

01173  
ley  
2


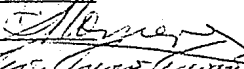
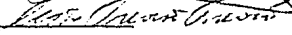

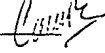
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA



ANALISIS ASINTOTICO DE FENOMENOS DE IGNICION

Créditos Asignados a la Tesis (doce) 12  
Letra y Número

APROBADO POR EL JURADO

Presidente:	<u>Dr. Jaime Cervantes de Gortari</u>	
Vocal:	<u>Dr. Alejandro F. Romero López</u>	
Secretario:	<u>Dr. Cesar Treviño Treviño</u>	
Suplente:	<u>Dr. Eduardo Ramos Mora</u>	
Suplente:	<u>Dr. Carlos Rangel Nafaile</u>	

TESIS CON  
FALLA DE CRONO



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	RESUMEN	i
I	INTRODUCCION	1
II	IGNICION	7
	a. Ecuaciones y Condiciones Frontera	7
	b. Adimensionalización	15
	c. Solución sin Reacción Química	19
	d. Análisis Asintótico (solución con reacción química)	20
	d.1. Solución en la Región de Acoplamiento	26
	e. Acoplamiento Asintótico	29
	e.1. Aproximación de Zeldovich	32
	e.2. Proceso de Ignición para	36
	f. Distancia de Ignición	42
III	GENERACION DE FLAMA PARA	48
IV	CONCLUSIONES	59
	APENDICE A	61
	BIBLIOGRAFIA	64

## RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla un análisis asintótico del fenómeno de ignición y deflagración de una mezcla de gases combustibles premezclados que fluyen sobre una placa plana que se encuentra a una elevada temperatura. El análisis perturbatorio hace uso como parámetro de expansión del inverso del número de Zeldovich, el cual está directamente relacionado con la energía de activación. Se demuestra que para valores moderados del número de Zeldovich un esquema integral del fenómeno de ignición y combustión puede llevarse a cabo. Así entonces, en el capítulo I se presenta una síntesis histórica de diferentes autores que han atacado este problema, y se señalan las principales diferencias metodológicas entre estos autores y la línea de ataque seguida en este trabajo. En el capítulo II, el problema de ignición que trae consigo el cálculo de la distancia de ignición es presentado para el caso de temperaturas de la placa menores que la temperatura adiabática de la flama. Es necesario mencionar que la formulación matemática empleada para la determinación de la distancia de ignición, es similar en términos generales a la utilizada por Liñán & Williams (1979) en su estudio de la ignición transitoria de un sólido reactivo.

En el capítulo III, para valores de la temperatura de la placa mayores a la temperatura adiabática de la flama, se estudia la formación de una flama premezclada y diversos aspectos tales como perfiles de concentración, posición y temperatura de la flama formada.

Finalmente en el capítulo IV son señaladas las principales conclusiones del presente trabajo; el apéndice A presenta una evaluación analítica de la energía de ignición necesaria para alcanzar una cierta temperatura, para el caso de una conductividad térmica suficientemente alta sobre la placa plana.

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

La investigación teórica sobre la ignición y la combustión de flamas que interaccionan con superficies sólidas o líquidas ha alcanzado un alto nivel de complejidad por las dificultades matemáticas que se presentan en su desarrollo; sin embargo, reconociendo que en la mayoría de los dispositivos que generan o están involucrados con la combustión, la susodicha interacción se manifiesta claramente, analizar analíticamente estos problemas ha generado interés durante las décadas pasadas.

El carácter multidisciplinario que conlleva la teoría de la combustión, esto es, la consideración simultánea de áreas tales como mecánica de fluidos, cinética química, teoría de transporte molecular, etc., exige la introducción de hipótesis debatibles para generar simplificaciones adecuadas y así transformar un problema fundamentalmente intratable desde el punto de vista matemático en uno accesible con la herramienta analítica que actualmente se dispone.

Ejemplo de lo anterior y estrechamente relacionado con el estudio de la interacción flama-superficie, lo constituye el empleo de la aproximación de la capa límite de Prandtl, que para diversos procesos de propagación de flamas bidimensionales implica una considerable simplificación del problema; esta aproximación, consiste físicamente en reconocer que, si la velocidad transversal es pequeña en relación a la del flujo principal, las variaciones de las propiedades del flujo a lo largo de la dirección principal son

despreciables en comparación a las variaciones que se presentan en la dirección normal al flujo. Complementariamente, el uso de tal aproximación deberá verse modificada en alguna forma por la presencia de la reacción química (Williams, 1985).

Varios son los ejemplos de propagación de flamas bidimensionales que han podido modelarse exitosamente con ayuda de la teoría de la capa límite, entre algunos de ellos podemos citar principalmente los siguientes: extinción de flama premezclada por paredes enfriadas con agua (Karman & Millán, 1953) combustión bajo condiciones de mezclado entre un combustible y un oxidante (Marble & Adamson, 1954), deflagración de un combustible sólido o líquido en una corriente de gas oxidante (Chung, 1965), estabilización de flamas en placas planas y columnas (Gross, 1955), etc.

De los ejemplos anteriores, el estudio de la ignición y la deflagración de una onda de combustión de gases combustibles premezclados sobre una placa plana a elevada temperatura que es el tema central de la presente tesis ha recibido considerable atención en la literatura especializada, cuyo interés proviene entre otras cosas en alcanzar un mayor entendimiento sobre los mecanismos básicos que determinan la estabilización de una flama sobre las placas planas; todo esto motivado por una demanda continua en incrementar la intensidad de la combustión en diversas aplicaciones modernas.

Antes de continuar con una descripción más profunda sobre este trabajo, conviene mencionar un aspecto de extrema importancia relativo a la validez de la aproximación de Prandtl. No obstante que la mayoría de los autores (Law & Law, 1979; Toong, 1957; Dooley, 1957) han utilizado dicha aproximación para analizar el problema -

de la placa plana, han reconocido que tal aproximación carece de fundamento en regiones cercanas donde se forma la flama, argumentando que la existencia de gradientes longitudinales de temperatura y concentración en esa zona pueden llegar a tener valores considerables y por consiguiente, la invalidación a dicha aproximación. En un trabajo reciente (Treviño & Fernandez-Pello, 1984) se ha esclarecido que el empleo de un parámetro adimensional (proporcional a la razón de la velocidad de flama a la velocidad de flujo) que toma en cuenta estos gradientes longitudinales, permite establecer bajo que tipo de condiciones es posible utilizar la aproximación de Prandtl y a su vez proporciona un criterio que determina cuando se presenta el mecanismo de ignición continua o bien cuando el mecanismo de equilibrio.

Bajo la consideración de utilizar la teoría de la capa límite de Prandtl para analizar el problema de la ignición y la combustión de gases combustibles premezclados que fluyen sobre una placa plana a elevada temperatura, diversos autores han concentrado su investigación teórica en la predicción de la distancia de ignición (medida a partir del borde principal de la placa plana); parámetro que reviste una enorme importancia práctica en el diseño de dispositivos de combustión que pueden modelarse con la ayuda de la placa plana. Por consiguiente, a continuación se presenta un resumen de los principales trabajos con una breve descripción de las principales diferencias conceptuales y metodológicas que surgen entre estas investigaciones y la desarrollada en el presente trabajo en cuanto a lo que toca con la determinación de la distancia de ignición.

Diversas técnicas analíticas se han implementado en el pasado

con objeto de analizar el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el flujo sobre una placa plana con reacción química. Entre éstas podemos mencionar el trabajo de Toong (1957) que emplea un esquema de expansión en serie para la temperatura y concentración. Este trabajo hace uso de la coordenada longitudinal adimensionalizada como parámetro de expansión. Posteriormente, Dooley (1957) propuso la construcción de una función de semejanza para cuando el número de Prandtl y el de Schmidt son iguales, lo cual simplifica considerablemente el análisis, al adoptar una solución iterativa para resolver el conjunto de ecuaciones. Mas recientemente Sharma & Sirignano (1970) con el método numérico de cuasi-linealización calcularon la distancia de ignición para una mezcla de propano-aire. Este tipo de aproximaciones, fueron ampliamente utilizadas por diversos autores para estudiar otros procesos de combustión como son los casos de Marble & Ademson, op. cit. y Tsuji, 1961. El conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico que resultan de estas aproximaciones, se descomponen en un conjunto de ecuaciones ordinarias que se resuelven numéricamente; pero las dificultades inherentes a este tipo de aproximaciones provienen de considerar que la coordenada longitudinal es pequeña y consecuentemente cuando ésta se incrementa, mas términos de la expansión o etapas de iteración serán necesarias para garantizar la convergencia. Por esto, no solo se dificulta el esfuerzo numérico sino que también la exactitud de la solución disminuye sustancialmente debido a los errores que se acumulan en las soluciones previas.

Posteriormente con el advenimiento de las técnicas asintóticas en el campo de la combustión, Berman & Rysantzev (1978) analiza-



ron el problema de ignición sobre una placa plana tomando en con-sideración, que la energía y activación es alta, e incluyendo en su análisis el consumo de reactantes, obtuvieron el primer término para la distancia de ignición.

En esta línea de trabajo Law & Law (1979) emplearon un es--  
quema combinado numérico-asintótico y determinaron la distancia de ignición para energías de activación altas despreciando el -  
consumo de reactantes. Susecivamente, siguiendo también un es--  
quema numérico-asintótico Law & Law (1981) incluyeron el consumo de reactantes y corrigieron favorablemente el cálculo de la dis--  
tancia de ignición.

No obstante, que en los trabajos anteriores el empleo de téc--  
nicas asintóticas ha esclarecido cualitativa y cuantitativamente el estudio de la determinación de cantidades características como la distancia de ignición todos estos trabajos incluyendo los --  
análisis numéricos mencionados líneas atrás, han considerado el punto de ignición como el punto adiabático. Esto es debido a que a una distancia característica finita del borde principal de la placa plana la transferencia de calor es de la placa hacia el gas (actuando la placa de esta forma, como fuente de calor) y para -  
distancias mayores a esta distancia característica, la transfe--  
rencia de calor se invierte, (la placa actúa ahora como un sumide--  
ro de calor) por lo tanto, el punto sobre la placa para el cual el flujo de calor es cero fue señalado como punto de ignición. Aún cuando lo anterior resulta aceptable para muy altas energías de activación -y la razón de ello se verá en el capítulo siguien--  
te- lo cierto es que en la mayoría de los problemas de combustión, la energía de activación suele ser un número grande pero moderado,

evidencia de lo anterior lo constituye el trabajo de Liñán & Williams (1979), sobre la ignición transitoria de un sólido combustible que empleando una formulación integral de orden superior y energías de activación moderadas, concluyeron que el tiempo en alcanzar el punto adiabático y el de ignición no coincidían, éste último calculado a través del criterio del escape térmico.

Con objeto de esclarecer aún mas la ignición y la deflagración de una onda de combustión de gases combustibles premezclados sobre una placa plana a elevada temperatura, el presente trabajo desarrolla un análisis asintótico del problema anterior para valores moderados de la energía de activación incluyendo el consumo de reactantes.

## CAPITULO II

## IGNICION.

## II.a. Ecuaciones y Condiciones Frontera.

Como ha sido señalado en la introducción, la ignición de gases combustibles premezclados por superficies calientes, ha cobrado suficiente interés tanto teórico como práctico. De las configuraciones de flujo sobre cuerpos sólidos la que exhibe probablemente mayor simplicidad es la ignición de una mezcla de gases combustibles sobre una placa plana. Desde luego que en este tipo de problemas, la presencia de una reacción química modifica sustancialmente el análisis, de tal forma que una solución por semejanza es imposible.

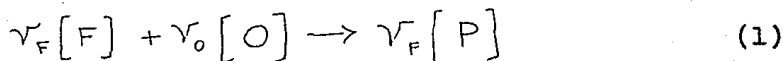
Con objeto de adoptar un modelo físico del problema, las siguientes consideraciones generalmente son asumidas: el hecho de tener números de Reynolds altos y la presencia de la placa plana a elevada temperatura sobre el flujo de la mezcla de los gases combustibles, inducen la formación de una capa límite que puede ser viscosa, térmica y de concentración donde los efectos viscosos, térmicos y reactivos cobran mayor interés. Estas consideraciones permiten establecer que la ignición frecuentemente se establezca dentro de la capa límite debido a la alta sensibilidad de la temperatura sobre la cinética de Arrhenius; en consecuencia la reacción química se inicia en una región interna próxima a la capa caliente. Sin embargo, existe la presencia de una región externa alejada de la placa donde la actividad química es despreciable como resultado de la disminución de la tempe-

ratura. La anterior visualización del problema en una zona externa sin reacción química, que en adelante llamaremos zona congelada y una zona interna con reacción química que será la zona reactiva, permite el empleo del análisis asintótico que tan exitosamente ha sido utilizado en numerosas áreas de la combustión.

Complementariamente al uso de las consideraciones anteriores, también se incluye que: la placa plana no permeable y no catalítica se encuentra a una elevada temperatura  $\bar{T}_p$  menor que la temperatura adiabática de la flama, la corriente libre aguas arriba de la placa, está caracterizada por una velocidad  $u_\infty$ , temperatura  $\bar{T}_\infty$  y concentración másica de especies  $\bar{Y}_{i\infty}$ , todas ellas uniformes, la figura 1 muestra un esquema del modelo analizado.

Por otro lado, la necesidad de considerar reacciones químicas que proceden a una rapidez finita, requiere el empleo tanto de un modelo de reacción como de la rapidez a la cual procede ésta. A pesar de que serias dificultades se pueden asociar a un proceso reactivo en general (como pueden ser reacciones químicas que ocurren en etapas diferentes), el empleo de una reacción química global es de considerable ayuda y retiene a su vez las características más notables de un proceso reactivo.

Se supone entonces, que la reacción química es irreversible y de una sola etapa, que procede entre un combustible y un oxidante conduciendo a la formación de algún producto y que puede representarse mediante la fórmula química siguiente:



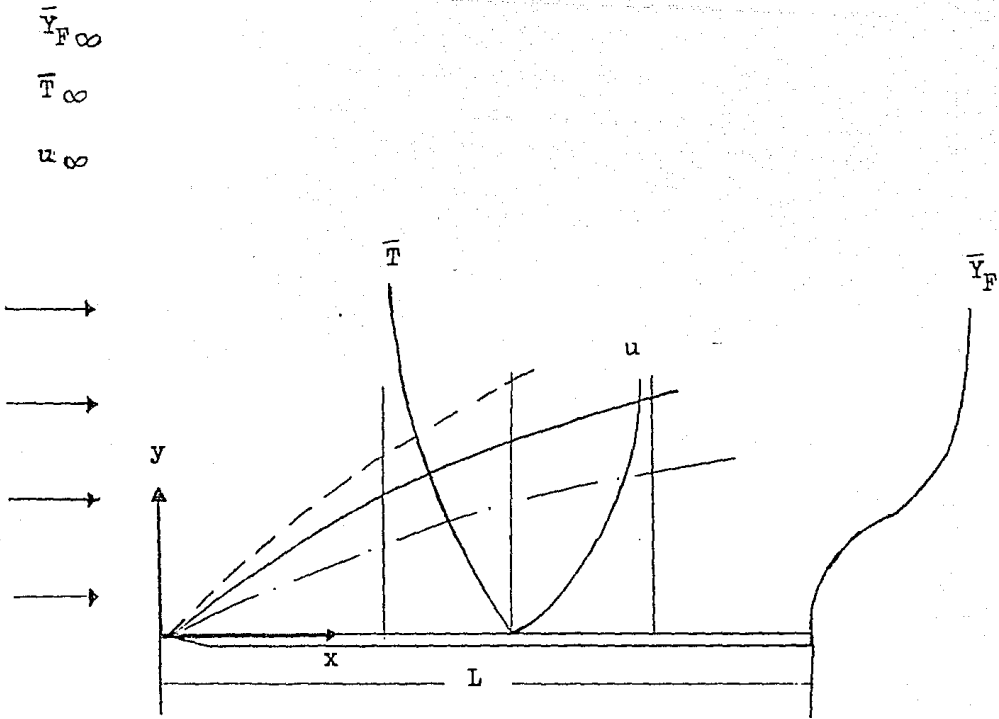


Fig. I Perfiles de velocidad, temperatura y concentración en la placa plana.

donde  $\nu_i$  son los coeficientes estequiométricos con  $i=F,O,P$  para el combustible, oxidante y producto, respectivamente. El símbolo  $[i]$  denota la fórmula química de la especie  $i$ .

Respecto a la rapidez con que proceue la reacción química (1) se puede decir que de acuerdo a la ley de acción de masas, la velocidad de producción por unidad de volumen y tiempo de la especie  $i$  es proporcional al producto de las concentraciones de los diferentes reactantes. Esta relación para la reacción química - (1) puede expresarse, para el caso de que la especie  $i$  sea el combustible como: (Treviño, Tesis Doctoral, 1980)

$$w_F = -B \nu_F W \bar{T}^{\alpha} \left( \frac{x_F^o P}{R \bar{T}} \right)^{\alpha_F} \left( \frac{x^o P}{R \bar{T}} \right) \exp \left( - \frac{\bar{E}}{R \bar{T}} \right)$$

$\alpha_f$  y  $\alpha_o$  corresponden a los órdenes de reacción del combustible y el oxidante y  $a$  es una constante que se determina experimentalmente.

Para el caso de mezclas pobres en combustible, se puede suponer que la concentración del oxidante se mantiene prácticamente constante y asumiendo por simplicidad una reacción química de primer orden para el combustible, la expresión anterior se puede escribir, con ayuda de la ecuación de estado para los gases ideales como:

$$w_F = -B \nu_F W_F \bar{Y}_F \rho \exp \left( - \frac{\bar{E}}{R \bar{T}} \right) \quad (2)$$

En la expresión anterior  $w_F$  representa la velocidad de producción del combustible por unidad de volumen y tiempo,  $W_F$  es el peso

molecular del combustible  $F$ ,  $\bar{Y}_F$  es la concentración másica del combustible  $F$ ,  $\bar{T}$  es la temperatura del gas,  $R$  es la constante universal de los gases y finalmente  $B$  y  $E$  son el factor de frecuencia y la energía de activación del gas, respectivamente. En relación a éstos dos últimos parámetros, conviene señalar el significado físico que representan. El primero de ellos, viene a ser la frecuencia con que las moléculas colisionan entre si y es un parámetro que depende debilmente de la temperatura; segundo, que suele ser mas importante, implica reconocer que para poder obtener reacción química entre las moléculas, éstas deben colisionar con suficiente energía. Por consiguiente, la energía mínima necesaria que permite que las moléculas colisionantes produzcan reacción química se designa como energía de activación y es un valor constante pero varía de una reacción a otra.

Dados los aspectos anteriores sobre la formación de la capa límite y cinética química, las ecuaciones que gobiernan el flujo de gases combustibles premezclados sobre la placa plana con reacción química corresponden a la ecuación global de continuidad, de cantidad de movimiento, de energía y de especies químicas. No obstante que no serán deducidas aquí presentan la siguiente forma: (ver Williams, op. cit., 1985).

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} u + \rho v \frac{\partial}{\partial y} u = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial}{\partial y} u \right) \quad (4)$$

$$c_p \rho u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + c_p \rho v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - Q_w \quad (5)$$

$$\rho u \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right) + w \quad (6)$$

El conjunto de ecs. (3)-(6) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, donde  $u$  y  $v$  representan las componentes de la velocidad en la dirección  $x$  e  $y$ , respectivamente. Así entonces,  $x$  e  $y$  son las coordenadas longitudinal y transversal cuyo origen viene tomado en el borde principal de la placa (ver fig. 1);  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad del gas y el coeficiente de viscosidad, respectivamente.  $D$  es el coeficiente de difusividad y  $\lambda$  la conductividad térmica,  $c_p$  es el calor específico a presión constante y  $Q$  es el calor de reacción por unidad de masa del combustible consumido.

En el conjunto de ecuaciones (3)-(6) y como resulta en la mayoría de las aplicaciones en combustión, los efectos generales tales como fuerzas de cuerpo, radiación, efecto Soret, y fusión de masa por gradiente de presión, etc., no son tomados en cuenta, pero el uso de las siguientes hipótesis aparece implícito en las ecs. (3)-(6): el uso de la ley de Fick de difusión para mezclas binarias, la constancia del peso molecular de la mezcla y el calor específico a presión constante, la mezcla obedece la ley de los -



gases ideales.

Similarmente el balance de las ecs. (3)-(6) muestra que el -- campo de velocidades está gobernado por las ecuaciones de capa límite a través de la acción viscosa y corresponden al movimiento de un fluido viscoso compresible. Además, en virtud del hecho de que la velocidad de la flama normalmente suele ser pequeña en relación a la velocidad del sonido, los cambios de presión inducidos por la actividad química son despreciables y en consecuencia no aparecen en la ecuación de movimiento; también, la validez de la teoría de la capa límite introduce la uniformidad en la presión que indica por un lado que las variaciones de presión normales a la placa son despreciables. Esto conduce a no considerar la ecuación de movimiento en la dirección transversal y por otro lado, el hecho de -- que la placa plana no genera variaciones de presión longitudina-- les; es decir, el proceso de ignición se lleva a cabo mediante una transformación isobárica (hipótesis ampliamente utilizada en diver-- sas aplicaciones de la capa límite en la teoría de la combustión). Similarmente, el término viscoso por disipación no ha sido incluí-- do ya que las velocidades de flujo son bajas.

De la hipótesis isobárica y con ayuda de la ecuación de estado para los gases ideales, se desprende que una relación de proporcio-- nalidad inversa entre la densidad de la mezcla y la temperatura -- existe. Esta relación permitirá mas adelante establecer a su vez una dependencia entre la viscosidad y la densidad.

Respecto al campo de temperatura, la ecuación (5) expresa un balance para un elemento de volumen dado entre la convección neta de entalpía termodinámica y la suma dentro de este volumen, de la energía transportada por conducción y generación por reacción quí-- mica.

Complementariamente para el caso de flujos de baja velocidad - con reacción química, el cociente de la energía térmica a la cinética suele ser tan grande que la generación de energía interna por disipación viscosa es despreciable. Observaciones similares ocurren para la ecuación del combustible.

Para intentar una solución de las ecs. (3)-(6) el conjunto de condiciones en la frontera deberá ser especificado y a raíz del modelo físico utilizado, las siguientes condiciones son las que resultan ser las mas apropiadas al problema:

$$y=0 : u=v=0, \bar{T} = \bar{T}_p, \quad \frac{\partial \bar{Y}_F}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

La primera introduce la condición no deslizante en la pared como resultado de la acción viscosa. La segunda expresa el hecho de que la placa plana se mantiene a una temperatura uniforme  $\bar{T}_p$  y finalmente la tercera expresa que la placa es impermeable a la transferencia de materia. Conviene hacer notar que la idea de fijar la temperatura y el gradiente de concentración en la pared, impide la construcción de una función de semejanza como fue hecho por Dooley (op. cit.).

Complementariamente las condiciones en el flujo libre toman la forma siguiente:

$$y \rightarrow \infty : u = u_\infty, \bar{T} = \bar{T}_\infty, \quad \bar{Y} = \bar{Y}_{F\infty} \quad (8)$$

las cuales expresan la uniformidad de las variables de campo en la corriente de flujo de potencial.

## II.b. Adimensionalización.

Un proceso convencional generalmente adoptado que permite establecer los parámetros físicos de interés que caracterizan al sistema físico analizado tanto en mecánica de fluidos y como en la teoría de la combustión, es el de adimensionalizar las ecuaciones.

Como ha sido señalado anteriormente, las ecs. (3) y (4) expresan el movimiento de un fluido compresible y la ecuación de continuidad se satisface si una función de corriente  $\Psi$  existe tal -- que

$$\rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad , \quad \rho v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9)$$

Además el conjunto de ecs. (3)-(6) presentadas previamente, -- pueden ser simplificadas considerablemente mediante la eliminación de la densidad como variable dependiente explícita; esto puede -- efectuarse fácilmente con la ayuda de la transformación introducida simultáneamente por Howarth (1948) y Dorodnitsyn (1942), la -- cual viene definida por las siguientes variables independientes:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad , \quad \eta = \sqrt{\frac{u_{\infty}}{2\mu_{\infty}\rho_{\infty}x}} \int_0^y \rho(x, y') dy' \quad (10)$$

donde L representa la longitud de la placa.

La anterior transformación físicamente alarga la coordenada -- transversal de tal forma que elimina la densidad como variable de-

pendiente de las ecuaciones de movimiento y el conjunto de ecuaciones se reduce a la forma conocida de las ecuaciones de la capa límite para un fluido incompresible. Complementariamente, el uso de variables adimensionales para las variables restantes deberán introducirse y definirse como:

$$T = \frac{C_P(\bar{T} - \bar{T}_P)}{Q \bar{Y}_{F\infty}}, \quad Y = \frac{\bar{Y}_F}{\bar{Y}_{F\infty}}, \quad f = \frac{\Psi}{\sqrt{2\mu_\infty \rho_\infty u_\infty x}} \quad (11)$$

donde  $f$  es la función de corriente adimensionalizada. Con ayuda de estas transformaciones, las ecuaciones de movimiento adimensionalizadas adquieren la forma:

$$f''' + ff'' = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial T}{\partial \eta} = 2\xi f' \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{2\bar{B}L}{u_\infty} \exp\left(\frac{\bar{T}_a}{\bar{T}_P}\right) \xi Y \exp\left[\frac{ZT}{1+\epsilon ZT}\right] \quad (13)$$

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 2\xi f' \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{2\bar{B}L}{u_\infty} \exp\left(\frac{\bar{T}_a}{\bar{T}_P}\right) \xi Y \exp\left[\frac{ZT}{1+\epsilon ZT}\right] \quad (14)$$

con  $\bar{B} = B \sqrt{W_F}$  y  $f'$  denota derivada respecto a  $\eta$ . La ec. (12) es la ecuación de Blasius ampliamente conocida. En el conjunto anterior de ecuaciones se supone que el número de Prandtl  $Pr = \mu c_p / \lambda$  y el número de Schmidt,  $Sc = \mu / \rho D$  son constantes. Además  $\bar{T}_a$  representa la temperatura de activación definida como  $\bar{T}_a = E/R$ . Un aspecto interesante relativo a la transformación de Howarth-Dorodnitsyn es ahora evidente: las ecuaciones de conservación global de continuidad y de cantidad de movimiento quedan completamente desacopladas de las ecuaciones de balance de la energía y de especies (combustible) y se reducen efectivamente a la forma de las ecuaciones con densidad uniforme, cuya solución para el caso de gases inertes es bien conocida. Específicamente el desacoplamiento anterior proviene de que el producto  $\rho \mu = \rho_\infty \mu_\infty = \text{constante}$ . Esto resulta de considerar por un lado que la presión es constante y por otro que la viscosidad es directamente proporcional a la temperatura.

El resultado de la adimensionalización anterior, proporciona varios parámetros adimensionales entre los cuales se tiene:

$$Z = \frac{\bar{T}_a Q Y_{F\infty}}{c_p \bar{T}_p^2} \quad (15)$$

que representa la razón de la energía de activación a la energía térmica; Williams (op. cit.) ha llamado a este cociente el número de Zeldovich y lo define como una medida adimensional de la sensibilidad de la temperatura de la velocidad de reacción. Los valores representativos de  $Z$  están entre 5 y 15, los cuales son lo

suficientemente grandes para que el análisis asintótico sea razonablemente exacto.

El otro parámetro adimensional de interés que aparece en las ecuaciones adimensionalizadas, está relacionado con el inverso del número de Zeldovich a través de:

$$\varepsilon = \frac{\bar{T}_P}{\bar{T}_\infty} = \frac{Q \bar{Y}_{F\infty}}{c_P \bar{T}_P} \cdot \frac{1}{Z} \quad (16)$$

cabe mencionar que una forma simplificada de las ecuaciones adimensionales se puede obtener con la ayuda del siguiente operador:

$$\mathcal{L}(X, \Phi) = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - 2\xi \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad (17)$$

donde  $X$  y  $\Phi$  son funciones arbitrarias. De esta forma las ecuaciones se transforman en el conjunto siguiente:

$$\mathcal{L}\left(1, \frac{df}{d\eta}\right) = 0 \quad (18)$$

$$-\mathcal{L}(Pr, T) = +\mathcal{L}(Sc, Y) = \frac{2\bar{B}L}{u_\infty} \exp\left(\frac{\bar{T}_\infty}{\bar{T}_P}\right) \xi Y \exp\left[\frac{ZT}{1+\varepsilon ZT}\right] \quad (19)$$

El conjunto de condiciones en la frontera en forma adimensionalizada adquiere la forma siguiente:

$$\eta = 0: f(0) = f'(0) = 0, T(0) = 0, \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: f'(\infty) = 1, T = \frac{c_P(\bar{T}_\infty - \bar{T}_P)}{Q \bar{Y}_{F\infty}} = T_\infty, Y = 1 \quad (20)$$

### II.c. Solución sin Réacción Química.

En regiones próximas al borde de la placa plana ( $\xi \rightarrow 0$ ), los perfiles de temperatura y concentración prácticamente no difieren a los correspondientes perfiles que se obtienen sin combustión, además la presencia de términos longitudinales aparecen como consecuencia de tener reacción química; por lo que puede concluirse que omitiendo el término de reacción y los términos longitudinales, las ecs. (13) y (14) admiten solución de semejanza con  $\eta$  como variable de semejanza y que sujetas a las condiciones en la frontera (ecs. 20) toman la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + f Pr \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} + f Sc \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0 \quad (22)$$

La ec. (21) con ayuda de la aproximación de Lighthill (1950) para números de Prandtl muy grandes, equivale a suponer que el perfil de velocidades es lineal en la capa límite térmica y para cuando  $\eta \rightarrow 0$ , éste viene dado en términos de la función de Blasius como  $f(\eta) \sim f''(0) \eta^2/2$ ; si sustituimos esta relación en la ec. (21) podemos integrar directamente y aplicando las condiciones frontera produce:

$$T_f(\eta) = -\beta \frac{\int_0^\eta \exp\left[-\frac{1}{6} f''(0) Pr \eta^3\right] d\eta}{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{6} f''(0) Pr \eta^3\right] d\eta} \quad (23)$$

con ayuda de la función gamma y para valores de  $\eta \rightarrow 0$ , la solución cercana a la pared, puede escribirse como

$$T_f \sim -\beta f''(0) Pr^{1/3} \eta + O(\eta^4), \eta \rightarrow 0 \quad (24)$$

Un procedimiento similar para la ecuación de la concentración del combustible produce:

$$Y = 1 \quad (25)$$

que es un resultado de esperarse ya que si no existe reacción química, la concentración de combustible se debe mantener uniforme e igual al valor que tiene en la corriente libre. En la ec. (24) el subíndice  $f$  se refiere a la solución congelada, esto es, sin reacción química. Además

$$\beta = \frac{(\bar{T}_p - \bar{T}_\infty) C_p}{Q \bar{Y}_{F\infty}} = O(1) \quad (26)$$

#### II.d. Análisis Asintótico (solución con reacción química).

Considerando que los estados que conducen a la ignición son debilmente reactivos, los perfiles de temperatura y concentración con reacción química, pueden verse como pequeñas perturbaciones a los respectivos perfiles de la solución congelada; pero además, como fue señalado en la sección II.a. la alta sensibilidad del factor de Arrhenius a la temperatura, señala la presencia de una zona interna próxima a la placa, donde la rapidez de reacción es significativa. Lo anterior es equivalente a decir que para números de Zeldovich grandes, un incremento o una pequeña perturbación a la temperatura sobre su valor con-



gelado del orden del inverso del número de Zeldovich, produce sobre la rapidez de reacción un incremento de orden unidad. Para poder apreciar, consideremos el término exponencial de la ec. (13), esto es,  $\exp(ZT/1 + \varepsilon ZT)$ ; tomemos ahora un incremento tal que  $T = \Delta T/\theta = 1/Z$  con  $\theta$  de orden de unidad, si introducimos ésto en la forma exponencial resulta  $\exp(1/1 + \varepsilon)$  y ya que  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño se concluye que  $\exp(1/1 + \varepsilon) \sim e^\varepsilon = 0(1)$ .

Por lo anterior es conveniente introducir una variable  $\theta$  que tome en cuenta esta perturbación, ésto es:

$$T = T_f + \frac{1}{Z} \theta \quad (27)$$

Similarmente para caracterizar esta zona reactiva, una variable que alargue la coordenada transversal  $\eta$  definida como  $\chi = \eta/g(Z)$  deberá introducirse en el conjunto de ecs. (13) y (14); además, ya que la zona reactiva ocurre en una región muy próxima a la placa plana uno puede aproximar  $f(\eta)$  como  $f''(0) \eta^2/2$ ; el resultado de estas consideraciones conduce a que la forma adecuada de la variable interna sea:

$$\chi = Z\beta f''(0) P_r^{1/3} \eta \quad (28)$$

Paralelamente, la elección de esta variable determina que la zona interna esté caracterizada por un balance entre el término difusivo y el reactivo en los órdenes mas bajos en  $\varepsilon$ ; entonces la forma de las ecs. (13) y (14) será:

$$\frac{d^2 \theta}{d\chi^2} = -\frac{DY}{2} \exp\left[\frac{\theta - \chi}{1 + \varepsilon(\theta - \chi)}\right] + \frac{2\varepsilon^3}{\lambda^3} \left[ \chi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{1}{4} \chi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right] \quad (29)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{DY}{2} \frac{\epsilon \beta}{\lambda} \exp\left[\frac{\theta - x}{1 + \epsilon(\theta - x)}\right] + \frac{2\epsilon^4}{\lambda^4} \left[ \chi \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} - \frac{1}{4} \chi^2 \frac{\partial Y}{\partial \chi} \right] \quad (30)$$

Claramente, de la ec. (29) se tiene que en los órdenes mas bajos en  $\epsilon$ , el balance entre el término difusivo y el reactivo deberá predominar; los términos convectivos que son de orden  $\epsilon^3$  son despreciables y su efecto puede omitirse en la mayor parte de la etapa que antecede a la ignición; en regiones muy próximas a la ignición su efecto deberá tomarse en cuenta. El valor excepcionalmente pequeño de los términos convectivos proviene de dos razones fundamentales: primero, ya que los gradientes son muy pronunciados en la zona interna, la velocidad de difusión es generalmente un orden mayor que la velocidad de convección y segundo, el transporte convectivo es aún mas lento puesto que la velocidad cercana a la superficie de la placa es de orden  $\epsilon^2$ ; estos efectos combinados producen el factor  $\epsilon^3$ .

En el conjunto de ecs. (29)-(30) los siguientes parámetros adimensionales aparecen:

$$\lambda = \frac{\bar{T}_p - \bar{T}_\infty}{\bar{T}_p} = O(1) \quad (31)$$

$L_e$  es el número de Lewis definido como  $L_e = Sc/Pr$  y representa el cociente de la velocidad de difusión térmica a la velocidad de difusión másica. Para gases generalmente, el número de Lewis suele ser un número de orden unidad. Finalmente, el número de Damköhler también de orden unidad está definido como:

$$D = \frac{2 \bar{B} L}{u_{\infty}} \frac{P_r^{1/3} \varepsilon \exp(-\bar{T}_a / \bar{T}_p)}{[\beta f''(0)]^2} \quad (32)$$

y el cual representa una medida adimensional de la distancia de ignición (a través de la longitud  $L$ ) y su determinación desempeña el objetivo fundamental del presente capítulo.

El conjunto de ecs. (29)-(30) deberá resolverse con la condición en la pared, ésto es:

$$\chi = 0 : \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \chi} = 0 \quad (33)$$

La condición en infinito ( $\chi \rightarrow \infty$ ) no se satisface como consecuencia de la naturaleza singular del conjunto de ecs. (29)-(30), - por consiguiente, deberá definirse una condición extra introducida mediante un acoplamiento asintótico entre la zona interna y la externa; es decir, el acoplamiento asintótico deberá efectuarse en el borde exterior de la capa reactiva que corresponde al borde inferior de la zona externa donde la reacción química es exponencialmente pequeña. Por lo tanto, en esta zona externa la reacción química queda congelada en todos los términos en  $\varepsilon$ . Sin embargo, en el conjunto de ecs. (13)-(14) no es posible despreciar los términos que involucra gradientes longitudinales ya que en la frontera con la zona reactiva la temperatura varía con  $\xi$  (como consecuencia de la actividad química). Esto implica que la semejanza es destruida al incluir la historia del flujo en la dirección longitudinal  $\xi$ . Visto de esta manera, el problema de interés para la zona externa -

corresponde al flujo de gases inertes sobre una placa plana, con la condición de que la temperatura en la pared varía longitudinalmente, en este caso la pared corresponde a la región de acoplamiento con la zona reactiva. La solución a este problema ha sido proporcionado por la aproximación de Lighthill (1950) para números de Prandtl muy grandes y toma la forma:

$$\left(\frac{\partial \theta_e}{\partial \eta}\right)_0 = -f''(0) P_r^{1/3} \int_0^{\xi} \frac{d\theta'_e(\xi', 0)}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\{1 - (\xi'/\xi)^{3/4}\}^{1/3}} \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial \eta}\right)_0 = -f''(0) S_c^{1/3} \int_0^{\xi} \frac{d\phi'_e(\xi', 0)}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\{1 - (\xi'/\xi)^{3/4}\}} \quad (35)$$

Por el análisis anterior, los gradientes de temperatura y concentración no se evalúan en la verdadera superficie de la placa plana sino que se calculan en la región de acoplamiento, esto es, para cuando  $\chi \rightarrow \infty$  o  $\eta \rightarrow 0$  y representan los evidentes incrementos sobre los valores inertes como se vería desde la zona congelada. Las ecs. (34) y (35) que representan integrales de Stieljes, dejan fuera las condiciones de salto ya que  $\theta_e(0, \eta) = \phi_e(0, \eta) = 0$ .

Por la forma de las ecs. (29)-(30) una manera mas conveniente de trabajar con ellas, es definir las variables internas siguientes:

$$\psi = \theta - \chi, \quad \phi = D Y \quad (36)$$

Despreciando los términos convectivos en primera aproximación e introduciendo las variables  $\psi$  y  $\phi$ , las ecs. (29)-(30) toman la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = -\frac{\phi \Xi}{2} \exp(\psi) [1 - \epsilon \psi^2] \quad (37)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi^2} = \frac{\phi \Xi}{2} \exp(\psi) [1 - \epsilon \psi^2] \quad (38)$$

donde  $\gamma$  es un número pequeño definido como:

$$\gamma = \frac{Le D \epsilon}{\lambda} \beta \quad (39)$$

y la condición en la pared dada por:

$$\chi = 0 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \chi} = 0 \quad (40)$$

junto con las ecs. (34) y (35) para la condición en la región de acoplamiento.

### II.a.1. Solución en la Región de Acoplamiento.

La condición de impermeabilidad ( $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ) sobre la superficie de la placa plana, garantiza que el perfil de concentración en primera aproximación no dependa de la coordenada  $x$ ; entonces una solución de la forma:

$$\phi = \phi_s(\xi) + \varepsilon \phi_1(\xi, \chi) \quad (41)$$

debe introducirse en el conjunto de ecs. (37)-(38) con el resultado siguiente:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_s}{2} \xi \exp(\psi) [1 - \varepsilon \psi^2] - \frac{\varepsilon \phi_1}{2} \xi \exp(\psi) \quad (42)$$

válida hasta términos de orden  $\varepsilon^2$ .

Observando que el lado izquierdo para la ecuación de la energía puede escribirse como  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right]$ , una primera integración de la ecuación de la energía produce:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - q^2 = \phi_s \xi (1 - 2\varepsilon) - \phi_s \xi \exp(\psi) [1 - \varepsilon(\psi^2 - 2\psi + 2)] - \varepsilon \xi \left\{ \exp(\psi) \phi_1 - \phi_{1p} + \frac{\delta_1}{\varepsilon} [\exp(\psi) - 1] - \frac{\delta_1}{\varepsilon} q \int_0^{\chi} e^{\psi} d\chi \right\} \quad (43)$$

En la ecuación anterior y de alguna manera relacionado con el flujo de calor adimensional en la pared, aparece la siguiente cantidad:

$$q = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_p \quad (44)$$

Es fácil ver que la ec. (44) tiene el valor  $-1$  para flujo congelado ya que  $\psi = \theta - \chi$  y en ausencia de reacción química  $\theta = 0$  en todo el campo por lo que  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi}\right)_0 = -1$ . Similarmente, el valor  $\phi_{1P}$  representa el valor de  $\phi_1$  en la superficie de la placa y es una función de  $\mathcal{F}$  y  $q$ .

Ahora bien, con efecto de poder utilizar las ecs. (34) y (35) para llevar a cabo el acoplamiento, es necesario encontrar expresiones para los gradientes transversales de temperatura y concentración en términos de lo que sucede en la zona reactiva; para ello una manera de lograrlo es a través de una evaluación de la ec. (43) para cuando  $\chi \rightarrow \infty$  que corresponde a  $\eta \rightarrow 0$ , y recordando que  $\psi = \theta - \chi$  los términos exponenciales en la ec. (43) desaparecen produciendo la siguiente expansión:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right|_{\infty} \sim -\sqrt{\phi_s \mathcal{F} + q^2} + \frac{\varepsilon \mathcal{F} \left[ \phi_s - \frac{1}{2} \left( \phi_{1P} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{F}} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{F}} q \int_0^{\chi} e^{\psi} d\chi \right) \right]}{\sqrt{\phi_s \mathcal{F} + q^2}} + O(\varepsilon^2) \quad (45)$$

$\chi \rightarrow \infty$

Una integración mas para la ecuación que involucra el término  $\frac{\partial \psi}{\partial \chi}$  y evaluándola para valores de  $\chi \rightarrow \infty$  conduce a la siguiente expresión:

$$\psi \sim \left\{ -\sqrt{\phi_s \mathcal{F} + q^2} + \frac{\varepsilon \mathcal{F} \left[ \phi_s - \frac{1}{2} \left( \phi_{1P} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{F}} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{F}} q \int_0^{\chi} e^{\psi} d\chi \right) \right]}{\sqrt{\phi_s \mathcal{F} + q^2}} \right\} \chi$$

$$+ \text{Ln} \left\{ \frac{4 (\phi_s \mathcal{F} + q^2) \sqrt{\phi_s \mathcal{F} + q^2} + q}{\phi_s \mathcal{F} \sqrt{\phi_s \mathcal{F} + q^2} - q} \right\} + O(\varepsilon), \chi \rightarrow \infty \quad (46)$$

donde el término logarítmico representa el incremento de temperatura  $\theta_e$  como consecuencia de la reacción, visto desde la zona congelada. Como se verá mas adelante, la necesidad de determinar una expansión asintótica para  $\psi$  en términos de este incremento de temperatura, resultará de considerable ayuda para llevar a cabo el acoplamiento entre la zona reactiva y la zona congelada.

Finalmente dentro de esta subsección, el cálculo del gradiente de concentración para valores grandes de  $\chi$  complementa la determinación de los gradientes que aparecen en las ecs. (34) y (35). Para ello nótese que si se resta la ecuación de la energía a la de concentración, se elimina el término reactivo lo que conduce a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} + \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \chi^2} = 0 \quad (47)$$

Integrando la ec. (47) y aplicando la condición en la superficie de la placa que corresponde a  $\chi = 0$ :  $\frac{\partial \psi}{\partial \chi} \Big|_0 = q$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial \chi} = 0$  se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \chi} + \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} = q \quad (48)$$

Ahora bien, para valores de  $\chi \rightarrow \infty$  (borde de la zona reactiva) y con ayuda de la ec. (45), se obtiene la siguiente expresión para el gradiente de concentración en la zona de acoplamiento:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \chi} \sim \frac{\delta}{\varepsilon} \left( q + \sqrt{\phi_s \varepsilon + q^2} \right) + O(\varepsilon) \quad (49)$$

De manera similar al cálculo efectuado a la ecuación de la energía, una integración mas de la ec. (48) con ayuda del análisis anterior, produce la siguiente expresión para  $\phi_1$ :



$$\phi_1 \sim \phi_{1P} + \frac{\gamma}{\varepsilon} \left\{ \gamma \chi + \sqrt{\phi_s \xi + q^2} \chi - \ln \left[ \frac{4 (\phi_s \xi + q^2) \sqrt{\phi_s \xi + q^2 + q}}{\phi_s \xi \sqrt{\phi_s \xi + q^2 - q}} \right] \right\} \quad (50)$$

Con objeto de no tener una concentración de incremento de combustible en este orden, lo cual dificultaría enormemente el análisis y el cual podría ser absorbido en  $\phi_s$ , es correcto y no se pierde generalidad si se introduce:

$$\phi_{1P} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \ln \left\{ \frac{4 (\phi_s \xi + q^2) \sqrt{\phi_s \xi + q^2 + q}}{\phi_s \xi \sqrt{\phi_s \xi + q^2 - q}} \right\} \quad (51)$$

#### II.e. Acoplamiento Asintótico.

El método matemático de expansiones asintóticas acopladas debe su raíz al siguiente principio: <sup>\*</sup> la representación interna de la solución debe ser igual a la representación externa de la solución; lo anterior exige la existencia de una variable intermedia tal que en el límite asintótico de  $\varepsilon \rightarrow 0$  las siguientes relaciones sean válidas:

$$\theta_e(\xi, \eta) \sim \theta(\xi, \chi) \quad , \quad \phi_e(\xi, \eta) \sim \phi(\xi, \chi), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (52)$$

desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto  $\eta = 0$ , los miembros izquierdos de las relaciones (52) serán:

\* Van Dyke (1964)

$$\theta_e(\xi, \eta) \sim \theta_e(\xi, 0) + \left. \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} \right|_0 \eta + O(\eta^2)$$

$$\phi_e(\xi, \eta) \sim \phi_e(\xi, 0) + \left. \frac{\partial \phi_e}{\partial \eta} \right|_0 \eta + O(\eta^2) \quad (53)$$

Recordando que  $\theta = \psi + \chi$  y  $\phi = \phi_s + \varepsilon \phi_1$ , y comparando las ecs. (52) y (53) produce lo siguiente:

$$\theta_e(\xi, 0) + \left. \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} \right|_0 \eta + O(\eta^2) \sim \psi + \chi$$

$$\phi_e(\xi, 0) + \left. \frac{\partial \phi_e}{\partial \eta} \right|_0 \eta + O(\eta^2) \sim \phi_s + \varepsilon \phi_1 \quad (54)$$

ahora con ayuda de la ec. (46) y recordando que  $\chi = \beta Z f''(0) P_r^{1/3} \eta$  se obtiene el siguiente valor de  $\left. \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} \right|_0$ : (igualando potencias de  $\eta$ )

$$\left. \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} \right|_0 = \beta Z f''(0) P_r^{1/3} \eta \left\{ \frac{1 - \sqrt{\phi_s \xi + q^2} + \varepsilon \xi \left[ \phi_s - \frac{1}{2} \left( \phi_{1p} + \frac{\delta'}{\varepsilon} + \frac{\delta'}{\varepsilon} q \int_0^\infty e^\psi d\chi \right) \right]}{\sqrt{\phi_s \xi + q^2}} \right\} \quad (55)$$

que al introducirlo en la ec. (34) se obtiene:

$$-1 - \sqrt{\phi_s \xi + q^2} + \frac{\varepsilon \xi \left[ \phi_s - \frac{1}{2} \left( \phi_{1p} + \frac{\delta'}{\varepsilon} + \frac{\delta'}{\varepsilon} q \int_0^\infty e^\psi d\chi \right) \right]}{\sqrt{\phi_s \xi + q^2}} \sim -\frac{\varepsilon}{\lambda} \int_0^\xi \frac{d\theta'_e}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\left[ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right]^{1/3}} \quad (56)$$

siguiendo el mismo análisis para la ecuación de la concentración se tiene que:

$$-\alpha D \left[ q + \sqrt{\phi_s \xi + q^2} - \frac{\varepsilon \xi \left[ \phi_s - \frac{1}{2} \left( \phi_{1p} + \frac{\delta'}{\varepsilon} + \frac{\delta'}{\varepsilon} q \int_0^\infty e^\psi d\chi \right) \right]}{\sqrt{\phi_s \xi + q^2}} \right] \sim \int_0^\xi \frac{d\phi'_s}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\left[ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right]^{1/3}} \quad (57)$$

en los órdenes mas bajos.

El conjunto de ecuaciones integrales (56)-(57) proporcionan la información necesaria para obtener la distancia de ignición. También de lo anterior es claro que  $\theta_e$  está dada por:

$$\theta_e = \text{Ln} \left\{ \frac{4}{\phi_s \bar{\xi}} (\phi_s \bar{\xi} + q^2) \frac{\sqrt{\phi_s \bar{\xi} + q^2} + q}{\sqrt{\phi_s \bar{\xi} + q^2} - q} \right\} \quad (58)$$

y  $\alpha$  representa el parámetro del consumo de reactantes, cuyo valor es de suma importancia para el análisis subsecuente de la ignición. En el capítulo siguiente se describe como este valor determina un regimen específico de combustión. El parámetro  $\alpha$  está definido como:

$$\alpha = \text{Le}^{2/3} \beta \quad (59)$$

Para valores muy pequeños de  $\alpha$  que es equivalente a tener -- temperaturas de la placa muy bajas y próximas a la temperatura de la corriente libre, el consumo de reactantes no contribuye al análisis de ignición, como puede apreciarse de la ec. (57) ya que en este caso  $\phi_s = \text{constante} = 1$ . Para valores de  $\alpha$  cercanos a la unidad y tomando  $\text{Le} \approx 1$  lo cual es un valor razonable para gases, se deduce de la ec. (59) que  $\bar{T}_p \approx \bar{T}_\infty + Q\bar{Y}_{F\infty}/c_p$  y esta última cantidad es muy cercana a la temperatura adiabática de la flama; entonces -- para estos valores de  $\alpha$  ( $\alpha \sim 1$ ) la temperatura asociada a la ignición es prácticamente la temperatura adiabática de la flama. Así pues, existe un valor crítico de  $\alpha$  cercano a la unidad, en donde el proceso de ignición ya no es caracterizado por el escape -- térmico. Por lo tanto, para valores mayores a este valor crítico se obtiene una suave transición de un flujo congelado a un flujo en

equilibrio caracterizado por la formación de una deflagración plana.

### II.e.1. Aproximación de Zeldovich.

Debido que el conjunto de ecs. (56) y (57) está acoplado a través de la función  $\phi_s$ , el conocimiento  $\phi_s$  con ayuda de algún proceso límite es de gran valía para poder resolver la ecuación integral de la energía. Un procedimiento es utilizar la aproximación de Zeldovich que se describe a continuación.

En primera aproximación si se desprecian potencias de  $\varepsilon$  en las ecuaciones integrales de la energía y concentración dadas anteriormente, la ecs. (56) toma la forma y además es a la vez solución:

$$q = -\sqrt{1 - \phi_s \xi} \quad (60)$$

mientras que la ec. (57) será:

$$-\alpha D \left[ 1 - \sqrt{1 - \phi_s \xi} \right] = \int_0^{\xi} \frac{d\phi_s'}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\left\{ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right\}^{1/3}} \quad (61)$$

La ecuación anterior da la evolución de la concentración del combustible como una función del parámetro del consumo de reactivos  $\alpha$ . Ya que la aproximación anterior conduce a que el punto de ignición coincida con el punto adiabático, se puede suponer que la ignición ocurre en  $\xi = 1$ , por lo que de la ec. (60) para  $\phi_s > 1$ ,  $\xi = 1$  se obtiene una raíz negativa, indicando un proceso singular (ignición) de aquí resulta que en esta primera aproximación  $q = 0$  en la ignición (condición adiabática) lo que nos lle-

va a tomar  $\phi_s = 1$  en la ignición. También de esto se desprende - que para resolver la ec. (61) el valor del número de Damköhler  $D$  - deberá seleccionarse de tal forma que  $\phi_s = 1$  coincida con  $\xi = 1$ .

La figura 2 muestra los resultados de la integración numérica de la ec. (61) donde aparece la variación del número de Damköhler como una función del parámetro del consumo de reactantes  $\alpha$ . De la figura 2 puede apreciarse un resultado obtenido por otros autores (Berman & Ryasantzev, 1978; Law & Law, 1979, 1981) que consiste en el valor límite de  $\alpha = 0$ , el cual corresponde a un valor - del número de Damköhler igual a la unidad y en términos físicos - significa lo siguiente: cuando  $\alpha = 0$  el consumo de reactantes no juega ningún papel en el evento de ignición; y por la ec. (57) se deduce que  $\frac{d\phi_s}{d\xi} = 0$  lo cual es equivalente a  $\phi_s = \text{constante}$ , - pero recordando que en primera aproximación  $\phi = \phi_s = DY$  junto a que  $D(0) = 1$  se obtiene  $\phi_s = Y = 1$ , esto es, la concentración - de combustible se mantiene uniforme e igual al valor que posee en la corriente libre.

Aún cuando la solución numérica de la ec. (61) es válida para - valores arbitrarios de  $\alpha$ , es conveniente con objeto de compara- ción, tratar una solución a esta ecuación para valores pequeños de  $\alpha$ . De esta manera se puede desarrollar una expansión en se- rie para la concentración en términos del parámetro  $\alpha$  de la si- guiente forma :

$$Y \sim 1 - \alpha \psi_s(\xi) + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (62)$$

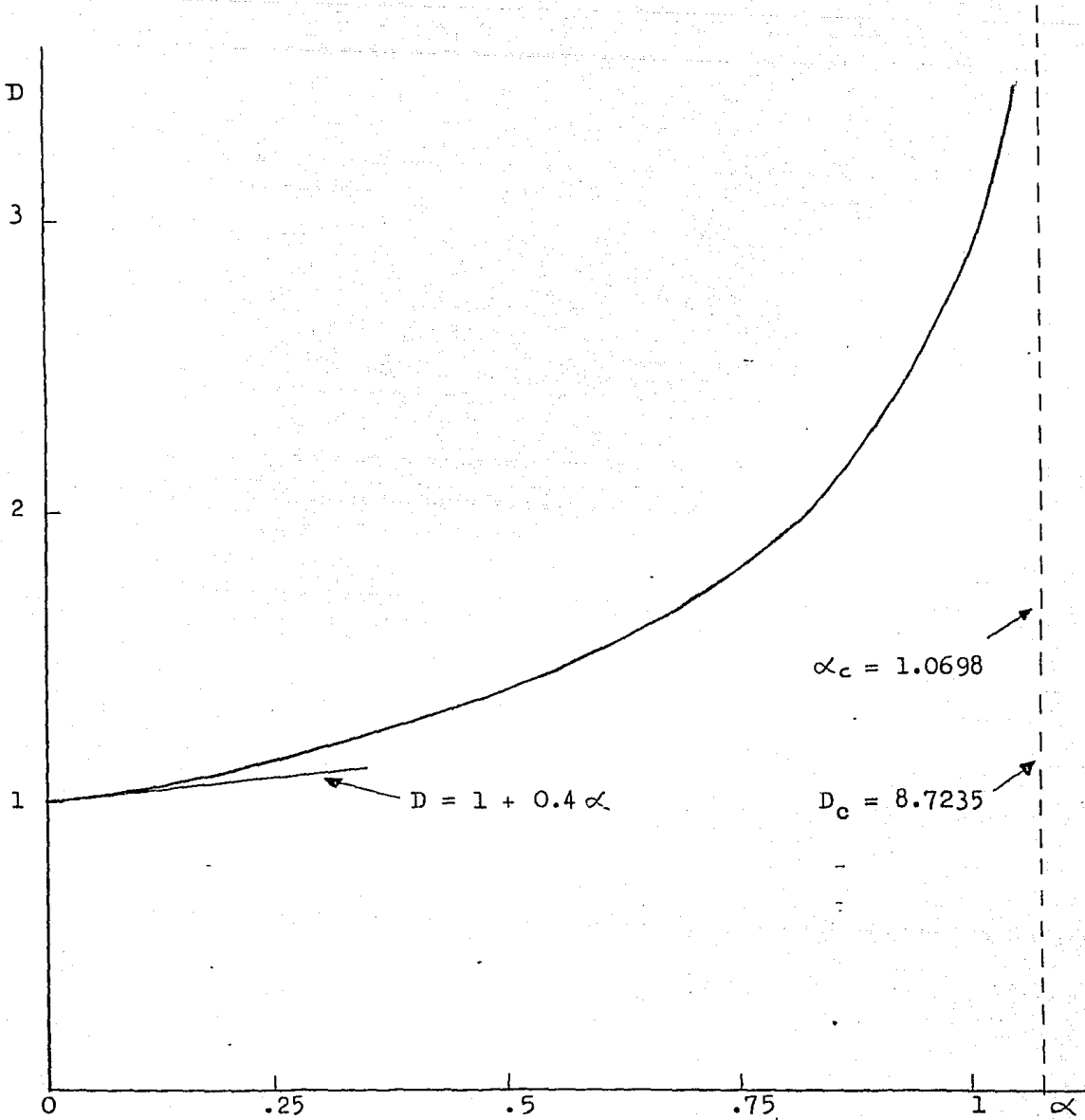


Fig. 2 Número de Damköhler crítico para la ignición como una función del parámetro del consumo de reactantes  $\alpha$ , obtenido con la aproximación de Zeldovich.

La expansión anterior deberá satisfacer la condición inicial en  $\xi = 0$  que se traduce en la uniformidad del perfil de concentración esto es,  $Y = 1$ , entonces de la ec. (62) se tiene que  $\psi_S(0) = 0$ .

Similarmente, una expansión para el número de Damköhler deberá desarrollarse y por los resultados de la integración numérica de la ec. (61) se tiene que:

$$D \sim 1 + \alpha \psi_S(1) + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (63)$$

Recordando que  $\phi = \phi_S = DY$ , la expansión para  $\phi_S$  será:

$$\phi_S \sim 1 + \alpha [\psi_S(1) - \psi_S(\xi)] + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (64)$$

donde  $\psi_S(\xi)$  es una función de  $\xi$  que representa una función de orden unidad y el valor  $\psi_S(1)$  deberá determinarse numericamente.

Si se introducen las expansiones para  $Dy\phi_S$  en la ec. (61) y si se retienen solamente los términos de orden mas bajos en  $\alpha$ , se obtiene la ecuación:

$$1 - \sqrt{1 - \xi} = \int_0^{\xi} \frac{d\psi_S'}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\{1 - (\xi'/\xi)^{3/4}\}^{1/3}} \quad (65)$$

sujeta la condición  $\psi_S(0) = 0$ . La ec. (65) puede valuarse numericamente con ayuda de la fórmula de inversión de Abel y el resultado numérico conduce a  $\psi_S(1) = 2/5$ . Por consiguiente la solución de  $D$  contra  $\alpha$  viene dada por la expresión siguiente:

$$D(\alpha) = 1 + \frac{2}{5}\alpha + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (66)$$

válida hasta términos de orden  $\alpha$ . Esta ecuación que representa una línea recta y que aparece también en la figura 2, da buenos resultados en el intervalo  $0 \leq \alpha < 0.3$ .

De la figura 2 se puede apreciar que si se incrementa el valor de  $\alpha$ , el valor del número de Damköhler  $D$  también se incrementa conduciendo aparentemente a la conclusión errónea de que se necesitaría una mayor distancia para alcanzar la ignición; lo anterior, - que ha sido señalado por diversos autores no toma en cuenta el factor exponencial que incluye la definición del número de Damköhler; esto es, la distancia de ignición puede verse con ayuda de la ec. (32) como: distancia de ignición  $\propto D(\alpha) \exp(T_a/T_p)$ , entonces si se aumenta el parámetro del consumo de reactivos  $\alpha$  también se incrementa el valor de la temperatura de la placa, por consiguiente, el factor exponencial tiene el efecto de compensar el resultado -- mencionado líneas atrás. Como fue señalado en la sección II.e., hay un valor crítico de  $\alpha$  que corresponde  $\alpha_c = 1.0698$  y a un valor finito del número de Damköhler de  $D(\alpha_c) = 8.7235$  sobre los cuales el comportamiento singular del fenómeno de ignición desaparece y la ignición no se caracteriza por el escape térmico. Además - el valor finito del número de Damköhler se debe a los efectos convectivos que causan un incremento en la concentración del que -- viene dado por la solución de semejanza.

## II.e.2. Proceso de Ignición para $\alpha < \alpha_c$ .

Como ha sido señalado por Kapila (1980-1981) el proceso de ignición y el de combustión pueden estudiarse con mayor rigor si se incluyen los términos convectivos que aparecen en las ecs. (29)-(30);



asi entonces en regiones próximas al punto de ignición  $\xi \rightarrow 1$ , el gradiente del incremento de temperatura deberá tomarse en cuenta para determinar la distancia de ignición. El significado físico de lo anterior adquiere considerable importancia y debe discutirse con cierto detalle. De acuerdo a la ec. (34) la cual relaciona el gradiente transversal con el gradiente del incremento de temperatura a través de una relación integral, determina lo siguiente: si el gradiente del incremento de temperatura es lo suficientemente grande cerca del punto de ignición, lo cual es una suposición razonable ya que la reacción química en esta zona produce gradientes longitudinales de temperatura y concentración, entonces, ésta última ecuación establece que el flujo de calor transversal o la pérdida de calor que emerge de la capa límite puede llegar a ser considerable -- causando un proceso de ignición más lento. Por consiguiente, un análisis que tome en cuenta el efecto anterior será de considerable provecho para corregir la distancia de ignición dada por la aproximación de Zeldovich. Como la ec. (58) proporciona una expresión para el incremento de temperatura, es fácil demostrar que la derivada de esta función puede escribirse como:

$$\frac{d\theta_e}{d\xi} = \frac{2 \frac{dq}{d\xi} (q + \sqrt{\phi_s \xi + q^2})}{\phi_s \xi + q^2} - \frac{2}{\xi} + \frac{\phi_s}{\phi_s \xi + q^2} + \frac{\phi_s}{\sqrt{\phi_s \xi + q^2} [\sqrt{\phi_s \xi + q^2} + q]}$$

$$+ \left\{ -\frac{2}{\phi_s} + \frac{\xi}{\phi_s \xi + q^2} + \frac{\xi (\phi_s \xi + q^2)^{-1/2}}{\sqrt{\phi_s \xi + q^2} + q} \right\} \frac{d\phi_s}{d\xi} \quad (67)$$

Por los comentarios anotados en los párrafos anteriores, el primer término de la derecha de la ec. (67) muestra una fuerte divergencia cercana a la ignición que proviene del factor  $\frac{dq}{d\xi}$ ; entonces

si se designa a este primer miembro de la derecha de la ec. (67) por  $F1(\alpha, \xi)$  y el resto del lado derecho como  $F2(\alpha, \xi)$  y a su vez  $\frac{d\theta_0}{d\xi}$  puede reescribirse como  $\frac{d\theta_0}{d\xi} = F1 + F2$ , la ecuación de la energía - (58) toma la forma:

$$1 - \sqrt{\phi_s \xi + q^2} + \frac{\epsilon \left[ \phi_s - \frac{1}{2} \left( \phi_{1p} + \frac{M}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} q \int_0^\infty e^{-\chi} d\chi \right) \right]}{\sqrt{\phi_s \xi + q^2}} \quad (68)$$

$$\sim - \frac{\epsilon \int_0^\xi F1(\alpha, \xi') d\xi'}{\lambda \int_0^\xi \left[ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right]^{1/3} d\xi'} - \frac{\epsilon \int_0^\xi F2(\alpha, \xi') d\xi'}{\lambda \int_0^\xi \left[ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right]^{1/3} d\xi'} + \frac{\epsilon \int_0^\xi F2(\alpha, \xi') d\xi'}{\lambda \int_0^\xi \left[ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right]^{1/3} d\xi'}$$

La contribución de las integrales anteriores en la ec. (68) debe señalarse con cuidado. El primer miembro es importante en regiones próximas al punto de ignición ya que está asociado al gradiente del incremento de temperatura, el cual bajo las suposiciones anteriores juega un papel determinante en la distancia de ignición. El segundo miembro y que involucra una integral definida puede determinarse -- numéricamente mediante una fórmula de cuadratura con ayuda de las siguientes observaciones: considerando en primera aproximación que en regiones cercanas al punto de ignición  $\phi_s \rightarrow 1$ ,  $\xi \rightarrow 1$  y  $q \rightarrow 0$  entonces  $F2(\alpha, \xi) \rightarrow 0$ ; en consecuencia una manera de calcular esta integral es con ayuda de la aproximación de Zeldovich que consistirá en reemplazar la solución de la ecuación de la energía dada en la sección anterior ( $q = -\sqrt{1 - \phi_s \xi}$ ) en la expresión  $F2(\alpha, \xi)$  y esto conduce a la forma siguiente para la función  $F2(\alpha, \xi)$ :

$$F2 = \left[ \sqrt{1 - \phi_s \xi} - (1 - \phi_s \xi) \right] \left[ \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\phi_s} \frac{d\phi_s}{d\xi} \right] \quad (69)$$

y la integral

$$I_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{FZ(\alpha, \xi') d\xi'}{\{1 - (\xi'/\xi)^{3/4}\}^{1/3}} \quad (70)$$

puede calcularse numericamente con ayuda de la ec. (69). Los resultados numéricos aparecen en la figura 3, mostrando la variación de  $I_0$  contra  $\alpha$ . La tercera y última integral de la ec. (68) muestra que un análisis en los órdenes mas bajos en  $\varepsilon$ , el valor del integrando sea de orden  $\varepsilon^{7/5}$  que combinado con el  $\varepsilon$  aparece como factor en esta última integral, arroje un término global de orden  $\varepsilon^{12/5}$ , lo que evidentemente resulta despreciable.

Finalmente la introducción en el análisis del gradiente del incremento de temperatura deberá traducirse en una modificación al número de Damköhler, por lo que una corrección de la forma:

$$D(\alpha) = D_0(\alpha) [1 + \delta(\alpha, \varepsilon)], \quad \delta \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (71)$$

deberá utilizarse. Donde  $D_0 = D_0(\alpha)$  representa el número de Damköhler obtenido con ayuda de la aproximación de Zeldovich dada en la sección anterior. Además la integración numerica de la ec. (61) proporciona una relación asintótica para  $\phi_S$  cerca del punto de ignición dada por:

$$\phi_S \sim 1 + \Omega(\alpha)(1 - \xi), \quad \xi \rightarrow 1 \quad (72)$$

y la evaluación numérica de la función  $\Omega = \Omega(\alpha)$  ha sido representada como una función de  $\alpha$  en la figura 4. Esta figura muestra un aspecto físico de considerable interés: cerca del punto de ignición y tomando en cuenta que el consumo de reactantes no juega ningún --

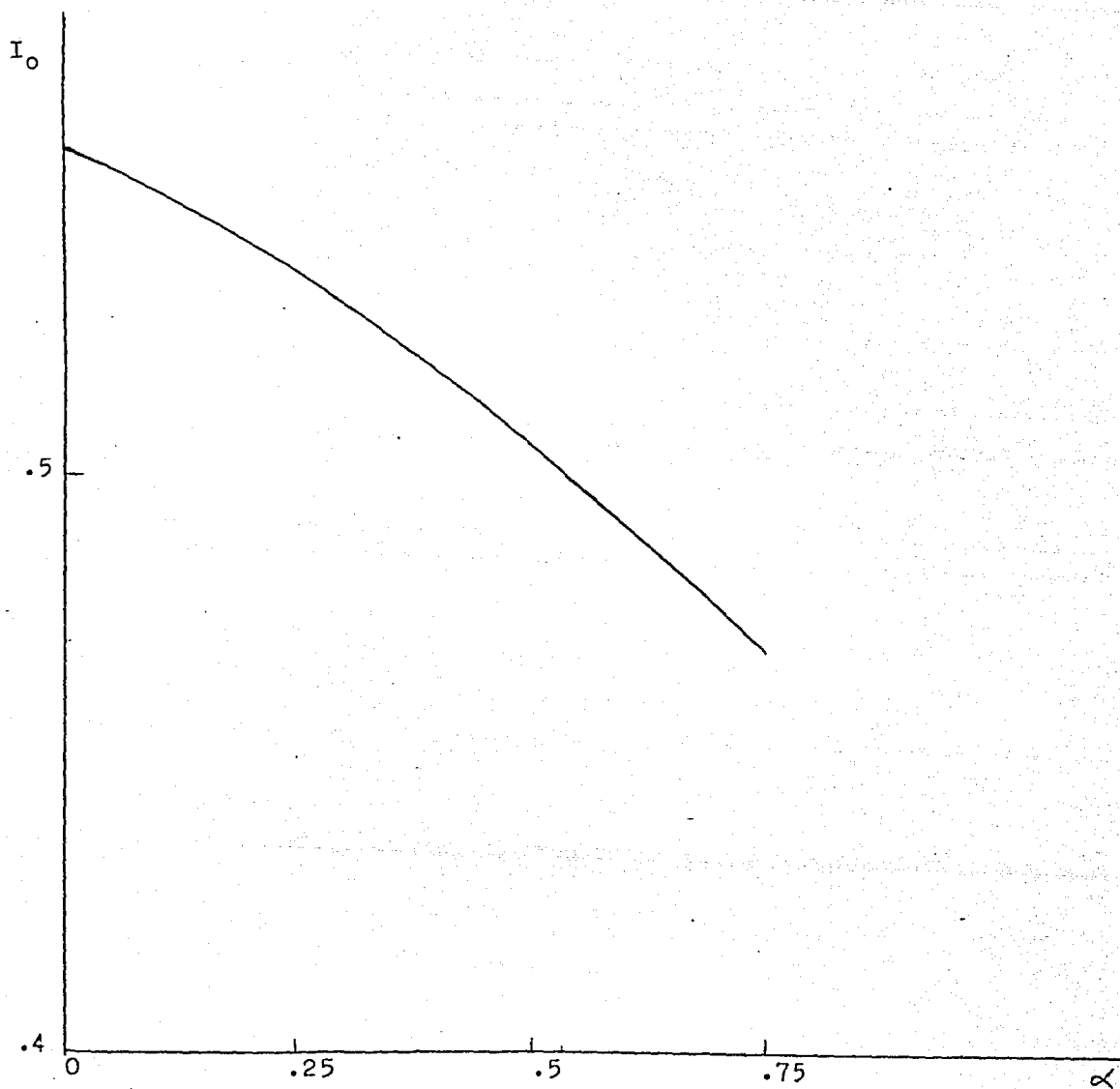


Fig.3 Integral definida  $I_0$  como una función del parámetro del consumo de reactivos  $\alpha$ .

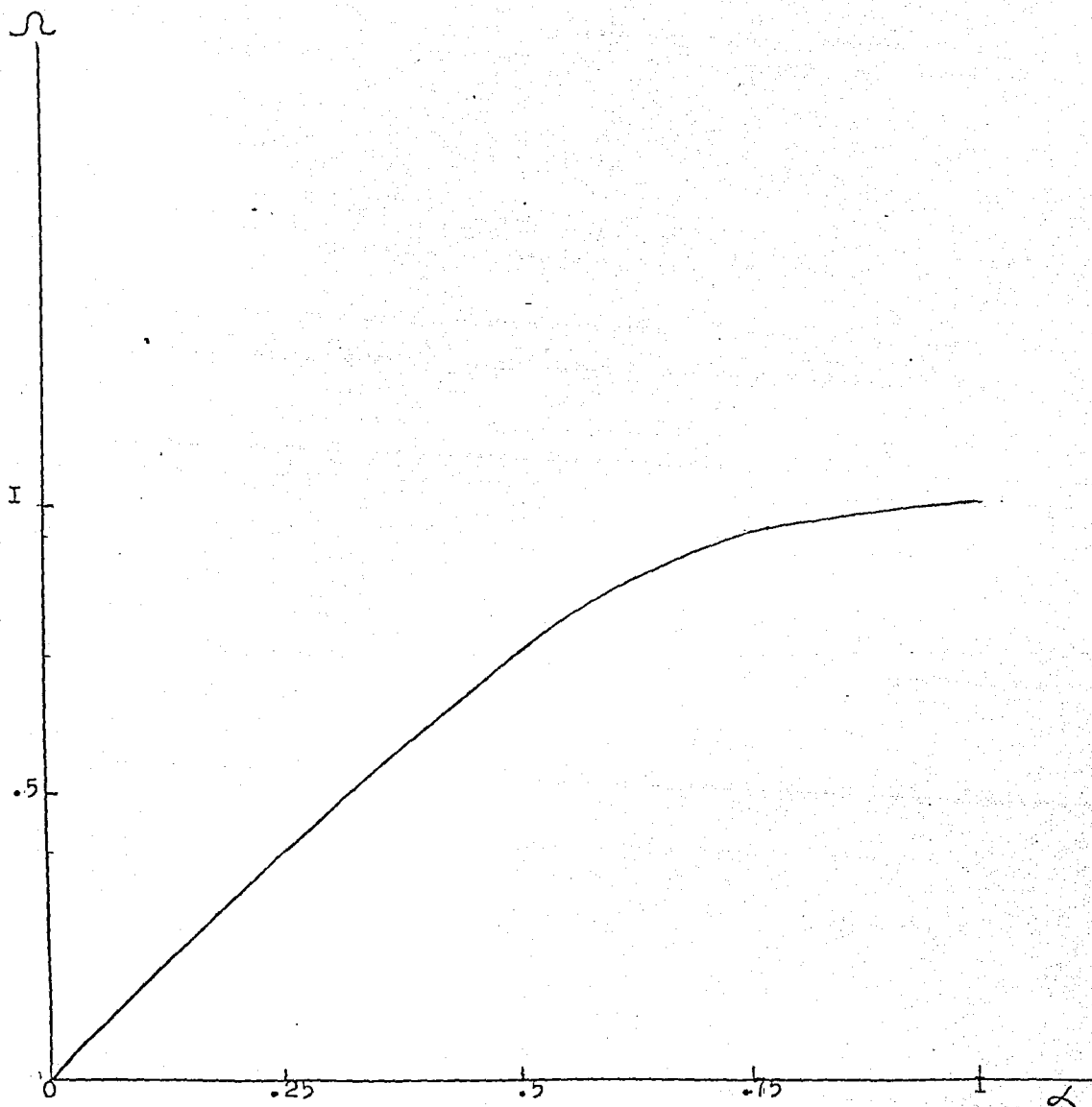


Fig. 4 Parámetro  $\Omega$  como una función del parámetro del consumo de reactantes  $\alpha$ .

papel ( $\alpha = 0$ ), la concentración de combustible se mantiene uniforme como se deduce de la ec. (72) ya que para este caso  $\Omega(\alpha) = \Omega(0) = 0$ . Por otro lado, para valores de  $\alpha$  cercanos a la unidad o bien para la temperatura de la superficie cercana a la temperatura adiabática de la flama se tiene que  $\Omega(1) \sim 1$  y en consecuencia una fracción importante de combustible se llega a consumir; con ayuda de la ec. (71) una expresión para  $\phi_s$  con  $\xi \rightarrow 1$  está dada por:

$$\phi_s \sim 1 + \Omega(1 - \xi) + \delta(\alpha, \varepsilon) + O[\delta(1 - \xi)], \quad \xi \rightarrow 1 \quad (73)$$

## II. f. Distancia de Ignición.

Aún cuando la ec. (60) constituye una solución en primera aproximación, la deficiencia de esta solución proviene de que el argumento será imaginario para valores de  $\phi_s \xi > 1$ , como ha sido señalado por Liñén & Williams (1979). Entonces para estudiar la zona cercana a la ignición una variable que alargue la coordenada longitudinal  $\xi$  de la forma  $x = \frac{1 - \xi}{\varepsilon^{1/3}}$  deberá utilizarse; así entonces para distancias tales que  $1 - \xi$  es de orden unidad, corresponde a la etapa inicial donde la ec. (60) proporciona la solución, mientras que distancias para las cuales  $x$  es de orden unidad corresponde a una etapa de transición a la ignición. Similarmente dado que el valor de  $q$  (ec. 44) cambia bruscamente en la zona de ignición y tiene un valor pequeño, es conveniente también introducir  $y = q/\varepsilon^n$ .

El uso de estas dos variables  $x$  e  $y$  en la ecuación de la energía (ec. 68) y considerando que en el orden más bajo en  $\varepsilon$  la ecuación integral deberá incluir a todos los términos, produce las expresio-

nes adecuadas para  $x$  e  $y$ , esto es:

$$x = \frac{(1-\Omega)(1-\xi)}{M^2 \varepsilon^{6/5}}, \quad y = \frac{q}{M \varepsilon^{3/5}} \quad (74)$$

donde  $M = \left[ \left( \frac{4}{\lambda} \right)^{3/4} \frac{4}{3} (1-\Omega) \right]^{1/5}$ , es una constante de orden de unidad y función a su vez de  $\alpha$ .

El resultado de usar las variables  $x$  e  $y$  produce la siguiente ecuación integral para la función desconocida  $y$ , y en los órdenes mas bajos en  $\varepsilon$  se tiene que:

$$x - y^2 - \Delta \sim \int_x^{\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{6/5} M^2}} \frac{dy'}{dx'} dx' \left[ \frac{1 + \varepsilon^{3/5} M y'}{(x' - x)^{1/3}} \right] \quad (75)$$

donde el parámetro  $\Delta$  viene dado por:

$$\Delta = \frac{\delta - 2\varepsilon + \gamma(1 + \ln 4) - \frac{\varepsilon}{\lambda} I_0(\alpha)}{\varepsilon^{6/5} M^2} \quad (76)$$

La ec. (75) deberá contener información de la etapa inicial - para la cual la ec. (60) proporciona la solución; para ver lo anterior basta con observar que para valores muy grandes de  $x$ , la integral que aparece en la ec. (75) puede desprejarse en primera aproximación y obtener una solución asintótica de la forma  $y \sim -\sqrt{x}$  cuando  $x \rightarrow 0$ , que con ayuda de las relaciones (74) es equivalente a escribir  $q \sim -\sqrt{1-\xi - \Omega(1-\xi)}$  y al compararse con la ec. (60) produce un acuerdo notable. Sin embargo, la introducción de esta solución asintótica en la ec. (75) produce una fuerte divergencia que se aprecia claramente por el hecho de que para valores de  $x'$  muy pequeños, el integrando diverge y para cuando  $x'$  toma valores cercanos a  $x$  un comportamiento similar se observa; por lo anterior con

objeto de minimizar la divergencia, se deberá sumar a ambos lados de la ec. (75) la integral:

$$\frac{1}{2} \int_x^{\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{6/5} M^2}} \frac{1}{\sqrt{x'}} \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}}, \quad (77)$$

La integral anterior con ayuda del cambio de variable  $x'=x/u$  conduce a la función beta incompleta, que después de ciertas simplificaciones produce:

$$\frac{1}{2} \int_x^{\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{6/5} M^2}} \frac{1}{\sqrt{x'}} \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}} = \frac{x^{1/6}}{2} \left[ B(-1/6, 2/3) + B_x(-1/6, 2/3) \right]$$

donde  $B_x(p, q)$  es la función beta incompleta definida por:

$$B_x(p, q) = \int_0^x \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1} d\tau$$

y  $B(-1/6, 2/3) = 5.175$ ; además una expansión para la función beta incompleta tiene la forma:

$$B_x(p, q) \sim x^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1-q}{1+p} x + O(x^2) \right\}, \quad x \rightarrow 0$$

en consecuencia la integral (77) con ayuda de las anteriores consideraciones produce en los órdenes mas bajos en  $\varepsilon$ , la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \int_x^{\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{6/5} M^2}} \frac{1}{\sqrt{x'}} \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}} \sim \frac{3(1-\Omega)}{M^{1/3} \varepsilon^{1/5}} - 2.5875 x^{1/6} + O(\varepsilon x) \quad (78)$$

por lo que la ecuación integral (75) puede escribirse finalmente como:



$$x - y^2 - \Delta + \frac{3(1-\Omega)}{M^{1/3} \varepsilon^{1/5}} - 2.5875 x^{1/6} \sim \int_x^{\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{1/5} M^2}} \left( \frac{dy'}{dx'} + \frac{1}{2\sqrt{x'}} \right) \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}} \quad (79)$$

El límite superior puede llevarse a infinito incluyendo a ambos miembros de la ecuación anterior la siguiente integral:

$$\frac{\varepsilon^{3/5} M}{2} \int_x^{\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{1/5} M^2}} \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}} \sim \frac{3}{4} \frac{(1-\Omega)^{2/3}}{\varepsilon^{1/5} M^{1/3}} + O(\varepsilon x) \quad (80)$$

bajo la suposición de que las integrales permanecen convergentes -- cuando  $\frac{1-\Omega}{\varepsilon^{1/5} M^2}$  se aproxima infinito, la ec. (79) puede reescribirse con ayuda de la ec. (80) en los órdenes mas bajos en  $\varepsilon$  como:

$$x - y^2 - \Delta + \frac{3(1-\Omega)^{1/6}}{M^{1/3} \varepsilon^{1/5}} \left[ 1 - \frac{(1-\Omega)^{1/2}}{4} \right] - 2.5875 x^{1/6} \sim \int_x^{\infty} \left[ \frac{dy'}{dx'} + \frac{1}{2\sqrt{x'}} \right] \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}} \quad (81)$$

y la ecuación anterior exige que:

$$\Delta = \frac{3(1-\Omega)^{1/6}}{M^{1/3} \varepsilon^{1/5}} \left[ 1 - \frac{(1-\Omega)^{1/2}}{4} \right] + b + O(\varepsilon^{3/5}) \quad (82)$$

donde  $b$  es una constante a determinar.

Finalmente con ayuda de la ec. (70) que define el valor de  $\delta$ , se obtiene la siguiente expansión para  $\delta$  :

$$\delta = \left\{ 2 + 3(1-\Omega)^{11/6} \left[ 1 - \frac{(1-\Omega)^{1/2}}{4} \right] M^{5/3} - \frac{\gamma}{\varepsilon} (1 + \ln 4) + \frac{I_0}{\lambda} \right\} \varepsilon \quad (83)$$

$$+ b \varepsilon^{6/5} M^2 + O(\varepsilon^{9/5})$$

y la ecuación (81) toma la forma:

$$x - y^2 - 2.5875 x^{11/6} = \int_x^\infty \left[ \frac{dy'}{dx'} + \frac{1}{2\sqrt{x'}} \right] \frac{dx'}{(x' - x)^{1/3}} \quad (84)$$

La ec. (84) es una ecuación cuadrática no lineal la cual no posee solución analítica; de la multiplicidad de soluciones que admite esta ecuación, hay una única que tiene fundamento físico y es la siguiente: debe existir un único valor de  $b$  para que la divergencia y en consecuencia el escape térmico, se presente en  $x = 0$ , para cualquier otro valor de la constante  $b$  la divergencia se presenta para valores diferentes de  $x = 0$  y esto viola la suposición de que la ignición se presente en  $x = 0$  ( $\xi = 1$ ). El cálculo numérico produce el valor de  $b = -1.125$ .

Un aspecto de extrema importancia relacionado con la necesidad de tomar en cuenta los términos convectivos que aparecen en la ec. (29) resulta del siguiente análisis: la solución asintótica de la ec. (84) para  $x \rightarrow 0$  (zona de ignición) viene dada por:

$$y \sim \frac{k}{x^{1/3}} \quad (85)$$

donde  $k$  es una constante que toma el valor de  $k = 0.6844$  para -- cuando  $x \rightarrow 0$ . Sin embargo si  $x$  fuera definida como  $x = \varepsilon^{9/5} \sigma$ , donde  $\sigma$  es una variable de orden de unidad, la introducción de este alargamiento de la variable  $x$  produce en la ec. (29) (donde están incluidos los términos convectivos) que los términos convectivos sean del mismo orden de magnitud que los términos difusivos y reactivos; además ya que  $y = \frac{q}{M \varepsilon^{3/5}}$  y con ayuda de la ec. (85) resulta que  $q \sim k \frac{\varepsilon^{3/5}}{x^{1/3}}$  pero con  $x = \varepsilon^{9/5} \sigma$ ,  $q$  será de orden -- unidad contradiciendo la suposición inicial de  $q$ . En realidad, no hay ninguna contradicción, la situación que se presenta es -- que para valores de  $x$  del orden de  $\varepsilon^{9/5}$  los términos convectivos deberán efectivamente retenerse y de hecho la ec. (85) señala que un acoplamiento a una nueva etapa de transición deberá realizarse. Esta nueva etapa llamada por Kapila (1980-1981) de explosión fue analizada para el problema transitorio de una onda de deflagración de un sólido reactivo. Además, contrariamente al problema estudiado por Kapila, el presente problema no admite similitud -- entre los perfiles de temperatura y concentración y por consiguiente la complejidad del mismo impiden tratarse en este trabajo.

## CAPITULO III

GENERACION DE FLAMA PARA  $\alpha > \alpha_c$ .

El análisis del capítulo anterior demuestra que para valores de la temperatura de la placa menores que la temperatura adiabática de la flama, el proceso de ignición llega a caracterizarse por el llamado escape térmico, fenómeno cuya singularidad proviene de la estructura matemática fuertemente divergente; es decir, a diferencia de los criterios anteriores en donde el punto de ignición coincidía con el criterio adiabático, el análisis anterior determina la distancia de ignición a través de una singularidad en la formulación integral de la zona de ignición.

Como ha sido señalado oportunamente, el estudio de la deflagración de una onda de combustión para valores del parámetro del consumo de reactantes menores que el crítico ( $\alpha_c = 1.0698$ ) - constituye un problema de mayor complejidad por la necesidad de retener los términos convectivos. El problema que ahora se presenta en este capítulo, es el análisis de la combustión de una mezcla combustible gaseosa que fluye sobre la placa plana considerada en el modelo anterior de la ignición, cuya temperatura es mayor que la temperatura adiabática de la flama, esto es, el análisis presente toma en cuenta valores del parámetro del consumo de reactantes mayores que el crítico calculado en el capítulo anterior.

Como es bien sabido, la temperatura adiabática de la flama es la temperatura de equilibrio que alcanza los productos de combustión cuando el sistema físico evoluciona a través de un proceso -

49  
ESTO PUEDE NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

isobárico y adiabático y aún cuando varía de un combustible a otro se mantiene constante para una composición dada y alcanza valores considerables (Glassman, 1977); por consiguiente si la temperatura de la placa plana es mayor que esta temperatura de equilibrio, lo cual es equivalente a exigir que  $\alpha > \alpha_c$ , es lógico que se establezca que el proceso de generación de la flama se caracterice por una suave transición de un flujo de gases combustibles premezclados congelados a una onda de deflagración plana permanente. - Esto es, la ignición de los gases combustibles no se lleva a cabo por el escape térmico (no hay en ningún momento transferencia de calor del gas a la superficie de la placa); sin embargo, ciertos resultados del capítulo anterior son de considerable beneficio para el presente análisis.

Un primer intento de solución para el problema de combustión señalado anteriormente, lo constituye el conjunto de ecs. (60) y (61) que provienen de utilizar la aproximación de Zeldovich. El análisis siguiente muestra tan situación.

Primero hay que mencionar que el consumo de reactantes o combustible se lleva a cabo tan pronunciadamente que una descripción más adecuada de las ecs. (60) y 61), consiste en emplear la concentración adimensional de combustible  $Y$ ; introduciendo además el cambio de variable  $\zeta = D\xi$ , para eliminar la dependencia del número de Damköhler, las ecs. (60) y (61) pueden reescribirse como: -

$$q = -\sqrt{1 - Y\zeta}$$

$$-\alpha \left\{ 1 - \sqrt{1 - Y\xi} \right\} = \int_0^\xi \frac{dY'}{\frac{d\xi'}{\xi'}} \frac{d\xi'}{\left\{ 1 - (\xi'/\xi)^{3/4} \right\}^{1/3}} \quad (87)$$

El interés ahora proviene en establecer una solución asintótica a este conjunto de ecuaciones para valores grandes de  $\xi$ ; la razón de ello radica en que para valores de  $\xi$  tales que  $\xi \rightarrow \infty$ , la concentración de combustible se vería como si fuera bruscamente disminuída, lo cual es razonable dado que la transición al flujo de equilibrio es inmediata.

En consecuencia se presenta una solución asintótica del tipo siguiente:

$$q \sim -\sqrt{1 - C(\alpha)}, \quad Y \sim \frac{C(\alpha)}{\xi}, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (88)$$

La figura 5 muestra la función  $C(\alpha)$  contra  $\alpha$ ; que resulta de la solución numérica de la ec. (87) para valores grandes de  $\xi$ . Como puede apreciarse de las ecs. (88) y de los valores que toma  $C(\alpha)$ , el valor del flujo de calor adimensional nunca toma valores positivos lo que confirma que la transferencia de calor siempre se efectúa de la placa al gas; sin embargo el conjunto de ecs. (88) deja de ser una solución válida para valores de  $\xi \sim \xi^{-1}$  ya que en esta región, la suposición de uniformidad para el combustible a través de la zona reactiva, carece de fundamento y lo anterior aparece como resultado de la ec. (87), que muestra que para va

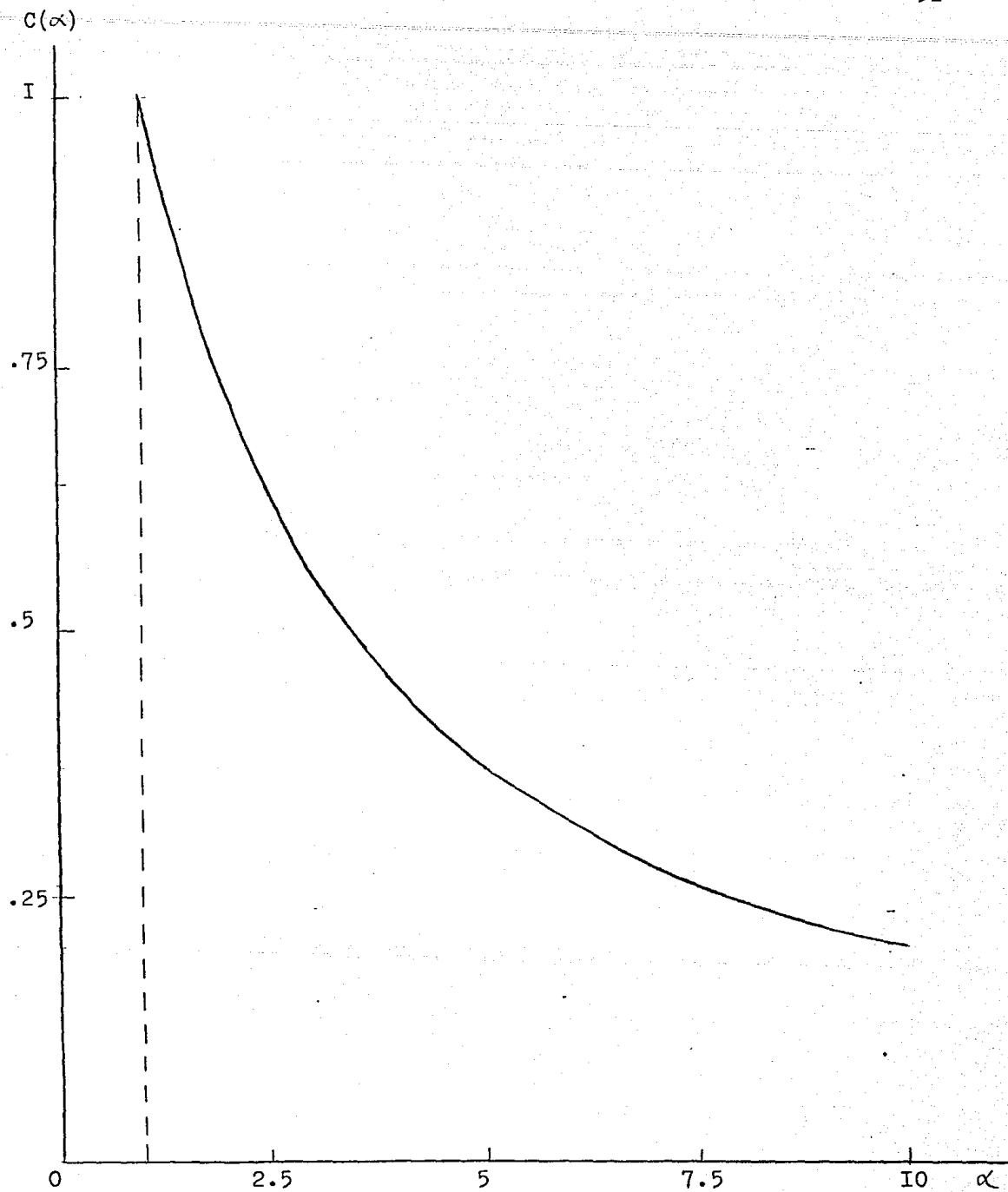


Fig. 5 Parámetro C como una función del parámetro del consumo de reactantes  $\alpha$ .

lores grandes de  $\zeta$  el producto  $\zeta Y$  se mantiene constante, lo que origina que también  $Y$  sea uniforme y ésto, contradice la hipótesis de que la concentración deba ir disminuyendo.

Por el análisis anterior se desprende que para estudiar la evolución posterior de la flama premezclada, es necesario definir las variables siguientes:

$$Y_1 = \frac{Y}{\varepsilon}, \quad \bar{\zeta} = \varepsilon \zeta \quad (89)$$

donde  $Y_1$  y  $\bar{\zeta}$  son funciones de orden unidad. El reescalamiento definido por las ecs. (89) deberá ser introducido en las ecs. (37) y (38) del capítulo II que definen las zonas reactivas y esto conduce a lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \chi^2} = -\frac{\bar{\lambda}}{\alpha} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \chi^2} = -\bar{\zeta} \frac{Y_1}{2} \exp \Psi \quad (90)$$

en los órdenes mas bajos  $\varepsilon$ . En la ec. (90)  $\bar{\lambda} = \lambda L e^{-113}$  y es un parámetro de orden unidad.

Dado que el modelo físico no ha cambiado sus condiciones de frontera en la pared, las ecs. (90) deberán estar sujetas a:

$$\chi = 0: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} = 0 \quad (91)$$



Sin embargo, las condiciones de acoplamiento con la zona externa toman la forma siguiente:

$$\chi \rightarrow \infty : \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \sim -1, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} \sim \frac{1}{\lambda} \quad (92)$$

que provienen de un análisis asintótico de las ecs. (34) y (35) - presentadas en el capítulo anterior, y que corresponden a la condición de acoplamiento con la zona externa. De manera similar al procedimiento que se emplea en el capítulo II, se puede efectuar una primera integración de la ec. (90) y con ayuda de las condiciones en la superficie de la placa plana, se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + \frac{\bar{\lambda}}{\alpha} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} = q \quad (93)$$

De la ec. (93) una expresión para el flujo de calor adimensional  $q$  en la pared puede obtenerse si se emplean las ecs. (92) y produce lo siguiente:

$$q = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (94)$$

Ya que los valores de  $\alpha$  son siempre mayores que  $\alpha_c$  en el análisis presente, el flujo de calor  $q$  es un valor invariablemente negativo, confirmando así que el flujo de calor procede de la placa al gas, un resultado esperado ya que la superficie de la placa -

plana se mantiene a una temperatura mayor que la de combustión.

Una integración mas de la ec. (93) produce:

$$\psi = q\gamma - r \quad (95)$$

donde  $r$  está definida como  $r = \frac{\bar{\lambda}}{\alpha} (\gamma_1 - \gamma_{1p})$  y  $\gamma_{1p}(\Lambda)$  representa el valor de  $\gamma_1$  en la superficie de la placa. Entonces la ecuación para la concentración (90) con ayuda de la ec. (95) puede reescribirse como:

$$\frac{d^2 r}{d\bar{\chi}^2} = \Lambda (r + \frac{\bar{\lambda}}{\alpha} \gamma_{1p}) \exp(-r + m\chi) \quad (96)$$

donde  $\bar{\chi} = \chi / \alpha$ ,  $m = 1 - \alpha$  y  $\Lambda = \bar{\zeta} \alpha^3 / 2 \bar{\lambda}$

junto con las condiciones:

$$\bar{\chi} = 0 : \quad r = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \bar{\chi}} = 0 \quad (97)$$

$$\bar{\chi} \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial r}{\partial \bar{\chi}} = 1$$

La condición adicional  $r = 0$  proviene del hecho de que en la superficie, la concentración de combustible es  $\gamma_{1p}$  (ver ec. 74) y esto se traduce en que el problema (96)-(97) constituye un sistema diferencial con valores característicos, siendo  $\Lambda$  el valor característico a determinar y el cual es función de

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, \bar{\lambda}, \gamma_{1p}) \quad (98)$$

El análisis numérico proporciona la relación (98) para diferentes valores de  $m = 1 - \alpha$  (ver fig. 6) y con ayuda de estos valores de

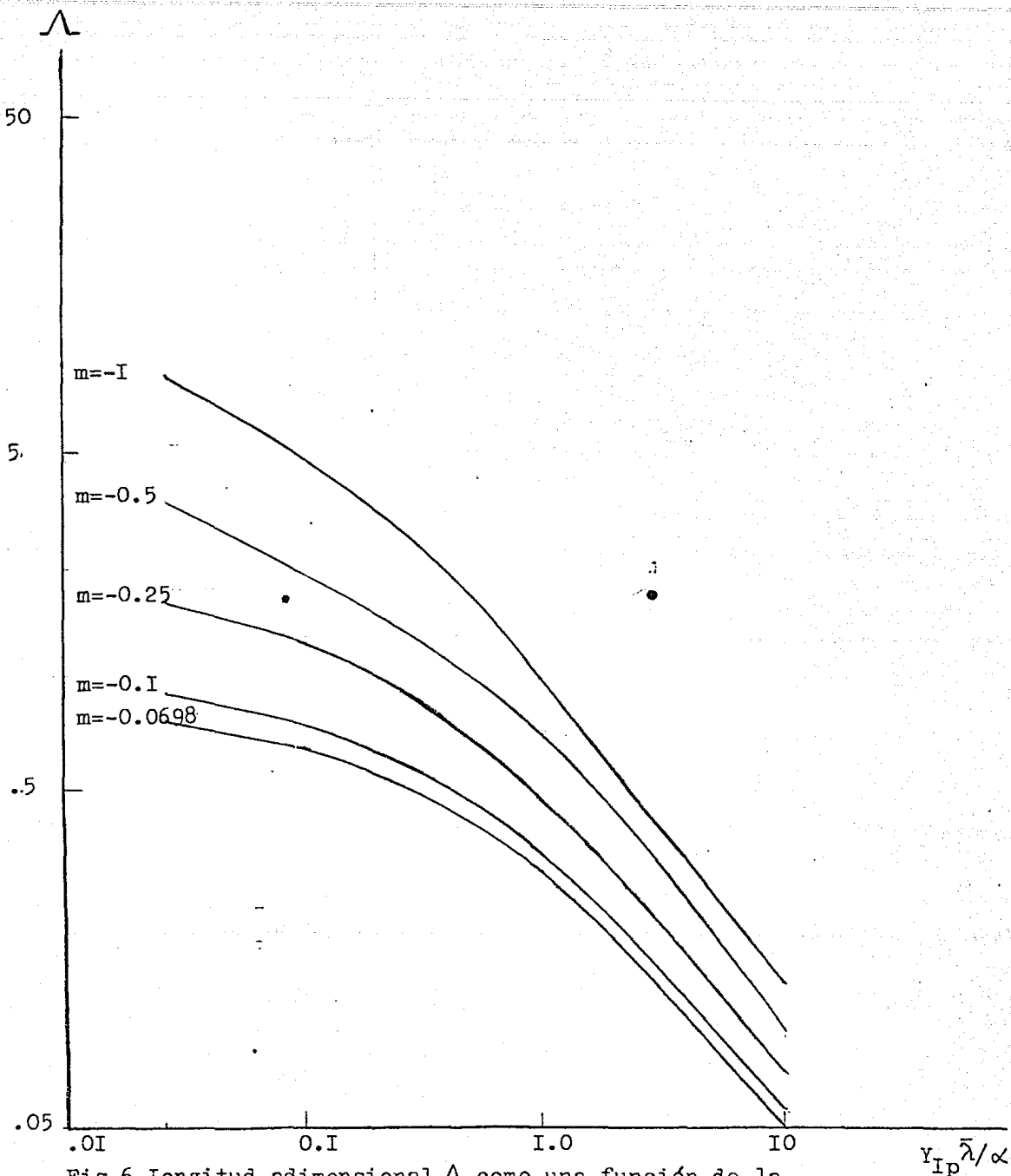


Fig.6 Longitud adimensional  $\Lambda$  como una función de la concentración reducida en la pared  $Y_{IP} \bar{\lambda} / \alpha$ , para diferentes valores del parámetro  $m$  ( $m=1-\alpha$ )

$\Lambda$ , la evolución del perfil de concentración como una función de la coordenada transversal  $\bar{x}$  aparece en la figura 7. Claramente, se puede apreciar que para valores crecientes de  $\Lambda$  (que corresponden a valores grandes de  $\alpha$ ) el agotamiento de combustible en la pared va en aumento; para el valor de  $\Lambda = 1.965$  una zona reactiva localizada por un valor bien definido de  $\bar{x}_f$  (que de hecho sería la posición de la flama), separa una región de equilibrio de una zona congelada.

El análisis asintótico anterior de la flama premezclada puede ampliarse aún mas si se lleva a cabo una comparación con los resultados obtenidos por Liñán (1974). En el estudio realizado por Liñán de la flama de difusión, se establece que cuatro diferentes regímenes pueden presentarse si la temperatura máxima de la flama se grafica en términos del número de Damköhler para ese sistema; de éstos, el régimen de flama premezclada se caracteriza por una región de flujo en equilibrio separada por una región de flujo congelado y la estructura de la zona de reacción es la misma que la de una flama premezclada con pérdidas de calor hacia el lado de equilibrio de la flama.

Por las conclusiones anteriores obtenidas por Liñán, la evolución de la flama premezclada puede completarse introduciendo en la ec. (96) la variable siguiente:  $\sigma = \bar{x} - \bar{x}_f$  que mide o cuantifica a la región interna de la flama. De esta manera la ec. (96) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma^2} = \left[ \Lambda \exp(m \bar{x}_f) \right] r \exp(-r - m \sigma) \quad (99)$$

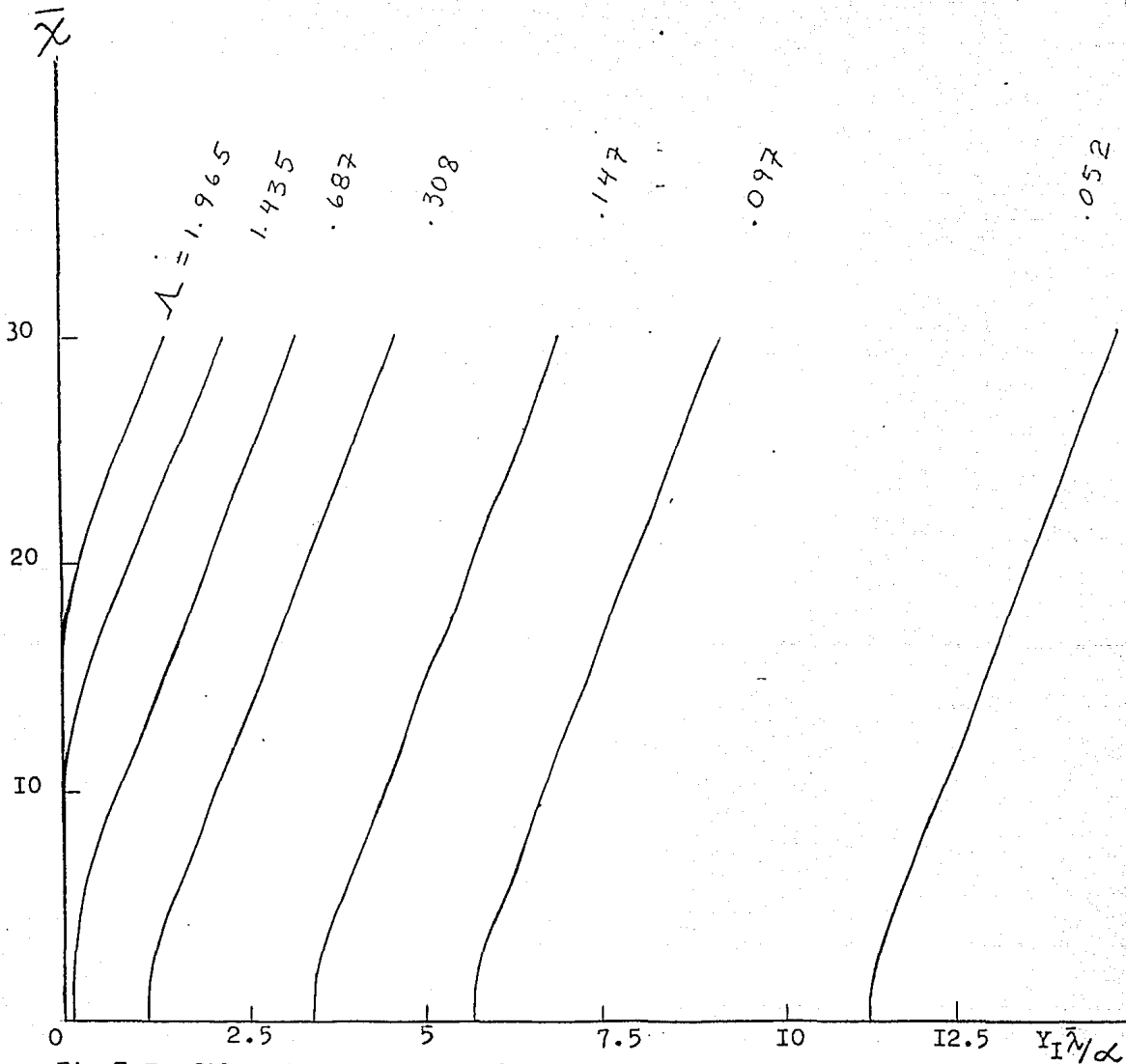


Fig.7 Perfiles de concentración como una función de la distancia adimensional  $\bar{x}$ , para valores diferentes de  $\Lambda$  y  $m=-0.0698$ .

con las condiciones

$$\begin{aligned} \sigma = \bar{\chi}_f \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial r}{\partial \sigma} = 0 \\ \sigma \rightarrow -\infty : \quad \frac{\partial r}{\partial \sigma} = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

El conjunto de ecs. (99)-(100) poseen la misma forma y solución si la condición

$$\Lambda \exp(m \bar{\chi}_f) = 1/2 \quad (101)$$

es satisfecha. La expresión anterior señala la relación entre  $\bar{\chi}_f$  y  $\Lambda$  lo que muestra la posición de la flama premezclada en el plano ( $\bar{\chi}$ ,  $\Lambda$ ). Esta relación aparece en la fig. 8 y también la solución numérica del presente análisis, como puede observarse, para valores de  $Y_{1p} \rightarrow 0$ , el acuerdo entre ambas soluciones es notable.

La temperatura adimensional de la flama, puede obtenerse con la siguiente relación obtenida por Liñán:

$$\Psi_f = \theta_f - \chi_f = -p_0 + m \bar{\chi}_f \quad (102)$$

donde  $p_0$  es una función exclusivamente de  $\alpha$  dada por:

$$p_0 = -\frac{1}{m} \ln(0.6307 m^2 - 1.344 m + 1), \quad m = 1 - \alpha \quad (103)$$

Por lo que la ec. (102) muestra con ayuda de  $p_0$ , que la temperatura de la flama disminuye cuando la flama se separa de la pared, debido a que en este régimen  $m$  es negativa.

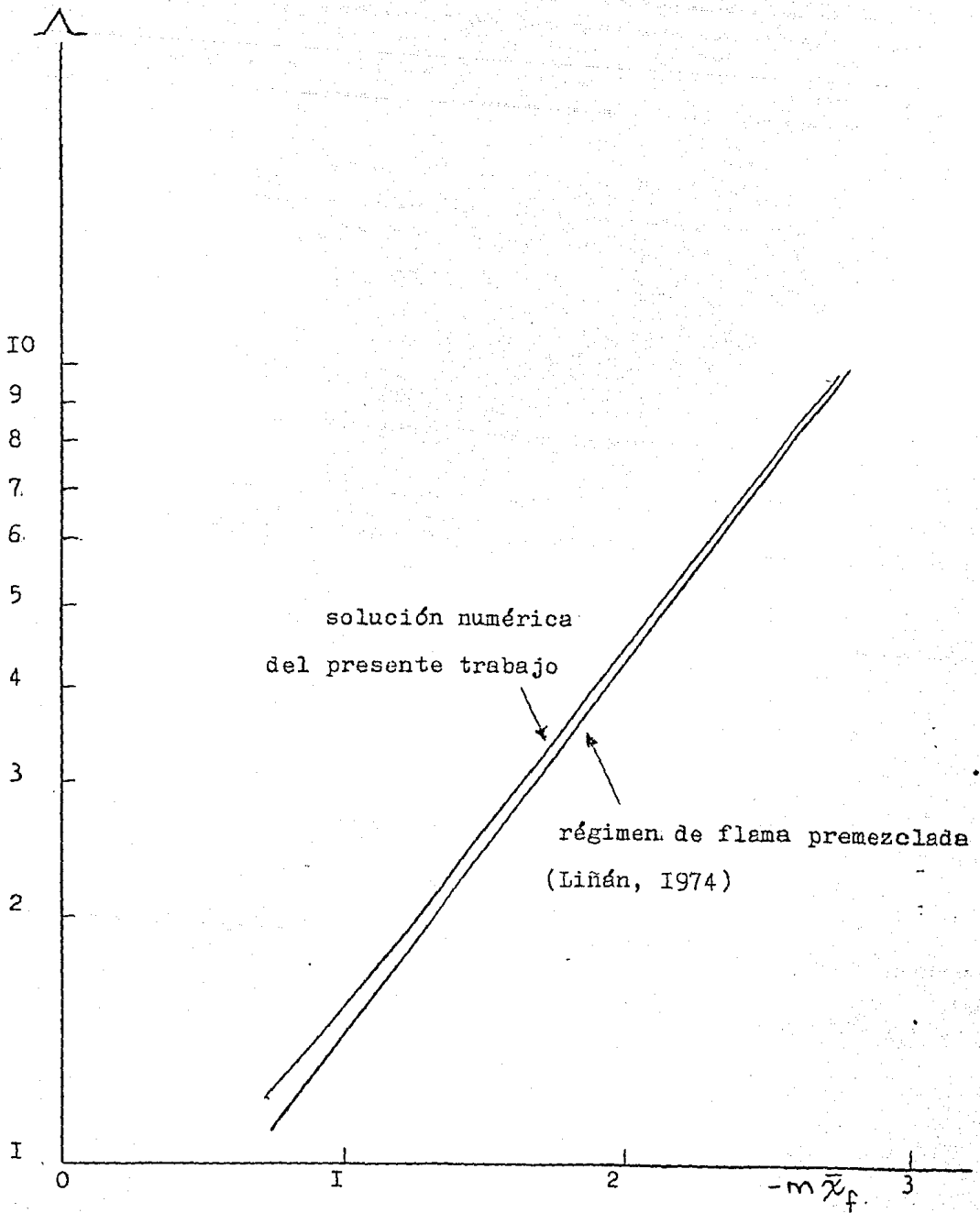


Fig. 8 Posición de la flama premezclada  $\bar{x}_f$  como una función de la longitud adimensional  $\Lambda$ , para valores diferentes de  $m$ ; junto con los resultados de Liñán.

## CAPITULO IV

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo el análisis asintótico de orden superior que toma en cuenta las pérdidas de calor hacia la capa límite, demuestra que para valores del número de Zeldovich finitos, las correcciones a la distancia de ignición son necesarias para alcanzar un acuerdo con las soluciones numéricas existentes. El análisis de ignición realizado en el capítulo II muestra que para valores de  $\alpha$  menores que  $\alpha_c$  ( $\alpha_c = 1.0698$ ), la ignición se caracteriza por un fenómeno singular llamado escape térmico; es decir, la distancia de ignición a diferencia de trabajos anteriores, se define como una distancia para la cual el análisis perturbatorio desarrolla una singularidad matemática. Como se ha dicho, para valores moderados del número de Zeldovich, una serie asintótica de tres términos (ver ecs. 71 y 83) para el número de Damköhler muestra buenos resultados para la distancia de ignición. En la tabla I aparecen los resultados numéricos de Law & Law (1979) y los obtenidos analíticamente en este trabajo.

TABLA I. Comparación entre los resultados numéricos  $D_n$  y la solución analítica  $D$  para el número de Damköhler crítico de ignición.

$\varepsilon$	$\alpha$	$\lambda$	$D_n$ (numérico)	$D$ (analítico)
0.1	0.0875	0.7	2.0861	2.0366
0.102	0.09	0.706	2.1095	2.0467
0.1	0.0875	0.6	2.1794	2.1366
0.1	0.175	0.7	2.2861	2.1775
0.10204	0.0875	0.7	2.0973	2.0536



Como puede apreciarse la tabla 1 demuestra un acuerdo notable - entre ambos conjuntos de datos y la distancia crítica para alcanzar la condición de ignición para valores de  $\alpha < \alpha_c$  se obtiene con ayuda de las ecs. (32), (71) y (83):

$$L_I = \frac{u_{\infty} [\beta f''(0)]^2}{2 \bar{B} P_r^{1/3} \varepsilon} \exp\left(\frac{\bar{T}_a}{\bar{T}_p}\right) D_0(\alpha) \left[ 1 + J_1 \varepsilon + J_2 \varepsilon^{6/5} + O(\varepsilon^{9/5}) \right] \quad (104)$$

$$\text{con } J_1 = 2 + 3(1 - \varepsilon)^{1/6} \left[ 1 - \frac{(1 - \varepsilon)^{1/2}}{4} \right] M^{5/3} - \frac{\delta}{\varepsilon} (1 + \ln 4) + \frac{I_0(\alpha)}{\lambda}$$

$$\text{y } J_2 = -1.125 M^2$$

Para valores de  $\alpha > \alpha_c$ , la evolución que conduce a la formación de una flama premezclada fue analizada y la localización de la flama se obtuvo en el plano  $(\bar{x}, \lambda)$  junto con la temperatura de la flama, la cual se demostró para esta última una disminución de la temperatura de la flama cuando ésta se separaba de la superficie de la placa plana, y la razón de esto proviene de que la temperatura de la placa es mayor que la temperatura de equilibrio; complementariamente fueron empleados los resultados obtenidos por Liñán (1974) para estudiar la evolución de la flama premezclada cuando esta se alejaba de la pared.

## APENDICE A

### ENERGIA DE IGNICION

Para poder alcanzar una temperatura uniforme sobre la superficie de la placa plana deberá añadirse constantemente energía por algún medio externo, y la energía necesaria para mantener esta condición sobre la superficie recibe el nombre de energía de ignición.

Calentando la superficie inferior de la placa plana con un flujo de calor promedio por unidad de longitud y por unidad de tiempo denotado por  $\bar{q}_e$  y considerando el caso de una placa cuya conductividad térmica es suficientemente alta, el flujo de calor local en la superficie superior de la placa, esto es,  $\bar{q}_u$ , puede relacionarse con el flujo de calor adimensional  $q$  calculado en el capítulo - II (ver ec. 44) mediante

$$\bar{q}_u = \frac{Q \bar{\gamma}_{F\infty}}{P_r^{2/3}} \sqrt{\frac{u_\infty \rho_\infty M_\infty}{2L}} \beta f''(0) \frac{q}{\sqrt{E}} \quad (\text{A.1})$$

Ahora bien, para establecer la condición de estado permanente sobre la placa, el flujo de calor neto en la superficie deberá desaparecer y esto solo puede satisfacerse si el flujo de calor total en la superficie superior iguala al flujo de calor en la superficie inferior, lo que puede ser expresado como:

$$\int_0^L \bar{q}_u dx = \bar{q}_e L \quad (\text{A.2})$$

con ayuda de la ec. (A.1) la ec. (A.2) se transforma en:

$$\int_0^1 \frac{\bar{q}}{\sqrt{\xi}} d\xi = - \frac{\bar{q}_e Pr^{2/3} \sqrt{2L^3}}{Q \bar{Y}_{F\infty} \sqrt{u_\infty \rho_\infty M_\infty} \beta f''(0)} \quad (A.3)$$

la ec. (A.3) da la relación entre la temperatura de la placa a través del parámetro  $\beta$  que depende directamente de la temperatura - (ver ec. 26) y el flujo externo de calor  $\bar{q}_e$ , y con ayuda de la aproximación de Zeldovich (ec. 60) la parte izquierda de la ec. (A.3) viene dada por:

$$- \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \phi \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = - S(\alpha) \quad (A.4)$$

la cual es una función del parámetro del consumo de reactantes y en la figura A.1 aparece graficada, con el valor de  $S = \pi/2$  para  $\alpha = 0$ ; con ayuda de la definición de  $\alpha$  (ec. 59) y combinando las ecs. (A.3) y (A.4) se obtiene que:

$$\alpha S(\alpha) = \frac{\bar{q}_e S_c^{2/3} \sqrt{2L^3}}{Q \bar{Y}_{F\infty} \sqrt{u_\infty \rho_\infty M_\infty} f''(0)} \quad (A.5)$$

ecuación la cual relaciona el flujo externo de calor con el parámetro del consumo de reactantes  $\alpha$ . Finalmente el flujo de calor necesario para obtener la ignición es:

$$\bar{q}_e = \frac{Q \bar{Y}_{F\infty} f''(0)}{S_c^{2/3}} \sqrt{\frac{u_\infty \rho_\infty M_\infty}{2L^3}} \alpha S(\alpha) \quad (A.6)$$

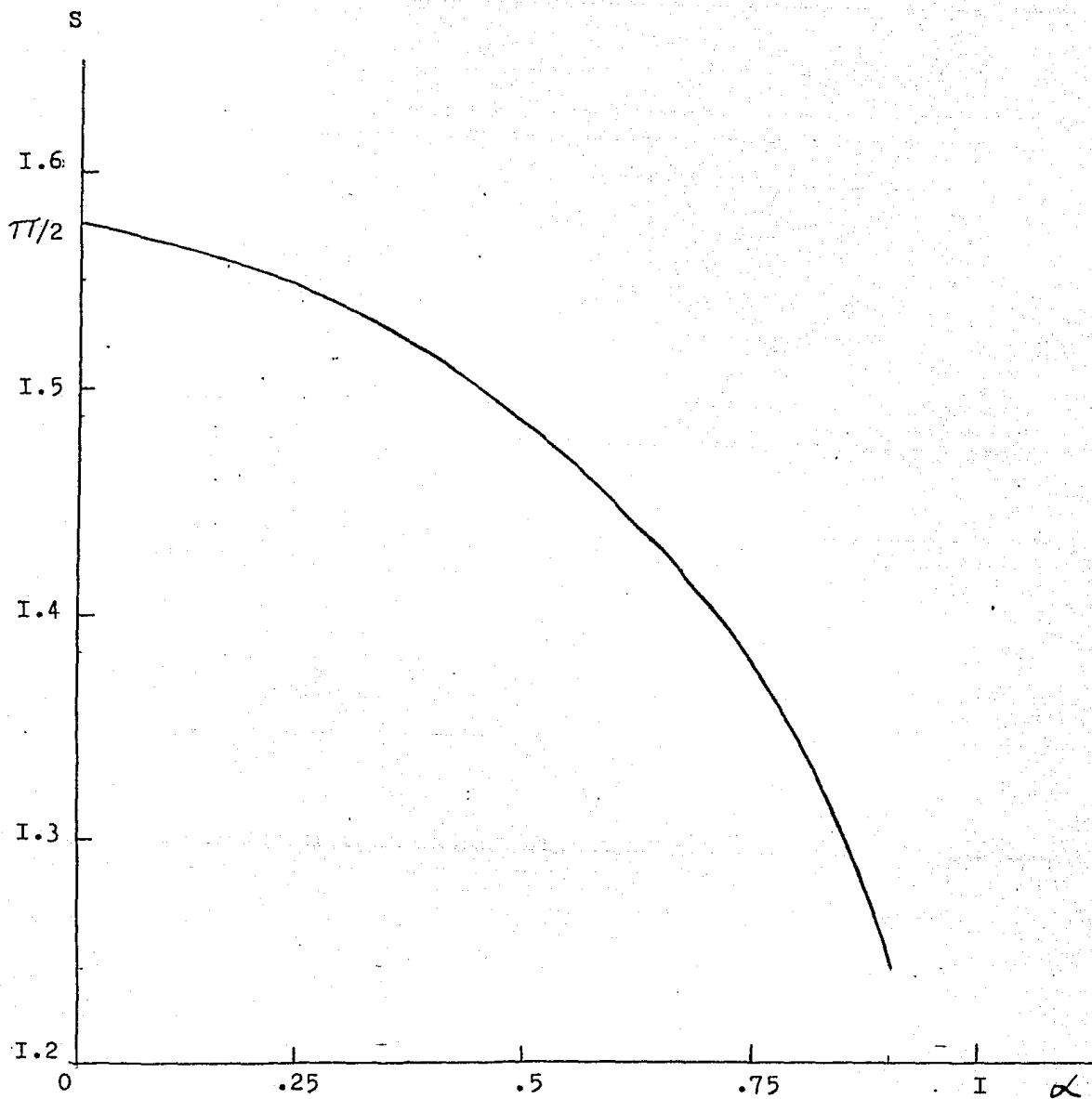


Fig.A.I Parámetro que representa el flujo adimensional de calor total como una función del parámetro del consumo de reactantes  $\alpha$ .

## BIBLIOGRAFIA

- Berman V.S. y Ryasantsev Y.S. (1978); "Ignition of a gas in a boundary layer at a heated plate", Fluid Dynamics, Vol. 5, parte 5, pp. 758-764.
- Chung P.M. (1965); "Chemically reacting non-equilibrium boundary layers", Advance in Heat Transfer, vol. 2, Academic Press, New York, p. 109.
- Dooley D.A. (1957); "Ignition in the boundary layer of a heated plate", Proceedings of the 1957 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, pp. 321-342.
- Dorodnitsyn A. (1942); "Laminar boundary layers in compressible fluids", C.R. Akad. Nauk. USSR., Vol. 34, pp. 213-219.
- Glassman I. (1977); "Combustion", Academic Press, New York.
- Gross R.A. (1955); "Boundary Layer flame stabilization", Jet Propulsion, Vol. 25, pp. 288-290/293.
- Howarth P.L. (1948); "Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation", Proc. Roy. Soc., Vol. A194, p. 16.
- Kapila A.K. (1980); "Reactive-Diffusive system with Arrhenius kinetics: dynamics of ignition", Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 39, p. 21.
- Kapila A.K. (1981); "Evolution of deflagration in a cold combustible subjected to a uniform energy flux", Int. J. Engng. Sci., Vol. 19, p. 495.

- Law C.K. y Law H.K. (1975); "Thermal ignition analysis in boundary layer flows", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 92 pp. 97-108.
- Law H.K. y Law C.K. (1981); "Flat plate ignition with reactant consumption", Com. Sci. Tech., Vol. 25, pp 1-8.
- Liñán A. y Williams F.A. (1979); "Ignition of a reactive solid exposed to a step in surface temperature", SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 36, p. 537.
- Lighthill M.J. (1950); "Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer", Proc. Roy. Soc., - Vol. A202, p. 359.
- Marble F.E. y Adamson T.C. (1954); "Ignition and combustion in a laminar mixing zone", Jet Propulsion, Vol. 24, pp. 85-94.
- Sharma O.P. y Sirignano W.A. (1970); "On the ignition of a premixed fuel by a hot projectile", Combustion Science and Technology, Vol. 1, pp. 481-494.
- Toong T.Y. (1957); "Ignition and combustion in a laminar boundary layer over a hot surface", VI Symposium International on Combustion, The Combustion Institute, pp. 532-540.
- Tsuji H. (1961); "Ignition and flame stabilization in the laminar boundary layer on a porous flat plate with hot gas injection", Aeronautical Research Institute, University of Tokyo, Report nr. 355.
- Treviño C. (1980); Tesis Doctoral, "Procesos de ignición de gases premezclados en flujos de capa límite", DEPI Facultad de Ingeniería.

- Treviño C. y Fernandez-Pello A.C. (1984); "aerodynamics of premixed flames in flat boundary layers", Combustion Science and Technology, Vol. 38, pp 293-312.
- Van Dyke M. (1964); "Perturbation Methods in Fluid mechanics", - Academic Press, New York.
- Von Kerman T. y Millán G. (1953); "Thermal theory of a laminar - flame front near a cold wall", IV Symposium International on Combustion, The Combustion Institute, pp. 173-177.
- Williams F.A. (1985); "Combustion Theory", The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. Menlo Park, California.