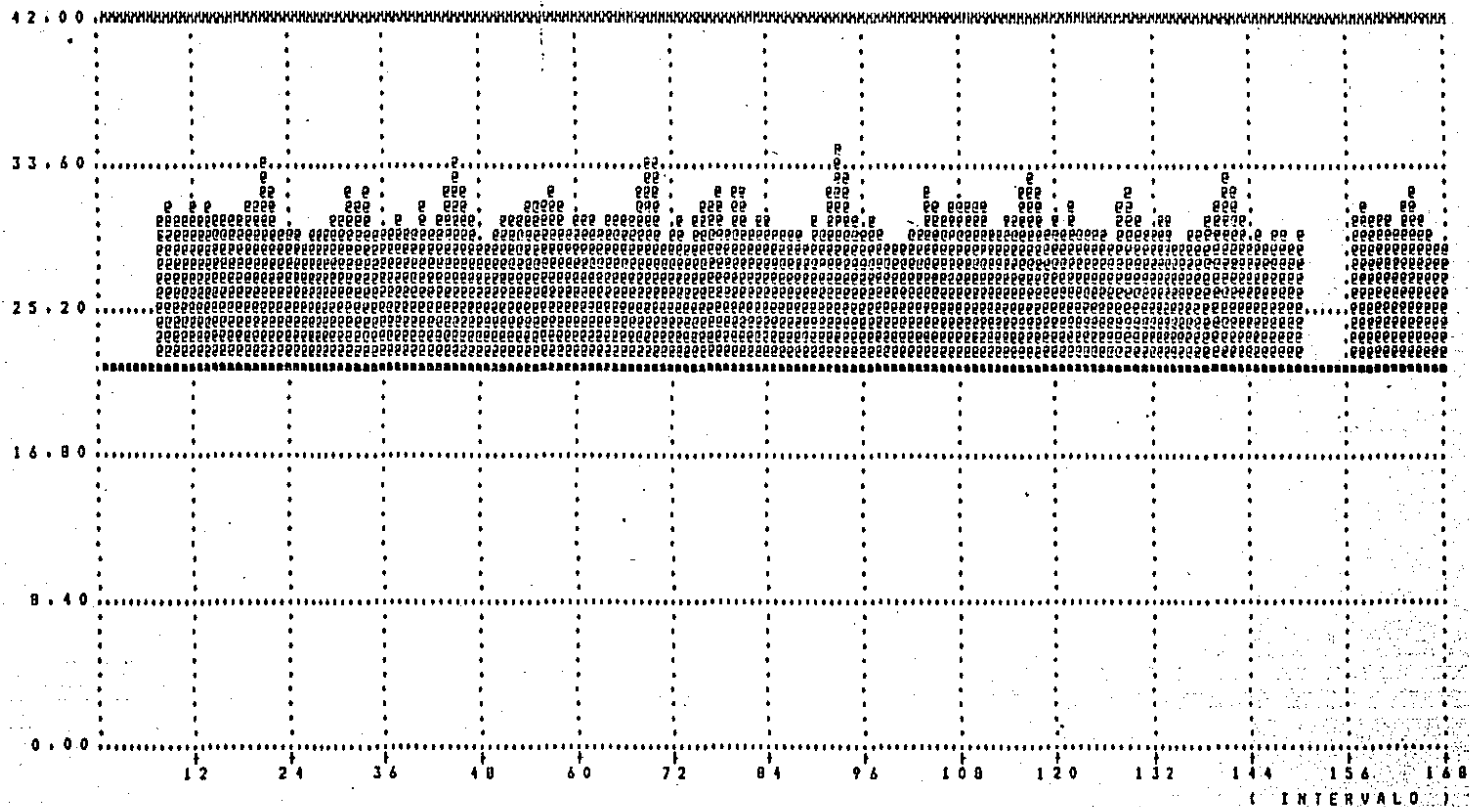
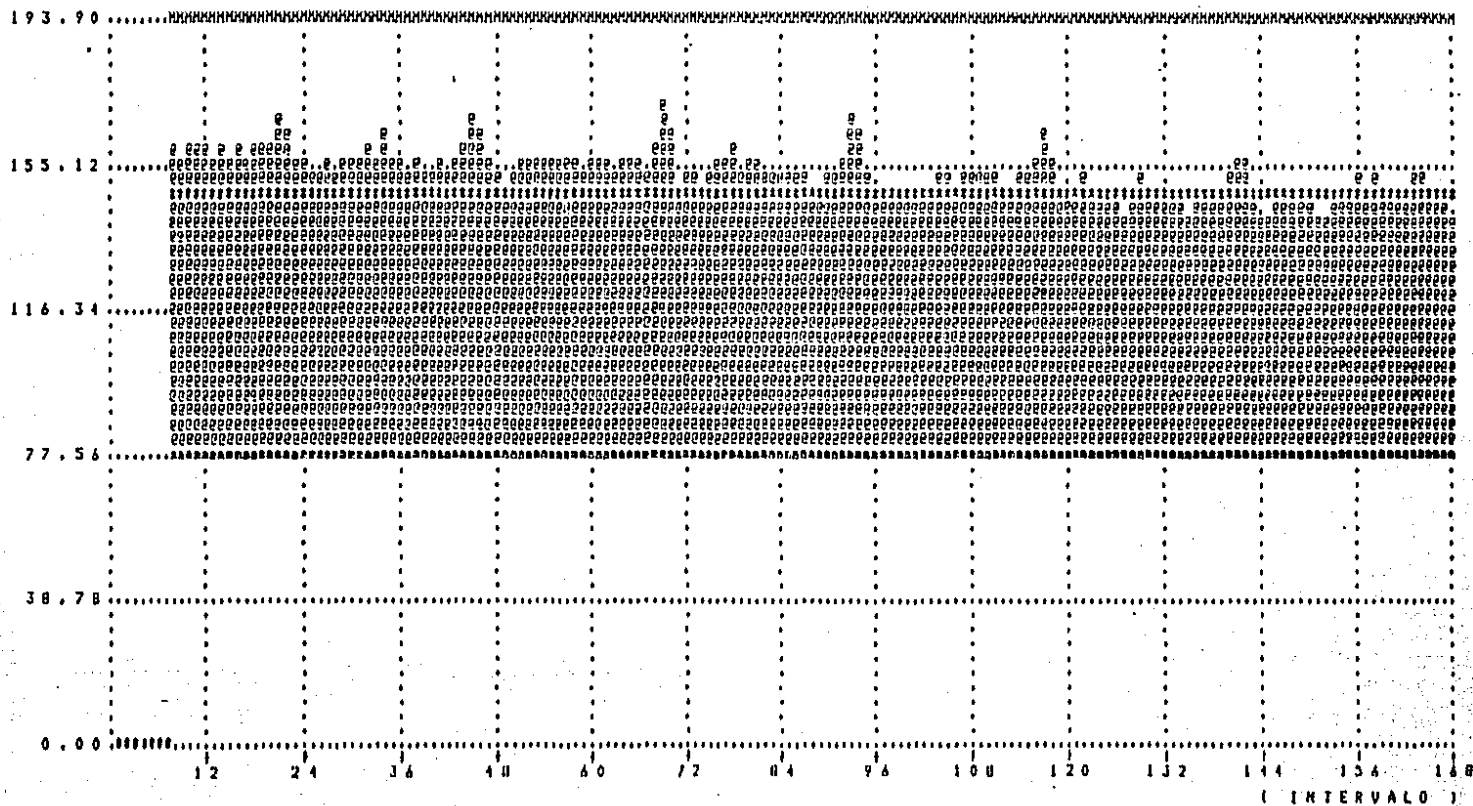


FIGURA 7.27 EVOLUCIONES DE LA UNIDAD U21.  
CLAVES: X GENERACION MAXIMA.  
a GENERACION MINIMA.

( M3/5EG )



( M. )

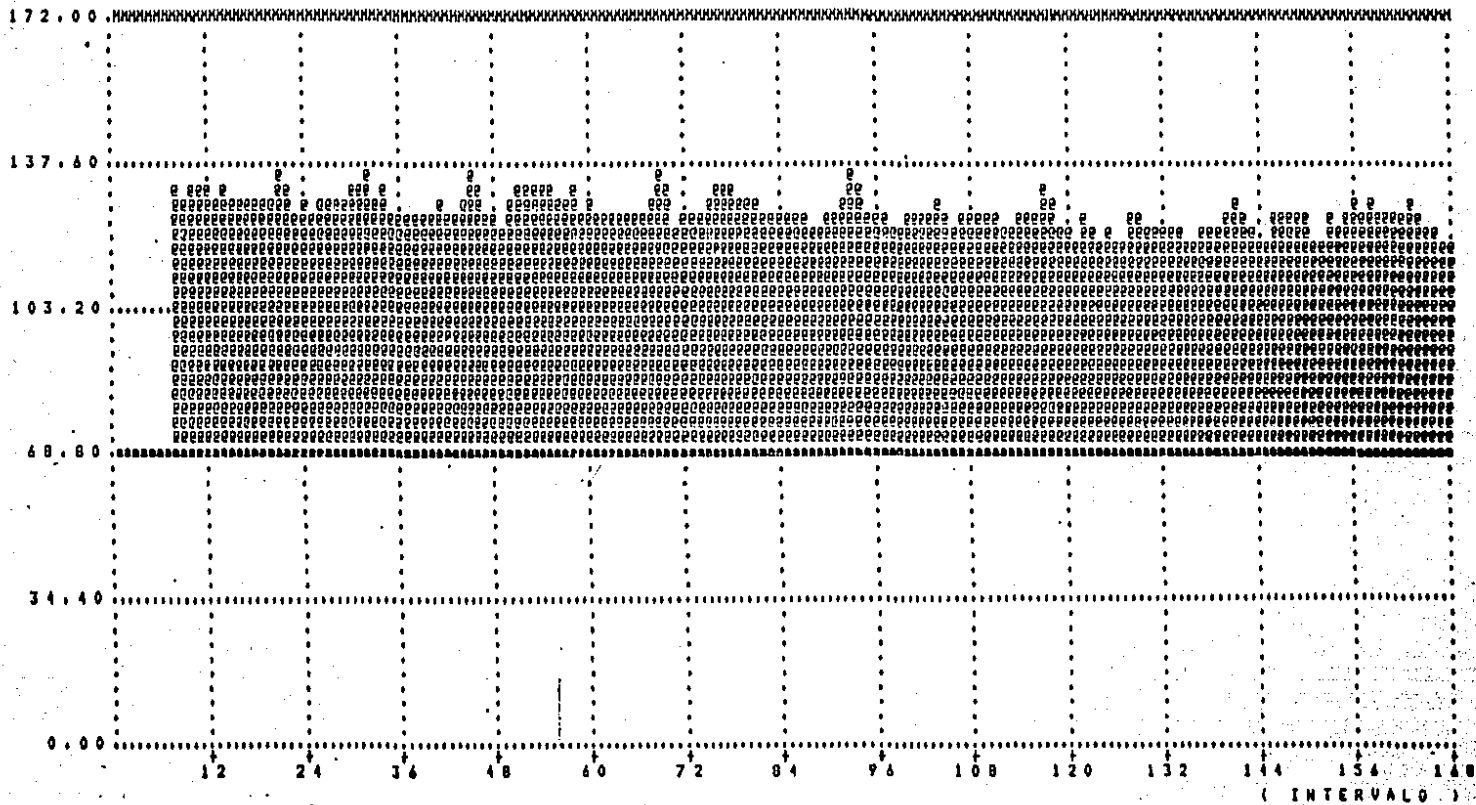


FIGURA 7.29 GENERACIONES DE LA UNIDAD U25.  
CLAVES: x GENERACION MAXIMA.  
o GENERACION MINIMA.

### 7.3.1 Observaciones sobre los resultados.

- a. La diferencia entre el valor de la función objetivo en la solución y la cota inferior al valor de la función objetivo ( tabla 7.16 ) es: 10'590,525. Esta diferencia expresada en por ciento de la cota inferior es: 4.1%.
- b. El perfil de la generación hidroeléctrica ( figura 7.2 ) es similar al de la demanda. El perfil de generación termoeléctrica es casi plano; los picos y valles de la pequeña variación que presenta son coincidentes con los de la demanda.
- c. Se presentó una sola violación al límite superior de generación ( tabla 7.18 ).
- d. En el embalse E7 ( figura 7.5 ), a pesar de que tanto el nivel inicial como el final eran iguales al nivel máximo de operación, no se violó este nivel en ninguno de los 168 intervalos del período de planeación.
- e. En el embalse E9 ( figura 7.6 ) se presentan dos efectos superpuestos: uno es una oscilación en el nivel con un período aproximado de 24 horas, y el otro, es una elevación del nivel que alcanza su máximo a la mitad del período de planeación.

- f. En las plantas ( figuras 7.7 a 7.19 ) se arrancan y paran unidades paralelamente al aumento y la disminución de la demanda.
- g. En la planta P6 están en operación todas sus unidades durante casi todo el período de estudio ( figura 7.12 ). En la planta P5 están en operación todas sus unidades sólo durante los intervalos de mayor demanda ( figura 7.11 ). Sin embargo, ambas plantas toman agua del mismo embalse y descargan sobre la misma vía.
- h. El gasto turbinado por las unidades coordinables, cuando operan, está alrededor del gasto a máxima eficiencia a la carga hidráulica a la que operan ( figuras 7.20, 7.26, y 7.29 ).
- i. Excepto por las violaciones ya indicadas todas las demás restricciones se satisfacen.

### 7.3.2 Discusión de las observaciones.

- a. El valor de la cota inferior a la función objetivo del problema es un valor inalcanzable para cualquier algoritmo. Su utilidad es dar una medida cuantitativa del desempeño del método empleado. En este caso se garantiza que no se comete un error en costo mayor que un 4.1%; pero es muy probable que la diferencia en costo entre la solución obtenida y la solución óptima sea mucho menor.



- b. Si para las condiciones de este ejemplo la eficiencia de las plantas hidroeléctricas fuese constante, se esperaría un perfil de generación termoeléctrica completamente plano y un perfil de generación hidroeléctrica idéntico al perfil de la demanda. No ocurre de esta manera porque el algoritmo considera el efecto de: la variación de los niveles en los embalses, la variación del nivel del desfoque, las pérdidas en los conductos y la dependencia de la generación de las unidades respecto a la altura neta y al gasto; todos estos efectos hacen que la eficiencia de las plantas no sea constante.

Enseguida se describe una de la gran cantidad de posibles comprobaciones que se pueden hacer para verificar que el perfil termoeléctrico que resultó es el apropiado. Si el algoritmo hubiera encontrado la solución óptima, cualquier cambio que se hiciera a las variables de decisión debería dar como resultado un aumento en el costo de operación. Aunque no se garantiza que el algoritmo obtiene la solución óptima, si se espera que, al menos por costo, la solución obtenida se encuentre cerca de la solución óptima. La comprobación consiste en hacer un cambio que parece prometedor, y la evaluación del beneficio obtenido por este cambio. El cambio fue: poner fuera de operación la unidad U11 en el intervalo 152 y emplear el agua

que turbina para aumentar la generación de las seis unidades de la planta P6 en los intervalos 45, 69, 93 y 117. El cambio es prometedor porque en el intervalo 152 se dejaría de substituir generación termoeléctrica con el costo incremental más bajo del período de planeación, a cambio de substituir generación termoeléctrica durante los intervalos en los que el costo incremental es el más alto de todo el período de estudio. Las tablas 7.19 y 7.20 resumen los cálculos y resultados del cambio descrito.

Las tablas 7.19 y 7.20 muestran que se pierden 3.13 MWH por usar el agua en los intervalos 45, 69, 93, y 117 en lugar de usarla en el intervalo 152; además, aunque cada unidad de energía es "vendida" a un precio mayor, el cambio da como resultado un aumento en el costo de operación por una cantidad de \$473. El resultado muestra que este cambio "prometedor" en el perfil de generaciones no debe hacerse.

- c. Una violación en el límite de generación de un grupo no resulta extraño, puesto que la restricción de generación máxima no la maneja el algoritmo como una restricción dura, sino que es considerada a través de penalizaciones. Lo que importa es la magnitud relativa de la violación. En este caso la violación es apenas del 0.098% del límite impuesto al grupo. No creemos que violaciones con un va-

TABLA 7.19

Situación antes del cambio en los perfiles de generación.

Int	Turbinado de cada unidad K(m <sup>3</sup> )/h	Altura bruta (m)	Pérdidas en conductos (m)	Altura neta (m)	Generación de la planta (MW)	Generación termoeléctrica (MW)	Costo \$
45	8.300	425.39	7.55	417.84	42.48	6504.56	2115465
69	8.300	425.86	7.55	418.31	42.54	6503.33	2114665
93	8.457	426.32	7.84	418.48	43.20	6535.60	2135703
117	8.175	427.14	7.32	419.82	42.24	6328.15	2002274
152	13.600	428.66	5.27	423.39	11.12	5107.21	1304180
Tot					181.58		9672287

TABLA 7.20

Situación después del cambio en los perfiles de generación.

Int	Turbinado de cada unidad K(m <sup>3</sup> )/h	Altura bruta (m)	Pérdidas en conductos (m)	Altura neta (m)	Generación de la planta (MW)	Generación termoeléctrica (MW)	Costo \$
45	9.000	425.39	8.87	416.52	44.94	6502.10	2113865
69	9.000	425.86	8.87	416.99	45.00	6500.87	2113066
93	9.000	426.32	8.87	417.45	45.12	6533.68	2134449
117	8.499	427.14	7.91	419.23	43.44	6326.95	2001515
152	-	-	-	-	0.00	5118.33	1309865
Tot					178.50		9672760

lor relativo tan pequeño sean un impedimento real para llevar a cabo el plan de operación.

- d. Con esta observación se quiere hacer resaltar la habilidad del algoritmo para tratar situaciones hidráulicas difíciles. La situación que se planteó era difícil porque el embalse E7 estaba completamente lleno al inicio del período de planeación y se pedía que al final quedara igualmente lleno; además, este embalse está sujeto a las descargas del E6, que se encuentra aguas arriba, el cual tiene seis unidades con una gran capacidad de turbinado.
- e. La oscilación diaria tiene dos causas: una es que se usa más agua durante las últimas doce horas de cada día que en las primeras doce; y la otra, es el retraso de doce horas con el que llega el agua turbinada por el embalse aguas arriba. Por lo anterior, ocurre que durante las primeras doce horas del día coinciden el mínimo turbinado en el embalse E9 con el máximo escurrimiento debido al turbinado del embalse E8, que se encuentra aguas arriba; como resultado se eleva el nivel de E9. Por el contrario, durante las últimas doce horas del día coinciden el máximo turbinado del embalse E9 con el mínimo escurrimiento debido al turbinado del embalse E8; el resultado es una disminución del nivel de E9.

La elevación del nivel que alcanza su máximo a la mitad del período de planeación es debida a que se produce más energía por  $m^3$  de agua cuando el nivel en los embalses es alto. El algoritmo tiene la habilidad de considerar este comportamiento; y lo pone de manifiesto en este embalse, cuyo nivel es muy sensible al volumen almacenado, o dicho de otra forma, en este embalse con poca agua se logra elevar el nivel sensiblemente.

- f. Con esta observación, se quiere subrayar que los arranques y paros de unidades fueron los necesarios para cubrir con generación hidroeléctrica la fracción conveniente de la variación que presenta la demanda.
- g. La tendencia a usar preferentemente las unidades de la planta P6 se debe a que son un poco más eficientes que las unidades de la planta P5. Por ejemplo: con una altura neta de 420 mts. ( que fue el valor medio al que operaron estas unidades ) y turbinando el gasto a máxima eficiencia a esta altura, la relación generación a gasto para las unidades de la planta P5 es  $2.92 \text{ MW-seg./m}^3$ , mientras que para las unidades de la planta P6 es  $3.15 \text{ MW-seg./m}^3$ .
- h. El que las unidades turbinen alrededor del gasto a máxima eficiencia es una característica deseable que se buscó al diseñar el algoritmo. Es posible ajustar externamente

un parámetro para cambiar el valor, alrededor del cual, turbinen las unidades.

- i. Esta observación se incluyó para subrayar que se satisface casi la totalidad de las restricciones.

### 7.3.3 El método visto a través de sus resultados.

El gran número de pruebas realizadas durante el desarrollo del método, las pruebas formalmente documentadas [ 2 ] y los resultados en el ejemplo que se acaba de presentar, nos permiten afirmar que el método tiene las características siguientes:

- Obtiene buenas soluciones desde el punto de vista económico, difiere del orden de 4% de la cota inferior al costo de la solución óptima, cuando el 35% de la producción de energía es hidroeléctrica.
- Satisface todas las restricciones excepto por violaciones tolerables en un número reducido de ellas.
- Propone condiciones de operación muy deseables en lo relativo a los arranques y paros de unidades, así como para los gastos turbinados por las unidades ( alrededor de los puntos de máxima eficiencia ).
- El tiempo de ejecución es aceptable, considerando que el sistema se modela con gran detalle.

## CAPÍTULO 8 .

## CONCLUSIONES Y EXTENSIONES POSIBLES.

Conclusiones.

Se ha presentado un planteamiento de la parte hidroeléctrica del problema de planeación a corto plazo de la operación de sistemas de potencia. El problema matemático resultante es muy complejo a cambio de disminuir la brecha entre el mundo real y el modelo que lo representa. Este acercamiento a la realidad se ha logrado representando con gran detalle al sistema.

Por una parte, se reconoce como elemento básico a la unidad hidroeléctrica, y no a la planta, que es un agrupamiento de unidades. Por otra parte, no se han sobresimplificado el comportamiento ni las relaciones entre los elementos del sistema hidráulico; así pues, se consideran: los acoplamientos hidráulicos entre embalses de una misma cuenca; el comportamiento no-lineal del nivel respecto al volumen almacenado en los embalses; la dependencia del nivel de desfogue respecto al gasto turbinado, el vertido y el nivel del embalse aguas abajo; las pérdidas de altura en los conductos; y la relación no-lineal entre la generación, el gasto y la altura neta de

las unidades.

La complejidad del problema se deriva de tres características:

- La presencia de variables discretas además de las variables continuas.
- Relaciones no-lineales entre las variables del problema.
- El tamaño cuando se consideran casos reales: miles de variables continuas, miles de variables discretas y varias decenas de miles de restricciones.

El método de solución propuesto explota las características de los elementos del sistema y la estructura matemática del problema. Hace uso de algoritmos de programación matemática de reciente creación para alcanzar la eficiencia necesaria en el uso de los recursos computacionales que lo hace ser aplicable.

El método admite el cálculo de una cota inferior al valor óptimo de la función objetivo. Esta cota permite dar una garantía sobre el desempeño del método, disminuyendo de esta manera la incertidumbre introducida por haber empleado técnicas heurísticas.



Los resultados obtenidos en un gran número de ensayos y los presentados en este trabajo, muestran que el método:

- Obtiene buenas soluciones desde el punto de vista económico.
- Satisface todas las restricciones excepto por violaciones tolerables en un número reducido de casos.
- Propone modos de operar muy deseables en lo relativo a los arranques y paros de unidades, así como en el punto de operación de las mismas (alrededor del punto de máxima eficiencia).
- El tiempo de ejecución de algoritmo es aceptable, considerando la complejidad del problema que resuelve.

#### Extensiones posibles del método.

Una extensión inmediata del método es la consideración de grupos mixtos, esto es, grupos formados por plantas hidroeléctricas y plantas termoeléctricas. Esto se puede lograr a costa de aumentar una variable artificial por grupo-mixto-intervalo, además de la variable asociada a la generación termoeléctrica del grupo. La necesidad de la variable artificial, se deriva de la necesidad de que el problema por isla-intervalo tenga una solución dual única. La ventaja de admitir grupos mixtos

es el poder brindar una mayor flexibilidad para representar las limitaciones de transmisión de potencia real en la red eléctrica.

Otra extensión posible es el considerar plantas de rebombeo. Hacerlo, en el peor de los casos, implicaría que al resolver el Problema Aproximado se tuviera que modelar, en la red que representa las restricciones hidráulicas, cada planta de rebombeo por dos arcos conectados entre el mismo par de nodos y con sentidos opuestos. También, tendrían que adecuarse los algoritmos heurísticos que resuelven el Problema Reducido de Asignación de Unidades.

Una extensión probable y deseable es representar más detalladamente la red eléctrica y sus restricciones físicas y operativas. Ampliar el modelo de la red eléctrica afectaría la definición de los problemas por isla-intervalo. La nueva definición debería ser tal que estos problemas conserven las cuatro características básicas que en la definición actual tienen, y que fueron demostradas en el Apéndice B. Los algoritmos heurísticos para resolver el Problema Reducido de Asignación de Unidades también tendrían que adaptarse a la nueva definición.

## A P É N D I C E   A .

### FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA.

Este apéndice presenta los fundamentos de Programación Matemática a los que se hace referencia en el cuerpo principal del trabajo. Básicamente es una selección autocontenida de: definiciones, teoremas, y corolarios; que pueden encontrarse en los libros de texto sobre la materia [ 7 ] y [ 18 ], pero con una presentación distinta a la que aquí se requiere.

DEFINICIÓN 1. Se llama Problema Primal ( PP ) al siguiente:

minimizar:  $f(x)$

sujeto a:

$$g(x) \leq \bar{b}$$

$$h(x) = \bar{c}$$

Debe entenderse que:  $x \in E^n$ ;  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ ;  $\bar{b} \in E^m$ ;  $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$ ;  $\bar{c} \in E^p$ .

DEFINICIÓN 2. El Lagrangiano asociado al Problema Primal es:

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \mu (g(x) - \bar{b}) + \lambda (h(x) - \bar{c})$$

entendiéndose que:  $\mu \in E^m$ ;  $\lambda \in E^p$ .

DEFINICIÓN 3. El punto  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$ , con  $\mu^* \geq 0$ , es un Punto Silla ( Saddle Point ) de  $L(x, \mu, \lambda)$ , si satisface las siguientes desigualdades:

$$L(x^*, \mu, \lambda) \leq L(x^*, \mu^*, \lambda^*) \leq L(x, \mu^*, \lambda^*)$$

para toda  $x, \lambda$  y para toda  $\mu \geq 0$ .

TEOREMA 1. Sea  $\mu^* \geq 0$ ; entonces:

1.  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$  es un Punto Silla de  $L(x, \mu, \lambda)$

si y sólo si, se cumplen las condiciones:

2.  $x^*$  minimiza a  $L(x, \mu^*, \lambda^*)$

3.  $g(x^*) \leq \bar{b}$

4.  $h(x^*) = \bar{c}$

5.  $\mu^* (g(x^*) - \bar{b}) = 0$

DEFINICIÓN 4. El Problema Dual ( PD ) del problema PP  
es:

maximizar:  $z(\mu, \lambda) = \min_x L(x, \mu, \lambda)$

sujeto a :

$$(\mu, \lambda) \in D$$

donde:  $D = \{ (\mu, \lambda) \mid \mu \geq 0, \text{ y existe el } \min_x L(x, \mu, \lambda) \}$ .

TEOREMA 2. Si: .

1.  $x$  es factible para PP
2.  $(\mu, \lambda)$  es factible para PD

entonces:

3.  $z(\mu, \lambda) \leq f(x)$

COROLARIO 1. Si se verifica que:

1.  $x^*$  es factible para PP
2.  $(\mu^*, \lambda^*)$  es factible respecto a PD
3.  $f(x^*) = z(\mu^*, \lambda^*)$ .

entonces deberá verificarse:

4.  $x^*$  es una solución a PP
5.  $(\mu^*, \lambda^*)$  es una solución a PD.

## TEOREMA 3.

1.  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$  es un Punto Silla de  $L(x, \mu, \lambda)$

si y sólo si:

2.  $x^*$  es factible respecto a PP.

3.  $(\mu^*, \lambda^*)$  es factible respecto a PD.

4.  $f(x^*) = z(\mu^*, \lambda^*)$ .

COROLARIO 2. Una condición necesaria para que  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$  sea un Punto Silla de  $L(x, \mu, \lambda)$ , es que,  $x^*$  resuelva el Problema Primal, y  $(\mu^*, \lambda^*)$  resuelva el Problema Dual.

DEFINICIÓN 5. Se llama Función de Perturbación a:

$$w(b, c) = \min \{ f(x) \mid g(x) \leq b, h(x) = c \}$$

Se denotará con  $F$  al dominio de definición de esta función.

SUPOSICIÓN 1. Se supondrá en lo que resta del apéndice, que las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  son tales que el dominio de definición de  $w$  es:

$$F = \{ (b, c) \mid \text{existe algún } x \text{ para el cual } g(x) \leq b \text{ y } h(x) = c \}$$

NOTA. Obsérvese que el problema PP corresponde al caso en el cual  $b = \bar{b}$  y  $c = \bar{c}$ ; además, si  $x^*$  es una solución a PP, entonces:

$$w(\bar{b}, \bar{c}) = f(x^*); \quad g(x^*) \leq \bar{b}; \quad \text{y } h(x^*) = \bar{c}$$

TEOREMA 4. Sean  $x^*$  una solución a PP y  $\mu^* \geq 0$ . Entonces:

1.  $w(b, c) \geq w(\bar{b}, \bar{c}) + \mu^* (\bar{b} - b) + \lambda^* (\bar{c} - c)$ ;  
para todo  $(b, c) \in F$

si y sólo si:

2.  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$  es un Punto Silla de  $L(x, \mu, \lambda)$ .

DEFINICIÓN 6. Sea  $S$  un subconjunto de  $E^n$ . El conjunto  $S$  es convexo, si para cualesquier  $x_1 \in S$ ,  $x_2 \in S$  y cualquier escalar  $\alpha$  tal que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , se verifica que:  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  es elemento de  $S$ .

DEFINICIÓN 7. Sea  $f(x)$  una función cuyo dominio de definición  $S$  es convexo. Se dice que la función  $f(x)$  es convexa si para cualesquier  $x_1 \in S$ ,  $x_2 \in S$  y cualquier escalar  $\alpha$  tal que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , se verifica que:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

SUPOSICIÓN 2.  $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$  son funciones convexas;  $h_1(x), \dots, h_p(x)$  son funciones lineales; para toda  $x$  elemento de  $E^n$ .

TEOREMA 5. Bajo las suposiciones 1 y 2; tanto la Función de Perturbación  $w(b,c)$ , como su dominio de definición  $F$  son convexos.

TEOREMA 6. Sean  $x^*$  una solución a PP,  $\mu^* \geq 0$  y  $(\bar{b}, \bar{c})$  un punto interior de  $F$ . Las suposiciones 1 y 2 se satisfacen. Si se verifica que:

1.  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$  es un Punto Silla de  $L(x, \mu, \lambda)$
2. Las coordenadas  $(\mu^*, \lambda^*)$  del Punto Silla son únicas

entonces, se debe cumplir:

3. La función  $w$  es diferenciable en  $(\bar{b}, \bar{c})$ .
4. El valor de las derivadas está dado por:

$$\nabla_b w(\bar{b}, \bar{c}) = -\mu^*$$

$$\nabla_c w(\bar{b}, \bar{c}) = -\lambda^*$$



## A P É N D I C E B.

CARACTERIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA ASOCIADO A  
UNA ISLA-INTERVALO.

Considérese el problema PII:

minimizar:

$$f(x, g, y, r) = \frac{1}{2} K_0 g^2 + K_1 g + \frac{1}{2} K_2 y^2 - (K_0 \underline{G} + K_1) y +$$

$$\frac{1}{2} K_3 x^2 + (K_0 \bar{G} + K_1) x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m K_{j+3} r_j^2$$

sujeto a:

$$x + g - y + \sum_{j=1}^m (t_j + r_j) = D$$

$$-x \leq 0$$

$$\underline{G} \leq g \leq \bar{G}$$

$$-y \leq 0$$

$$t_j \leq T_j \quad \text{para } j=1, \dots, m$$

$$t_j + r_j \leq H_j \quad \text{para } j=1, \dots, m$$

En donde:  $K_0, K_2, K_3, \dots, K_{m+3}$  son constantes positivas.  $D, \bar{G}, \underline{G}; T_1, \dots, T_m; H_1, \dots, H_m$  son constantes;  $\bar{G} \geq \underline{G}$ .  $K_1$  es una

constante tal que:  $K_1 \geq -K_0\bar{g}$ .

Sea  $L(x, g, y, r, t, \lambda, \mu)$  el Lagrangiano asociado a PII, esto es:

$$\begin{aligned}
 L(x, g, y, r, t, \lambda, \mu) = & \frac{1}{2} K_0 g^2 + K_1 g + \frac{1}{2} K_2 y^2 - \\
 & (K_0 \bar{g} + K_1) y + \frac{1}{2} K_3 x^2 + (K_0 \bar{g} + K_1) x + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m K_{j+3} r_j^2 + \lambda (D - x - g + y - \sum_{j=1}^m (t_j + r_j)) - \\
 & \mu_1 x + \mu_2 (g - \bar{g}) + \mu_3 (\bar{g} - g) - \mu_4 y + \\
 & \sum_{j=1}^m \mu_{2j+3} (t_j - T_j) + \sum_{j=1}^m \mu_{2j+4} (t_j + r_j - H_j)
 \end{aligned}$$

El problema dual de PII, al cual llamaremos PDII, es:

maximizar:

$$z(\lambda, \mu) = \min_{x, g, y, r, t} L(x, g, y, r, t, \lambda, \mu)$$

sujeto a:

$$(\lambda, \mu) \in A = \{ (\lambda, \mu) \mid \mu \geq 0; \text{ existe el m\u00ednimo del Lagrangiano respecto a la variables del PII} \}$$

El objetivo de este ap\u00e9ndice es demostrar que:

a. Siempre existe una soluci\u00f3n al problema PDII.

- b. La solución a PDII es única.
- c. La solución a PDII es una función de  $u_1, \dots, u_m$  y D que satisface la condición de Lipschitz para todo  $(D, u)$ .
- d. La solución a PDII junto con alguna solución a PII forman un Punto Silla del Lagrangiano asociado  $L(x, g, y, r, t, \lambda, \mu)$ .

La demostración de los incisos del (a) al (d), se desprende fácilmente de los resultados intermedios y finales del proceso de solución de PDII, el cual mostramos a continuación.

El Lagrangiano es diferenciable y convexo respecto a las variables del problema primal, por tanto, es condición necesaria y suficiente para que exista el mínimo del Lagrangiano, que sus derivadas respecto a las variables del problema primal sean nulas, esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = K_3 x + K_0 \bar{G} + K_1 - \lambda - \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial g} = K_0 g + K_1 - \lambda + \mu_2 - \mu_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = K_2 y - K_0 \underline{G} - K_1 + \lambda - \mu_4 = 0 \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} = K_{j+3} r_j - \lambda + \mu_{2j+4} = 0; \text{ para } j=1, \dots, m$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = -\lambda + \mu_{2j+3} + \mu_{2j+4} = 0; \text{ para } j=1, \dots, m$$

De este conjunto de restricciones se pueden obtener las expresiones de algunas de las variables de PII, como función de las variables de PDII, que minimizan el Lagrangiano respecto a las variables de PII; además, la última de las expresiones en (B.1) representa un conjunto de restricciones explícitas para PDII. Empleando esta información el problema dual queda como sigue:

maximizar:

$$\begin{aligned}
 z(\lambda, \mu) = & \lambda D - \frac{1}{2K_3} (K_0 \bar{G} + K_1 - \lambda - \mu_1)^2 - \\
 & \frac{1}{2K_0} (K_1 - \lambda + \mu_2 - \mu_3)^2 - \mu_2 \bar{G} + \mu_3 \underline{G} - \\
 & \frac{1}{2K_2} (-K_0 \underline{G} - K_1 + \lambda - \mu_4)^2 - \\
 & \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{2K_{j+3}} (\lambda - \mu_{2j+4})^2 \right) - \\
 & \sum_{j=1}^m (T_j \mu_{2j+3} + H_j \mu_{2j+4})
 \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
 \mu_{2j+3} + \mu_{2j+4} - \lambda &= 0 \quad \text{para } j=1, \dots, m \\
 \mu_j &\geq 0 \quad \text{para } j=1, \dots, 2m+4
 \end{aligned}$$

Si  $\lambda$  fuese conocida, este problema se descompondría en varios subproblemas totalmente desacoplados, siendo muy fácil de resolver cada uno de los subproblemas. Los subproblemas y las soluciones correspondientes como función de  $\lambda$ , se muestran a continuación:

Subproblema 0.

$$z_0(\lambda) = \lambda D$$

Subproblema 1.

$$z_1(\lambda) = \max_{\mu_1 \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2K_3} (K_0 \bar{G} + K_1 - \lambda - \mu_1)^2 \right\}$$

Solución:

$$\text{con: } 0 \leq \lambda \leq K_0 \bar{G} + K_1$$

$$z_1(\lambda) = 0; \mu_1^*(\lambda) = K_0 \bar{G} + K_1 - \lambda$$

(B.2)

$$\text{con: } K_0 \bar{G} + K_1 \leq \lambda$$

$$z_1(\lambda) = -\frac{1}{2K_3} (K_0 \bar{G} + K_1 - \lambda)^2; \mu_1^*(\lambda) = 0$$

Subproblema 2.

$$z_2(\lambda) = \max_{\mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2K_0} (K_1 - \lambda + \mu_2 - \mu_3)^2 - \mu_2 \bar{G} + \mu_3 \underline{G} \right\}$$

Solución:

$$\text{con: } 0 \leq \lambda \leq K_0 \underline{G} + K_1$$

$$z_2(\lambda) = \underline{G} \left( \frac{K_0}{2} \underline{G} + K_1 - \lambda \right); \mu_2^*(\lambda) = 0;$$

$$\mu_3^*(\lambda) = K_0 \underline{G} + K_1 - \lambda$$

$$\text{con: } K_0 \underline{G} + K_1 \leq \lambda \leq K_0 \bar{G} + K_1 \quad (\text{B.3})$$

$$z_2(\lambda) = - \frac{(\lambda - K_1)^2}{2K_0}; \mu_2^*(\lambda) = 0; \mu_3^*(\lambda) = 0$$

$$\text{con: } K_0 \bar{G} + K_1 \leq \lambda$$

$$z_2(\lambda) = \bar{G} \left( \frac{K_0}{2} \bar{G} + K_1 - \lambda \right); \mu_2^*(\lambda) = \lambda - K_0 \bar{G} - K_1;$$

$$\mu_3^*(\lambda) = 0$$

Subproblema 3.

$$z_3(\lambda) = \max_{\mu_4 \geq 0} \left\{ - \frac{1}{2K_2} \left( - K_0 \underline{G} - K_1 + \lambda - \mu_4 \right)^2 \right\}$$

Solución:

$$\text{con: } 0 \leq \lambda \leq K_0 \underline{G} + K_1$$

$$z_3(\lambda) = - \frac{1}{2K_2} \left( \lambda - K_0 \underline{G} - K_1 \right)^2; \mu_4^*(\lambda) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\text{con: } K_0 \underline{G} + K_1 \leq \lambda; z_3(\lambda) = 0; \mu_4^*(\lambda) = \lambda - K_0 \underline{G} - K_1$$

Subproblema j+3 ( para toda  $j=1, \dots, m$  ).

maximizar:

$$z_{j+3}(\lambda) = - \frac{1}{2K_{j+3}} (\lambda - \mu_{2j+4})^2 -$$

$$(T_j \mu_{2j+3} + H_j \mu_{2j+4})$$

sujeto a:

$$\mu_{2j+3} \geq 0; \mu_{2j+4} \geq 0; \mu_{2j+3} + \mu_{2j+4} = \lambda$$

Solución:

$$\text{Si } H_j \leq T_j$$

$$z_{j+3}(\lambda) = -H_j \lambda; \mu_{2j+3}^*(\lambda) = 0; \mu_{2j+4}^*(\lambda) = \lambda$$

$$\text{Si } H_j \geq T_j \text{ y } 0 \leq \lambda \leq K_{j+3} (H_j - T_j):$$

$$z_{j+3}(\lambda) = - \frac{1}{2K_{j+3}} \lambda^2 - T_j; \mu_{2j+3}^*(\lambda) = \lambda; \mu_{2j+4}^*(\lambda) = 0$$

$$\text{Si } H_j \geq T_j \text{ y } K_{j+3} (H_j - T_j) \leq \lambda \quad (\text{B.5})$$

$$z_{j+3}(\lambda) = \frac{K_{j+3}}{2} (H_j - T_j)^2 - H_j \lambda;$$

$$\mu_{2j+3}^*(\lambda) = K_{j+3} (H_j - T_j); \mu_{2j+4}^*(\lambda) = \lambda - K_{j+3} (H_j - T_j)$$

Puesto que  $\lambda$  no se conoce, tendrá que resolverse el siguiente problema:

$$z^* = z(\lambda^*, \mu^*(\lambda^*)) = \max_{\lambda \geq 0} \sum_{j=0}^{m+3} z_j(\lambda) \quad (\text{B.6})$$

La restricción  $\lambda \geq 0$  se requiere para asegurar la existencia de solución a los subproblemas.

Del análisis de las expresiones (B.2) a (B.5), se concluye que la función objetivo del problema (B.6) tiene las siguientes propiedades:

1. Es estrictamente concava.
2. Es diferenciable.
3. Su primera derivada tiende a  $-\infty$  al tender  $\lambda$  a  $\infty$ .

Mientras que, el espacio de soluciones tiene las siguientes:

4. No es vacío.
5. Es convexo.

Debido a las propiedades 1, 4 y 5 del problema, si la función objetivo alcanza su máximo en el espacio factible, lo hará en uno y sólo un punto. Por otra parte, el máximo siempre se alcanza, ya que cuando  $\lambda = 0$  ocurre uno de los siguientes dos casos: la primera derivada es menor que cero, o bien, la primera derivada es mayor o igual que cero. En el primer caso, por la propiedad 1, se alcanza el máximo en



$\lambda^* = 0$ . En el segundo caso, se alcanzará el máximo en algún  $\lambda^* \geq 0$  en el que se cumpla que la primera derivada se anula; debido a las propiedades 1 y 3, y al hecho de que la primera derivada evaluada en cero es mayor o igual a cero, este  $\lambda^*$  siempre existirá.

Las expresiones para  $\mu^*(\lambda)$  dadas en (B.2) a (B.5), asocian a la única  $\lambda^*$  valores únicos a las  $\mu^*$ , con lo cual se demuestra que: la solución a PDII  $(\lambda^*, \mu^*)$  siempre existe y es única. Con esto quedan demostrados los incisos (a) y (b) de la lista de objetivos de este apéndice.

El inciso (c) de la lista de objetivos, requiere que se demuestre la existencia de un número positivo  $N$  tal que:

$$\dagger \quad \left\| (\lambda^{*1}, \mu^{*1}) - (\lambda^{*2}, \mu^{*2}) \right\| \leq N \left\| (D^1, H^1) - (D^2, H^2) \right\| \quad (B.7)$$

en donde  $(\lambda^{*1}, \mu^{*1})$  y  $(\lambda^{*2}, \mu^{*2})$  son las soluciones a PDII que corresponden, respectivamente, a  $(D^1, H^1)$  y  $(D^2, H^2)$ , dos posibles valores de una parte del lado derecho de las restricciones de PII.

Para demostrar lo anterior, se requiere analizar la dependencia de la solución a PDII,  $(\lambda^*, \mu^*)$ , respecto a  $(D, H)$ . Inicialmente se enfocará el análisis sobre  $\lambda^*$ .

Hay dos posibles casos:  $\lambda^* = 0$ , ó,  $\lambda^* > 0$ . Dadas las ca

---

$\dagger \quad \|x\|$  representa la norma Euclidiana del vector  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ; esto es,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . También se usa el símbolo aplicado a un escalar, en este caso:  $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ .

racterísticas de la función objetivo (B.6), una condición necesaria y suficiente para que  $\lambda^* = 0$  es:

$$\sum_{j=0}^{m+3} \frac{dz_j(0)}{d\lambda} \leq 0 \quad (\text{B.8})$$

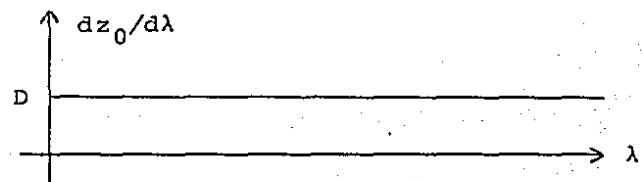
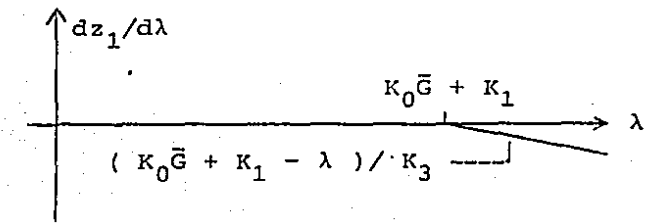
Mientras que, la condición necesaria y suficiente para que  $\lambda^* > 0$  es:

$$\sum_{j=0}^{m+3} \frac{dz_j(\lambda^*)}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.9})$$

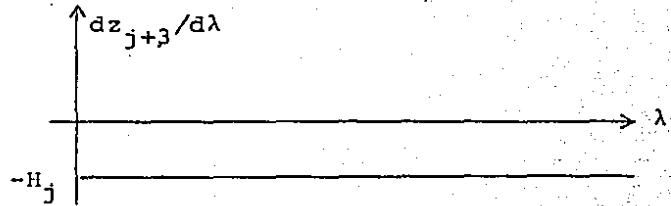
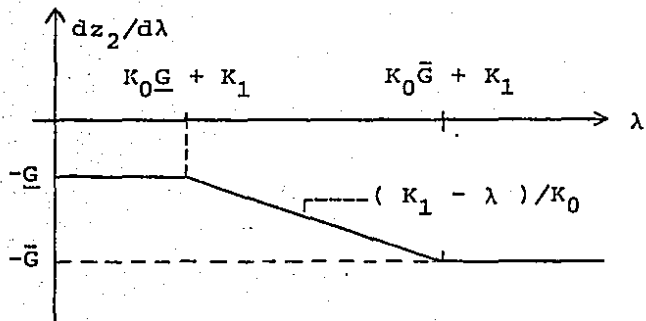
En ambos casos es importante analizar el comportamiento tanto de los sumandos, como de la suma que aparece en (B.8) y (B.9).

La figura B.1 muestra gráficas de cada uno de los sumandos. El análisis de la figura permite afirmar lo siguiente:

1. Los sumandos son funciones continuas de  $\lambda$ . La continuidad no es afectada al variar D o alguno de los  $H_j$ .
2. La variación de D afecta sólo a uno de los sumandos. El efecto es desplazar verticalmente la gráfica correspondiente en una cantidad igual al cambio en D.
3. La variación de alguna de las  $H_j$  sólo afecta a uno de los sumandos. El efecto sobre los puntos que forman la gráfica, consiste en desplazarlos verticalmente. El despla-



Cuando:  $j \in \{j \mid j=1, \dots, m; \text{ y } H_j \leq T_j\}$



Cuando:  $j \in \{j \mid j=1, \dots, m; \text{ y } H_j \geq T_j\}$

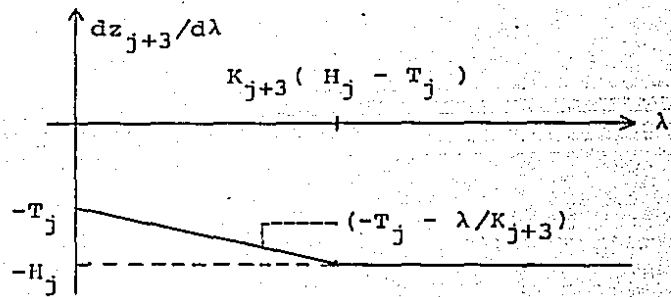
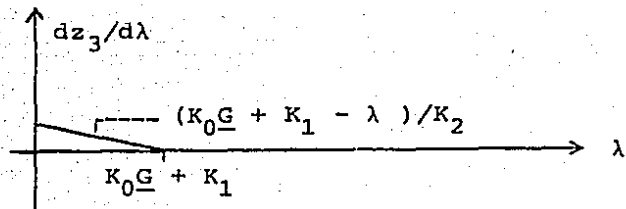


Figura B.1

miento puede tener magnitudes distintas para puntos diferentes. El mayor desplazamiento que puede sufrir algún punto, tiene una magnitud igual a la del cambio en  $H_j$ .

4. La suma es una función continua y monótona decreciente respecto a  $\lambda$ . Estas propiedades no cambian al variar  $D$  o  $H_j$ . La alteración, en la gráfica de la suma, causada por un cambio ya sea en  $D$ , o bien, en alguna de las  $H_j$  es un desplazamiento vertical, cuya magnitud no es mayor a la del cambio en  $D$  o en  $H_j$ . Si  $D$  y las diversas  $H_j$  varían si multáneamente, el desplazamiento vertical de cualquier punto es menor o igual a la suma de los valores absolutos de los cambios en  $D$  y en las  $H_j$ .
5. La solución es el valor de  $\lambda$  en el cual la gráfica de la suma cruza el lado positivo del eje horizontal. Si este punto de cruce no existe, entonces la solución es  $\lambda^* = 0$ . Un cambio en  $D$  o en las  $H_j$  produce un desplazamiento total o parcial de la gráfica de la suma. Si este desplazamiento llega a producir un cambio en el punto de cruce de la gráfica con el lado positivo del eje horizontal, o bien, si hace que de no existir cruce ahora sí lo haya, o que de haberlo deje de existir; entonces, habrá un cambio en la solución. El mayor cambio en la solución ocurre cuando la gráfica de la suma cruza el eje horizontal con la mayor pendiente ( la menor en valor absoluto ). Esta

pendiente nunca podrá ser mayor que:

$$\max \left\{ -\frac{1}{K_0}, -\frac{1}{K_2}, -\frac{1}{K_3} \right\} = -\frac{1}{M} \quad (\text{B.10})$$

De las afirmaciones anteriores se concluye que:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{*1} - \lambda^{*2}\| \leq M \|D^1 - D^2\| + \\ M \sum_{j=1}^m \|H_j^1 - H_j^2\| \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

por lo cual:

$$\|\lambda^{*1} - \lambda^{*2}\| \leq M(m+1) \|(D^1, H^1) - (D^2, H^2)\| \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado, de las relaciones (B.2) a (B.5) se deduce fácilmente que:

$$\|\mu_j^{*1} - \mu_j^{*2}\| \leq \|\lambda^{*1} - \lambda^{*2}\| \quad (\text{B.13})$$

para toda  $j=1, \dots, 2m+4$ .

entonces:

$$\|\mu_j^{*1} - \mu_j^{*2}\| \leq M(m+1) \|(D^1, H^1) - (D^2, H^2)\| \quad (\text{B.14})$$

para toda  $j=1, \dots, 2m+4$

y, por último:

$$\| (\lambda^{*1}, \mu^{*1}) - (\lambda^{*2}, \mu^{*2}) \| \leq \quad (B.15)$$

$$M(m+1)\sqrt{2m+5} \| (D^1, H^1) - (D^2, H^2) \|$$

Esta expresión muestra que si existe un  $N$ , por ejemplo,

$N = M(m+1)\sqrt{2m+5}$ , tal que:

$$\| (\lambda^{*1}, \mu^{*1}) - (\lambda^{*2}, \mu^{*2}) \| \leq N \| (D^1, H^1) - (D^2, H^2) \| \quad (B.16)$$

que es lo que se quería demostrar.

Para demostrar la veracidad del inciso (d) de la lista de objetivos de este apéndice, basta mostrar que, aunada a la solución de PDII,  $(\lambda^*, \mu^*)$ , existen valores para las variables de PII,  $(x^*, g^*, y^*, r^*, t^*)$ , tales que:

1.  $L(x^*, g^*, y^*, r^*, t^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, g, y, r, t, \lambda^*, \mu^*)$
2.  $(x^*, g^*, y^*, r^*, t^*)$  satisface las restricciones de PII.
3. Se verifica la condición de holgura complementaria, esto es:

$$-x^* \mu_1^* = 0; (g^* - \bar{G}) \mu_2^* = 0; (\underline{G} - g^*) \mu_3^* = 0;$$

$$-y^* \mu_4^* = 0; (t_j^* - T_j) \mu_{2j+3}^* = 0, \text{ para } j=1, \dots, m;$$

$$(t_j^* + r_j^* - H_j) \mu_{2j+4}^* = 0, \text{ para } j=1, \dots, m.$$

Las expresiones (B.1) son las condiciones necesarias y suficientes para que  $L(x^*, g^*, y^*, r^*, t^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, g, y, r, t, \lambda^*, \mu^*)$ . De estas expresiones se pueden calcular los valores de  $x^*, g^*, y^*, r_j^*$  (para  $j=1, \dots, m$ ). El valor de las  $t_j^*$  es irrelevante cuando se trata de la minimización del Lagrangiano respecto a las variables de PII, debido a que:  $\lambda^* = \mu_{2j+3}^* + \mu_{2j+4}^*$ , para todo  $j=1, \dots, m$ .

Por lo anterior:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{K_3} (\lambda^* + \mu_1^* - K_0 \bar{G} - K_1) \\ y^* &= \frac{1}{K_2} (-\lambda^* + \mu_4^* + K_0 \underline{G} + K_1) \\ g^* &= \frac{1}{K_0} (\lambda^* - \mu_2^* + \mu_3^* - K_1) \\ r_j^* &= \frac{1}{K_{j+3}} (\lambda^* - \mu_{2j+4}^*); \text{ para } j=1, \dots, m \end{aligned} \tag{B.17}$$

En estas expresiones se van a substituir los valores de las  $\mu^*$  correspondientes a  $\lambda^*$  según las expresiones (B.2) a (B.5). La intención es dejar en claro cuáles restricciones de PII y cuáles condiciones de holgura complementaria se satisfacen, para cualquiera de los valores posibles de  $\lambda^*$ . Las tablas B.1 y B.3 resumen los resultados obtenidos.

TABLA B.1

Rango de $\lambda^*$	Valor de las variables de PDII según B.2 a B.4	Valor de las variables de PII según B.17	Restricciones de PII que se verifican	Condiciones de holgura complementaria que se verifican
$0 \leq \lambda^* \leq K_0 \bar{G} + K_1$	$\mu_1^* = K_0 \bar{G} + K_1 - \lambda^*$	$x^* = 0$	$-x^* \leq 0$	$-x^* \mu_1^* = 0$
$K_0 \bar{G} + K_1 \leq \lambda^*$	$\mu_1^* = 0$	$x^* = \frac{1}{K_3} (\lambda^* - K_0 \bar{G} - K_1)$	$-x^* \leq 0$	$-x^* \mu_1^* = 0$
$0 \leq \lambda^* \leq K_0 \underline{G} + K_1$	$\mu_2^* = 0$ $\mu_3^* = K_0 \underline{G} + K_1 - \lambda^*$	$g^* = \underline{G}$	$g^* \leq \bar{G}$ $-g^* \leq -\underline{G}$	$(g^* - \bar{G}) \mu_2^* = 0$ $(\underline{G} - g^*) \mu_3^* = 0$
$K_0 \underline{G} + K_1 \leq \lambda^*$ $\lambda^* \leq K_0 \bar{G} + K_1$	$\mu_2^* = 0$ $\mu_3^* = 0$	$g^* = \frac{1}{K_0} (\lambda^* - K_1)$	$g^* \leq \bar{G}$ $-g^* \leq -\underline{G}$	$(g^* - \bar{G}) \mu_2^* = 0$ $(\underline{G} - g^*) \mu_3^* = 0$
$K_0 \bar{G} + K_1 \leq \lambda^*$	$\mu_2^* = \lambda^* - K_0 \bar{G} - K_1$ $\mu_3^* = 0$	$g^* = \bar{G}$	$g^* \leq \bar{G}$ $-g^* \leq -\underline{G}$	$(g^* - \bar{G}) \mu_2^* = 0$ $(\underline{G} - g^*) \mu_3^* = 0$
$0 \leq \lambda^* \leq K_0 \underline{G} + K_1$	$\mu_4^* = 0$	$y^* = \frac{1}{K_2} (K_0 \underline{G} + K_1 - \lambda^*)$	$-y^* \leq 0$	$-y^* \mu_4^* = 0$
$K_0 \underline{G} + K_1 \leq \lambda^*$	$\mu_4^* = \lambda^* - K_0 \underline{G} - K_1$	$y^* = 0$	$-y^* \leq 0$	$-y^* \mu_4^* = 0$



T A B L A B . 2

Las restricciones por verificar son:  $t_j^* \leq T_j$ ;  $t_j^* + r_j^* \leq H_j$

Las condiciones de holgura complementaria por verificar son:  $(t_j^* - T_j)\mu_{2j+3}^*$ ;  $(t_j^* + r_j^* - H_j)\mu_{2j+4}^*$

Caso	Rango de $\lambda^*$	Valor de las variables de PDII según B.5	Valor de $r_j^*$ según B.17	Valor requerido por $t_j^*$
$H_j \leq T_j$	$\lambda^* = 0$	$\mu_{2j+3}^* = 0$ $\mu_{2j+4}^* = 0$	$r_j^* = 0$	$t_j^* \leq H_j$
	$\lambda^* > 0$	$\mu_{2j+3}^* = 0$ $\mu_{2j+4}^* = \lambda^*$	$r_j^* = 0$	$t_j^* = H_j$
$H_j > T_j$	$\lambda^* = 0$	$\mu_{2j+3}^* = 0$ $\mu_{2j+4}^* = 0$	$r_j^* = 0$	$t_j^* \leq T_j$
	$0 < \lambda^* \leq K_{j+3} (H_j - T_j)$	$\mu_{2j+3}^* = \lambda^*$ $\mu_{2j+4}^* = 0$	$r_j^* = \frac{\lambda^*}{K_{j+3}}$	$t_j^* = T_j$
	$K_{j+3} (H_j - T_j) \leq \lambda^*$	$\mu_{2j+3}^* = K_{j+3} (H_j - T_j)$ $\mu_{2j+4}^* = \lambda^* - K_{j+3} (H_j - T_j)$	$r_j^* = H_j - T_j$	$t_j^* = T_j$

Las tablas B.1 y B.2 muestran que  $(\lambda^*, \mu^*)$  y  $(x^*, g^*, y^*, r^*, t^*)$  satisfacen todas las restricciones de desigualdad de PII y todas las condiciones de holgura complementaria. Sólo falta que se verifique la restricción de igualdad de PII para poder asegurar que se tiene un Punto Silla del Lagrangiano. Para mostrar esto, debe notarse, comparando la figura B.1 y las tablas B.1 y B.2 que:

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(\lambda^*)}{d\lambda} &= D \\ - \frac{dz_1(\lambda^*)}{d\lambda} &= x^* \\ - \frac{dz_2(\lambda^*)}{d\lambda} &= g^* \\ - \frac{dz_3(\lambda^*)}{d\lambda} &= -y^* \\ - \frac{dz_{j+3}(\lambda^*)}{d\lambda} &= \min \{ H_j, T_j \} \geq r_j^* + t_j^* \\ &\text{para } \lambda^* = 0; \quad j=1, \dots, m \\ - \frac{dz_{j+3}(\lambda^*)}{d\lambda} &= r_j^* + t_j^* ; \text{ para } \lambda^* > 0; \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \tag{B.18}$$

Si  $\lambda^* > 0$ , según B.9 debe cumplirse que:

$$\frac{dz_0(\lambda^*)}{d\lambda} = - \sum_{j=1}^{m+3} \frac{dz_j(\lambda^*)}{d\lambda}$$

al substituir los resultados de B.18, se tiene:

$$D = x^* + g^* - y^* + \sum_{j=1}^m (r_j^* + t_j^*)$$

Por lo que la restricción de igualdad de PII se verifica para  $\lambda^* > 0$ .

Por último, cuando  $\lambda^* = 0$  al substituir en la restricción de igualdad de PII los valores conocidos que se muestran en las tablas B.1 y B.2, se tiene:

$$\sum_{j=1}^m t_j^* = D + \frac{1}{K_2} (K_0 \underline{G} + K_1) - \underline{G} \quad (\text{B.19})$$

Además, según la tabla B.2, cuando  $\lambda^* = 0$ , se requiere que:

$$\min \{ H_j, T_j \} \geq t_j^*; \text{ para } j=1, \dots, m \quad (\text{B.20})$$

El asunto es demostrar que es posible satisfacer simultáneamente (B.19) y (B.20). Para demostrarlo, basta recordar que según (B.8)  $\lambda^* = 0$ , si y sólo si:

$$\sum_{j=0}^{m+3} \frac{dz_j(0)}{d\lambda} \leq 0$$

Substituyendo los valores conocidos que se pueden obtener de

la figura B.1, la expresión que resulta es:

$$\sum_{j=0}^m \min \{ H_j, T_j \} \geq D + \frac{1}{K_2} ( K_0 \underline{G} + K_1 ) - \underline{G}$$

lo cual demuestra que la restricción de igualdad siempre puede ser satisfecha cuando  $\lambda^* = 0$ , con sólo escoger valores para las  $t_j^*$  que satisfagan las restricciones (B.19) y (B.20).

Así pues, se ha demostrado que la solución a PDII, junto con alguna solución a PII ( siempre existe, p. ejem:  $x^*$ ,  $g^*$ ,  $y^*$ ,  $r^*$ ,  $t^*$  ), forman un Punto Silla del Lagrangiano asociado.

## A P É N D I C E C .

COMPARACIÓN DE LOS MODELOS PARA UNA PLANTA EMPLEADOS EN EL "PROBLEMA APROXIMADO" Y EN EL "PROBLEMA DE COORDINACIÓN".

La planta para la cual se hará la comparación tiene las siguientes características:

1. Está compuesta de cinco unidades iguales, las características de cada unidad son:
  - a. Tipo Francis.
  - b. Altura de diseño:  $n^{dis} = 91.5 \text{ m.}$
  - c. Gasto máximo:  $\bar{\xi} = 218 \text{ m}^3/\text{seg.}$
  - d. Gasto mínimo:  $\underline{\xi} = 109 \text{ m}^3/\text{seg.}$
  - e. Generación máxima:  $\bar{\Gamma} = 176 \text{ MW.}$
  - f. Generación mínima:  $\underline{\Gamma} = 89 \text{ MW.}$
  - g. Función de generación:

$$\gamma(\xi, n) =$$

$$(-8.0281 \times 10^2 + 15.769n - 8.4193 \times 10^{-2} n^2) +$$

$$(7.1202 - 1.1861 \times 10^{-1} n + 6.3502 \times 10^{-4} n^2) \xi +$$

$$(-1.8880 \times 10^{-2} + 3.1276 \times 10^{-4} n - 1.4229 \times 10^{-6} n^2) \xi^2 \text{ MW.}$$

donde:  $\xi$  es el gasto de la unidad en  $m^3/\text{seg.}$ , y  
 $n$  es la altura neta en m.

h. Las unidades son disponibles, asignables y coordinables.

2. Se supone que el nivel del desfogue sólo depende del gasto turbinado por la planta, y está dado por:

$$\beta(q) = 418. + 4.7(1 - e^{-0.0044q}) \text{ m.s.n.m.}$$

donde:  $q$  es el gasto de la planta en  $m^3/\text{seg.}$

3. Se suponen independientes los conductos de las unidades. Las pérdidas en los conductos de cada unidad están dadas por:

$$\delta(\xi) = 3.85 \times 10^{-5} \xi^2 \text{ m.}$$

donde:  $\xi$  está en  $m^3/\text{seg.}$

La comparación se hará en tres niveles ( $\alpha$ ) distintos del embalse: al Nivel de Aguas Máximo de Operación 528.00 m., a un nivel intermedio 511.32 m., y al Nivel de Aguas Mínimo de Operación 496.00 m.

En el "Problema Aproximado" la generación de la planta está modelada como sigue:

$$\tilde{f} = \frac{\gamma(\xi^*(n^{\text{dis}}), \bar{n})}{\xi^*(n^{\text{dis}})} q$$

En donde:

$\xi^*(n)$  se obtiene de la función  $\gamma(\xi, n)$ , en particular,

$$\xi^*(n^{dis}) = 172.6 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

$$\bar{n} = \alpha - \beta(q) - \delta(\tilde{\xi}) \text{ m.}$$

$$\tilde{\xi} = q/5.$$

Por otra parte, en el "problema de Coordinación" la generación de la planta con  $m$  unidades en operación está dada por:

$$\hat{f} = \max_{\xi, n} \sum_{u=1}^m \gamma(\xi_u, n_u)$$

sujeto a:

$$\sum_{u=1}^m \xi_u = q$$

$$n_u = \alpha - \beta(q) - \delta(\xi_u)$$

$$\underline{\xi} \leq \xi_u \leq \bar{\xi}$$

$$\underline{\Gamma} \leq \gamma(\xi_u, n_u) \leq \bar{\Gamma}$$

A continuación se presenta una tabla por cada uno de los niveles del embalse. En estas tablas se pueden comparar, para cada gasto de la planta, las potencias generadas según los dos modelos.

Comentarios:

- Cuando el gasto de la planta es  $m$  veces el gasto a

TABLA C.1

Comparación de los modelos de generación por planta.  
cuando el nivel del embalse es: 528.00 m.

Gasto en p.u. de $\xi^*$ (n <sup>dis</sup> )	$\tilde{f}$ , MW	$\hat{f}$ , MW.; con m unidades en operación				
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
0.2	33.	-	-	-	-	-
0.4	66.	-	-	-	-	-
0.6	99.	-	-	-	-	-
0.8	131.	123.	-	-	-	-
1.0	164.	162.	-	-	-	-
1.2	196.	-	-	-	-	-
1.4	228.	-	202.	-	-	-
1.6	260.	-	245.	-	-	-
1.8	292.	-	285.	-	-	-
2.0	324.	-	322.	281.	-	-
2.2	356.	-	-	325.	-	-
2.4	388.	-	-	366.	-	-
2.6	420.	-	-	407.	360.	-
2.8	452.	-	-	445.	404.	-
3.0	484.	-	-	482.	447.	-
3.2	516.	-	-	517.	488.	-
3.4	548.	-	-	-	528.	483.
3.6	580.	-	-	-	567.	526.
3.8	612.	-	-	-	605.	568.
4.0	643.	-	-	-	641.	610.
4.2	675.	-	-	-	677.	650.
4.4	707.	-	-	-	-	689.
4.6	738.	-	-	-	-	728.
4.8	770.	-	-	-	-	765.
5.0	801.	-	-	-	-	801.
5.2	833.	-	-	-	-	837.
5.4	864.	-	-	-	-	871.
5.6	895.	-	-	-	-	-
5.8	927.	-	-	-	-	-
6.0	958.	-	-	-	-	-



TABLA C.2

Comparación de los modelos de generación por planta  
cuando el nivel del embalse es: 511.32 m.

Gasto en p.u. de $\xi^*$ (n <sup>dis</sup> )	$\sim$ f, MW	$\hat{f}$ , MW.; con m unidades en operación				
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
0.2	30.	-	-	-	-	-
0.4	61.	-	-	-	-	-
0.6	92.	-	-	-	-	-
0.8	120.	116.	-	-	-	-
1.0	150.	148.	-	-	-	-
1.2	179.	175.	-	-	-	-
1.4	209.	-	194.	-	-	-
1.6	238.	-	230.	-	-	-
1.8	267.	-	263.	-	-	-
2.0	296.	-	293.	271.	-	-
2.2	325.	-	320.	308.	-	-
2.4	354.	-	345.	344.	-	-
2.6	383.	-	-	377.	-	-
2.8	412.	-	-	408.	386.	-
3.0	441.	-	-	438.	422.	-
3.2	470.	-	-	465.	457.	-
3.4	498.	-	-	491.	491.	463.
3.6	527.	-	-	515.	522.	500.
3.8	556.	-	-	-	553.	535.
4.0	584.	-	-	-	582.	570.
4.2	613.	-	-	-	610.	604.
4.4	642.	-	-	-	636.	636.
4.6	670.	-	-	-	-	667.
4.8	698.	-	-	-	-	698.
5.0	727.	-	-	-	-	727.
5.2	755.	-	-	-	-	755.
5.4	783.	-	-	-	-	781.
5.6	811.	-	-	-	-	807.
5.8	839.	-	-	-	-	832.
6.0	867.	-	-	-	-	855.

TABLA C.3

Comparación de los modelos de generación por planta  
cuando el nivel en el embalse es: 496.00 m.

Gasto en p.u. de $\xi^*$ ( $n^{dis}$ )	$\sim$ f, MW	$\hat{f}$ , MW.; con m unidades en operación				
		m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
0.2	24.	-	-	-	-	-
0.4	47.	-	-	-	-	-
0.6	70.	-	-	-	-	-
0.8	93.	89.	-	-	-	-
1.0	115.	113.	-	-	-	-
1.2	137.	128.	-	-	-	-
1.4	160.	-	-	-	-	-
1.6	181.	-	-	-	-	-
1.8	203.	-	200.	-	-	-
2.0	225.	-	221.	-	-	-
2.2	247.	-	237.	-	-	-
2.4	268.	-	249.	-	-	-
2.6	290.	-	-	284.	-	-
2.8	311.	-	-	307.	-	-
3.0	333.	-	-	328.	-	-
3.2	354.	-	-	345.	-	-
3.4	375.	-	-	359.	368.	-
3.6	396.	-	-	370.	393.	-
3.8	417.	-	-	-	415.	-
4.0	439.	-	-	-	435.	-
4.2	459.	-	-	-	453.	452.
4.4	480.	-	-	-	468.	477.
4.6	501.	-	-	-	481.	501.
4.8	522.	-	-	-	500.	522.
5.0	542.	-	-	-	-	542.
5.2	563.	-	-	-	-	560.
5.4	583.	-	-	-	-	577.
5.6	603.	-	-	-	-	591.
5.8	624.	-	-	-	-	603.
6.0	644.	-	-	-	-	614.

máxima eficiencia a la carga de diseño, siempre la máxima generación de la planta se logra con  $m$  unidades en operación. En estos puntos, tomando  $m$  unidades en operación, se alcanza una muy buena aproximación entre los dos modelos; el error absoluto máximo fue 1.8%.

- Sólo en raras ocasiones ocurre que:  $\hat{f}(q) < \tilde{f}(q)$ . En el caso extremo  $\tilde{f}$  superó a  $\hat{f}$  en 0.8%.
- $\tilde{f}(q)$  no es una función lineal, presenta una concavidad estricta.

## B I B L I O G R A F Í A .

1. Bradley, G. H., Brown, G. G., Graves, G. W.,  
"Design and Implementation of Large Scale Primal  
Transshipment Algorithms".  
Management Science, Vol. 24. No. 1, p. 1-34. (1977)
2. Departamento de Análisis de Redes, IIE.  
"Reporte de Pruebas del Prototipo de Coordinación  
Hidro-Térmica".  
Reporte interno. (1984).
3. Departamento de Análisis de Redes, IIE.  
"Descripción de los Datos del Sistema Hidroeléctrico  
Empleado en el Prototipo de CHT".  
Reporte interno. (1984).
4. El-Hawary, M. E.,  
La discusión al artículo [14] .
5. Gagnon, C. R., Bolton, J. F.,  
"Optimal Hydro Scheduling at the Bonneville Power  
Administration".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-97,  
No. 3, May/June 1978, p. 772-776.

6. Ikura, Y., Gross, G.,  
"Efficient Large-scale Hydro System Scheduling with  
Forced Spill Conditions".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,  
Vol. PAS-103, No. 12, Dec. 1984, p. 3502-3520.
7. Lasdon, L. S.,  
Optimization Theory for Large Systems.  
Macmillan Publishing Co., Inc. (1970).
8. Minieka, E.,  
Optimization Algorithms for Networks and Graphs.  
Marcel Dekker, Inc. (1978).
9. NAG Fortran Library Manual,  
Mark 11, Vol. 3, E04.
10. Nanda, J., Bijwe, P. R.,  
"Optimal Hydrothermal with Cascaded Plants Using  
Progressive Optimality Algorithm".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,  
Vol. PAS-100, No. 4, April 1981, p. 2093-2099.
11. Pereira, M. V. F., Pinto, L. M. V. G.,  
"A decomposition Approach to the Economic Dispatch of  
Hydrothermal Systems".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,  
Vol. PAS-101, No. 10, October 1982, p. 3851-3860.

12. Pshenichny, B. N., Danilin, Y. M.,  
Numerical Methods in Extremal Problems.  
Mir Publishers (1978).
13. Simmonard, M.,  
Linear Programming.  
Prentice-Hall (1966).
14. Soares, S., Lyra, C., Tavares, H.,  
"Optimal Generation Scheduling of Hydrothermal Power  
Systems".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,  
Vol. PAS-99, No. 3, May/June 1980, p. 1107-1118.
15. Sasha, T. N., Khaparde, S. A.,  
"An Application of a Direct Method to the Optimal  
Scheduling of Hydrothermal System".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,  
Vol. PAS-97, No. 3, May/June 1978, p. 977-983.
16. Shaw, J. J., Gendron, R. F., Bertsekas, D. P.,  
"Optimal scheduling of Large Hydrothermal Power  
Systems".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems,  
Vol. PAS-104, No. 2, Feb. 1985, p. 286-293.

17. Turgeon, A.,  
"Optimal Short-term Scheduling of Hydroplants in Series - A Review".  
Proceedings of the International Symposium on Real-time Operation of Hydrosystems, Vol. I, June 24-26, 1981, University of Waterloo, p. 108-122.
18. Valqui Vidal, R. V.,  
Notes on Static and Dynamic Optimization.  
IMSOR (1981).
19. Vemuri, S., Hill, E. F.,  
"Sensitivity Analysis of Optimum Operation of Hydro-thermal Plants".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-96, No. 2, March/April 1977, p. 688-696.
20. Wakamori, F., Masui, S., Morita, K., Sugiyama, T.,  
"Layered Network Model Approach to Optimal Daily Hydro Scheduling".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 9, September 1982, p. 3310-3314.
21. Wan, S. H., Larson, R. E., Cohen, A. I.,  
"Marginal Cost Method for Deterministic Hydro Scheduling".  
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103, No. 6, June 1984, p. 1163-1169.