01170

2ej · 4

Un Ensayo sobre una Teoría General de

Modelado en Teoría General de Sistemas

Créditos asignados a la Tesis DIEZ

Aprobado por el Jurado:

Presidente : Dr. Romeo Ortega Martínez

Vocal : Dr. Antonio Alonso Concheiro

Secretario : Dr. Rafael Kelly Martínez

Suplente : Dr. Francisco García Ugalde

Suplente : M. en C. Luis Marcial Hernández Ortega

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. ANTONIO ALONSO CONCHEIRO
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del COORDINADOR DE LA SECCION DE ELECTRICA ha sido designado como director de tesis del alumno(a) GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA para obtener el grado de M EN I EN ELECTRICA.

Mucho he de agradecerle su comunicación, por escrito, de la aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a desarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 13 de noviembre de 1986
EL JEFE DE LA DIVISION

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

E.S.1

RESUMEN

EN ESTE TRABAJO SE PRETENDE DAR UN PRIMER PASO HACIA UNA TEORIA GENERAL DE MODELADO PARA SISTEMAS DESDE UN PUNTO DE VISTA MATEMATICO, PARA ESTO NOS BASAMOS EN LA TEORIA DE "SISTEMAS ADJUNTOS", ESTABLECIDA A PRINCIPIOS DE LOS AÑOS 70's POR MEDIO DE LOS TRABAJOS DE M.A. ARBIB y E.G. MANES PRINCIPALMENTE.

LA IDEA FUNDAMENTAL DE ESTE TRABAJO ES LA CONSTRUCCION DE UN "UNIVERSO DE SISTEMAS" ADECUADO PARA LOS "SISTEMAS ADJUNTOS", EN ESTE MARCO DE TRABAJO SE GENERALIZAN VARIOS RESULTADOS DE RELEVANCIA EN LA LITERATURA SOBRE ALCANZABILIDAD, OBSERVABILIDAD, TEORIA DE REALIZACION, TEORIA DE DUALIDAD Y TANTO TEORIA (CATEGORIA) COMO METATEORIA DE "SISTEMAS ADJUNTOS". FINALMENTE SE ESTABLECEN ALGUNOS RESULTADOS SOBRE "CLASES DE SISTEMAS" PARTICULARES DE LOS "SISTEMAS ADJUNTOS" Y SE PLANTEAN ALGUNAS PERSPECTIVAS PARA CONTINUAR ESTE TRABAJO EN VARIAS LINEAS DE INTERES.

INDICE

INTRODUCCION

Establecer una metodología que permita representar los fenómenos adecuadamente, de una manera coherente, sencilla y unificada en las diferentes ciencias, es de fundamental importancia. Este problema se ha resuelto parcialmente en tanto que existen métodos aplicables a varios conjuntos de fenómenos; pero no existe un solo método general utilizable en todos los casos.

Uno de los objetivos de este trabajo es establecer un marco de referencia que permita una primera aproximación a una metodología general para la representación de los distintos fenómenos en las ciencias. Este objetivo es demasiado amplio como para alcanzarlo en este trabajo en toda su magnitud; nos restringiremos pues aquí exclusivamente al aspecto matemático del mismo. Para esto nos basaremos en la teoría de los sistemas adjuntos establecida a principio de la década de los años setentas por medio de los trabajos de Arbib y Manes. Esta teoría hace uso principalmente de la teoría General de Sistemas y la teoría de Categorías, definiendo un sistema sobre una categoría, y generalizando después para los sistemas así definidos.

Los conceptos fundamentales de alcanzabilidad, observabilidad, realización mínima y dualidad. Además, establece vínculos con otras disciplinas como la teoría de control, la teoría de autómatas y la teoría de computación, entre otras.

La teoría de los sistemas adjuntos establece un enfoque lo suficientemente general como para alcanzar nuestro objetivoñ sin embargo, no es el enfoque más general, Por ejemplo, los λ-autómatas y los λ-autómatas implícitos, también construidos por Arbib y Manes a mediados de la década de los años setenta son sistemas definidos sobre categorías los cuales son más generales que los sistemas adjuntos.

Por modelo de un sistema entenderemos una representación de un fenómeno visto como sistema, es decir, un conjunto de elementos (por ejemplo, símbolos, gráficas, ecuaciones, conceptos, reglas, etc). que preservan las propiedades esenciales (desde nuestro punto de vista) del fenómeno en estudio, visto como sistema. Esta concepción de modelo de un sistema depende del modelador; esto es, del observador que construye el modelo para el sistema; de hecho parece practicamente imposible que exista alguna concepción de modelo de un sistema que no dependa del modelador.

Por sistema entenderemos una clase de entradas, una clase de salidas y una relación o relaciones entre ellos; las entradas, las salidas y las relaciones son seleccionadas o establecidas por el modelador, de acuerdo al fenómeno en estudio y sus objetivos de estudio.

Consideraremos a los sistemas adjuntos como modelos para los distintos sistemas, en un primer paso hacia un "universo de modelos para sistemas" o simplemente un "universo de sistemas", donde no hacemos distinción entre el sistema y su modelo. La definición y análisis de los sistemas adjuntos para la construcción de una teoría general de modelado constituye el cuerpo del presente trabajo. Por supuesto no esperamos que para cualquier sistema exista un sistema adjunto que sirva como modelo para él, pero si que los sistemas adjuntos sirvan como modelos para una amplia variedad de sistemas.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo I establecemos un lenguaje de trabajo a través de una serie de conceptos y resultados sobre la Teoría General de Categorías, y presentamos parte de los resultados que son necesarios en los siguientes capítulos. Este capítulo no pretende ser una introducción formal a la Teoría de Categorías, ni hace que este trabajo sea autocontenido.

En el capítulo II construimos el universo de sistemas adjuntos como una cuasi-categoría, y presentamos los principales resultados de este trabajo sobre alcanzabilidad, observabilidad, teoría de realizaciones, teoría de dualidad, teoría (categórica) y metateoría de sistemas adjuntos.

Finalmente, en el capítulo III presentamos algunas aplicaciones sobre ciertas clases específicas de sistemas adjuntos, damos algunos ejemplos de éstos, para terminar hacemos algunos comentarios sobre lo aquí presentado y damos algunas perspectivas para continuar este trabajo, de acuerdo con varias líneas de interés.

I PRELIMINARES

En este primer capítulo presentamos una breve introducción a la teoría de Categorías, mencionando algunos resultados de teoría general de Categorías, y Categorías específicas como Categorías Algebraicas, Categorías Abelianas, y topos. Mencionaremos además algunos vínculos entre teoría de Latices y Lógica Matemática con teoría de Categorías.

1. Teoría General de Categorías

Una Categoría C está definida por una clase de objeto denotada Ob(C); para cada par de objetos A,B (C-objetos) tenemos una clase (en particular un conjunto), llamada la clase de morfismos en C de A a B denotado por C(A,B) (también $mor_C(A,B)$ ó $Hom_C(A,B)$). Para A,B, C-objetos tenemos un mapeo composición

$$C(A,B)\times C(B,C) \to C(A,C)$$
$$(A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C) \longmapsto A \xrightarrow{gf} C.$$

Para todo C-objeto A, existe un elemento identidad distinguido, que denotaremos 1_A en C(A,A). Además se deben cumplir los dos axiomas siguientes:

(1.a) $(f\,g)h = f(\,g\,h)$ para todo $A \xrightarrow{h} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{f} D$.

(1.b) $A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{h} B = A \xrightarrow{h} B = A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{1_B} B$.

Ejemplos:

(1.i) La Categoría set, cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones.

(1.ii) La Categoría Rel, cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son relaciones.

(1.iii) La Categoría Grp, cuyos objetos son grupos y cuyos morfismos son homomorfismos de grupos.

(1.iv) La Categoría R-mod, cuyos objetos son R-modulos y cuyos morfismos son mapeo R-lineales.

(1.v) La Categoría Lat, cuyos objetos son latices y cuyos morfismos son homomorfismos de latices.

(1.vi) La Categoría Rng, cuyos objetos son anillos y cuyos morfismos son homomorfismos de anillos.

(1.vii) La Categoría Mon, cuyos objetos son monoides y cuyos morfismos son homomorfismos de monoides.

Esto es una pequeña muestra de una muy amplia variedad de ejemplos conocidos (Ver [4], [16], [17]).

Diremos que una Categoría C es pequeña si la clase C(A,B) resulta ser un conjunto para todo A,B,C-Objetos; ejemplos de estas categorías son Set, Grp, R-mod, Lat, Rng y Mon. Si la Categoría C no cumple con la condición anterior diremos que es grande; Rel es un ejemplo de estas Categorías.

Llamaremos a una categoría C discreta si todos sus morfismos son identidades; Conectada si para cada par (A,B) de C-objetos, $hom_C(A,B) \neq \phi$.

Se dice que una Categoría B es una subcategoría de C si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(1.c) $ob(B) \subset ob(C)$;

(1.d) $hom_B(A,B) \subset hom_C(A.B)$ para cada par (A,B) de B-objetos.

Se dice que la subcategoría B de la Categoría C es una subcategoría plena (Full subcategory) de C, si cumple con (1.c) y $hom_B(A,B)=hom_C(A,B)$ para cada par (A,B) de C-objetos.

Ejemplos:

La Categoría Finset, cuyos objetos son conjuntos finitos y cuyos morfismos son funciones, es una subcategoría plena de Set.

La Categoría $vect_R$, cuyos objetos son espacios vectoriales sobre un campo R y cuyos morfismos son mapeos R-lineales, es una subcategoría plena de R-mod.

La Categoría de conjuntos y funciones inyectivas es una subcategoría no plena de set. Para cualquier categoría C, la Categoría C^{op}, llamada la Categoría opuesta (o dual) de C, está definida como sigue:

(1.e) $ob(C^{op}) = ob(C)$;

(1.f) Para cada par (A,B,) de C-objetos, $hom_C(A,B,) = hom_{C^{op}}(B,A)$;

(1.g) Si $C(A,B) \times C(B,C) \to C(A,C)$

$$(A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C) \longmapsto A \xrightarrow{gf} C \quad \text{entonces}$$

$$C^{op}(C,B) \times C^{op}(B,A) \to C^{op}(C,A)$$

$$(C \xrightarrow{g'} B,\ B \xrightarrow{f'} A) \longmapsto C \xrightarrow{f'g'} A.$$

Proposición (1.1) La Categoría opuesta de cualquier Categoría C es una Categoría (ver [4]).

Proposición (1.2) Para cualquier Categoría C, $(C^{op})^{op} = C$ (ver [4]).

Si S es una proposición referente a morfismos y objetos de una Categoría C, entonces, por definición.

La proposición dual S^{op} se cumple en C si y solo si S se cumple en C^{op}.

Por ejemplo, la proposición dual S^{op}; "Para cualquier C-objeto y, existe un único C-morfismo $f:x \to y$" se cumple en C si y solo si la proposición S "Para cualquier C^{op} -objeto y, existe un único C^{op} -morfismo $f: y \to x$".

El prefijo "CO" será usado para expresar el concepto dual de un concepto categórico; por ejemplo, el dual de producto contable es coproducto contable, el dual de igualador es coigualador, como veremos más adelante. En otros casos el prefijo NO será usado; así, un monomorfismo es dual de un epimorfismo, objeto terminal de objeto inicial, como veremos más adelante.

Principio de dualidad para Categorías:
Si S es una proposición categórica que se cumple para todas las Categorías, entonces S^{op} también se cumple para todas las Categorías.
Un C-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se dice es un monomorfismo en C (o un C-monomorfismo), si para cualquier par de C-morfismos h y k tales que fh = fk, se sigue que h = K (ver también 3.1, [16]).

Por ejemplo, en set, Grp, R-Mod y Rng, los monomorfismos son precisamente los morfismos inyectivos sobre los conjuntos subyacentes. Esto no siempre es así, como se ejemplifica en (6.3[4]).

Proposición (1.3) Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son C-monomorfismos, entonces $A \xrightarrow{gf} C$ es un C-monomorfismo (ver [4]).
Un C-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se dice ser un epimorfismo en C (o un C-epimorfismo), si para cualquier par de C-morfismos h y k tales que hf = kf, se sigue que h = k (ver también 3.1, [16]).

Por ejemplo, en set, Grp y R-mod, los epimorfismos son precisamente los morfismos sobreyectivos sobre los conjuntos subyacentes. Nuevamente esto no siempre es así, como por ejemplo en Rng (ver 6.10, [4]).

Proposición (1.4). La composición de C-epimorfismos es un C-opimorfismo (ver [4]).

Proposición (1.5). Monomorfismo y epimorfismo son conceptos duales (ver [4]).

Un C-morfismos se dice ser un bimorfismo en C (o un C-bimorfismo), si este es un monomorfismo y un epimorfismo. Una categoria se dice ser balanceada, si cada bimorfismo es también un isomorfismo, donde un isomorfismo es un C-morfismo que tiene inverso izquierdo e inverso derecho únicos y estos coinciden (5.16, [4] y 2.5, [16]).

Proposición (1.6). En cualquier categoria la composición de isomorfismos es un isomorfismos (ver [4]).

Proposición (1.7). Si $A \xrightarrow{f} B$ un isomorfismo, entonces $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ es un isomorfismo y $f = (f^{-1})^{-1}$ ($ff^{-1} = 1_B$ y $f^{-1}f - 1_A$) (ver [4]).

Proposición (1.8). Isomorfismo es un concepto autodual (ver [4]).

Proposición (1.9). Para cualquier categoría C, la relación "es isomorfico a" establece una relación de equivalencia sobre Ob (C) (ver [4]).

Notemos que para cualquier categoría cada isomorfismo es un bimorfismo. Por ejemplo en Set, Grp y R-mod lo inverso también es cierto, i.e., son categorías balanceadas; sin embargo Rng no lo es.

Proposición (1.10). La composición de bimorfismos es un bimorfismo (ver [4]).

Para la definición de subobjeto, de objeto cociente, objeto neteriano y objeto artiniano ver 3.1, [11] y 4.1, 4.2, 4.4 y 4.6, [12].

Un objeto x en una categoría C es llamado un objeto inicial en C si para todo C-objeto B, $hom_C(x,B)$ tiene exactamente un elemento. Para el concepto dual de objeto terminal ver 2.6, [18].

Proposición (1.11). Cualesquiera dos objetos iniciales son isomorficos; dualmente, cualesquiera dos objetos terminales son isomorficos en la categoría en que existan (ver [4]).

Un C-objeto es llamado un objeto cero para C, si este es un objeto inicial y un objeto terminal en C.

Por ejemplo, Set, Grp, Mon y R-mod tienen objetos cero.

Proposición (1.12). Cualesquiera dos objetos cero en una categoría C son isomorficos (ver [4]).

Un functor de C_1 a C_2 es un triple (C_1, F, C_2) donde F es una función de la clase de morfismos de C_1 a la clase de morfismos de C_2 (i.e., $F:mor(C_1) \to mor(C_2)$) que cumple los siguientes axiomas:

(1.h) $F(1_c) = 1_{Fc}$, i.e., como $Ff: Fc \to Fc'$ para cualquier C_1-morfismo $f: C \to C'$, con Ff un C_2-morfismo, entonces $F1_c:FC \to FC = 1_{FC}:FC \to FC$.

(1.i) $F(gf) = F(g)\,F(f)$, i.e., si $f:C \to C'$ y $g:C' \to C''$, entonces $F(gf):FC \to FC'' = F(g)\,F(f):FC \to FC' \to FC''$.

Denotaremos a un functor como $F:C_1 \to C_2$ o $C_1 \xrightarrow{F} C_2$ (ver [4]).

Ejemplos de functores son:

(1.viii) Para cualquier categoría $(C, 1_{mor(C)}, C)$ es un functor llamado el functor identidad sobre C y denotado por 1_C.

(1.ix) Si C_1 es una subcategoría de C_2 y $E:Mor(C_1) \to Mor(C_2)$ es la función inclusión, entonces $E:C_1 \to C_2$ (o $E:C_1 \to C_2$) es un functor, llamado el functor inclusión de C_1 a C_2.

(1.x) Si C_1 y C_2 son categorías y $F:Mor(C_1) \to Mor(C_2)$ es una función la cual manda cualquier C_1-morfismo a una única identidad en $Mor(C_2)$, entonces $F:C_1 \to C_2$ es un functor, llamado un functor constante de C_1 a C_2.

(1.xi) Si (C_1, F, C_2) es un Functor, entonces (C_1^{op}, F, C_2^{op}) es un functor llamado el functor opuesto de F y denotado por F^{op}. Notemos que F y F^{op} cuando son considerados como funciones sobre las clases de morfismos son idénticos $(Mor(C_1) = Mor(C_2))$.

Sin embargo, considerados como functores son diferentes por que tienen diferentes dominios y codominios (i.e., $C_1 \neq C_1^{op}$ y $C_2 \neq C_2^{op}$).

Proposición (1.13). Si $F:A \to B$ y $C:B \to C$ son functores, entonces $CF:A \to C$ es un functor (ver [4]).

Un triple (C_1, F, C_2) es llamado un functor contravariante de C_1 a C_2 si y solo si (C_1^{op}, F, C_2) es un functor (o, equivalentemente si y solo si (C_1, F, C_2^{op}) es un functor). Notemos que un functor contravariante de C_1 a C_2 generalmente no es un functor de C_1 a C_2.

Ejemplos de functores contravariantes son:

(1.xii) Para cualquier functor $F = (C_1, F, C_2)$ existen dos functores con travariantes asociados

$$F^{*} = (C_1^{op}, F, C_2) \qquad y \qquad {}^{*}F = (C_1, F, C_2^{op}).$$

(1.xiii) El functor $P:set^{op} \to set$, el cual asigna a cada conjunto A el conjunto P(A) de todos los subconjuntos de A y a cada función $f:A \to B$ la función $Pf:PA \to PB$ definida por $Pf(c) = f^{-1}[C]$, donde $[C] \subseteq f(A) \subset B$ (f(A) es la imagen de f).

Un functor $F:C_1 \to C_2$ se dice que <u>preserva</u> la propiedad categórica P, si la imagen bajo F de cada morfismo (u objeto, o diagrama conmutativo) en C con la propiedad <u>P</u> viene la propiedad <u>P</u> en C_2.

Un functor $F:C_1 \to C_2$ se dice que <u>refleja</u> la propiedad categórica <u>P</u>. siempre y cuando un morfismo (u objeto, o diagrama conmutativo) bajo la imagen de F en C_1 tiene la propiedad <u>P</u> en C_2, entonces el morfismo (u objeto, o diagrama conmutativo) debe tener la propiedad <u>P</u> en C_1.

<u>Proposición (1.14)</u>. Cualquier functor preserva identidades, isomorfismos, secciones, retracciones y triángulos conmutativos (ver [4]).

Notemos que como un functor preserva triángulos conmutativos, también preserva diagramas conmutativos, dado que cualquier diagrama conmutativo se puede descomponer en triángulos conmutativos.

Un functor $F:C_1 \to C_2$ se dice ser <u>Pleno</u> (Full), si cada restricción $F\Big|_{hom(A,B)}^{hom(FA,FB)}$ es sobreyectiva para cada C_1-morfismo $f:A \to B$. Se dice ser <u>fiel</u> (faithfull) si cada restricción $F\Big|_{hom(A,B)}^{hom(FA,FB)}$ es inyectiva para cada C_1-morfismo $f:A \to B$. Se dice ser un <u>encaje</u> (embedding), si $F:mor(C_1) \to mor(C_2)$ es una función inyectiva. Se dice ser <u>denso</u>, si para cada $B \in Ob(C_2)$ existe algun $A \in Ob(C_1)$

tal que FA es isomorfico a B. Notemos que existen functores fieles que no son encajes; más aún, que un functor es un encaje si este es fiel y uno-a-uno sobre los objetos (i.e., sobre las identidades).

Una categoría concreta es un par (A,v) donde A es una categoría y $v:A \to set$ es un functor fiel.

Proposición (1.15). Cualquier functor fiel $F:A \to B$ refleja monomorfismos, epimorfismos, bimorfismos, morfismos constantes, morfismos co-constantes, morfismos cero y triángulos conmutativos (ver [4]).

Proposición (1.16). Cualquier functor $F:C_1 \to C_2$ que es pleno y fiel refleja secciones, retracciones e isomorfismos (ver [4]).

Teorema (1.17). Cualquier functor $F:C_1 \to C_2$ que es pleno, fiel y denso, preserva y refleja monomorfismos, epimorfismos, bimorfismos, morfismos constantes, morfismos coconstantes, morfismos cero, secciones, retracciones, isomorfismos y triángulos conmutativos (ver [4]).

Proposición (1.18) La composición de functores plenos (respectivamente fieles, encajes, densos), es un functor pleno (respectivamente, fiel, encaje, denso) (ver [4]).

Para la definición de objeto Proyectivo y objeto inyectivo ver 5.7[12].

Por ejemplo, en R-mod un R-módulo izquierdo es categóricamente proyectivo si y solo si es un R-modulo proyectivo, y es categóricamente inyectivo si y solo si es un R-modulo inyectivo. Si R es un dominio ideal principal, entonces un R-módulo A es proyectivo si y solo si es libre y es inyectivo si y solo si es divisible.

Un C-objeto S es llamado un <u>separador</u> para C o un <u>generador</u> para C si y sólo si para cualquiera dos C-morfismos $A \underset{g}{\overset{f}{\rightarrow}} B$ distintos, existe un C-morfismo $S \xrightarrow{x} A$ tal que

$$S \xrightarrow{x} A \xrightarrow{t} B \neq S \xrightarrow{x} A \xrightarrow{g} B.$$

Dualmente, un C-objeto C es llamado un <u>coseparador</u> para C o un <u>cogenerador</u> para C si y sólo si para cualquiera dos C-morfismos $A \underset{g}{\overset{t}{\rightarrow}} B$ distintos existe un C-morfismo $B \xrightarrow{x} C$ tal que

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{x} C \neq A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{x} C.$$

Por ejemplo, en set los separadores son precisamente los conjuntos no vacios. Para Grp un separador es el grupo de los enteros Z bajo la adición. El monoide de los números naturales N bajo la adición es un separador para Mon. El anillo R es un separador para R-mod.

Sean $F:C_1 \rightarrow C_2$ y $G:C_1 \rightarrow C_2$ functores. Una <u>transformación natural</u> (o morfismo de functores) de F a G es un triple (F, η, G) donde $\eta:Ob(C_1) \rightarrow Mor(C_2)$ es una función que satisface los siguientes axiomas:

(1.j) Para cada C_1-objeto A, $\eta(A)$ (usualmente denotado por η_A) es un C_2-morfismo $\eta_A:FA \rightarrow GA$.

(1.k) Para cada C_1-morfismo $A \xrightarrow{t} A'$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FA' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GA' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ A' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Una transformación natural (F, η, G) es llamada un <u>isomorfismo natural</u>, si para cada C_1-objeto A, η_A es un C_2-isomorfismo. F y G se dicen ser <u>naturalmente isomorfos</u> (denotado por $F \cong C$) si y sólo se existe un isomorfismo natural de F a G.

Ejemplos:

(1.xiv) La transformación natural 1_F de cualquier functor F en sí mismo, la cual asigna a cada objeto A el morfismo identidad sobre FA, es un isomorfismo natural.

(1.xv) Para cada conjunto A existe un isomorfismo natural $\eta = \eta_B$ del "Producto cartesiano izquierdo por A", i.e., el functor $(AX-) : set \to set$ a el "Producto cartesiano derecho por A", i.e., $(-XA) : set \to set$, definido por:

$$\eta_B(a,b) = (b,a).$$

La composición de transformaciones naturales $F \overset{\eta}{\to} C$ y $C \overset{\xi}{\to} H$ es el triple (F, ξ, H) donde ξ es la función que asigna a cada objeto A, el morfismo $FA \xrightarrow{\varepsilon_A \eta_A} HA$. La composición usualmente es denotada por $F \xrightarrow{\varepsilon\eta} H$ (ver [4]).

<u>Proposición (1.19)</u>. La composición de transformaciones naturales (respectivamente, isomorfismos naturales) es una transformación natural (respectivamente, isomorfismo natural) (ver [4]).

<u>Proposición (1.20)</u>. La composición de transformaciones naturales es asociativa (ver [4]).

<u>Teorema (1.20)</u>. Una transformación natural $\eta:F \to G$ es un isomorfismo natural si y sólo si existe alguna transformación natural $S:G \to F$ tal que

$S\eta = 1_F$ y $\eta S = 1_G$ (ver [4]).

En consecuencia, no es difícil ver que podemos formar una categoría de functores de C_1 a C_2 como objetos, y transformaciones naturales entre ellos como morfismos, la cual es usualmente denotada como $C_2^{C_1}$.

Se dice que un functor $F:C_1 \to C_2$ es un <u>isomorfismo functorial</u> o simplemente un <u>isomorfismo</u> de C_1 a C_2, si existe un functor $G:C_2 \to C_1$ tal que $GF = 1_{C_1}$ y $FG = 1_{C_2}$. Dos categorías se dicen isomórficas (lo cual denotamos por $C_1 \cong C_2$) si existe un isomorfismo entre ellas.

Por ejemplo, cualquier functor identidad es un isomorfismo. Existe un isomorfismo de Rng en sí mismo el cual manda cada anillo R en el anillo opuesto R*. Para cualquier anillo R, R-mod es isomórfica con Mod-R*, i.e., con la categoría de los R*-módulos derechos y R* el anillo opuesto a R. La categoría Rng es isomórfica a la categoría Z-Alg, i.e., a la categoría de todas las álgebras sobre el anillo de los enteros. La categoría Z-mod es isomórfica a la categoría de los grupos Abelianos Ab.

<u>Proposición (1.21)</u>. Si $F:C_1 \to C_2$ es un functor, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1.21.1) F es un isomorfismo;

(1.21.2) La función $F;mor(C_1) \to Mor(C_2)$ es una biyección;

(1.21.3) F es pleno y fiel y la función asociada a los objetos $F:Ob(C_1) \to Ob(C_2)$ es una biyección (ver [4]).

Se dice que un functor $F:C_1 \to C_2$ es una <u>equivalencia</u>, si es fiel, pleno y denso. En este caso las categorías C_1 y C_2 se dicen ser equivalentes y ello se denota por $C_1 \cong C_2$.

Proposición (1.22). La relación "es equivalente a" es una relación de equivalencia en la cuasi-categoria de todas las categorías pequeñas y functores entre ellas llamada $\hat{C}at$ (ver [4]).

Proposición (1.23). Si $F:C_1 \to C_2$ es un functor, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1.23.1) F es una equivalencia;

(1.23.2) Existe un functor $G:C_2 \to C_1$ tal que $FG \cong 1_{C_2}$ y $GF \cong 1_{C_1}$;

(1.23.3) Existe un functor $G:C_2 \to C_1$ y también isomorfismos naturales $\eta:1_{C_1} \to GF$ y $\varepsilon:FG \to 1_{C_2}$ tales que $F*\eta + (\varepsilon*F)^{-1}$ y $G*\varepsilon = (\eta*G)^{-1}$, donde $(F*\eta)_A = F(\eta_A)$, $(\varepsilon*F)^{-1}_A = \varepsilon^{-1}_{FA}$, $(G*\varepsilon)_B = G(\varepsilon_B)$ y $(\eta*G)^{-1}_B = \eta^{-1}_{GB}$ para cualquier par de objetos $A \in Ob(C_1)$ y $B \in Ob(C_2)$ (ver [4]).

A la tétrada $(F, G, \eta, \varepsilon)$ le llamaremos una situación de equivalencia.

Proposición (1.24). La composición de equivalencias es una equivalencia. Si F es una equivalencia, entonces F^{op} también lo es. Si $(F, G, \eta, \varepsilon)$ es una situación de equivalencia, entonces $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ también lo es (ver [4]).

Ejemplos de equivalencias:

(1.xvi) Cualquier isomorfismo functorial es una equivalencia.

(1.xvii) Si $F:C \to C$ es naturalmente isomórfico a 1_C, entonces F es una equivalencia, pero no conversamente.

Para la definición de categorías <u>dualmente</u> <u>equivalentes</u> ver 3.2 [1]. Una categoría se dice ser auto-dual, si es dualmente equivalente a si misma.

Por ejemplo, para cualquier categoría C, C y C^{op} son dualmente equivalentes. La categoría de espacios vectoriales finito dimensionales sobre un campo K, denotada por $Vect_K$ es auto-dual. La categoria de espacios de Banach reflexivos es auto-dual. La categoría de grupos abelianos compactos es dualmente equivalente a la categoría de Algebras booleanas atómicas completas.

Sean $A \underset{g}{\overset{f}{\to}} B$ un par de C-morfismos. Un par (E,e) es llamado un <u>igualador</u> en C de f y g, si se cumplen las siguientes condiciones:

(1.1) $e:E \to A$ es un C-morfismo.

(1.11) $fe = ge$.

(1.m) Para cualquier C-morfismo $e':E' \to A$ tal que $fe' = gr'$, existe un único C-morfismo $\bar{e}:E' \to E$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, "e'"] & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para el concepto dual de coigualador ver el apendice A de [12].

<u>Proposición (1.25)</u>. Si (E,e) es un igualador de $A \underset{g}{\overset{f}{\to}} B$; entonces (E,e) es un subobjeto de A (ver [4]).

<u>Proposición (1.26)</u>. Cualesquiera dos igualadores de $A \underset{g}{\overset{f}{\to}} B$ son subobjetos isomórficos de A (ver [4]).

Por ejemplo, en set, Grp y R-mod, si $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ son morfismos en cada una de ellas, entonces, si E denota al conjunto $\{a \in A / f(a) = g(a)\}$ considerado como un subconjunto (respectivamente, subgrupo, R-submodulo) de A y si $e: E \to A$ es la función inclusión, entonces (E,e) es un igualador de f y g en set, Grp y R-mod respectivamente.

Si $E \xrightarrow{e} A$ es un C-morfismo, entonces (E,e) es llamado un <u>subobjeto regular</u> si y sólo si existen C-morfismos f y g tales que (E,e) es el igualador de f y g. Dualmente, si $B \xrightarrow{h} \bar{E}$ es un C-morfismo, entonces $(h,\bar{E})$ es llamado un <u>objeto cociente regular</u> de B y h es llamado un <u>epimorfismo regular</u> si y sólo si existen $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ C-morfismos tales que $(h,\bar{E})$ es el coigualador de f y g.

Por ejemplo, en set, Grp y R-mod, los monomorfismos regulares son precisamente los monomorfismos y los epimorfismos regulares son precisamente los epimorfismos. Sin embargo, en Mon y Rng existen monomorfismos que no son monomorfismos regulares.

Una categoría C tiene igualdadores si cualquier par de C-morfismos con dominio y codominio común tiene igualador. Un concepto análogo se establece para una categoría C, la cual tiene coigualadores.

Por ejemplo, cada una de las categorías set, Grp y R-mod tiene igualadores y coigualadores.

Sea una categoria C tal que para toda A, B $\in$ Ob(C), $hom_C(A,B)$ contiene exactamente un morfismo cero o, equivalentemente, existe una "función de decisión" seleccionando exactamente un elemento de cada conjunto $hom_C(A,B)$ tal que la composición (por la izquierda o la derecha) de un morfismo seleccionado con cualquier morfismo es nuevamente un morfismo seleccionado (siempre que la composición esté definida).

Ahora, si $A \xrightarrow{f} B$ es un C-morfismo y 0_{AB} es el único morfismo cero de A a B, entonces el igualador de f y 0_{AB} es llamado el <u>Kernel de f</u> y es denotado por ker(f).

C se dice que tiene Kernels, si ker(f) existe para cada $f \in Mor(C)$. Se define también un concepto dual, llamado cokernel de f. El kernel se define también para dos C-morfismos $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ como el igualador de f y g y es llamado el <u>kernel diferencia</u> de f y g (ver [19]). Notemos que el kernel diferencia es precisamente el igualador de f y g; de manera análoga el cokernel diferencia es el coigualador.

Si B es un C-objeto y $(A_i, m_i)_{i\in I}$ es una familia de subobjetos de B, el par (D,d) es llamado una intersección en C de $(A_i, m_i)_{i\in I}$, si se cumple:

(1.n) $d:D \to B$ es un C-morfismo.

(1.ñ) Para cada $i\in I$ existe un C-morfismo $d_i:D \to A_i$ con la propiedad de que $m_i d_i = d$.

(1.o) Si $g:C \to B$ y para cada $i\in I$, $g_i:C \to A_i$ son C-morfismos tales que $m_i g_i = g$, entonces existe un único C-morfismo $f:C \to D$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ D \arrow[r, "d"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Se define también un concepto dual llamado cointersección de una familia de objetos cocientes.

<u>Proposición (1.27)</u> Cualquier intersección (D,d) de una familia de subobjetos $(A_i, m_i)_{i\in I}$ de un objeto B es un subobjeto de B, i.e., d necesariamente es un monomorfismo. Además (D,d) es, salvo isomorfismo, el mayor subobjeto

(relativo al orden $\leq$ sobre subobjetos; ver 4.1,[12]) que es más pequeño que cada uno de los subobjetos (A_i, m_i) (ver [4]).

Corolario (1.28) Cualesquiera dos intersecciones de una familia de subobjetos de un objeto A son subobjetos isomórficos de A (ver [4]).

Proposición (1.29) Si C es bien potenciada, i.e., cada C-objeto tiene una clase de subobjetos la cual es un conjunto y tiene intersecciones, i.e.; cualquier familia indexada (por un conjunto) de subobjetos de cada C-objeto tiene una intersección, entonces cualquier familia de subobjetos (no necesariamente indexada por un conjunto) de cualquier C-objeto tiene una intersección (ver [4]).

Para la definición de (ε, μ)-Factorización ver 2.4, [11] o 3.3, [18]; para más detalles ver 17, [4].

Para la definición de Productos y coproductos contables ver 2.10 y 2.14, [18]

Teorema (1.30) (Freyd) Para cualquier categoría C tal que mor(C) es un conjunto, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1.30.1) C tiene productos

(1.30.2) C tiene coproductos

(1.30.3) C es equivalente a una latiz completa (ver [4]).

Una fuente en C es un par $(X, (f_i)_{i\varepsilon I})$, donde X es un C-objeto y $(f_i : X \to X_i)_{i\varepsilon I}$ es una familia de C-morfismos.

Frecuentemente una fuente es denotada (X, f_i) por simplicidad. El concepto dual es el de pozo (f_i, X). Si C_1 y C_2 son categorías y $D: C_1 \to C_2$ es un functor, entonces una <u>fuente natural</u> para D es una fuente $(L,(l_i)_{i\varepsilon ob(C_1)})$ en C_2 tal que para cada $i\varepsilon ob(C_1)$, $l_i:L \to D(i)$; y para todos los morfismos $m:i \to j$ en C_1, el triángulo

$$\begin{tikzcd} & D(i) \arrow[d, "D(m)"] \\ L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[r, "l_j"'] & D(j) \end{tikzcd}$$

conmuta. En otras palabras, si $L: C_1 \to C_2$ es el functor constante cuyo valor en cada objeto de C_1 es L y cuyo valor en cada morfismo de C_1 es 1_L, y si $(L,(l_i)_{i\varepsilon ob(C_1)})$ es una fuente en C_2, entonces $(L,(l_i)_{i\varepsilon ob(C_1)})$ es una fuente natural para D si y sólo si $(l_i)_{i\varepsilon ob(C_1)}$ es una transformación natural de L a D. Dualmente, un <u>pozo natural</u> para D es un pozo $((K_i)_{i\varepsilon ob(C_1)},K)$ donde $(K_i)_{i\varepsilon ob(C_1)}$ es una transformación natural de D al functor constante $K: C_1 \to C_2$.

Si $D:C_1 \to C_2$ es un functor, entonces una fuente natural (L, l_i) para D es llamada un <u>límite</u> de D si para cualquier fuente natural $(I, \bar{l}_i)$ para D, existe un único morfismo $h: I \to L$ tal que para cada $j\varepsilon ob(C_1)$, el triángulo

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{l}_j"] & \\ L \arrow[r, "l_j"'] & D(j) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Dualmente, un pozo natural (k_i, K) es llamado un <u>Colímite</u> si para cualquier pozo natural $(\bar{K}_i,\bar{K})$ para D, existe un único morfismo $t:K \to \bar{K}$ tal que para cada $j \in Ob(C_1)$, el triángulo

$$\begin{tikzcd} & \bar{K} \\ D(j) \arrow[ur, "\bar{k}_j"] \arrow[r, "k_j"'] & K \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Notemos que (L, l_i) es un limite de D si y sólo si (l_i, L) es un colímite de D^{op}.

Ejemplos:

(1.xviii) Sea C_1 la categoría $1 \underset{n}{\overset{m}{\rightrightarrows}} 2$, y sea $D:C_1 \to C_2$ un functor. Entonces $(L, (l_i)_{i=1,2})$ es el límite de D sí y sólo sí (L, l_1) es un igualador de $D(m)$ y $D(n)$, y $l_2 = D(m)\, l_1 = D(n) l_1$. $((k_i)_{i=1,2}, K)$ es un colímite de D si y sólo si (k_2, K) es un coigualador de $D(m)$ y $D(n)$ y $k_1 = k_2\, D(m) = k_2\, D(n)$.

(1.xix) Sea C_1 la categoría que es justamente un pozo $(A_i \xrightarrow{f_i} A_o, A_o)$, y sea $D:C_1 \to C_2$ un functor tal que para cada i, $D(f_i)$ es un monomorfismo. Entonces $(L, l_i), l_o)$ es un límite de D si y solo si (L, l_o) es una intersección de la familia $(D(A_i), D(f_i))$ de subobjetos de $D(A_o)$ y $l_o = D(f_i) l_i$ para cada $i \in Ob(C_1)$.

(1.xx) Sea C_1 cualquier categoría discreta y $D:C_1 \to C_2$ un functor. Entonces (L, l_i) es un límite de D sí y solo si es un producto de la familia $(D(i))_{i \in Ob(C_1)}$, y (k_i, K) es un colímite de D sí y sólo sí es un coproducto de la familia $(D(i))_{i \in Ob(C_1)}$.

(1.xxi) Si C_1 es la categoría vacia, i.e., la categoría que no tiene obje tos ni morfismos y $D:C_1 \to C_2$ es un functor, (L, l_i) es un límite de D si y solo si L es un objeto terminal para C_2 y $(l_i) = \phi$; tambien (k_i, K) es un colímite de D si y solo si K es un objeto inicial para C_2 y $(k_i) = \phi$.

De los anteriores ejemplos notamos que igualadores, intersecciones, productos y objetos terminales son límites. Dualmente, coigualadores, coproductos y objetos iniciales son colímites. También otros conceptos categoricos resultan ser límites o colímites.

<u>Proposición (1.31)</u>. Si (L, l_i) y $(\bar{L}, \bar{l}_i)$ son límites del functor $D:C_1 \to C_2$, entonces existe un único isomorfismo $h:L \to \bar{L}$ tal que para cada $i \in Ob(C_1)$ el triángulo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "l_i"] & \\ \bar{L} \arrow[r, "\bar{l}_i"'] & D(i) \end{tikzcd}$$

conmuta (ver [4]).

<u>Corolario (1.32)</u>. Objetos terminales igualadores, intersecciones y productos son únicos, salvo isomorfismo.

También los colímites son únicos salvo isomorfismo, por lo que existe un corolario similar al anterior para objetos iniciales, coigualadores y coproductos.

Para la definición de <u>producto fibrado</u> (Pullback) ver el ápendice B en [12]. El concepto dual es el de <u>coproducto fibrado</u> (Pushouts). El producto fibrado es un límite y el coproducto fibrado es un colímite.

Si C_1 es una categoría, entonces la categoría C_2 se dice ser <u>C_1-completa</u> (o tener C_1-límites) si cada functor $D:C_1 \to C_2$ tiene un límite. Una categoría C_2 se dice ser <u>completa</u> si C_2 es C_1-completa para cada categoría C_1 donde $\mathrm{mor}(C_1)$ es un conjunto. También tenemos los conceptos duales de C_1-cocompleta y cocompleta.

<u>Teorema (1.32)</u>. Para cualquier categoría C, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1.32.1) C es completa;

(1.32.2) C tiene productos fibrados múltiples y un objeto terminal;

(1.32.3) C tiene productos y productos fibrados;

(1.32.4) C tiene productos e intersecciones finitas;

(1.32.5) C tiene productos e igualadores (ver [4]).

Un resultado análogo caracteriza a las categorías cocompletas y también existen resultados para el caso de una categoría con productos contables y una categoría con coproductos contables (categorías contablemente completas y cocompletas (ver [4]).

Entre los ejemplos de categorías que son completas y cocompletas tenemos a set, Grp y R-mod.

<u>Corolario (1.33)</u>. Si C es una categoría donde mor(C) es un conjunto, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1.33.1) C es completa;

(1.33.2) C es cocompleta;

(1.33.3) C es equivalente a una latiz completa.

Demostración:

Se sigue del teorema (1.30) y teorema (1.32).

Sea I una categoría y $F:C_1 \to C_2$ un functor. Entonces se dice que F preserva I-límites si cuando $D:I \to C_1$ es un functor y $(L, 1_i)$ es un límite de D, entonces $(F(L), F(1_i))$ es un límite de $FD:I \to C_2$.

Se dice que F refleja I-Límites si cuando $D:I \to C_1$ es un functor y $(L, 1_i)$ es una fuente en C_1 tal que $(F(L), F(1_i))$ es un límite de FD, entonces $(L, 1_i)$ es un límite de D.

Se dice que F preserva límites si F preserva I-límites para cualquier categoría I donde mor(I) es un conjunto. Dualmente, existen los conceptos de que F preserve y refleje I-colímites y colímites.

Teorema (1.34). Si C_1 es completa y $F:C_1 \to C_2$ es un functor, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1.34.1) F preserva límites;

(1.34.2) F preserva productos fibrados múltiples y objetos terminales;

(1.34.3) F preserva productos y productos fibrados;

(1.34.4) F preserva productos e intersecciones finitas;

(1.34.5) F preserva producto e igualadores (ver [4]).

Por ejemplo, los functores que "olvidan" de Grp, R-mod, mon, Rng y lat a set preservan y reflejan límites, pero ninguno de ellos preserva o refleja colímites (ver [4]).

Teorema (1.35). Si $F:C_1 \to C_2$ es fiel y refleja isomorfismos y C_1 tiene I-lí mites (respectivamente I-colímites) y F los preserva, entonces F también los refleja (ver [4]).

Proposición (1.36). Cualquier functor fiel y pleno refleja I-límites y I-colímites para cada categoría I (ver [4]).

Proposición (1.37). Si F y G son functores naturalmente isomórficos y I es una categoría, entonces F preserva o refleja I-límites (respectivamente I-colímites) sí y sólo sí G también lo hace (ver [4]).

Proposición (1.38). Cada equivalencia $F:C_1 \to C_2$ preserva y refleja I-límites y I-colímites, para cualquier categoría I (ver [4]).

Sea $G:C_1 \to C_2$ un functor y sea $B \in Ob(C_2)$. Un par (u,A) con $A \in Ob(C_1)$ y $u:B \to GA$ es llamado un mapeo universal para B con respecto a G (o un mapeo G-universal para B) si para cada $A' \in Ob(C_1)$ y cada $f:B \to GA'$ existe un único C_1-morfismo $\bar{f}:A \to A'$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & GA \arrow[d, "G\bar{f}"] \\ & GA' \end{tikzcd}$$

conmuta. Dualmente, si $F:C_1 \to C_2$ es un functor y $B \in Ob(C_2)$, entonces un par (A,u) es llamado un mapeo couniversal para B con respecto a F (o un mapeo F-couniversal para B) si (u,A) es un mapeo universal para B con respecto a $F^{op}:C_1^{op} \to C_2^{op}$, i.e., puesto que $u:FA \to B$ y para cada C_1-objeto A' y cada C_2-morfismo $f:AF' \to B$, existe un único morfismo $\bar{f}:A' \to A$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} FA' \arrow[d, "F\bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ FA \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplos de mapeos universales de functores que olvidan a set es cualquier categoría concreta (A,V), Set, Grp y R-mod, porque para cada conjunto B existe un mapeo U-universal (u_B, A_B) donde A_B es el conjunto B en set, el grupo libre generado por B en Grp y el R-módulo libre generado por B en R-mod. $u_B:B \to U(A_B)$ es la inclusión de B en el conjunto subyacente de A_B. Los objetos A_B usualmente son llamados "objetos libres" y las funciones u_B son frecuentemente llamadas "inserción o inclusión de generadores".

Si C_1 y C_2 son categorías, G y F son functores y η y ε son transformaciones naturales tales que:

(1.p) $G:C_1 \to C_2$ y $F:C_2 \to C_1$;

(1.q) $\eta:1_{C_2} \to GF$ y $\varepsilon:FG \to 1_{C_1}$;

(1.r) $G \xrightarrow{\eta * G} GFG \xrightarrow{G*\varepsilon} G = G \xrightarrow{1G} G$, y

$F \xrightarrow{F*\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon * F} F = F \xrightarrow{1F} F$;

entonces $(\eta, \varepsilon, F, G)$ es llamado una <u>adjunción</u> y es denotado por $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$ o simplemente por $F \dashv G$. Si $F \dashv G$, entonces F se dice ser un <u>adjunto izquierdo</u> de G y G se dice ser un <u>adjunto derecho</u> de F. Un functor $G:C_1 \to C_2$ se dice que tiene adjunto izquierdo si existen F, η y ε tales que $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$. Similarmente $F:C_2 \to C_1$ se dice que tiene adjunto derecho si existen G, η y ε tales que $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$.

Proposición (1.39). Si $G:C_1 \to C_2$ es una equivalencia, entonces existe un functor $F:C_2 \to C_1$ que es simultáneamente adjunto izquierdo y adjunto derecho de G con $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$ y $(\varepsilon^{-1}, \eta^{-1}):G \dashv F$ (ver [4]).

Teorema (1.40). Sea $G:C_1 \to C_2$.

(1.40.1) Si cada $B \in Ob(C_2)$ tiene un mapeo G-universal (η_B, A_B), entonces existe una única adjunción $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$ tal que $\eta = \eta_B$ y para cada $B \in Ob(C_2)$, $FB = A_B$.

(1.40.2) Conversamente, si tenemos una adjunción $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$, entonces para cada $B \in Ob(C_2)$, (η_B, FB) es un mapeo G-universal para B (ver [4]).

Corolario (1.40). Si los functores F y $\overline{F}$ son adjuntos izquierdos del functor G, entonces F es naturalmente isomorfo a $\overline{F}$ (ver [4]).

Teorema (1.41). Si $(\eta,\varepsilon):F \dashv G$ es una adjunción, entonces F preserva colímites y G preserva límites (ver [4]).

En los capítulos subsecuentes utilizaremos la siguiente notación para functores adjuntos:

Si $G:C_1 \to C_2$ es un functor, entonces $G^{\cdot}$ denota el adjunto derecho de G y $^{\cdot}G$ denota el adjunto izquierdo de G.

Esta notación es frecuente en teoría de Sistemas.

Si $G:C_1 \to C_2$ tiene adjunto izquierdo F, entonces existe una biyección

$$\frac{B \xrightarrow{f} GA}{FB \xrightarrow{\psi} A} \quad \text{con } B \in Ob(C_2)$$

definida por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "f"'] & GFB \arrow[d, "G\psi"] \\ & GA \end{tikzcd}$$

Si $F:C_2 \to C_1$ tiene adjunto derecho G, entonces existe una biyección

$$\frac{A \xleftarrow{\psi} FB}{GA \xleftarrow{f} B} \qquad \text{con } A \in Ob(C_1)$$

definida por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A & FGA \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \\ & FB \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, "Ff"'] \end{tikzcd}$$

(ver [17]).

2. Las Categorías Algebraicas, Abelianas y Topos.

Una categoría Algebráica es una categoría concreta (A,U) que satisface las siguientes condiciones:

(2.a) A tiene coigualadores.

(2.b) U tiene adjunto izquierdo.

(2.c) U preserva y refleja epimorfismos regulares.

Un functor Algebráico es un functor que tiene adjunto izquierdo y preserva y refleja epimorfismos regulares.

Teorema (2.1) Si (A,U) es una categoría Algebráica, entonces A es completa y U preserva y refleja límites (ver [4]).

Corolorio (2.2) Cada categoría algebráica (A,U) es únicamente (regular epi, mono)-Factorizable, y U preserva y refleja estas (ε,μ)-Factorizaciones (ver [4]).

Teorema (2.3) Cualquier categoría algebráica es completa (ver [4]).

Proposición (2.4) La composición de functores algebráicos es un functor algebráico (ver [4]).

Proposición (2.5) Cada functor algebráico es fiel (ver [4]).

Proposición (2.6) Cada functor algebráico,

(2.6.1) preserva y refleja monomorfismos;

(2.5.2) preserva y refleja isomorfismos;

(2.6.3) preserva y refleja (regular epi, mono)-Factorizaciones (ver [4]).

Una categoría C es llamada normal si tiene Kernels y coKernels, es (ε,μ)-Factorizable, y cada uno de sus monomorfismos es un monomorfismo normal (ver [4]). C es llamada <u>conormal</u> si tiene Kernels y coKernels, es (ε,μ)-Factorizable, y cada uno de sus epimorfismos es un epimorfismo normal (ver [4]). C es llamada <u>exacta</u> si es normal y conormal.

Por ejemplo R-mod es exacta, Grp es conormal pero no normal y Mon no es ni normal ni conormal.

Sea C una categoría exacta; se dice que una secuencia $(f_n)_{n\in I}$ de C-morfismos indexada por un intervalo (finito o infinito) de números enteros es una <u>secuencia exacta</u> si para cada par n, $n+1\in I$

(2.d) codominio (f_n) = dominio (f_{n+1})

(2.e) $I_m(f_n) \cong \mathrm{Ker}\,(f_{n+1})$ (ver [4]).

<u>Proposición (2.7)</u> Si $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ son morfismos en una categoría exacta, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(2.7.1) (f,g) es una secuencia exacta, i.e., $I_m(f) \cong \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2.7.2) $\mathrm{coK}(f) \cong \mathrm{coi}_m(g)$.

(2.7.3) $gf = 0$ y $\mathrm{coK}(f)\ \mathrm{Ker}(g) = 0$ donde "0" es el morfismo cero (ver [4])

Un functor $F: \mathcal{C}_1 \to C_2$ entre categorias exactas es llamado un <u>functor exacto</u> si preserva secuencias exactas, i.e., si $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ es exacta, entonces $\cdot \xrightarrow{Ff} \cdot \xrightarrow{Fg} \cdot$ es exacta.

<u>Proposición (2.8)</u> Cada functor exacto preserva objetos cero, morfismos cero, Kernels, coKernels, epimorfismos, monomorfismos, imágenes, coimágenes y (ε,μ)-Factorizaciones (ver [4]).

Una <u>estructura aditiva</u> (respectivamente, uno estructùra semi-aditiva) sobre una categoría C es una función denotada por + que asocia con cada par (f,g) de C-morfismos con dominio común A y codominio común B, un C-morfismo denotado f+g con dominio A y codominio B tal que cumple con los siguientes axiomas:

(2.f) Para cada par (A,B) de C-objetos, + induce sobre $hom_C(A,B)$ una estructura de grupo abeliano (respectivamente, para estructura semiaditiva, para cada par (A,B) de C-objetos, + induce sobre $hom_C(A,B)$ una estructura de monoide conmutativo).

(2.g) La composición es distributiva por la derecha y la ezquierda sobre +, i.e., si

$$A \xrightarrow{k} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{f} D$$

son C-morfismos, se sigue que

$$f(g+h)= fg+fh \quad y \quad (g+h)k=gk+hk.$$

(2.h) El morfismo cero "0" de C actúa como una identidad respecto de +, i.e., para cada C-morfismo f, $0 + f = f + 0 = f$.

Si + es una estructura aditiva (respectivamente estructura semi-aditiva) sobre una categoría C, entonces llamaremos a (C,+) o simplemente a C una categoría aditiva (respectivamente semi-aditiva).

Por ejemplo, R-mod es aditiva pero Grp no lo es.

Una categoría es llamada <u>categoría Abeliana</u> si es exacta y tiene biproductos finitos (ver [4]).

Por ejemplo, R-mod, Ab y la subcategoría plena de Ab que consiste de grupos Abelianos finitos, son categorías Abelianas.

<u>Teorema (2.9)</u> Si C es exacta y tiene productos finitos o coproductos finitos, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(2.9.1) Existe una estructura aditiva sobre C;

(2.9.2) Existe una única estructura aditiva sobre C;

(2.9.3) C es una categoría Abeliana (ver [4]).

Corolorio (2.10) Una categoría abeliana si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen:

(2.10.1) C es exacta.

(2.10.2) C es semi-aditiva.

(2.10.3) C tiene productos finitos (o coproductos finitos) (ver [4]).

Proposición (2.11) Cualquier categiría Abeliana es finitamente completa y finitamente cocompleta (ver [4]).

Teorema (2.12) Sea $F: C_1 \to C_2$ un functor que preserva ceros (objeto cero y morfismo cero) entre categorías Abelianas. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(2.12.1) F es exacto

(2.12.2) F preserva límites y colímites finitos.

(2.12.3) F preserva productos fibrados y epimorfismos

(2.12.4) F preserva Kernels y epimorfismos (ver [4]).

Un topo elemental o simplemente un topo es una categoría C tal que:

(2.i) C es finitamente completa

(2.j) C es finitamente cocompleta.

(2.k) C tiene exponenciación

(2.l) C tiene un clasificador de subobjetos (ver [21]).

Donde, una categoría C tiene exponenciación si tiene productos binarios, i.e., existe el producto para cualquier par de C-objetos, y para cualquier par de C-objetos A,B existe un C-objeto denotado B^A y un C-morfismo $ev: B^A \times A \to B$, llamado la evaluación, tal que para cualquier C-objeto C y C-morfismo $g: C \times A \to B$, existe un único C-morfismo $\hat{g}: C \to B^A$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[dr, "ev"] & \\ C \times A \arrow[u, "\hat{g} \times 1_A"] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

, i.e., $ev(\hat{g} \times 1_A)=g$.

La asignación de $\hat{g}$ a g establece una biyección

$$C\ (C \times A,B) \cong C(C,B^A)$$

entre la colección de C-morfismos de C x A en B, y la colección de C-morfismos de C en B^A.

Si C es una categoría con objeto terminal 1, entonces un <u>clasificador de subobjetos</u> para C es un C-objeto denotado por Ω junto con un C-morfismo $T:1 \to \Omega$ llamado "verdad", que satisface el siguiente axioma:

(2.11) Para cada C-monomorfismo $f:A \to D$ existe un único C-morfismo $x_f:D \to \Omega$ llamado el morfismo característico de f,o simplemente el característico de f, tal que el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & D \arrow[d, "x_f"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Un clasificador de subobjetos, en una categoría cuando existe, es único salvo isomorfismo (ver [21]).

En lo que resta de este capítulo denótemos un monomorfismo $f:A \to B$ como $f: A \to B$ y un epimorfismo $g:A \to B$ como $g:A \to B$.

Ejemplos de topos son set, Finset, la categoría de conjuntos finitos, y en general set^C, donde C es una categoría tal que Mor(C) es un conjunto. Estos son algunos, pero no todos los ejemplos de topos existentes.

Se dice que un topo C es <u>bien punteado</u> si es no degenerado, i.e., el objeto inicial y el objeto terminal de C no son isomorfos, y tiene al objeto terminal como separador (generador).

En un topo C el C-morfismo $\perp: 1 \to \Omega$ llamado "falso" es el único tal que el siguiente cuadrado.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \to & 1 \\ \downarrow & & \downarrow\perp \\ 1 & \to & \Omega \end{array}$$

donde 0 es el objeto inicial, y 1 es el objeto terminal,

es un producto fibrado.

Un topo no-degenerado C se dice ser <u>bivalente</u> si verdad $T: 1 \to \Omega$ y falso $\perp: 1 \to \Omega$ son los únicos C-morfismos de 1 en Ω.

Teorema (2.13) Si C es un topo bien punteado, entonces C es bivalente (ver [21]).

Para ver la relación entre topos y lógica recomendamos [20], [21] y [41].

De manera no rigurosa podemos definir un <u>functor lógico</u> entre topos como aquel functor que preserva la estructura de topo, i.e., aquel functor que preserva límites finitos, colímites finitos, clasificador de subjetos y exponenciación (ver [5]).

<u>Proposición (2.14)</u> Un functor lógico L tiene adjunto derecho $L^{\bullet}$ si y solo si tiene adjunto izquierdo ${}^{\bullet}L$ (ver [5]).

<u>Proposición (2.15)</u> Cualquier topo tiene una (ε,μ)-Factorización (ver [5]).

Una <u>Latiz</u> es un conjunto parcialmente ordenado, (i.e., un conjunto donde la relación de orden entre los elementos es reflexiva, antisimétrica y transitiva) en el que cualquier par de elementos tienen una mínima cota superior (sup) y una máxima cota inferior (inf).

Una latiz se llama completa si cualquier subconjunto de esta tiene inf y sup.

El cero o elemento mínimo de una latiz es aquel elemento tal que cualquier otro elemento en la latiz es mayor o igual que este.

El uno o elemento máximo de una latiz es aquel elemento tal que cualquier otro elemento en la latiz es menor o igual que este.

Una latiz se llama acotada si tiene cero y uno.

Una latiz se llama distributiva, se satisface las siguientes condiciones:

2.m) $X \sqcap (Y \sqcup Z) = (X \sqcap Y) \sqcup (X \sqcap Z)$

2.n) $X \sqcup (Y \sqcap Z) = (X \sqcup Y) \sqcap (X \sqcup Z)$. Para toda X,Y,Z en la latiz. Aquí $X \sqcap Y$ significa el inf de X y Y, y $X \sqcup Y$ significa el sup de X y Y en la latiz.

En una latiz acotada,Y se dice que tiene complemento X si $X \sqcup Y = 1$ y $X \sqcap Y = 0$, donde 1 y 0 son el uno y el cero respectivamente en la latiz.

Una latiz se dice ser complementada si cada uno de sus elementos tiene un complemento en la latiz.

Una álgebra Booleana, es por definición, una latiz distributiva y complementada.

Un elemento X de un subconjunto A de una latiz L es llamado el mayor elemento de A si X es el sup de A. Análogamente, un elemento X de A es llamado el menor elemento de A si X es el inf de A. Notemos que un elemento Y de la latiz L puede ser el sup o el inf de A y no estar contenido en A, en cuyo caso no es el mayor elemento ni el menor elemento.

Si L es una latiz con cero, y a es un elemento de L, entonces b, un elemento de L, es llamado el seudo-complemento de a sí y sólo si b es el mayor elemento de L disjunto de a, i.e., b es el mayor elemento del subconjunto de L $A = \{X \in L / a \sqcap X = 0\}$. Si cualquier miembro de L tiene un seudo-complemento, entonces L es llamada una latiz seudo-complementada.

Cualquier latiz complementada es seudo-complementada, pero el converso no es cierto. El concepto de seudo-complemento puede ser generalizado al reemplazar el cero de la latiz por algún otro elemento b de la latiz, obteniendo el seudo-complemento de "a" relativo a "b", i.e., el seudo-complemento de "a" relativo a "b" es el mayor elemento C tal que a $\sqcap$ C es menor o igual a "b". Cuando el seudo-complemento de "a" relativo a "b" existe para cualquier a y b en la latiz L, decimos que es una latiz relativamente seudo-complementado. Notemos que la definición anterior para una latiz no requiere de cero en esta.

Un álgebra de Heyting es, por definición, una latiz relativamente seudo-complementada que tiene cero. Notemos que toda álgebra. Booleana es un álgebra de Heyting, pero el converso no es cierto. Para más detalles en [21].

De manera no rigurosa podemos interpretar cualquier categoría como un sistema deductivo donde los objetos de esta son interpretados como fórmulas (lógicas), los morfismos de ésta como demostraciones o deducciones y las operaciones sobre morfismos como reglas de inferencia.

Análogamente, de manera no rigurosa podemos interpretar cualquier categoría con productos binarios y objeto terminal como un cálculo para la conjunción, i.e., un sistema deductivo con un valor de verdad y con conjunción, donde el objeto terminal es interpretado como el valor de verdad (verdad) y el producto binario como la conjunción entre fórmulas (objetos).

Continuando de ésta manera no rigurosa, podemos interpretar cualquier categoría con productos binarios, objeto terminal y exponenciación como un <u>cálculo proposicional intuicionista positivo,</u> i.e., un cálculo para la conjunción con implicación, la cual es interpretada como una operación binaria adicional sobre los objetos, la exponenciación.

Finalmente, un <u>cálculo proposicional intuicionista</u> puede asociarse como interpretación, a cualquier categoría con productos binarios, coproductos binarios, objeto terminal, objeto inicial y exponenciación, i.e., es un cálculo proposicional intuicionista positivo con otro valor de verdad (falso) y con disyunción interpretados como el objeto inicial y el coproducto binario respectivamente. Si queremos obtener un <u>cálculo proposicional clásico</u> debemos exigir que además se cumpla el "principio del tercer excluido", el cual tiene una interpretación en una categoría a la cual se le puede asociar este cálculo, en términos de la exponenciación, el coproducto binario y el objeto terminal de un objeto (fórmula). Para más detalles en [41].

Es posible demostrar que toda lógica intuicionista tiene asociados un cálculo proposicional intuicionista y un álgebra de Heyting. De manera análoga, toa lógica clásica tiene asociados un cálculo proposicional clásico y un álgebra Booleana (ver [20], [21], y [41]).

Para los preliminares necesarios sobre teoría de sistemas (sistemas descomponibles, sistemas adjuntos, etc.) referimos al lector a los artículos [1], [2], [11], [12] y [13].

Finalmente, damos la definición de Cuasi-Categoría y dos resultados referentes a esta.

Una <u>Cuasi-Categoría</u> C es una quintupla C = (O. u, dom, cod, $\hat{o}$) donde

2.o) $\mathcal{O}$ y u son conglomerados,

2.p) dom y cod son funciones de u a $\mathcal{O}$; y

2.q) $\hat{o}$ es una función de

$$D = \{(f,g) \in u \times u / dom(f) = cod(g)\}$$

en u; tal que:

2.r) Si (fog) esta definida (i.e., si $(f,g) \in D$), entonces $dom(fog) = dom(g)$ y $cod(fog) = cod(f)$;

2.s) Si fog y hof estan definidas, entonces $ho(fog) = (hof)og$;

2.t) Para cada $A \in \mathcal{O}$, existe algún $e \in u$ tal que $dom(e) = A = cod(e)$ y

2.t.1) $foe=f$ cuando foe este definido, y

2.t.2) $eog=g$ cuando eog este definido (ver 4).

<u>Proposición (2.16)</u>. Cualquier categoría es una Cuasi-categoría (ver 4).

<u>Proposición (2.17)</u>. Existe una Cuasi-categoría denotada $CaT = (\tilde{G}, \tilde{F}, dom, cod, \hat{o})$ donde $\tilde{G}$ es un conglomerado de todas las categorías, $\tilde{F}$ es el conglomerado de todos los functores entre todas las categorías, dom y cod son funciones que asignan a cada functor su dominio y su codominio, respectivamente; y $\hat{o}$ es la composición de functores (ver 4).

A continuación presentamos el capítulo que muestra los principales resultados de este trabajo, para el que necesitaremos de los resultados preliminares establecidos en este capítulo.

II RESULTADOS

En este capítulo comenzamos definiendo la cuasi-categoría $\hat{C}$atpc, sobre la cual construimos la cuasi-categoría Adj de sistemas Adjuntos, para después presentar los principales resultados sobre Alcanzabilidad, observabilidad y Realización de sistemas adjuntos de este trabajo. Posteriormente se introduce un enfoque alternativo para alcanzabilidad y observavilidad y se conemtan las extensiones de los resultados anteriores para alcanzavilidad y observabilidad finitas. Finalmente presentamos dos meta-teoremas y hacemos un breve análisis de la teoría de sistemas adjuntos expuesta.

1. La cuasi-categoría Adj. de Sistemas Adjuntos.

Consideremos las cuasi-categoría(*) $\hat{C}$at de categorías pequeñas como objetos y functores entre ellas como morfismos; tomemos ahora la sub-cuasi-categoría $\hat{C}$atpc de categorías pequeñas que tiene productos y coproductos contables (que abreviaremos (P.C.C.)) y con (ε,μ)-Factorizaciones (3.3, [18]) donde los morfismos son functores fieles entre ellas. La cuasi-categoría Adj la definimos como sigue; sus objetos son todos los sistemas Adjuntos (2.1[1]) definibles sobre todas y cada una de las categorías $\hat{c}$atpc-objetos, y como morfismos tendremos las asignaciones siguientes: al sistema Adjunto M_1 $(X_1, Q_1, \delta_1, U_1, \tau_1, Y_1, \beta_1)$ definido sobre un $\hat{c}$atpc-objeto C_1, le asignamos el sistema adjunto $(X_2, \rho Q, P\delta_1, PU_1, P\tau_1, PY_1, P\beta_1)$ definido sobre un $\hat{c}$atpc-objeto C_2 donde $P:C_1 \rightarrow C_2$ es un $\hat{c}$atpc -morfismo que preserva (P.C.C.) y cumple ciertas condiciones que presentaremos después de introducir una notación adecuada para presentar los resultados de este capítulo.

(*) (NOTA: La definición de cuasi-categoría la dimos en el capítulo I)

Dados sistemas Adjuntos M_1 y $M_2 = (X_2, Q_2, \delta_2, V_2, \tau_2, Y_2, \beta_2)$ definidos sobre Ĉatpc-objetos C_1 y C_2 respectivamente, establecemos la siguiente notación:

(1.a) $X_1: C_1 \to C_1$ y $X_2: C_2 \to C_2$ son endofunctores (functores) llamados procesos Adjuntos y tienen functores adjuntos derechos $X_1^{\bullet}: C_1 \to C_1$ y $X_2^{\bullet}: C_2 \to C_2$ respectivamente;

(1.b) $\delta_1: X_1Q_1 \to Q_1$ y $\delta_2: X_2Q_2 \to Q_2$ son un C_1-morfismo y un C_2-morfismo respectivamente, llamados X_1-dinamorfismo y X_2-dinamorfismo (2.6 [12]), y con Q_1 y Q_2 objetos de estados;

(1.c) $\tau_1: V_1 \to Q_1$ y $\tau_2: V_2 \to Q_2$ son un C_1-morfismo y un C_2-morfismo respectivamente, con objetos de entradas V_1 y V_2;

(1.d) $\beta_1: Q_1 \quad Y_1$ y $\beta_2: Q_2 \quad Y_2$ son un C_1-morfismo y un C_2-morfismo respectivamente, con objetos de salidas Y_1 y Y_2.

Como los funtores X_i son adjuntos derechos de los functores X_i para $i = 1,2$; tenemos la biyección (1-I)

$$\frac{X_i\, A_i \xrightarrow{f_i} B_i}{A_i \xrightarrow{\bar{f}_i} X_i^{\bullet} B_i} \qquad \text{con } i = 1,2 \tag{1.A}$$

para A_1, B_1, C_1-objetos y A_2, B_2, C_2-objetos.

También tenemos el siguiente principio de Transposición (2.3 [2])

$$\frac{X_e\, A_i' \xrightarrow{X_i f_i} X_i\, A_i \xrightarrow{g_i} B_i \xrightarrow{h_i} B_i'}{A_i' \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{\bar{g}_i} X_i^{\bullet}\, B_i \xrightarrow{X_i^{\bullet} h_i} X_i^{\bullet}\, B_i'} \quad \text{con } i = 1,2 \tag{1.B}$$

para $A_1', A_1, B_1, B_1', C_1$ -objetos y $A_2', A_2, B_2, B_2', C_2$-objetos.

El morfismo de alcanzabilidad (reachability) de el sistema M_1 es el único mapeo (map) $r_1 : \coprod_{j \geq 0} X_1^j V_1 \to Q_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta (2.2.[1])

$$\begin{tikzcd}
 & X_1^{n+1}U_1 \arrow[dl, "X_1 in_n"'] \arrow[dr, "in_{n+1}"] & & \\
X_1\left(\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1\right) \arrow[d, "X_1 r_1"] & & \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \arrow[d, "r_1"'] & U_1 \arrow[l, "in_o"'] \arrow[dl, "\tau_1"] \\
X_1 Q_1 \arrow[rr, "\delta_1"] & & Q_1 &
\end{tikzcd} \qquad (1.C)$$

El sistema M_1 es ε_1-Alcanzable (reachable) si $r \in \varepsilon_1$ i.e. r es un epimorfismo de la Categoría C_1 con (ε_1, μ_1)-Factorización. El morfismo de observabilidad del sistema M_1 es el único mapeo $\sigma_1 : Q_1 \to \prod_{j \geq 0} X_1{}^j Y_1$ tal que el diagrama conmuta (2.3.[1]).

$$\begin{tikzcd}
 & X_1^{\cdot\, n+1} Y_1 & & \\
X_1^{\cdot}\left(\prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot\, j} Y_1\right) \arrow[ur, "X_1^{\cdot}\pi_n"] & & \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot\, j} Y_1 \arrow[ul, "\pi_{n+1}"'] \arrow[r, "\pi_o"] & Y_1 \\
X_1^{\cdot} Q_1 \arrow[u, "X_1^{\cdot}\sigma_1"] & & Q_1 \arrow[ll, "\delta_1^{\bullet}"'] \arrow[u, "\sigma_1"] \arrow[ur, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd} \qquad (1.D)$$

donde $\delta_1^{\bullet}$ corresponde a δ_1 bajo la adjuntez. M_1 es μ_1-observable si $\sigma_1 \in \mu_1$.

Ahora establecemos las condiciones faltantes para que el $\hat{c}$atpc -morfismo $P\colon C_1 \to C_2$ forme parte de un Adj-morfismo del sistema Adjunto M_1 definido sobre C_1 al sistema Adjunto $M_2 = (X_2, Q_2, \delta_2, V_2, \tau_2, Y_2, \beta_2)$ definido sobre C_2. Como habíamos establecido antes P debe preservar (P.C.C.), pero además debe cumplir con:

(1.e) $$P X_1 \cong X_2 P$$

i.e., existe un isomorfismo natural

$$\theta\colon P X_1 \to X_2' P$$

(1.f) $PU_1 = U_2$, $PY_1 = Y_2$, $PQ_1 = Q_2$, $P\delta_1 = \delta_2$, $P\tau_1 = \tau_2$ y $P\beta_1 = \beta_2$.

De aquí en adelante haremos el siguiente abuso de notación, a un Adj-morfismo lo denotaremos por el $\hat{c}$atpc-morfismo P y escribiremos $P\colon M_1 \to M_2$ donde (1.e) será interpretado como :

(1.e') $PU_1 \cong U_2'$, $PY_1 \cong Y_2'$, $PQ_1 \cong Q_2'$ son C_2-objetos isomorfos y $P\delta_1(a) \cong \delta_2'(a)$, $P\tau_1(a) \cong \tau_2'(a)$, $P\beta_1(a) \cong \beta_2'(a)$ para todo "a" que sea un C_2-objeto, son C_2-objetos isomorfos, i.e., $M_2' = (X_2', Q_2', \delta_2', V_2', \tau_2', Y_2', \beta_2')$ será "isomorfo" a M_2 o igual a él de manera única salvo isomorfismo (lo cual abreviaremos (u.s.i.)).

Veamos que la cuasi-categoría Adj esté bien definida.

Tenemos

$$\begin{array}{l}
PX_1A_1 \xrightarrow{Pf_1} PB_1 \\
\hline
X_2PA_1 \xrightarrow{Pf_1} PB_1 \\
\hline
X_2A_2 \xrightarrow{f_2} B_2 \\
\hline
A_2 \xrightarrow{f_2} X_2B_2
\end{array}$$

(u.s.i.) con $Pf_1(a) \cong f_2(a)$ para todo "a" que sea un C_2-objeto y $PA_1 \cong A_2$, $PB_1 \cong B_2$.

Por tanto

$$\frac{PX_1A_1 \xrightarrow{Pf_1} PB_1}{A_2 \xrightarrow{f_2^{\bullet}} X_2^{\bullet} B_2}$$

Además

$$\begin{array}{cccc}
PX_1A_1' \xrightarrow{PX_1f_1} & PX_1A_1 \xrightarrow{Pg_1} & PB_1 \xrightarrow{Ph_1} & PB_1' \\
\hline
X_2PA_1' \xrightarrow{X_2Pf_1} & X_2PA_1 \xrightarrow{Pg_1} & PB_1 \xrightarrow{ph_1} & PB_1' \\
\hline
PA_1' \xrightarrow{Pf_1} & PA_1 \xrightarrow{(Pg_1)^{\bullet}} & X_2^{\bullet}PB_1 \xrightarrow{X_2^{\bullet}Ph_1} & X_2^{\bullet}PB_1' \\
\hline
A_2' \xrightarrow{f_2} & A_2 \xrightarrow{g_2^{\bullet}} & X_2^{\bullet}B_2 \xrightarrow{X_2^{\bullet}h_2} & X_2^{\bullet}B_2'
\end{array}$$

(u.s.i.)

donde $PA_1' \cong A_2'$, $PB_1' \cong B_2'$, $Pg_1(a) \cong g_2(a)$, $Ph_1(a) \cong h_2(a)$ y $Pf_1'(a) \cong f_2'(a)$ para todo "a" que sea un C_2-objeto.

Entonces:

$$\frac{PX_1A_1' \xrightarrow{PX_1f_1} PX_1A_1 \xrightarrow{Pg_1} PB_1 \xrightarrow{Ph_1} PB_1'}{A_2' \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{g_2^{\bullet}} X_2^{\bullet}B_2 \xrightarrow{X_2^{\bullet}h_2} X_2^{\bullet}B_2'} .$$

A continuación presentamos algunos lemas necesarios para probar los resultados principales.

<u>Lema (1.1)</u> Si $P:M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que preserva (ε,μ)-Factorizaciones, entonces (u.s.i.): si M_1 es $\bar{\varepsilon}_1$-Alcanzable $\Rightarrow$ M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable, donde (ε_1,μ_1) es una (ε,μ)-Factorización de C_1 y $(P(\varepsilon_1),P(\mu_1))$ es una (ε_2,μ_2)-Factorización de C_2, con $\bar{\varepsilon}_1$ es la clase de morfismos más pequeña que contiene a ε_1 ., todos los isomorfismos y que es cerrada bajo composición de morfismos. Análogamente para $\overline{P(\varepsilon_1)}$, $\bar{\mu}_1$ y $\overline{P(\mu_1)}$.

<u>Demostración</u>. Sea $r_1: \coprod_{j \geq 0} X_1^j V_1 \to Q_1$ y $r_1 \in \varepsilon_1$.

entonces el diagrama (I.E) conmuta porque P preserva (P.C.C.) y I(1.14)

$$\begin{tikzcd}
& PX_1^{n+1}U_1 \arrow[dl, "PX_1 in_n"'] \arrow[dr, "Pin_{n+1}"] & & \\
PX_1(\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1) \arrow[d, "PX_1 r_1"] & & P(\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1) \arrow[d, "Pr_1"'] & PU_1 \arrow[l, "Pin_o"'] \arrow[dl, "P\tau_1"] \\
PX_1Q_1 \arrow[rr, "P\delta_1"] & & PQ_1 &
\end{tikzcd} \qquad (I.E)$$

como $PX_1^n \cong X_2PX_1^{n-1} \cong \ldots . \cong X_2^nP \Rightarrow PX_1^n \cong X_2^nP$

Tenemos

$Pr_1(a) \cong r_2(a)$ para todo "a" un C_2-objeto.

(u.s.i.) donde $r_2\colon \coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2 \quad Q_2$.

$Pin_n = in'_n$

$$\begin{tikzcd}
& X_2^{n+1}U_2 \arrow[dl, "X_2 in'_n"'] \arrow[dr, "in'_{n+1}"] & & \\
X_2(\coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2) \arrow[d, "X_2 r_2"] & & \coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2 \arrow[d, "r_2"'] & U_2 \arrow[l, "in'_o"'] \arrow[dl, "\tau_2"] \\
X_2Q_2 \arrow[rr, "\delta_2"] & & Q_2 &
\end{tikzcd} \qquad (1.F)$$

Entonces el diagrama (1.F) conmuta y como P Preserva (ε,μ)-Factorizaciones, $\gamma_2 \in \overline{P(\varepsilon_1)}$.

De aquí en adelante cuando dos C-morfismos f y g cumplan con $f(a) \cong g(a)$ para todo "a" un C-objeto, lo denotaremos por $f \cong g$.

<u>Lema (1.2)</u> Si $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que preserva (ε,μ)-Factorizaciones y tal que $PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot}P$, entonces (u.s.i.): Si M_1 es μ_1-observable $\Rightarrow$ M_2 es $P(\mu_2)$-observable.

<u>Demostracción</u>. Sea $\sigma_1: Q_1 \to \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j}Y_1$ y $\sigma_1 \in \mu_1$, entonces el diagrama (1.G) conmuta porque P preserva (P.C.C.) y I(1.14)

$$\begin{tikzcd}
 & PX_1^{\cdot n+1}Y_1 & & \\
PX_1^{\cdot}(\prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j}Y_1) \arrow[ur, "PX_1^{\cdot}\pi_n"] & & P(\prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j}Y_1) \arrow[ul, "P\pi_{n+1}"'] \arrow[r, "P\pi_0"] & PY_1 \\
PX_1^{\cdot}Q_1 \arrow[u, "PX_1^{\cdot}\sigma_1"'] \arrow[rr, "P\delta_1^{\cdot}"] & & PQ_1 \arrow[u, "P\sigma_1"] \arrow[ur, "P\beta_1"'] &
\end{tikzcd} \qquad (1.G)$$

como $PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot}P \Rightarrow PX_1^{\cdot n} \cong X_2^{\cdot}PX_1^{\cdot n-1} \cong \ldots\ldots \cong X_2^{\cdot n}P \Rightarrow PX_1^{\cdot n} \cong X_2^{\cdot n}$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & X_2^{\cdot n+1}Y_2 & & \\
X_2^{\cdot}(\prod_{j\geq 0} X_2^{\cdot j}Y_2) \arrow[ur, "X_2^{\cdot}\pi'_n"] & & \prod_{j\geq 0} X_2^{\cdot j}Y_2 \arrow[ul, "\pi'_{n+1}"'] \arrow[r, "\pi'_0"] & Y_2 \\
X_2^{\cdot}Q_2 \arrow[u, "X_2^{\cdot}\sigma_2"'] & & Q_2 \arrow[ll, "\delta_2^{\cdot}"'] \arrow[u, "\sigma_2"] \arrow[ur, "\beta_2"'] &
\end{tikzcd}$$

(u.s.i.) (1.H)

donde

$\delta_1^{\cdot} \cong X_1^{\cdot}\delta_1' \Rightarrow$

$PX_1^{\cdot}\delta_1 \cong X_2^{\cdot}P\delta_1 \cong$

$\cong X_2^{\cdot}\delta_2 \cong \delta_2^{\cdot} \Rightarrow$

$P\delta_1^{\cdot} \cong \delta_2^{\cdot}$ y

$$P\sigma_1 \cong \sigma_2 : Q_2 \to \prod_{j \geq 0} X_2^{\cdot j} Y_2$$

$$P\pi_n = \pi'_n$$

Entonces el diagrama (1.H) conmuta

y como P Preserva (ε,μ)-Factorizaciones, $\sigma_2 \in \overline{P(\mu_1)}$.

Lema (1.3) Si $P\colon M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que refleja (P.C.C.) (además se le puede pedir que refleje (ε,μ)-Factorizaciones, pero para este lema no es necesario). Entonces (u.s.i.):

Si M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Rightarrow M_1$ es ε_1-Alcanzable.

Demostración. Sea $r_2\colon \coprod_{j>0} X_2^j U_2 \to Q_2$ y $r_2 \in \overline{P(\varepsilon_1)}$, entonces si el diagrama (1.F) conmuta, el diagrama (1.C) conmuta porque P refleja triángulos conmutativos I(1.15); como $PX_1^n \cong X_2^n P$ y $Pin_n = in'_n$, entonces como P refleja epimorfismos, monomorfismos, bimorfismos y (P.C.C.) por I(1.15), entonces $r_1 \in \varepsilon_1$.

Lema (1.4) Si $P\colon M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que refleja (P.C.C.) (además se le puede pedir que refleje (ε,μ)-Factorizaciones, lo cual no es necesario) y tal que $PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot} P$, entonces (u.s.i.):

Si M_2 es $\overline{P(\mu_1)}$-observable $\Rightarrow$ M_1 es μ_1-observable.

Demostración. Sea $\sigma_2\colon Q_2 \quad \prod_{j>0} X_2^{\cdot j} Y_2$ y $\sigma_2 \in \overline{P(\mu_1)}$, entonces si el diagrama (1.H) conmuta, el diagrama (1.D) conmuta porque P refleja triángulos conmutativos I(1.15); como $PX_1^{\cdot n} \cong X_2^{\cdot n} P$, $P\pi_n = \pi'_n$ y $P\delta_1^{\cdot} \cong \delta_2^{\cdot}$, entonces como P refleja epimorfismos, monomorfismos, bimorfismos y (P.C.C.) por I(1.15), entonces $\sigma_1 \in \mu_1$.

2. Principales resultados sobre Alcanzabilidad y observabilidad en sistemas Adjuntos.

A continuación presentamos los principales resultados.

Teorema (2.1) Sean $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que además es equivalencia y $X_1: C_1 \to C_1$, $X_2: C_2 \to C_2$ equivalencias. Entonces tenemos que (u.s.i.)

(2.1.1) M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Leftrightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable;

(2.1.2) M_2 es $\overline{P(\mu_1)}$-observable $\Leftrightarrow$ M_1 es μ_1-observable;

(2.1.3) M_2 es $(P(\varepsilon_1), P(\mu_1))$-canónico $\Leftrightarrow$ M_1 es (ε_1,μ_1)-canónico.

Demostracción. Si P es equivalencia entonces (H1) $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)}$ es una (ε_2,μ_2)-Factorización para C_2;

(H2) $(P'(\overline{P(\varepsilon_1)}), P'(\overline{P(\mu_1)})$ es la (ε_1,μ_1)-Factorización de C_1 donde $P': C_2 \to C_1$ ($P': M_2 \to M_1$) es un functor de regreso. Para la demostración ver (2.2, 2.3, [3]). Ahora, por ser X_1 y X_2 equivalencias tienen adjunto derecho e izquierdo y estos coinciden I(1.39), por lo que $PX_1 \cong X_2P \Rightarrow X_2^{\cdot} PX_1 \cong P$. Si denotamos ${}^{\cdot}X_1$ y ${}^{\cdot}X_2$ a los adjuntos izquierdos, como ${}^{\cdot}X_1 = X_1^{\cdot}$ y ${}^{\cdot}X_2 = X_2^{\cdot}$ tenemos que $X_2^{\cdot} PX_1 \cong P \Rightarrow PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot} P$ por I(1.17) y usando I(1.38) y los lemas (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) tenemos que (2.1.1) y (2.1.2) se cumplen; luego (1.2.3) se cumple .

Corolario (2.2) Si $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo es equivalencia, entonces tenemos que (u.s.i.):

Si M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Rightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable.

Demostración. Se sigue inmediatamente del inciso (2.1.1) del teorema (2.1).

Observación: En la categoría contenida en Adj, que llamaremos Decomp, cuyos objetos son sistemas Adjuntos con functor X la identidad, i.e., los sistemas descomponibles (decomposable systems) [18] y hom $_{Adj}$ (M_1, M_2) = hom$_{Decomp}$ (M_1, M_2), la relación denotada por $M_1 \quad M_2$ y definida si existe una equivalencia P: $M_1 \quad M_2$ induce una partición en Decomp. El teorema (2.1) implica que los sistemas descomponibles, alcanzables, observables y canónicos están en una misma clase de equivalencia Más aún el teorema (2.1) caracteríza la clase de los sistemas descomponibles, alcanzables u observables. Supongamos que un sistema descomponible M_1 está en esta clase pero no es alcanzable ni observable; entonces no existe ninguna equivalencia de él con ningún elemento de esta clase (por el teorema (2.1)), lo cual es una contradicción; luego todo elemento en esta clase es al menos alcanzable u observable.

A continuación damos un Teorema más general.

<u>Teorema (2.3)</u> Sean $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que preserva (ε,μ)-Factorizaciones, refleja (P.C.C.), y X_1, X_2 equivalencias; entonces tenemos que (u.s.i.):

(2.3.1) M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Leftrightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable;

(2.3.2) M_2 es $\overline{P(\mu_1)}$-observable $\Leftrightarrow$ M_1 es μ_1-observable;

(2.3.3) M_2 es $(P(\varepsilon_1), P(\mu_1))$-canónico $\Leftrightarrow$ M_1 es (ε_1,μ_1)-canónico.

<u>Demostración.</u> Como X_1 y X_2 son equivalencias, entonces $PX_1 \cong X_2P \Rightarrow P\dot{X}_1 \cong \dot{X}_2P$ y por otro lado P preserva (ε,μ)-Fact. y refleja triángulos conmutativos y (P.C.C.) entonces (2.3.1) y (2.3.2) siguen de los lemas (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4); si se cumplen (2.3.1) y (2.3.2) entonces se debe cumplir (2.3.3)

Claramente el teorema (2.1) es un corolario (interesante) del Teorema (2.3), donde no es necesario pedir que se preserven (ε,μ)-Factorizaciones ni que se reflejen productos y coproductos contables porque toda equivalencia lo hace.

Ahora mostraremos como los teoremas anteriores extienden el resultado de Hegner en [3] para sistemas descomponibles a sistemas Adjuntos. Mostraremos además que del enfoque anterior se recupera parcialmente el resultado principal sobre dualidad de sistemas Adjuntos establecido por Nolte y Naude en [1].

Siguiendo un procedimiento completamente análogo al de [3] definamos Sys. Adj. (C). La categoría de sistemas Adjuntos en C_1 ĉatpc como objetos, y dados M_1 y M_2 sistemas Adjuntos en C_1, un morfismo de M_1 a M_2 es una tetrada ordenada (a,b,c,d) de C-morfismos tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "a"'] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\ U_2 \arrow[r, "\tau_2"'] & Q_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1Q_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "c"'] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\ X_2Q_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & Q_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "b"'] & Y_1 \arrow[d, "d"] \\ Q_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Y_2 \end{tikzcd} \qquad (1.I)$$

donde $X_1:C_1 \to C_1$ y $X_2:C_1 \to C_1$ son functores Los sistemas serán isomorfos si a, b, c y d son isomorfismos.

Sea C_1' otra categoría en ĉatpc y sea $P: C_1 \to C_1'$ un functor fiel que preserva productos y coproductos contables. Entonces la conmutatividad de los diagramas (1.I) implica la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} P\,U_1 \arrow[r, "P\tau_1"] \arrow[d, "Pa"'] & PQ_1 \arrow[d, "Pb"] \\ P\,U_2 \arrow[r, "P\tau_2"'] & PQ_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} PX_1Q_1 \arrow[r, "p\delta_1"] \arrow[d, "Pc"'] & PQ_1 \arrow[d, "Pb"] \\ PX_2Q_2 \arrow[r, "P\delta_2"'] & PQ_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} PQ_1 \arrow[r, "P\beta_1"] \arrow[d, "Pb"'] & PY_1 \arrow[d, "Pd"] \\ PQ_2 \arrow[r, "P\beta_2"'] & PY_2 \end{tikzcd} \qquad (i.J)$$

entonces notemos que P induce un functor, denotado P: Sys Adj $(C_1) \to$ SysAdj(C_1'), el cual hace que $(X_1, Q_1, \delta_1, U_1, \tau_1, Y_1, B_1)$ PM_1 $(PX_1, PQ_1, P\delta_1, PU_1, P\tau_1, PY_1, PB_1)$ en los objetos y $(a,b,c,d) \to (Pa, Pb, Pc, Pd)$ en los morfismos.

Sea $R: C_1 \to C_1'$ otro functor fiel que preserva (P.C.C.) y $T: P \to R$ una transformación natural. Definamos $\hat{T}$: obj $(\mathrm{sysAdj}(C_1)) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{sysAdj}(C_1'))$ por $(X_1, Q_1, \delta_1, U_1, \tau_1, Y_1, B_1) \mapsto (TU_1, TQ_1, TX_1Q_1, TY_1)$. Entonces tenemos el siguiente resultado:

<u>Proposición (2.4)</u> Sean P y R functores que preservan (P.C.C.) y sea $T: P \to R$ una transformación natural. Entonces

(2.4.1) T es una transformación natural de $\hat{P}$ a $\hat{R}$;

(2.4.2) Si T es isomorfismos natural, también lo es $\hat{T}$;

(2.4.3) Si P es una equivalencia $\hat{P}$ existe y es es también una equivalencia.

Demostración (2.4.1) Como T es una transformación natural de P a R, entonces los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
PU_1 & \xrightarrow{TU_1} & RU_1 & & PQ_1 & \xrightarrow{TQ_1} & RQ_1 & & PY_1 & \xrightarrow{TY_1} & RY_1 & & PX_1Q_1 & \xrightarrow{TX_1Q_1} & RX_1Q_1 \\
Pa\downarrow & & \downarrow Ra & & Pb\downarrow & & \downarrow Rb & & Pd\downarrow & & \downarrow Rd & & Pc\downarrow & & \downarrow Rc \\
PU_2 & \xrightarrow[TU_2]{} & RU_2 & & PQ_2 & \xrightarrow[TQ_2]{} & RQ_2 & & PY_2 & \xrightarrow[TY_2]{} & RY_2 & & PX_2Q_2 & \xrightarrow[TX_2Q_2]{} & RX_2Q_2
\end{array} \quad (1.K)$$

Por mostrar que

$$\begin{array}{ccc}
PM_1 & \xrightarrow{TM_1} & RM_1 \\
(Pa,Pb,Pc,Pd)\downarrow & & \downarrow(Ra, Rb, Rc, Rd) \\
PM_2 & \xrightarrow[TM_2]{} & RM_2
\end{array} \qquad \text{conmuta}$$

Pero $\hat{T}M_2(Pa, Pb, Pc, Pd) \equiv (TU_2, TQ_2, TX_2Q_2, TY_2)(Pa, Pb, Pc, Pd) =$

$(TU_2Pa, TQ_2Pb, TX_2Q_2PC, TY_2Pd) = (RaTU_1, RbTQ_1, RCTX_1Q_1, RdTY_1) =$

$(Ra, Rb, Rc, Rd)\ (TU_1, TQ_1, TX_1Q_1, TY_1) = (Ra, Rb, Rc, Rd)\ \hat{T}M_1$ por la conmutatividad de los diagramas (1.K).

(2.4.2) Es inmediato de (2.4.1) y la definición de isomorfismos natural.

(2.4.3) Es inmediato de que las equivalencias preservan y reflejan (Triángulos conmutativos) de I(1.23) y del inciso (2.4.1)

Como consecuencia de este resultado tenemos la siguiente extensión al resultado de Hegner en [3].

<u>Proposición (2.5)</u> Sean $P: C_1 \to C_1'$, $X_1 : C_1 \to C_1$ y $X_3 : C_1' \to C_1'$, equivalencias tales que $PX_1 \cong X_3 P$, y sea M_1 un sistema Adjunto en C_1. Entonces tenemos que (u.s.i.):

(2.5.1) $\widehat{PM_1}$ es un sistema Adjunto;

(2.5.2) $\widehat{PM_1}$ es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Longleftrightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable;

(2.5.3) $\widehat{PM_1}$ es $\overline{P(\mu_1)}$-observable $\Longleftrightarrow$ M_1 es μ_1-observable;

(2.5.4) $\widehat{PM_1}$ es $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-canónico $\Longleftrightarrow$ M_1 es (ε_1, μ_1)-canónico.

<u>Demostración</u> (2.5.1) Como P es equivalencia, Preserva y refleja límites y colímites. Por tanto $\widehat{PM_1} \cong (X_3P,\ pQ_1,\ P\delta_1,\ PU_1,\ P\tau_1,\ PY_1,\ PB_1)$ es un sistema Adjunto en C_1' (u.s.i.) porque

$$\frac{PX_1A_1 \xrightarrow{Pf_1} PB_1}{\dfrac{\to X_3PA_1 \xrightarrow{Pf_1} PB_1}{\to PA_1 \xrightarrow{(Pf_1)^{\bullet}} X_3^{\bullet}}} \qquad \text{y} \qquad \frac{PX_1A_1' \xrightarrow{PX_1f_1} PX_1A_1 \xrightarrow{Pg_1} PB_1 \xrightarrow{Ph_1} PB_1'}{\dfrac{\to X_3PA' \xrightarrow{X_3Pf_1} X_3PA_1 \xrightarrow{Pg_1} PB_1 \xrightarrow{Ph_1} PB_1'}{\to PA_1' \xrightarrow{Pf_1} PA_1 \xrightarrow{(Pg_1)^{\bullet}} X_3^{\bullet}PB_1 \xrightarrow{X_3^{\bullet}Ph_1} X_3^{\bullet}PB_1'}} \quad \text{(u.s.i)}$$

Los otros incisos se siguen de la proposición (2.4) y del teorema (2.1) con una ligera modificación en este último; en lugar de X_2 tomamos ahora X_3, notando que $M_2 \cong (X_2,\ PQ_1,\ P\delta_1,\ PU_1,\ P\tau_1,\ PY_1,\ PB_1)$ es modificado a

$M_2=(PX_1,\ PQ_1,\ P\delta_1,\ PU_1,\ P\tau_1,\ PY_1,\ P\beta_1) \equiv \hat{P}\ M_1 \cong (X_3P,\ PQ_1,\ P\delta_1,\ PU_1,\ P\tau_1, PY,\ P\beta_1)$.

De manera análoga se puede establecer otra extensión basada en la proposición (2.4) y el toerema (2.3).

<u>Proposición (2.6)</u> Sean $P\colon C_1 \to C'$ un funtor que preserva (ε,μ)-Factorizaciones y refleja (P.C.C.) y $X_1\colon C_1 \to C_1$, $X_3\colon C_1' \to C_1'$ equivalencias tales que $PX_1 \cong X_3P$, y sea M_1 un sistema Adjunto en C_1. Entonces tenemos que (u.s.i.)

(2.6.1) $\hat{P}M_1$ es un sistema Adjunto;

(2.5.2) $\hat{P}M_1$ es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Leftrightarrow M_1$ es ε_1-Alcanzable;

(2.6.3) $\hat{P}M_1$ es $\overline{P(\mu_1)}$-observable $\Leftrightarrow M_1$ es μ_1-observable;

(2.6.4) $\hat{P}M_1$ es $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-canónico $\Leftrightarrow M_1$ es (ε_1,μ_1)-canónico.

Mostraremos ahora como del enfoque anterior se recupera parcialmente el Teorema (3.20) sobre dualidad de sistemas Adjuntos establecido por Nolte y Naude en [1].

Sea $M_1 = (X_1,\ Q_1,\delta_1,\ U_1,\tau_1,\ Y_1,\beta_1)$ un sistema Adjunto en C_1 y $M_2 = (X_2,\ Q_2,\delta_2,\ U_2,\tau_2,\ Y_2,\beta_2)$ un sistema Adjunto en C_2^{op}.

Debido a que $P'\colon C_1 \to C_2^{op}$ es un functor contravariante debemos mordificar (1.e) y (1.f) como sigue:

(1.e") $$P'X_1 \cong X_2^{\bullet}P'$$

i.e., existe un isomorfismo natural

$$\theta'\colon P'X_1 \to X_2^{\bullet}P'$$

(1.f") $P'U_1 \cong U_2$, $P'Y_1 \cong Y_2$, $P'Q_1 \cong Q_2$ son C_2^{op} -objetos isomorfos, y

$P'\tau_1 \cong \tau_2$, $P'\beta_1 \cong \beta_2$, $P'\delta_1^{\bullet} \cong P'\delta_1^{\bullet} \circ \gamma Q_1 = \delta_2$ y $P'\delta_1 \cong \theta' Q_1 o P'\delta_1 = \delta_2^{\bullet}$, donde pedimos que P' sea una equivalencia, entonces existe un isomorfismo natural $\gamma : X_2 P' \to P'X_1$ (ver Lema 3.6. en [1]), i.e., C_1 y C_2^{op} son categorías dualmente equivalentes.

Por otro lado, es claro que si $A_1 \xrightarrow{f_1} B_1$ entonces :

$$\frac{\dot{X}_2 A_2 \xrightarrow{f_2^{\bullet}} B_2}{A_2 \xrightarrow{f_2} X_2 B_2} \qquad y \qquad \frac{\dot{X}_2 A_2' \xrightarrow{\dot{X}_2 f_2'} \dot{X}_2 A_2 \xrightarrow{g_2^{\bullet}} B_2 \xrightarrow{h_2} B_2'}{A_2' \xrightarrow{f_2'} A_2 \xrightarrow{g_2} X_2 B_2 \xrightarrow{X_2 h_2} X_2 B'_2} \qquad \text{(u.s.i.)}$$

con $P'A_1 \cong A_2$, $P'A_1' \cong A_2$, $P'B_1 \cong B_2$, $P'B_1' \cong B_2'$ y $P'f_1 \cong f_2$, $P'f_1' \cong f_2'$, $P'g_1 \cong g_2$ y $P'h_1 \cong h_2$.

Podemos enunciar ahora el siguiente teorema.

<u>Teorema (2.7)</u> Dado un functor $P':M_1 \to M_2$ cumpliendo con las condiciones anteriores, tenemos que (u.s.i.):

(2.7.1) M_2 es $\overline{P'(\mu_1)}$-observable $\Longleftrightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable;

(2.7.2) M_2 es $\overline{P'(\varepsilon_1)}$-alcanzable $\Longleftrightarrow$ M_1 es μ_1-observable;

(2.7.3) M_2 es $(\overline{P'(\varepsilon_1)}, \overline{P'(\mu_1)})$-canónico $\Longleftrightarrow$ M_1 es (ε_1,μ_1)-canónico.

<u>Demostracción.</u> Dado que $P':M_1 \to M_2$ es equivalencia, preserva y refleja (ε,μ)-Fact., (P.C.C.) y triángulos conmutativos (en general límites y colímites). Entonces, si $r_1 \varepsilon\ \varepsilon_1$ el diagrama (1.C) conmuta; como $P'X_1^n \cong \dot{X}_2^{n} P'$ tenemos que

notemos que $(\overline{P'(\mu_1)}, \overline{P'\varepsilon_1})$ es una (ε,μ)-Factorización de C_2^{oP}, si (ε_1, μ_1) lo es de C_1(u.s.i.) por (2.6,[11] y (2,3, [3]).

$$\begin{tikzcd}
& X_2^{\bullet\, n+1}U_2 & & \\
X_2^{\bullet}\left(\prod_{j\geq 0} X_2^{\bullet j}U_2\right) \arrow[ur, "X_2^{\bullet}\pi'_n"] & & \prod_{j\geq 0} X_2^{\bullet}U_2 \arrow[ul, "\pi'_{n+1}"'] \arrow[r, "\pi_o"] & U_2 \\
X_2^{\bullet}Q_2 \arrow[u, "X_2^{\bullet}r'_2"] & & Q_2 \arrow[ll, "\delta_2^{\bullet}"] \arrow[u, "r'_2"] \arrow[ur, "\delta_2"'] &
\end{tikzcd}$$

(u.s.i.)

(1.L)

donde $r'_2 \cong P'r_1 : Q_2 \to \prod_{j\geq 0} X_2^{\bullet j}U_2$

$P'in_n = \pi'_n$.

Entonces el diagrama (1.L) conmuta y $r'_2 \in \overline{P'(\mu_1)}$. Por otro lado como $P'X_1^n \cong X_2^{\bullet n} P'$ y suponiendo que $r'_2 \in P'(\mu_1)$, el diagrama (1.L) conmuta, entonces el diagrama (1.c) conmuta y $r_1 \in \varepsilon_1$, con lo que esta demostrado(2.7.1). De manera análoga usando $P'X_1^{\bullet} \cong X_2P'$ se demuestra (2.7.1) y si se cumplen (2.7.1) y (2.7.2) se cumple (2.7.3).

Notemos que el teorema (2.7) es un caso menos general que el Teorema (3.20) en [1]. Tambien es interesante observar que si partimos de las suposiciones hechas en [1] y la teoria expuesta aquí, es posible extender el trabajo presentado en [1] al caso de equivalencias no duales, pero no a functores arbitrarios.

3. Resultados en teoría de Realizaciones sobre Sistemas Adjuntos .

En esta sección presentamos una extensión de algunos teoremas de Realización. Sean M_1 y M_2 sistemas Adjuntos, i.e., Adj-objetos y $P:M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo entre ellos. La respuesta total del sistema M_1 es el mapeo (C_1-morfismo)

$$H_1 \equiv \sigma_1 r_1 : \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \to \prod_{j\geq 0} X_1^{\bullet j} Y_1 \quad .$$

La matriz de Hankel de M_1 es la bisecuencia ${}_1H_m^n$: $X_1^n\, U_1 \to X_1^{\cdot m}\, Y_1$ de C_1-morfismos definida por el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \arrow[r, "\sigma_1 r_1"] & \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j}\, Y_1 \arrow[d, "\pi_n"] \\ X_1^m\, U_1 \arrow[u, "in_m"] \arrow[r, "{}_1H_m^n"'] & X_1^{\cdot n}\, Y_1 \end{tikzcd} \quad , \text{ i.e., } \pi_n H_1 in_m = {}_1H_m^n$$

Definamos ahora $r^1_{(m)} \equiv r_1\, in_m$: $X_1^m\, U_1 \to Q_1$ y $\sigma^1_{(n)} \equiv Pr_n \sigma_1$: $Q_1 \to X_1^{\cdot n}\, Y_1$, notemos que

$$r^1_{(o)} = \tau_1 \;,\; \sigma^1_{(o)} = \beta_1 \;\; y \;\; r^1_{(m+1)}: X_1 X_1^m\, U_1 \xrightarrow{X_1 r^1_{(m)}} X_1 Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_1,$$

$$\sigma^1_{(n+1)}: Q_1 \xrightarrow{\delta_1^{\cdot}} X_1^{\cdot} Q_1 \xrightarrow{X_1^{\cdot}\sigma^1_{(n)}} X_1^{\cdot} X_1^{\cdot n}\, Y_1 .$$ Además

$${}_1H_m^n = \sigma^1_{(n)} r^1_{(m)} = X_1^{\cdot}\sigma^1_{(n-1)} \circ \delta_1^{\cdot} \circ \delta_1 \circ X_1\, r^1_{(m-1)} \qquad \text{(ver [12]).}$$

<u>Proposición (3.1)</u> Sea P: $M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que $PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot}P$ y Preserva (ε,μ)-Factorizaciones. Entonces (u.s.i.):

(3.1.1.) si H_1 es la respuesta total de M_1 $\Rightarrow$ PH_1 es la respuesta total de M_2;

(3.1.2) si ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_1 $\Rightarrow$ $P_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_2.

Demostración (3.1.1) Es inmediato de la definición de Adj-morfismo y de que $PX_1 \cong X_2\, P \Rightarrow PX_1^{\cdot j} \cong X_2^{\cdot j}\, P$, y Lemas (1.1) y (1.2), (3.1.2) Se sigue de (3.1.1) y de que $P(\Pi_n) = \Pi_n'$ y $P(in_n) = in_n'$.

<u>Proposición (3.2)</u> Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que refleja (P.C.C.), (ε,μ)-Factorizaciones y tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (u.s.i.):

(3.2.) H_1 es la respuesta total de $M_1 \iff PH_1$ es la respuesta total de M_2;

(3.2.2) ${}_1H_m^n$ es la matriz de Henkel de $M_1 \iff P_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_2.

<u>Demostración</u>. La suficiencia es inmediata de la proposición (3.1), la necesidad se sigue del hecho de que P refleja (P.C.C.) , (ε,μ)-Factorizaciones y que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$, la definición de Adj-morfismo y los Lemas (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4).

<u>Proposición (3.3)</u> Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que es equivalencia y tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (u.s.i.):

(3.3.1) H_1 es la respuesta total de $M_1 \iff PH_1$ es la respuesta total de M_2,

(3.3.2) Si M_1 es (ε_1,μ_1)-canónico ó si M_2 es $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-canónico, entonces; (r_1,σ_1) es una (ε_1,μ_1)-Factorización de $H_1 \iff (Pr_1\ P\sigma_1)$ es una $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-Factorización de PH_1;

(3.3.3) ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de $M_1 \iff P_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_2.

<u>Demostración</u> (3.3.1) y (3.3.3) son un corolorio de la proposición (3.2), (3.3.2) se sigue del hecho de que P es equivalencia y los Lemas (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4)

Corolorio (3.4) Sea $P: M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que es equivalencia y X_1, X_2 son tambien equivalencias. Entonces (u.s.i.), valen (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3).

Demostración. Es inmediato de la proposición (3.3) y de que X_1 y X_2 son equivalencias.

A continuación mostramos dos extensiones a dos teoremas clásicos de realización.

Teorema (3.5) (1a. Extensión del Toerema de Realización)

Sea ${}_1H^n_m\colon X_1^m U_1 \to X_1{}^n Y_1$ una bisecuencia arbitraria de C_1-morfismos. Sea $H_1\colon \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \to \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1$ el único C_1-morfismo tal que $\Pi_n H_1 \,in_m = {}_1H^n_m$ y sea $P\colon M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que $PX_1^{\cdot} \equiv X_2^{\cdot}P$ y preserva (ε,μ)-Factorizaciones. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes (u.s.i.) ($P_1\, H^n_m$ es la matriz de Hankel y PH_1 es el dinamorfismo de Hankel (ver [11])):

(3.5.1) Existe un sistema Adjunto M_2 con matriz de Hankel $P_1H^n_m$, i.e., M_2 realiza a $P_1H^n_m$;

(3.5.2) Para toda m, n ε ℕ tenemos

$$\frac{X_2^{m+1}\, U_2 \xrightarrow{P_1H^n_{m+1}} X_2^{\cdot n}\, Y_2}{X_2^{m}\, U_2 \xrightarrow{P_1H^{n+1}_{m}} X_2^{\cdot n+1}\, Y_2} \quad ;$$

(3.5.3) $P\hat{H}_1\colon \left(\coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2\,,\ Pz\right) \to \left(\prod_{j\geq 0} X_2^{\cdot j} Y_2,\ PL\right)$ es un X_2-dinamorfismo, donde z esta definido por

$$\frac{X_1 \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \xrightarrow{z} \coprod_{j\geq 0} X^j U_1}{\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \xrightarrow{z^{\cdot}} X_1^{\cdot} \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1} \qquad \frac{X_1 X_1^m U_1 \xrightarrow{in_{m+1}} \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1}{X_1^m U_1 \xrightarrow{z^{\cdot}_m} X_1^{\cdot} \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1}$$

y los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 & & X_1 \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \arrow[ll, "Z"'] \\
& X_1 X_1^m U_1 \arrow[ul, "in_{m+1}"] \arrow[ur, "X_1 in_m"'] &
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
& \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \arrow[d, "r_1"] & X_1 \coprod X_1^j U_1 \arrow[l, "Z"'] \arrow[d, "X_1 r_1"] \\
U_1 \arrow[ur, "in_o"] \arrow[r, "\tau_1"'] & Q_1 & X_1 Q_1 \arrow[l, "\delta_1"]
\end{tikzcd}
\qquad (3.A)$$

en C_1. L esta definido por

$$\frac{X_1 \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \xrightarrow{Ln} X_1^{\cdot n} Y_1}{\prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \xrightarrow{\pi n+1} X_1^{\cdot} X_1^{\cdot n} Y_1}$$

y los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X_1 \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "Ln"'] & & \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[dl, "\pi n"] \\
& X_1^{\cdot n} Y_1 &
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
X_1 Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "X_1 \sigma_1"'] & Q_1 \arrow[dr, "\beta_1"] \arrow[d, phantom, "\sigma_1"] & \\
X_1 \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[r, "L"] & \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[r, "\pi_o"'] & Y_1
\end{tikzcd}
\quad (3.B)$$

en C_1.

<u>Demostración</u>. Sea $M_2=(X_2,Q_2,\delta_2,U_2,\tau_2,Y_2,\beta_2)\cong(X_2,PQ_1,P\delta_1,PU_1,P\tau_1,PY_1,P\beta_1)$ un sistema adjunto en C_2; entonces, basados en la demostración del teorema (2.3,[11]), tenemos que (3.5.1)$\Rightarrow$(3.5.2) es inmediato de que

$$\frac{\dfrac{P\,X_1 X_1^m U_1 \xrightarrow{PX_1 r^1_{(m)}} PX_1 Q_1 \xrightarrow{P\delta_1} PQ_1 \xrightarrow{P\sigma^1_{(n)}} PX_1^{\cdot n} Y_1}{X_2 X_2^m U_2 \xrightarrow{X_2 r^2_{(m)}} X_2 Q_2 \xrightarrow{\delta_2} Q_2 \xrightarrow{\sigma^2_{(n)}} X_2^{\cdot n} Y_2}}{X_2^m U_2 \xrightarrow{r^2_{(m)}} Q_2 \xrightarrow{\delta_2^{\cdot}} X_2^{\cdot} Q_2 \xrightarrow{X_2^{\cdot}\sigma^2_{(n)}} X_2^{\cdot} X_2^{\cdot n} Y_2}$$

. y

$P_1 H^n_m = P\sigma^1_{(n)} P r^1_{(m)} = \sigma^2_{(m)} r^2_{(m)} = {}_2H^n_m$ por la proposición (3.1).

(3.5.2) => (3.5.3) es suficiente ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
PX_1X_1^mU_1 \arrow[r, "PX_1 in_m"] \arrow[dr, "Pin_{m+1}"'] & PX_1 \coprod_{j\ge 0} X_1^{j}U_1 \arrow[r, "PX_1H_1"] \arrow[d, "PZ"] & PX_1 \prod_{j\ge 0} X_1^{\cdot j}Y_1 \arrow[d, "PL"] & \\
 & P\coprod_{j\ge 0} X_1^{j}U_1 \arrow[r, "PH_1"'] & P\prod_{j\ge 0} X_1^{\cdot j}Y_1 \arrow[r, "P\pi_n"'] & PX_1^{\cdot n}Y_1
\end{tikzcd}$$

conmuta porque P es functor, Adj-morfismo y la proposición (3.1), luego también conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_1X_2^mU_2 \arrow[r, "X_2 in'_m"] \arrow[dr, "in'_{m+1}"'] & X_2 \coprod_{j\ge 0} X_2^{j}U_2 \arrow[r, "X_2H_2"] \arrow[d, "PZ"] & X_2 \prod_{j\ge 0} X_2^{j}Y_2 \arrow[d, "PL"] & \\
 & \coprod_{j\ge 0} X_2^{j}U_2 \arrow[r, "H_2"'] & \prod_{j\ge 0} X_2^{\cdot j}Y_2 \arrow[r, "\pi'_n"'] & X_2^{\cdot n}Y_2
\end{tikzcd} \tag{3.c}$$

(3.5.3) => (3.5.1). Por mostrar que si $\hat{H}_2 \cong P\hat{H}_1$ es un X_2-dinamorfismo, entonces la "realización libre" $Q = \coprod_{j\ge 0} X_2^j U_2$, $\delta \cong PZ$, $\tau = in'_o$, $\beta = \pi'_o H_2$ tiene matriz de Hankel ${}_2H^n_m$. Es claro que $r_{(m)} = in'_m : X_2^m U_2 \longrightarrow \coprod_{j\ge 0} X_2^j U_2$. Para mostrar que $\sigma_{(n)} r_{(m)} = \pi'_n H_2 in'_m$ es suficiente probar que $\sigma_{(n)} = \pi'_n H_2$. Esto es cierto por definición para n=0. Ahora por inducción y tomando $\delta^{\cdot} \cong X_2^{\cdot} PZ$ tenemos

$$\frac{\coprod_{j\geq 0} X_2^j V_2 \xrightarrow{\delta^\bullet} X_2^\bullet \coprod_{j\geq 0} X_2^j V_2 \xrightarrow{X_2^\bullet Pr_n' H_2} X_2^{\bullet n+1} Y_2}{X_2 \coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2 \xrightarrow{PZ} \coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2 \xrightarrow{P\, r_n' H_2} X_2^{\bullet n} Y_2}$$

Luego

$$\frac{\coprod_{j\geq 0} X_2^j\, {}_2 \xrightarrow{H_2} \prod_{j\geq 0} X_2^{\bullet j} Y_2 \xrightarrow{Pr'_{n+1}} X_2^{\bullet n+1}\, Y_2}{X_2 \coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2 \xrightarrow{X_2 H_2} X_2 \prod_{j\geq 0} X_2^{\bullet j} Y_2 \xrightarrow{Pr_n'\, PL} X_2^{\bullet n} Y_2}$$

Pero por la propiedad de ser X_2-dinamorfismo, i.e., que el diagrama (3.c) conmuta, $H_2 o PZ = PLoX_2H_2$, y por tanto $Pr'_{n+1}H_2 = X_2^\bullet \pi_n' H_2 o\delta^\bullet = \sigma_{(n+1)}$.

<u>Teorema (3.6)</u>. (2da. Extensión del Teorema de Realización).

Sea, $H_m^n : X_1^m U_1 \longrightarrow X_1^{\bullet n} Y_1$ una bisecuencia arbitraria de C_1-morfismos. Sea $H_1 : \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \longrightarrow \prod_{j\geq 0} X_1^{\bullet j} Y_1$ el único C_1-morfismo tal que $Pr_n H_1 in_m = {}_1H_m^n$ y sea $P : M_1 \longrightarrow M_2$ un Adj-morfismo que preserva (ε,μ)-Factorizaciones y refleja (P.C.C.), (ε,μ)-factorizaciones y tal que $PX_1^\bullet \cong X_2^\bullet P$. Entonces las siguientes tres proposiciones son equivalentes (u.s.i):

(3.6.1) Existe un sistema Adjunto M_1 con matriz de Hankel ${}_1H_m^n$;

$\Leftrightarrow$ Existe un sistema Adjunto M_2 con matriz de Hankel ${}_2H_m^n$;

(3.6.2) Para toda n, m ε n tenemos que

$$\frac{X_1^{m+1} U_1 \xrightarrow{{}_1H_{m+1}^n} X_1^{\bullet n} Y_1}{X_1^m U_1 \xrightarrow{{}_1H_m^{n+1}} X_1^{\bullet n+1} Y_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_2^{m+1} U_2 \xrightarrow{{}_2H_{m+1}^n} X_2^{\bullet n} Y_2}{X_2^m U_2 \xrightarrow{{}_2H_m^{n+1}} X_2^{\bullet n+1} Y_2};$$

(3.6.3) $\hat{H}_1 : (\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1, Z) \longrightarrow (\prod_{j\geq 0} X_1^{\bullet j} Y_1, L)$ es un X_1-dinamorfismo $\leftrightarrow$

$$\hat{H}_2 : \left(\coprod_{j \geq 0} X_2{}^j U_2, Pz \right) \to \left(\prod_{j \geq 0} X_2^{\cdot j} Y_2, PL \right) \text{ es un } X_2\text{-dinamorfismo.}$$

Demostración. Es consecuencia del Teorema (3.5) y la proposición (3.2)

Corolario (3.7) Sea ${}_1H_m^n : X_1^m U_1 \to X_1^{\cdot n} Y_1$ una bisecuencia arbitraria de C_1-morfismos. Sea $H_1 : \coprod_{j \geq 0} H^j U_1 \to \prod_{J > 0} X_1^{\cdot j} Y_1$ el único C_1-morfismo tal que $\prod_n H_1 in_m = {}_1H_m^n$ y sea $P:M_1 \to M_2$ un Adj- morfismo que es equivalencia y X_1, X_2 son también equivalencias. Entonces las proporsiciones (3.6.1) , (3.6.2) y (3.6.3) son equivalentes (u.s.i.).

Demostración. Es inmediato del teorema (3.6) y el corolario (3.4).

Teorema (3.8) (1ª Extensión del Teorema de Realización canónica) Sea $({}_1H_m^n)$ una matriz de Hankel con dinamorfismo de Hankel H_1, y H_1 tiene una (ε_1, μ_1)-Factorización

$$H_1 : \coprod_{j > 0} X_1^j U_1 \overset{H^{r_1}}{\to} H^{Q_1} \overset{H^{\sigma_1}}{\to} \prod_{J > 0} X_1^{\cdot j} Y_1, \text{ i.e., } H^{r_1} \varepsilon\, \varepsilon_1 \text{ y } H^{\sigma_1}\, \varepsilon \mu_1$$

sea $P:M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo tal que $PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot}P$ y preserva (ε, μ)-Factorizaciones.

Entonces existe (u.s.i.) ${}_H\delta_2 : X_2\, {}_HQ_2 \to {}_HQ_2$ haciendo a ${}_Hr_2$ y ${}_H\sigma_2$ X_2-dinamorfismos. El sistema ${}_HM_2 = (X_2, {}_HQ_2, {}_H\delta_2, U_2, {}_Hr_2 in_o', Y_2, Pr_o'\, {}_H\sigma_2)$ realiza a ${}_2H_m^n$ y tiene mapeo de alcanzabilidad ${}_Hr_2$ mapeo de observabilidad ${}_H\sigma_2$ ·, y por tanto es una realización canónica de ${}_2H_m^n$. Cualquier otra realización canónica de ${}_2H_m^n$ es isomórfica a ${}_HM_2$.

Demostración. Basándonos en el Toerema de Realización Canónica y su demostración (ver [11] y [2]) tenemos que

$$\pi_o'\, {}_H\sigma_2 \;\; {}_Hr_2\, in_o' = {}_2H_m^n$$

por la proposición (3.1) y que $\pi_o\ {}_H\sigma_1\ {}_Hr_1\ in_o = {}_1H^n_m$.
Ahora por el (dynamorphic image Lema [2]) existe un único ${}_H\delta_1$ tal que ${}_Hr_1$ y ${}_H\sigma_1$ X_1-dinamorfismos y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[d, "in_o"'] \arrow[dr, "{}_Hr_1 in_o"] & & Y_1 \arrow[dl, "Pr_o\ {}_H\sigma_1"'] \\
\coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \arrow[r, "{}_Hr_1"'] & {}_HQ_1 \arrow[r, "{}_H\sigma_1"'] & \prod_{j\geq 0} X_1{}^j Y_1 \arrow[u, "Pr_o"']
\end{tikzcd}
\qquad \delta_H\delta_1 : X_1\ {}_HQ_1 \to {}_HQ_1 .$$

Por el (simulation Lemma [2]) cualquier realización canónica es mínima y todas las realizaciones mínimas de H_1 son isomórficas. Aplicando P al diagrama anterior, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
U_2 \arrow[d, "in'_o"'] \arrow[dr, "{}_Hr_2 in'_o"] & & Y_2 \arrow[dl, "\pi'_o\ {}_H\sigma_2"'] \\
\coprod_{j\geq 0} X_2^j U_2 \arrow[r, "{}_Hr_2"'] & {}_HQ_2 \arrow[r, "{}_H\sigma_2"'] & \prod_{j\geq 0} X_2^{\cdot j} Y_2 \arrow[u, "\pi'_o"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{donde } P_HQ_1 \cong {}_HQ_2$$

porque P preserva (ε,μ)-Factorizaciones y la definición de Adj-morfismo (${}_Hr_2 \in \overline{P(\varepsilon_1)}$ y ${}_H\sigma_2 \in \overline{P(\mu_1)}$ por los Lemas II (1.1) y (1.2). Ahora, por el (dynamorphic image Lemma) aplicado al diagrama anterior existe un único ${}_H\delta_2 : X_2\ {}_HQ_2 \to {}_HQ_2$ tal que ${}_Hr_2$ y ${}_H\sigma_2$ son X_2 - dinamorfismos y por el (simulation Lemma) cualquier realización canónica es mínima y todas las realizaciones mínimas de H_2 son isomórficas .

<u>Teorema (3.9)</u> ($2^{\underline{da}}$ Extensión del teorema de Realización canónica) Sea $({}_1H^n_m)$ una matriz de Hankel con dinamorfismos de Hankel H_1 y H_1 tiene una

(ε_1,μ_1)-Factorización

$$H_1: \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \overset{H^{r_1}}{\to} {}_HQ_1 \overset{H^{\sigma_1}}{\to} \prod_{j\geq 0} X_1^{\bullet j} Y_1$$

y sea P: $M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que preserva (ε,μ)-Factorizaciones y refleja (P.C.C.),

(ε,μ)-Factorizaciones y tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (u.s.i):

(3.9.1) Existe ${}_H\delta_1$: $X_1\ {}_HQ_1 \to {}_HQ_1$ haciendo a ${}_Hr_1$ y ${}_Hr_2$ X_1-dinamorfismos $\iff$ Existe ${}_H\delta_1$: $X_2\ {}_HQ_2 \to {}_HQ_2$ haciendo a ${}_Hr_2$ y ${}_H\sigma_2$ X_2-dinamorfismos;

(3.9.2) El sistema ${}_HM_1 = (X_1, {}_HQ_1, {}_H\delta_1, U_1\ {}_Hr_1\ in_o, Y_1, Pr_o\ {}_H\sigma_1)$ realiza de manera canónica a ${}_1H_m^n$ y tiene mapeo de Alcanzabilidad ${}_Hr_1$ y mapeo de observabilidad ${}_H\sigma_1$ $\iff$ El sistema ${}_HM_2 = (X_2, {}_HQ_2, {}_H\delta_2, U_2\ {}_Hr_2 in_o', Y_2, Pr_o'\ {}_H\sigma_2)$ realiza de manera canónica a ${}_2H_m^n$ y tiene mapeo de Alcanzabilidad ${}_Hr_2$ y mapeo de observabilidad ${}_H\sigma_2$;

(3.9.3) Cualquier otra realización canónica de ${}_1H_m^n$ es isomórfica a ${}_HM_1 \iff$ cualquier otra realización canónica de ${}_1H_m^n$ es isomórfica a ${}_HM_2$.

<u>Demostración</u>. Es consecuencia del teorema (3.8), la proposición (3.2) y los Lemas (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) .

<u>Corolario (3.10)</u> Sea $({}_1H_m^n)$ una matriz de Hankel con dinamorfismo de Hankel H_1 y H_1 tiene una (ε_1,μ_1)-Factorización

$$H_1: \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \overset{H^{r_1}}{\to} {}_HQ_1 \overset{H^{\sigma_1}}{\to} \prod_{j\geq 0} X_1^{\bullet j} Y_1$$

y sea P; $M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo que es equivalencia y X_1, X_2 también equivalencias. Entonces (u.s.i.) valen (3.9.1), (3.9.2) y (3.9.3).

<u>Demostración</u>. Es inmediato del Teorema (3.9) y el corolario (3.4) .

<u>Observaciones</u>: Lo primero que notamos es que los teoremas (3.5), (3.6) y los teoremas (3.8), (3.9) cuando $P = 1_{M_1} : M_1 \to M_1 = M_2$ (i.e., es el functor identidad $1_{C_1} : C_1 \to C_1$), se reducen al teorema de realización y al teorema de realización canónica respectivamente. Por otro lado el corolario (3.10) implica que todas las realizaciones canónicas en Decomp están en una única clase de equivalencia, tomando en cuenta la relación de equivalencia $M_1 \sim M_2$ definida anteriormente en la sección 2 sobre Decomp.

Para finalizar ésta sección presentamos dos exrensiones del Teorema de Realización parcial establecido por Arbib y Manes en [11].

El diagrama conmutativo (2.17 [11]) establece que

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{k} X_1^{j} U_1 \arrow[rr, "{}_1H_{\bar{k}}^{\overline{n+1}}"] \arrow[d, dashed, "i_{K+1\ K+2}"'] & \arrow[d, phantom, "{}_1H_{\bar{K}}^{\bar{n}}"] & \prod_{j=0}^{n+1} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[d, "\Pi_{n+2\ n+1}"] \\
\coprod_{j=0}^{k+1} X_1^{j} U_1 \arrow[rr, "{}_1H_{\overline{k+1}}^{\bar{n}}"'] & & \prod_{j=0}^{n} X_1^{\cdot j} Y_1
\end{tikzcd}$$

Tomando la (ε_1,μ_1)-Factorización de ${}_1H_{\bar{k}}^{\bar{n}}$, ${}_1H_{\bar{K}}^{\overline{n+1}}$ y ${}_1H_{\overline{k+1}}^{\bar{n}}$ entonces existen t_1 y u_1 por el (Diagonal Fill-in Lemma) en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{k} X_1^{j} U_1 \arrow[r, "\bar{e}_1"] \arrow[dd, "i_{k+1\ k+2}"'] \arrow[dr, "e_1"] & \bar{Q}_1 \arrow[r, "\bar{m}_1"] \arrow[d, "t_1"] & \prod_{j=0}^{n+1} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[dd, "\Pi_{n+2\ n+1}"] \\
 & R_1 \arrow[d, "u_1"] \arrow[dr, "m_1"] & \\
\coprod_{j=0}^{k+1} X_1^{j} U_1 \arrow[r, "\tilde{e}_1"'] & \tilde{Q}_1 \arrow[r, "\tilde{m}_1"'] & \prod_{j=0}^{n} X_1^{\cdot j} Y_1
\end{tikzcd} \qquad (3.D)$$

<u>Teorema (3.11)</u> (1ra. Extensión del teorema de Realización Parcial) Si t_1 y u_1 son isomorfismos, es posible definir un sistema $M_2=(X_2,\bar{Q}_2,\delta_2,U_2,\tau_2, Y_2, B_2)$ (u.s.i.) en C_2 a través de un Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$ tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$, preserva isomorfismos y preserva (ε_1,u_1)-Factorizaciones, por

(3.11.1) $\delta_2 = t_2^{-1} o\ u_2^{-1} o \tilde{\delta}_2 : X_2\bar{Q}_2 \to \bar{Q}_2$, $\tilde{\delta}_2: X_2\bar{Q}_2 \to \tilde{Q}_2$;

(3.11.2) $\tau_2 = \bar{e}_2 o\ (in_0^k)': U_2 \to \coprod_{j=0}^{k} X_2{}^j\, U_2 \to Q_2$;

(3.11.3) $B_2 = (\Pi_0^{n+1})' o\ \bar{m}_2: \bar{Q}_2 \to \prod_{j=0}^{n+1} X_2^{\bullet j}\, Y_2 \to Y_2$;

de tal manera que la matriz de Hankel de M_2 es ${}_2H_i^j = (\Pi_j^{n+1})'\ o\ \bar{m}_2\ o\ \bar{e}_2 o(in_i^k)' = (\Pi_j^{n+1})'\ o\,{}_2H_{\bar{k}}^{\overline{n+1}}\ o(in_i^k)'$ para $0 \leq i \leq K$, $0 \leq j \leq n+1$.

<u>Demostración</u>. Basándonos en la demostración de (2.19, [11]) tenemos que

$$r'_{(i)} = \bar{e}_1 o\ in_i^k: X_1^iU_1 \xrightarrow{in_i^k} \coprod_{j=0}^{k} X_1^j\, U_1 \xrightarrow{\bar{e}_1} \bar{Q}_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq k$$

$$\sigma'_{(j)} = \Pi_j^{n+1}\ o\ \bar{m}_1 : \bar{Q}_1 \xrightarrow{\bar{m}_1} \prod_{\hat{j}=0} X_1^{\bullet\hat{j}}\, Y_1 \xrightarrow{\Pi_j^{n+1}} X_1^{\bullet j}Y_1 \text{ para } 0 \leq j \leq n+1$$

y ${}_1H_i = \sigma'_{(i)}\, r'_{(i)}$. Entonces por ser P Adj-morfismo preservar (ε_1,μ_1)-Factorizaciones y preservar isomorfismos tenemos que

$$P\delta_1 = (Pt_1)_o^{-1}(Pu_1)_o^{-1}\, P\tilde{\delta}_1: X_2P\bar{Q}_1 \quad P\bar{Q}_1 \text{ con } \tilde{\delta}_1:X_1\bar{Q}_1 \to \tilde{Q}_1 ,$$

$$P\tau_1 = P\bar{e}_1\ o\ Pin_0^k : PU_1 \to \coprod_{j=0} X_2^jPU_1 \to PQ_1 \quad y$$

$$PB_1 = P\Pi_0^{n+1}\ o\ P\bar{m}_1: P\bar{Q}_1 \to \prod_{j=0} X_2^{\bullet j}\, P\, Y_1 \to P\, Y_1 ;$$

$$(Pin_i^k) = (in_i^k)' , \quad (P\Pi_j^{n+1})=(\Pi_j^{n+1})'$$

Luego (u.s.i.) tenemos (3.11.1), (3.11.2) y (3.11.3). Por otro lado

$P_1H_i^j = P\sigma'_{(j)}Pr'_{(i)} = (\Pi_j^{n+1})' \text{ o } P\bar{m}_1 \text{o } Pe_1 \text{o}(in_i^k)' = (\Pi_j^{n+1})' \text{ o } P_1H_k^{\overline{n+1}} \text{ o } (in_i^k)'$

entonces (u.s.i.) ${}_2H_i^j = (\pi_j^{n+1})' \text{ o } \bar{m}_2 \text{ o } \bar{e}_2 \text{ o } (in_i^k)'$, donde

$\bar{m}_2(a) \cong P(\bar{m}_1(a)$ y $\bar{e}_2(a) \cong P\bar{e}_1(a)$ para todo "a" un C_2-objeto, i.e.,

$\bar{m}_2 \cong P\bar{m}_1$ y $\bar{e}_2 \cong P\bar{e}_1$.

Teorema (3.12) (2da. Extensión del teorema de Realización parcial) Si t_2 y U_2 son isomorfismos en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{k} X_2^j U_2 \arrow[r, "\bar{e}_2"] \arrow[dd, "i'_{k+1\ k+2}"'] \arrow[dr, "e_2"] & \bar{Q}_2 \arrow[r, "\bar{m}_2"] \arrow[d, "t_2"] & \prod_{j=0}^{n+1} X_2^{j} Y_2 \arrow[dd, "\Pi'_{n+2\ n+1}"] \\
 & R_2 \arrow[d, "u_2"] \arrow[dr, "m_2"] & \\
\coprod_{j=0}^{k+1} X_2^j U_2 \arrow[r, "\tilde{e}_2"] & Q_2 \arrow[r, "\tilde{m}_2"] & \prod_{j=0}^{n} X_2^{\cdot j} Y_2 ,
\end{tikzcd} \qquad (3.E)$$

es posible definir un sistema $M_1 = (X_1, \bar{Q}_1, \delta_1, U_1, \tau_1, Y_1, \beta_1)$ (u.s.i.) en C_1 a través de un Adj-morfismo $P:M_1 \to M_2$ tal que $PX_1^{\cdot} \cong X_2^{\cdot}P$, refleje (ε,μ)-Factorizaciones y (P.C.C.), por

(3.12.1) $\delta_1 = t_1^{-1} \text{ o } u_1^{-1} \text{ o } \tilde{\delta}_1 : X_1 \bar{Q}_1 \to_k \bar{Q}_1$;

(3.12.2) $\tau_1 = \bar{e}_1 \text{ o } in_o^k : U_1 \to \coprod_{j=0}^{k} X_1^j U_1 \to Q_1$;

(3.12.3) $\beta_1 = \Pi_o^{n+1} \bar{m}_1 : \bar{Q}_1 \to \prod_{j=0}^{n+1} X_1^{\prime j} Y_1 \to Y_1$;

de tal manera que la matriz de Hankel de M_1 es ${}_1H_i^j = \Pi_j^{n+1} \text{ o } \bar{m}_1 \text{ o } \bar{e}_1 \text{ o } in_j^k = \Pi_j^{n+1} \text{ o}_1H_k^{\overline{nH}} \text{ o } in_i^k$ para $0 \leq i \leq k$, $o \leq j \leq n+1$.

Demostración. Nuevamente tenemos que

$$r^2_{(i)} = \bar{e}_2 \circ (in^k_i)': X^i_2\, U_2 \xrightarrow{(in^k_i)'} \coprod_{j=0}^{k} X^j_2\, U_2 \xrightarrow{\bar{e}_2} \bar{Q}_2 \quad \text{para } 0 \leq i \leq k$$

$$\sigma^2_{(j)} = (\Pi^{n+1}_j)' \circ \bar{m}_2 : \bar{Q}_2 \xrightarrow{\bar{m}_2} \prod_{j=0}^{n+1} X_2^{\cdot j}\, Y_2 \xrightarrow{(\Pi^{n+1}_j)'} X_2^{\cdot j}\, Y_2 \quad \text{para } 0 \leq j \leq n+1 \quad y$$

${}_2H^j_i = \sigma^2_{(j)}\, r^2_{(i)}$. Entonces por ser P un functor que refleja (ε,μ)-Factorizaciones, (P.C.C.) y triángulos conmutativos, (u.s.i.) tenemos que el diagrama (3.D) conmuta, y ${}_1H^j_i = \sigma'_{(j)} r'_{(i)} = \Pi^{n+1}_j \circ {}_1H^{\overline{n+1}}_k \circ in^k_i$ para $0 \leq i \leq k$, $o \leq j \leq n+1$.

Corolorio (3.13) Si t_1, u_1, t_2 y u_2 son isomorfismos en los diagramas (3.D) y (3.E), y $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo que es equivalencia y X_1, X_2 también lo son, entonces (u.s.i.):

(3.13.1) El diagrama (3.D) conmuta $\Longleftrightarrow$ el diagrama (3.E) conmuta;

(3.13.2) $\delta_1 = t_1^{-1} \circ u_1^{-1} \circ \tilde{\delta}_1 \Longleftrightarrow \delta_2 = t_2^{-1} \circ u_2^{-1} \circ \tilde{\delta}_2$;

(3.13.3) $\tau_1 = \bar{e}_1 \circ in^k_o \Longleftrightarrow \tau_2 = \bar{e}_2 \circ (in^k_o)'$;

(3.13.4) $\beta_1 = \Pi_o^{n+1} \circ \bar{m}_1 \Longleftrightarrow \beta_2 = (\Pi^{n+1}_o)' \circ \bar{m}_2$;

(3.13.5) ${}_1H^j_i = \sigma'_{(j)}\, r'_{(i)} \Longleftrightarrow {}_2H^j_i = \sigma^2_{(j)}\, r^2_{(i)}$ para $0 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq n+1$.

Demostración. Es inmediato de los teoremas (3.11), (3.12) y del hecho de que P, X_1 y X_2 son equivalencias.

4. Alcanzabilidad y observabilidad en tiempo finito.

En esta sección introducimos los conceptos básicos referentes a alcanzabilidad y observabilidad en tiempo finito, presentamos también un enfoque alternativo al anterior para Alcanzabilidad y observabilidad en general y en tiempo finito, y mostramos algunos resultados.

Sean M_1 y M_2 sistemas Adjuntos (Adj-objetos) y $P:M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo entre ellos.

El <u>mapeo de Alcanzabilidad en menos de n pasos</u> del sistema M_1 es el C_1-Morfismo

$$\rho'_n : \coprod_{j=0}^{n-1} X_1^j U_1 \to Q_1$$

definido por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j=0}^{n-1} X_1^j U_1 \arrow[r, "\rho'_n"] & Q_1 \\ X_1^k U_1 \arrow[u, "in_k^{n-1}"] \arrow[r, "in_k"] & \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1 \arrow[u, "r_1"'] \end{tikzcd}$$

Gracias a las propiedades del coproducto $\coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j U_1$ con $m > 0$, es posible definir un mapeo

$$i_{m\,m'} : \coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j U_1 \to \coprod_{j=0}^{m'-1} X_1^j U_1 \quad \text{con} \quad m' > m \quad ,$$

por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_1^k U_1 \arrow[r, "in_k^{m-1}"] \arrow[dr, "in_k^{m'-1}"'] & \coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j U_1 \arrow[d, "i_{m\,m'}"] \\ & \coprod_{j=0}^{m'-1} X_1^j U_1 \end{tikzcd}$$

El mapeo $i_{m\ N} : \coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j\, U_1 \to \coprod_{j\geq 0} X_1^j\, U_1$ tiene la propiedad de que $i_{m\ \mathbb{N}}\ in_k^{m-1} =$ $= in_k$ (ver [13]).

De manera análoga, el mapeo de observabilidad a lo más en n pasos del sistema M_1 es el C_1-morfismo

$$S'_n : Q_1 \to \prod_{j=0}^{n-1} X_1^{\cdot j}\ Y_1$$

definido por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, "S'_n"] \arrow[d, "\sigma_1"'] & \prod_{j=0}^{n-1} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[d, "\pi_k^{n-1}"] \\
\prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[r, "\pi_k"] & X_1^{\cdot k} Y_1
\end{tikzcd}$$

Gracias también a las propiedades del producto $\prod_{j=0}^{m-1} X_1^{\cdot j} Y_1$ con $m > 0$, puede definirse otro mapeo

$$\Pi_{m\ m'} : \prod_{j=0}^{m'-1} X_1^{\cdot j} Y_1 \to \prod_{j=0}^{m-1} X_1^{\cdot j} Y_1 \text{ con } m' > m,$$

por medio del siguiente diagrana conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j=0}^{m-1} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[r, "\Pi_k^{m-1}"] & X_1^{\cdot k}\ Y_1 \\
\prod_{j=0}^{m'-1} X_1^{\cdot j}\ Y_1 \arrow[u, "\Pi_{m\ m'}"] \arrow[ur, "\Pi_k^{m'-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

El mapeo $\pi_{m\ IN} : \coprod_{j\geq 0} X_1^{\bullet j}\ Y_1 \rightarrow \coprod_{j=0}^{m-1} X_1^{\bullet j}\ Y_1$ tiebe la propiedad de que $\pi_k^{m-1}\ \pi_{m\ \ N} = \pi_k$.

Notemos que los mapeos P'_n y S'_n son los únicos mapeos que hacen conmutar los siguientes diagramas, respectivamente, de manera análoga al caso del mapeo de Alcanzabilidad y observabilidad definidos en la sección 1;

$$\begin{tikzcd}
 & X_1^{n+1}U_1 \arrow[dl, "X_1 in_n^{m-1}"'] \arrow[dr, "in_{n+1}^{m-1}"] & & \\
X_1\left(\coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j U_1\right) \arrow[d, "X_1\rho_n^1"'] & & \coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j\ U_1 \arrow[d, "\rho'_n"] & U_1 \arrow[l, "in_o"'] \arrow[dl, "\tau_1"] \\
X_1Q_1 \arrow[rr, "\delta_1"] & & Q_1 &
\end{tikzcd} \qquad (n < m-1) \qquad (4.A)$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1^{\bullet n+1}\ Y_1 & & \\
X_1^{\bullet}\left(\coprod_{j=0}^{m-1} X_1^{\bullet j}Y_1\right) \arrow[ur, "X_1^{\bullet}\pi_n^{m-1}"] & & \coprod_{j=0}^{m-1} X_1^{\bullet j}Y_1 \arrow[ul, "\pi_{n+1}^{m-1}"'] \arrow[r, "\pi_o"] & Y_1 \\
X_1^{\bullet}Q_1 \arrow[u, "X_1^{\bullet}S'_n"'] & & Q_1 \arrow[ll, "\delta_1^{\bullet}"'] \arrow[u, "S'_n"] \arrow[ur, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd} \qquad (n < m-1) \qquad (4.B)$$

Ahora como consecuencia de la metodología presentada en las secciones 1 y 2, es claro que es posible establecer una extensión inmediata de los lemas (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) al caso de Alcanzabilidad y observabilidad finita, notando que el sistema M_1 es Alcanzable en tiempo $n \in N$ si $P'_n \in \varepsilon_1$ y observable en tiempo n si $S'_n \in \mu_1$. Por tanto, también es inmediata una extensión de los teoremas (2.1), (2.3), (2.7), corolario (2.2) y proposiciones (2.5) y (2.6) al caso de Alcanzabilidad y observabilidad finita.

Por otro lado, es posible también establecer una extensión parcial inmediata a los resultados en teoría de Realización presentados en la sección 3, definiendo la respuesta total de M_1 en n pasos, como el mapeo (C_1-morfismo)

$$H_1^{n'} \equiv S'_{n'}\, \rho'_{n'} : \coprod_{j=0}^{n'-1} X_1^j\, U_1 \longrightarrow \prod_{j=0}^{n'-1} X_1^{\cdot j} Y_1$$

La matriz de Hankel de M_1 es la misma que la definida en la sección 3, pero ahora redefinida por medio del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{n'-1} X_1^j U_1 \arrow[rr, "S'_{n'}\rho'_{n'}"] & & \prod_{j=0}^{n'-1} X_1^{\cdot j} Y_1 \arrow[d, "\pi_n^{n'-1}"] \\
X_1^m U_1 \arrow[u, "in_m^{n'-1}"] \arrow[rr, "{}_1H_m^n"'] & & X_1^{\cdot n}\, Y_1
\end{tikzcd} \qquad (n' > n,\ m) \qquad (4.c)$$

Redefinamos también $r'_{(m)} \equiv \rho'_{n'}\, in_m^{n'-1}$ y $\sigma'_{(n)} \equiv \pi_n^{n'-1}\, S'_{n'}$, y notemos que $_1H_m^n = \sigma'_n\, r'_{(m)} = X_1(\pi_{n-1}^{n'-1}\, S'_{n'})\, o \dot{\delta}_1 o \delta_1\ o\ X_1(\rho'_{n'}\, in_{m-1}^{n'-1})$. Entonces, como consecuencia tenemos una extensión parcial de las proposiciones (3.1), (3.2) y (3.3) y el corolario (3.4), modificando únicamente las partes donde interviene la respuesta total. Por tanto, también es inmediata una extensión parcial de los teoremas (3.5), (3.6) (3.8) y (3.9) y los corolarios (3.7) y (3.10), modificando únicamente las partes donde interviene la respuesta total.

Ahora presentamos un enfoque alternativo al de las secciones 1 y 2, establecido en [11] y [12] por Arbib y Manes.

Sean $\coprod_{j=0}^{m_1-1} X_1^j\, U_1 \xrightarrow{e_{m_1}} Q_{m_1} \xrightarrow{n_{m_1}} Q_1, \dots, \coprod_{j=0}^{m_n-1} X_1^j U_1 \xrightarrow{e_{m_n}} Q_{m_n} \xrightarrow{n_{m_n}} Q_1$

y

$\coprod_{j\geq 0} X_1^j\, U_1 \xrightarrow{e_N} Q_N \xrightarrow{m_N} Q_1$, (ε_1,μ_1)-Factorizaciones de $\rho'_{m_1},\dots,$ ρ'_{m_n} y $r_1 \equiv \rho'_N$ respectivamente. Entonces tenemos el siguiente resultado:

<u>Teorema (4.1)</u> Sean $\rho'_{m_1} \dots, \rho'_{m_n}$, r_1 con sus respectivas (ε_1,μ_1)-Factorizaciones y $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Entonces existen mapeos únicos

$h_{m_1 m_2} : Q_{m_1} \to Q_{m_2}$, ..., $h_{m_{n-1} m_n} : Q_{m_{n-1}} \to Q_{m_n}$ y $h_{m_n N} : Q_{m_n} \to Q_N$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{m-1} X_1^j\, U_1 \arrow[r, "i_{m_1 m_2}"] \arrow[d, "e_{m_1}"'] & \coprod_{j=0}^{m_2-1} X_1^j U_1 \arrow[d, "e_{m_2}"] \\
Q_{m_1} \arrow[r, "h_{m_1 m_2}"] \arrow[dr, "n_{m_1}"'] & Q_{m_2} \arrow[d, "n_{m_2}"] \\
& Q_1
\end{tikzcd}
\quad \cdots\cdots\cdot \quad
\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{m_n-1} X_1^j U_1 \arrow[r, "i_{m_n N}"] \arrow[d, "e_{m_n}"'] & \coprod_{j\geq 0} X_1^j\, U_1 \arrow[d, "e_N"] \\
Q_{m_n} \arrow[r, "h_{m_n N}"] \arrow[dr, "n_{m_n}"'] & Q_N \arrow[d, "n_N"] \\
& Q_1
\end{tikzcd}$$

La demostración se sigue del (diagrama-fill-in Lemma) ver [14].

En consecuencia tenemos la siguiente cadena de subobjetos de Q_1

$$\dots \leq [Q_{m_1}, N_{m_1}] \leq \dots \leq [Q_{m_n}, n_{m_n}] \leq [Q_N, n_N] \leq [Q_1, 1_{Q_1}] \qquad (4.D).$$

<u>Teorema (4.2)</u> Si $h_{m_1m_2}$ es un isomorfismo, entonces $h_{m_1,\ell}$ es un isomorfismo para cualquier $\ell \geq m_2$. Tambien h_{m_nN} es isomorfismo.

<u>Demostración</u>. Para la demostración ver [13].

Por la definición de Alcanzabilidad (general y en tiempo finito), como consecuencia de los teoremas (4.1) y (4.2) tenemos que el sistema Adjunto M_1 es Alcanzable si y solo si $[Q_N\ n_N] = [Q_1, 1_{Q_1}]$, y el sistema es Alcanzable en tiempo n si $[Q_n, n_n]=[Q_1, 1_{Q_1}]$.

De manera completamente análoga tenemos que si $Q_1 \xrightarrow{e'_{m_1}} Q'_{m_1} \xrightarrow{n'_{m_1}} \prod_{j=0}^{m_1-1} X_1^{\cdot j} Y_1$, $\ldots$, $Q_1 \xrightarrow{e'_{m_n}} Q' \xrightarrow{n'_{m_n}} \prod^{m_n-1} X_1^{\cdot j} Y_1$ y $Q_1 \xrightarrow{e'_{IN}} Q_N \xrightarrow{n'_{IN}} \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j} Y_1$, (ε_1,μ_1)-Factorizaciones de $S'_{m_1},\ldots,S'_{m_n}$ y $\sigma_1 \equiv S'_N$ respectivamente, entonces:

<u>Teorema (4.3)</u> Sean $S'_{m_1},\ldots,S'_{m_n},\ {}_1$ con sus respectivos (ε_1,μ_1)-Factorizaciones y $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. Entonces existen mapeos únicos $h_{m_1m_2}$: $Q'_{m_2} \to Q'_{m_1}, \ldots, h'_{m_{n-1}m_n} : Q'_{m_n} \to Q'_{m_{m-1}}$ y $h'_{m_n IN} : Q'_{IN} \to Q_{m_n}$ Tales que los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{j=0}^{m_1-1} X_1^{\cdot j}Y_1 & & \prod_{j=0}^{m_2-1} X_1^{\cdot j}Y_1 \arrow[ll, "\pi_{m_1,m_2}"'] \\
Q'_{m_1} \arrow[u, "n'_{m_1}"] & & Q'_{m_2} \arrow[u, "n'_{m_2}"'] \arrow[ll, "h'_{m_1m_2}"'] \\
& Q_1 \arrow[ul, "e'_{m_1}"] \arrow[ur, "e'_{m_2}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \cdots\cdots\cdot \quad
\begin{tikzcd}
\prod_{j=0}^{m_n-1} X_1^{\cdot j}Y_1 & & \prod_{j\geq 0} X_1^{\cdot j}Y_1 \arrow[ll, "\pi_{m_nN}"'] \\
Q'_{m_n} \arrow[u, "n'_{m_n}"] & & Q'_N \arrow[u, "n'_N"'] \arrow[ll, "h'_{m_nN}"'] \\
& Q_1 \arrow[ul, "e'_{m_n}"] \arrow[ur, "e'_N"'] &
\end{tikzcd}
\qquad (4.E)
$$

<u>Demostración</u>. La demostración es analoga a la del teorema (4.1).

En consecuencia también tenemos la siguiente cadena de objetos cociente de Q_1'

$$\ldots \leq [Q'_{m_1}, e'_{m_1}] \leq \ldots \leq [Q'_{m_n}, e'_{m_n}] \leq [Q'_N, e'_N] \leq [Q_1, 1_{Q_1}] \qquad (4.E).$$

Nuevamente por la definición de observabilidad (general y en tiempo finito), como consecuencia de los teoremas (4.2) y (4.3), tenemos que el sistema Adjunto M_1 es observable si y solo si $[Q'_N, e'_N] = [Q_1, 1_{Q_1}]$ y el sistema es observable en tiempo n si $[Q'_n, e'_n] = [Q_1, 1_{Q_1}]$.

En este nuevo enfoque es relativamente facil recobrar los resultados presentados en las secciones 1 y 2, notando que las cadenas (4.D) y (4.E) se pueden reescribir como los dos siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[dr, "1_{Q_1}"'] & Q_N \arrow[l, "h_{N1}"'] \arrow[d, "n_N"] & Q_{m_n} \arrow[l, "h_{m_n N}"'] \arrow[dl, "n_{m_n}"] & \cdots \arrow[l] & Q_{m_1} \arrow[l] \arrow[dlll, "n_{m_1}"] & \cdots \arrow[l] \\
& Q_1 & & & &
\end{tikzcd} \qquad (4.F)$$

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, "h'_{N1}"] \arrow[dr, "1_{Q_1}"'] & Q_N \arrow[r, "h'_{m_n N}"] \arrow[d, "e'_N"] & \cdots Q_{m_n} \arrow[dl, "e'_{m_n}"] \arrow[r] & \cdots Q_{m_1} \arrow[dll, "e'_{m_1}"] \arrow[r] & \cdots \\
& Q_1 & & &
\end{tikzcd} \qquad (4.G)$$

respectivamente, y notando también que el sistema Adjunto M_1 es alcanzable si y solo si $h_{N\,1}$ es un isomorfismo, y alcanzable en tiempo n si $h_{m_{n-1}\,m_n}$ es unisomorfismo; además es observable si y solo si $h'_{N\,1}$ es un isomorfismo, y observable en tiempo n si $h'_{m_{n-1}\,m_n}$ es un isomorfismo. Todo esto gracias al teorema (4.2). Como ejemplo demostremos el Lema (1.1) con esta técnica.

<u>Demostración del Lema (1.1)</u> Si el sistema M_1 es E_1-Alcanzable entonces $h_{N\,1}$ es un isomorfismo en el diagrama (4.F); aplicando el Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$ al diagrama mencionado, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
PQ_1 \arrow[dr, "1_{PQ_1}"'] & PQ_N \arrow[l, "Ph_{N\,1}"'] \arrow[d, "Pn_N"] & PQ_{m_n} \arrow[l, "Ph_{m_n\,N}"'] \arrow[dl, "Pn_{m_n}"] & \cdots \arrow[l] & PQ_{m_1} \arrow[l] \arrow[dlll, "Pn_{m_1}"] & \cdots \arrow[l] \\
 & PQ_1 & & & &
\end{tikzcd}
$$

donde Ph_N es un isomorfismo y Pn_{IN}, Pn_{m_n}, ..., Pn_{m_1} .... son monomorfismos porque P preserva $(\varepsilon_1\ \mu_1)$-Factorizaciones. Ahora, por la definición de Adj-morfismo, el siguiente diagrama conmuta (u.s.i)

$$
\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[dr, "1_{Q_2}"'] & \hat{Q}_N \arrow[l, "\hat{h}_{N\,1}"'] \arrow[d, "\hat{n}_N"] & \hat{Q}_{m_n} \arrow[l, "\hat{h}_{m_n\,N}"'] \arrow[dl, "\hat{n}_{m_n}"] & \cdots \arrow[l] & Q_{m_1} \arrow[l] \arrow[dlll, "\hat{n}_{m_1}"] & \cdots \arrow[l] \\
 & Q_2 & & & &
\end{tikzcd}
$$

donde $\hat{Q}_N \cong PQ_N$, $\hat{Q}m_n \cong PQm_n$, ..., $\hat{Q}m_1 \cong PQm_1$, $Pn_N(a) \doteq \hat{n}_N(a)$, $Pn_{m_n}(a) \cong \hat{n}_{m_n}(a)$, ..., $Pn_{m_1}(a) \cong \hat{n}_{m_1}(a)$ para todo "a" un C_2-objeto y $\hat{h}_{N1}$ es un isomorfismo, $\hat{n}_N$, $\hat{n}_{m_n}$, ..., $\hat{n}_{m_1}$, ... son monomorfismos, luego M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable.

De manera similar se demuestran los lemas (1.2), (1.3), y (1.4). En consecuencia también podemos demostrar con esta técnica los teoremas (2.1), (2.3), (2.7), el corolario (2.2) y Proposiciones (2.5) y (2.6). También mediante esta técnica se pueden demostrar las extensiones mencionadas para Alcanzabilidad y observabilidad finita.

5. Metateoría y teoría de Sistemas Adjuntos.

En esta sección presentamos dos meta-teoremas y hacemos un análisis elemental de la teoría de Sistemas Adjuntos expuesta en este capítulo.

Por una propiedad "q" en un sistema Adjunto M definido en C, entenderemos que el sistema M es Alcanzable, observable, que dada una cierta bisecuencia de C-morfismos, existe un sistema Adjunto $\hat{M}$ que realiza a la bisecuencia, que se cumple una cierta condición sobre ella, o que hace conmutar algún diagrama, que existe un C-morfismo recurrente por columnas (renglones) de grado "d" para la bisecuencia (5.1 [12]), etc. De manera más formal, diremos que un sistema Adjunto definido en C cumplira con una cierta propiedad "q" si:

(5.a) Un cierto diagrama que involucra únicamente C-objetos, productos (y/o) coproductos finitos o contables de éstos, C-morfismos (monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos bimorfismos, etc.) y combinaciones de éstos, conmuta.

(5.b) Un cierto C-morfismo o C-morfismos que involucren únicamente C-objetos sus productos (y/o)coproductos finitos o contables, para los cuales se cumple alguna condición categorica sobre este o estos, o existe un sistema Adjunto $\hat{M}$ (posiblemente único) con ciertas características sobre sus objetos Q, U, Y y sobre sus morfismos δ, τ, β, de tal manera que éstas únicamente involucren productos (Y/O) coproductos finitos o contables de C-objetos y C-morfismos.

(5.c) Si C tiene límites (y/o) colímites (y/o) propiedades categóricas adicionales, entonces un cierto diagrama que involucre únicamente C-objetos, C-morfismos, límites (y/o) colímites (y/o) propiedades categóricas adicionales, conmuta o, un cierto C-morfismo o C-morfismos que involucren únicamente C-objetos, C-morfismos, límites (y/o) colímites (y/o) propiedades categóricas adicionales, cumpla o cumplan con alguna condición categórica, o existe un sistema Adjunto $\hat{M}$ (posiblemente único) con ciertas características sobre sus objetos Q, U, Y y sobre sus morfismos δ, τ, β de tal manera que estas únicamente involucren límites (y/o) colímites (y/o) propiedades categóricas adicionales de C-objetos y C-morfismos.

Por una "condición categórica" entendemos una cierta propiedad categórica suceptible de ser preservada (y/o) reflejada por functores.

(5.1) <u>Primer Meta-teorema sobre sistemas adjuntos</u>.

Sea $P : M_1 \to M_2$ un Adj-morfismo, entonces:

(5.1.1) Si existe un "teorema que establece válidas las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ sobre M_1 y P preserva estas propiedades, entonces existe una extensión del "teorema" la cual establece que a partir de las condiciones del "teorema", las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ son válidas sobre M_2.

(5.1.2) Si existe un "teorema" que establece válidas las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ sobre M_2 y P refleja estas propiedades, entonces existe una extensión del "teorema", la cual establece que a partir de las condiciones del teorema, las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ son válidas sobre M_1.

(5.1.3) Existe un "teorema" que establece válidas las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ sobre M_1 si y sólo si existe una extensión de este "teorema", la cual establece que a partir de las condiciones del "teorema", las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ son válidas sobre M_2 (y viceversa), si P preserva y refleja estas propiedades.

Observación. n es un entero mayor o igual a uno y por "teorema" entendemos un teorema, una proposición, un corolario o una afirmación demostrada.

La demostración de este primer Meta-teorema es evidente, puesto que al pedir que P preserve, refleje y ambas, las propiedades $q_1, \ldots, q_n$, queda claro que siempre es posible establecer una extensión del resultado que afirma válidas las propiedades $q_1, \ldots, q_n$ sobre un sistema Adjunto M_1 ó M_2.

Como una consecuencia directa de este Primer Meta-teorema tenemos todos los resultados presentados en este capítulo. Por supuesto se pueden establecer muchos resultados más; por ejemplo, sobre teoremas de recurrencia y teoremas de realización que estén vinculados con otras propiedades de sistemas Adjuntos (ver secciones 5 a 9 en [12]) los cuales no presentamos aquí.

A continuación hacemos algunas observaciones sobre $\widehat{Cat}_{pc}$ y sistemas Adjuntos para motivar la definición de "Sistemas Adjuntos abstractos", la presentación del Principio de Correspondencia y el enunciado del Segundo Meta-teorema.

Notemos que la cuasi-categoría $\widehat{Cat}_{pc}$, definida en la sección 1 de este capítulo, por ser sub-cuasi-categoría de $\widehat{Cat}$ y tener objetos que tienen cardinalidad no finita vistos como conjuntos ó clases, entonces tiene productos y coproductos contables dado que $\widehat{Cat}$ los tiene, y por otro lado debido al teo rema (4.1 pág. 18 [10]) el cual establece que cualquier functor fiel $T:A\to B$ admite una (I,T^{Γ})-Factorización (u.s.i.)

$$A \xrightarrow{I} A^{\Gamma} \xrightarrow{T^{\Gamma}} B$$

tal que A es una subcategoría Γ-densa de A^{Γ} y I es el functor inclusión y T^{Γ} es un functor fiel y Γ-transportable; donde I es un $\hat{C}at$-epimorfismo y T^{Γ} es un $\hat{C}at$-monomorfismo (ver (4.1 [10])), entonces es posible en principio definir "sistemas Adjuntos" sobre $\hat{C}at_{pc}$. Notemos además que $\hat{C}at_{pc}$ no es objeto de si misma por no ser pequeña.

Por otra parte en (2.1 pág. 225 [9]) definen una categoría denotada $\bar{S}$ de "sistemas generales", donde un sistema general es una relación $S \subset X \times Y$ arbitraria sobre dos conjuntos X y Y arbitrarios. $\bar{S}$ esta definida como sigue: ob$\bar{S}$ es la clase de todas las relaciones $S \subset X \times Y$ sobre conjuntos arbitrarios X y Y donde X = dominio (S). Para cada par (S,S') de $\bar{S}$-objetos $\hom_{\bar{S}}(S,S')$ es el conjunto de todos los pares de funciones (h_x,h_y) con $h_x : X \to X'$ y $h_y: Y \to Y'$) $(S' \subset X' \times Y')$ tales que h_x es sobre y

$$(X,Y) \in S \to (h_x(x),\ h_y(y)) \in S'.$$

La composición está definida por

$$(h_x,h_y) \circ (h_x',h_y') = (h_x \circ h_x',\ h_y \circ h_y')$$

donde $h_x \circ h_x'$ y $h_y \circ h_y'$ son las composiciones usuales de funciones.

Como consecuencia de la definición de $\bar{S}$, no es difícil mostrar que $\bar{S}$ tiene productos y coproductos contables y (ε,μ)-Factorización por lo que es posible definir sobre ella "Sistemas Adjuntos". Notemos que ahora $\bar{S}$ sí es una categoría pequeña.

Las observaciones anteriores motivan la siguiente <u>definición</u> : Diremos que un sistema Adjunto sobre una categoría es un sistema <u>Adjunto concreto</u> si la categoría C donde está definido es pequeña y no es una categoría de sistemas; en caso contrario diremos que es un <u>sistema Adjunto abstracto</u>.

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es el siguiente <u>Principio de correspondencia</u> entre sistemas Adjuntos concretos y abstractos:

<u>Principio de Correspondencia</u>:

Si $q_1', \ldots, q_n'$ son propiedades de un sistema Adjunto M definido sobre C y dependen únicamente de C-objetos, productos (Y/O) coproductos finitos o contables de éstos y C-morfismos, con sus respectivas (ε,μ)-Factorizaciones. Entonces una afirmación que establezca la validez de $q_1', \ldots, q_n'$, es cierta tanto para sistemas Adjuntos concretos como para sistemas Adjuntos abstractos".

Un hecho inmediato que se sigue del Principio de Correspondencia es el siguiente Meta-teorema.

(5.2) <u>Segundo Meta-teorema sobre sistemas Adjuntos</u>:

Si un "teorema" establece válidas la propiedades $q_1' \ldots, q_n'$ mencionadas en el Principio de Correspondencia sobre sistemas Adjuntos concretos, entonces también es válido ese "teorema" sobre sistemas Adjuntos abstractos y viceversa.

Nuevamente la observación hecha para el primer Meta-teorema es válida para el segundo Meta-teorema. Además, notemos que si el primer Meta-teorema es restringido únicamente a las propiedades $q_1', \ldots, q_n'$ mencionadas en el principio de Correspondencia, entonces éste es válido para sistemas Adjuntos concretos y abstractos.

Para finalizar esta sección y el capítulo, presentamos a continuación un breve y elemental análisis de la teoría de sistemas Adjuntos presentada aquí.

Para comenzar definimos un mapeo o morfismo $\langle L, K\rangle$ entre adjunciones $\langle F, G, C, \hat{\eta}, \hat{\varepsilon}\rangle : A \to B$ y $\langle F', G', C', \hat{\eta}', \hat{\varepsilon}'\rangle : A' \to B'$ (1-I), como un par de functores $K : B \to B'$ y $L : A \to A'$ tales que el siguiente diagrama (5.A) conmuta

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K"'] & A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"] & B \arrow[d, "K"] \\
B' \arrow[r, "G'"'] & A' \arrow[r, "F'"'] & B'
\end{tikzcd}
\tag{5.A}
$$

y el siguiente diagrama (5.B) conmuta para

$$
\begin{tikzcd}
B(Fx,a) \arrow[r, "C"] \arrow[d, "K=K_{Fx,a}"'] & A(x,Ga) \arrow[d, "L=L_{x,Ga}"] \\
B'(KFx, Ka) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & A'(Lx,LGa) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
B'(F'Lx,Ka) \arrow[r, "C'"] & A'(Lx, G'Ka)
\end{tikzcd}
\tag{5.B}
$$

Todos los objetos $x \in A$ y $a \in b$, donde $f \xrightarrow{k} Kf$ y $g \xrightarrow{L} Lg$ (ver IV-7,[16]).

Ahora tomemos dos sistemas Adjuntos M_1 y M_2 con endofuctores X_1, X_2 y sus respectivos adjuntos derechos $X_1^{\bullet}$ y $X_2^{\bullet}$; entonces para cada uno de los sistemas Adjuntos tenemos asociada una adjunción, en este caso tenemos $\langle X_1, X_1^{\bullet}, C_1, \hat{\eta}_1, \hat{\varepsilon}_1\rangle$ y $\langle X_2, X_2^{\bullet}, C_2\ \hat{\eta}_2, \hat{\varepsilon}_2\rangle$ respectivamente y tenemos el siguiente resultado

<u>Proposición (5.3)</u> Dados sistemas Adjuntos M_1 y M_2 una condición suficiente para que exista al menos un Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$ en la categoría Adj, entre ellos, es que exista un morfismo entre las adjunciones $<X_1, X_1^{\bullet}, \psi_1, \hat{\eta}_1, \hat{\varepsilon}_1>$ y $<X_2, X_2^{\bullet}, \psi_2, \hat{\eta}_2, \hat{\varepsilon}_2>$, $<L, K>$ con $L = K = P$, P sea fiel, preserve (P.C.C.) y cumpla con (1.ii).

<u>Demostración.</u> De la definición de morfismo entre adjunciones tenemos que el siguiente diagrama conmuta y la definición de Adj-morfismo se cumple, y $P: M_1 \to M_2$ es un Adj-morfismo.

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "X_1^{\bullet}"] \arrow[d, "P"'] & C_1 \arrow[r, "X_1"] \arrow[d, "P"] & C_1 \arrow[d, "P"] \\ C_2 \arrow[r, "X_1^{\bullet}"'] & C_2 \arrow[r, "X_2"'] & C_2 \end{tikzcd}$$

i.e., $PX_1^{\bullet} = X_2^{\bullet}P$ y $PX_1 = X_2 P$.

<u>Observación.</u> Notemos que en la categoría $C_2^{C_1}$, cuyos objetos son functores de C_1 en C_2 y cuyos morfismos son transformaciones naturales, la clase $[S_1]$ de functores naturalmente isomorfos a PX_1(ó a X_2P) puede contener composiciones de functores $P'X_1$ y X_2P' tales que $P'X_1 \cong X_2P'$, P' es fiel, preserva (P.C.C.) y cumple con (1.f). Luego, en general, entre M_1 y M_2 no necesariamente debe existir un único Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$.

Por otro lado, de $P'X_1 \cong X_2 P'$ no se implica que $P'X_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P'$ dado que no existe razón alguna para suponer que $<P', p'>$ sea un morfismo entre las adjunciones $<X_1, X_1^{\bullet}, C_1\ \hat{\eta}_1, \hat{\varepsilon}_1>$ y $<X_2, X_2^{\bullet}, C_2\ \hat{\eta}_2, \hat{\varepsilon}_2>$.

Por otro lado, tenemos el siguiente teorema.

<u>Teorema (5.4)</u> Dadas dos adjunciones

$$<F,G,\hat{\eta},\hat{\varepsilon}>:A\to B, \quad <F",G",\hat{\eta}",\hat{\varepsilon}">:B\to D$$

La composición de functores lleva a la adjunción

$$<F"F,GG",G\hat{\eta}"Fo\eta,\ \hat{\varepsilon}"oF"\hat{\varepsilon}G"> : A\to D$$

(ver IV-8, [16]).

También definimos para dos adjunciones entre las mismas categorías

$$<F,G,\psi,\hat{\eta},\hat{\varepsilon}>,\ <F_o,\ G_o,\ \psi_o,\ \hat{\eta}_o,\ \hat{\varepsilon}_o> : A\to B$$

un par $<T_1, T_2>$ conjugado, como dos transformaciones naturales

$$T_1:F\to F_o, \quad T_2:G\to G_o$$

tales que el siguiente diagrama conmuta para cualquier par de objetos $x\varepsilon A$ y $a\varepsilon B$

$$\begin{array}{ccccc} & B(F_o x,a) & \overset{C_o}{\cong} & A(x,G_o a) & \\ (T_{1x})^* = B(T_{1x},a) & \downarrow & & \downarrow & A(x,T_{2a}) = (T_{2a})^* \\ & B(Fx_{,a}) & \overset{C}{\cong} & A(x,Ga) & \end{array}$$

(ver IV-8, [16]).

Ahora a partir de las adjunciones

$$<X_1,X_1^{\bullet},\ \hat{\eta}_1,\ \hat{\varepsilon}_1> : C_1 \to C_1,\ <X_2,X_2^{\bullet},\ \hat{\eta}_2,\ \hat{\varepsilon}_2> : C_2\to C_2 \quad y$$

suponiendo la existencia de otra adjunción

$$<P,P^{\bullet},\bar{\eta},\tilde{\varepsilon}>: C_1\to C_2$$

podemos formar las adjunciones composición

$$\langle X_2P,\ PX_2^{\bullet}, P^{\bullet}\hat{\eta}_2 Po\tilde{\eta},\ \hat{\varepsilon}_2 o X_2 \tilde{\varepsilon} X_2^{\bullet}\rangle : C_1 \to C_2 \tag{5.c}$$

y

$$\langle PX_1,\ X_1^{\bullet}P^{\bullet},\ X_1^{\bullet}\tilde{\eta}X_1 o\hat{\eta}_1,\ \tilde{\varepsilon}oP\hat{\varepsilon}_1 P^{\bullet}\rangle : C_1 \to C_2 \tag{5.d}$$

utilizando para esto la definición anterior. Luego tenemos el siguiente resultado.

Proposición (5.5). Dados sistemas adjuntos M_1 y M_2 una condición suficiente para que exista al menos un Adj-morfismo $P:M_1 \to M_2$ en la categoría Adj, entre ellos, es que exista un functor fiel $P:C_1 \to C_2$ con adjunto derecho $P^{\bullet}:C_2 \to C_1$ el cual preserva productos contables y que para las adjunciones (5.c) y (5.d) exista un par conjugado $\langle \hat{T}_1, \hat{T}_2\rangle$ con $\hat{T}_1 : PX_1 \to X_2P$ isomorfismo natural, $\hat{T}_2 : X_1^{\bullet}P^{\bullet} \to P^{\bullet}X_2^{\bullet}$ transformación natural y cumpla con (1.f).

Demostración. Es inmediato de la definición de Adj-morfismo, la definición de par conjugado, el hecho de que P tiene adjunto derecho (1-F) y el hecho de que $\hat{T}_1$ es isomorfismo natural.

En el caso particular de que X_1, X_2 y P sean equivalencias tenemos el siguiente resultado.

Proposición (5.6) Sean $X_1:C_1 \to C_1$, $X_2:C_2 \to C_2$ y $P:C_1 \to C_2$ equivalencias con adjuntos derechos $X_1^{\bullet}$, $X_2^{\bullet}$ y $P^{\bullet}$ respectivamente, entonces

$$PX_1 \cong X_2P \quad \leftrightarrow \quad P^{\bullet}X_2^{\bullet} \cong X_1^{\bullet}P^{\bullet}$$

Demostración. Supongamos que $PX_1 \cong X_2P$ y tomemos las adjunciones (5.c) y (5.d). Entonces, por I (1.24), PX_1, X_2P, $P^{\bullet}X_2^{\bullet}$ y $X_1^{\bullet}P^{\bullet}$ son equivalencias también; del (Teorema 2 pag. 98 [16]) existe $\hat{T}_2$ dado que estamos suponiendo que existe $\hat{T}_1$. Por otro lado tenemos que

$X_2PX_1^{\bullet}P^{\bullet} \cong PX_1X_1^{\bullet}P^{\bullet} \cong 1_{C_2} \cong X_2PP^{\bullet}X_2^{\bullet} \Rightarrow P^{\bullet}X_2^{\bullet} \cong X_1^{\bullet}P^{\bullet}$ por ser X_2P equivalencia, i.e., X_2P refleja isomorfismos I (1.17).

La demostración en el otro sentido es completamente análoga.

Los resultados (5.3) y (5.5) establecen condiciones suficientes para la existencia de Adj-morfismos, sin embargo queda abierta la posibilidad de caracterizarlos, i.e., dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de éstos. Por otro lado, el resultado (5.6) establece un interesante vínculo entre los endofunctores X_1, X_2 y P con sus adjuntos derechos, cuando éstos son equivalencias. Esencialmente establece que si $P:(X_1,Q_1,\delta_1,U_1,\tau_1,Y_1,\beta_1) = M_1 \to (X_2,PQ_1,P\delta_1,PU_1,P\tau_1,PY_1,P\beta_1) \cong M_2$ es un Adj-morfismo, entonces $P^{\bullet}$ parece ser un Adj-morfismo $P^{\bullet}:(X_2^{\bullet},PQ_1,P\delta_1,PU_1,P\tau_1,PY_1,P\beta_1)=\tilde{M}_2\to(X_1^{\bullet},\tilde{Q}_1,\tilde{\delta}_1,\tilde{U}_1,\tilde{\tau}_1,\tilde{Y}_1,\tilde{\beta}_1)=\tilde{M}_1$ donde $\tilde{Q}_1\cong Q_1$, $\tilde{U}_1\cong U_1$, $\tilde{Y}_1\cong Y_1$, $\tilde{\delta}_1\cong\delta_1$, $\tilde{\tau}_1\equiv\tau_1$ y $\tilde{\beta}_1\cong\beta_1$, pero $\tilde{M}_1$ y $\tilde{M}_2$ no son sistemas Adjuntos, porque $X_2^{\bullet}PQ_1 \not\cong PQ_1$ y $P\delta_1:PX_1Q_1 \to PQ_1$, $X_1^{\bullet}\tilde{Q}_1 \not\cong \tilde{Q}_1$ y $\tilde{\delta}_1:X_1\tilde{Q}_1 \to \tilde{Q}_1$; luego $P^{\bullet}$ no es Adj-morfismo. Sin embargo, notemos que si X_1, X_2 y P son isomorfismos functoriales, entonces $\tilde{M}_1$ y $\tilde{M}_2$ son sistemas Adjuntos y $P^{\bullet}:\tilde{M}_2 \to \tilde{M}_1$ es Adj-morfismo con $\tilde{M}_2 \cong M_2$ y $\tilde{M}_1 \cong M_1$.

Ahora veamos porque Adj es cuasi-categoría. Sean $P:M_1\to M_2$ y $\hat{P}:M_2\to M_3$ Adj-morfismos, entonces $PX_1\cong X_2P$ y $\hat{P}X_2\cong X_3\hat{P}$, pero esto implica que $\hat{P}PX_1\cong X_3\hat{P}P$ porque $\hat{P}PX_1\cong\hat{P}X_2P\cong X_3\hat{P}P$. Además tenemos que

$$M_1 \xrightarrow{P} ((X_2,PQ_1,P\delta_1,PU_1,P\tau_1,PY_1,P\beta_1) \equiv M_2) \xrightarrow{\hat{P}} (X_3,\hat{P}PQ_1,\hat{P}P\delta_1,\hat{P}PU_1,\hat{P}P\tau_1,\hat{P}PY_1,\hat{P}P\beta_1) \cong M_3,\ \text{i.e.,}$$

$$M_1 \xrightarrow{\hat{P}P} (X_3,\hat{P}PQ_1,\hat{P}P\delta_1,\hat{P}PU_1,\hat{P}P\tau_1,\hat{P}PY_1,\hat{P}P\beta_1) \equiv M_3 \text{ con}$$

$M_3 = (X_3,Q_3,\delta_3,U_3,\tau_3,Y_3,\beta_3)$ y $Q_3 \equiv \hat{P}Q_2 \cong \hat{P}PQ_1$, $\delta_3 \cong \hat{P}\delta_2 \equiv \hat{P}P\delta_1$, $U_3 \equiv \hat{P}U_2 \cong \hat{P}PU_1$, $\tau_3 \cong \hat{P}\tau_2 \cong \hat{P}P\tau_1$, $Y_3 \equiv \hat{P}Y_2 \cong \hat{P}PY_1$, $\beta_3 \cong \hat{P}\beta_2 \equiv \hat{P}P\beta_1$;

Por otro lado, composición de functores fieles es un functor fiel, composi ción de functores que preservan (P.C.C.) es un functor que preserva (P.C.C.). Por lo que $\hat{P}\,P: M_1 \to M_3$ es un Adj-morfismo. Ahora sea $\hat{\hat{P}} : M_3 \to M_4$ un Adj-morfismo, entonces

$\hat{\hat{P}}\,(\hat{P}P): M_1 \xrightarrow{\hat{P}P} M_3 \xrightarrow{\hat{\hat{P}}} M_4$; $(\hat{\hat{P}}\hat{P})P: M_1 \xrightarrow{P} M_2 \xrightarrow{\hat{\hat{P}}\hat{P}} M_4$ y $\hat{P}X_3 \cong X_4\hat{\hat{P}}$, lo que implica que $\hat{\hat{P}}(\hat{P}P)X_1 = \hat{\hat{P}}(\hat{P}PX_1) \cong \hat{\hat{P}}(X_3\hat{P}P) \cong X_4\hat{\hat{P}}(\hat{P}P)$ $\therefore$

$\hat{\hat{P}}(\hat{P}P)\ X_1 \cong X_4\ \hat{\hat{P}}(\hat{P}P)$, (la composición de functores es asociativa) y por otra parte, tenemos $(\hat{\hat{P}}\hat{P})PX_1 \cong (\hat{\hat{P}}\hat{P})X_2P \cong X_4(\hat{\hat{P}}\hat{P})P \therefore (\hat{\hat{P}}\hat{P})PX_1 \cong X_4(\hat{\hat{P}}\hat{P})P$, pero como la composición de functores es asociativa, se cumple el axioma (1.a)-I. El axioma (1.b)-I es claro que se cumple, porque

$$P = 1_{C_1} : M_1 \to M_1$$

es Adj-morfismo, y para cualquier otro $P: M_1 \to M_2$ Adj-morfismo, se cumple

$$M_1 \xrightarrow{1_{C_1}} M_1 \xrightarrow{P} M_2 = M_1 \xrightarrow{P} M_2 = M_1 \xrightarrow{P} M_2 \xrightarrow{1_{C_2}} M_2 .$$

También es claro que existe un functor

$$\hat{F} : \mathrm{Adj} \to \hat{C}\mathrm{at}_{pc}$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[d, "P"'] & & C_1 \arrow[d, "P"] \\ M_2 \arrow[r, phantom, ""] & {} \arrow[u, phantom, "\overset{\hat{F}}{\longmapsto}"] & C_2 \end{tikzcd}$$

Para cada $P:M_1 \to M_2$ Adj-morfismo

,i.e., $\hat{F}(M_1) = C_1$, $\hat{F}(M_2) = C_2$ y $\hat{F}(P) = P$, el cual es fiel.

En lo que respecta a la teoría de latices, notemos que cada $\hat{c}\mathrm{at}_{pc}$-objeto puede verse como una latiz como sigue:

Dados dos objetos a_1 y a_2 en C_1 en un $\hat{c}\mathrm{at}_{pc}$-objeto, están relacionadas, si existe un C_1-morfismo $L: a_1 \to a_2$, i.e., los morfismo en C_1 establecen una relación en ob(C_1). Es claro que ésta relación es reflexiva ($a_1 \xrightarrow{1_{a_1}} a_1$ siempre existe para cada a_1 en C_1), y transitiva (si $L: a_1 \to a_2$ y $\hat{L}: a_2 \to a_3$ $\Rightarrow \hat{L}\ L: a_1 \to a_3$) porque C_1 es categoría; como C_1 tiene (P.C.C.), dados dos C_1-objetos a_1, a_2 es posible mostrar que "$a_1 x a_2$", el producto, puede verse como el inf(a_1, a_2) y que "$a_1 \amalg a_2$", el coproducto, puede verse como el sup(a_1,a_2) (ver (I-2)); por lo que un posible enfoque para la teoría de sistemas Adjuntos puede ser a través de la teoría de latices. Además, como la mayoría de las lógicas de interés para la lógica matemática, pueden ser vistas como latices con propiedades adicionales (2-I), entonces cat_{pc} establece un universo muy grande para asociar lógicas con cat_{pc}-objetos, como veremos en un caso particular en el siguiente capítulo. En consecuencia, los sistemas Adjuntos tendrán lógicas asociadas diferentes, dependiendo de los $\hat{c}at_{pc}$-objetos sobre los cuales estén definidos. Esta es precisamente una de las propiedades que debemos de esperar de un universo de modelos como lo es Adj, dado que de esta manera da lugar a una gran variedad de posibles modelos con lógicas asociadas también muy variadas. Por ejemplo, en la física es conocido que los modelos usuales en mecánica cuantica tienen asociada una lógica cuántica, distinta de la lógica clásica asociada a modelos de mecánica clásica (ver [6]), por lo que un universo de modelos adecuado para la física debe tener asociaciones al menos con la lógica cuántica y la lógica clásica.

Observaciones: La proposición (5.3) no es corolario de la proposición (5.5) ni viceversa, porque si existe un morfismo entre las adjunciones $<X_1, X_1^{\bullet}, \psi_1, \hat{\eta}_1, \hat{\varepsilon}_1>$ $<X_2, X_2^{\bullet}, \psi_2, \hat{\eta}_2, \hat{\varepsilon}_2>$, $<P, P>$ con P fiel preservando (P.C.C.) y cumpliendo (1.f), no se implica que el functor P deba tener adjunto derecho, y viceversa, si existe un functor fiel P con adjunto derecho $P^{\bullet}$, el cual preserva productos contables y que para las adjunciones (5.C) y (5.D) exista un par conjugado $<\hat{T}_1, \hat{T}_2>$ con $\hat{T}_1: PX_1 \cong X_2P$, $\hat{T}_2: X_1^{\bullet} P^{\bullet} \to P^{\bullet}X_2^{\bullet}$ trasformaciones naturales y cumpla con (1.f), no se implica que $PX_1 = X_2P$ y $PX_1^{\bullet} = X_2^{\bullet} P$. Sin embargo, si se cumple la condición de la proposición (5.3), entonces tenemos un Adj-morfismo $P: M_1 \to M_2$ para el cual $PX_1^{\bullet} = X_2^{\bullet}P$, condición requerida en varios resultados anteriores. Por otro lado, notémos que si X_1, X_2 y P son isomorfismos functoriales, entonces $PX_1 \cong X_2P$ y $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Sin embargo, si X_1 y X_2 son isomorfismos functoriales y P no lo es o si P es isomorfismo functorial únicamente, o si X_1, X_2 y P son equivalencias, no tiene porque suceder que $PX_1 \cong X_2P$ ni que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$.

En esta última sección pretendemos dejar claro que en el nivel de la "Meta-teoría", i.e., en el nivel de la "teoría de la Teoría" (proposiciones sobre proposiciones en la teoría) los resultados de este capítulo son evidentemente ciertos y que muchos más lo son, de acuerdo al Primer meta-teorema sobre sistemas Adjuntos. Por otra parte, mostramos que se debe cuidar la categoría C_1 donde definamos los sistemas Adjuntos, por que esta puede ser una categoría de sistemas o pueden aparecer patologías (Paradojas) en otro sentido cuando la categoría C no es pequeña. Sin embargo, esto no afecta la teoría establecida, como lo establece el Segundo meta-teorema sobre sistemas Adjuntos a través del Principio de Correspondencia. Además, establecemos condiciones suficientes para la existencia de Adj-morfismos, hacemos algunas observaciones sobre estos, mostramos que Adj es una cuasi-categoría, establecemos un vínculo entre la categoría $\hat{c}at_{pc}$, la toería de latices y la lógica con lo cual queda establecida una relación entre la teoría de sistemas Adjuntos, latices y lógica, y finalmente establecemos varias propiedades sobre Adj-morfismos.

Nos parece importante, hacer hincapie, en que un universo de modelos como Adj debe tener una amplia variedad de modelos con lógicas asociadas también muy variadas, entre mayor sea la variedad mejor será este, por ejemplo, en el caso de la Ingeniería sería muy interesante poder modelar en este universo, los sistemas de Inteligencia Artificial con Lógicas no-clásicas, i.e., mostrar que son sistemas Adjuntos, lo cual nos parece que es cierto.

En el capítulo siguiente daremos algunos resultados sobre sistemas Adjuntos en categorías específicas contenidas en $\hat{C}at_{pc}$, aprovechando en cada caso la estructura particular de la categoría; daremos algunos ejemplo conocidos en la literatura y algunos "nuevos" finalmente comentaremos sobre varias lineas de investigación ya establecidas y nuevas lineas de investigación, también haremos algunas observaciones generales sobre las ideas establecidas en este trabajo.

III APLICACIONES, EJEMPLOS Y COMENTARIOS

En este último capítulo damos algunas aplicaciones de los resultados obtenidos en el capítulo anterior para ciertas clases específicas de categorías, obteniendo nuevos resultados y aplicando también resultados conocidos a nuevas clases de categorias. Posteriormente presentamos algunos ejemplos y finalmente los comentarios generales del trabajo y perspectivas.

. En la cuasi-categoria $\hat{\mathrm{Cat}}^{-}_{pc}$ existen clases de cuasi-categorías interesantes que pueden servir en principio como categorías "base" para definir sistemas adjuntos sobre ellas, algunas de éstas aún no usadas en el modelado de sistemas. A continuación damos algunos ejemplos de éstas clases de categorias, pero presentadas como sub-cuasi-categorías de $\hat{\mathrm{Cat}}_{pc}$. Entre las usadas, aunque parcialmente, están la cuasi-categoría de categorías abolianas I(2.10) con productos y coproductos contables y functores fieles exactos (2-I), y la cuasi-categoría de categorías Algebráicas (2-I) y functores Algebráicos (2-I). Esta última es una sub-cuasi-categoría plena de $\hat{\mathrm{Cat}}_{pc}$ (2-I). Entre las practicamente no usadas, esta la cuasi-categoría de topos con productos y coproductos contables (2-I) y functores lógicos fieles (2-I). Denotaremos por Abel, $\hat{\mathrm{Alg}}$ y Top respectivamente. Las cuasi-categorías que acabamos de mencionar.

Los ejemplos anteriores son una muestra del potencial que tiene la cuasi-categoría $\hat{\mathrm{Cat}}_{pc}$ para definir sobre ella sistemas Adjuntos y en consecuencia del potencial que tiene la cuasi-categoría Adj para "modelar" sistemas, dada la variedad de estructuras existentes en $\hat{\mathrm{Cat}}_{pc}$.

1. Resultados sobre sistemas Adjuntos en Alg.

En esta sección presentamos una serie de resultados sobre Alcanzabilidad, observabilidad y realización de Sistemas Adjuntos definidos en Alg como aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Tomemos el sistema Adjunto $M_1 = (X_1, Q_1, \delta_1, V_1, \zeta_1, Y_1, \beta_1)$ definido sobre una categoría Algebráica (A,U) (2-I) y el sistema Adjunto $M_2 = (X_2, Q_2, \delta_2, V_2, \zeta_2, Y_2; \beta_2)$ definido sobre set tal que $UX_1 \cong X_2U$, U es fiel porque todo functor que olvida es fiel. Entonces si $M_2 \cong (X_2, UQ_1, U\delta_2, UV_1, U\zeta_1, UY_1, U\beta_1)$, podemos establecer los siguientes resultados:

<u>Proposición (1.1)</u>. Sea $U : A \to Set$ un functor tal que (A,U) es una categoría Algebráica y $UX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}U$ entonces (u.s.i.): m_2 es $\overline{U(\mu_1)}$-observable $\leftrightarrow$ M_1 es μ_1-observable.

<u>Demostración</u>. Se sigue del Teorema I (2.1), el corolario I (2.2), el Lema II (1.2) y el Lema II (1.4).

<u>Proposición (1.2).</u> Sea $U : A \to Set$ un functor pleno tal que (A,U) es una categoría Algebráica y $UX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}U$, entonces (u.s.i.):

(1.2.1) si M_2 es $\overline{U(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Rightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable;
(1.2.2) M_2 es $\overline{U(\mu_1)}$-Observable $\Leftrightarrow$ M_1 es μ_1-observable;
(1.2.3) si M_2 es $(\overline{U(\varepsilon_1)}, \overline{U(\mu_1)})$-canónico $\Rightarrow$ M_1 es (ε_1, μ_1)-canónico.

<u>Demostración</u>. Se sigue del Teorema I (2.1), el corolario I (2.2), el Teorema I (1.41) y los Lemas I ((1.1), (1.2), (1.3) y (1.4)).

<u>Corolario (1.3)</u>. Sea $U : A \to Set$ un functor pleno tal que (A,U) es una categoría Algebráica y X_1, X_2 son equivalencias;

entonces (u.s.i.) valen (1.2.1), (1.2.2) y (1.2.3).

<u>Demostración</u>. Es inmediato de que $UX_1 \cong X_2 U \Rightarrow UX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}U$ (ver II (2.1)) y

la proposición anterior .

Ahora notemos que si pedimos al functor U que preserve coproductos contables y sea tal que $UX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}U$ entonces es válida la proposición II (3,1); si además pedimos que refleje coproductos contables, entonces también es válida la proposición II (3,2). Por lo tanto, para el functor $U : A \to Set$ que cumple con las condiciones anteriores son válidos los teoremas II (3.5), II (3.6), II (3,8), II (3,9), II (3.11) y II (3.12) sobre realización de sistemas Adjuntos.

Por otro lado, como consecuencia de las definiciones dadas en (2-I), los teoremas I (2.1), I (2.3), el corolario I (2.2) y proposiciones I (2.5) y I (2.6), tenemos que Alg es una sub-cuasi-categoría plena de $\hat{C}at_{pc}$ como ya habíamos mencionado anteriormente, por lo que podemos construir la cuasi-categoría Adj (Alg) de sistemas Adjuntos sobre Alg, la cual cumple los mismos axiomas que Adj, de aquí que Adj (Alg) sea una sub-cuasi-categoría de Adj y podamos establecer los siguientes resultados:

<u>Proposición (1.4</u>. Sea $P : M_1 \to M_2$ un Adj (Alg) morfismo, entonces (u.s.i.):

Si M_1 es ε_1-Alcanzable $\Rightarrow$ M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable.

<u>Demostración</u>. Se sigue de la proposición I (2.6), la definición de Adj-morfismo y el Lema II (1.1).

<u>Proposición (1.5)</u>. Sea $P : M_1 \to M_2$ un Adj (Alg)-morfismo tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$, entonces (u.s.i.):

(1.5.1) M_2 es $\overline{P(\varepsilon_1)}$-Alcanzable $\Leftrightarrow$ M_1 es ε_1-Alcanzable;

(1.5.2) M_2 es $\overline{P(\mu_1)}$-Observable $\Leftrightarrow$ M_1 es μ_1-Observable;

(1.5.3) M_2 es $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-canónico $\Leftrightarrow$ M_1 es (ε_1,μ_1)-canónico.

Demostración. Se sigue de las proposiciones I (2.5), I (2.6), la definición de Adj-morfismo, los teoremas I (1.35), I (1.4) y los Lemas II (1.1), II (1.2), II (1.3) y II (1.4).

Corolario (1.6). Sea $P : M_1 \to M_2$ un Adj (Alg)-morfismo y X_1, X_2 equivalencias, entonces (u.s.i.) valen (1.5.1), (1.5.2) y (1.5.3).

Demostración. Es inmediato de que $PX_1 \cong X_2P \to PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$ por ser X_1 y X_2 equivalencias y la proposición anterior.

En lo que se refiere a teoría de Realización tenemos los siguientes resultados:

Proposición (1.7). Sea $P : M_1 \to M_2$ un Adj (Alg)-morfismo tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (u.s.i.):

(1.7.1) Si H_1 es la respuesta total de $M_1 \Rightarrow PH_1$ es la respuesta total de M_2;

(1.7.2) Si ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de $M_1 \Rightarrow P_1H_m^n$ la matriz de Hankel de M_2.

(1.7.3) Si (r_1,σ_1) es una (ε_1,μ_1)-Factorización de $H_1 \Rightarrow (Pr_1, P\sigma_1)$ es una $(\overline{P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-Factorización de H_2.

Demostración. Se sigue de las proposiciones I (2.6) y II (3.1).

Proposición (1.8). Sea $P : M_1 \to M_2$ un Adj (Alg)-morfismo tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (u.s.i.):

(1.8.1) H_1 es la respuesta total de $M_1 \Leftrightarrow PH_1$ es la respuesta total de M_2;

(1.8.2) ${}_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de $M_1 \Leftrightarrow P_1H_m^n$ es la matriz de Hankel de M_2;

(1.8.3) (r_1,σ_1) es una (ε_1,μ_1)-Factorización de $H_1 \Leftrightarrow (Pr_1,P\sigma_1)$ es una

$\overline{(P(\varepsilon_1)}, \overline{P(\mu_1)})$-Factorización de H_2.

Demostración. Se sigue de la proposición I (2.6), Teoremas I (1.35), I (1.41) y la Proposición II (3.2).

Teorema (1.9). Si $P : M_1 \to M_2$ es un Adj (Alg)-morfismo tal que $PX_1^{\bullet} \cong X_2^{\bullet}P$. Entonces (u.s.i.) valen los teoremas II (3.5), II (3.6), II (3.8), II (3.9), II (3.11) y II (3.12) sobre realización de sistemas Adjuntos modificándolos en tanto que $P : M_1 \to M_2$ debe cumplir unicamente lo que se pide en este teorema.

Demostración. Se sigue de la proposición I (2.6), teoremas I (1.35), I (1.41), las proposiciones (1.7), (1.8) y los teoremas II (3.5), II (3.6), II (3.8), II (3.9), II (3.11) y II (3.12).

Observaciones. Notemos que la clase de sistemas Adjuntos observables sobre una categoría algebráica (A,U), está relacionada con la clase de sistemas Adjuntos observables sobre Set y viceversa, a través del hecho de que U preserva y refleja sistemas Adjuntos observables. U también refleja sistemas Adjuntos canónicos y Alcanzables. Por otro lado, en la sub-cuasi-categoría plena de Adj (Alg) que denotaremos Decomp(Alg), cuyos objetos son sistemas descomponibles sobre Alg y donde $\hom_{Adj(Alg)}(M_1,M_2) = \hom_{Decomp(Alg)}(M_1,M_2)$ para cualquier pareja (M_1,M_2) de Decomp(Alg)-objetos, las clases de sistemas descomponibles Alcanzables y observables son cerradas y su intersección es la clase de sistemas descomponibles canónicos (por una clase cerrada de sistemas descomponibles ó Adjuntos respecto de una propiedad "q", entenderemos una clase única de sistemas descomponibles ó Adjuntos en la cual todos sus miembros tienen la propiedad "q"). Notemos también que por el Primer Meta-teorema sobre sistemas Adjuntos, se pueden establecer resultados sobre Alcanzabilidad y observabilidad finitas con relativa facilidad sobre los sistemas Adjuntos de Adj(Alg) según la sección 4 del capítulo II.

Ejemplos interesantes de categorias algebráicas son: Set, R-mod, Grp, Rng, R-Alg, Lat, SGrP y Mon entre las más usuales. Pset, latices α-completas, latices distributivas, BooAlg, BooAlg α-completas, Grupos Abelianos libres de torsión, C*-Algebras junto con el functor disco unitario, $compT_2$ y Grupos Abelianos compactos entre las menos usuales (ver III-32, [4]).

2. Resultados sobre sistemas Adjuntos en Abel.

A continuación presentamos algunos resultados sobre sistemas Adjuntos definidos en Abel, utilizando para esto un resultado de subcategorías Algebráicas, un teorema de representación para categorías abelianas completas (derechas) y un teorema de representación para categorías Abelianas algebráicas finitarias.

Teorema (2.1). Si (B,U) es una categoría algebráica y A es una subcategoría de B con functor inclusion $E : A \to B$ (encaje), entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

(2.1.1) (A,UE) es algebráica;

(2.1.2) A es reflectiva en B y contiene con cada morfismo su (regular ε,μ)-Factorización en B;

(2.1.3) A es reflectiva en B y contiene cada B-objeto, que es simultáneamente subobjeto de algún A-objeto y un objeto cociente regular de algún A-objeto (ver X-38 [4]).

Una categoría A es reflectiva en B si y solo si el functor inclusión $E : A \to B$ (encaje) tiene adjunto izquierdo $R : B \to A$.

Teorema (2.2). (Primer teorema de Representación para categorías Abelianas) (P.Freyd).

Cualquier categoría Abeliana pequeña C es isomorfa a una subcategoría plena exacta G de Ab. Equivalentemente, para cualquier categoría Abeliana pequeña C existe un Functor inclusión (encaje) $L : C \to Ab$ (ver 7.14 [19]).

Teorema (2.3). Sea A una categoría Abeliana completa (derecha) con generador proyectivo pequeño K. Sea R_1 el anillo de endomorfismos de K_1 y $F : A \to R_1$-mod un encaje exacto. Entonces,

Una categoría C es equivalente a R-mod $\Leftrightarrow$ ésta es una categoría Abeliana completa (derecha) con generador proyectivo pequeño (P. Freyd).

Es decir, existe un functor $H_0 : C \to$ R-mod el cual es equivalencia $\leftrightarrow$ C es una categoria Abeliana completa derecha con generador proyectivo pequeño K y R es el anillo de endomorfismos de K (ver 4.F, [19]).

Una categoría A es completa (derecha) si cualquier par de A-morfismos tiene un cokernel diferencia (1-I) y cualquier conjunto de A-objetos tienen coproducto. Un A-objeto K es un generador sí y sólo si el functor $hom_A(K_1 -)$: $A \to Ab$ es un encaje.

Corolario (2.4). Sea C una categoria Abeliana pequeña, sea $L : C \to Ab$ el functor inclusión (encaje) en Ab y sea $U_a : Ab \to Set$ el functor que olvida. Entonces,

(2.4.1) $(C, U_a L)$ es algebráica $\Leftrightarrow$ el functor L tiene adjunto izquierdo y C contiene con cada morfismo su (regular ε,μ)-Factorización en Ab;

(2.4.2) $(C, U_a L)$ es algebráica $\Leftrightarrow$ el functor L tiene adjunto izquierdo y contiene cada Ab-objeto que es simultáneamente subobjeto de algún C-objeto y un objeto cociente regulador de algún C-objeto.

Demostración. Es inmediato de los teoremas (2.1) y (2.2), porque (Ab,Ua) es una categoría algebráica (Ab ≅ z-mod, Ab es isomorfa a z-mod y R-mod es algebráica para cualquier anillo R).

En consecuencia, el corolario (2.4) caracteriza a las categorías Abelianas que son algebráicas, y en particular caracteriza los Abel-objetos que son categorias algebráicas. Luego, si un Abel-objeto resulta ser categoria algebráica, para los sistemas Adjuntos definidos sobre ésta, son aplicables los resultados obtenidos para Adj (Alg); y si no es categoría algebráica son aplicables los resultados obtenidos para Adj en el capítulo II.

Sea P_o : R-mod $\to$ C la equivalencia adjunto derecho e izquierdo de la equivalencia H_o : C $\to$ R-mod en el teorema (2.3); sean M_1 un sistema Adjunto definido sobre R-mod, M_2 un sistema Adjunto definido sobre C un Abel-objeto el cual es una categoría completa derecha con generador proyectivo pequeño. Entonces, por el teorema (2.3), es posible encontrar un Adj-morfismo P_o : $M_1 \to M_2$ a través de la equivalencia P_o : R-mod $\to$ C para sistemas Adjuntos M_1 y M_2 adecuados. Esto nos guía al siguiente resultado.

Corolario (2.5). Sea $P_o : M_1 \to M_2$ el Adj-morfismo mencionado antes con X_1, X_2 equivalencias. Sea R cualquier anillo y se U_o un R-módulo proyectivo finitamente generado, con matriz de Hankel, ${}_1H^n_m : U_o \to Y_o$ (donde $U_o = X_1^n U_1$ y $Y_o = X_1^{\cdot m} Y_1$) para M_1. Respectivamente, sea $P_o(U_o)$ el C-objeto obtenido bajo el Adj-morfismo P_o y $P_o\,{}_1H^n_m : P_o U_o \to P_o Y_o$ la matriz de Hankel de M_2 (corolario (3.4-II)). Entonces (u.s.i.)

(2.5.1) ${}_1H^n_m$ tiene una realización M_1 con módulo de estados Q_1 finitamente generado $\Leftrightarrow P_o\,{}_1H^n_m$ es recurrente por renglones;

(2.5.2) $P_o\,{}_1H^n_m$ tiene una realización M_2 con objeto de estados $Q_2 \cong P_o(Q_1)$

$\Leftrightarrow {}_1H_m^n$ es recurrente por renglones;

(2.5.3) Las afirmaciones (2.5.1) y (2.5.2) son equivalentes.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición (5.13 [12]), la definición (5.1[12]), el corolario (3.4-II), el corolario (3.7-II) y el hecho de que P_o preserva y refleja coproductos contables y triángulos conmutativos.

De manera completamente análoga tenemos el siguiente resultado.

Corolario (2.6). Sea $P_o : M_1 \to M_2$ el Adj-morfismo mencionado antes con X_1, X_2, equivalencias. Sea R cualquier anillo y sea U_o un módulo libre finitamente generado, con matriz de Hankel ${}_1H_m^n : U_o \to Y_o$ (donde $U_o = X_1^n U_1$ y $Y_o = X_1^{\cdot m} Y_1$) para M_1. Respectivamente sea $P_o(U_o)$ el C-objeto obtenido bajo el Adj-morfismo P_o y $P_o\,{}_1H_m^n : P_o U_o \to P_o Y_o$ la matriz de Hankel de M_2 ((corolario (3.4-II)). Entonces (u.s.i.).

(2.6.1) ${}_1H_m^n$ tiene una realización M_1 con módulo libre de estados Q_1 finitamente generado $\Leftrightarrow P_o\,{}_1H_m^n$ es recurrente por renglones;

(2.6.2) $P_o\,{}_1H_m^n$ tiene una realización M_2 con objeto de estados $Q_2 \simeq P_o(Q_1)$ $\Leftrightarrow {}_1H_m^n$ es recurrente por renglones;

(2.6.3) Las afirmaciones (2.5.1) y (2.6.2) son equivalentes.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición (5.14[12]), la definición (5.1[12]), el corolario (3.4-II) el corolario (3.7-II) y el hecho de que P_o preserva y refleja coproductos contables y triangulos conmutativos.

Observaciones: Claramente ambos resultados son consecuencia del primer me tateorema sobre sistemas Adjuntos. Por otro lado, en la cuasi-categoría Decomp (Abel) de todos los sistemas Descomponibles tomemos la sub-cuasi-categoría cuyos objetos son las categorías completas derechas con generador proyectivo pequeño y Abel-morfismos entre ellas. Es claro que en esta subcategoría valen los corolarios (2.5) y (2.6) para sistemas Descomponibles definidos sobre cada uno de sus objetos de manera adecuada.

3. Resultados sobre sistemas Adjuntos en $\widehat{Top}$.

Como en las dos secciones anteriores presentamos algunos resultados sobre sistemas Adjuntos definidos en $\widehat{Top}$, utilizando para esto algunos resultados de teoría de topos.

Proposición (3.1). Para cualquier objeto c en un topo T, Ω^c es inyectivo. En particular Ω es inyectivo, donde Ω es el clasificador de subobjetos del topo (ver (6.4) [20]).

Proposición (3.2). En un topo los productos fibrados (pull backs) preservan epimorfismos, i.e., si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "e'"] \arrow[d, tail, "f'"'] & B \arrow[d, tail, "f"] \\ A \arrow[r, two heads, "e"'] & C \end{tikzcd}$$

es producto fibrado y e es epimorfismo, entonces también lo es e' (ver (6.5) [20]).

Proposición (3.3). Si T es un topo arbitrario, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(3.3.1) Cualquier objeto c en el topo es proyectivo;

(3.3.2) Todos los epimorfismos en el Topo se escinden, i.e.,

Para cada epimorfismo $e : A \twoheadrightarrow c$ existe un T-morfismo $m : c \rightarrow A$ tal que $em = 1c$;

(3.3.3) El Topo T satisface el axioma de elección (ver (6.7), (7.5), [20] y (2.1) [21]).

Proposición (3.4). Si en un topo T se satisface el axioma de elección, entonces es Booleano, i.e., la fórmula (Proposición Lógica) $(\forall\, x \in \Omega)$ $(XV\neg X)$ (conocida como el principio del Tercer excluido) es válida en el lenguaje interno L(T) del Topo (ver (7.4), (7.6), [20] ó (12.1), (5), [21]) donde "$\neg X$" significa "NO X".

Corolario (3.5). Sea M_1 un sistema Adjunto sobre un Top-objeto T con matriz de Hanel ${}_1H^n_m$. Entonces si $X_1^{\bullet n}Y_1 \cong \Omega^{C_n}$ para T-objetos C_n y para toda $n \in \mathbb{N}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(3.5.1) ${}_1H^n_m$ tiene una realización M_1 la cual es observable en tiempo $d>0$, con $d \in Z$;

(3.5.2) ${}_1H^n_m$ es recurrente por columnas de grado d.

Demostración. Es inmediato de la proposición (3.1) y de 5.9, [12].

Corolario (3.6). Sea T un $\hat{T}$op-objeto el cual satisface el axioma de elección y sea M_1 un sistema Adjunto sobre T con matriz de Hankel ${}_1H^n_m$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(3.6.1) ${}_1H^n_m$ tiene una realización M_1 la cual es alcanzable en tiempo $d>0$, con $d \in Z$;

(3.6.2) ${}_1H^n_m$ es recurrente por renglones de grado d.

Demostración. Es inmediato de la proposición (3.3) y de 5.8, [12].

Proposición (3.7). Sea T un $\hat{T}$op-objeto el cual satisface el axioma de elección y sea M_1 un sistema Adjunto sobre T con matriz de Hankel, ${}_1H_m^n$. Entonces si $X_1^m U_1$ es Neteriano y el coproducto de un número finito de T-objetos es nuevamente Neteriano, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(3.7.1) ${}_1H_m^n$ es recurrente por columnas;

(3.7.2) ${}_1H_m^n$ tiene una realización M_1 con Q_1 un T-objeto de estados Neteriano;

(3.7.3) El T-objeto de estados canónico es Neteriano.

Demostración. Por la definición de Topo (2-I), el Teorema (23.7 [14]) y la proposición (3.2), un topo cumple con la definición 2 del Apéndice B en [12]; entonces, en un topo son válidas la proposición 4 y el corolario 5 del Apéndice B en [12], por lo que la proposición (3.7) es consecuencia de la proposición (3.3) y el teorema 6 del Apéndice B en [12].

El corolario (3.6) y la proposición (3.7) hacen resaltar el hecho de que en un topo T similar a set, como lo es aquel que satisface el axioma de elección, debemos esperar también propiedades similares a las de set. Por ello pensamos que sería posible extender la definición de un functor clásico X : Set → set y los resultados 5.6, 5.7 y 5.8 en [2], a un topo T suficientemente parecido a set y especulamos que éste debe ser un Topo con productos, coproductos y bien punteado; esto último significa que el topo es no-degenerado (el objeto inicial "0" y el objeto terminal "1" son tales que $0 \not\cong 1$) y tiene al objeto terminal "1" como separador (generador) (ver cap. 5, [21]).

Por otro lado, el vínculo entre topos y lógica hace posible que conceptos definibles en un sistema Adjunto sobre un Top-objeto, a través de morfis mos con ciertas características, o ciertos diagramas conmutativos, sea posible interpretarlos en el contexto de la lógica asociada al Topo particular en el que se esté trabajando; por ejemplo conceptos como Alcanzabilidad, observabilidad tienen las siguientes interpretaciones:

Para Alcanzabilidad, del diagrama (1.c) II y de I en [41] tenemos que

$$X_1^{n+1}U_1 \xrightarrow{X_1 in_n} X_1\,(U_1 V X_1 U_1 V X_1^2 U_1 V\ldots) \xrightarrow{X_1 r_1} X_1 Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_1 \equiv$$

$$X_1^{n+1}U_1 \xrightarrow{in_{n+1}} (U_1 V X_1 U_1 V X_1^2 U_1 V\ldots\ldots) \xrightarrow{r_1} Q_1 \qquad (3.A)$$

$$y \quad U_1 \xrightarrow{in_o} (U_1 V X_1 U_1 V X_1^2 U_1 V\ldots\ldots) \xrightarrow{r_1} Q_1 \equiv U_1 \xrightarrow{\zeta_1} Q_1$$

además si $r_1 \in \varepsilon_1$ y el $\hat{\text{T}}$op-objeto T donde está definido el sistema Adjunto M_1, satisface el axioma de selección, entonces por (3.3), tenemos que existe $m_1 : Q_1 \to \coprod_{j\geq 0} X_1^j U_1$ con $r_1\, m = 1_{Q_1}$, i.e.,

$$Q_1 \xrightarrow{m_1} (U_1 V X_1 U_1 V X_1^2 U_1 V\ldots) \xrightarrow{r_1} Q_1 \equiv Q_1 \xrightarrow{1_{Q_1}} Q_1 \qquad (3.B)$$

Para observabilidad, del diagrama (1.D) II y de I en [41] tenemos que

$$Q_1 \xmapsto{\delta_1^{\bullet}} X_1^{\bullet} Q_1 \xmapsto{X_1^{\bullet}\sigma_1} X_1^{\bullet}(Y_1 \wedge X_1^{\bullet} Y_1 \wedge X_1^{\bullet 2} Y_1 \wedge \ldots) \xmapsto{X_1^{\bullet}\,\pi_n} X_1^{\bullet n+1} Y_1 \equiv$$

$$Q_1 \xmapsto{\sigma_1} (Y_1 \wedge X_1^{\bullet} Y_1 \wedge X_1^{\bullet 2} Y_1 \wedge \ldots) \xmapsto{\pi_{n+1}} X_1^{\bullet n+1} Y_1 \qquad (3.C)$$

$$y \quad Q_1 \xmapsto{\sigma_1} (Y_1 \wedge X_1^{\bullet} Y_1 \wedge X_1^{\bullet 2} Y_1 \wedge \ldots) \xmapsto{\pi_o} Y_1 \equiv Q_1 \xmapsto{\beta_1} Y_1,$$

además si $\sigma_1 \in \mu_1$, entonces existe un único morfismo, llamado el característico de σ_1 que denotaremos $car(\sigma_1)$, tal que el siguiente cuadrado conmutativo es producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, tail, "\sigma_1"] \arrow[d, "0_{Q_1}"'] & \coprod\limits_{j\geq 0} X_1^{\bullet j} Y_1 \arrow[d, "car(\sigma_1)"] \\
1 \arrow[r, "T"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

donde 1 es el objeto terminal del $\hat{T}$op-objeto T, donde está definido el sistema Adjunto M_1, Ω es el clasificador de subobjetos en T, 0_{Q_1} es el único morfismo de Q_1 en 1 y T es el morfismo "verdad" en T (ver cap. 3, [20]).

Notemos por otra parte que si existen T-morfismos $X_1U_1 \xrightarrow{W_1} Q_1$, $X_1^2U_1 \xrightarrow{W_2} Q_1, \ldots$ y $Q_1 \xrightarrow{\beta_1} X_1^{\bullet}Y_1$, $Q_1 \xrightarrow{\hat{W}_1} X_1^{\bullet 2}Y_1$, ..., entonces por la propiedad universal del producto $r_1 = [\tau_1, W_1, W_2, \ldots]$ y el coproducto

y $\quad \sigma_1 = \langle \beta_1, \hat{W}_1, \hat{W}_2, \ldots \rangle$

estas igualdades son válidas para cualquier Adj-objeto, si existen los morfismos W_1, W_2, ..., y $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$, ... Sin embargo, en el caso de $\hat{T}$op-objetos tienen la siguiente interpretación lógica

$$\frac{U_1 \vdash^{\tau_1} Q_1, \; X_1V_1 \vdash^{W_1} Q_1, \; \ldots}{(U_1 \vee X_1U_1 \vee X_1^2U_1 \ldots) \vdash Q_1} \qquad r_1 = [\tau_1, W_1, \ldots] \tag{3.D}$$

y

$$\frac{Q_1 \vdash^{\beta_1} Y_1, \; Q_1 \vdash^{\hat{W}_1} X_1^{\bullet}Y_1, \; \ldots.}{Q_1 \vdash (Y_1 \wedge X_1^{\bullet}Y_1 \wedge X_1^{\bullet 2}Y_1 \wedge \ldots\ldots)} \qquad \sigma_1 = \langle \beta_1, \hat{W}_1, \ldots \rangle$$

Las equivalencias lógicas (3.A), significan que a partir de la fórmula

$X_1^{n+1}U_1$ se deduce la fórmula $X_1(U_1VX_1U_1VX_1^2U_1V\ldots)$ a través de la deducción (o demostración) $X_1 in_n$; a su vez de la fórmula $X_1(U_1VX_1U_1VX_1^2U_1\ldots)$ se deduce la fórmula X_1Q_1 a través de la deducción (o demostración) X_1r_1; a su vez de la fórmula X_1Q_1 se deduce la fórmula Q_1 a través de la deducción (o demostración) δ_1 y ésta cadena de deducciones de la fórmula $X_1^{n+1}U_1$ a la fórmula Q_1 es equivalente a deducir a partir de la fórmula $X_1^{n+1}U_1$, la fórmula $(U_1VX_1U_1VX_1^2U_1V\ldots)$; a través de la deducción (o demostración) in_{n+1} y después, a partir de la fórmula $(U_1VX_1U_1VX_1^2U_1V\ldots)$, deducir la fórmula Q_1, a través de la deducción r_1 (I [41])

De manera completamente análoga interpretamos la otra equivalencia lógica (en (3.A) y las equivalencias lógicas (3.B), (3.C) y (3.D), donde los objetos son interpretados como fórmulas, los morfismos como deducciones (o demostraciones), las igualdades entre morfismos como equivalencias y las operaciones sobre morfismos como reglas de inferencia, en un sistema deductivo que puede asociarse a cualquier categoría. Además, el producto entre dos objetos (si existe) se interpreta como la conjunción de las respectivas fórmulas asociadas a los objetos y el coproducto entre dos objetos (si existe) se interpreta como la disyunción de las respectivas fórmulas asociadas a los objetos (ver [41]).

Nosotros denotamos fórmulas con el mismo símbolo que para objetos; el símbolo $\vdash$ significa deducción y los símbolos $\wedge$, V y $\equiv$, significan conjunción, disyunción y equivalencia, respectivamente. Finalmente, el símbolo $\dfrac{K_1,\ K_2,\ldots}{K}$ significa que las deducciones K_1, K_2, ... se infiere la deducción K (ver [41]). Claramente en una categoría con (P.C.C.) existen conjunciones y disyunciones contables entre las respectivas fórmulas asociadas a los objetos en cuestión, tomando a la categoría como sistema deductivo. Es importante aclarar que en un $\hat{T}$op-objeto no únicamente tenemos asociado un sistema de ductivo como en una categoría arbitraria; tenemos además asociada una lógica intuicionista que en particular puede ser clásica y bivaluda, dando lugar así a interpretaciones más ricas e interesantes (ver [20], [21] y [41].

4. Ejemplos de Sistemas Adjuntos.

En los artículos [1], [2], [8], [11], [12], [13] y [14] están dados una gran variedad de ejemplos de sistemas Adjuntos, de los cuales mencionaremos algunos. Dentro de los sistemas discretos determinísticos tenemos los sistemas lineales 1.5 [12], sistemas sobre grupos 1.9 [12], máquinas secuenciales 2.8 [12] para dimensión finita; los sistemas lineales en espacios reflexivos de Banach (2) [22] y sistemas en espacios topologizados linealmente (3) [22] para dimensión infinita; los sistemas bilineales 4.2 [1], sistemas polinomiales 4.3 [1] y sistemas algebráicos de ecuaciones diferenciales 2.3 [8], para los no lineales. Dentro de los sistemas discretos estocásticos tenemos varios ejemplos en [23] para el caso particular de sistemas Adjuntos, y autómatas no-determinísticos en 4.11, [2]; para sistemas multilineales ver [24]. Dentro de sistemas contínuos lineales de dimención finita e infinita tenemos varios ejemplos en [7].

A continuación presentamos un posible ejemplo de sistemas no-lineales contínuos, i.e., especularios con que sea sistema Adjunto.

Este ejemplo es una generalización de los sistemas bilineales y representa una amplía clase de sistemas no-lineales (ver [27]); el ejemplo son los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{X} = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\overline{x})\, u_i$$

$$Y_j = h_j(\overline{x}) \qquad j=1, \ldots, \ell ,$$

donde los estados ($\overline{x}$) evolucionan en una variedad $\tilde{N}$ que es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$; f, g_1, ..., g_m son campos vectoriales analíticos definidos en $\tilde{N}$, h_1, ..., h_ℓ son funciones analíticas definidas sobre $\tilde{N}$ y u_1, ..., u_m son funciones reales. Pensamos que probablemente este ejemplo se pueda describir como un sistema Adjunto sobre la categoría "Var" de variedades diferenciales y mapeos C^∞ ó mapeos C^ω, es decir, analíticos o una subcategoría adecuada de Var la cual sea un caT_{pc} objeto. Sin embargo, en principio, como se trata de sistemas no-lineales y contínuos, nos parece que no es inmediato dar la construcción como sistema Adjunto específico, puesto que aún en el caso más sencillo de sistemas lineales continuos "descomponibles", se complica más que en el caso de sistemas discretos como se puede ver en [7]. Por tanto, queda abierto el problema de establecer la construcción del sistema Adjunto (si es que existe) que describe a estos sistemas no-lineales que describe a estos sistemas no-lineales de especial interés en teoría de Control.

Otros ejemplos interesantes están en la categoría de los M-conjuntos y los M-homomorfismos entre ellos denotado M-Set, la cual describiremos brevemente a continuación:

Sea $M=(M_o,*,e)$ un monoide, i.e., un conjunto M_o con una operación binaria definida sobre él $*:M_o x M_o \to M_o$ la cual es asociativa, y "e" el elemento neutro respecto de esta operación, $e*x=x*e=x$ para todo $x \varepsilon M_o$. Entonces, cualquier $m \varepsilon M$ determina una función $\lambda_m:M\to M$, llamada multiplicación izquierda por m, y definida por la regla $\lambda_m(n)\equiv m*n$ para toda $n\varepsilon M$. Así obtenemos una familia $\{\lambda_m : m\varepsilon M\}$ de funciones, indexadas por M, la cual satisface

(4.1) $\lambda_e = 1_M$, porque $\lambda_e(m)=e*m=m$;

(4.ii) $\lambda_m o \lambda_p=\lambda_{m*p}$, porque $\lambda_m(\lambda_p(n))=m*(p*n)=(m*p)*n$.

Las condiciones (4.i) y (4.ii) establecen que, $\{\lambda_m : m \varepsilon M\}$ con la composición de funciones como operación binaria y λ_e como elemento neutro, forman un monoide.

La noción anterior puede generalizarse a un conjunto X arbitrario, como sigue:

Sea $\lambda : M x X \rightarrow X$ una función, definida por $\lambda(m,a)=\lambda_m(a)$ para toda $m \varepsilon M$ y $a \varepsilon X$.

La cual satisface

(4.iii) $\lambda(e,a)=a$ para toda $a \varepsilon X$;

(4.iv) $\lambda(m, \lambda(p,a)) = \lambda(m*p,a)$ para toda $a \varepsilon X$.

Una función λ con esas características es llamada una acción de M sobre el conjunto X y un M-conjunto será un par (X,λ), con λ una función como la acabamos de describir.

Un M-homomorfismo entre M-conjuntos (X,λ) y $(\bar{Y},u)$, denotado por $f:(\bar{X},\lambda) \rightarrow (\bar{Y},\mu)$ es una función que preserva acciones $f:\bar{X} \rightarrow \bar{Y}$, i.e., el siguiente diagrama conmuta para cada $m \varepsilon M$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_m"'] & Y \arrow[d, "\mu_m"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

, $f(\lambda(m,a))= (m,f(a))$ para toda $a \varepsilon X$ y $m \varepsilon M$.

Claramente para distintos monoides M tendremos distintas categorías M-Set (ver 4.6 [21]. También en [21] se demuestra que estas categorías son topos los cuales tienen (p.c.c.), por lo que son $\hat{T}$op-objetos y que si el monoide M es un grupo, entonces el topo M-Set es clásico y sólo en ese caso, teniendo así una lógica clásica y bivalente asociada a él; si el monoide M no es

M no es un grupo, entonces la lógica no es clásica y no es bivalente (ver 5.4 [21]). El interés en este ejemplo radica en el hecho de que un sistema dinámico entendido como una ecuación de la forma

$$\dot{\overline{X}} = v(\overline{x})$$

donde $\overline{X}$ es un elemento de una variedad $\tilde{N}$, la cual es en general un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y v es un campo vectorial suave definido sobre $\tilde{N}$, puede ser visto en cierto sentido como la acción de un grupo sobre un conjunto con algunas características adicionales sobre M y X (ver [28] y 8.1, [29]). Además esta categoría da lugar a interesantes caracterizaciones para algunas categorías, como set^C [30] y tiene otras propiedades interesantes, por ejemplo, el Teorema de Hahn-Banach en M-set [31]. En este caso no es problema definir sistemas Adjuntos, salvo quizá, que en cierto sentido, M-set es una categoría de "sistemas dinámicos generalizados". Este ejemplo, en consecuencia, nos permite darnos una idea de las relaciones entre sistemas dinámicos, análisis, lógica y sistemas Adjuntos, entre otras cosas.

Finalmente, una clase de categorías interesantes sobre las cuales se pueden definir sistemas Adjuntos es Set^C, con C una categoría pequeña, las cuales son topos con (P.C.C.) (ver [16]). En este caso, queda incluido el ejemplo anterior, dado que la categoría M-Set es equivalente a la categoría Set^C donde C es una categoría con un solo objeto y M puede ser identificado con hom (C,C) (ver 9, [20]). Por otro lado resultados interesantes sobre topos, como el teorema de descomposición espectral para matrices reales simétricas en topos [32] y la descripción de la teoría constructiva de ecuaciones diferenciales en análisis computable para topos [33], abren la posibilidad de extender la teoría clásica del control de sistemas lineales en espacios vectoriales, a topos, dando lugar a una amplia gama de posibilidades en el es tudio de tal teoría.

Un último interesante ejemplo de topos es la categoría de conjuntos borrosos pero con la igualdad redefinida para ser borrosa también; entonces la categoría resultante es un $\widehat{\text{Top}}$-objeto (ver [34] y [42]). Este ejemplo establece todo un universo de conjuntos borrosos para definir sobre ellos sistemas Adjuntos, abriendo de ésta manera una amplia gama de posibilidades en lo que refiere a sistemas no-determinísticos incluidos en Adj.

Como ejemplo final mencionaremos el $\widehat{\text{Cat}}_{pc}$-objeto, Top el cual está constituído por espacios topológicos, y funciones contínuas entre ellos. Este ejemplo nos parece que ha sido poco estudiado en lo que respecta a definir sobre él Sistemas Adjuntos.

5. Comentarios generales y perspectivas.

Comenzaremos indicando que este trabajo es el primer paso hacia una teoría general de modelado en sistemas; una fuente de posibles perspectivas a desarrollar en el corto y mediano plazo; puede entonces considerársele como la parte inicial de un proceso que esta en sus primeras etapas de desarrollo.

Nos parece interesante resaltar que la cuasi-categoría Adj, como universo de sistemas, es realmente un primer paso hacia una teoría general del modelado de sistemas, dado que contiene una gran variedad de los sistemas conocidos a la fecha y tiene un gran potencial para modelar sistemas nuevos debido a la variedad de estructuras matemáticas que es posible encontrar en ella, como mencionamos en las primeras secciones de este capítulo. Sin embargo no es el enfoque más general que podemos dar al problema de modelado en sistemas; como mencionamos en la introducción, los λ-autómatas y los λ-automátas implícitos [23] son ejemplos de un enfoque más general en el cual los sistemas adjuntos son un caso particular. Es precisamente en el enfoque dado por ellos que se tienen mejores posibilidades para modelar sistemas no-determinísticos, como lo hacer ver [23] y [25], incluyendo también a sistemas determinísticos claramente, dado que un sistema Adjunto es un caso particular de ellos. Es por ello, que esta posibilidad adicional y por su mayor generalidad, que los λ-Automátas y los λ-Automatas implícitos son una fuente de perspectivas aún más interesante que los sistemas Adjuntos, dando lugar así a la perspectiva de estudiar uan posible categoría de λ-Automátas y una categoría de λ-Automátas implicitos, lo que traería como consecuencia inmediata un universo de sistemas más amplio que el establecido por Adj.

También nos parece interesante resaltar el papel fundamental, que desempeña en este trabajo la Teoría de Categorías; gracias a ella es que pudimos establecer una organización sobre una amplia clase de sistemas, clasificándolos y relacionándolos. También es gracias a ella que pudimos establecer un marco de trabajo adecuado para los sistemas Adjuntos, como lo es la cuasi-categoría $\hat{C}at_{pc}$. Por otro lado, nos permitió establecer los metateoremas de la sección 5, capítulo II, y nos dió la herramienta para demostrar los resultados presentados en este trabajo.

Una de las alternativas para continuar aplicando teoría de categorías a teoría de sistemas es a través de "Triples" o "monadas", [16], como lo muestran [2], [25] y más recientemente [26]. Estas aplicaciones y otras de la teoría de categorías, hacen ver las posibilidades que aún pueden desarrollarse en teoría de sistemas usando estas herramientas.

Ahora centremos nuevamente nuestra atención en Adj y notemos que dentro de ella existen varios "universos de discurso" para sistemas o universos de sistemas, en varios "niveles" según el "marco de referencia"; por ejemplo sea C un Cat_{pc}-objeto, entonces Adj(C) denota la cuasi-categoría de todos los sistemas Adjuntos definibles en C con Adj-morfismos entre ellos. Claramente Adj(C) es una sub-cuasi-categoría de Adj, pero también los es, por ejemplo, Adj(Alg) y, sin embargo, como universos de sistemas Adj(Alg) es mucho más "grande" que C y claramente está en otro nivel, puesto que Alg es una cuasi-categoría cuyos objetos son categorías y la categoría C no necesariamente tiene como objetos categorías. Otro ejemplo sería tomar una sub-cuasi-cagegoría de Alg, la cual denotamos $\widehat{Alg}$; entonces Adj($\widehat{Alg}$) también tiene un "nivel" distinto de Adj(C), etc. Por ello, convenimos en considerar a Adj(C) una sub-cuasi-categoría de Adj de primer nivel y Adj como sub-cuasi-categoría de si misma en el último nivel. Sin embargo, los sistemas adjuntos abstractos no están considerados en Adj, por lo que podríamos considerar una cuasi-cuasi-categoría $\hat{\hat{Cat}}_{pc}$ cuyos objetos sean categorías no necesariamente pequeñas con (p.c.c.) y (ε,μ)-Factorizaciones para definir $\widehat{Adj}$ la cuasi-cuasi-categoría de sistemas Adjuntos sobre ella y Adj-morfismos entre ellos en la cual estarían también los sistemas Adjuntos abstractos. En síntesis, una caracterización adecuada de los "universos de discurso" para sistemas en Adj requiere de un estudio profundo y del vínculo con otras disciplinas como la lógica, teoría de clasificación, etc.

En lo que respecta a los ejemplos presentados en las primeras secciones de este capítulo, debemos decir que son una muestra muy elemental de lo que se puede hacer sobre ellas (i.e., en Alg, Abel y $\widehat{Top}$), tomando en cuenta los actuales conocimientos que sobre éstas se tienen, por ejemplo, en $\widehat{Top}$ cada objeto puede ser visto como un universo de conjuntos variables [34], dando lugar a interesantes interpretaciones al definir sobre él sistemas Adjuntos, como la semántica asociada a topos de la forma Set^C con C una categoría pequeña en (9, [20]). Además, estos ejemplos son una pequeña muestra de los posibles ejemplos que podemos encontrar en $\widehat{Cat}_{pc}$ para definir sobre ellos sistemas Adjuntos. Por ejemplo, no se ha hecho ningún estudio sobre las propiedades de Sistemas Adjuntos definidos sobre las categorías bicartesianamente cerradas con (P.C.C.) (ver [16]), entre otras. Esto abre una gama muy amplia de posibilidades en el estudio de sistemas Adjuntos sobre categorías distintas de las usuales.

Por otra parte, notemos que el comentario en la sección anterior sobre la posibilidad de extender la teoría clásica del control a topos, abre la posibilidad de extender la teoría del control a sistemas Adjuntos, λ-Automátas, y λ-Automátas implícitos; por ejemplo entendiendo los conceptos de regulador, controlador y condiciones de existencia para éstos, extendiendo los conceptos de observador, estabilización, y condiciones de existencia para éstos, y generalizando el principio del modelo interno para ellos . En el enfoque Algebráico de sistemas estos conceptos ya están planteados, como lo muestran [35], [36], [37], [38] y [39], por lo que es factible que no impliquen un problema muy díficil en el enfoque categórico de sistemas, abriendo así el camino hacia una teoría generalizada del control y la unificación de los distintos enfoques de la teoría de control (por ejemplo, control de sistemas estocásticos, control de sistemas lineales, control de sistemas bilineales, etc.). Además, permitiría, entre otras alternativas, un vínculo directo con la lógica; por ejemplo, en el caso de sistemas Adjuntos definidos sobre $\hat{\text{T}}$op-objetos, dependiendo del tipo de lógica asociada al $\hat{\text{T}}$op-objeto en el que se esté trabajando, interpretaríamos en el contexto de esa lógica particular conceptos como regulador, controlador, estabilización, observador, etc. dando lugar a la posibilidad de un estudio de la teoría del control, desde un punto de vista formal. En síntesis, las alternativas y posibilidades a desarrollar en el enfoque categórico de sistemas, son muy amplias y prometedoras, abarcando inclusive campos como el de la Biología Teórica, la Física y la Sociología (ver [40]) y posiblemente otros.

La teoría de sistemas Adjuntos es autoalusiva en cierto sentido, i.e., se aplica a sí misma de cierta manera, por que, como observamos en la sección 5 del capítulo II, cualquier $\widehat{Cat}_{pc}$-objeto puede ser visto como una latiz, pero la categoría de latíces y homomorfismos de latices Lat es un $\widehat{Cat}_{pc}$-objeto, por lo que en cierto sentido la cuasi-categoría $\widehat{Cat}_{pc}$ contiene un objeto Lat sobre el cual se puede establecer la teoría de Sistemas Adjuntos.

Como la mayoría de las ciencias utiliza modelos matemáticos, es importante contar con una teoría adecuada para estos.

Una teoría general y unificada para modelos de sistemas (o simplemente sistemas entendidos como modelos teóricos) traería como consecuencia grandes beneficios para la ciencia en general.

Creemos que esto no siempre ha sido fácil de lograr en el proceso de evolución de la Ciencia, y que de hecho no se ha logrado completamente, hasta ahora; quizá en un futuro no muy lejano, se logre por primera vez de manera completa, aunque tal vez sólo por un tiempo limitado, hasta que se encuentre (o se invente) un modelo que no sea contemplado en esta teoría. Pensamos que un buen candidato para tal teoría general es el enfoque categórico de sistemas o una generalización de éste y esperamos que el futuro nos dé la razón.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.G. Nolte, G. Naudé, Duality between Reachability and observability for Adjoint systems, Math. Systems Theory, 16, 251-266 (1983).

[2] M.A. Arbib, E.G. Manes, Adjoint machines, state-behaviour machines and duality, Journal of Pure and Applied Algebra, 6, 313-344 (1975).

[3] S.J. Hegner, Duality theorem for discrete-time linear systems, Journal of Computer and System Sciences, 17, 116-143 (1978)

[4] H. Herrlich , G.E. Strecker, Category Theory, Allyn and Bacon, Boston, (1979).

[5] M. Barr, C. Wells, Toposes, Triples and Theories, Springer-Verlag, New York, (1985).

[6] Yu. I. Manin, A Course in Mathematical Logic, Springer-Verlag, New York, (1977).

[7] S.J. Hegner, Linear Decomposable systems in continuous time, SIAM Journal Mathematical Analysis, 12, 2, 243-273 (1981)

[8] M.A. Arbib, E.G. Manes, Machines in a Category, Journal of Pure and Applied Algebra, 19, 9-20 (1980).

[9] M.D. Mesarovic, Y. Takahara, General Systems Theory: Mathematical Foundations, Academic Press, New York (1975)

[10] Symposium Internacional de Topología Algebraíca, México, D.F. (1958)

[11] M.A. Arbib, E.G. Manes, Generalized Hankel matrices and Realization, SIAM J. Math. Anal. II, 3, 405-424 (1980.

[12] M.A. Arbib, E.G. Manes, Foundations of System Theory: The Hankel Matrix, Journal of Computer and Systems Sciences, 20, 330-378 (1980).

[13] C. Nolte, Generalized Rank Conditions for Systems in a Category, Quaestiones Mathematicae, 6, 211-226 (1983).

[14] B.D.O. Anderson, M.A. Arbib and E.G. Manes, Foundations of Systems Theory: Finitary and infinitary conditions, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 115, Springer-Verlag, New York, (1976).

[16] S. MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York, (1971).

[17] M.A. Arbib, E.G. Manes, Arrows, Structures and Functors: the Categorical Imperative, Academic Press, New York, (1975).

[19] P. Freyd, Abelian Categories, An Introduction to the Theory of Functors, Harper and Row, Publishers, (1964).

[20] J. Lambek, P.J. Scott, Higher Order Categorical Logic. Por aparecer.

[21] R. Goldblatt, Topoi: The Categorial Analysis of Logic, North-Holland Publishing Company, (1979).

[22] G. Naudé, A. Duality. Theory for Decomposable Systems in a Category, Journal of Computer and System Sciences, 21, 281-291, (1980).

[23] M.A. Arbib, E.G. Manes, Fuzzy Machines in a Category, Bull. Austral. Math. Soc., 13, 169-210, (1975).

[24] M.A. Arbib, E.G. Manes, Foundations of System Theory: Decomposable Systems, Automatica, 10, 285-302, (1974).

[25] E.G. Manes, Algebraic Theories, Springer-Verlag, New York/Berlin, (1976).

[26] J. Adámek, V. Trnková, Varietors and machines in a category, Algebra Universalis, 13, 89-132, (1981).

[27] A. Isidori, Nonlinear Control Systems: An Introduction, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985).

[28] W.A. Boothby, An Introduction to Differential Manifolds and Riemaniann Geometry, Academic Press, New York, (1975).

[29] M.W. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, New York, (1974).

[30] R. Davis, Universal Coalgebra and Categories of Transition Systems, Mathematical Systems Theory, 4, 91-95, (1969).

[31] B. Banaschewski, Extension of invariant linear functionals: Hahn-Banach in the Topos of M-Sets, Journal of Pure and Applied Algebra, 17, 227-248, (1980).

[32] C. Rousseau, Spectral Decomposition Theorem for Real Symmetric in Topoi and Applications, Journal of Pure and Applied Algebra, 38, 41-57, (1982).

[33] A. Ŝĉedrov, Differential Equations in constructive analysis and in the Recursive Realizability Topos, Journal of Pure and Applied Algebra, 33, 69-80, (1984).

[34] M. Barr, C. McLarty, and C. Wells, Variable Set Theory, Por aparecer.

[35] M.K. Sain, Introduction to Algebraic System Theory, Academic Press, New York, (1981).

[36] P.P. Khargonekar, A.B. Özgüler, System-Theoric and Algebraic Aspects of the Rings of Stable and Proper Stable Rational Functions, Linear Algebra and Its Applications, 66, 123-167, (1985).

[37] E.D. Sontag, Linear Systems over conmutati-e Rings: A survey, Ricerche Di Automatica, 7, 1-34, (1976).

[38] R. Bumby, E.D. Sontag, H.J. Sussmann and W. Vasconcelos, Remarks on the Pole-Shifting Problem over Rings, Journal of Pure and Applied Algebra, 20, 113-127, (1981).

[39] M.L.J. Hautus, E.D. Sontag, New Results on Pole-Shifting for Parametrized Families of Systems, Journal of Pure and Applied Algebra, 40, 229-244, (1986).

[40] I.C. Baianu, Natural Transformations of organismic Structures, Bolletin of Mathematical Biology, 42, 431-446, (1980).

[41] J. Lambek, P.J. Scott, Cartesian closed Categories and λ-Calculus, Por aparecer.

[42] M. Barr, Fuzzy Set Theory and Topos Theory, Por aparecer.