

01186

Fig. 1

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE MECANICA TEORICA Y APLICADA

PROCESOS DE IGNICION DE GASES PREMEZCLADOS
EN FLUJOS DE CAPA LIMITE

TESIS QUE PRESENTA
César Treviño Treviño
Para obtener el grado de
DOCTOR EN INGENIERIA
(MECANICA TEORICA Y APLICADA)

SUBJEFE DEL AREA DE ING.
ELECTROMECANICA

J. Angeles
Dr. Jorge Angeles Alvarez

SECRETARIO ACADEMICO

Ubaldo Bonifila D.
Dr. Ubaldo Bonifila D.

JURADO

Enzo Levi Lattes
Presidente: Dr. Enzo Levi Lattes

Vocal: Dr. Mihir Sen *Mihir Sen*

Vocal: Dr. José Luis Fernández Z. *J. L. Fernández Z.*

Vocal: Dr. David Gindoff *D. Gindoff*

Secretario: Dr. Jaime Cervantes de G. *J. Cervantes de G.*

Suplente: Dr. Rosalío Rodríguez Z. *R. Rodríguez Z.*

Suplente: Dr. Baltasar Mena Iniesta *B. Mena Iniesta*

Ciudad Universitaria, México D.F.

Noviembre, 1980

TESIS C N
FALLA ES ORIGIN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Parte del trabajo desarrollado en esta tesis ha sido presentado en diversos congresos y aceptado para publicación en revistas especializadas. Los artículos son:

- 1) "Effect of the Plate Thermal Resistance on Boundary Layer Ignition", presentado en el 1980 Spring Meeting del Combustion Institute, University of California, Irvine, abril 1980. También fue aceptado para publicarse en la revista Combustion and Flame.
- 2) "Transient Ignition in a Flat Plate Boundary Layer", presentado y publicado en el 27th Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, pp. 92-107, junio 1980.
- 3) "Transient Phenomena in Boundary Layer Ignition with finite Plate Thermal Resistance", presentado y publicado en el 18th Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, The University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canadá, agosto 1980.

R E S U M E N

En esta tesis, se analizan diferentes aspectos de los procesos de ignición de gases combustibles premezclados que fluyen a lo largo de una placa plana a temperatura elevada. La importancia del estudio de este tipo de procesos, se debe al hecho de que éstos ocurren con frecuencia en los dispositivos de combustión. El conjunto de ecuaciones que gobiernan este tipo de fenómenos (conservación global de masa, balance másico de las especies químicas que intervienen en la reacción, balance global de la cantidad de movimiento y balance global de energía), constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, elípticas, no lineales y acopladas.

En la literatura, el único problema estudiado hasta hoy, es el correspondiente al proceso en estado permanente, sin que se haya considerado la resistencia térmica de la placa. El punto adiabático existente en este problema, ya que antes de ese punto fluye calor desde la placa hacia el gas y después del gas hacia la placa, ha sido considerado como el punto de ignición en todos estos trabajos. Esto es, el criterio de adiabaticidad ha correspondido al criterio de ignición. También, en todos los trabajos anteriores, se ha utilizado la aproximación de Prandtl de la capa límite para el conjunto de las ecuaciones de balance, aunque han indicado sus autores que esta aproximación de Prandtl deja de ser válida cerca de la flama formada, argumentando la existencia de fuertes gradientes longitudinales de temperatura y concentraciones.

En este trabajo, se deducen las ecuaciones que gobiernan el proceso transitorio de ignición, en coordenadas transformadas adimensionales. La complejidad resultante de la adimensionalización, se debe a la laboriosa introducción de los términos no permanentes, así como a la de una ecuación extra de balance de cantidad de movimiento transversal. En esta tesis, se señala la existencia de un parámetro adimensional λ , el cual es proporcional al cociente de la velocidad de propagación de la flama entre la velocidad de los gases. En el límite $\lambda \rightarrow 0$, se demuestra que la aproximación parabólica en la dirección longitudinal es válida aún en regiones próximas a la flama. Mediante esta aproximación, es posible desacoplar las ecuaciones de balance global de masa y de balance de la cantidad de movimiento, de las demás. Con esto, dichas ecuaciones se pueden reducir a la clásica ecuación de Blasius. El sistema restante de ecuaciones, queda formado por dos ecuaciones parabólicas, no lineales y acopladas, cuya solución se obtiene numéricamente por diferencias finitas mediante la utilización del método de cuasilinealización.

En el proceso de ignición en estado permanente, se analiza el efecto del espesor de la placa (resistencia térmica de ésta) sobre dicho proceso y se define un punto crítico de ignición más adecuado que el punto adiabático utilizado hasta ahora. Se encuentra que, para ciertos valores de la resistencia térmica de la placa, la flama se localiza aguas arriba de la posición calculada sin considerar el espesor de la placa.

En lo referente al proceso transitorio de ignición, se considera el caso de un incremento, en forma de escalón, de la tem-

peratura en la superficie inferior de la placa y se analiza el mecanismo y la estructura del proceso de ignición y formación de la flama. La característica relevante de este mecanismo, se da en la generación y propagación de una "mancha" de máxima rapidez de reacción. La información más importante del proceso de ignición, se encuentra en la curva de máxima reacción, como una función de la coordenada longitudinal para el caso de fenómenos permanentes o del tiempo para fenómenos transitorios. Estas curvas para ambos casos, muestran una tendencia similar y presentan un mínimo (para valores pequeños del espesor de la placa). Este punto mínimo representa una mejor definición para la distancia crítica de ignición para fenómenos permanentes y el tiempo crítico de ignición para procesos transitorios. Asimismo, se calcularon los tres tiempos característicos del proceso, que son:

- a) tiempo necesario en alcanzar el punto adiabático en la placa;
- b) tiempo necesario para la formación de la flama o tiempo de retardo;
- c) tiempo crítico de ignición.

I N D I C E

	RESUMEN	1
	NOMENCLATURA	vii
I	INTRODUCCION	1
II	REVISION BIBLIOGRAFICA	8
	2.1 Introducción	8
	2.2 Flujo alrededor de obstáculos	8
	2.3 Flujo sobre una placa plana	12
	2.4 Flujo de estancamiento	20
	2.5 Discusión	24
III	ECUACIONES DE BALANCE Y RELACIONES CONSTITUTIVAS	26
	3.1 Introducción	26
	3.2 Ecuación de balance de masa para especies químicas	27
	3.3 Ecuación de balance de la cantidad de movimiento	29
	3.4 Ecuación de balance de la energía	31
	3.5 Relaciones constitutivas	32
	3.6 Simplificación de las ecuaciones de balance	36
	3.7 Ecuaciones de balance en una capa límite	38
	3.8 Condiciones de frontera	46
	3.9 Discusión de las ecuaciones	49
IV	PROCESOS DE IGNICION EN FLUJOS DE CAPA LIMITE	55
	4.1 Introducción	55
	4.2 Método de solución	56

	4.3 Estado permanente sin resistencia térmica de la placa	61
	4.4 Estado permanente con resistencia térmica de la placa	73
	4.5 Proceso transitorio de ignición sin resistencia térmica de la placa	86
	4.6 Proceso transitorio de ignición con resistencia térmica de la placa	106
V	CONCLUSIONES	113
	APENDICES	
A	LISTADOS DE PROGRAMAS DE COMPUTADORA	A1
	A.1 Programa COMBUST	A1
	A.2 Programa AGAP	A16
	A.3 Programa PLACA	A20
	A.4 Programa PLATE	A25
B	ASPECTOS RELEVANTES EN METODOS NUMERICOS	B1
C	ADIMENSIONALIZACION DE LAS ECUACIONES DE BALANCE	C1
D	PROCESOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR SIN REACCION QUIMICA	D1
	D.1 Introducción	D1
	D.2 Efecto de la variación longitudinal de la temperatura en la placa	D2
	D.3 Proceso transitorio de transferencia de calor por el cambio repentino de la temperatura de la placa	D9
	D.4 Enfriamiento convectivo laminar de una placa plana delgada	D18

- D.5 Efecto de la resistencia térmica transversal
de la placa en el fenómeno global de
transferencia de calor D32
- D.6 Efecto de la conducción axial de calor en
la fase gaseosa D41

N O M E N C L A T U R A

A	constante numérica
A	expresión definida en la ecuación (D.24)
a	constante numérica
a_{TJ}	exponente de la temperatura en el factor de frecuencia de la ley de Arrhenius, para la reacción J. Ecuación (3.15)
a_{BJ}	orden de reacción para el reactante B en la reacción química J. Ecuación (3.14)
B	expresión definida en la ecuación (D.24)
B_J	factor de frecuencia para la reacción química J Ecuación (3.15)
b	constante numérica
C	constante numérica tomada como 1000
C_p^a	calor específico a presión constante de la especie a
C_p	calor específico a presión constante de la mezcla
C_w	calor específico de la placa
C	expresión definida en la ecuación (D.24)
c	constante numérica
D	coeficiente de difusión másica para la mezcla
D	expresión definida en la ecuación (D.24)
D^{aB}	coeficiente binario de difusión másica entre las especies a y B
D_T^a	coeficiente de termo-difusión de la especie a
d	constante numérica
Ec	número de Eckert definido en la ecuación (3.42)
EJ	energía de activación de la reacción química J

e	energía interna específica de la mezcla
e	constante numérica
e^a	energía interna específica de la especie a
F(a)	función definida en la ecuación (3.42)
f	función de corriente adimensional definida en la ecuación (3.37)
f'	representa a df/dn
f_i	componente cartesiana de la fuerza de cuerpo en la mezcla
f_i^a	componente cartesiana de la fuerza de cuerpo de la especie a
g	constante numérica
h	entalpía específica de la mezcla
h^a	entalpía específica de la especie a
h^{a0}	entalpía de formación de la especie a a la temperatura de referencia T^0
K_J	constante específica de la reacción J. Ecuación (3.15)
k	relación de calores específicos de la mezcla
L	longitud de la placa
l	expresión definida en la ecuación (3.42)
l	como superíndice representa una iteración
M	número de reacciones químicas que toman parte en el proceso
m_F	concentración másica adimensional del combustible, definido en la ecuación (3.37)
N	número de especies químicas que toman parte en el proceso
N_l	número total de iteraciones hechas en la corrida del programa de computadora
Nu	número de Nusselt definido en la ecuación (D.74)
n	constante numérica
P	presión adimensional de la mezcla definida en la ecuación (3.37)

Pr	número de Prandtl definido en la ecuación (3.42)
p	presión de la mezcla
p^a	presión parcial de la especie a en la mezcla
q_i	componente cartesiana del flujo de calor definido en la ecuación (3.13)
q	flujo de calor en la interfase placa-gas
q'	flujo de calor adimensional en la interfase placa-gas definido en la ecuación (D.30)
\bar{R}	constante universal de los gases
R	expresión definida en la ecuación (4.13)
Re_x	número de Reynolds basado en la distancia x
Rn	expresión definida en la ecuación (B.1)
Rx	expresión definida en la ecuación (B.14)
r	expresión definida en la ecuación (3.42)
Sc	número de Schmidt definido en la ecuación (3.42)
s	expresión definida en la ecuación (3.42)
T	temperatura de la mezcla
T_w	temperatura de la placa
T^*	temperatura de referencia
t	tiempo
\bar{t}	espesor de la placa
u,v	componentes cartesianas de la velocidad de la mezcla, longitudinal y transversal respectivamente
u_i	componente cartesiana de la velocidad de la mezcla
u_i^a	componente cartesiana de la velocidad de la especie a
\bar{u}_i^a	componente cartesiana de la velocidad de difusión de la especie a en la mezcla
\underline{u}^a	vector velocidad de la especie a

u_f	velocidad de la flama
v_s	velocidad de la "mancha" de máxima rapidez de reacción
w^a	peso molecular de la especie a
\bar{W}	rapidez de reacción adimensional definida en la ecuación (4.21)
\underline{x}	vector posición
x, y	coordenadas cartesianas longitudinal y transversal a la placa respectivamente
x^a	concentración molar de la especie a en la mezcla
Y^a	concentración másica de la especie a en la mezcla
Y	distancia adimensional definida en la ecuación (4.22)
Z	función definida en la ecuación (D.14)

letras griegas

α, β	como superíndices denotan especies químicas
α	número adimensional definido en la ecuación (D.35)
$[\alpha]$	representa la fórmula química de la especie α en la ecuación (3.30)
β	número adimensional definido en la ecuación (D.35)
Γ	función gamma
Δ	valor característico de la rapidez de reacción, introducido en la ecuación (3.56)
δ	parámetro adimensional definido en la ecuación (3.42)
δ_m	valor máximo de δ
δ_{ij}	delta de Kronecker, igual a la unidad para $i=j$ e igual a cero para $i \neq j$
τ, η	coordenadas dimensionales definidas en la ecuación (3.35)
τ_m	valor máximo de τ

\bar{z}	segundo número de Damköhler definido en la ecuación (3.42)
ζ_0	coordenada adimensional definida en la ecuación (D.72)
ζ_a	corresponde al valor de ζ en el punto adiabático
ζ_i	corresponde al valor de ζ en el punto de ignición
ζ_f	corresponde al valor de ζ en el frente de flama
ζ_{a0}	corresponde al valor de ζ en el punto adiabático, para el caso en donde no se toma en cuenta el espesor de la placa
ζ_p	corresponde al valor de ζ en donde se interrumpe la aplicación de la alta temperatura en la placa
θ	temperatura adimensional definida en la ecuación (3.37)
θ_a	temperatura de activación adimensional
$\bar{\theta}$	temperatura adimensional definida en la ecuación (D.4)
$\bar{\theta}_w$	temperatura adimensional de la placa
$(\theta_w)_p$	temperatura adimensional promedio en la placa, definida en la ecuación (D.57)
A_1	operador definido en la ecuación (3.42)
A_2	operador definido en la ecuación (3.42)
λ	coeficiente de conductividad térmica de la mezcla
μ_1	primer coeficiente de viscosidad de la mezcla
μ_2	segundo coeficiente de viscosidad de la mezcla
ν_m^J	coeficiente estequiométrico de la especie a en la reacción química J . $m=1$ reactante; $m=2$ producto.
z	coordenada adimensional transversal en la placa, definida por la ecuación (3.51)
ζ_m	valor máximo de ζ y se define en la ecuación (3.54)
ρ	densidad de la mezcla
	densidad parcial de la especie a

σ_{ij}^a	tensor de esfuerzos para la especie a
σ_{ij}^D	tensor de esfuerzos difusivos, definido en la ecuación (3.9)
σ_{ij}	tensor de esfuerzos de la mezcla, definido en la ecuación (3.9)
τ	tiempo adimensional definido en la ecuación (3.35)
τ^*	tiempo característico de enfriamiento, definido en la ecuación (D.55)
τ_a	tiempo adimensional necesario para formarse el primer punto adiabático en la placa
τ_i	tiempo adimensional de ignición
τ_{ff}	tiempo adimensional de formación de la flama
τ_p	duración del pulso de alta temperatura en la placa
τ_{ij}^a	tensor de esfuerzos para la especie a, definido en la ecuación (3.10)
τ_{ij}^{Da}	tensor de esfuerzos difusivos para la especie a, definido en la ecuación (3.10)
τ_{ij}^D	tensor de esfuerzos difusivos de la mezcla, definido en la ecuación (3.10)
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	funciones de compresibilidad definidas en el apéndice C
ψ	función de corriente definida en la ecuación (3.33)
ω^a	rapidez de generación de la especie a en una reacción química

subíndices

e	corresponde al flujo libre
F	corresponde al combustible
O	corresponde al oxidante

m	corresponde al valor máximo
p	corresponde al proceso permanente
p	corresponde al valor promedio
w	corresponde a la placa
wu	corresponde a la superficie superior de la placa
wl	corresponde a la superficie inferior de la placa

C A P I T U L O I

INTRODUCCION

Los fenómenos relacionados con los procesos de combustión son conocidos desde mucho tiempo atrás. A pesar de esto, es hasta mediados del presente siglo cuando se desarrolla científicamente la teoría de la combustión. El tardío desarrollo del estudio de la combustión se debe a su carácter multidisciplinario, ya que está relacionada con la mecánica de fluidos, la transferencia de calor y de masa y la cinética química, entre otras áreas. El desarrollo masivo de dispositivos de combustión iniciado a finales del siglo pasado, se ha basado principalmente en métodos empíricos y semi-empíricos. El avance, tanto en lo referente a una nueva instrumentación como nuevos procedimientos matemáticos y la aparición de las máquinas computadoras de alta capacidad, han hecho posible un desarrollo cualitativo y cuantitativo de la teoría de la combustión.

Entre los casos más importantes de procesos de combustión se encuentran aquellos donde tiene lugar un flujo de cortante. Algunos ejemplos, entre otros, de procesos de combustión en flujos de cortante lo constituyen los siguientes: (1) la combustión de gotas de combustible que se inyectan a cierta velocidad relativa en una atmósfera oxidante, como en las cámaras de combustión de turbinas de gas y en calderas que utilicen combustibles líquidos, (2) la combustión de pequeñas partículas de carbón a velocidades apreciables en una atmósfera oxidante, lo cual ocurre en cámaras

de combustión de carbón pulverizado y de lechos fluidizados, (3) la combustión y propagación de flamas en combustibles sólidos y líquidos, lo cual se da en fuegos forestales, en fuegos de combustibles líquidos derramados en agua, etc., (4) la estabilización de flamas en gases combustibles premezclados en cámaras de combustión, tanto mediante la generación de un flujo rotatorio como mediante tenedores de flama metálicos, tal como ocurre en cámaras de combustión de turbinas de gas, quemadores de gas para calderas, cámaras de poscombustión en turbinas de gas para aviación, etc.

En el presente trabajo, se estudian algunos aspectos del proceso transitorio de ignición de gases combustibles premezclados en un flujo de capa límite, generada al fluir a lo largo de una placa plana de espesor finito a temperatura elevada. El análisis de este tipo de problemas ha sido motivado por la necesidad de conocer la influencia de los parámetros que afectan el proceso de ignición y estabilización de flamas en combustibles premezclados. En efecto, debido a que la velocidad de propagación de flamas es generalmente menor que la velocidad del fluido en donde se desarrollan, es conveniente diseñar un sistema estabilizador que fije la posición de la flama dentro de la cámara de combustión. La forma convencional utilizada para estabilizar la flama, es mediante la generación de un flujo de rotación por medio de aletas deflectoras colocadas a la entrada del quemador, o mediante la colocación de cuerpos sólidos en la corriente de gases. Esto se hace con la finalidad de crear una zona de recirculación que aumente el tiempo de permanencia de los gases en dicha zona, a fin de que la combustión pueda llevarse a cabo. Sin embargo, estos métodos generan altas

pérdidas de presión hidrodinámicas. A principios de la década de los sesentas, se manejó la idea de estabilizar la flama mediante la colocación de placas o anillos a altas temperaturas en el flujo de gases. Con ésto se obtendrían pérdidas de presión menores, aumentando por lo tanto la eficiencia de los sistemas. Esta idea se desechó posteriormente al encontrarse experimentalmente fenómenos oscilatorios que se atribuyeron finalmente a problemas de inestabilidad hidrodinámica. Sin embargo, los procesos de estabilización de flamas mediante cuerpos metálicos o tenedores de flamas, requieren un conocimiento más profundo en lo referente, tanto a procesos transitorios de ignición como a la evaluación de los efectos de dichos cuerpos metálicos sobre tales procesos. Por otro lado, un mejor conocimiento de los procesos de ignición, llevará necesariamente a adoptar medidas tendientes a evitarlos, como en el caso de prevención de incendios. Esto puede ser ocasionado por fugas de gases combustibles, por ejemplo gasoductos, que pueden incidir sobre superficies metálicas o simplemente rocas. Aquí también, la interacción de estas superficies con el flujo de gases combustibles incidentes, reviste gran importancia en los procesos de ignición. El conocimiento de esta interacción también es importante para el mejoramiento de la transferencia de calor en calderas, donde debido a las tendencias actuales de su desarrollo, su diseño compacto permite que la flama producida en el hogar se encuentre más próxima a los tubos que transportan el agua.

La bibliografía existente hasta la fecha sobre este tema, indica que el único problema tratado corresponde al proceso permanente, no habiéndose analizado la interacción placa-gases en el proceso de ignición. En este problema, al estar la superficie su-

perior de la placa a una temperatura mayor que la de los gases combustibles, primero fluye calor de la placa hacia los gases, y debido a la exotermicidad de la reacción, existe un punto en la placa en donde se anula la transferencia de calor. Para distancias mayores a lo largo de la placa, la transferencia de calor se invierte, es decir, de los gases hacia la placa, hasta llegar a un punto en donde empieza la formación de la flama. La totalidad de los autores que han estudiado este problema, han considerado que el punto adiabático corresponde al punto crítico de ignición, es decir, que en este punto la reacción química ha evolucionado en tal forma que puede autosostenerse y llegar finalmente a la formación de la flama. También, la totalidad de los autores han utilizado la aproximación de Prandtl de la capa límite en todo el sistema de ecuaciones hasta el punto adiabático, señalando que dicha aproximación carece de validez en regiones corriente abajo del punto adiabático.

En lo relativo a problemas de estabilización de flamas sobre una placa plana, se han encontrado experimentalmente dos mecanismos básicos, que son: (1) mecanismo de equilibrio y (2) mecanismo de ignición continua. En el primero, una vez alcanzada la ignición, la flama tiende a viajar corriente arriba hasta alcanzar su equilibrio. En este caso, las distancias de ignición y estabilización no coinciden, contrariamente al dado por el mecanismo de ignición continua, según el cual, la ignición es generada por la placa y no por la flama abajo formada.

Una extensa revisión bibliográfica se presenta en el capítulo II, en relación al proceso de ignición y combustión de gases combustibles premezclados para los siguientes casos:

- (1) flujo alrededor de obstáculos (cilindros, esferas, etc.);
- (2) flujo a lo largo de una placa plana;
- (3) flujo de estancamiento.

Los trabajos referidos en este capítulo, se describen brevemente, indicándose la metodología de análisis utilizada y las principales conclusiones obtenidas. Al final de este capítulo, se discuten los aspectos no tratados en la literatura y se subrayan aquellos que se analizan en el trabajo presente.

En el capítulo III se desarrollan las ecuaciones de balance que gobiernan el proceso transitorio de ignición y combustión en un flujo de capa límite sobre una placa plana no catalítica e impermeable; se discuten, asimismo, la validez de las suposiciones introducidas. Mediante una adimensionalización adecuada de estas ecuaciones, se señala la existencia de un parámetro adimensional δ , el cual es proporcional a la relación de la velocidad de propagación de la flama entre la velocidad del fluido. En el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, único analizado en detalle en este trabajo, se tiene una serie de implicaciones muy importantes relativos al proceso de ignición y de estabilización. Primeramente, en este límite se demuestra la validez de la aproximación de Prandtl en todo el conjunto de ecuaciones, aún en regiones próximas a la flama. Con esto, las ecuaciones se transforman en parabólicas en la dirección longitudinal, trayendo como consecuencia una gran simplificación y

economía relativa en los métodos numéricos empleados en su solución. También, en este límite cuando $\delta \rightarrow 0$, se tiene que la presión es uniforme en todo el campo y, por ende, se elimina la ecuación de balance transversal de la cantidad de movimiento. Otra característica muy importante que se tiene en dicho límite, es que la estabilización de la flama se rige por el mecanismo de ignición continua y, por lo tanto, las distancias de ignición y estabilización coinciden. Esto es una consecuencia del carácter parabólico de las ecuaciones. También, al no existir gradientes importantes de presión, las oscilaciones dejan de manifestarse, resultando por ende, un proceso de combustión muy estable para este límite $\delta \rightarrow 0$.

En el capítulo IV se analiza numéricamente el proceso de ignición ya antes referido, indicándose tres problemas concretos del mismo. El proceso permanente de ignición se estudia con la finalidad de definir un criterio de ignición más adecuado que el criterio de adiabaticidad, considerando también la influencia del espesor finito de la placa en la posición y la estructura de la flama. En el proceso transitorio de ignición, se estudia la estructura y el mecanismo de la formación de la flama, definiéndose a la vez tres tiempos característicos de dicho proceso; se analiza asimismo, la interacción del espesor finito de la placa en tal proceso. En este capítulo se presenta el método numérico empleado en la solución del conjunto de ecuaciones de balance que gobiernan el proceso transitorio de ignición.

Las conclusiones más importantes derivadas del presente trabajo, se resumen en el capítulo V.

En el apéndice A se presenta el conjunto de listados de los programas de computadora desarrollados durante esta investigación, definiéndose los objetivos y las variables de interés para cada programa.

En el apéndice B se describen algunos aspectos importantes sobre los análisis numéricos relacionados con el presente trabajo mediante diferencias finitas y se indican los intentos por reducir el tiempo de computación en los programas aquí desarrollados.

En el apéndice C se detallan los pasos empleados en la adimensionalización de las ecuaciones de balance, introducidas en el capítulo III.

Finalmente, en el apéndice D se analizan diferentes aspectos de los fenómenos de transferencia de calor en flujos de capa límite sobre una placa plana con gases inertes, lo que permite tener una base de comparación con los procesos reactivos similares. También, mediante la utilización de métodos numéricos basados en diferentes técnicas en ambos casos, se verifica la validez de los mismos.

C A P I T U L O I I

REVISION BIBLIOGRAFICA

2.1 Introducción

En este capítulo se describen los trabajos publicados que versan sobre fenómenos de ignición de gases combustibles premezclados en capas límites sobre cuerpos o superficies a altas temperaturas. Basicamente los flujos hasta ahora estudiados se pueden catalogar en tres grandes grupos:

- a) flujo alrededor de obstáculos (cilindros, hilos y esferas);
- b) flujo sobre una placa plana;
- c) flujos de estancamiento (plano y axialsimétrico).

Los flujos alrededor de obstáculos fueron los primeros en ser estudiados experimentalmente, pero debido a su complejidad son los menos estudiados teóricamente. Para flujos sobre una placa plana se han realizado análisis teóricos y trabajos experimentales, preferentemente en lo relacionado con la estabilidad de flamas. El flujo más estudiado teóricamente es el flujo de estancamiento, ya que es el único flujo con reacción química, para el conocimiento del autor, que admite soluciones con variables de semejanza, lo cual simplifica grandemente su análisis.

2.2 Flujo alrededor de obstáculos

Uno de los primeros trabajos del que se tiene conocimiento

sobre el proceso de ignición alrededor de obstáculos, es el de Wüllner y Lehmann (1886). Aquí, se hizo pasar un flujo de gases combustibles contra un hilo calentado eléctricamente. Se encontró que la temperatura mínima de ignición aumentaba al aumentar la velocidad del flujo y disminuir el diámetro del hilo.

En un trabajo posterior, Silver (1937) realizó experimentos de ignición mediante el lanzamiento de pequeñas esferas de alta temperatura a velocidades de 4 m/s aproximadamente, hacia una mezcla combustible gaseosa en reposo. La conclusión más importante de este trabajo fué que la temperatura mínima de ignición era menor, cuanto mayor era el diámetro de la esfera.

Paterson (1939,1940) realizó un trabajo experimental con la finalidad de encontrar la influencia de la velocidad de partículas sobre el proceso de ignición. Para tal efecto, lanzó pequeñas esferas, a diferentes temperaturas, hacia una mezcla combustible. Se encontró que a mayor velocidad de las partículas, mayor era la temperatura mínima de ignición.

En un amplio trabajo experimental Müllen, Fenn e Irby (1949) estudiaron el fenómeno de ignición en flujos de gases combustibles a altas velocidades sobre cilindros a temperaturas elevadas. Se analizaron las influencias de los diferentes parámetros de flujo sobre la temperatura mínima de ignición. Entre los resultados más importantes se encontró que una menor temperatura mínima de ignición se consigue: a) aumentando la temperatura de la mezcla; b) aumentando la presión; c) aumentando el diámetro del cilindro; y d) disminuyendo la humedad de la mezcla. Se investigó también la

influencia del tamaño y localización de la zona caliente del cilindro y se encontró que era más eficaz calentar la parte posterior del mismo. Se investigó la influencia del material del cilindro, encontrándose que sólo para un material catalítico (platino), se incrementa sensiblemente la temperatura mínima de ignición. Basados en fotografías Schlieren e interferometría, propusieron un mecanismo básico para el proceso de ignición. La mezcla fría de gases combustibles fluye a lo largo de una capa límite donde se le transfiere energía calorífica en pequeñas proporciones. Después de pasar por el punto de separación de la capa límite (70° a 75° del punto de estancamiento delantero), fluye a lo largo de la estela y regresa en la zona de recirculación. Es en este momento donde el tiempo de permanencia es alto y por ende, donde se puede alcanzar la ignición primaria. Una característica importante es que la curva de temperatura mínima de ignición contra la velocidad de flujo, posee una concavidad hacia arriba.

Kumagai y Kimura (1957) en un trabajo experimental estudiaron el proceso de ignición en mezclas combustibles que fluyen perpendicularmente hacia alambres a altas temperaturas, tanto para flujo laminar como para flujo turbulento de intensidad y escala conocidas. Para tales experimentos utilizaron velocidades de flujo libre comprendidas entre 0.2 y 30 m/s y diámetros del alambre entre 0.3 y 5 mm. Para este rango de operación, la curva de temperatura mínima de ignición contra la velocidad de flujo mostraba una concavidad hacia abajo, contrastando con lo encontrado por Müllen et al (1949) para altas velocidades. La principal conclusión en este trabajo fue que la estructura de la estela formada en la parte posterior del alambre juega un importante papel en el fenómeno

de ignición.

El primer intento de establecer una teoría para procesos de ignición en mezclas combustibles fluyendo alrededor de objetos a alta temperatura fué realizado por Khitrin y Goldenberg (1957). Ellos extendieron la teoría clásica de ignición de Zeldovich a problemas más generales. Mediante una vasta correlación con resultados experimentales, obtuvieron las características críticas de ignición, entre ellas: a) los límites de concentración y su dependencia de la presión y la temperatura; y b) un criterio de estabilización de flamas.

Adomeit (1963) determinó, mediante análisis dimensional, la condición de ignición de una mezcla combustible que fluye contra un cuerpo a alta temperatura, basándose en la gran cantidad de datos obtenidos experimentalmente en trabajos anteriores. Encontró que son dos los números adimensionales de importancia: a) temperatura de ignición adimensionalizada con la temperatura de activación aparente; y b) mínimo flujo de calor en el cuerpo para flujo no reactivo adimensionalizado con el calor de reacción.

Adomeit (1965) desarrolló también un trabajo experimental para estudiar el proceso transitorio de ignición de una mezcla combustible en contacto con un cilindro, el cual se sujetó a un aumento de temperatura en forma de escalón. Los perfiles de temperatura se dedujeron de fotografías de interferometría Mach-Zehnder. Se encontró que para tiempos menores del tiempo de ignición, la distribución de temperaturas está determinada esencialmente por la conducción de calor. Aplicando el concepto de balance permanente

de energía, dedujo una relación aproximada para el tiempo de retardo.

2.3 Flujo sobre una placa plana

En esta sección se desglosan los trabajos dedicados al proceso de ignición de gases combustibles fluyendo a lo largo de una placa plana. Primeramente se presentan los trabajos experimentales, terminando con los estudios teóricos del problema.

Gross (1955) llevó a cabo una serie de experimentos sobre la estabilización de flamas en capas límite de una mezcla combustible de propano/aire, utilizando para ello tanto una placa plana como un perfil aerodinámico. Encontró que el mecanismo de estabilización de flamas en la placa plana es esencialmente diferente al mecanismo que resulta en perfiles aerodinámicos. En este último caso la flama se estabilizaba cerca de un remolino generado por la combustión (aunque tales remolinos no existen sin combustión bajo las mismas condiciones de operación), mientras que en el caso de la placa plana, no se generaban tales remolinos. Obtuvo una serie de correlaciones de gradientes de velocidad necesarios para alcanzar las condiciones de penetración (flashback) y de expulsión (blowoff). Encontró también que es posible estabilizar la flama en la estela de la placa plana, mientras que esto no fué posible al utilizar el perfil aerodinámico. Notó también la existencia de oscilaciones de la flama para elevadas temperaturas de la placa. Finalmente encontró que era posible estabilizar la flama desprendida del borde de ataque del perfil aerodinámico.

Hottel, Toong y Martín (1957), estudiaron el mecanismo de estabilización de flamas de una mezcla combustible propano/aire en una capa límite formada al fluir la mezcla a lo largo de un cilindro enfriado por agua. Ellos determinaron que, mediante el cambio de posición de este cilindro en el ducto, la estabilización de la flama depende únicamente de las características de la capa límite. Un aspecto muy interesante del trabajo es que no observaron oscilaciones en la flama, contrariamente a las encontradas por Gross (1955). Esto se aclaró años después mediante la hipótesis de Wu y Toong (1963) sobre el mecanismo de los fenómenos oscilatorios, lo cual se describe posteriormente en este capítulo.

Ziener y Gambel (1958) propusieron un método gráfico para calcular el punto de estabilización de una flama propano/aire sobre una placa plana y comprobaron los resultados con datos experimentales por ellos realizados. Como criterio de estabilización utilizaron el principio de equilibrio o igualdad de la velocidad axial de flujo y la velocidad de la intersección de la línea del espacio muerto (dead line). El espacio muerto fué considerado como la mitad de la distancia de extinción (quenching distance) y ésta la calcularon mediante una fórmula empírica de Potter y Berland (1955). Observaron las oscilaciones encontradas primeramente por Gross (1955), pero indicaron que estas oscilaciones disminuyan al tener gradientes de temperatura positivos a lo largo de la placa.

Toong (1958) analizó los dos mecanismos básicos de estabilización de flamas que son: a) mecanismo de ignición continua y b) mecanismo de equilibrio. Al mecanismo de ignición continua lo caracterizó por la existencia de una zona de recirculación, mientras

que el mecanismo de equilibrio lo refirió al clásico mecanismo de estabilización Bunsen. Concretamente, en lo referente al problema de estabilización de flamas en la capa límite de una placa plana, excluyó al mecanismo de ignición continua por la inexistencia de una zona de recirculación.

En un trabajo posterior, Turcotte (1960) desarrolló un programa experimental dedicado al estudio del mecanismo de estabilización de una flama en un flujo turbulento de alta velocidad en una capa límite generada por una placa plana a temperatura elevada. El señaló que, contrariamente a lo afirmado por Toong (1958), existían dos mecanismos para dicha estabilización: a) mecanismo de equilibrio, mediante el cual se igualan la velocidad de flujo y la velocidad de propagación de flama en el borde del espacio muerto; y b) mecanismo de ignición continua, donde la placa plana provee energía continua para producir la ignición de la mezcla combustible. El consideró que en la mayoría de los casos, para flujos laminares se aplica el mecanismo de equilibrio, y para flujos turbulentos el mecanismo que más se presenta es el mecanismo de ignición continua. Sin embargo, prefirió generalizar al afirmar que el mecanismo aplicable en cada caso es aquel que da una distancia menor de estabilización. También remarcó el hecho de que existe una temperatura mínima de estabilización (no de ignición) para condiciones de flujo dadas y que aumentaba a medida que aumentaba la velocidad del flujo libre.

Wu y Toong (1963) propusieron un mecanismo que explicase los fenómenos oscilatorios encontrados en procesos de estabilización de flamas en capas límite formadas en una placa plana a tem-

peratura elevada, observadas por Gross (1955) y por Ziemer y Cambel (1958). Su hipótesis se basó principalmente en el mecanismo de la inestabilidad causada por fuertes gradientes de temperatura y presión. El mecanismo lo explicaron de la forma siguiente: debido a que existe un gradiente de presión positivo en la flama en el punto de equilibrio, junto al hecho de que la temperatura en la placa es alta, hacen que la capa límite sea altamente inestable y por ende, el flujo se transforme en turbulento. Debido a esto, se incrementa la velocidad de propagación de la flama que induce a ésta a moverse hacia adelante, en donde disminuyen tanto el gradiente de presión como el número de Reynolds, transformándose con ello el flujo en laminar, disminuyendo por lo tanto la velocidad de propagación de la flama. Con esto, la flama retrocederá y se volverá a repetir el ciclo.

Toong, Kelly y Wu (1963) desarrollaron un trabajo experimental donde se pretende respaldar la teoría del mecanismo de estabilización de equilibrio en procesos de estabilización de flamas sobre superficies a altas temperaturas. Para tal efecto, estabilizaron una flama por medio de un cilindro dentro de un túnel, en donde la flama penetraba sobre la capa límite formada en la pared del túnel. Se obtuvieron los perfiles de velocidad de flujo y velocidad de propagación de flama. Se encontró que esta última variaba fuertemente en zonas de la capa límite térmica de la pared en los casos de elevada temperatura de ésta.

En lo referente a trabajos teóricos relacionados con este problema, es conveniente mencionar que la totalidad de éstos han hecho uso de la aproximación de Prandtl de la capa límite en todo

el conjunto de ecuaciones que gobiernan este proceso.

Von Kármán y Millán (1953) realizaron un trabajo teórico con la finalidad de obtener las condiciones de una flama premezclada cerca de la pared de un tubo. Encontraron, basándose en un trabajo experimental de Kaskan (sin referencia), que el espacio muerto adimensional era independiente del gas combustible utilizado. Ellos usaron para los cálculos una reacción química de primer orden e introdujeron una temperatura de ignición para evitar el problema presentado en la región fría. Consideraron tanto el caso de la propagación de la flama en un tubo de gran diámetro, como el caso del frente de flama en reposo. También indicaron que Kaskan encontró que el espacio muerto era del orden de $1/10$ de la distancia de extinción y no del orden de $1/2$ o $1/3$ como se creía anteriormente.

Marble y Adamson (1954) analizaron el proceso de ignición en una zona de mezclado laminar, donde se tiene un flujo de gases combustibles paralelo a otro de gases inertes a temperatura elevada. Hicieron el análisis utilizando una reacción de primer orden y empleando el método de expansión en series de potencia para la parte inicial del proceso y un método integral para la parte final. Obtuvieron una expresión para la distancia de ignición, para el caso concreto donde las velocidades de ambos flujos paralelos son iguales. El punto de ignición tomado por ellos es aquél en donde la primera y segunda derivada de la temperatura con respecto a la coordenada transversal son cero.

Dooley (1957) analizó teóricamente el problema de ignición

sobre una placa plana catalítica a temperatura elevada. Aunque el análisis lo generalizó para cualquier orden de reacción no fraccional, realizó los cálculos para una reacción de primer orden (descomposición de azometano). Definió una función de similaridad para el caso concreto de que el número de Lewis sea la unidad y resolvió la ecuación de la energía por medio de un método iterativo. El punto de ignición lo consideró en el lugar donde la transferencia de calor de la placa hacia el fluido se anula. La distancia desde el borde de ataque hasta este punto corresponde a la distancia de ignición y tal distancia, concluyó, se ve fuertemente influenciada por la temperatura de la placa. Bajando esta temperatura, la distancia de ignición aumenta enormemente, de tal modo que la estabilización de la flama no puede ocurrir en un aparato físico de dimensiones razonables. En sus comentarios finales aclaró que la aproximación de Prandtl se ve invalidada en regiones próximas a la flama, no importando las condiciones de flujo libre ni las condiciones de la placa.

Toong (1957) realizó el análisis del proceso de ignición sobre una placa no catalítica a alta temperatura. Utilizó el método de expansión en series de potencias para resolver el sistema de ecuaciones y supuso una reacción química de segundo orden. Asimismo, describió brevemente un trabajo experimental, tomando como reactantes la mezcla etanol/aire y comparó los resultados obtenidos con los teóricos, encontrando entre ellos una buena concordancia cualitativa. Estudió también el efecto de los diferentes parámetros de flujo sobre el proceso de ignición, principalmente sobre la longitud de ignición.

Tsuji (1961) analizó el efecto de la inyección de gases inertes a través de una placa permeable no catalítica sobre la ignición de una mezcla combustible que fluye paralelamente a la pared. Utilizó un método iterativo similar al empleado por Dooley (1957) y realizó los cálculos para la descomposición del azometano. Concluyó diciendo que la distancia de ignición disminuía al aumentar la rapidez de inyección. Hizo también la comparación entre la distancia de ignición en placas catalíticas y no catalíticas, encontrando que esta última era del orden de 30 veces menor que la primera.

Utilizando también el método iterativo, Torda y Busenberg (1965) realizaron los cálculos para la descomposición del azometano. Su análisis no se restringió al caso en donde el número de Lewis era la unidad.

Mediante la utilización de métodos numéricos, Sharma y Sirignano (1970) analizaron el proceso de ignición de una mezcla combustible gaseosa de propano/aire por medio de un proyectil a temperatura elevada. El problema fué dividido en tres zonas:

- 1) flujo de estancamiento;
- 2) flujo de capa límite en una placa plana;
- 3) flujo de mezclado en la estela del proyectil.

Para el flujo de estancamiento, la temperatura de ignición resulta ser un problema de valores característicos. En el caso del flujo de capa límite en una placa plana, el objetivo fué el determinar la distancia de ignición. Si la ignición no tiene lugar en estas dos zonas, entonces existe la posibilidad de que sea en la estela dejada por el proyectil. Debido a la complejidad del flujo en esta zona, se empleó el modelo simplificado de Marble y Adamson (1954).

El método numérico utilizado fué el de cuasi-linealización, en el cual se aproximan los términos no lineales por la expansión de series de Taylor de primer orden alrededor de una solución obtenida en una iteración anterior. Finalmente, se dedujo una relación aproximada para la distancia de ignición, tanto en lo que respecta al flujo sobre una placa plana, como en el flujo de mezclado.

Berman y Ryazantsev (1978) utilizaron el método de expansiones asintóticas acopladas para analizar el proceso de ignición de una mezcla combustible gaseosa sobre una placa plana, utilizando el hecho de que la energía de activación es muy alta. En su análisis, utilizaron sólo el primer término de la expansión asintótica. Resolvieron primero el caso donde se desprecia el consumo de reactivos. Finalmente, obtuvieron una expresión para la distancia de ignición en forma más general.

Law y Law (1979) emplearon métodos asintóticos acoplados de primer orden para analizar el proceso de ignición de una mezcla gaseosa combustible, en el límite de muy alta energía de activación. En este análisis despreciaron el efecto del consumo de reactivos y tomaron a los números de Prandtl y de Schmidt como la unidad. Ellos dedujeron explícitamente una expresión para la distancia de ignición y encontraron que la "condición crítica de ignición" (thermal runaway ignition) coincidía en un primer orden con la condición de adiabaticidad. Se refirieron a un trabajo de Liñán y Williams (1979) en donde se analizó el proceso de ignición de un sólido semi-infinito reactivo a causa de un incremento en forma de escalón de la temperatura de la superficie.

Utilizando el método de expansiones asintóticas acopladas y tomando en cuenta órdenes mayores en la expansión, los criterios de adiabaticidad y de ignición dejaban de coincidir.

En un trabajo posterior, Law y Law (1980) incluyeron el efecto del consumo de reactantes en el proceso de ignición de una mezcla combustible gaseosa a lo largo de una placa plana. Utilizaron un método combinado numérico/perturbatorio y obtuvieron una solución explícita para la distancia de ignición, en donde se pueden identificar claramente los límites de flamabilidad del sistema.

2.4. Flujo de estancamiento

En esta sección se describen los trabajos dedicados al proceso de ignición de gases combustibles en flujos de estancamiento.

Chambré (1956) analizó teóricamente el problema de ignición en un flujo de estancamiento perpendicular a una placa plana. El objetivo del trabajo fue el de determinar la temperatura crítica de ignición en la superficie, lo cual se formula matemáticamente como un problema de valores característicos. Para este análisis se tomó una reacción unimolecular con perfiles similares de temperatura y concentración (número de Lewis de la unidad) y para muy alta energía de activación adimensional. Como criterio de ignición se tomó la condición de adiabaticidad en la placa. El autor referido obtuvo una expresión aproximada para la temperatura de ignición.

Sharma y Sirignano (1969) utilizaron métodos numéricos

para estudiar el proceso de ignición de la mezcla propano/aire en un flujo de estancamiento. La condición de adiabaticidad en la pared del cuerpo se tomó como criterio de ignición. El método numérico empleado fue el de cuasi-linealización cuya matriz tridiagonal resultante se resuelve por el método de inversión de línea. Los resultados obtenidos se pueden comparar con aquellos deducidos por Chambré (1956), encontrándose que la temperatura crítica de ignición calculada por Chambré es aproximadamente un 25% más baja que en este análisis.

Smith et al (1971) analizaron numéricamente, utilizando el método de cuasi-linealización, el proceso de ignición y extinción de una mezcla combustible de monóxido de carbono y aire en un flujo de estancamiento exisimétrico contra una placa no catalítica e impermeable. Este análisis incluye resultados numéricos en estado no permanente. La conclusión más importante de este trabajo fue que las condiciones de ignición y extinción se pueden observar claramente en la curva S típica de Fendell (1965), deducida para el caso de combustibles no mezclados. También probaron que los estados permanentes resultantes en la diagonal de la curva S son inestables (igual conclusión que Fendell).

Alkidas y Durbetaki (1971,1972) analizaron numéricamente el proceso de ignición de una mezcla combustible gaseosa de metano/aire en un flujo de estancamiento plano. Se trató como un problema de valores característicos en donde se tomó la condición de adiabaticidad como criterio de ignición. El método numérico utilizado fue el de Runge-Kutta de cuarto orden modificado por Gill. La conclusión más importante de este trabajo fue que se pueden definir

claramente los valores críticos de ignición y extinción del número de Damköhler, siendo este último independiente de la temperatura de la pared.

Alkidas y Durbetaki (1973a) presentaron un modelo analítico simplificado del proceso de ignición en tres tipos de flujos:

- 1) flujo de estancamiento plano;
- 2) flujo de estancamiento axial simétrico;
- 3) flujo sobre una placa plana.

Para este análisis se tomaron dos consideraciones esenciales:

- 1) la reacción química tiene lugar en una capa de estancamiento;
- 2) la transferencia de calor por convección es independiente de la reacción química.

Así, se deduce una expresión para la distancia de ignición y, para el caso concreto del flujo sobre una placa plana, se compararon estos resultados con los derivados en otros trabajos, encontrándose que los valores de éstos están por debajo de los aquí deducidos.

También Alkidas y Durbetaki (1973b) compararon los dos criterios de ignición que han sido utilizados para caracterizar el proceso de ignición de mezclas combustibles que fluyen sobre cuerpos a temperatura elevada. Estos son:

- 1) el criterio de Van't Hoff que establece que la ignición se alcanzará cuando se tenga la condición de adiabaticidad en el cuerpo;
- 2) el método absoluto, que examina las ecuaciones de balance en la región que comprende la zona de transición del flujo con composición química constante al flujo

de equilibrio químico.

Para la comparación se escogió el caso específico del flujo de estancamiento sobre un cuerpo de nariz redondeada. Las ecuaciones que gobiernan este proceso se integraron mediante métodos numéricos basados en Runge-Kutta de cuarto orden. Se encontró que existe una gran desviación entre ambos criterios de hasta un 50% en el primer número de Damköhler de ignición, para una temperatura dada del cuerpo. Sin embargo, los autores concluyeron que no hay que desechar el criterio de Van't Hoff, ya que para el problema inverso (dado el primer número de Damköhler de ignición), se obtienen pequeñas diferencias en la temperatura del cuerpo.

Saitoh (1974) analizó el proceso de extinción de un combustible premezclado en dos tipos de flujos:

- 1) flujo a contracorriente;
- 2) flujo de estancamiento sobre un cuerpo de nariz redondeada.

Utilizó métodos numéricos de Runge-Kutta de cuarto orden modificados por Gill y se hicieron los cálculos tanto para la mezcla etileno/aire como para la mezcla de propano/aire. Para ambos tipos de flujos se encontró que el criterio de extinción viene dado por un valor local máximo del número de Damköhler y que este valor no depende de los parámetros del flujo libre.

Finalmente, Law (1978) analizó el proceso de ignición de una mezcla combustible gaseosa en un flujo de estancamiento. El análisis se efectuó mediante la utilización del método de expansiones asintóticas acopladas, para el caso de muy alta energía de activación. Del análisis emergió un número de Damköhler apropiado

que incluye ambos números de Damköhler convencionales. El análisis fue de primer orden y se dedujo que el criterio de ignición coincide con el criterio de adiabaticidad. Obtuvo una expresión de la distancia de ignición, en función de los parámetros de flujo.

2.5 Discusión

De todos los problemas analizados en este capítulo, los que se relacionan directamente con este trabajo son los referentes al proceso de ignición de gases combustibles que fluyen a lo largo de una placa plana a temperatura elevada, cuya revisión se hace en el punto 2.3. Experimentalmente, se encontró que existen dos posibles mecanismos de estabilización de flamas, que son: a) mecanismo de equilibrio y b) mecanismo de ignición continua. También, en algunos casos se presentaron fenómenos oscilatorios que pueden explicarse por mecanismos de inestabilidad hidrodinámica. En lo que respecta a trabajos teóricos, en todos ellos se encuentran una serie de aspectos en común. En primer lugar, todos los trabajos utilizan la aproximación de Prandtl de la capa límite en todo el sistema de ecuaciones. Sin embargo, aceptan su validez sólo en regiones aguas arriba del punto adiabático. En segundo lugar, todos estos análisis toman como criterio de ignición la condición de adiabaticidad. Este criterio es válido sólo para el caso de muy alta energía de activación (Law y Law, 1979). En tercer lugar, en todos ellos se desprecia el efecto de la resistencia térmica de la placa. Por último, todos estos análisis se limitan a fenómenos permanentes.

El objetivo fundamental del presente trabajo, es el de aportar cierta luz en las áreas mencionadas líneas arriba. Con ello

en mente, se pretenden desarrollar los puntos siguientes:

- 1) encontrar los factores o parámetros que influyen en la validez de la aproximación de Prandtl de la capa límite en todo el sistema de ecuaciones;
- 2) definir un criterio de ignición más apropiado en este tipo de problemas que no tienen solución con variables de semejanza;
- 3) evaluar los efectos de la resistencia térmica de la placa;
- 4) analizar los procesos transitorios de ignición y definir asimismo un tiempo crítico de ignición;
- 5) encontrar alguna relación entre la validez de la aproximación de Prandtl de la capa límite con los mecanismos de ignición y la aparición de los fenómenos oscilatorios.

C A P I T U L O I I I

ECUACIONES DE BALANCE Y RELACIONES CONSTITUTIVAS

3.1 Introducción

En este capítulo se describen las ecuaciones que gobiernan los procesos de flujo con reacción química en sistemas de composición múltiple. Asimismo, se plantean y discuten las suposiciones y simplificaciones tomadas, las cuales es necesario introducir debido a la complejidad de los fenómenos estudiados. Las ecuaciones de balance contienen términos que expresan el flujo neto de una cantidad o propiedad, la cual puede ser escalar, vectorial o tensorial. Dichos flujos son generados por fuerzas termodinámicas, las cuales en la mayoría de los casos, resultan ser gradientes de parámetros termodinámicos intensivos (De Groot y Mazur, 1962). Las ecuaciones que relacionan las fuerzas termodinámicas con los flujos generados, son las denominadas relaciones constitutivas. Las ecuaciones de balance resultantes se aplican a un flujo de capa límite sobre una placa plana, sin que se desprecien los términos difusivos longitudinales de temperatura y concentración de especies. Mediante una adimensionalización adecuada de estas ecuaciones de balance, se obtiene un número adimensional que está íntimamente relacionado con dichos efectos difusivos longitudinales.

3.2 Ecuación de balance de masa para especies químicas

Para estas ecuaciones de balance, se considero que el fluido compuesto de varias especies químicas es un medio continuo. La hipótesis de medio continuo implica que el espacio ocupado por la materia se pueda dividir en elementos de volumen, dentro de los cuales la materia debe tener todas las propiedades de un sistema termodinámico. Esto es, el estado termodinámico se encuentra completamente determinado por la energía interna, el volumen y la masa de todos los constituyentes o especies químicas (Meixner y Reik, 1959).

Sea una mezcla de N constituyentes químicos, trasladándose cada uno de ellos con una velocidad,

$$\underline{u}^a = \underline{u}^a(\underline{x}, t) \quad (3.1)$$

donde a representa a la especie química considerada. Si la densidad de la especie a es ρ^a , definida como la masa de la especie a contenida en la unidad de volumen y ω^a representa la generación, por reacción química, en masa de la especie a por unidad de volumen y por unidad de tiempo, entonces la ecuación de balance de masa de la especie a en coordenadas cartesianas, viene dada por:

$$\rho^a \frac{\partial}{\partial t} + (\rho^a u_i^a)_{,i} = \omega^a \quad (3.2)$$

Las características principales de la notación utilizada en esta tesis son:

- a) las derivadas parciales se representan por subíndices

- de la coordenada de que se trate ($u_i = \partial u / \partial t$);
- b) las derivadas totales se representan mediante un apóstrofe ($f' = df/dn$);
 - c) se adopta la convención de suma de Einstein para sub-índices repetidos, solamente en el caso de las letras latinas (i,j,k) y no para las griegas (α, β) ($u_i u_i = u^2 + v^2 + w^2$).

Para la deducción de una ecuación global de conservación de masa, es necesario definir una velocidad de la mezcla, cuya forma más conveniente es la velocidad baricéntrica definida por:

$$\underline{u} = \sum_{\alpha=1}^N Y^{\alpha} \underline{u}^{\alpha}.$$

o en componentes cartesianas:

$$u_i^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N Y^{\alpha} u_i^{\alpha}, \quad (3.3)$$

donde Y^{α} representa la concentración másica de la especie α en la mezcla, definida como la relación de la masa de la especie α a la masa total de la mezcla. La densidad de la mezcla resulta estar dada por:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^N \rho^{\alpha} = \rho^{\alpha} / Y^{\alpha} \quad (3.4)$$

Dado que la velocidad de la mezcla se define mediante la ecuación (3.3), la ecuación global de conservación de masa, resultante de la sumatoria de todas las ecuaciones de balance de masa para las especies químicas, resulta ser idéntica a la ecuación de conservación de masa para fluidos con composición química constante (Williams, 1965), es decir:

$$\rho_{\tau} + (\rho u_i)_{x_i} = 0 \quad (3.5)$$

Un parámetro muy importante es la velocidad de difusión \bar{u}_i^{α} , que se puede definir como la velocidad relativa de la especie química α a la velocidad de la mezcla definida previamente por la ecuación (3.3). Así,

$$\bar{u}_i^{\alpha} \equiv u_i^{\alpha} - u_i \quad (3.6)$$

La ecuación de balance de masa de la especie α dada por la ecuación (3.2) se transforma, al tener en cuenta (3.3) a (3.6),

$$\rho Y_{\tau}^{\alpha} + \rho u_i Y_{x_i}^{\alpha} = \omega^{\alpha} - (\rho Y^{\alpha} \bar{u}_i^{\alpha})_{x_i} \quad (3.7)$$

donde ω^{α} representa la influencia del proceso reactivo y $(\rho Y^{\alpha} \bar{u}_i^{\alpha})_{x_i}$ la influencia del proceso difusivo en la rapidez de cambio de la concentración másica de la especie α . Es más conveniente trabajar con la ecuación (3.7) que con la ecuación (3.2), debido al hecho de que la primera contiene términos de flujos termodinámicos (\bar{u}_i^{α}) que, por medio de una relación constitutiva, se puede expresar en términos de las fuerzas termodinámicas que la generan.

3.3 Ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento

Para deducir las ecuaciones de balance general de la cantidad de movimiento, se sigue un procedimiento similar que para la deducción de la ecuación global de conservación de masa. Para la especie química α , la ecuación de balance de la cantidad de movimiento se expresa como:

$$\rho^\alpha (u_i^\alpha)_t + \rho^\alpha u_j^\alpha (u_i^\alpha)_{x_j} = (\sigma_{ij}^\alpha)_{x_j} + \rho^\alpha f_i^\alpha \quad (3.8)$$

donde σ_{ij}^α representa los componentes del tensor de esfuerzos y f_i^α representa los componentes de la fuerza de cuerpo de la especie α . Haciendo la sumatoria de todas las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento de las especies químicas, y teniendo en cuenta aspectos como el de transferencia de cantidad de movimiento de especies químicas que desaparecen o nacen, resulta la ecuación de balance general de la cantidad de movimiento (Williams, 1965):

$$\rho (u_i)_t + \rho u_j (u_i)_{x_j} = (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^D)_{x_j} + \rho f_i \quad (3.9)$$

donde:
$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \sigma_{ij}^\alpha$$

$$\sigma_{ij}^D = -\rho \sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha$$

$$f_i = \sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha f_i^\alpha$$

Lo sobresaliente de esta ecuación es el hecho de que han surgido esfuerzos difusivos de la forma $u_i^\alpha u_j^\alpha$. La ecuación de balance angular de la cantidad de movimiento, nos llevará necesariamente a la conclusión de que el tensor $(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^D)$ es simétrico, lo cual se desprende de las definiciones de σ_{ij} y de σ_{ij}^D arriba señaladas.

3.4 Ecuación de balance de la energía

Utilizando la primera ley de la termodinámica para la mezcla reactiva, se obtiene (Williams, 1965):

$$\begin{aligned} \rho D(e + u_i u_i / 2) / Dt = & \rho f_i u_i - (\rho u_i)_{x_i} + ((\tau_{ij} + \tau_{ij}^D) u_i)_{x_j} - (q_i)_{x_i} \\ & + \rho \sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha f_i^\alpha u_i^\alpha + \left(\sum_{\alpha=1}^N (\tau_{ij}^\alpha + \tau_{ij}^{\alpha D}) \bar{u}_i^\alpha \right)_{x_j} \\ & - \left(\sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha \bar{u}_i^\alpha \bar{u}_i^\alpha \bar{u}_i^\alpha \right)_{x_j} / 2 - \rho D \left(\sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha \bar{u}_i^\alpha \bar{u}_i^\alpha / 2 \right) / Dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde: e^α representa la energía interna específica de la especie α

$$e = \sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha e^\alpha$$

p^α representa la presión parcial de la especie α

$$p = \sum_{\alpha=1}^N p^\alpha$$

C_p^α representa el calor específico a presión constante de la especie α

$h^{\alpha 0}$ representa la entalpía de formación de la especie α

$$h^\alpha = h^{\alpha 0} + \int_{T^0}^T C_p^\alpha dT$$

q_i representa a las componentes cartesianas del flujo de calor

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{para } i \neq j \\ 0 & \text{para } i = j \end{cases}$$

$$\tau_{ij}^D = \begin{cases} \sigma_{ij}^D & \text{para } i \neq j \\ 0 & \text{para } i = j \end{cases}$$

3.5 Relaciones constitutivas

En las ecuaciones (3.7), (3.9) y (3.10), aparecen términos caracterizados como flujos netos y son consecuencia del alejamiento del estado termodinámico de equilibrio. Es decir, si por alguna causa se aparta del estado de equilibrio, actúan fuerzas termodinámicas, que a su vez generan flujos que tienden a restaurar el equilibrio. Como se mencionó anteriormente, son las ecuaciones constitutivas las que relacionan las fuerzas termodinámicas con los flujos generados. La teoría de la termodinámica irreversible (De Groot y Mazur, 1962; Gyarmati, 1970), basada en la teoría de Onsager (1931), establece una relación lineal entre las fuerzas y los flujos. La mayoría de la investigación se ha hecho en el rango de esta dependencia lineal. Los flujos que aparecen en las ecuaciones antes mencionadas son:

- a) cantidades escalares- w^2 ;
- b) cantidades vectoriales- $q_i, \rho Y^2 u_i^2$;
- c) cantidades tensoriales- τ_{ij} .

Las fuerzas termodinámicas son:

- a) fuerzas escalares- afinidad química;
- b) fuerzas vectoriales- gradiente de concentración másica, gradiente de temperatura, gradiente de presión, fuerzas de cuerpo;
- c) fuerzas tensoriales- rapidez de deformación.

En general, todas las fuerzas termodinámicas pueden generar flujos, no importando si son escalares, vectoriales o tensoriales. Sin embargo, para fluidos isótropos es necesario que estas relaciones sean invariantes a toda transformación ortogonal, lo cual es cono-

cido como el principio de Curie (De Groot y Mazur, 1962; Meixner y Reik, 1959; Becker, 1972). Aplicando el principio de Curie resulta:

- a) los flujos vectoriales pueden depender linealmente sólo de fuerzas termodinámicas vectoriales;
- b) los flujos escalares dependen en forma lineal solamente de fuerzas escalares y de los invariantes escalares de las fuerzas tensoriales;
- c) los flujos tensoriales sólo pueden depender linealmente de las fuerzas tensoriales y de las fuerzas escalares multiplicadas por el tensor unitario.

Según el principio de Curie, la rapidez de generación de la especie química está influenciada linealmente por la divergencia de la velocidad (traza del tensor del gradiente de velocidades) y recíprocamente, el tensor de esfuerzos está relacionado directamente con la afinidad química. De aquí surgen coeficientes como el de la viscosidad química, cuya existencia hoy en día es motivo de polémica. En general se supone que dichos efectos recíprocos (muy poco estudiados) no influyen en este tipo de procesos (Becker, 1972).

De todos los flujos antes mencionados, el único que no se puede expresar a través de una relación lineal con su fuerza termodinámica, para este caso analizado de combustión, es el de la rapidez de generación de especies \dot{c}_i . Así, para los flujos vectoriales y tensoriales se aplicará una relación lineal.

La ecuación constitutiva, que relaciona esfuerzos con la rapidez de deformación, para un fluido newtoniano se expresa de la

siguiente forma:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij} = \mu_1 (u_i x_j + u_j x_i) + \mu_2 \delta_{ij} u_k x_k \quad (3.11)$$

donde μ_1 y μ_2 representan el primero y segundo coeficientes de viscosidad. Es de hacerse notar que estos coeficientes de viscosidad son funciones, tanto de la temperatura como de la composición química de la mezcla.

La ecuación constitutiva que relaciona el flujo másico con sus correspondientes fuerzas termodinámicas vectoriales, está dada por (Williams, 1965):

$$\sum_{\beta=1}^N X^{\alpha} X^{\beta} (\bar{u}_i^{\beta} - \bar{u}_i^{\alpha}) / D^{\alpha\beta} - X_{x_i}^{\alpha} + (X^{\alpha} - Y^{\alpha}) p_{x_i} / p + \sum_{\beta=1}^N Y^{\alpha} Y^{\beta} (f_i^{\beta} - f_i^{\alpha}) / p + \sum_{\beta=1}^N [X^{\alpha} X^{\beta} (D_T^{\alpha\beta} / Y^{\alpha} - D_T^{\beta} / Y^{\beta}) / \rho D^{\alpha\beta}] T_{x_i} / T \quad (3.12)$$

donde: X^{α} representa la concentración molar de la especie α en la mezcla;
 $D^{\alpha\beta}$ representa el coeficiente binario de difusión másica entre las especies α y β ;
 D_T^{α} representa el coeficiente de termodifusión de la especie α .

El flujo de calor (q_i) está relacionado con las fuerzas termodinámicas para una mezcla de gases ideales por (Williams, 1965):

$$q_i = -\lambda T x_i + \rho \sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha} Y^{\alpha} \bar{u}_i^{\alpha} + RT \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N X^{\beta} D_T^{\alpha} (\bar{u}_i^{\beta} - \bar{u}_i^{\alpha}) / W^{\alpha} D^{\alpha\beta} \quad (3.13)$$

donde: λ representa el coeficiente de conductividad térmica de la mezcla;

R representa la constante universal de los gases;

W^{α} representa el peso molecular de la especie α .

Para M reacciones químicas independientes, la rapidez de generación de una especie química α viene dada por la ley de acción de masas, que indica que dicha rapidez de generación es proporcional al producto de las concentraciones de los reactantes, y se expresa de la siguiente forma (Penner, 1958):

$$\omega^{\alpha} = W^{\alpha} \sum_{J=1}^M (v_{2J}^{\alpha} - v_{1J}^{\alpha}) K_J \prod_{\beta=1}^n (X_{\beta}^{\beta} / RT)^{a_{\beta J}} \quad (3.14)$$

donde: $v_{n}^{\alpha, J}$ representa el coeficiente estequiométrico de la especie α en la reacción química J . $n=1$ es reactante, $n=2$ es producto;

K_J representa la constante de la rapidez de la reacción J , que es función solamente de la temperatura;

$a_{\beta J}$ es el orden de la reacción del reactante β en la reacción química J .

Empíricamente, la dependencia en la temperatura de la constante de rapidez de reacción K_J , se da por la expresión de Arrhenius (1889):

$$K_J = B_J T^{a_{TJ}} \exp(-E_J / RT) \quad (3.15)$$

donde: B_J representa el factor de frecuencia de la reacción J ;
 a_{TJ} es una constante de la reacción J ;

E_j representa la energía de activación de la reacción J.

Si se considera la mezcla como constituida por gases ideales, la ecuación de estado viene dada por:

$$p = \rho \bar{R} T \sum_{\alpha=1}^N (Y^\alpha / W^\alpha) \quad (3.16)$$

Una ecuación muy importante es aquella que relaciona las concentraciones molares y máxicas y está dada por (Williams, 1965):

$$X^\beta = Y^\beta / \left(W^\beta \sum_{\alpha=1}^N (Y^\alpha / W^\alpha) \right) \quad (3.17)$$

3.6 Simplificación de las ecuaciones de balance

Como anteriormente se mencionó, la complejidad de las ecuaciones de balance hace necesario introducir ciertas simplificaciones, bajo la condición de que no se altere cualitativamente la solución de las mismas y el error cuantitativo sea mínimo.

Los coeficientes de viscosidad y conductividad térmica son funciones complicadas, tanto de las concentraciones de sus constituyentes como de la temperatura (Hirschfelder et al, 1954). La primera simplificación de importancia consiste en suponer que tales coeficientes sean dependientes solamente de la temperatura (Williams, 1965).

Por otra parte, en la ecuación (3.12), el flujo de masa se relaciona con sus respectivas fuerzas termodinámicas, que son:

- a) gradiente de concentración;
- b) gradiente de presión;
- c) fuerzas de cuerpo;
- d) gradiente de temperatura (efecto Soret).

El efecto de los gradientes de presión en el flujo de masa es importante en aquellos flujos en donde dicho gradiente sea alto. Sin embargo, en flujos de capa límite sobre una placa plana, los gradientes de presión son pequeños y, por lo tanto, lo es su contribución a la difusión másica. También, las fuerzas de cuerpo sólo pueden tener una influencia importante en aquellos casos, en donde la mezcla esté compuesta por gases con pesos moleculares muy diferentes, o donde actúe otro tipo de fuerzas de cuerpo diferentes a las gravitatorias. El efecto Soret puede ser importante en algunos casos, especialmente en flujos de capa límite, en donde existan fuertes gradientes de temperaturas. Es, sin embargo, su efecto mucho menor que el causado por gradientes de concentraciones. Por ejemplo, en el caso específico de la inyección de gases ligeros a la capa límite o de procesos ablativos, estos efectos no sólo son importantes sino que constituyen la principal fuerza motriz del flujo de masa (Baron, 1962; Sparrow et al, 1964; Tambour et al, 1976). Así, bajo estas simplificaciones, la ecuación (3.12) se reduce a:

$$x_i^a x_i = \sum_{\beta=1}^N X_i^\beta x_i^\beta (\bar{u}_i^\beta - \bar{u}_i^a) / D^{a\beta} \quad (3.18)$$

Si la mezcla es binaria, la ecuación (3.18) se reduce a la ley de Fick, y se expresa en la forma siguiente:

$$y_i^a \bar{u}_i^a = -D^{a\beta} y_i^a x_i \quad (3.19)$$

Esta ecuación es común en el desarrollo de la transferencia de masa y generalmente se utiliza en los análisis de problemas de combus-

ción (Williams, 1965), ecuación a la que también se llega suponiendo que los pesos moleculares y los coeficientes de difusión de todas las especies en un sistema de composición múltiple, son iguales o parecidos.

3.7 Ecuaciones de balance en una capa límite

En la presente sección se deducen las ecuaciones que gobiernan el flujo de una mezcla reactiva en una capa límite laminar sobre una placa plana a temperatura elevada.

En la figura (3.1) se muestra esquemáticamente el problema planteado. Una mezcla combustible estequiométrica gaseosa, compuesta por un combustible, un oxidante y un gas inerte, fluye a lo largo de una placa plana no catalítica e impermeable. Los parámetros de flujo libre del gas son constantes y corresponden a una velocidad u_∞ , temperatura T_∞ , densidad ρ_∞ , concentración de combustible γ_c^F y viscosidad μ_∞ .

Para la deducción de las ecuaciones que rigen dicho proceso, se utilizan ciertas simplificaciones relacionadas con el alto número de Reynolds. En la ecuación de balance de la cantidad de movimiento (3.9), se encuentran esfuerzos difusivos, además de los esfuerzos viscosos. Lees (1958) encontró que, mediante la utilización de la ley de Fick de difusión, la relación entre el esfuerzo difusivo τ_{12}^D y el esfuerzo viscoso μu_y es del orden de:

$$1/(\text{Re}_L \text{Sc}^2) \tag{3.20}$$

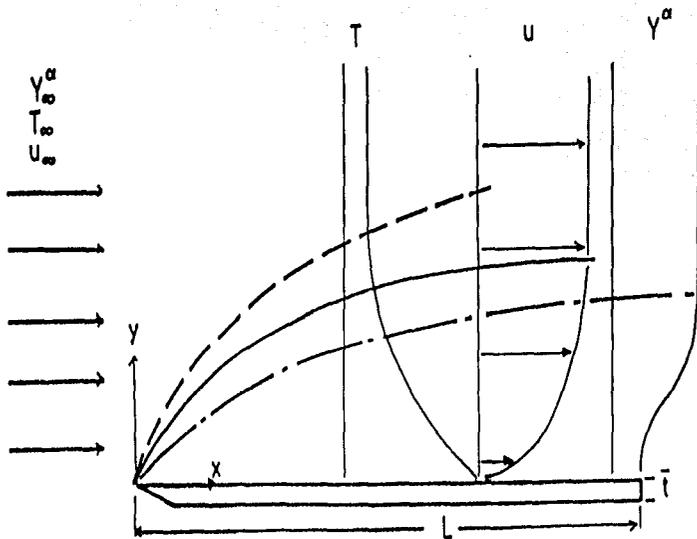


Fig. (3.1) Diagrama esquemático del problema físico planteado.

donde: Sc corresponde al número de Schmidt de la substancia bajo consideración;

Re_L representa el número de Reynolds, basado en la longitud característica de la placa L .

También Lees encontró, que esa misma relación se cumple entre el efecto Soret y la contribución del gradiente de temperaturas en el flujo de calor. En otras palabras, para flujos con alto número de Reynolds (lo cual es el caso que se está analizando), las ecuaciones (3.9) y (3.13) se reducen, respectivamente a:

$$\rho Du_i / Dt = \rho_{ij} x_j + \rho f_i \quad (3.21)$$

$$q_i = -\lambda T_{x_i} + \rho \sum_{\alpha=1}^N h^\alpha Y^\alpha \bar{u}_i^\alpha \quad (3.22)$$

El efecto del segundo coeficiente de viscosidad se desprecia al introducir la aproximación de Prandtl de la capa límite (Schlichting, 1968) en las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento. Las ecuaciones de estado para una mezcla de gases ideales son:

$$p = \rho RT \sum_{\alpha=1}^N Y^\alpha / W^\alpha \quad (3.23)$$

$$h^\alpha = h^{\alpha 0} + \int_{T^0}^T C_p^\alpha dT \quad (3.24)$$

Las ecuaciones de balance así resultantes para un flujo de capa límite bidimensional, introduciendo la aproximación de Prandtl para las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y en el término de la disipación en la ecuación de la energía, resultan ser:

masa,

$$\rho_{\xi} + (\rho u)_{\xi} + (\rho v)_{\eta} = 0 \quad (3.25)$$

cantidad de movimiento,

$$\rho Du/Dt = (\rho u v)_{\eta} - p_{\xi} \quad (3.26)$$

$$\rho v_{\xi} = -p_{\eta} \quad (3.27)$$

energía,

$$\rho Dh/Dt = (\lambda T_{\xi})_{\xi} + (\lambda T_{\eta})_{\eta} + Dp/Dt + \mu (u_{\eta})^2 - \sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha} \omega_{\alpha}^2 \quad (3.28)$$

masa del combustible,

$$\rho DY^F/Dt = (\rho DY^F_{\xi})_{\xi} + (\rho DY^F_{\eta})_{\eta} + \omega^F \quad (3.29)$$

En las ecuaciones (3.28) y (3.29), no se utilizó la aproximación de Prandtl de la capa límite. Esto es, en las ecuaciones de balance de la energía (excepto en el término disipativo) y de balance de masa del combustible. Ello es debido a que en los procesos de combustión pueden ocurrir fuertes gradientes longitudinales de temperatura y concentración que invaliden tal aproximación.

Generalmente, un proceso reactivo involucra un conjunto de reacciones químicas simultáneas. Sin embargo, para el análisis presente se tomará una reacción química global, procedimiento generalmente adoptado por la mayoría de los análisis en los procesos de combustión (p. ej. Williams, 1965). La reacción química se puede representar de la siguiente forma:

$$v^F [F] + v^O [O] + \sum_{\alpha=1}^{N-2} v^\alpha [a] \quad (3.30)$$

donde el símbolo $|a|$ representa la fórmula química de la especie considerada. La rapidez de generación de la especie a por la reacción química dada en la ecuación (3.30), de acuerdo a las ecuaciones (3.14) y (3.15), se expresa como:

$$\omega^\alpha = -W^\alpha v^\alpha B T^{a_F} \exp(-E/RT) \prod_{s=1}^2 (X^s p / \bar{R} T)^{a_s} \quad (3.31)$$

en donde los coeficientes estequiométricos de los reactantes se toman como positivos y los coeficientes de los productos como negativos. Para la rapidez de consumo del combustible, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\omega^F = -W^F v^F B T^{a_F} \exp(-E/RT) \quad (3.32)$$

donde a_F y a_O representan los órdenes de reacción para el combustible y para el oxidante respectivamente.

Transformación de coordenadas

Históricamente, el desarrollo de la teoría de la capa límite, con o sin reacción química, ha demostrado que la forma más conveniente de trabajar con las ecuaciones de balance, es mediante la introducción de una transformación de coordenadas denominadas de Howarth-Dorodnitsyn (Howarth, 1948; Dorodnitsyn, 1942). Para ésto, se define primeramente una función de corriente $\psi(x, y, t)$ de tal forma que se cumpla automáticamente la ecuación de balance global de masa. Esto es:

$$\begin{aligned}
 u &= (1/\rho) \psi_y \\
 v &= -(1/\rho) \left(\psi_x + C \int_0^y \rho(x, \gamma, t) d\gamma \right) \tau
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Las nuevas coordenadas introducidas son:

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \zeta_m x / L \\
 \eta &= (u_m / 2 \sqrt{u_m x})^{1/2} \int_0^y \rho(x, \gamma, t) d\gamma \\
 \tau &= \zeta_m u_m \tau / L
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

Aquí, ζ representa el primer número de Damköhler. Este número adimensional representa la reactividad del proceso y se define como la relación entre el tiempo característico del proceso difusivo, y el tiempo característico de la reacción. Así, si $\zeta \rightarrow 0$ el flujo es inerte, y si $\zeta \rightarrow \infty$ el flujo se encuentra en equilibrio químico (Chung, 1965). En este contexto,

$$\zeta = x \nu_{FT}^{a_T} (Y_F^F)^{a_F-1} (Y_O^F)^{a_O} \rho_m^{a_F+a_O-1} / C u_m (W^F)^{a_F-1} (W^O)^{a_O} \tag{3.35}$$

y ζ_m su valor correspondiente en el borde de salida de la placa, esto es:

$$\zeta_m = \zeta \Big|_{x=L} \tag{3.36}$$

Aquí C representa una constante numérica tomada como 1000, con la finalidad de obtener valores de ζ y de τ del orden de la unidad.

Para trabajar con ecuaciones de balance adimensionales, es conveniente adimensionalizar los parámetros dependientes en la forma siguiente:

$$f = \psi / (2\rho_m \mu_m \omega_m x)^{1/2}$$

$$\theta = T/T_m$$

$$m_F = \psi^F / \psi_m^F$$

$$P = p/p_m$$

(3.37)

Las ecuaciones que gobiernan este proceso (3.25)-(3.29), se reducen entonces a las siguientes ecuaciones adimensionales (para su desarrollo, ver Apéndice C):

$$(\lambda f_{\eta\eta})_{\eta} + f f_{\eta\eta} - 2\zeta(f_{\tau\eta} + f_{\eta} f_{\zeta\eta} - f_{\zeta} f_{\eta\eta}) + \delta^2 \Lambda_1 \{f_{\tau} + 2\zeta f_{\tau\zeta} - \eta f_{\tau\eta} + \phi_1\}$$

(3.38)

$$P_{\eta} = k \delta^2 M_{\infty}^2 (\rho / \rho_m) (f_{\tau} + 2\zeta f_{\tau\zeta} - \eta f_{\tau\eta} + \phi_1)$$

(3.39)

$$\begin{aligned} (\lambda \theta_{\eta} / Pr)_{\eta} + f \theta_{\eta} - P \delta^2 / \theta \{2\zeta (F(\theta) \theta_{\zeta} / Pr)_{\zeta} - \eta (F(\theta) \theta_{\zeta} / Pr)_{\eta} - \eta (F(\theta) \theta_{\eta} / Pr)_{\zeta} \\ + 1.5 \eta F(\theta) \theta_{\eta} / \zeta Pr + 0.5 \eta^2 / \zeta (F(\theta) \theta_{\eta} / Pr)_{\eta} + \phi_3\} \\ - \lambda Ec (f_{\eta\eta})^2 - \delta^2 Ec \Lambda_2 \{f_{\tau} + 2\zeta f_{\tau\zeta} - \eta f_{\tau\eta} + \phi_1\} \\ + 2\zeta \{\theta_{\tau} + f_{\eta} \theta_{\zeta} - f_{\zeta} \theta_{\eta} - C \theta^{\tau} P^{\delta-1} m_F^{\delta} \exp(-\theta_a / \theta)\} \end{aligned}$$

(3.40)

$$\begin{aligned}
 & (i m_{F\eta} / Sc)_\eta + f m_{F\eta} - P \delta^2 / \theta \{ 2 \zeta (F(\theta) m_{F\zeta} / Sc)_\zeta - \eta (F(\theta) m_{F\eta} / Sc)_\zeta \\
 & - \eta (F(\theta) m_{F\zeta} / Sc)_\eta + 1.5 \eta F(\theta) m_{F\eta} / \zeta Sc \\
 & + 0.5 \eta^2 (F(\theta) m_{F\eta} / Sc)_\eta / \zeta + \phi_2 \} + 2 \zeta (m_{F\tau} + f_\eta m_{F\zeta} \\
 & - f_\zeta m_{F\eta} + C e^{\tau P} P^{-1} m_{F\tau}^S \exp(-\theta_a / \theta)) \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

donde: $r = a_T + 1 - a_F - a_0$

$$s = a_F + a_0$$

$$i = \mu_0 / \nu_\infty \rho_\infty$$

$$\delta = (\nu_\infty \zeta m \rho_\infty / \rho^2 \nu_\infty L)^{1/2}$$

$$\zeta = \left(\sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha_0} \nu^{\alpha_0} W^{\alpha_0} \right) Y^F / C_p T_\infty \nu^F W^F \quad (3.42)$$

$$F(\theta) = \mu / \nu_\infty$$

$$Pr = \nu C_p / \lambda$$

$$Sc = \mu / \rho D$$

$$Ec = u_\infty^2 / C_p T_\infty$$

$$\theta_a = E / RT_\infty$$

Los operadores Λ_1 y Λ_2 están dados por:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1(q) &= -2\zeta \left\{ \int_\eta^\infty (q) dn \right\}_\zeta + \left\{ (2u_\infty x / \rho_\infty \nu_\infty)^{1/2} \left(\int_0^y \rho dy \right)_x - \eta \right\} (q) \\
 \Lambda_2(q) &= 2\zeta \left\{ \int_\eta^\infty (q) dn \right\}_\tau + 2\zeta f_\eta \left\{ \int_\eta^\infty (q) dn \right\}_\zeta + (f + f_\zeta)(q) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

y los parámetros ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son funciones de los términos de com-

presibilidad (Apéndice C).

Para la deducción de las ecuaciones (3.38)-(3.41), se consideran como constantes, tanto el peso molecular de la mezcla como el calor específico a presión constante. La primera suposición es bastante aceptable cuando el oxidante es el aire, debido principalmente a que el nitrógeno constituye la especie química más abundante. Cuando se utiliza oxígeno puro, entonces dicha suposición no se justifica cuando empleamos combustibles como el hidrógeno, por la gran diferencia del peso molecular entre el H_2O y el O_2 . La segunda suposición es difícil de justificar. Sin embargo, su inclusión obedece a la gran simplificación que se genera con ella y a que esencialmente no altera los resultados cualitativos obtenidos. Ambas suposiciones son frecuentes en los análisis de procesos de combustión. (Williams, 1965).

3.8 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera para las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento son:

$$u=v=0; \text{ en } y=0$$

(3.44)

$$u=u_w; \text{ cuando } y=\infty$$

Para las condiciones de frontera de la ecuación de balance de masa del combustible (3.41), hay que tomar en cuenta los dos factores especificados para el presente análisis, que son:

- 1) pared impermeable- no existe difusión de especies hacia el interior de la placa;

2) la placa no es catalítica- no existe reacción química de superficie.

La primera condición implica que debe existir un balance entre la masa de las especies químicas que se difunden hacia la superficie de la placa y la masa generada por las reacciones químicas de superficie. Pero la segunda condición indica que no existen reacciones de superficie, por lo que se deduce que no puede haber difusión de especies químicas hacia la placa. Esto es:

$$(Y^a_y)_{y=0} = 0 \quad (3.45)$$

El flujo de calor en la interfase placa-gas es, de acuerdo a la ecuación (3.22) el siguiente:

$$q_w = (\lambda T_y)_{y=0} + (\rho \sum_{a=1}^N D h^a Y^a_y)_{y=0} = (-\lambda T_y)_{y=0} \quad (3.46)$$

En el presente trabajo se tomará en cuenta la resistencia térmica de la placa, por lo que la condición de frontera en la fase gaseosa viene dada por el balance del flujo de calor en la interfase, esto es:

$$q_w = (-\lambda T_y)_{y=0} = (-\lambda_w T_{wy})_{y=0} \quad (3.47)$$

Las condiciones del flujo libre están dadas por:

$$T = T_\infty \text{ y } Y^F = Y_\infty^F \quad ; \text{ cuando } y \rightarrow \infty \quad (3.48)$$

La ecuación de balance de energía en la placa es:

$$T_{wxx} + T_{wyy} = (\rho_w C_w / \lambda_w) T_{wt} \quad (3.49)$$

donde se han considerado las propiedades de la placa como constantes. También, si se consideran los bordes de ataque y de salida en la placa como adiabáticos, entonces las condiciones de frontera

quedan:

$$\begin{aligned} T_{wx} &= 0 && \text{; en } x=0 \text{ y } x=L \\ -w &= T_{wz} && \text{; en } y=-\bar{e} \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde \bar{e} representa el espesor de la placa y T_{wz} la temperatura en la superficie inferior de la placa.

En la placa se introducen las coordenadas dimensionales siguientes:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_m x / L \\ \xi &= C_p y (Cu_m \rho_m \mu_m \zeta_m / 2L)^{1/2} / \lambda_w Pr \\ \tau &= \zeta_m u_m \tau / L \end{aligned} \quad (3.51)$$

de tal forma que la ecuación (3.49) se transforma en:

$$\theta_{w\xi\xi} + (2\zeta_m \lambda_w^2 Pr^2 / CC_p^2 Lu_m \rho_m \mu_m) \theta_{w\zeta\zeta} = (2\rho_w C_w \lambda_w / CC_p^2 \rho_m \mu_m) \theta_{w\tau} \quad (3.52)$$

En las coordenadas dimensionales, las condiciones de frontera son:

fase gaseosa

$$\begin{aligned} f &= f_{\eta} = m_F \eta = 0, \quad (\theta_{\eta})_{\eta=0} = \sqrt{CC\xi} (\theta_{w\xi})_{\xi=0} && \text{; en } \eta=0 \\ f_{\eta} &= m_F = \theta = 1 && \text{; cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.53)$$

placa

$$\begin{aligned} \theta_w &= \theta_{wz} && \text{; en } \xi = -\xi_m \\ \theta_{wz} &= 0 && \text{; en } \zeta = 0 \text{ y } \zeta = \zeta_m \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde ζ_m representa la resistencia térmica de la placa, y está definida como:

$$\zeta_m = C_p \bar{v} (C u_w \rho_w \mu_w \zeta_m / 2L)^{1/2} / \lambda_w Pr$$

3.9 Discusión de las ecuaciones

En todos los trabajos sobre el proceso de ignición en una capa límite laminar sobre una placa plana, se ha tomado la aproximación parabólica (aproximación de Prandtl de la capa límite) y calculado el proceso hasta la aparición del punto adiabático. Más allá del punto adiabático, argumentan tales autores, las ecuaciones parabólicas no son válidas debido a la existencia de fuertes gradientes de temperatura y concentraciones. Así, Dooley (1957) apunta en uno de sus comentarios finales, que la aproximación de Prandtl en las ecuaciones de balance de energía y de masa de las especies, deja de ser válida en regiones próximas a la flama, no importando las condiciones del flujo libre ni las condiciones de la placa. También, Sharma y Sirignano (1970) realizan numéricamente los cálculos de los términos ∂_{zz} y ∂_{nn} , encontrando que aguas abajo del punto adiabático la relación entre ambos términos alcanzaba valores de 3:1, por lo que las ecuaciones de capa límite se ven invalidadas. La falta cometida por Sharma y Sirignano radica en el hecho de que el primer término no representa la difusión longitudinal de calor, como se puede observar en la ecuación (3.40). Además, no consideraron el parámetro adimensional $\delta^2 P / \theta$ que multiplica a la segunda derivada longitudinal de la temperatura. Por lo tanto, las apreciaciones de Sharma y Sirignano (1970) carecen de fundamento. En un trabajo reciente, Law y Law (1979) desisten de utilizar órdenes

mayores al primero en su análisis asintótico, ya que también consideran que la aproximación parabólica no es válida en regiones próximas a la flama.

Como se puede observar de las ecuaciones que gobiernan este proceso de ignición, estas son ecuaciones elípticas, acopladas y no lineales. La elipticidad de estas ecuaciones está relacionada directamente con el parámetro adimensional δ , definido en la ecuación (3.42). δ es un parámetro local proporcional a la relación entre la velocidad de la flama y la velocidad del fluido. Esto es:

$$\delta \sim u_f / u \quad (3.55)$$

Ello resulta del hecho de que la velocidad de propagación de la flama es (Williams, 1965):

$$u_f = 1 / (\sqrt{\Delta \rho}) \sqrt{\lambda w / C_p} \quad (3.56)$$

donde Δ representa el valor característico de la velocidad de la flama. De la ecuación (C.35), se tiene que la rapidez de reacción se da por:

$$\omega \sim B T_{\infty}^{a_T} (Y_{\infty}^F)^{a_F-1} (Y_{\infty}^O)^{a_O} \rho_{\infty}^{a_F+a_O} / (W^F)^{a_F-1} (W^O)^{a_O} \quad (C.35)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.42) se deduce que:

$$\omega \sim \zeta_m C_m u_m / L \quad (3.57)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (3.56) se tiene que:

$$u_f \sim (1/\rho) \sqrt{u_m \zeta_m \rho_{\infty} u_m / L}$$

o sea:

$$u_f / u \sqrt{(1/\epsilon)} \sqrt{u_{\infty}^2 \epsilon_m \delta_m^2 / L u_{\infty}} = \delta$$

Si este valor de δ tiende a cero, entonces el conjunto de ecuaciones que rigen este proceso son parabólicas en x . El valor máximo de δ ocurre en la línea muerta (Ziermer y Cambel, 1958), abajo de la cual la reactividad de la mezcla se inhibe por la transferencia de calor hacia la placa y por la destrucción de radicales libres en la pared. En esta línea muerta es donde, por efectos de la capa límite térmica, la velocidad de la flama es mayor y donde se tiene una baja velocidad longitudinal de la mezcla. En zonas arriba de la línea muerta, el valor de δ disminuye debido a la disminución de la velocidad de la flama y al aumento de la velocidad del fluido. Por otra parte, en zonas abajo de la línea muerta, el valor de δ disminuye debido a la fuerte caída de la velocidad de la flama por las causas arriba mencionadas. Pero la aproximación parabólica es válida cuando $\delta \rightarrow 0$ en todo el campo, es decir, el valor de δ en la línea muerta es crítico para dicha aproximación. El punto de estabilización de la flama se decide por medio del valor máximo de δ (δ_m). Para $\delta_m \rightarrow 0$, el mecanismo de estabilización de la flama está gobernado por el mecanismo de ignición continua (Turcotte, 1960) y para valores apreciables de δ_m , el mecanismo de estabilización está gobernado por el mecanismo de equilibrio (Ziermer y Cambel, 1958; Toong, 1958). En este último caso, la flama viajará hasta tal punto, en donde la velocidad longitudinal iguale a la velocidad de la flama. En el caso de que el valor máximo de u_f/u sea menor que la unidad, se puede localizar la flama mediante la aproximación parabólica. Sin embargo, aguas arriba se localizarán fuertes gradientes de temperatura y

concentraciones que afectarán cuantitativamente los perfiles de los parámetros de interés.

Por medio del presente análisis se comprueba que la aproximación parabólica puede ser válida para el límite $\xi_m \rightarrow 0$ y puede ser útil en el caso donde u_f/u sea menor que la unidad. Como se mencionó, en todos los análisis anteriores se intentaba localizar la distancia de ignición, indicando con ello que la flama podría formarse, pero su localización era difícil. Sin embargo, mediante la aproximación $\xi_m \rightarrow 0$ el punto de ignición y el punto de estabilización coinciden y son diferentes en general al punto adiabático.

Otro aspecto interesante en las ecuaciones que gobiernan este proceso, es el de la posibilidad de desacoplar las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento del resto de las ecuaciones. La ecuación (3.38) está acoplada con las demás ecuaciones, por la función ϕ_1 y por el parámetro λ , para flujo no permanente y sólo por λ para flujo permanente. Este parámetro está definido como:

$$\lambda = \mu \rho / u_m \tau_w = F(\epsilon) P / \theta$$

La única forma de que este parámetro no sirva como eslabón de acoplamiento es que la viscosidad del fluido sea proporcional a la temperatura absoluta, esto es:

$$F(\epsilon) = \theta$$

y que la presión sea uniforme en todo el campo, esto es:

$$P = 1$$

(3.58)

Esto último se consigue en procesos donde $\delta_m \rightarrow 0$. El efecto de la función ϕ_1 en el aclamamiento, también desaparece en el límite $\delta_m \rightarrow 0$. Así, las dos condiciones necesarias para poder desacoplar la ecuación de balance de cantidad de movimiento de las demás, son:

- 1) que la viscosidad de la mezcla sea proporcional a la temperatura absoluta;
- 2) que $\delta_m \rightarrow 0$.

Si se cumplen estas dos condiciones, entonces la ecuación (3.38) se reduce a la clásica ecuación de Blasius (Schlichting, 1968):

$$f''' + ff'' = 0 \quad (3.59)$$

donde $f=f(\eta)$, lo cual no implica que los valores de los componentes de la velocidad no puedan variar con el tiempo, ya que la dependencia de éste se da en η . Con estas dos condiciones y suponiendo que los números de Prandtl (Pr) y de Schmidt (Sc) son constantes y el número de Eckert (Ec) es despreciable, las ecuaciones (3.40) y (3.41) se reducen respectivamente a:

$$\theta_{\eta\eta} / Pr + f\theta_{\eta} = 2\zeta (\theta_{\tau} + f'\theta_{\zeta} - C\zeta^{\tau} m_{F\tau}^S \exp(-\theta_a/\theta)) \quad (3.60)$$

$$m_{F\eta\eta} / Sc + fm_{F\eta} = 2\zeta (m_{F\tau} + f'm_{F\zeta} + C\theta^{\tau} m_{F\tau}^S \exp(-\theta_a/\theta)) \quad (3.61)$$

Para altos valores de δ_m , de acuerdo a la ecuación (3.39), pueden existir fuertes gradientes de presión que afecten la estabilidad hidrodinámica y conduzcan a oscilaciones de la flama (Wu y Toong, 1963).

Una implicación muy importante que se deduce de los párrafos anteriores, es el hecho de que la uniformidad en la presión

está íntimamente relacionada con la parabolización de las ecuaciones, no sólo en lo referente a flamas premezcladas sino que también puede extrapolarse a las flamas de difusión. Esto es, para procesos donde es muy importante el proceso de difusión longitudinal de calor en la fase gaseosa, como puede ser el ejemplo de propagación de flamas en combustibles sólidos térmicamente delgados (Fernández-Pello y Santoro, 1979), es necesario tomar en consideración los gradientes de presión resultantes y su efecto en las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento. Esta omisión debe conducir a importantes errores en el cálculo del flujo de calor y, por lo tanto, de la velocidad de propagación de la flama. Un ejemplo concreto de ello se tiene en el trabajo de Frey y T'ien (1979), en donde no sólo se ignoran los gradientes de presión, sino que simplifican el campo de velocidades tomándolo uniforme.

C A P I T U L O IV

PROCESOS DE IGNICION EN FLUJOS DE CAPA LIMITE

4.1 Introducción

En este capítulo se analizan varios problemas referentes a los procesos de ignición de gases combustibles premezclados que fluyen a lo largo de una placa plana a temperatura elevada. En todos los casos analizados se supone que los efectos difusivos longitudinales son despreciables comparados con los transversales, de tal forma que el conjunto de ecuaciones que gobiernan al proceso son parabólicas en la dirección longitudinal. Esto es, para el fluido:

$$\delta_m = 0.$$

Tomando las consideraciones presentadas en el capítulo III, las ecuaciones de balance son:

$$f'' + ff'' = 0 \quad (3.59)$$

$$\theta_{\eta\eta} / Pr + f\theta_{\eta} = 2\zeta (\theta_{\tau} + f'\theta_{\zeta} - C\bar{c}\theta^{\infty} m_F^{\infty} \exp(-\theta_a/\theta)) \quad (3.60)$$

$$m_{F\eta\eta} / Sc + fm_{F\eta} = 2\zeta (m_{F\tau} + f'm_{F\zeta} + C\theta^{\infty} m_F^{\infty} \exp(-\theta_a/\theta)) \quad (3.61)$$

La ecuación de balance de energía en la placa es:

$$\theta_{w\xi\xi} + (2\zeta m_w^{\infty} Pr^2 / CC_p^2 Lu_w \rho_w \mu_w) \theta_{w\zeta\xi} = (2\rho_w C_w \lambda_w / CC_p^2 \rho_w \mu_w) \theta_{w\tau} \quad (3.52)$$

y en la interfase gas-sólido se tiene:

$$(\theta_n)_{\eta=0} = \sqrt{C_2} (\theta_{w_c})_{\xi=0} \quad (3.53)$$

Las condiciones iniciales y de frontera dependen del problema concreto analizado.

En las secciones (4.3) y (4.4) se tratan los problemas permanentes y en las secciones (4.5) y (4.6) los problemas transitorios del proceso de ignición. En ambos tipos de problemas se estudia también el efecto de la resistencia térmica de la placa y se discuten las diferentes formas de definición de un punto crítico de ignición.

4.2 Método de solución

El sistema de ecuaciones parabólicas, acopladas y no lineales, dado por las ecuaciones (3.60) y (3.61), se resuelven numéricamente mediante la utilización del método de cuasi-linealización (Sharma y Sirignano, 1969). Las derivadas se reemplazan por diferencias finitas de la forma siguiente (apéndice C):

$$\begin{aligned} q_{\eta} &= (q_{m,n+1,k} - q_{m,n-1,k}) / 2\Delta\eta \\ q_{\eta\eta} &= (q_{m,n+1,k} - 2q_{m,n,k} + q_{m,n-1,k}) / \Delta\eta^2 \\ q_{\zeta} &= (q_{m-2,n,k} - 4q_{m-1,n,k} + 3q_{m,n,k}) / 2\Delta\zeta \\ q_{\tau} &= (q_{m,n,k-2} - 4q_{m,n,k-1} + 3q_{m,n,k}) / 2\Delta\tau \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde q representa cualquier variable dependiente y los subíndices

(m,n,k) representan un punto en el espacio (t,n,t) . Como puede observarse de las ecuaciones (4.1), es necesario contar con dos conjuntos de datos anteriores al actual, tanto en lo referente al tiempo como a la posición t . Sin embargo, para $t = \Delta t$ o $t = \Delta t$, sólo se puede contar con un conjunto de datos anterior, por lo que es necesario definir para estos casos las derivadas respectivas de la forma siguiente:

$$(q_t)_{m,n,2} = (q_{m,n,2} - q_{m,n,1}) / \Delta t \quad (4.2)$$

$$(q_c)_{2,n,k} = (q_{2,n,k} - q_{1,n,k}) / \Delta c \quad (4.3)$$

Los términos no lineales que aparecen en las ecuaciones (3.60) y (3.61) son:

$$\theta^r \exp(-\theta_a / \theta) : m_F^S \quad (4.4)$$

En el método de cuasi-linealización, estos términos no lineales se aproximan por medio de una expansión en serie de Taylor de primer orden, alrededor de una solución obtenida en una iteración anterior. Así, los términos no lineales dados en (4.4), se linealizan en la forma siguiente:

$$(\theta^r \exp(-\theta_a / \theta))^{i+1} = (\theta^r \exp(-\theta_a / \theta))^i + (\theta^r \exp(-\theta_a / \theta))^i \cdot (\theta^{i+1} - \theta^i) \quad (4.5)$$

$$(m_F^S)^{i+1} = (m_F^S)^i + ((m_F^S)^i)' (m_F^{i+1} - m_F^i) \quad (4.6)$$

donde i y $i+1$ representan las iteraciones anterior y actual, respectivamente.

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) quedan, después de desarrollar sus términos, de la forma siguiente:

$$(\theta^r \exp(-\theta_a/\theta))^{\ell+1} = (1-r-\theta_a/\theta^\ell) (\theta^r)^\ell + (r+\theta_a/\theta^\ell) (\theta^{r-1})^\ell \\ - \exp(-\theta_a/\theta^\ell) \theta^{\ell+1} \quad (4.7)$$

$$(m_F^s)^{\ell+1} = (1-s) (m_F^s)^\ell + (m_F^s - 1)^\ell m_F^{\ell+1} \quad (4.8)$$

Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones (3.60) y (3.61), éstas se transforman en el conjunto de ecuaciones lineales siguientes:

$$(\text{Pr} f_n \Delta \eta / 2 - 1) \theta_{m,n-1,k}^{\ell+1} + (2 + (m-1) \text{Pr} \Delta \eta^2 (a f_n^i + b \Delta \zeta / \Delta \tau) \\ - 2C (m_F^s)_{m,n,k}^\ell) (m-1) \Delta \zeta \Delta \eta^2 \bar{c} \text{Pr} (r + \theta_a / \theta_{m,n,k}^\ell) (\theta_{m,n,k}^{r-1})^\ell \\ \cdot \exp(-\theta_a / \theta_{m,n,k}^\ell) \theta_{m,n,k}^{\ell+1} - (1 + \text{Pr} f_n \Delta \eta / 2) \theta_{m,n+1,k}^{\ell+1} = \\ (m-1) \text{Pr} \Delta \eta^2 (f_n^i (c \theta_{m-1,n,k} - d \theta_{m-2,n,k}) + \Delta \zeta / \Delta \tau (\theta_{m,n,k-1} \\ - \theta_{m,n,k-2})) + 2C (m-1) \text{Pr} \Delta \eta^2 \bar{c} \Delta \zeta (m_F^s)_{m,n,k}^\ell (1 - r - \theta_a / \theta_{m,n,k}^\ell) \\ (\theta_{m,n,k}^r)^\ell \exp(-\theta_a / \theta_{m,n,k}^\ell) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{Scf}_n \Delta n / 2 - 1) m_{Fm,n-1,k}^{i+1} + (2 + (m-1) \text{Sc} \Delta n^2 (af_n^i + b \Delta c / \Delta t)) \\
 & + 2C(m-1) \text{Sc} \Delta n^2 \Delta c s (\theta_{m,n,k}^F)^i (m_{Fm,n,k}^{i-1})^i \exp(-\theta_a / \theta_{m,n,k}^L) \\
 & - m_{Fm,n,k}^{i+1} - (1 + f_n \text{Sc} \Delta n / 2) m_{Fm,n+1,k}^{i+1} = (m-1) \text{Sc} \Delta n^2 (cm_{Fm-1,n,k} \\
 & - dm_{Fm-2,n,k}) + \Delta c / \Delta t (cm_{Fm,n,k} - gm_{Fm,n,k-2}) - 2C(m-1) \\
 & \text{Sc} \Delta n^2 \Delta c (1-s) (\theta_{m,n,k}^F)^i (m_{Fm,n,k}^S)^i \exp(-\theta_a / \theta_{m,n,k}^L) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

donde las constantes tienen los siguientes valores:

	k=2	k≠2		m=2	m≠2	
b=	2	3	a=	2	3	(4.11)
e=	2	4	c=	2	4	
g=	0	1	d=	0	1	

Naturalmente, para flujo permanente se tiene que:

$$b = e = g = 0$$

Con la finalidad de disminuir el tiempo de computación y evitar problemas de convergencia, se introduce un incremento en tiempo variable Δt , de tal forma que se pueda dar el nuevo incremento de acuerdo con los resultados obtenidos en el paso anterior (apéndice B). Esto lleva consigo el tener que utilizar un procedimiento interactivo en donde es necesario contar con una terminal de computadora. En este caso, las constantes b, e y g se obtienen de las relaciones siguientes:

$$b=2(R_{\tau}+2)/(R_{\tau}+1)$$

$$e=2(R_{\tau}+1)/R_{\tau} \quad (4.12)$$

$$g=2/(R_{\tau}(R_{\tau}+1))$$

donde R_{τ} está dada por:

$$R_{\tau}=(\Delta\tau)_{\text{anterior}}/(\Delta\tau)_{\text{actual}} \quad (4.13)$$

El sistema de ecuaciones lineales (4.9) y (4.10) se representan por matrices de transformación tridiagonales, que se pueden resolver por el método clásico de triangulación.

Muy cerca del borde de ataque ($\zeta \rightarrow 0$), las ecuaciones (3.60) y (3.61) se transforman en:

$$\theta_{\eta\eta}/Pr + f\theta_{\eta} = 0 \quad (4.14)$$

$$m_{F\eta\eta}/Sc + fm_{F\eta} = 0 \quad (4.15)$$

Debido al hecho de contar con una placa no catalítica, la condición de frontera para la concentración másica de combustible se reduce a:

$$(m_{F\eta})_{\eta=0} = 0$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (4.15) es la siguiente:

$$m_F = 1 ; \text{ cuando } \zeta \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

lo que implica que en la región cercana al borde de ataque de la placa plana, se tenga un flujo químicamente "congelado". Dicho resultado es de esperarse, dado que al tender a cero el primer nú-

mero de Damköhler, los efectos reactivos son despreciables comparados con los efectos difusivos, lo cual no indica que no existan reacciones químicas. La ecuación (4.15) muestra que el perfil de temperaturas cerca del borde de ataque se ajusta instantáneamente al perfil con semejanza resultante de acuerdo a los valores instantáneos de las condiciones de frontera. Entonces, para cada tiempo dado se calcula numéricamente el perfil de temperaturas cerca del borde de ataque, mediante la utilización del método de Runge-Kutta de cuarto orden con interpolación lineal al infinito. El perfil de concentraciones cerca del borde de ataque es uniforme y está dado por la ecuación (4.16).

Para el cálculo de los perfiles de temperatura y concentración de combustible en la posición $x = \Delta x$, se toman los perfiles de la posición anterior como valores iniciales o primera iteración. Se calcula el perfil de temperaturas mediante las ecuaciones (4.9) y sus valores sirven para el cálculo del perfil de concentración de combustible por medio de las ecuaciones (4.10), los cuales sirven a su vez para el cálculo del nuevo perfil de temperaturas, etc. Las iteraciones se continúan hasta alcanzar una diferencia máxima del 0.1 % en todo el perfil de temperaturas entre dos iteraciones consecutivas. En el apéndice A se muestran los listados de los programas de computadora realizados para el cálculo de los procesos de ignición descritos en este capítulo.

4.3 Estado permanente sin resistencia térmica de la placa

Este es el problema clásico de ignición en capa límite sobre una placa plana. Las diferentes formas de solución de las

ecuaciones de balance que gobiernan este proceso se mencionan en el capítulo II. Sin embargo, existen puntos que no han sido estudiados, siendo el más importante el concerniente al criterio de ignición. Law y Law (1979) estudiaron el proceso de ignición mediante la utilización de métodos asintóticos (dado el hecho de que en general la energía de activación es muy alta) y encontraron que bajo estas condiciones ($v_w^2/v_a \rightarrow 0$), coinciden el criterio de adiabaticidad con el criterio de ignición. Es decir, alcanzando la mezcla combustible el punto adiabático en la placa, el proceso de ignición y formación de la flama es irreversible. Sin embargo, para valores grandes del parámetro v_w^2/v_a , ambos criterios dejan de coincidir. Esto es, no necesariamente se produce la flama después del punto adiabático, ya que este proceso es influenciado por las condiciones de la placa corriente abajo del punto adiabático (p. ej. la interrupción de la alta temperatura en la placa después del punto adiabático puede hacer retroceder el proceso de formación de la flama y enfriar los gases combustibles).

Se ha sostenido que un análisis más preciso del fenómeno de ignición es complejo, debido a que la aproximación parabólica de las ecuaciones de balance deja de ser aplicable por la existencia de fuertes gradientes longitudinales de temperatura y concentraciones. En el capítulo III se demuestra que la parabolicidad de las ecuaciones de balance está relacionada con el parámetro local adimensional δ , cuyo valor máximo δ_m ocurre en la línea muerta. Para valores pequeños de δ_m , lo cual puede ser alcanzado en la práctica, la aproximación parabólica es aplicable a todas las ecuaciones de balance, aún cerca de la flama. Es obvio que este valor de δ_m no puede ser idénticamente igual a cero, ya que entonces el flu-

jo no podría ser reactivo y por lo tanto imposible la formación de la flama. Sin embargo, la aproximación $\delta_m \rightarrow 0$ trae consigo la existencia de una capa límite térmica y de concentraciones cerca de la flama. Fuera de esta capa límite, las ecuaciones de balance son parabólicas en η , mientras que en el interior de la misma las ecuaciones son elípticas. Para valores mayores de δ_m , de tal forma que $u_f > u$ en la línea muerta, la capa límite va creciendo. Sin embargo, la aproximación parabólica resulta ser una herramienta muy útil en el análisis del proceso de ignición. Hay que hacer notar que el valor de δ_m no puede conocerse a priori, sino que depende también de las condiciones de la capa límite formada. La validez de la aproximación parabólica puede demostrarse mediante experimentación. El caso extremo en donde $u_f = u$ en la línea muerta, demuestra que la aproximación parabólica es poco confiable, debido al hecho de que las flamas tienden a propagarse.

En el límite $\delta_m \rightarrow 0$, la aproximación parabólica es aplicable y, por lo tanto, el mecanismo de ignición puede ser estudiado para valores apreciables del parámetro θ_w^2/θ_a . En este caso concreto, las ecuaciones (3.60) y (3.61) se reducen a:

$$\theta_{\eta\eta}/Pr + f\theta_{\eta} = 2\zeta (f'\theta_{\zeta} - C\bar{c}\theta^r m_F^s \exp(-\theta_a/\theta)) \quad (4.17)$$

$$m_{F\eta\eta}/Sc + fm_{F\eta} = 2\zeta (f'm_{F\zeta} + C\theta^r m_F^s \exp(-\theta_a/\theta)) \quad (4.18)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \theta = \theta_w, \quad m_{F\eta} = 0 & \quad ; \quad \text{para } \eta = 0 \\ \theta = \theta_a = 1 & \quad ; \quad \text{cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.19)$$

Los cálculos se hicieron para el flujo de una mezcla este-
quiométrica de propano/aire. Los parámetros para esta mezcla son
(Sharma y Sirignano, 1969):

$$\begin{aligned} \theta_a &= 28.55 \\ \bar{c} &= 8.84 \\ Pr &= 0.75 \\ Sc &= 1.32 \\ a_F - a_0 &= 1 \\ a_T &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sin embargo, también en algunos casos se hicieron los cálculos con
 $Pr = Sc = 1.32$, con la finalidad de obtener información para mezclas
donde el número de Lewis sea la unidad.

Las figuras (4.1), (4.2) y (4.3) muestran, en el plano
(ζ, η), los perfiles de temperatura adimensional, concentración de
combustible adimensional y de rapidez de reacción adimensional \bar{W} ,
respectivamente. La temperatura adimensional de la placa es de
3.5 y la resistencia térmica de la placa es cero. Aquí, la rapidez
de reacción \bar{W} viene dada por:

$$\bar{W} = W^F(T, Y^F) / W^F(T = T_\infty, Y = Y_\infty^F) \quad (4.21)$$

En estas figuras se muestran los fuertes gradientes de temperatura
y concentraciones en regiones cercanas a la flama. Esta se encuen-
tra definida en una zona de muy alta rapidez de reacción. Es de
hacerse notar que en zonas próximas a la pared, la flama deja de ma-
nifestarse debido al efecto de enfriamiento.

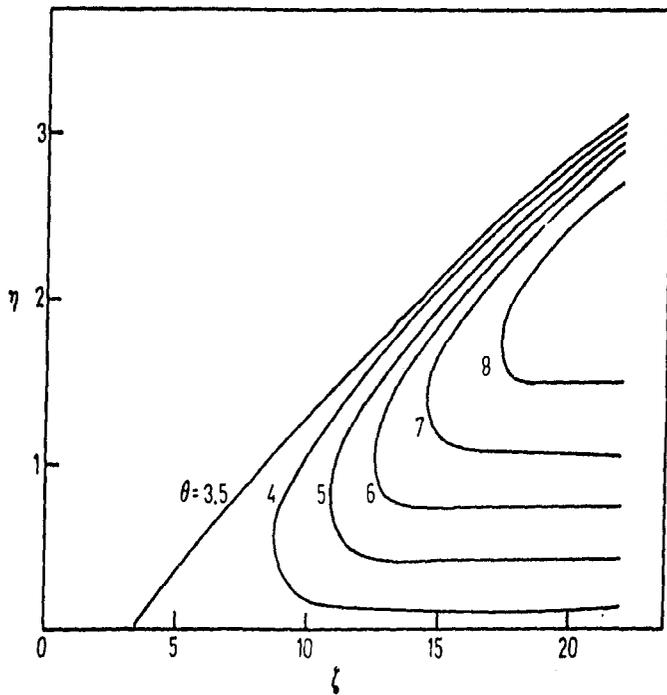


Fig. (4.1) Isothermas en régimen permanente.

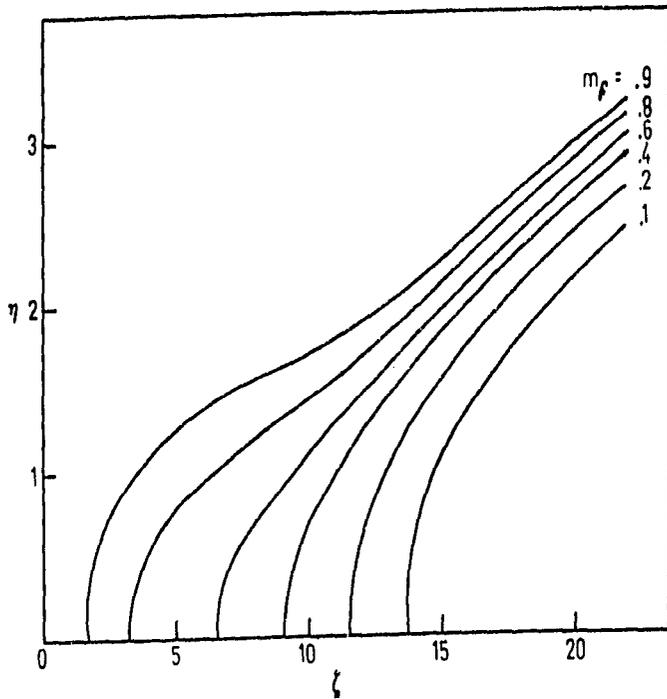


Fig. (4.2) Curvas de concentración másica de combustible constante en régimen permanente.

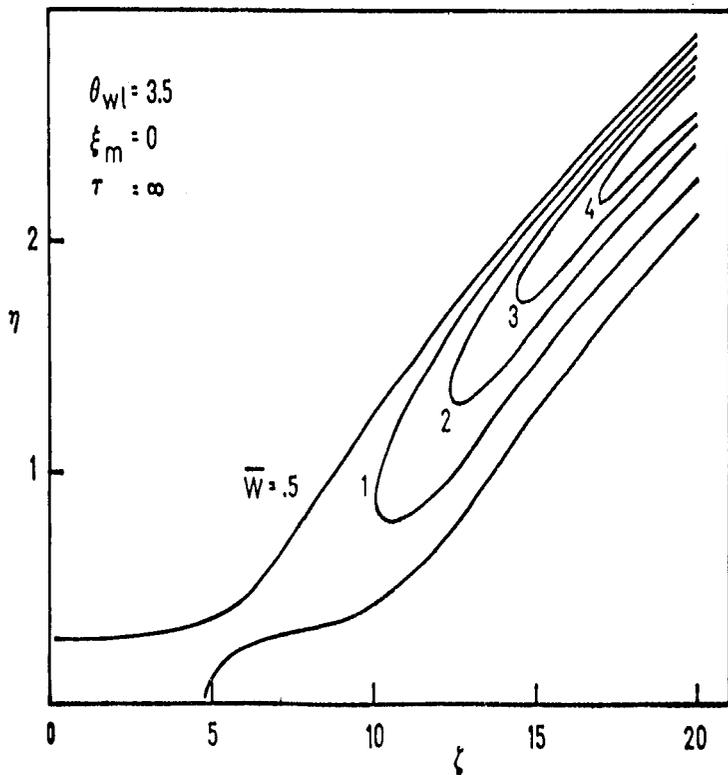


Fig. (4.3) Curvas de rapidez de reacción constante en régimen permanente.

La flama se define en este trabajo, en el plano (t, n) , como la línea que une los puntos de máxima rapidez de reacción para cada valor de t . El extremo inferior de la flama, se supone coincide con el punto donde el flujo de calor hacia la placa constituye un máximo. La línea de máxima rapidez de reacción se encuentra graficada en la figura (4.4), para $B_w = 4.5$ y $L_m = 0$. La línea punteada corresponde a regiones por debajo del extremo inferior de la flama. El espacio comprendido entre el extremo inferior de la flama y la placa es el denominado espacio muerto.

En la figura (4.5) se muestra el valor máximo de la rapidez de reacción (línea continua), como una función de t , para una temperatura adimensional de la placa de 4.5. En esta figura se puede apreciar la existencia de dos zonas de importancia. La primera va desde el punto adiabático (t_A) hasta el punto donde la curva posee un mínimo en la rapidez de reacción. La segunda zona va desde este punto hasta el punto donde se presenta el extremo inferior de la flama (t_F). El punto mínimo tiene un significado físico y corresponde al punto donde los efectos reactivos se vuelven dominantes comparados con los efectos difusivos. Al valor de t (primer número de Damköhler) correspondiente a este punto se le denomina t_1 y se relaciona con una adopción del criterio de ignición. Es decir, la ignición tendrá lugar si la temperatura de la placa se mantiene hasta regiones donde $t > t_1$. Para estudiar el proceso crítico de ignición, se modificó el programa de computadora, con la finalidad de incluir un pulso de temperatura en la placa de la forma:

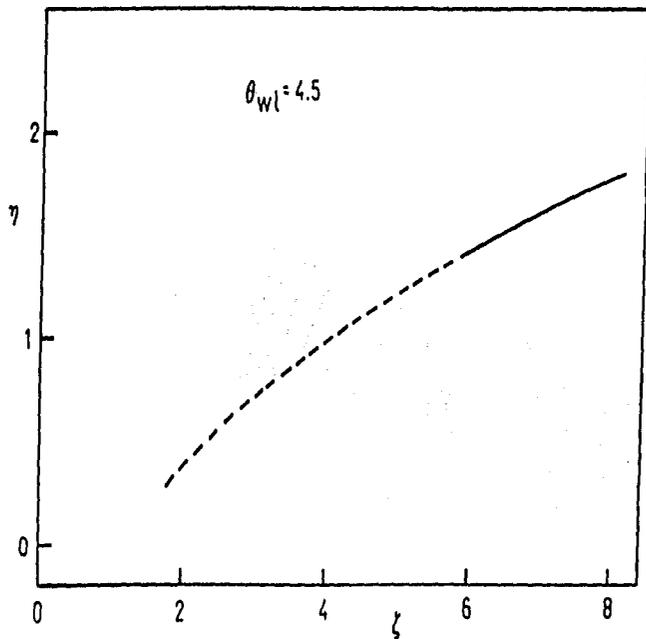


Fig. (4.4) Curva formada por los puntos en donde se tiene una mayor rapidez de reacción. El punto de separación de la línea continua y la línea punteada corresponde al punto de máxima transferencia de calor en la placa. La línea continua denota la flama.

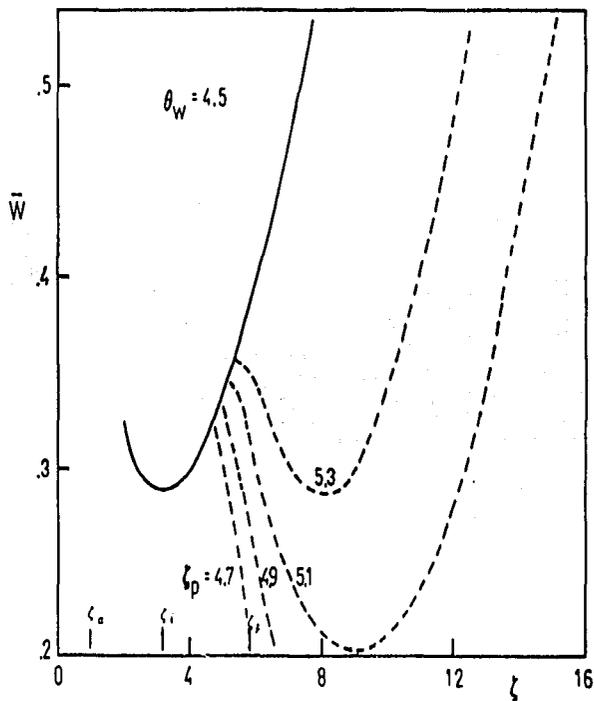


Fig. (4.5) Curva de máxima rapidez de reacción para una temperatura uniforme de la placa (línea continua). La línea punteada, le indica para una interrupción de dicha temperatura en la intersección con la línea continua.

$$\theta = \theta_w \quad ; \quad \text{para } 0 < \zeta < \zeta_p \text{ y } n=0$$

$$\theta = 1 \quad ; \quad \text{para } \zeta \geq \zeta_p \text{ y } n=0$$

Con ésto se pretende estudiar el efecto de ζ_p sobre el proceso de ignición. También se muestra en la figura (4.5) una serie de curvas punteadas que representan el valor de la máxima rapidez de reacción adimensional, como una función de ζ , para diferentes valores de ζ_p y para $\zeta \geq \zeta_p$. En esta gráfica se puede observar que dichas curvas son parecidas a la curva original, mostrando también un punto mínimo. Debido a la falta de similaridad en el flujo, el mínimo de esta curva ocurre a una distancia mayor cuanto menor es ζ_p . Este es un problema típico no similar, donde el proceso de ignición tiene lugar no importando ni las condiciones de flujo ni las condiciones de la placa. De lo mencionado líneas arriba, se desprende que una definición de la distancia de ignición basada en ζ_p es arbitraria. Se podría definir la distancia crítica de ignición, por ejemplo, a un valor de ζ_p tal que para $\zeta = \zeta_p$ se tenga directamente el mínimo en la curva de la máxima rapidez de reacción (línea punteada). Sin embargo, la utilización de tal definición implica un incremento considerable en el tiempo de computación, no quedando exenta del carácter arbitrario de su definición. Por estas razones, se decidió tomar como la distancia crítica de ignición a la distancia desde el borde de ataque hasta el punto donde aparece el mínimo en la curva de máxima rapidez de reacción.

La figura (4.6) muestra la dependencia de las tres distancias características del proceso de ignición, de la temperatura de la placa. Se puede observar que la distancia crítica de ignición ζ_i se encuentra entre ζ_a y ζ_f . Para valores pequeños de la tempera-

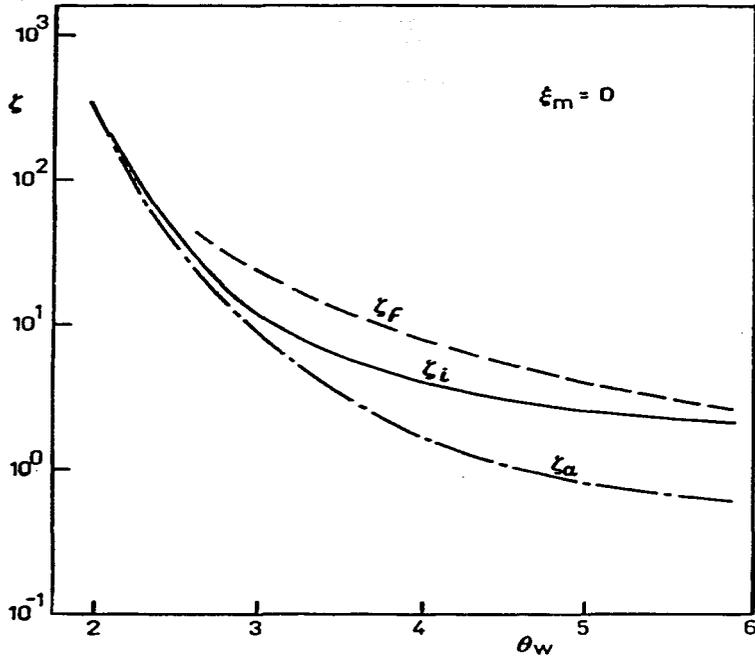


Fig. (4.6) Variación de las tres distancias características del proceso de ignición, como una función de la temperatura de la placa.

tura de la placa, se tiene que ξ_f y ξ_i tienden asintóticamente a ξ_a , mientras que para altos valores de la temperatura de la placa, se tiene que $\xi_i \rightarrow \xi_f$. Es de hacerse notar la fuerte dependencia de la temperatura adimensional de la placa sobre la distancia crítica de ignición.

4.4 Estado permanente con resistencia térmica de la placa

En esta sección se analiza el efecto de la resistencia térmica de la placa en el proceso de ignición. Para ésto, se suponen despreciables los efectos de la conducción de calor longitudinal en la placa. Esta suposición, como se demostrará después, no se justifica en regiones cercanas al punto adiabático. La inclusión de este flujo axial en la placa, hace que el conjunto de ecuaciones sea elíptico y, por ende, se hace imposible la utilización de métodos de marcha, trayendo como consecuencia un fuerte incremento en el tiempo de computación. Sin embargo, como se verá más adelante, su inclusión no altera cualitativamente la conclusión principal deducida mediante la utilización de la aproximación parabólica. Con esta suposición, la ecuación (3.52) se reduce a:

$$\partial_{\omega} \xi = 0 \quad (4.22)$$

cuya solución viene dada por:

$$\partial_{\omega}(\xi, \xi) = \partial_{\omega i} + (\partial_{\omega u}(\xi) - \partial_{\omega i})(\xi + \xi_m) / \xi_m \quad (4.23)$$

donde $\partial_{\omega u}$ representa la temperatura en la superficie superior de la placa y $\partial_{\omega i}$ la correspondiente a la superficie inferior, cuyo valor es uniforme. En la interfase sólido-gas, de la ecuación (3.53)

se tiene que:

$$(\theta_{\eta})_{\eta=0} = (1/\sqrt{C\zeta}) (\theta_{w1} - \theta_{w2}) / \zeta_m \quad (4.24)$$

Si se reemplaza la derivada de la temperatura en la fase gaseosa por su equivalente en diferencias finitas de la forma:

$$(\theta_{\eta})_{\eta=0} = (\theta_{m,2} - \theta_{m,1}) / \Delta\eta \quad (4.25)$$

entonces la ecuación de balance de energía en la interfase se transforma en:

$$(1 + \sqrt{(m-1)C\Delta\zeta\Delta\eta} / \zeta_m) \theta_{m,1}^{i+1} - \theta_{m,2}^{i+1} = \theta_{w2} \sqrt{(m-1)C\Delta\zeta\Delta\eta} / \zeta_m \quad (4.26)$$

Esta ecuación reemplaza la condición de frontera:

$$\theta_{m,1}^{i+1} = \theta_w$$

dada en el problema tratado en la sección anterior. También, el procedimiento seguido en el cálculo es similar al utilizado en dicho problema.

La figura (4.7) muestra el efecto de la resistencia térmica de la placa sobre ζ_a . Aquí, ζ_a representa la distancia desde el borde de ataque hasta el punto adiabático, para una resistencia térmica de la placa de ζ_m y ζ_{a0} su valor correspondiente a cero resistencia térmica de la placa. En la figura se aprecia que el efecto de dicha resistencia térmica de la placa es considerable para valores de $\zeta_m > 1$. El perfil de temperaturas cerca del borde de ataque de la placa es, para $\zeta_m = 0$, cualitativamente diferente a aquél donde $\zeta_m = 0$. Esto significa que ζ_a , para una resistencia térmica de la placa $\zeta_m = 0$, es mayor que ζ_{a0} . Este efecto se muestra más pronunciado en la gráfica para $\theta_{w1} = 4$, puesto que la zona de reac-

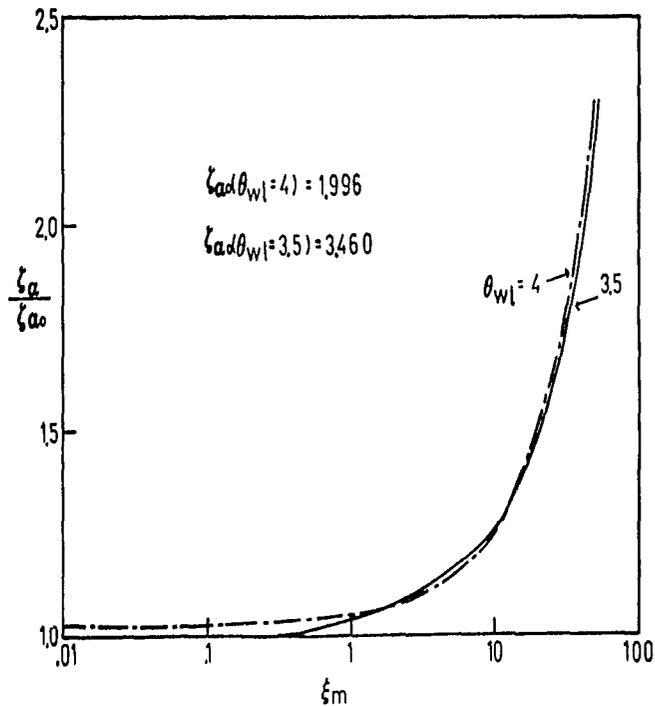


Fig. (4.7) Efecto de la resistencia térmica de la placa sobre la localización del punto adiabático, para diferentes valores de la temperatura inferior de la placa.

ción se encuentra más próxima al borde de ataque y, por lo tanto, se muestra más afectada por las condiciones allí existentes.

La figura (4.8) muestra la distribución de temperaturas en la superficie superior de la placa para diferentes valores de la resistencia térmica de la placa y una temperatura adimensional en la superficie inferior de la placa de 4. Para valores de $\xi_m < 1$, θ_{wu} no difiere en gran medida de θ_{wi} , excepto en regiones próximas al borde de ataque. Para valores mayores de la resistencia térmica de la placa, el punto adiabático se mueve aguas abajo, tal como lo muestra la figura (4.8). Al mismo tiempo la temperatura de la superficie superior de la placa, aguas abajo del punto adiabático, alcanza valores asintóticos más elevados a medida que aumenta ξ_m . Ello es debido al efecto aislante de la placa. Para todo valor de la resistencia térmica de la placa, existe un punto adiabático en ella. En la proximidad de este punto, la suposición hecha de despreciar la conducción de calor axial de calor no se justifica. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, su inclusión no afecta la conclusión principal.

La figura (4.9) muestra una serie de isotermas $\theta = \theta_{w2} = 4$, tanto en el plano (ζ, η) como en el plano (ζ, Y) . Aquí se define Y como:

$$Y = \int_0^{\eta_L(\xi_m, \zeta)} \theta d\eta / \int_0^{\eta_L(0, \zeta)} \theta d\eta \quad (4.27)$$

donde η_L corresponde al valor de η para una temperatura constante a una posición ζ dada. La coordenada Y representa la distancia hasta la superficie superior de la placa, adimensionalizada con su

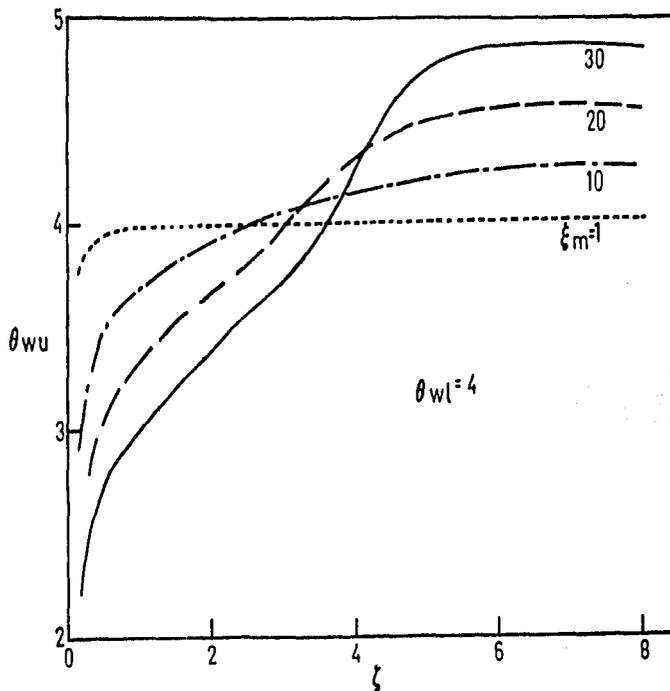


Fig. (4.8) Efecto de la resistencia térmica de la placa en la distribución de temperaturas en la superficie superior de la misma, para $\theta_{wl} = 4$.

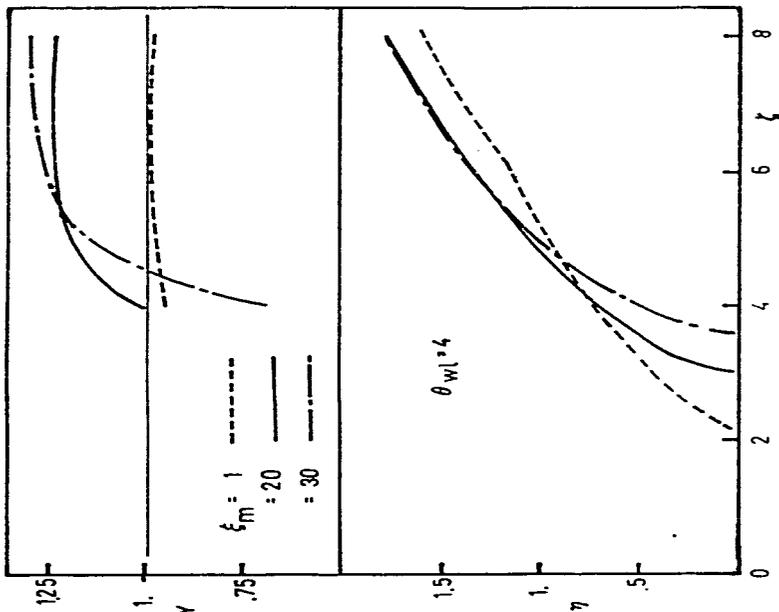


Fig. (4.9) Efecto de la resistencia térmica de la placa en la posición de las isoterms $\theta = \theta_{wl} = 4.5$, tanto en el plano (ξ, η) como en el plano (ξ, Y) .

valor correspondiente para una resistencia térmica de la placa nula, a la misma posición τ . Estas isoterms dan una buena idea de la localización del frente de flama, tal como se infiere de la figura (4.1). Se observa en la figura (4.9), que para posiciones de τ aguas abajo del punto adiabático, a valores más altos de ξ_m se obtienen valores más altos para Y , lo que trae consigo una reducción en la distancia de ignición.

La figura (4.10) muestra el efecto de la resistencia térmica de la placa sobre la distancia de ignición, para θ_{wt} de 4.5. Las curvas graficadas en esta figura representan la unión de los puntos de máxima rapidez de reacción, definida en la ecuación (4.26). Como se mencionó anteriormente, el criterio seguido en este trabajo para definir la posición del extremo inferior de la flama, es aquel donde se obtiene la máxima transferencia de calor hacia la placa. La flama estará, por lo tanto, al lado derecho de este punto (línea continua). En esta figura se muestra claramente que a medida que aumenta la resistencia térmica de la placa, el extremo inferior de la flama se desplaza hacia adelante. De aquí se deduce que al aumentar ξ_m , la distancia entre el punto adiabático y el frente de flama se acortan. En esta región se debe encontrar el punto crítico de ignición. Como complemento de la figura anterior, se muestran en la figura (4.11) las curvas correspondientes a $\xi_m = 0, 20$ y 30 , para un valor de $\theta_{wt} = 4.5$. Para un mismo valor de τ , para valores mayores de la resistencia térmica de la placa, se obtienen mayores valores de la máxima rapidez de reacción \bar{W} .

Los resultados mencionados anteriormente indican que al aumentar la resistencia térmica de la placa, la flama tiende a des-

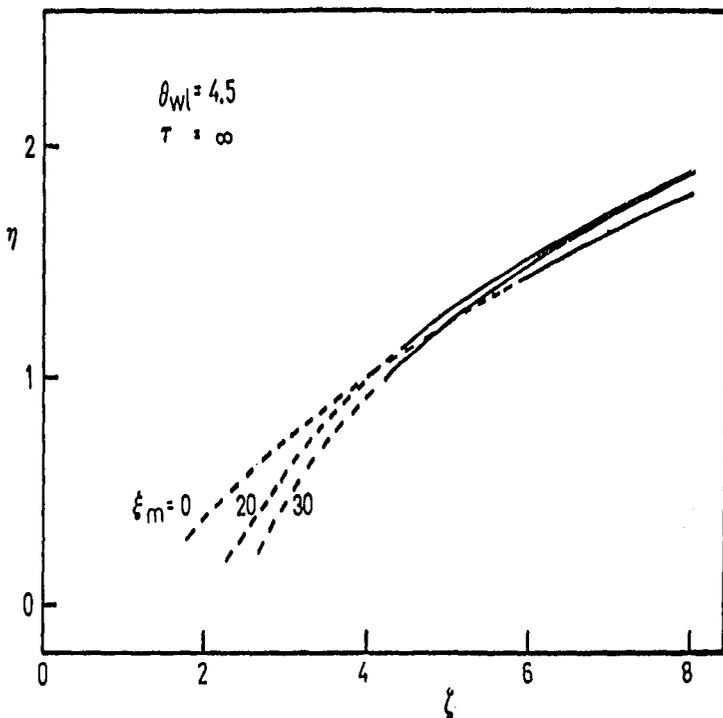


Fig. (4.10) Efecto de la resistencia térmica de la placa en la posición de la línea de máxima rapidez de reacción y el extremo inferior de la flama.

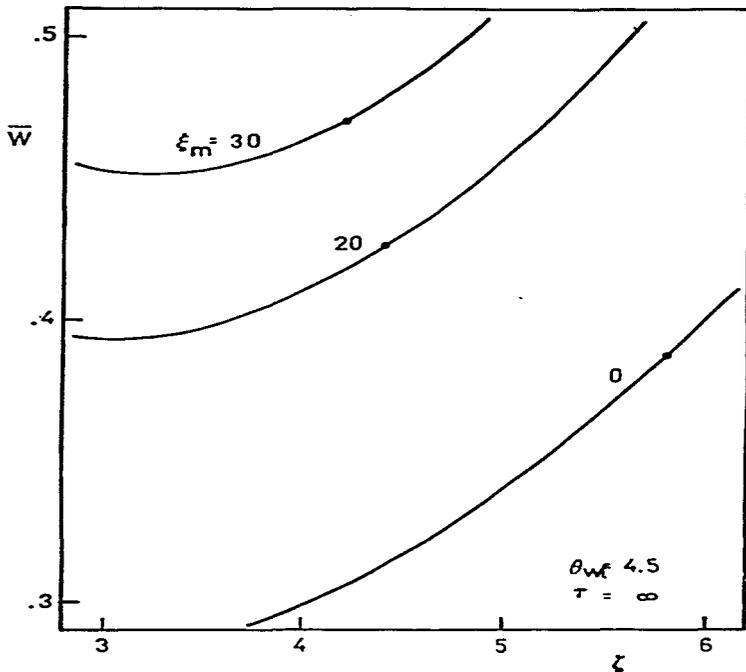


Fig. (4.11) Efecto de la resistencia térmica de la placa sobre el valor máximo de la rapidez de reacción para $\theta_{wi} = 4.5$

plazarse aguas arriba. Sin embargo, es de esperarse que existe un límite en el desplazamiento de la flama, ya que para muy altos valores de la resistencia térmica de la placa, la tendencia debe ser la inversa. La figura (4.12) muestra las distancias características ζ_a y ζ_f como una función de ξ_m , para un valor de θ_{wL} de 4. Como es de esperarse, la distancia hasta el punto adiabático aumenta monótonicamente al aumentar ξ_m . Sin embargo, el comportamiento de ζ_f es diferente. Primeramente disminuye al aumentar ξ_m ; alcanza un mínimo y después empieza a aumentar hasta alcanzar asintóticamente la curva para ζ_a .

La figura (4.13) muestra también la dependencia de ζ_a y ζ_f con la temperatura de la superficie inferior de la placa. La tendencia es similar a la calculada sin resistencia térmica de la placa. Ambas curvas tienden a juntarse a medida que disminuye θ_{wL} .

La figura (4.14) muestra comparadas las curvas de máxima rapidez de reacción \bar{W} tanto para $\xi_m = 0$ como para $\xi_m = 40$. Aquí se puede observar que la curva correspondiente a una resistencia térmica de la placa de 40 no posee el mínimo característico de la curva para cero resistencia térmica. Esto implica que el criterio de ignición definido para el caso sin resistencia térmica de la placa, no es aplicable en los casos donde ξ_m sea alto. Ello es debido a que en la adopción del criterio de ignición, es indispensable una temperatura uniforme en la placa, lo cual no se cumple para los casos donde $\xi_m > 1$.

Como resumen de esta sección puede decirse que para ciertos valores de la resistencia térmica de la placa, el frente de flama

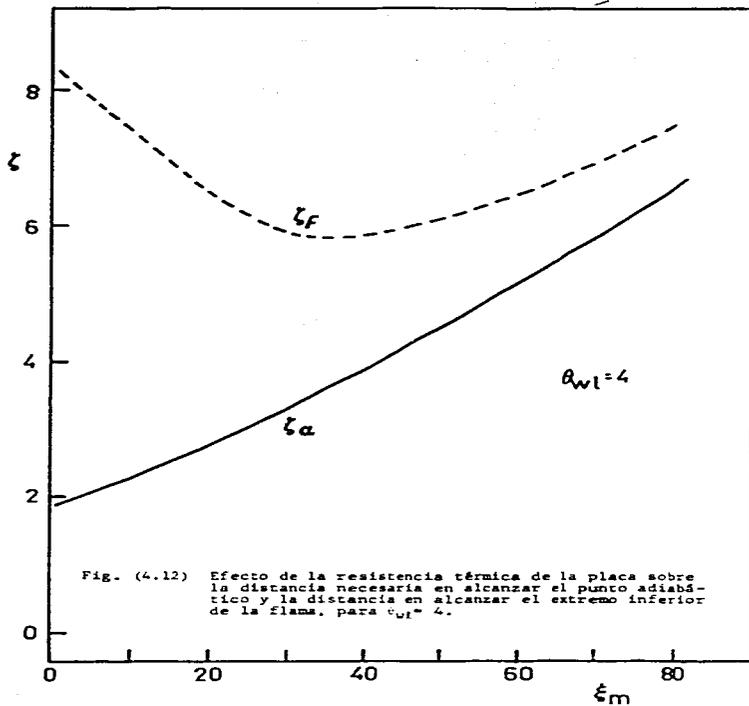


Fig. (4.12) Efecto de la resistencia térmica de la placa sobre la distancia necesaria en alcanzar el punto adiabático y la distancia en alcanzar el extremo inferior de la flama, para $\theta_{wt} = 4$.

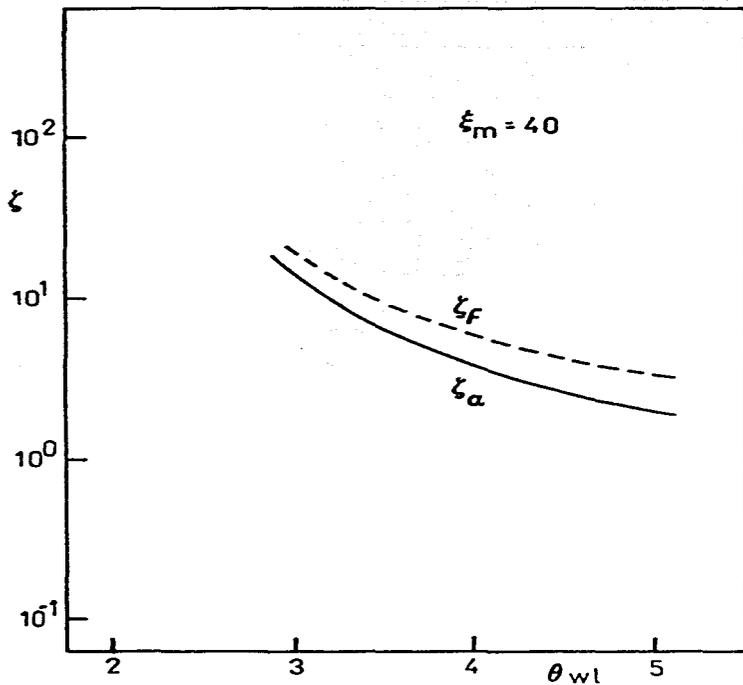


Fig. (4.13) Influencia de la temperatura inferior de la placa en las distancias características de ignición, ζ_a y ζ_f , para $\xi_m = 40$.

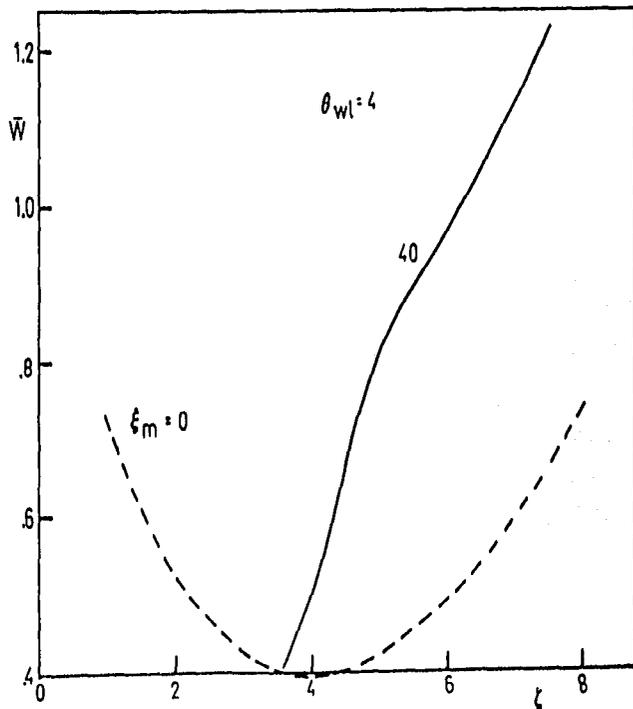


Fig. (6.14) Efecto de la resistencia térmica de la placa sobre la curva de máxima rapidez de reacción.

ma se encuentra aguas arriba de su posición correspondiente a $\xi_m = 0$. La inclusión de la difusión axial de calor en la placa, tendería a mover todavía más el frente de flama hacia adelante, ya que este flujo de calor está dirigido hacia el borde de ataque. También al aumentar la resistencia térmica de la placa, aumenta ξ_m , ya que por un lado se obtienen mayores temperaturas (velocidades de flama más elevada), mientras que por el otro lado, la flama se localiza a menor distancia de la pared, donde la velocidad de flujo es menor. Para valores apreciables de ξ_m el frente de flama se localiza aguas arriba de su posición calculada mediante la aproximación $\xi_m \rightarrow 0$. La inclusión de ambos efectos, por lo tanto, no afectan cualitativamente las conclusiones derivadas de esta sección.

4.5 Proceso transitorio de ignición sin resistencia térmica en la placa

En esta sección se analiza el proceso transitorio de ignición de una mezcla combustible gaseosa estequiométrica que fluye a lo largo de una placa plana, la cual se sujeta a un cambio repentino, con respecto al tiempo, en la temperatura de su superficie superior, de T_m a T_w en forma de escalón. La finalidad de este estudio es el de calcular los tiempos característicos de ignición, analizar la estructura del proceso de ignición y definir un tiempo crítico de ignición. El conjunto de ecuaciones que gobiernan este proceso, corresponden a las ecuaciones (3.59), (3.60) y (3.61). Las condiciones iniciales consideran que para tiempos anteriores al incremento de la temperatura en la placa, la reacción química es despreciable, por lo que la concentración de especies químicas que intervienen en la reacción es idéntica, en todo el campo, a

su correspondiente flujo libre.

Las condiciones iniciales y de frontera para este problema, están dadas por:

$$\begin{aligned} f=f' &= 0 && ; \text{ para } \eta=0 \\ f' &= m_F \theta = 1 && ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty \\ \theta &= m_F - 1 \text{ en todo el campo} && ; \text{ para } \tau \leq 0 \\ \theta &= \theta_\omega, \quad m_{F\eta} = 0 && ; \text{ para } \eta=0 \text{ y } \tau > 0 \end{aligned}$$

Para el estudio de este problema se escogieron dos conjuntos de datos. Primeramente, para tener un número de Lewis de la unidad, se eligieron los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_a &= 28.55 \\ \bar{\zeta} &= 8.84 \\ Pr = Sc &= 1.32 \\ a_F = a_0 &= 1 \\ a_T &= 0 \end{aligned}$$

Las figuras (4.15) a (4.18) muestran las isoterms y las figuras (4.19) a (4.22) muestran las curvas de concentración de combustible constante, a diferentes tiempos, para el caso concreto del incremento de la temperatura adimensional de la superficie superior de la placa de 1 a 3.5. De estas figuras se puede extraer la existencia de una "mancha" de máxima rapidez de reacción, que se traslada hacia regiones con valores de η y ζ mayores. Como se verá posteriormente, en esta zona de máxima reacción se encuentra la información principal del proceso de ignición.

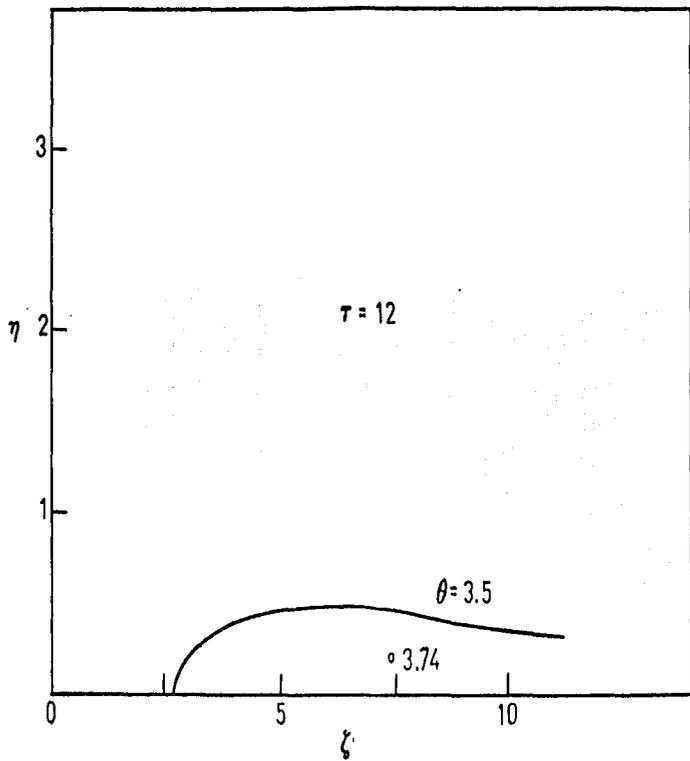


Fig. (4.15) Curvas isotérmicas para $\tau = 12$.

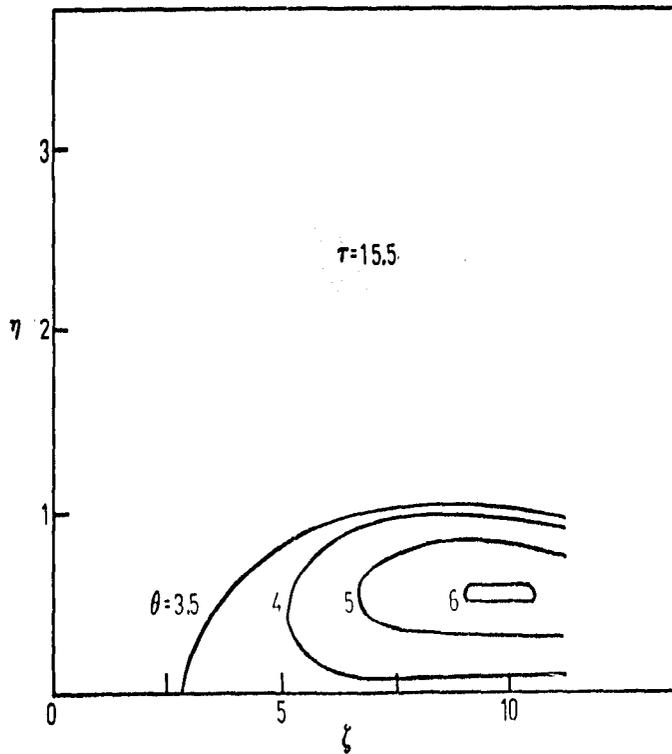


Fig. (4.16) Curvas isotérmicas para $\tau = 15.5$

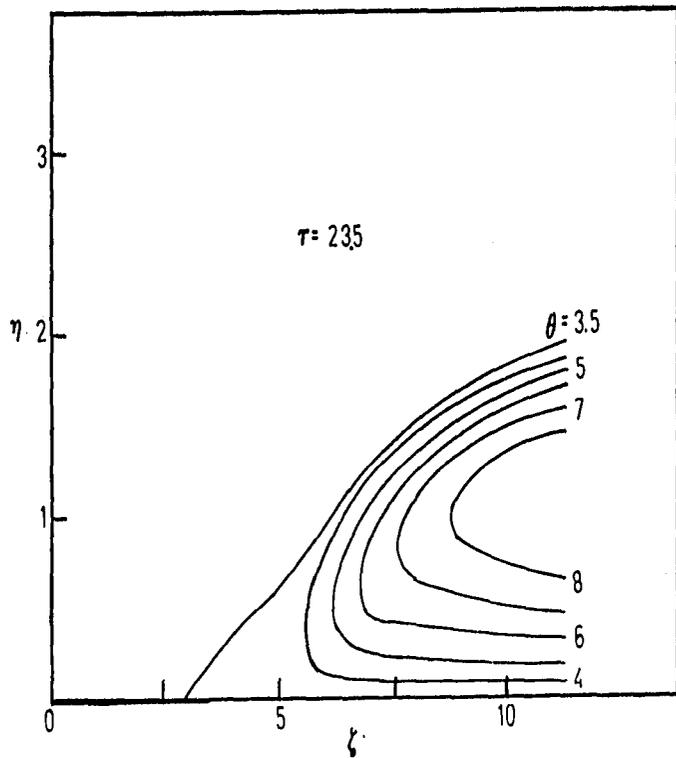


Fig. (4.17) Curvas isotérmicas para $\tau = 23.5$

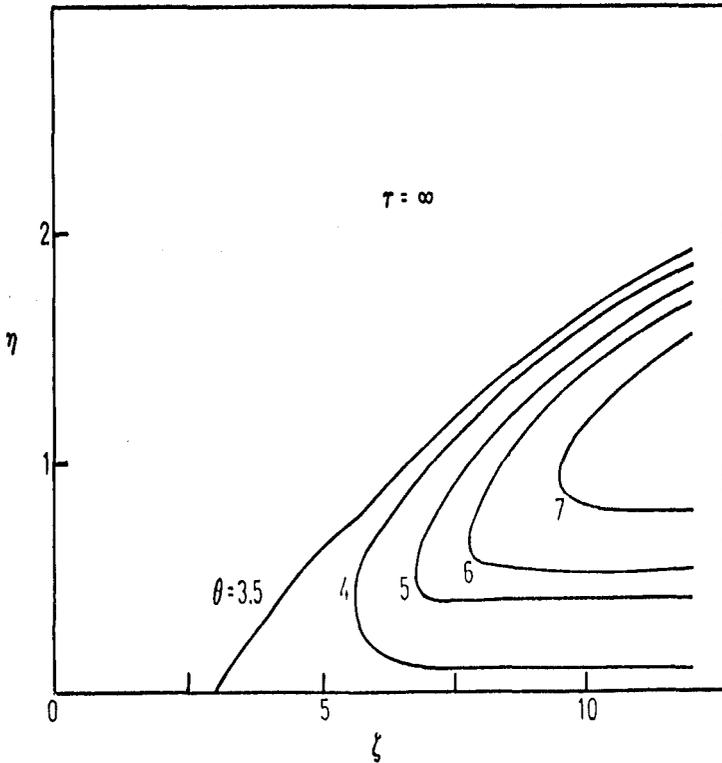


Fig. (4.13) Curvas isotérmicas en régimen permanente (100).

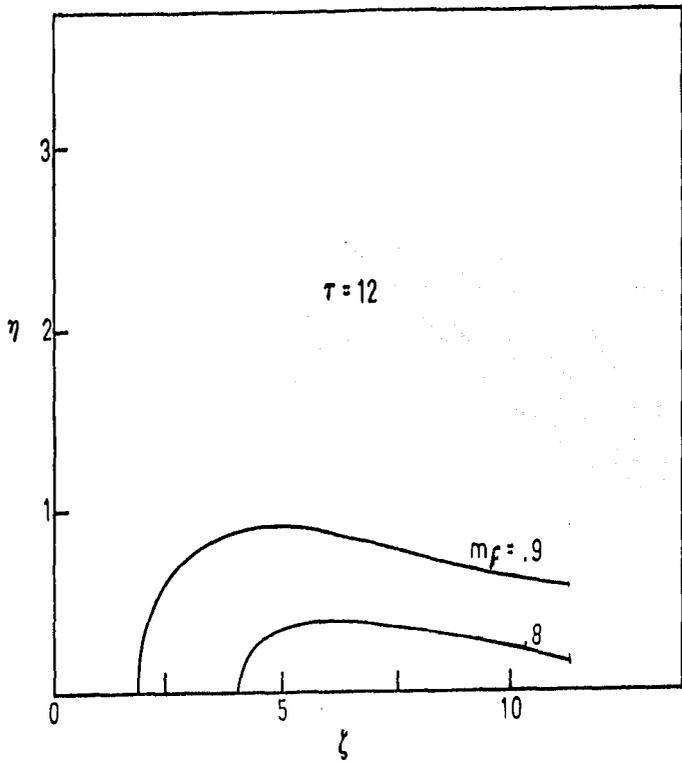


Fig. (4.19) Curvas de concentración de combustible constante para $\tau = 12$.

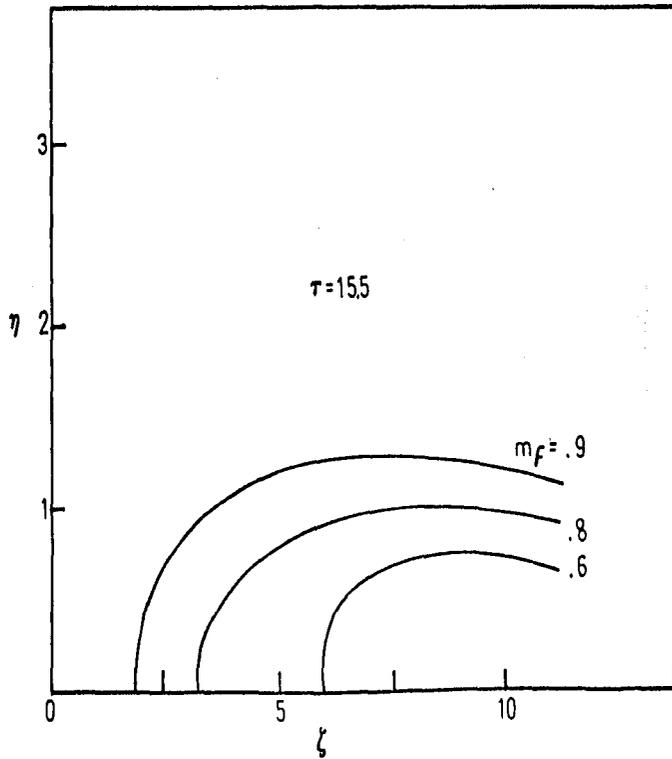


Fig. (4.20) Curvas de concentración de combustible constante para $\tau = 15.5$

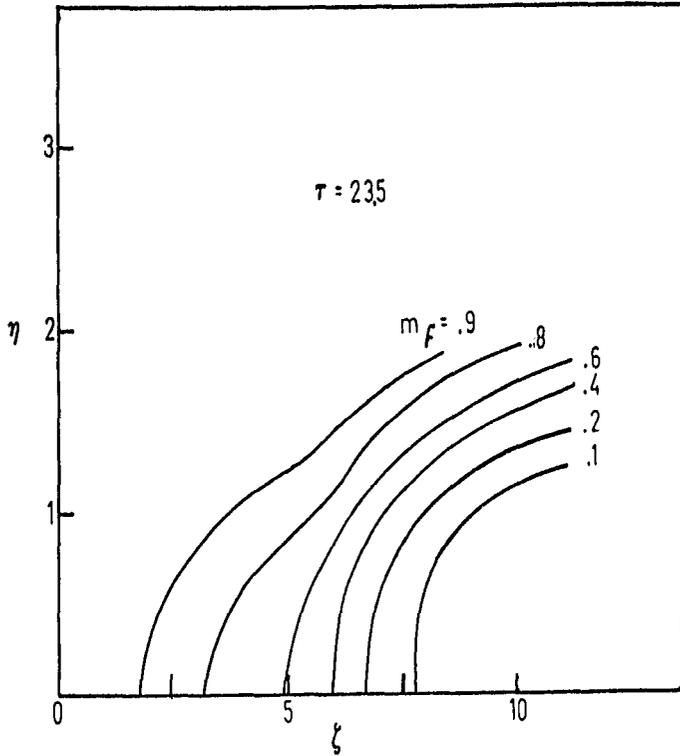


Fig. (4.21) Curvas de concentración de combustible constante para $\tau = 23.5$

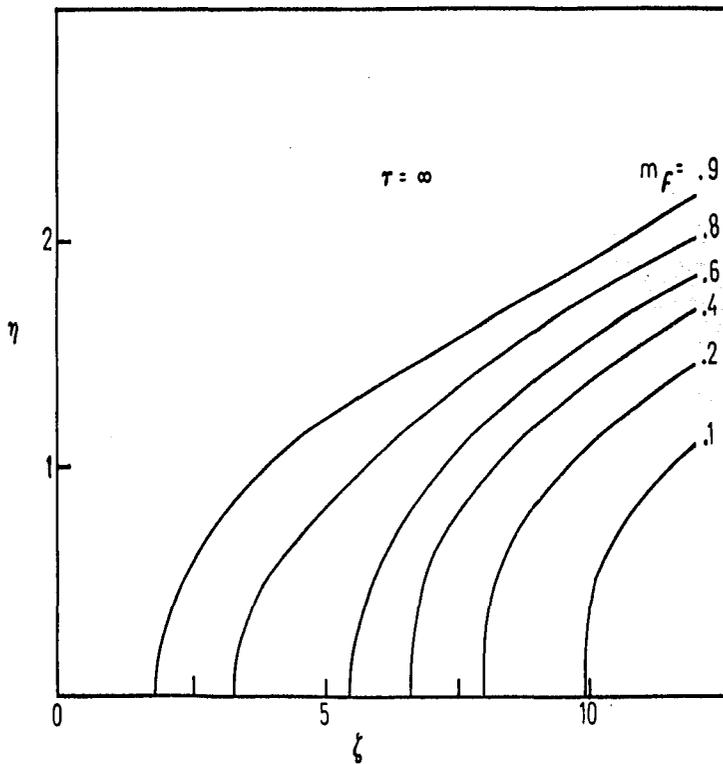


Fig. (4.22) Curvas de concentración de combustible constante en régimen permanente ($\tau \rightarrow \infty$).

En la figura (4.23) se aprecia el movimiento de esta "mancha" de máxima reacción, viajando con una velocidad promedio del 65% de la velocidad del flujo libre. El tiempo de formación de la flama τ_{ff} puede definirse como el tiempo necesario tomado por esta "mancha" de máxima reacción en alcanzar la posición permanente del extremo inferior de la flama ζ_f . Para este problema concreto, el extremo inferior de la flama se encuentra en $\zeta_f = 7.7$. En esta posición, las figuras (4.24) y (4.25) muestran los perfiles de temperatura y concentración de combustible, respectivamente, como una función del tiempo. Después de pasar la "mancha" de máxima rapidez de reacción por este punto (curvas 2 y 3), se sigue incrementando la temperatura y disminuyendo la concentración de combustible hasta un valor aproximado de $\tau = 20$, después del cual la temperatura disminuye y la concentración del combustible aumenta hasta alcanzar el estado permanente (curva 8).

Para las próximas gráficas se toma en cuenta la mezcla estequiométrica de propano/aire, donde $Pr = 0.75$. Las figuras (4.26), (4.27) y (4.3) muestran una secuencia de curvas de rapidez de reacción constante para $\theta_w = 3.5$ y $\tau = 7, 18$ e ∞ respectivamente. Estas curvas indican el proceso que desemboca en la formación de la flama. La "mancha" de máxima rapidez de reacción es generada y se observa que se propaga aguas abajo (aumentando el primer número de Damköhler), aumentando gradualmente en intensidad. El proceso de ignición, por lo tanto, incluye los eventos en el intervalo de tiempo entre la formación de la "mancha" de máxima reacción y el tiempo necesario en alcanzar esta "mancha" la posición permanente del extremo inferior de la flama. Entre estos límites de tiempo, debe encontrarse el tiempo crítico de ignición. De la misma forma que en

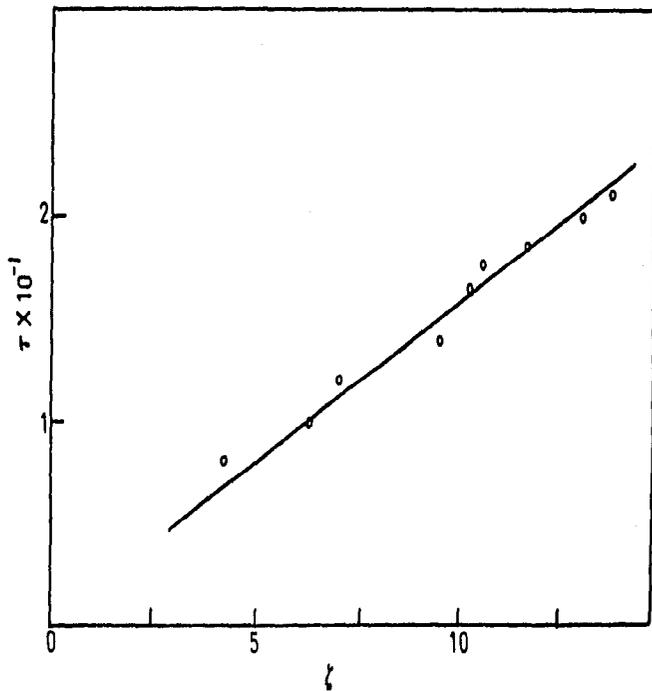


Fig. (4.23) Propagación de la "mancha" de máxima rapidez de reacción en el plano (z, t) .

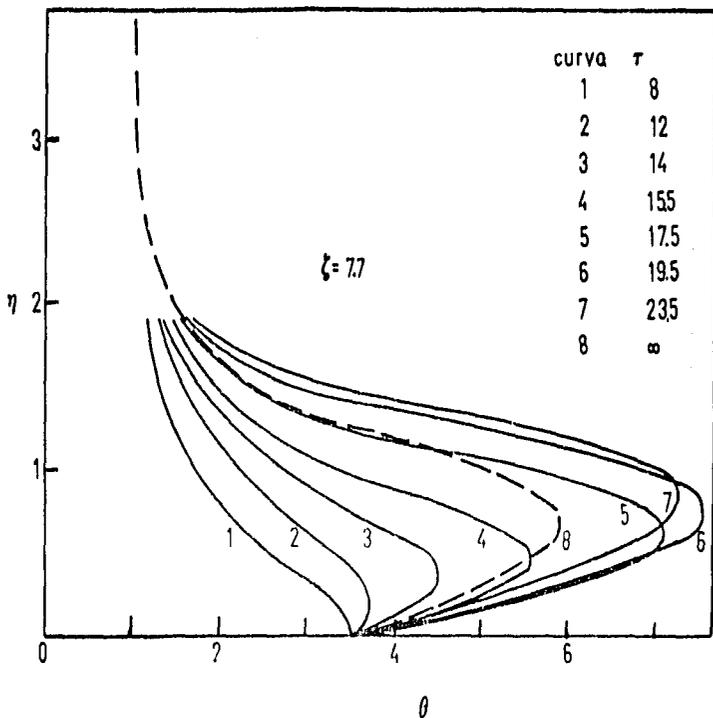


Fig. (4.24) Perfiles de temperatura adimensional a diferentes tiempos en el punto de máxima transferencia de calor en régimen permanente.

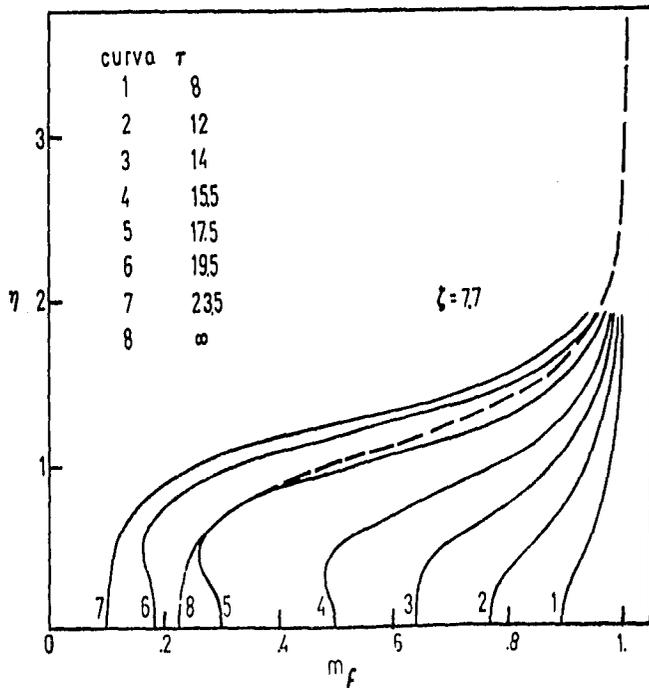


Fig. (4.25) Perfiles de concentración de combustible adimensional a diferentes tiempos, en el punto de máxima transferencia de calor en régimen permanente.

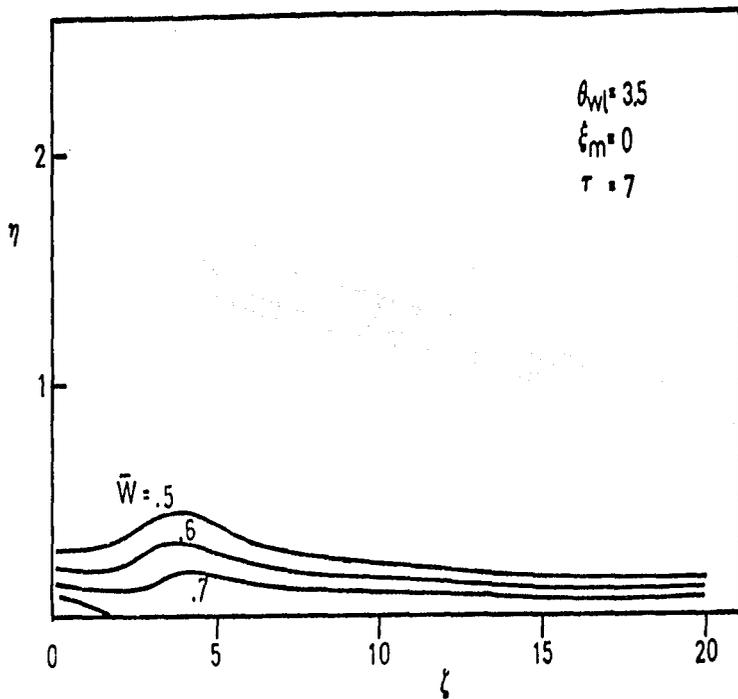


Fig. (4.26) Curvas de rapidez de reacción constante para $\tau = 7$.

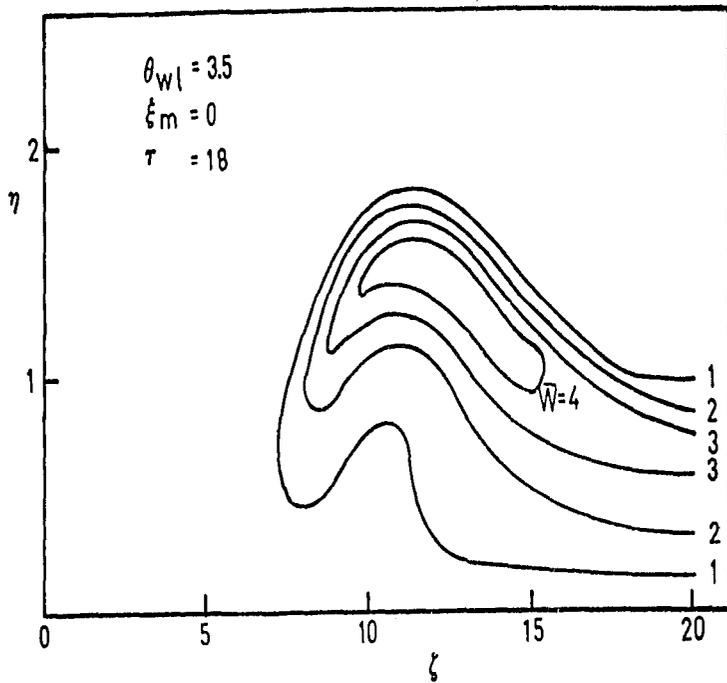


Fig. (4.27) Curvas de rapidez de reacción constante para $\tau = 18$.

el estado permanente, se puede definir el tiempo crítico de ignición, como el tiempo después del cual, con una remoción de la perturbación en temperatura de la placa, llega a formarse la flama en un tiempo "razonablemente" corto.

La figura (4.28) muestra el flujo de calor en la placa a diferentes tiempos, como una función del primer número de Damköhler ζ , para $\theta_w = 3.5$. El flujo de calor adimensional q' viene dado por:

$$q' = (\theta_{\zeta}^{\prime})_{\tau=0} / \sqrt{C\tau} \quad (4.29)$$

La generación de la "mancha" de máxima reacción, sobre la placa, se ve asociada con la aparición de un punto adiabático en ella. Para tiempos anteriores a éste, el flujo es dominado por procesos difusivos. Después del establecimiento de un punto adiabático en la pared, los efectos reactivos son importantes y la "mancha" de máxima reacción se aleja de la pared. La misma información se encuentra graficada en la figura (4.29), la cual muestra la localización del punto adiabático en el plano (ζ, τ) . Después de la aparición de este punto adiabático, al tiempo $\tau = \tau_a$, se encuentran dos puntos adiabáticos sobre la placa a cualquier tiempo. La zona comprendida entre ambos puntos adiabáticos puede considerarse como una zona afectada por la reacción. El tiempo de formación de la flama, como se mencionó anteriormente, es el tiempo necesario para la "mancha" de máxima reacción en alcanzar la posición ζ_f . En la figura (4.30) se muestra el valor máximo de la rapidez de reacción como una función del tiempo para $\theta_w = 4.5$. La información contenida en esta gráfica es muy similar a la encontrada en la figura (4.5) para el estado permanente, mostrando también un mínimo en la curva. De la misma forma que se hizo para el proceso permanente, el programa de

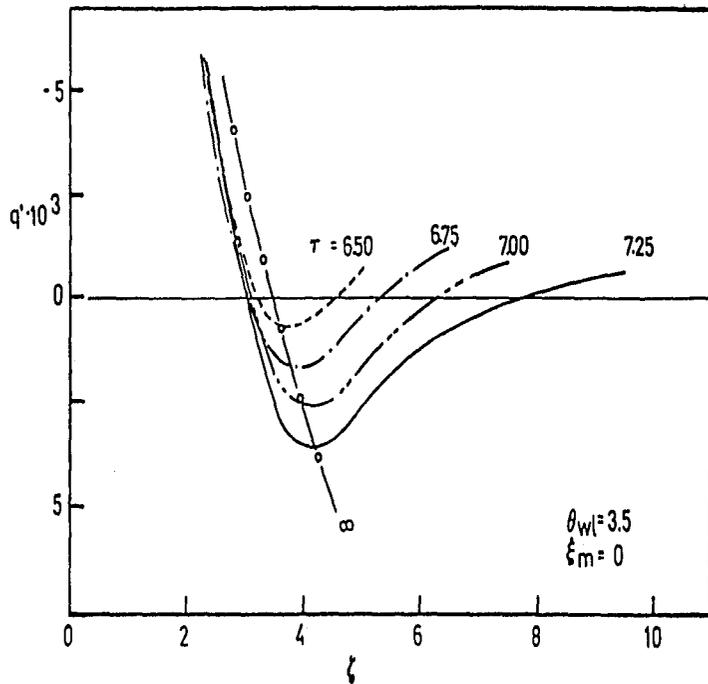


Fig. (4.28) Transferencia de calor adimensional como una función de z , a diferentes tiempos.

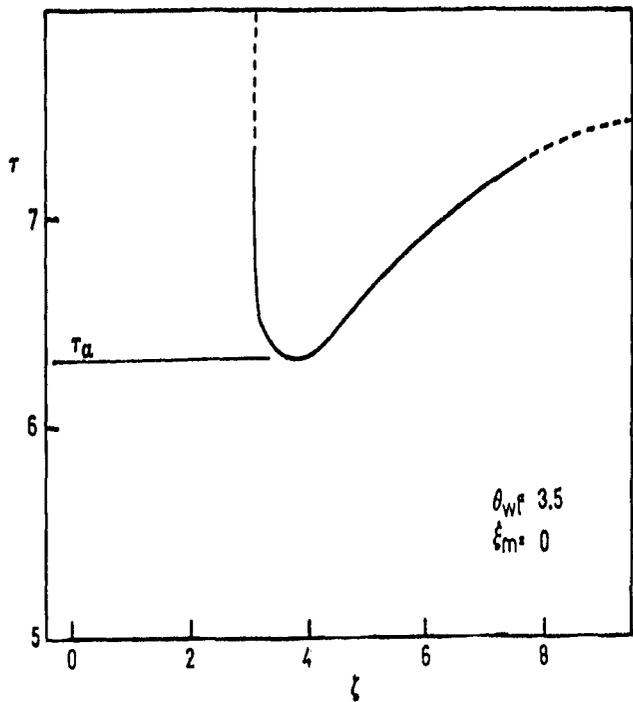


Fig. (4.9) Posición, en espacio y tiempo, de los dos puntos adiabáticos generados en la placa.

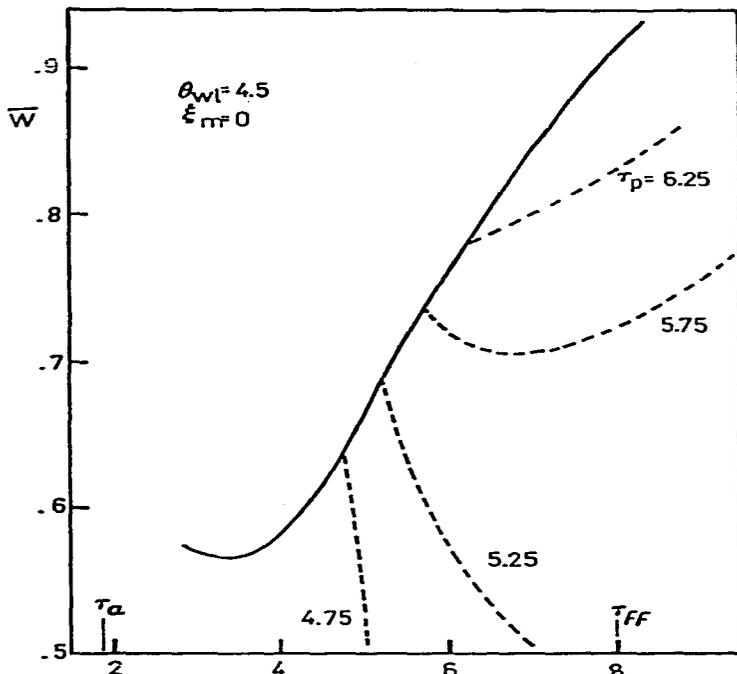


Fig. (4.30)

Curva que representa la máxima rapidez de reacción como una función del tiempo, para una temperatura uniforme en la superficie inferior de la placa (línea continua). La línea punteada representa esta máxima rapidez de reacción con una interrupción de la temperatura en el punto de intersección con la línea continua.

computadora se modificó de tal forma que fuera posible la introducción de un pulso de temperatura en el tiempo, sobre la placa. Este pulso de temperatura se tomó como:

$$\theta=1 \quad ; \text{ para } \tau \leq 0, \tau > \tau_p \text{ y } \eta=0$$

$$\theta=\theta_w \quad ; \text{ para } 0 < \tau \leq \tau_p \text{ y } \eta=0$$

En la figura (4.30) se muestra también la variación del valor máximo de la rapidez de reacción como una función del tiempo, para diferentes valores de τ_p (líneas punteadas). Se deduce de esta figura que el tiempo crítico de ignición corresponde a un valor de $\tau_p = 5 \pm 0.25$.

Law y Law (1979) demostraron para un proceso permanente, que para valores pequeños del parámetro θ_w^2/e_a , la distancia crítica de ignición coincide con la distancia hasta el punto adiabático. Esto es debido al hecho de que para este caso, el primer número de Damköhler en el punto adiabático es tan alto que los efectos difusivos pueden despreciarse comparados con los efectos reactivos. Por esta misma razón, la posición permanente del frente de flama también coincide con el punto adiabático. Para valores apreciables de este parámetro θ_w^2/e_a , la diferencia entre las tres posiciones es considerable.

4.6 Proceso transitorio de ignición con resistencia térmica de la placa

En esta sección se analiza el efecto de la resistencia térmica de la placa en el proceso transitorio de ignición. Como se sa-

be, para procesos transitorios la capacitancia térmica de la placa juega un muy importante papel, la cual -sin embargo- se desprecia en el presente trabajo. Esta suposición implica que los tiempos característicos en la placa se consideran mucho menores que en la fase gaseosa, lo cual se hace con la finalidad de poder estudiar la estructura del proceso de ignición. Si se considerase la capacitancia térmica de la placa, entonces se podrían emplear métodos cuasi-estáticos para la fase gaseosa, análisis que encubriría el proceso de ignición, indicando solamente el tiempo de ignición, pero sin mostrar el mecanismo propio del proceso.

En general, la estructura del proceso de ignición, considerando la resistencia térmica transversal de la placa ξ_m , es similar a la deducida sin tomar en cuenta dicha resistencia. El efecto de ξ_m sobre el tiempo necesario para alcanzar el punto adiabático τ_a , se muestra en la figura (4.31), para diferentes valores de la temperatura de la superficie inferior de la placa. La inclusión de la capacitancia térmica de la placa en el análisis, trae como consecuencia tiempos mucho mayores que los indicados en dicha figura.

La figura (4.32) muestra las trayectorias recorridas por la "mancha" de máxima rapidez de reacción, para $\tau_a \leq t \leq \tau_{ff}$, calculados para diferentes valores de la resistencia térmica de la placa y temperatura de la superficie inferior de la misma. En esta misma figura se han trazado dos líneas rectas que corresponden a velocidades de la "mancha" (V_s) del 50 % y del 100 % de la velocidad del flujo libre.

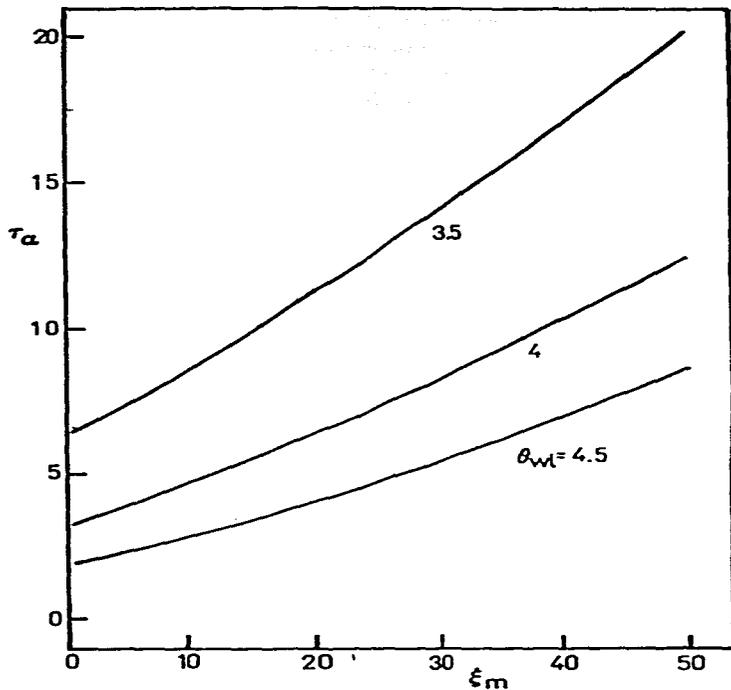


Fig. (4.31) Efecto de la resistencia térmica de la placa sobre el tiempo necesario en alcanzar el punto adiabático τ_a , para diferentes valores de θ_{w1} .

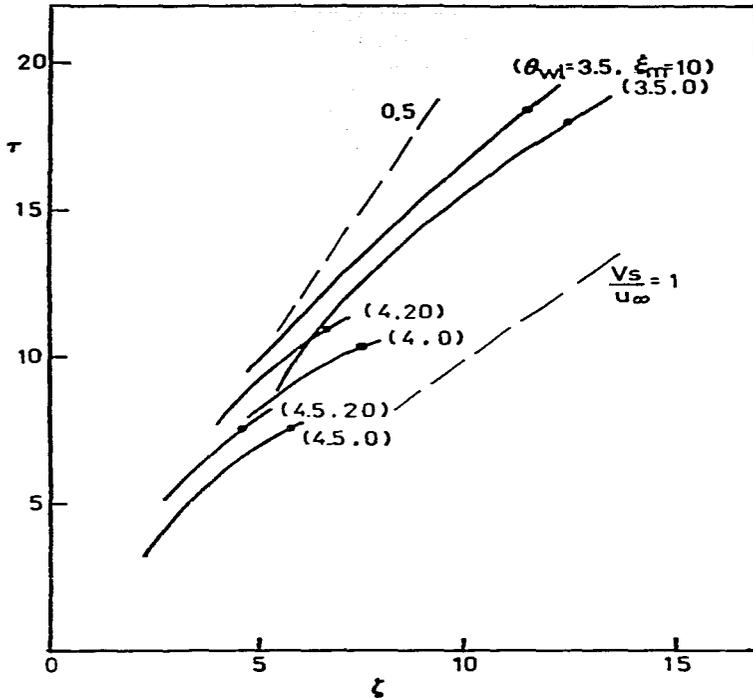


Fig. (4.32) Propagación de la "mancha" de máxima rapidez de reacción en el plano (ζ, τ) ; para diferentes valores de la temperatura de la superficie inferior de la placa y resistencia térmica de la misma.

Las ecuaciones que gobiernan el proceso transitorio de ignición, se han tomado como parabólicas tanto en la fase gaseosa como en la placa, para valores despreciables de δ_m , lo cual puede alcanzarse en la práctica. Esta aproximación parabólica es difícil de justificar en la placa, debido a la existencia de un punto adiabático en ella. Sin embargo, para tiempos anteriores a la aparición de éste, la ecuación de balance de la energía en la placa puede ser parabólica, por lo que los valores obtenidos para τ_a no se ven alterados. Para tiempos $t > \tau_a$, el flujo de calor axial en la placa puede afectar la propagación de la "mancha" de máxima reacción, con la única excepción del caso concreto en que la resistencia térmica de la placa sea cero.

La generación de la "mancha" de máxima reacción es característica al proceso de ignición, aun cuando δ_m sea apreciable. En este caso, los tiempos característicos τ_a no se ven afectados. Para tiempos $t > \tau_a$, la "mancha" de máxima reacción aumenta en intensidad y, por lo tanto, se incrementa también su velocidad de flama correspondiente. Si esta velocidad de la flama es mayor que la velocidad de flujo, entonces esta "mancha" se moverá aguas arriba, hasta sobrepasar el punto de equilibrio para el estado permanente. La naturaleza oscilatoria en el proceso de ignición es característico en flujos para altos valores de δ_m .

Resumiendo, el mecanismo de ignición de una mezcla combustible gaseosa, en un flujo de capa límite a lo largo de una placa plana no catalítica e impermeable, puede representarse en las siguientes secuencias:

- a) un punto adiabático aparece en la pared. Los efectos reactivos se hacen importantes, aun cuando los efectos difusivos son dominantes. Esto se indica por el valor local del primer número de Damköhler, que disminuye al aumentar el parámetro θ_w/θ_a . Simultáneamente se genera una "mancha" de máxima rapidez de reacción;
- b) primero por efectos difusivos y después por efectos convectivos, se transporta esta "mancha" de máxima reacción aguas abajo, hacia valores mayores del primer número de Damköhler, incrementando los efectos reactivos;
- c) los efectos reactivos se vuelven dominantes desde el punto donde la curva de máxima rapidez de reacción es un mínimo, tal como lo muestra la figura (4.30). Este punto puede ser escogido para la definición de un punto crítico de ignición;
- d) al seguir aumentando el primer número de Damköhler por donde pasa la "mancha" de máxima reacción, se alcanza un momento después del cual la remoción de la perturbación de temperatura que generó el proceso de ignición, no impide la formación de la flama en un tiempo "razonablemente" corto. Los cálculos para este punto requieren de tiempos de computadora extremadamente largos. Por esta razón, además del carácter arbitrario de su definición, es preferible tomar el punto crítico de ignición como el referido en el punto c.

- e) la "mancha" de máxima rapidez de reacción, aumenta en intensidad al trasladarse hacia regiones mayores de ζ . Esta "mancha" cruza la posición permanente del extremo inferior de la flama. Este tiempo es el denominado tiempo de formación de la flama. Al seguir su viaje esta "mancha", continúa formando el resto de la flama.

C A P I T U L O V

CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo, tal como se mencionó anteriormente, fue el de desarrollar algunos aspectos, hasta ahora no tratados en la literatura, del proceso de ignición en flujos de capa límite, generados por una placa no catalítica e impermeable.

El primer problema estudiado consistió en el análisis de la validez de la aproximación de Prandtl de la capa límite en todo el conjunto de ecuaciones de balance que gobiernan un proceso de ignición. La totalidad de los autores que han estudiado el proceso permanente de ignición, han negado la validez de la aproximación de Prandtl en regiones que van desde la formación del punto adiabático en la placa hasta la flama. En este trabajo, se demostró la existencia de un parámetro local adimensional ϵ , el cual siendo proporcional al cociente de la velocidad de la flama entre la velocidad de flujo, juega un muy importante papel en la parabolización del conjunto de ecuaciones que describen al proceso de ignición. Para encontrar este parámetro adimensional, fue necesario desarrollar una adimensionalización de las ecuaciones de balance, procedimiento complicado en gran medida por la necesidad de incluir los términos no permanentes y de considerar una ecuación extra de balance transversal de la cantidad de movimiento. Es de hacerse notar, que las ecuaciones dimensionales que gobiernan el proceso

transitorio de ignición en flujos de capa límite, no han sido señaladas en la literatura.

El valor máximo de δ ocurre en la denominada línea muerta, debajo de la cual los efectos reactivos se ven inhibidos por el enfriamiento de la pared. El límite $\delta \rightarrow 0$, el cual puede alcanzarse en la práctica, trae consigo una serie de implicaciones muy importantes. Primeramente, que en este límite el conjunto de ecuaciones de balance se transforman en parabólicas. Esto es, los gradientes longitudinales de temperatura y concentraciones son despreciables comparados con los transversales, debido a que la flama formada tiende a inclinarse contra la pared. Esta parabolización de las ecuaciones, indica que no existe retroalimentación hacia la región aguas arriba, por lo que el fluido que incide sobre la flama no "sabe" de su existencia, hasta que se topa con ella. Esto muestra que el punto de ignición debe coincidir forzosamente con el punto de estabilización de la flama y que, por lo tanto, el mecanismo de estabilización aplicable es el correspondiente al mecanismo de ignición continua. Aunque el sistema de ecuaciones no es lineal, su parabolización implica la unicidad de la solución obtenida, suponiendo flujo laminar.

Otra característica muy importante referente al límite $\delta \rightarrow 0$, es que la presión se mantiene uniforme en todo el espacio, lo cual implica que la inclusión de la ecuación de balance transversal de la cantidad de movimiento es superflua. Una conclusión muy importante que se deriva de esto, lo constituye el hecho de que al no existir gradientes de presión, las causas que generan las oscilaciones, dejan de producirse. Por lo tanto, en el límite $\delta \rightarrow 0$,

las oscilaciones no pueden presentarse, por lo que este proceso de ignición resulta ser muy estable.

Otra conclusión que se puede obtener, derivado de ello, es el hecho de que la uniformidad de la presión está íntimamente ligada al proceso de parabolización, no sólo en flamas premezcladas, sino que puede extrapolarse a flamas de difusión. En este último caso, existen problemas de propagación de flamas en sólidos térmicamente delgados (Fernández-Pello y Santoro, 1979), en donde el modo dominante de transferencia de calor, lo constituye la difusión longitudinal en la fase gaseosa. Tratar de analizar el proceso de propagación de la flama en este caso, sin tomar en cuenta los gradientes de presión asociados, trae como consecuencia una aproximación errónea del problema. Un ejemplo reciente de esto, lo constituye el trabajo de Frey y T'ien (1979), en donde no sólo no consideran gradientes de presión, sino que lo simplifican todavía más al utilizar un campo de velocidades uniforme.

Para flujos con δ apreciable, es imposible desacoplar las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento de las demás. Sin embargo, en el límite $\delta \rightarrow 0$, es posible hacerlo mediante la suposición (aplicable para gases) de que la viscosidad de la mezcla sea proporcional a su temperatura absoluta. En este caso, la ecuación de balance de la cantidad de movimiento se reduce a la clásica ecuación de Blasius, aún en régimen no permanente. Esto trae consigo una gran simplificación, ya que la solución de esta ecuación es conocida. Dicha simplificación reduce el conjunto de ecuaciones a solamente dos, aunque éstas no son lineales y están acopladas.

Otro aspecto desarrollado en el presente trabajo, consistió en definir en forma más adecuada el punto crítico de ignición para procesos permanentes y el tiempo crítico de ignición para procesos transitorios. Todos los trabajos publicados en relación a esto, han considerado el punto de ignición como aquél en donde se alcanza la condición de adiabaticidad. Se ha demostrado que esto solamente es posible para el caso concreto de contar con una energía de activación muy alta. Sin embargo, para valores reales de esta energía de activación, el proceso de ignición abarca desde la generación del punto adiabático, hasta la formación del extremo inferior de la flama. Esta zona aumenta al aumentar el parámetro $\frac{E_a}{kT}$. En la presente tesis, se definió el punto de formación del extremo inferior de la flama, como el punto en donde la transferencia de calor hacia la placa es máxima. Se encontró que la información más relevante relativa al proceso de ignición, se da en la curva del valor máximo de la rapidez de reacción como función del primer número de Damköhler. Esta gráfica muestra un mínimo, que indica que en este punto los efectos reactivos empiezan a ser dominantes sobre los efectos difusivos. Por esta razón, se escogió este mínimo como el indicador del punto crítico de ignición, en sustitución del punto adiabático. Esto es, para valores reales de la energía de activación, una interrupción de la perturbación de temperatura en la placa en el punto adiabático, trae como consecuencia que la flama no pueda llegar a formarse en una distancia razonable (dadas por las dimensiones físicas posibles de los dispositivos de combustión) y que prácticamente el proceso de ignición no se lleve a cabo. Por todo esto, la condición de adiabaticidad no debe considerarse como una condición crítica de ignición.

Otra contribución realizada en el presente trabajo, consistió en la evaluación del efecto de la resistencia térmica de la placa en el proceso de ignición, tanto en régimen permanente como transitorio, lo cual no ha sido estudiado hasta la fecha. En esta tesis se demostró que el principal efecto de la resistencia térmica de la placa es, hasta un cierto límite, el de acortar la distancia de ignición.

En el caso de procesos transitorios de ignición, problema que tampoco ha sido tratado en la literatura, en este trabajo se analizó el mecanismo y la estructura del proceso de ignición y formación de la flama, en el caso concreto de un incremento, en forma de escalón, de la temperatura en la superficie inferior de la placa. Lo esencial de este mecanismo se deriva de la existencia de una "mancha" de máxima rapidez de reacción, que se genera en la pared al aparecer el punto adiabático en ella, y se propaga en dirección aguas abajo. Esta "mancha" es una especie de ignitor que barre la capa límite, provocando la ignición y formación de la flama. El tiempo necesario en alcanzar la formación del punto adiabático y el tiempo crítico de ignición, se apartan a medida que aumenta el parámetro \dot{q}_w/\dot{q}_a . La gráfica correspondiente al valor de la rapidez de reacción máxima como una función del tiempo, tiene un perfil similar a la línea de máxima rapidez de reacción como una función del primer número de Damköhler, ya antes referida para procesos permanentes. Como en este caso, la definición de la condición crítica de ignición es aquella en donde ocurre el mínimo en la curva de máxima rapidez de reacción.

Tomando como base el paquete de programas de computadora desarrollado en este trabajo, es posible extender el análisis del proceso de ignición a diferentes aspectos, que lleven a comprender con mayor profundidad la interacción del proceso de ignición con la dinámica de los cuerpos cercanos o en contacto de los flujos donde se desarrollan. Algunos de estos aspectos se enumeran a continuación:

- 1) efecto de la conducción axial de calor en la placa, tanto en procesos permanentes como transitorios;
- 2) efecto de la capacitancia térmica de la placa en procesos transitorios;
- 3) efecto de un borde de ataque aislante, en los procesos permanentes y transitorios de ignición.

Con la ayuda de los resultados presentados en este trabajo, también es posible el empleo de métodos matemáticos avanzados (por ejemplo, expansiones asintóticas acopladas), para la solución aproximada del conjunto de ecuaciones que gobiernan el proceso de ignición en flujos de capa límite.

R E F E R E N C I A S

- Arrhenius S. (1889); "Ueber die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Inversion von Rohrzucker durch Sauern", Zeitschrift fuer Physikalische Chemie", Vol. 4, Nr. 2, pp. 226-248.
- Adomeit G. (1963); "Thermal ignition of flowing combustible gases at heated bodies", Proceedings of the 1963 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, pp. 160-175.
- Adomeit G. (1965); "Ignition of gases at hot surface under non-steady state conditions", X Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 237-243.
- Alkidas A. y Durbetaki P. (1971); "Ignition characteristics of a stagnation point combustible mixture", Combustion Science and Technology, Vol. 3, pp. 187-194.
- Alkidas A. y Durbetaki P. (1972); "Stagnation point heat transfer: the effect of the first Damköhler similarity parameter", Journal of Heat Transfer, Vol. 94, pp. 410-414.
- Alkidas A. y Durbetaki P. (1973a); "A simplified model for stagnation heat transfer and ignition of a gaseous mixture", Journal of Heat Transfer, Vol. 95, pp. 564-566.

- Alkidas A. y Durbetaki P. (1973b); "Ignition of a gaseous mixture by a heated surface", Combustion Science and Technology, Vol. 7, pp. 135-140.
- Baroni J. R. (1962); "Thermodynamic coupling in boundary layers", ARS Journal, Vol. 32, pp. 1053-1059.
- Becker E. (1972); "Chemically reacting flows", Annual Review of Fluid Mechanics, Palo Alto California, Vol. 4.
- Berman V. S. y Ryazantsev Y. S. (1978); "Ignition of a gas in a boundary layer at a heated plate", Fluid Dynamics, Vol. 5, parte 5, pp. 758-764.
- Carnahan B., Luther H. A. y Wilkes J. O. (1969); "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, New York.
- Chambré P. L. (1956); "On the ignition of a moving combustible gas stream", The Journal of Chemical Physics, Vol. 25, Nr. 3, pp. 417-421.
- Chung P. M. (1965); "Chemically reacting non-equilibrium boundary layers", en Advances in Heat Transfer, Vol. 2, Academic Press, New York, p. 109.
- De Groot S. R. y Mazur P. (1962); "Non-equilibrium Thermodynamics", North Holland Publishing Company, Amsterdam Holanda.

- Dooley D. A. (1957): "Ignition in the boundary layer of a heated plate", Proceedings of the 1957 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, pp. 321-342.
- Dorodnitsyn A. (1942): "Laminar boundary layers in compressible fluids", C.R. Akad. Nauk. U.S.S.R., Vol. 34, pp. 213-219.
- Eckert E. R. G. y Drake R. M. Jr. (1972): "Analysis of Heat and Mass Transfer", Mc. Graw Hill, New York.
- Fendell F. E. (1965): "Ignition and extinction in combustion of initially unmixed reactants", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 21, parte 2, pp. 281-303.
- Fernández-Pello A. C. y Santoro R. J. (1979): "On the dominant mode of heat transfer in downward flame spread", XVII Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 1201-1209.
- Frey A. E. y T'ien J. S. (1979): "A theory of flame spread over a solid fuel including finite rate chemical kinetics", Combustion and Flame, Vol. 36, pp. 263-269.
- Gross R. A. (1955): "Boundary Layer flame stabilization", Jet Propulsion, Vol. 25, pp. 288-290/293.
- Gyarmati I. (1970): "Non-equilibrium Thermodynamics", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

- Hirschfelder J. O., Curtiss C. F. y Bird R. B. (1954); "Molecular Theory of Gases and Liquids", John Wiley & Sons, New York.
- Hottel H. C., Toong T. Y. y Martin J. J. (1957); "Flame stabilization in a boundary layer", Jet Propulsion, Vol. 27, pp. 28-30/48.
- Howarth P. L. (1948); "Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation", Proc. Roy. Soc., Vol. A194, p. 16.
- Kashiwagi T. y Summerfield M. (1973); "Ignition and flame spreading over a solid fuel: nonsimilar theory for a hot oxidizing boundary layers", XIV Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 1235-1247.
- Khitrin L. N. y Goldenberg S. A. (1957); "Thermal theory of gas mixtures: limiting conditions", VI Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 545-554.
- Kumagai S. y Kimura I. (1957); "Ignition of flowing gases by heated wires", VI Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 554-558.
- Law C. K. (1978); "On the stagnation-point ignition of a premixed combustible", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 21, pp. 1363-1368.
- Law C. K. y Law H. K. (1979); "Thermal ignition analysis in boundary layer flows", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 92, pp. 97-108.

- Law H. K. y Law C. K. (1980); "Flat plate ignition with reactant consumption", por publicarse.
- Lees L. (1958); "Convective heat transfer with mass addition and chemical reactions", Combustion and Propulsion, III AGARD Colloquium, Pergamon Press, pp. 451-498.
- Liñán A. y Williams F. A. (1979); "Ignition of a reactive solid exposed to a step in surface temperature", SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 36, Nr. 3, pp. 587-603.
- Marble F. E. y Adamson T. C. Jr. (1954); "Ignition and combustion in a laminar mixing zone", Jet Propulsion, Vol. 24, pp. 85-94.
- Meixner J. y Reik H. G. (1959); "Thermodynamik der irreversiblen Prozesse", Handbuch der Physik, Vol. III/2, Springer Verlag, Berlin, p. 413.
- Müllen J. W., Fenn V. B. e Irby M. R. (1949); "The ignition of high velocity streams of combustible gases by heated cylindrical rods" III Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 317-329.
- Onsager L. (1931); "Reciprocal relations in irreversible processes", Physical Review, Vol. 37, p. 405.
- Peterson S. (1939); "The ignition of flammable gases by hot moving particles I", Phil. Mag., Vol. 28, p. 1.

- Paterson S. (1940); "The ignition of flammable gases by hot moving particles II", Phil. Mag., Vol. 30, p. 437.
- Penner S. S. (1958); "Chemistry Problems in Jet Propulsion", Pergamon Press, New York.
- Potter A. E. Jr. y Berlad A. L. (1956); "A relation of burning velocity and quenching distance", NACA TN 3882.
- Saitoh T. (1974); "Extinction analysis of premixed flame for counterflow and blunt body stagnation-region flow", Internacional Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 17, pp. 1063-1077.
- Schlichting H. (1968); "Boundary Layer Theory" Mc. Graw Hill Book Company, New York.
- Sharma O. P. y Sirigniano W. A. (1969); "Ignition of stagnation point flow by a hot body", Combustion Science and Technology, Vol. 1, pp. 95-104.
- Sharma O. P. y Sirigniano W. A. (1970); "On the ignition of a pre-mixed fuel by a hot projectile", Combustion Science and Technology, Vol. 1, pp. 481-494.
- Silver R. S. (1937); "The ignition of gaseous mixtures by hot particles", Phil. Mag., Vol. 23, p. 633.

- Smith H. W., Schmitz R. A. y Ladd R. G. (1971); "Combustion of a premixed system in stagnation flow: I theoretical", Combustion Science and Technology, Vol. 4, pp. 131-142.
- Sparrow E. M., Minkowycz W. J. y Eckert E. R. G. (1964); "Diffusion-thermo effects in stagnation-point flow of air with injection of gases of various molecular weights into the boundary layer", AIJA Journal, Vol. 2, Nr. 4, pp. 652-659.
- Sucec J. (1977); "Approximate solution to a class of transient forced convection problems", Journal of Engineering for Power, Vol. 99, pp. 567-574.
- Tambour Y. y Gal-Or B. (1976); "Phenomenological theory of thermodynamic coupling in multicomponent compressible boundary layers", Physics of Fluids, Vol. 19, Nr. 2, pp. 219-226.
- Toong T. Y. (1957); "Ignition and combustion in a laminar boundary layer over a hot surface", VI Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 532-540.
- Toong T. Y. (1958); "Flame stabilization in boundary layers", Combustion and Propulsion, III AGARD Colloquium, Pergamon Press, pp. 581-597.
- Toong T. Y., Kelly J. R. y Wu W. S. (1963); "Flame propagation in laminar boundary layers", IX Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 59-64.

- Torda T. P. y Busenberg S. N. (1965); "Flame stabilization in boundary layers", AIJA Journal, Vol. 3, pp. 764-767.
- Tsuji H. (1961); "Ignition and flame stabilization in the laminar boundary layer on a porous flat plate with hot gas injection", Aeronautical Research Institute, University of Tokio, Report Nr. 365.
- Turcotte D. L. (1960); "Stable combustion of a high velocity gas in a heated boundary layer", Journal of Aerospace Science, Vol. 27, pp. 509-516.
- Von Kármán T. y Millán G. (1953); "Thermal theory of a laminar flame front near a cold wall", IV Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 173-177.
- Williams F. A. (1965); "Combustion Theory", Addison Wesley, Reading Mass.
- Williams F. A. (1976); "Mechanism of fire spread", XVI Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 1281-1294.
- Wu W. S. y Toong T. Y. (1963); "Further study on flame stabilization in a boundary layer: A mechanism of flame oscillations", IX Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 49-58.

Wuellner E. y Lehmann R. (1886); Bericht der preussischen Schlagwetter Kommission, Anlagen zum Hauptbericht, Vol. 3, p. 193.

Ziemer R. W. y Cambel A. B. (1958); "Flame stabilization in the boundary layer of heated plates", Jet Propulsion, Vol. 28, Nr. 9, pp. 592-599.

A P E N D I C E A

LISTADOS DE PROGRAMAS DE COMPUTADORA

En este apéndice, se presentan los listados de los principales programas de computadora desarrollados en esta tesis, así como un listado de las variables más importantes que aparecen en los mismos.

A.1 Programa COMBUST

Este programa calcula el flujo con transferencia de calor en una capa límite laminar con o sin reacciones químicas, tanto en régimen permanente como en transitorio.

Listado de variables

PR = Pr
SC = Sc
TETA W = σ_w
TETA A = σ_a
ALFA = a_T
AC = a_F
AO = a_O
BETA = \bar{c}
DETA = $\Delta\eta$
DE = Δc
DTAU = $\Delta\tau$

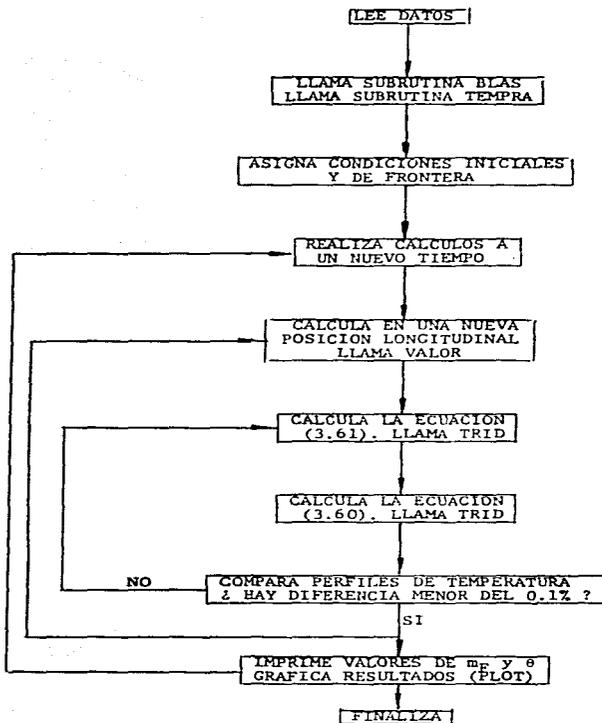
NMAX = máximo número de puntos en η
MMAX = máximo número de puntos en ζ
LMAX = máximo número de puntos en τ
NMAXP = número máximo del punto en η hasta donde se imprime
NPRINT= intervalo en η para impresión de valores para variables
ET = ζ_m
LVAR = 1, se tiene un proceso interactivo con $\Delta\tau$ variable
IE = 1, se toma en cuenta la resistencia térmica de la placa
BETA = 0, corresponde a un flujo sin reacción química
LMAX = 3, corresponde a un proceso permanente
IPUNTO= 0, indica que no imprime en la terminal
ID = 1, toma en cuenta una placa catalítica
IPLOT = 1 ó 3, se grafican los perfiles de temperaturas
IPLOT = 2 ó 3, se grafican los perfiles de concentraciones
IMP = 1, se tiene un pulso de temperatura en τ
IZETA = 1, se tiene un pulso de temperatura en ζ
TIMP = τ_p
ZETAT = ζ_p
RTAU = R_T
TETA = θ
XM = m_F
TETAPO= q'
F = f
FP = f'

Subrutinas

BLAS - Esta subrutina calcula la ecuación de Blasius
(3.59).

- TEMPRA** - Esta subrutina calcula el perfil de temperaturas en regiones cercanas al borde de ataque de la placa. Esto es, resuelve la ecuación (4.14).
- TRID** - Esta subrutina calcula un sistema lineal de ecuaciones, donde la matriz de transformación sea tridiagonal. Se utiliza en el cálculo de los perfiles de temperatura y concentración para cada posición a lo largo de la placa.
- VALOR** - Esta subrutina asigna valores a las constantes a, b, c, d, e y g.
- PULSO** - Esta subrutina asigna las condiciones de frontera para el caso concreto en donde se tiene un pulso de temperatura en la placa, en función del tiempo.
- PLOT** - Esta subrutina grafica los perfiles de temperatura y/o concentraciones, en el plano ξ, η .

DIAGRAMA DE BLOQUES




```
SUBROUTINE TRIC(M, SLP, SUB, FIAG, E)
  DIMENSION SLP(M), SLE(M), DIAG(M), E(M)
  DO 1 I=1,M
    SLE(I)=1
    IF(SLP(I).EQ.0) SLE(I)=0
    IF(SLE(I).EQ.0) DIAG(I)=0
    IF(SLE(I).EQ.1) SLE(I)=SLP(I)
    IF(SLE(I).EQ.1) DIAG(I)=FIAG(I)
    IF(SLE(I).EQ.1) SLE(I)=SLE(I)+SLE(I)
    IF(SLE(I).EQ.1) DIAG(I)=DIAG(I)+DIAG(I)
  1C
  DO 2 I=1,M
    SLE(I)=SLE(I)+SLE(I)
    DIAG(I)=DIAG(I)+DIAG(I)
  2C
  END
```


A.2 Programa AGAP

Este programa calcula el efecto de la conducción longitudinal de calor en la fase gaseosa, sobre el proceso de transferencia de calor en un flujo de capa límite sobre una placa plana.

Listado de variables

Esencialmente, las variables utilizadas en este programa son las mismas que las empleadas en el programa COMBUST. Además, se definen nuevas variables de la forma siguiente:

RE = Re_{x_0}

LLMAX = orden de la matriz de transformación (NMAX)*(MMAX)

NBAND = ancho de banda de la matriz de transformación

TETA = $\bar{\theta}$

Subrutinas

Las subrutinas BLAS y TEMPRA son exactamente las mismas que las utilizadas en el programa COMBUST.

LEQT1B - Esta subrutina forma parte del sistema de biblioteca del Centro de Servicios de Cómputo y pertenece al archivo IMSL. Esta subrutina calcula un sistema lineal de ecuaciones, donde la matriz de transformación posee una banda dada por NBAND.

A.3 Programa PLACA

Este programa calcula la rapidez de enfriamiento de una placa plana delgada expuesta a un flujo convectivo laminar.

Listado de variables

Las variables: NMAX,MMAX,LMAX,PR,DETA,DE,DTAU,F y FP tienen el mismo significado que para el programa COMBUST. Además, se definen las siguientes:

TETA_{W0} = T_{w0}/T_{∞}

IPRINT = comando para imprimir en pasos intermedios

NPASO = incremento para impresión en η

LPASO = incremento para impresión en τ

ICON = 1, borde de ataque adiabático

ITRA = 1, imprime los términos de la ecuación de la energía

TETA = T/T_{∞}

TETA_W = T_w/T_{∞}

ALFA = α

BETA = β

QP = q' / Pr

QPI = $\int_0^1 q'(c) dc$

Subrutinas

Las subrutinas BLAS y TEMPRA son exactamente las mismas que las empleadas en el programa COMBUST.


```

I(LMA1-1)-LTAU
6000 4HILECC,0000, I,TETAP(LMA1)
      4LHMATC,253, I, E15.0,SA,E15.0/)
2n   4HILECC,1000, I,TAC(I),TETAC1,K,LMA1),TETAC3,K,I1,I2),TETAC5,K,LMA1)
      4HILETAC7,K,LMA1),TETAC9,K,LMA1),TETAC11,K,LMA1)
KN 1 4HUNLINE
     4SYN
     END

```

A.4 Programa PLATE

Este programa calcula el proceso transitorio de un flujo con un gas inerte sobre una placa plana, generado mediante el cambio repentino de la temperatura de la placa.

Listado de variables

Las variables utilizadas en este programa fueron ya definidas tanto en el programa COMBUST como en el programa PLACA.

Subrutinas

Las subrutinas BLAS y TEMPRA son exactamente las mismas que las empleadas en el programa COMBUST.

A P E N D I C E B

ASPECTOS RELEVANTES EN METODOS NUMERICOS

En este apéndice se describen brevemente las formas de representar derivadas parciales en diferencias finitas y los errores introducidos en la discretización. También se presentan cálculos concretos del error generado en el programa central de la tesis presente.

Sea la función:

$$u=u(x,y,z)$$

Suponiendo que existe un número suficiente de derivadas parciales de u , la relación entre la función u en el punto (x,y,z) y su correspondiente en el punto $(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ está dada por la expansión de Taylor en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z) &= u(x,y,z) + (\Delta x \partial/\partial x + \Delta y \partial/\partial y + \Delta z \partial/\partial z) u(x,y,z) \\ &+ (\Delta x \partial/\partial x + \Delta y \partial/\partial y + \Delta z \partial/\partial z)^2 u(x,y,z) / 2! + \dots \\ &+ (\Delta x \partial/\partial x + \Delta y \partial/\partial y + \Delta z \partial/\partial z)^{n-1} u(x,y,z) / (n-1)! \\ &+ R_n \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde $R_n = O(|\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|)^n$

En la utilización del método de diferencias finitas, se genera una malla que cubre la región de interés. Aplicando la expansión (B.1) en la dirección x, alrededor del punto de la malla (m,n,k), se tiene en diferencias hacia atrás y hacia adelante las siguientes relaciones:

$$u_{m-1,n,k} = u_{m,n,k} - \Delta x u_x + (\Delta x)^2 u_{xx} / 2! - (\Delta x)^3 u_{xxx} / 3! + \dots \quad (B.2)$$

$$u_{m+1,n,k} = u_{m,n,k} + \Delta x u_x + (\Delta x)^2 u_{xx} / 2! + (\Delta x)^3 u_{xxx} / 3! + \dots \quad (B.3)$$

Existen diferentes formas para expresar u_x . De la ecuación (B.2) se obtiene que:

$$u_x = (u_{m,n,k} - u_{m-1,n,k}) / \Delta x + O(\Delta x) \quad (B.4)$$

y, de la ecuación (B.3) se despeja u_x , obteniéndose:

$$u_x = (u_{m+1,n,k} - u_{m,n,k}) / \Delta x + O(\Delta x) \quad (B.5)$$

También, restando (B.2) de (B.3) se tiene después de despejar u_x :

$$u_x = (u_{m+1,n,k} - u_{m-1,n,k}) / 2\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (B.6)$$

Otra posibilidad de obtener u_x es mediante la introducción de la siguiente expansión de Taylor:

$$u_{m-2,n,k} = u_{m,n,k} - 2\Delta x u_x + 2\Delta x^2 u_{xx} - 8/6 \Delta x^3 u_{xxx} + \dots \quad (B.7)$$

Multiplicando la ecuación (B.2) por 4 y restándole la ecuación (B.7), se obtiene al despejar u_x la siguiente relación:

$$u_x = (3u_{m,n,k} - 4u_{m-1,n,k} + u_{m-2,n,k}) / 2\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (B.8)$$

Como puede observarse de las ecuaciones (B.4), (B.5), (B.6) y (B.8), son muy variadas las formas de representar derivadas par-

ciales de una función, en diferencias finitas. Sin embargo, como puede deducirse de las mismas ecuaciones, las expresiones (B.4) y (B.5), que corresponden a diferencias hacia atrás y hacia adelante respectivamente, contienen errores del orden de Δx , en comparación con las ecuaciones (B.6) y (B.8), que corresponden a diferencias centrales y laterales respectivamente, cuyo error es del orden de $(\Delta x)^2$.

Para ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico, pueden ser utilizadas las ecuaciones (B.4), (B.5) y (B.8), mientras que la ecuación (B.6) es preferible utilizarla en ecuaciones del tipo elíptico. Las ecuaciones (B.4) y (B.5) involucran dos puntos de la red, contrastando con la ecuación (B.8) que necesita tres de los puntos.

Debido al hecho de que la mayoría de los problemas tratados en este trabajo son elípticos en una dirección y parabólicos en otra, las expresiones que traen consigo errores del orden de $(\Delta x)^2$ son las ecuaciones (B.6) y (B.8). Por lo tanto, son estas las ecuaciones que se utilizan en este tipo de problemas.

Para obtener la segunda derivada de una función en diferencias finitas, existen dos posibilidades. La primera es aquella que utiliza diferencias centrales, mientras que la segunda utiliza diferencias laterales. Ambas posibilidades, como es obvio, necesitan de tres puntos de la malla. Al sumar las ecuaciones (B.2) y (B.3), se tiene que:

$$u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} = 2u_{m,n,k} + \Delta x^2 u_{xx} + O(\Delta x^4)$$

Despejando de esta relación u_{xx} , se obtiene:

$$u_{xx} = (u_{m+1,n,k} - 2u_{m,n,k} + u_{m-1,n,k}) / \Delta x^2 + O(\Delta x^2) \quad (B.9)$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (B.2) por 2 y restándole la ecuación (B.7), se obtiene al despejar u_{xx} :

$$u_{xx} = (u_{m-2,n,k} - 2u_{m-1,n,k} + u_{m,n,k}) / \Delta x^2 + O(\Delta x) \quad (B.10)$$

Como puede observarse, la ecuación (B.9) es superior a la ecuación (B.10) al considerarse el error introducido. También, debido al hecho de que las ecuaciones parabólicas carecen de segunda derivada en la dirección considerada, la ecuación (B.10) no se utiliza. Para poder obtener expresiones para derivadas de orden mayor que el segundo, es necesario introducir mayor número de puntos de la malla.

Para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico, frecuentemente es necesario introducir incrementos variables en la coordenada apropiada, con la finalidad de acortar el tiempo de computación y concentrarse, con ello, al evento crítico del fenómeno. En el caso concreto analizado en este trabajo del proceso transitorio de ignición, el incremento en el tiempo puede ser grande hasta el tiempo correspondiente a la aparición del punto adiabático sobre la placa. Sin embargo, entre este tiempo de formación de la flama, el incremento en tiempo necesita ser pequeño, a fin de reducir los problemas de convergencia en las iteraciones. Para ello, es necesario definir la primera derivada de la función con diferencias laterales de tres puntos a incrementos diferentes. Así, sea la expansión de Taylor de la función u , dados los incrementos Δx_1 y Δx_2 , donde Δx_1 corresponde al inter-

valo anterior y Δx_2 al incremento presente:

$$u_{m-1,n,k} = u_{m,n,k} - \Delta x_1 u_x + \Delta x_1^2 / 2! u_{xx} - \Delta x_1^3 / 3! u_{xxx} + \dots \quad (B.11)$$

$$u_{m-2,n,k} = u_{m,n,k} - (\Delta x_1 + \Delta x_2) u_x + (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 / 2! u_{xx} - (\Delta x_1 + \Delta x_2)^3 / 3! u_{xxx} + \dots \quad (B.12)$$

Multiplicando la ecuación (B.11) por $A = (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 / (\Delta x_2)^2$ y restándole la ecuación (B.12) se tiene:

$$A u_{m-1,n,k} - u_{m-2,n,k} = (A-1) u_{m,n,k} - (A \Delta x_2 - \Delta x_1 - \Delta x_2) u_x + O(|\Delta x_1|^3 + |\Delta x_2|^3) \quad (B.13)$$

Despejando u_x , después de ordenar términos, se obtiene:

$$u_x = \left\{ (Rx+2) / (Rx+1) u_{m-2,n,k} - (Rx+1) / Rx u_{m-1,n,k} + 1 / (Rx^2 + Rx) u_{m,n,k} \right\} / \Delta x_2 + O(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2) \quad (B.14)$$

donde $Rx = \Delta x_1 / \Delta x_2$

El error de discretización introducido es del orden del cuadrado del incremento mayor entre Δx_1 y Δx_2 .

Al utilizar las diferencias centrales en la dirección "elíptica" y diferencias laterales en la dirección "parabólica", no existen problemas de convergencia y el error de discretización es del orden de (Carnahan et al, 1969):

$$\text{error} \sim ((\Delta x)^2 + (\Delta \tau)^2)$$

El incremento crítico en el problema de ignición en un flujo de capa límite, se da en la coordenada longitudinal ζ , también denominada el primer número de Damköhler. Por un lado, grandes incrementos en ζ conducen a la realización de un mayor número de ite-

raciones para obtener una convergencia en la solución. Por otro lado, para incrementos pequeños en ζ , es necesario calcular mayor número de puntos. En ambos casos, el tiempo de computación tenderá a aumentar, existiendo así un incremento óptimo. Para analizar este problema, se escogió un campo fijo en el espacio (ζ, η) . Al mismo tiempo, se hicieron diferentes cálculos con diferentes valores de la relación $\Delta\zeta/\zeta_a$, donde ζ_a corresponde a la distancia adimensional desde el borde de ataque hasta el punto adiabático. Los resultados de estos cálculos se muestran en las figuras (B.1), (B.2) y (B.3). La figura (B.1) muestra el número total de iteraciones N_i , como una función de la relación $\Delta\zeta/\zeta_a$. En esta figura se observa un mínimo en el número de iteraciones, para un valor de $\Delta\zeta/\zeta_a = 0.15$. Para reforzar ésto, la figura (B.2) muestra el tiempo total de computación en la unidad procesadora central (CPU), como una función de $\Delta\zeta/\zeta_a$. También se observa en esta figura que para un valor de $\Delta\zeta/\zeta_a = 0.15$ se obtiene un mínimo en el tiempo de computación, lo cual indica la dependencia de dicho tiempo de computación en el número total de iteraciones. Por último, la figura (B.3) muestra las posiciones ζ_a/ζ_{a0} , ζ_i/ζ_{a0} y ζ_f/ζ_{a0} como una función de la relación $\Delta\zeta/\zeta_{a0}$. Aquí, ζ_{a0} corresponde al valor de ζ_a para el límite $\Delta\zeta = 0$. Como puede observarse en dicha figura, para valores del parámetro $\Delta\zeta/\zeta_{a0}$ aún mayores que 0.15, la exactitud en el cálculo de las tres distancias características es aceptable. Por todas estas razones, se escogió el valor de $\Delta\zeta/\zeta_a = 0.15$, para los cálculos del proceso de ignición.

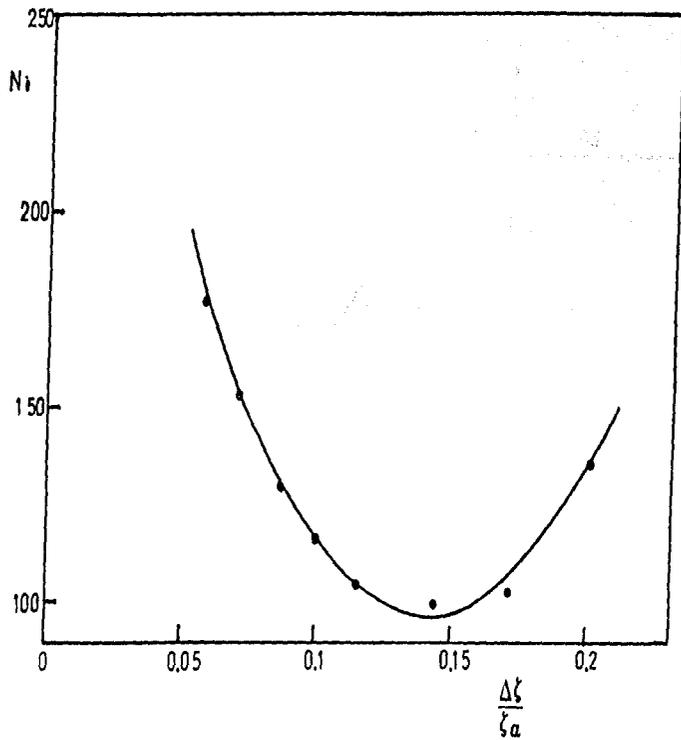


Fig. (3.1) Número total de iteraciones N_i , como una función de la relación $\Delta \xi / \xi a$ necesarias para el cálculo del proceso de ignición en un espacio (τ, η) fijo.

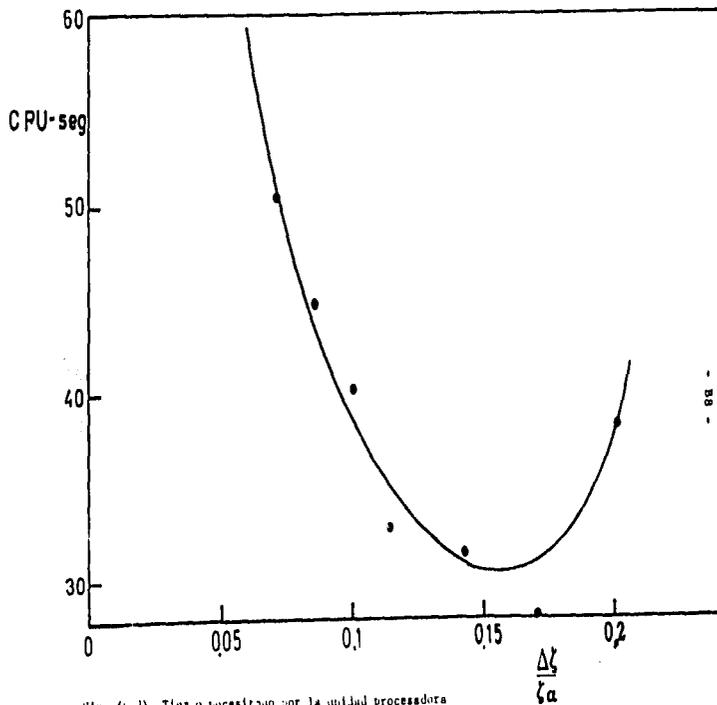


Fig. (5.2) Tiempo necesario por la unidad procesadora central, en calcular el proceso de ignición en un espacio (t, n) fijo, como una función de la relación $\Delta t/\epsilon a$.

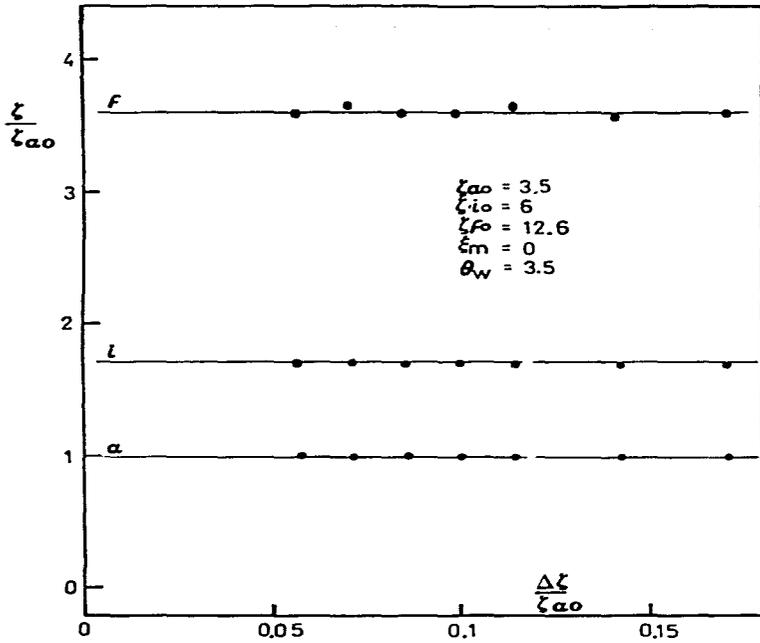


Fig. (B.3) Cálculo de las tres distancias características del proceso de ignición como una función de la relación $\Delta t/\tau_0$.

A P E N D I C E C

ADIMENSIONALIZACION DE LAS ECUACIONES DE BALANCE

El conjunto de ecuaciones que gobiernan el proceso de ignición de una mezcla combustible gaseosa en una capa límite, generada al fluir a lo largo de una placa plana y tomando las suposiciones expuestas en el Capítulo III, son las siguientes:

balance de masa,

$$\rho_{\tau} + (\rho u)_{\alpha} + (\rho v)_{\beta} = 0 \quad (C.1)$$

balance de cantidad de movimiento,

$$\rho Du/D\tau = (\mu u_{\beta})_{\beta} - p_{\alpha} \quad (C.2)$$

$$\rho v_{\tau} = -p_{\beta} \quad (C.3)$$

balance de energía,

$$\rho C_p DT/D\tau = (\lambda T_{\alpha})_{\alpha} + (\lambda T_{\beta})_{\beta} + Dp/D\tau + u(u_{\beta})_{\beta}^2 - \sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha\alpha} \omega_{\alpha}^{\alpha} \quad (C.4)$$

balance másico del combustible,

$$\rho DY^F/D\tau = \omega^F + (\rho DY^F_{\alpha})_{\alpha} + (\rho DY^F_{\beta})_{\beta} \quad (C.5)$$

estado,

$$p = \rho RT \sum_{\alpha=1}^N Y^{\alpha} / W^{\alpha} \quad (C.6)$$

El sistema de ecuaciones se reduce introduciendo la función de corriente $\psi(x, y, \tau)$, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \rho u &= \psi_{\beta} \\ \rho v &= -(\psi_{\alpha} + \int_0^y \rho_{\tau} dy) \end{aligned} \quad (C.7)$$

donde se satisface automáticamente la ecuación de balance global de masa. Con ésto, las variables dependientes son:

$$\psi, p, T, Y^F$$

Se definen estas variables adimensionales de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f &= \psi / \sqrt{2x\rho_\infty u_\infty} \\ P &= p/p_\infty \\ \theta &= T/T_\infty \\ m_F &= Y^F/Y_\infty^F \end{aligned} \quad (C.8)$$

Se introducen a continuación nuevas coordenadas definidas como:

$$\zeta = z_m x/L; \quad \eta = \sqrt{u_\infty/2\rho_\infty u_\infty x} \int_0^y \rho dy; \quad \tau = z_m u_\infty \tau/L \quad (C.9)$$

$$\text{donde: } z_m = L \nu^{FBT_\infty^a} (Y_\infty^F)^{aF-1} (Y_\infty^O)^a C_{\rho_\infty}^{s-1} / C u_\infty (W^F)^{aF-1} (W^O)^{aO} \quad (C.10)$$

Por la regla de la cadena, se obtiene las siguientes relaciones:

$$q_x = z_x q_\zeta + \eta_x q_\eta = z_m/L (q_\zeta + (\sqrt{u_\infty L/2\rho_\infty u_\infty} z_\zeta I_x - n/2\zeta) q_\eta) \quad (C.11)$$

$$q_y = \eta_y q_\eta = \rho \sqrt{u_\infty/2x\rho_\infty u_\infty} q_\eta \quad (C.12)$$

$$q_\zeta = \tau_\zeta q_\tau + \eta_\zeta q_\eta = z_m u_\infty / L (q_\tau + \sqrt{L/2\rho_\infty u_\infty} z_\zeta I_\tau q_\eta) \quad (C.13)$$

Las componentes cartesianas de la velocidad, resultan ser:

$$u = u_\infty f_\eta \quad (C.14)$$

$$v = -1/\rho \sqrt{\rho_\infty u_\infty} / \sqrt{2x} \{ f + 2\zeta f_\zeta + (\sqrt{2u_\infty x/\rho_\infty u_\infty} I_x - n) f_\eta \} - I_\zeta / \rho \quad (C.15)$$

$$\text{donde: } I = \int_0^y \rho dy$$

Ecuación de balance transversal de cantidad de movimiento

La ecuación (3.27) representa la relación de balance transversal de la cantidad de movimiento. Aplicando las transformaciones (C.11) a (C.13), resulta el primer término dado por:

$$\rho v_{\zeta} = -\sqrt{\rho_{\infty} u_{\infty} u_{\infty}^2 \zeta_m^2 / 2 \zeta L^2} (f_{\tau} + 2 \zeta f_{\tau \zeta} - n f_{\tau \eta} + \phi_1) \quad (C.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sqrt{L / 2 u_{\infty} \rho_{\infty} u_{\infty} \zeta \zeta_m} (2 \zeta f_{\eta \zeta} I_{\zeta} + \sqrt{2 u_{\infty} x / \rho_{\infty} u_{\infty}} f_{\eta \eta} I_x I_{\zeta} - n f_{\eta \eta} I) \\ & + \sqrt{2 u_{\infty} x / \rho_{\infty} u_{\infty}} f_{\tau \eta} I_x + \sqrt{2 L^2 \zeta / u_{\infty}^2 \zeta_m u_{\infty}^2 \zeta_m^2} I_{\zeta \zeta} + \sqrt{2 L^2 \zeta / u_{\infty} \rho_{\infty} u_{\infty}^2 \zeta_m^2} f_{\eta} I_{\zeta \tau} \\ & - 1 / \rho_{\infty} L / u_{\infty} \zeta_m (f + 2 \zeta f_{\zeta} + (\sqrt{2 x u_{\infty} / \rho_{\infty} u_{\infty}} I_x - n) f_{\eta} + \sqrt{2 x / u_{\infty} \rho_{\infty} u_{\infty}} I_{\zeta}) \end{aligned} \quad (C.17)$$

El término de la derecha de la ecuación (3.27) se transforma en:

$$P_y = P_{\infty} \rho \sqrt{u_{\infty} / 2 x \rho_{\infty} u_{\infty}} P_{\eta} \quad (C.18)$$

Así, la ecuación (3.27) se transforma en:

$$P_{\eta} = u_{\infty} \rho_{\infty} u_{\infty} \zeta_m / L P_{\infty} \rho (f_{\tau} + 2 \zeta f_{\tau \zeta} - n f_{\tau \eta} + \phi_1) \quad (C.19)$$

La presión en cualquier punto está dada por:

$$P = 1 - \int_{\eta}^{\infty} P_{\eta} d\eta \quad (C.20)$$

Ecuación de balance longitudinal de cantidad de movimiento

La ecuación de balance longitudinal de la cantidad de movimiento viene dada por la ecuación (3.26). Desarrollando la transformación término a término, éstos resultan ser:

$$\rho u_{\tau} = \rho c_m u_m^2 / 2Lc (2cf_{\tau\eta} + \sqrt{2x/u_m \rho_m \mu_m} f_{\eta\eta} I_{\tau}) \quad (C.21)$$

$$\rho u_x = \rho c_m u_m^2 / 2Lc (\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} f_{\eta} f_{\eta\eta} I_x - \eta f_{\eta} f_{\eta\eta} + 2cf_{\eta} f_{\zeta\eta}) \quad (C.22)$$

$$\rho v_y = \rho c_m u_m^2 / 2Lc (-\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} f_{\eta} f_{\eta\eta} I_x + \eta f_{\eta} f_{\eta\eta} - ff_{\eta\eta} - 2cf_{\zeta} f_{\eta\eta} - \sqrt{2x/u_m \rho_m \mu_m} f_{\eta\eta} I_{\tau}) \quad (C.23)$$

$$P_x = P_m c_m / 2Lc (2cP_{\zeta} + (\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} I_x - \eta) P_{\eta}) \quad (C.24)$$

$$(u u_y)_y = \rho c_m u_m^2 / 2Lc (ef_{\eta\eta})_{\eta} \quad (C.25)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.26) se transforma en:

$$(ef_{\eta\eta})_{\eta} + ff_{\eta\eta} - 2c(f_{\tau\eta} + f_{\eta} f_{\zeta\eta} - f_{\zeta} f_{\eta\eta}) + p_m / \rho u_m^2 (2cP_{\zeta} + (\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} I_x - \eta) P_{\eta}) \quad (C.26)$$

Utilizando la ecuación (C.19), la ecuación (C.26) resulta ser:

$$(ef_{\eta\eta})_{\eta} + ff_{\eta\eta} - 2c(f_{\tau\eta} + f_{\eta} f_{\zeta\eta} - f_{\zeta} f_{\eta\eta}) + \delta^2 A_1 (f_{\tau} + 2cf_{\tau\zeta} - \eta f_{\tau\eta} + \phi_1) \quad (C.27)$$

donde: $\delta = \sqrt{\rho_m \mu_m c_m / u_m L \rho^2}$ (C.28)

y A_1 el operador definido por:

$$A_1(q) = -2c \int_{\eta}^{\infty} q_{\zeta} d\eta + (\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} I_x - \eta) q \quad (C.29)$$

Ecuación de balance másico del combustible

La ecuación de balance másico del combustible viene dada por la ecuación (3.29). Desarrollando la transformación término a término, éstos resultan ser:

$$\rho Y_c^F = \rho c_m Y_m^F u_\infty / 2Lc \left(2cm_{F1} + \sqrt{2x/u_\infty \rho_\infty \mu_\infty} m_{F\eta} I_c \right) \quad (C.30)$$

$$\rho u Y_x^F = \rho c_m Y_m^F u_\infty / 2Lc \left(\sqrt{2u_\infty x / \rho_\infty \mu_\infty} I_x m_{F\eta} - \eta m_{F\eta} + 2cm_{Fz} \right) f_\eta \quad (C.31)$$

$$\rho v Y_y^F = \rho c_m Y_m^F u_\infty / 2Lc \left(-\sqrt{2u_\infty x / \rho_\infty \mu_\infty} f_\eta m_{F\eta} I_x + \eta f_\eta m_{F\eta} - 2cf_\zeta m_{F\eta} - \sqrt{2x/u_\infty \rho_\infty \mu_\infty} m_{F\eta} I_c \right) \quad (C.32)$$

$$(\rho DY_y^F)_y = \rho c_m Y_m^F u_\infty / 2Lc \left(f / Sc_{m_{F\eta}} \right)_\eta \quad (C.33)$$

$$\begin{aligned} (\rho DY_x^F)_x = u_\infty c_m^2 Y_m^F / 2L^2 c \left(2c(F/Sc_{m_{Fz}})_\zeta - \eta(F/Sc_{m_{Fz}})_\eta + 3\eta/2c F/Sc_{m_{F\eta}} \right. \\ \left. + \eta^2/2c (F/Sc_{m_{F\eta}})_\zeta + \phi_2 \right) \quad (C.34) \end{aligned}$$

$$u^F = -v^F B T_\infty^a T(y_m^F)^{a_F-1} (y_m^0)^{a_O} \rho_\infty^s / (W^F)^{a_F-1} (W^O)^{a_O} r^{-1} p^s m^s \exp(-\theta_B/\theta) \quad (C.35)$$

donde: $\phi_2 = \sqrt{2u_\infty x / \rho_\infty \mu_\infty} \left((F/Sc_{m_{Fz}})_\zeta + (F/Sc_{m_{F\eta}})_\zeta + (L I_{xx} / I_x - 1/c) F/Sc_{m_{F\eta}} \right. \\ \left. + (\sqrt{u_\infty / 2x \rho_\infty \mu_\infty} I_x - \eta/c) (F/Sc_{m_{F\eta}})_\eta \right) I_x \quad (C.36)$

$$F = F(\theta) = u/u_\infty \quad (C.37)$$

La ecuación adimensional de balance másico del combustible se expresa finalmente como:

$$\begin{aligned} (\zeta/Sc_{m_{F\eta}})_\eta + f m_{F\eta} + \delta^2 P/\theta \left(2c(F/Sc_{m_{Fz}})_\zeta - \eta(F/Sc_{m_{Fz}})_\eta - \eta(F/Sc_{m_{F\eta}})_\zeta \right. \\ \left. + 3\eta/2c F/Sc_{m_{F\eta}} + \eta^2/2c (F/Sc_{m_{F\eta}})_\zeta + \phi_2 \right) = 2c(m_{F1} + f_\eta m_{Fz} - f_\zeta m_{F\eta} \\ + C\theta^r p^s - 1) m_F^s \exp(-\theta_B/\theta) \quad (C.38) \end{aligned}$$

Ecuación de balance de la energía

La ecuación de balance de la energía está dada por la

ecuación (3.28). Desarrollando la transformación término a término, estos resultan ser:

$$\rho T_z = \rho c_m u_m T_m / 2Lc \left(2c\theta_z + \sqrt{2x/u_m \rho_m \mu_m \theta_n} I_z \right) \quad (C.39)$$

$$\rho u T_x = \rho c_m u_m T_m / 2Lc \left(\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} I_x - n\theta_n + 2c\theta_z \right) f_n \quad (C.40)$$

$$\rho v T_y = \rho c_m u_m T_m / 2Lc \left(-\sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} f_n I_x + n f_n \theta_n - f_n \theta_n - 2c f_n \theta_n - \sqrt{2x/u_m \rho_m \mu_m \theta_n} I_z \right) \quad (C.41)$$

$$(\lambda / C_p T_y)_y = \rho c_m u_m T_m / 2Lc \left(i / Pr \theta_n \right)_n \quad (C.42)$$

$$(\lambda / C_p T_x)_x = c_m^2 u_m T_m / 2L^2 c \left\{ 2c(F/Pr \theta_z)_z - n(F/Pr \theta_z)_n + 3n/2cF/Pr \theta_n + n^2/2c(F/Pr \theta_n)_n + \phi_1 - n(F/Pr \theta_n)_z \right\} \quad (C.43)$$

$$1/C_p Dp/Dx = p_m u_m c_m / 2Lc_p c \left(2cP_z + 2c f_n P_z - f P_n - f_z P_n \right) \quad (C.44)$$

$$u/C_p (u_y)^2 = u_m^3 \rho c_m / 2Lc_p c \left(f_{nn} \right)^2 \quad (C.45)$$

$$1/C_p \sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha} \omega^{\alpha} - \gamma F u_m \rho_m c_m \left(\sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha} \omega^{\alpha} W^{\alpha} \right) / C_p W^F L v^F e^{\tau} - 1 p_m^s \exp(-\theta_a / \theta) \quad (C.46)$$

donde: $\phi_1 = \sqrt{2u_m x / \rho_m \mu_m} \left\{ (F/Pr \theta_z)_n + (F/Pr \theta_n)_z + (LI_{xx} / c_m I_x - 1/c) F/Pr \theta_n + (\sqrt{u_m L / 2 \rho_m \mu_m} c_m I_x - n/c) (F/Pr \theta_n)_n \right\} I_x$ (C.47)

La ecuación adimensional de balance de energía se expresa finalmente como:

$$\begin{aligned} & (i/Pr \theta_n)_n + f \theta_n + P \delta^2 / c \left\{ 2c(F/Pr \theta_z)_z - n(F/Pr \theta_n)_z - n(F/Pr \theta_z)_n \right. \\ & \left. + 3n/2cF/Pr \theta_n + n^2/2c(F/Pr \theta_n)_n + \phi_1 \right\} = 2c \left\{ \theta_z + f_n \theta_z - f_z \theta_n \right. \\ & \left. - C \tau \theta^s P^s - \frac{1}{P} \exp(-\theta_a / \theta) \right\} - i Ec (f_{nn})^2 - \delta^2 Ec \Lambda_2 (f_z + 2c f_{zz} - n f_{zn} + \phi_1) \quad (C.48) \end{aligned}$$

donde: $E_c = u_{\omega}^2 / C_p T_{\omega}$

$$\bar{z} = \left(\sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha} \omega^{\alpha} v^{\alpha} \right) \psi_{\omega}^F / C_p T_{\omega} W^F v^F$$

y el operador Λ_2 se define como:

$$\Lambda_2(q) = 2c \int_{\eta}^{\infty} q_{\tau} d\eta + 2c f_{\eta} \int_{\eta}^{\infty} q_{\zeta} d\eta + (f + f_{\eta}) q \quad (C.49)$$

A P E N D I C E D

PROCESOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR
SIN REACCION QUIMICA

D.1 Introducción

En este apéndice se trata una serie de problemas de transferencia de calor sin reacción química, tanto en procesos permanentes como en transitorios, que se relacionan directamente con el objeto de estudio de esta tesis. Estos problemas se estudian con la finalidad de poder comparar los resultados obtenidos con y sin reacciones químicas, y así poder deducir la influencia de éstas en el proceso estudiado. Los problemas analizados se enlistan a continuación:

- 1) Efecto de la variación longitudinal de la temperatura a lo largo de la placa.
- 2) Proceso transitorio generado por el cambio repentino en la temperatura de la placa.
- 3) Enfriamiento convectivo laminar de una placa plana delgada.
- 4) Efecto de la resistencia térmica transversal de la placa en el fenómeno global de transferencia de calor.
- 5) Efecto de la conducción longitudinal de calor en la fase gaseosa.

D.2 Efecto de la variación longitudinal de la temperatura en la placa

Se tiene un flujo convectivo laminar permanente, sobre una placa plana cuya temperatura varía a lo largo de ella. Las condiciones de flujo libre corresponden a una velocidad u_∞ y una temperatura T_∞ . Las ecuaciones que gobiernan este proceso, con todas las simplificaciones apuntadas en el capítulo III, son:

$$f''' + ff'' = 0 \quad (D.1)$$

$$\theta_{\eta\eta} / Pr + f\theta_\eta = 2\zeta f'\theta_\zeta \quad (D.2)$$

con sus condiciones de frontera dadas por:

$$\begin{aligned} f - f' = 0, \quad \theta = \theta_w(\zeta) & \quad ; \text{ en } \eta = 0 \\ f' = \theta = 1 & \quad ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (D.3)$$

donde: $\zeta = x/L$

Para este problema, es preferible escoger otra forma adimensional para la temperatura dada por:

$$\bar{\theta} = (T - T_\infty) / (T_w(0) - T_\infty) \quad (D.4)$$

De esta forma, la ecuación de balance de la energía es:

$$\bar{\theta}_{\eta\eta} / Pr + f\bar{\theta}_\eta = 2\zeta f'\bar{\theta}_\zeta \quad (D.5)$$

con las condiciones de frontera dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = \bar{\theta}_w(\zeta) & \quad ; \text{ en } \eta = 0 \\ \bar{\theta} = 0 & \quad ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (D.6)$$

Método de solución

La ecuación de Blasius (D.1) se resuelve por el método de Runge-Kutta de cuarto orden, mediante iteraciones para encontrar su valor correspondiente al flujo libre. El valor límite de η que se toma para la condición de flujo libre η_L , es una función del número de Prandtl. Los valores tomados para η_L son los siguientes:

$$\begin{aligned}\eta_L &= 10 \text{ para } Pr=0.1 \\ \eta_L &= 5 \text{ para } Pr=1 \\ \eta_L &= 3 \text{ para } Pr=5\end{aligned}\tag{D.7}$$

La ecuación de balance de la energía (D.5) se resolvió por dos métodos numéricos. El primer método utilizado fue el de Crank-Nicolson, mientras que en el segundo se aplicó la técnica de Runge-Kutta a las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas a través del método de separación de variables.

Para resolver la ecuación (D.5) mediante el método de Crank-Nicolson (Carnahan et al, 1969), se reemplazan las derivadas por su equivalente en diferencias finitas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{v}_z &= (\bar{v}_{m+1,n} - \bar{v}_{m,n}) / \Delta z \\ \bar{v}_\eta &= (\bar{v}_{m+1,n+1} - \bar{v}_{m+1,n-1} + \bar{v}_{m,n+1} - \bar{v}_{m,n-1}) / 4\Delta\eta \\ \bar{v}_{\eta\eta} &= (\bar{v}_{m+1,n+1} - 2\bar{v}_{m+1,n} + \bar{v}_{m+1,n-1} + \bar{v}_{m,n+1} - 2\bar{v}_{m,n} + \bar{v}_{m,n-1}) / 2(\Delta\eta)^2\end{aligned}\tag{D.8}$$

y las variables calculadas en el punto $(m+1/2, n)$. Esto es:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= (\bar{v}_{m+1,n} + \bar{v}_{m,n}) / 2 \\ \bar{v}f &= f_n (\bar{v}_{m+1,n} + \bar{v}_{m,n}) / 2\end{aligned}$$

$$\zeta = (m-1/2)\Delta\zeta$$

donde los subíndices m, n son enteros que corresponden a un punto en el espacio (ζ, η) . Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (D.5), se obtiene al despejar $\bar{v}_{m+1, n+1}$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{m+1, n+1} = & (2\bar{v}_{m+1, n} - \bar{v}_{m+1, n-1} - \bar{v}_{m, n+1} + 2\bar{v}_{m, n} - \bar{v}_{m, n-1} - \text{Pr}f_n \Delta\eta / 2 \cdot \\ & (-\bar{v}_{m+1, n+1} + \bar{v}_{m, n+1} - \bar{v}_{m, n}) + 4(m-1/2)\text{Pr}f_n' \Delta\eta^2 (\bar{v}_{m+1, n} \\ & \bar{v}_{m, n}) / (1+0.5\text{Pr}f_n \Delta\eta) \end{aligned} \quad (D.9)$$

teniendo en cuenta la linealidad de la ecuación (D.5), se utiliza una interpolación lineal, para satisfacer las condiciones del flujo libre.

Para comprobar los resultados, se utiliza paralelamente el método de separación de variables. Es sabido que la ecuación (D.5) posee una solución de la forma siguiente (Schlichting, 1968):

$$\bar{v} = \bar{v}_s(\eta) + \bar{v}_1(\eta)Z(\zeta) \quad (D.10)$$

Introduciendo esta relación en la ecuación (D.5), trae como resultado el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\bar{v}_1'' / \text{Pr} + f\bar{v}_1' = 0 \quad (D.11)$$

$$\bar{v}_1' / \text{Pr} + f\bar{v}_1' = 2af'\bar{v}_1 \quad (D.12)$$

$$a = Z'\zeta / Z \quad (D.13)$$

donde a es una constante numérica positiva. La solución de la ecuación (D.13) es:

$$Z = A\zeta^a \quad (D.14)$$

donde A es una constante numérica que puede ser absorbida por la función \bar{v}_1 . Las condiciones de frontera son, para este caso:

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 = 1, \quad \bar{v}_1 = (\bar{v}_w - 1)\zeta^{-a} \quad ; \quad \text{en } \zeta = 0 \\ \bar{v}_0 = \bar{v}_1 = 0 \quad ; \quad \text{cuando } \zeta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (D.15)$$

Las ecuaciones (D.11) y (D.12) se resuelven mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Los resultados numéricos se obtuvieron para el ejemplo concreto de una variación lineal de la temperatura en la placa, de la forma:

$$\bar{v}_w(\zeta) = 1 - \zeta \quad (D.16)$$

Esta variación lineal de la temperatura a lo largo de la pared nos permite poder utilizar ambos métodos de solución, para así poder comparar los resultados.

Los cálculos se hicieron para diferentes valores del número de Prandtl. La figura (D.1) muestra los perfiles de temperaturas adimensionales \bar{v} como una función de η , para diferentes posiciones a lo largo de la pared, para $Pr=0.1$, calculados con ambos métodos. La línea continua representa la solución obtenida por diferencias finitas (Crank-Nicolson) y las cruces la obtenida por el método de separación de variables. Las figuras (D.2) y (D.3) muestran los perfiles de temperaturas, para $Pr=1$ y $Pr=5$, respectivamente. Como puede observarse de dichas figuras, alrededor del punto $\zeta=0.6$ se tiene un cambio de dirección del flujo de calor hacia la placa, notándose después de este punto la existencia de un máximo de temperatura

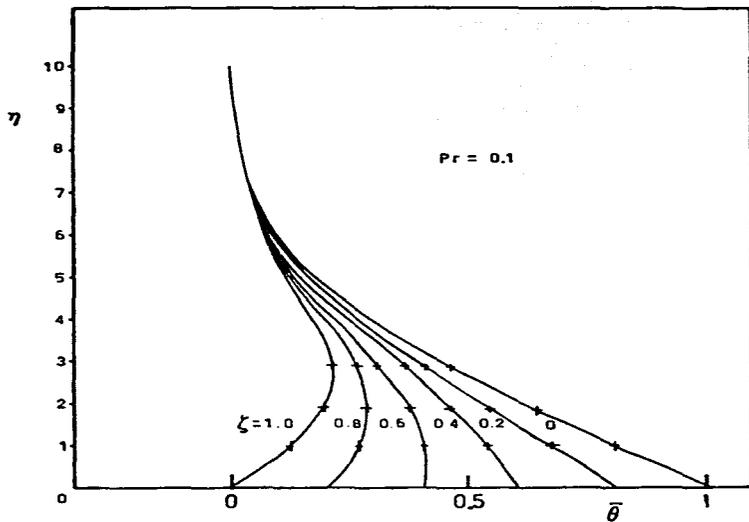


Fig. (D.1) Perfiles de temperaturas adimensionales a diferentes posiciones longitudinales de la placa, para una variación lineal de la temperatura de la misma y $Pr = 0.1$

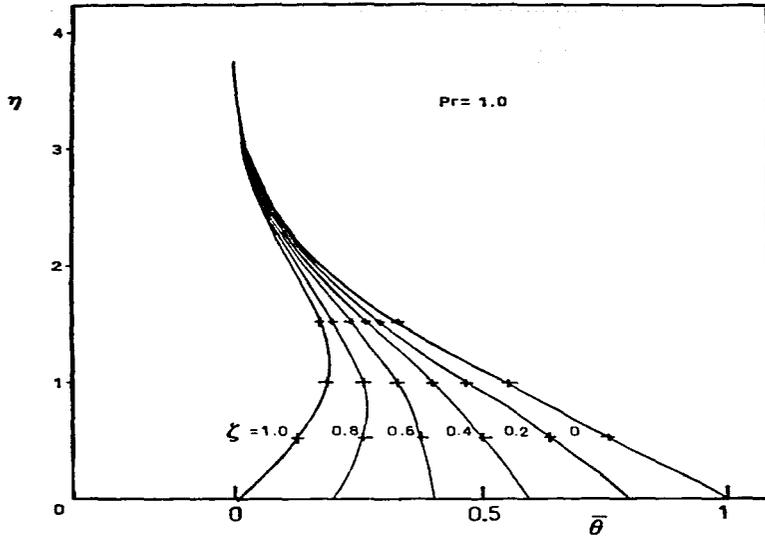


Fig. (D.2) Perfiles de temperaturas adimensionales a diferentes posiciones longitudinales de la placa para una variación lineal de la temperatura de la misma y $Pr = 1$.

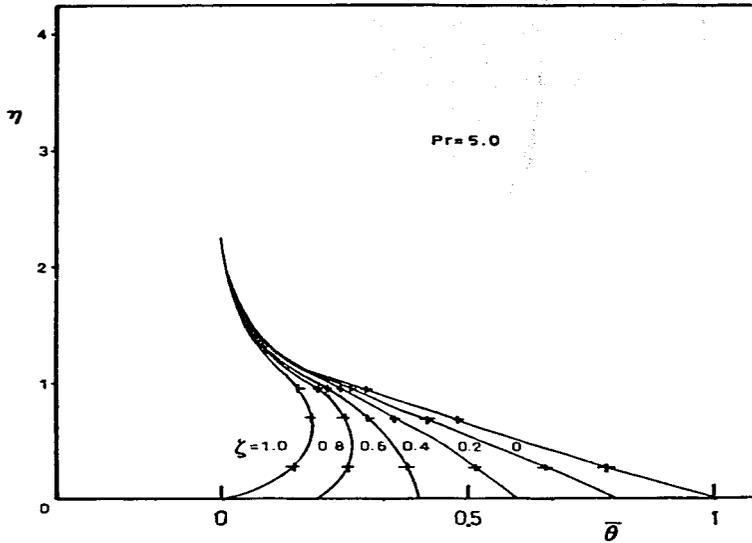


Fig. (D.3) Perfiles de temperaturas adimensionales a diferentes posiciones longitudinales de la placa, para una variación lineal de la temperatura de la miema y $Pr = 5$.

en la fase gaseosa.

D.3 Proceso transitorio de transferencia de calor causado por el cambio repentino de la temperatura en la placa

Se tiene un flujo de un gas inerte sobre una placa plana, cuya temperatura varía repentinamente en forma de escalón. Las condiciones de flujo libre corresponden a una velocidad u_∞ y a una temperatura T_∞ . La temperatura de la placa cambia de un valor de T_1 un valor de T_2 en el instante $t = 0$, de tal forma que las condiciones iniciales consideran una temperatura uniforme del gas. Las ecuaciones adimensionales de balance son, para este problema:

$$f'''+ff''=0 \quad (D.1)$$

$$\bar{\theta}_{,\eta\eta}/Pr+f\bar{\theta}_{,\eta}=2\tau(\bar{v}_\tau+f'\bar{v}_\tau) \quad (D.17)$$

donde: $\bar{\theta}=(T-T_\infty)/(T_2-T_\infty)$

$$\tau=u_\infty t/L$$

Para la ecuación de balance de la cantidad de movimiento (D.1), se tienen las siguientes condiciones de frontera a cualquier tiempo:

$$\begin{aligned} f=f''=0 & \quad ; \text{ en } \eta=0 \\ f'=1 & \quad ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (D.18)$$

Para la ecuación de balance de la energía (D.17), al tiempo $\tau \geq 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}=1 & \quad ; \text{ en } \eta=0 \\ \bar{\theta}=0 & \quad ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (D.19)$$

La temperatura adimensional \bar{v} es uniforme al tiempo $\tau < 0$. Esto es:

$$\bar{v}=0 \quad (D.20)$$

Para la solución de la ecuación (D.17), con las condiciones iniciales y de frontera dadas por las ecuaciones (D.19) y (D.20), se desarrolló un programa de computadora basado en el método de diferencias finitas. Las derivadas en ζ y en η se tomaron, al nuevo tiempo de cálculo, de acuerdo al esquema de Crank-Nicolson, dado por las ecuaciones (D.8):

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\zeta} &= (\bar{v}_{m+1,n,k+1} - \bar{v}_{m,n,k+1}) / \Delta \zeta \\ \bar{v}_{\eta} &= (\bar{v}_{m+1,n+1,k+1} - \bar{v}_{m+1,n-1,k+1} + \bar{v}_{m,n+1,k+1} - \bar{v}_{m,n-1,k+1}) / 4\Delta \eta \quad (D.21) \\ \bar{v}_{\eta\eta} &= (\bar{v}_{m+1,n+1,k+1} - 2\bar{v}_{m+1,n,k+1} + \bar{v}_{m+1,n-1,k+1} + \bar{v}_{m,n+1,k+1} \\ &\quad - 2\bar{v}_{m,n,k+1} + \bar{v}_{m,n-1,k+1}) / 2(\Delta \eta)^2 \end{aligned}$$

donde los subíndices m, n, k corresponden a un punto en el espacio (ζ, η, τ) . La derivada en tiempo se reemplaza por la expresión siguiente (apéndice B):

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\tau} &= (\bar{v}_{m,n,k-1} - 4\bar{v}_{m,n,k} + 3\bar{v}_{m,n,k+1} + \bar{v}_{m+1,n,k-1} - 4\bar{v}_{m+1,n,k} \\ &\quad + 3\bar{v}_{m+1,n,k+1}) / 4\Delta \tau \quad (D.22) \end{aligned}$$

Introduciendo estas relaciones en la ecuación (D.17), se obtiene al despejar $\bar{v}_{m+1,n+1,k+1}$:

$$\bar{v}_{m+1,n+1,k+1} = (4Pr(m-1/2)\Delta \eta^2 \Delta \zeta (f_n^* A / \Delta \zeta - B / 4\Delta \tau) - Pr f_n \Delta \eta C / 2 - D) \quad (D.23)$$

donde: $A = \bar{v}_{m+1,n,k+1} - \bar{v}_{m,n,k+1}$

$$B = \bar{v}_{m,n,k-1} - 4\bar{v}_{m,n,k} + 3\bar{v}_{m,n,k+1} + \bar{v}_{m+1,n,k-1} - 4\bar{v}_{m+1,n,k} + 3\bar{v}_{m+1,n,k+1}$$

$$C = -\bar{\theta}_{m+1, n-1, k+1} + \bar{\theta}_{m, n+1, k+1} - \bar{\theta}_{m, n-1, k+1} \quad (D.24)$$

$$D = -2\bar{\theta}_{m+1, n, k+1} + \bar{\theta}_{m+1, n-1, k+1} + \bar{\theta}_{m, n-1, k+1} - 2\bar{\theta}_{m, n, k+1} + \bar{\theta}_{m, n+1, k+1}$$

Para el cálculo de la ecuación de balance de la energía (D.17) es necesario contar con un perfil de temperaturas cerca del borde de ataque ($\tau=0$). En este caso, la ecuación (D.17) se reduce a:

$$\bar{\theta}_{\eta\eta} + Prf' \bar{\theta}_{\eta} = 0 \quad (D.25)$$

Esta ecuación nos indica que para $\tau = 0$, el tiempo característico en el gas es despreciable, con lo que el perfil de temperaturas se ajusta instantáneamente a las condiciones de frontera a un tiempo dado. Esto es, para $\tau < 0$, el valor de $\bar{\theta}$ es uniforme:

$$\bar{\theta}(\tau < 0) = 0 \quad (D.26)$$

y cuando $\tau \geq 0$, el valor de $\bar{\theta}$ en regiones cercanas al borde de ataque se obtiene de la solución de la ecuación:

$$\bar{\theta}'' + Prf\bar{\theta}' = 0 \quad (D.27)$$

con las condiciones de frontera dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= 1 && ; \text{ en } \eta=0 \text{ y } \tau \geq 0 \\ \bar{\theta} &= 0 && ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (D.28)$$

La solución de la ecuación (D.27) se obtuvo mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con interpolación lineal al infinito.

Con la finalidad de introducir la coordenada longitudinal x en el tiempo adimensional, es de interés conocer solamente el perfil

de temperaturas en el borde de salida ($\tau=1$). Así:

$$\tau = u_w t / x \quad (D.29)$$

Las figuras (D.4), (D.5) y (D.6) muestran los perfiles de temperaturas adimensionales como una función de η , para diferentes valores del tiempo adimensional y números de Prandtl de 0.1, 1 y 5, respectivamente. En estas figuras se muestra claramente la influencia del número de Prandtl en el tiempo necesario en alcanzar su nuevo perfil de temperaturas de equilibrio. A menor número de Prandtl, estos tiempos son más cortos. La figura (D.7) muestra el flujo de calor adimensional en la pared, para diferentes valores del número de Prandtl, como una función del tiempo adimensional. Aquí, el flujo de calor adimensional está definido como q'/q'_p , dónde:

$$q' = (\theta_{\eta})_{\eta=0} / \sqrt{x} = (\theta_{\eta})_{\eta=0}, \tau=1 \quad (D.30)$$

siendo q'_p su valor en su estado permanente final, para el mismo valor de x . La figura (D.8) muestra finalmente la variación del flujo de calor adimensional como una función de $\tau/Pr^{1/n}$, con lo que se obtiene una sola curva para los tres números de Prandtl considerados. Se obtuvieron los siguientes valores para el exponente n :

$$\begin{array}{ll} n=4 & ; \text{ para } Pr=0.1 \\ n=3 & ; \text{ para } Pr=5 \end{array} \quad (D.31)$$

concordando este último valor del exponente, con el valor obtenido por Sucec (1977), quien utilizó métodos integrales en el análisis.

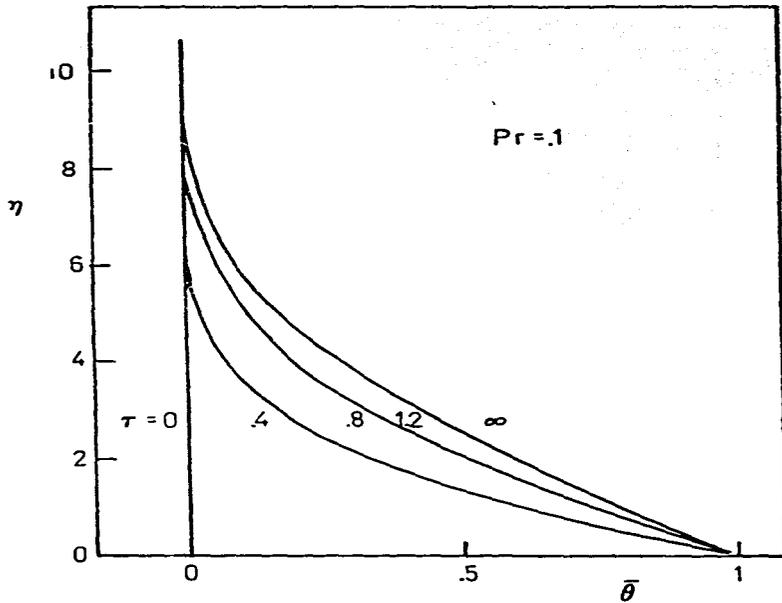


Fig. (D.4) Perfiles de temperaturas adimensionales a diferentes tiempos, para un cambio en forma de escalón en la temperatura de la placa y $Pr = .1$

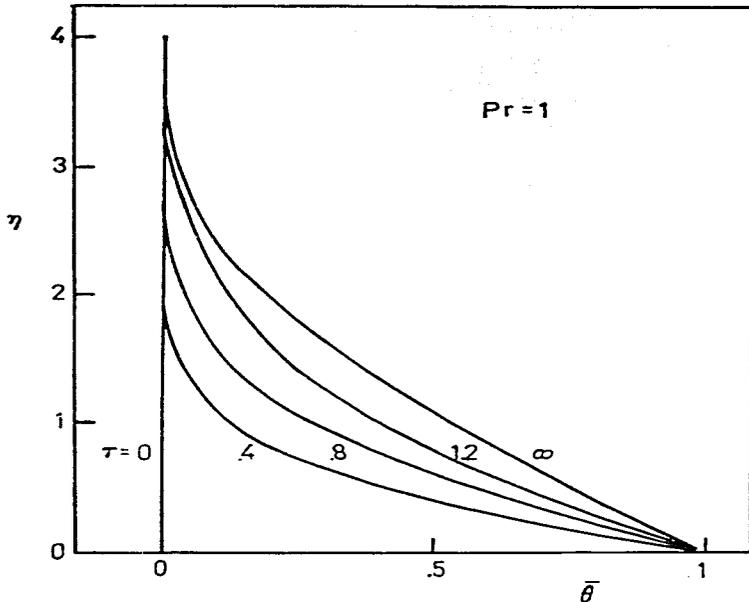


Fig. (D.5) Perfiles de temperaturas adimensionales a diferentes tiempos, para un cambio en forma de escalón en la temperatura de la placa y $Pr = 1$.

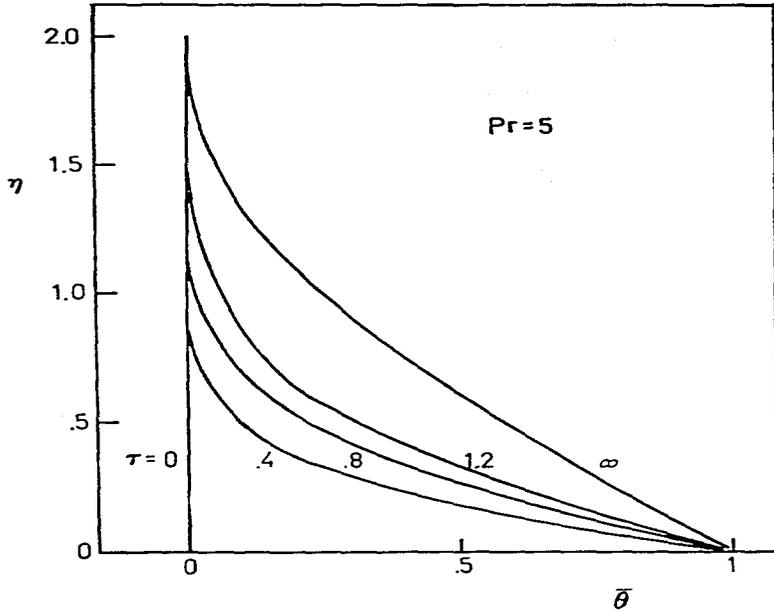


Fig. (D.6) Perfiles de temperaturas adimensionales a diferentes tiempos, para un cambio en forma de escalón en la temperatura de la placa y $Pr = 5$.

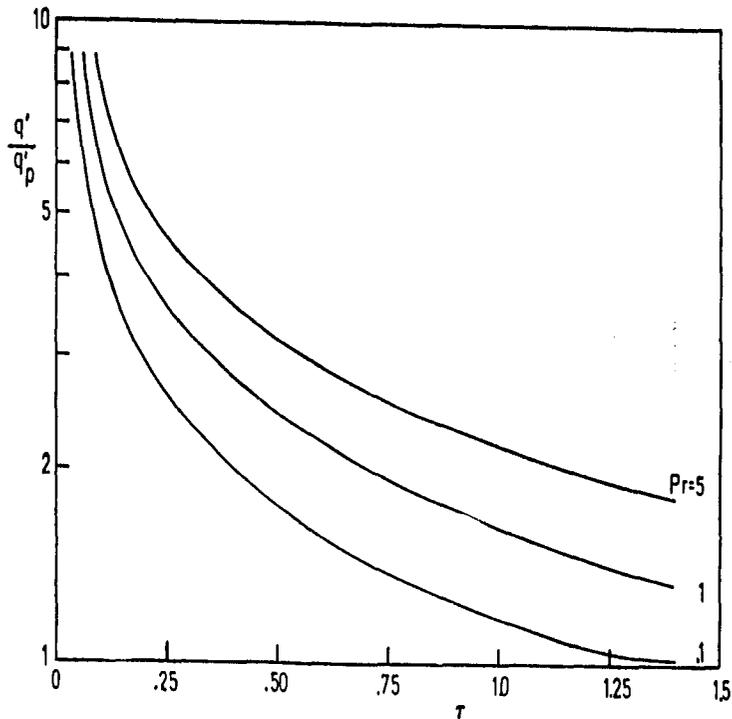


Fig. (D.7) Respuesta del flujo de calor adimensionalizado con el correspondiente al proceso permanente, como una función del tiempo adimensional, a diferentes números de Prandtl, debido al cambio en forma de escalón de la temperatura de la placa.

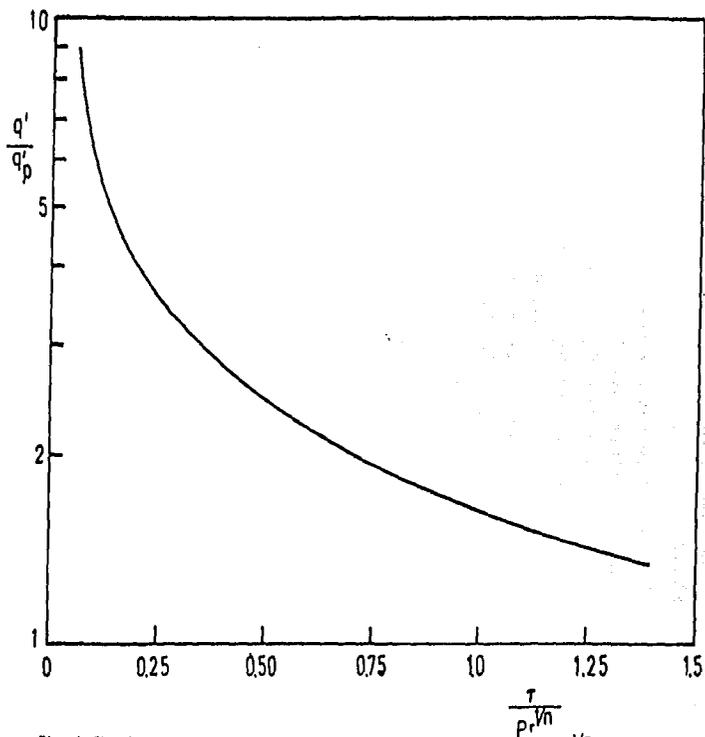


Fig. (D.8) Flujo de calor adimensional, como una función del parámetro $\tau / Pr^{1/n}$ debido al cambio en forma de escalón de la temperatura de la placa.

D.4 Enfriamiento convectivo laminar de una placa plana delgada

Con la finalidad de poder evaluar el efecto de la transferencia de calor sobre la temperatura de la placa, en la presente sección se estudia el proceso de enfriamiento de una placa plana expuesta a un flujo convectivo. Se tiene un flujo laminar a lo largo de ambos lados de una placa plana delgada, inicialmente a una temperatura T_{w0} . La velocidad del gas en el flujo libre es u_{∞} y su temperatura T_{∞} . El objetivo fundamental es el de calcular la rapidez de enfriamiento de dicha placa.

Las ecuaciones de balance para la fase gaseosa, son:

$$f'''+ff''=0 \quad (D.1)$$

$$\theta_{\eta\eta}/Pr + f\theta_{,\eta} = 2\zeta(\theta_{,\zeta} + f'\theta_{,\zeta}) \quad (D.17)$$

donde: $\theta = (T - T_{\infty}) / (T_{w0} - T_{\infty})$ (D.32)

La ecuación de balance de la energía para una placa plana delgada es:

$$\rho_w C_w \bar{v} T_{w,z} = 2(\lambda T_{y})_{y=0} + \bar{E} \lambda_w T_{w,xx} \quad (D.33)$$

donde $T_w(x, t)$ representa la temperatura de la placa y $T(x, y, t)$ la temperatura del fluido que se mueve a lo largo de ella. En forma adimensional, la ecuación (D.33) se escribe como:

$$\theta_{w\tau} = \alpha(\theta_{,\eta})_{\eta=0} / Pr \sqrt{\zeta} + \beta \theta_{w\zeta\zeta} \quad (D.34)$$

donde: $\alpha = C_p \sqrt{2L\rho_w \nu_w} / U_w / C_w \rho_w \bar{E}$

$\beta = \lambda_w / Lu = C_w \rho_w$ (D.35)

Solución para muy alta conductividad térmica ($\beta \rightarrow \infty$)

Primeramente se obtiene una solución para muy alta conductividad térmica de la placa, pudiéndose evaluar posteriormente la utilidad de dicha aproximación. Integrando la ecuación (D.34) se obtiene:

$$\int_0^1 \theta_{w\tau} d\zeta = \alpha / Pr \int_0^1 (\theta_{\eta})_{\eta=0} / \sqrt{\zeta} d\zeta + \beta \int_0^1 \theta_{w\zeta} d\zeta \quad (D.36)$$

y suponiendo que ambos extremos de la placa son adiabáticos, esto es:

$$\int_0^1 \theta_{w\zeta} d\zeta = 0 \quad (D.37)$$

la ecuación (D.36) se reduce a:

$$\int_0^1 \theta_{w\tau} d\zeta = \alpha / Pr \int_0^1 (\theta_{\eta})_{\eta=0} / \sqrt{\zeta} d\zeta \quad (D.38)$$

De la ecuación (D.34) se deduce que:

$$\theta_{w\zeta\zeta} = 0 \quad (D.39)$$

ya que $\beta \rightarrow \infty$. La solución de la ecuación (D.39) viene dada por:

$$\theta_w = \theta_{w1}(\tau) + \theta_{w2}(\tau)\zeta \quad (D.40)$$

Pero, aplicando las condiciones de adiabaticidad en los extremos de la placa, se deduce que la temperatura en la placa es solamente una función del tiempo. Esto es:

$$\theta_w = \theta_w(\tau) \quad (D.41)$$

La ecuación (D.38) se transforma en:

$$\theta_w^1 = \alpha / Pr \int_0^1 (\theta_n)_{n=0} / \sqrt{\zeta} d\zeta \quad (D.42)$$

Las ecuaciones (D.17) y (D.42) se calcularon numéricamente, para encontrar los perfiles de temperatura en la fase gaseosa y en la placa. La rapidez de cambio de la temperatura en la pared θ_w^1 depende principalmente de α y Pr . Altos valores para α representan una pequeña capacidad de almacenamiento de energía térmica de la placa, lo que trae como consecuencia un rápido enfriamiento. Por otro lado, bajos números de Prandtl representan una alta conductividad térmica del fluido y, por lo tanto, un rápido enfriamiento de la placa. Sin embargo, para valores realistas de los números adimensionales α y Pr , la rapidez de cambio de la temperatura en la placa resulta ser mucho menor que la rapidez de cambio de la temperatura en el fluido, al sujetarse a un cambio repentino en la temperatura de la superficie superior de la placa, lo cual se muestra en la sección (D.3). Esto implica que el perfil de temperaturas en el fluido se ajusta rápidamente a los valores instantáneos de la temperatura en la placa, cuya variación es más lenta. Esto hace posible la introducción de una aproximación quasi-estática para el análisis del proceso de enfriamiento. En otras palabras, el tiempo característico en el gas es mucho menor que el correspondiente en la placa. Los resultados numéricos mostraron, en apoyo a esta suposición, que el término $2\theta_w^1$ es mucho menor comparados con los demás términos de la ecuación (D.17). Debido a que la temperatura en la placa es independiente de ζ , se tiene que los perfiles de temperaturas en el fluido son también independientes de ζ . Por esta razón, la ecuación

(D.17) se reduce a:

$$\theta_{\eta\eta} + Pr f \theta_{\eta} = 0 \quad (D.43)$$

Con ésto, la ecuación (D.42) toma la forma siguiente:

$$\theta_{w\tau} = 2\alpha / Pr (\theta_{\eta})_{\eta=0} \quad (D.44)$$

ya que $(\theta_{\eta})_{\eta=0}$ es independiente de ζ . A continuación se analizan tres casos diferentes.

i) $Pr=1$

La solución de la ecuación (D.43) es, para el caso concreto de que el número de Prandtl sea la unidad:

$$\theta = \theta_w(\tau)(1-f') \quad (D.45)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (D.44) resulta ser:

$$\theta_w(\tau) = \exp(-2f''(0)\alpha\tau) \quad (D.46)$$

ii) $Pr \ll 1$

Para muy bajos números de Prandtl (sin violar las restricciones hechas en la aproximación cuasi-estática), la capa límite térmica es mucho mayor que la viscosa. Puede suponerse por tanto, que la totalidad de la capa límite térmica se encuentra fuera de la capa límite viscosa. Esto es:

$$f' = 1$$

cuya integral está dada por:

$$f = \eta \quad (D.47)$$

dado que es necesario satisfacer la condición de no desalazamiento en la pared. La ecuación (D.43) toma entonces la forma:

$$\theta_{\eta\eta} + Pr\eta\theta_{\eta} = 0 \quad (D.48)$$

cuya solución está dada por:

$$\theta = 2\theta_w / \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{Pr/2} \eta) \quad (D.49)$$

donde: $\operatorname{erfc}(z) = 2/\sqrt{\pi} \int_z^{\infty} \exp(-y^2) dy$

Derivando la ecuación (D.49) y evaluándola en $\eta=0$, se obtiene:

$$(\theta_{\eta})_{\eta=0} = -2\alpha\sqrt{2/Pr\pi} \theta_w$$

Introduciendo esta relación en la ecuación (D.44), se obtiene una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es:

$$\theta_w(\tau) = \exp(-\sqrt{8/Pr\pi} \alpha \tau) \quad (D.50)$$

iii) $Pr \gg 1$

Para muy altos números de Prandtl, se considera que la capa límite térmica se encuentra en una región donde la velocidad del fluido varía linealmente con η . Esto es, en una región en donde:

$$f' = f''(0)\eta$$

lo que corresponde a:

$$f = f''(0)\eta^2/2 \quad (D.51)$$

Introduciendo esta relación en la ecuación (D.43), ésta toma la forma:

$$\theta_{\eta\eta} + \text{Pr} f''(0) \eta^2 / 2 \theta_{\eta} = 0 \quad (\text{D.52})$$

cuya solución viene dada por:

$$\theta = \theta_w \left\{ 1 - \int_0^{\eta} \exp(-\text{Pr} f''(0) \gamma^2 / 6) d\gamma / \int_0^{\infty} \exp(-\text{Pr} f''(0) \gamma^2 / 6) d\gamma \right\} \quad (\text{D.53})$$

Derivando esta expresión y evaluándola en $\eta=0$, se obtiene:

$$(\theta_{\eta})_{\eta=0} = -3\theta_w / \Gamma(1/3) (\text{Pr} f''(0) / 6)^{1/3}$$

donde Γ representa la función Gamma. Con esto, la solución de la ecuación (D.44) viene dada por:

$$\theta_w(\tau) = \exp\{-1.232 (f''(0))^{1/3} / \text{Pr}^{2/3} \alpha \tau\} \quad (\text{D.54})$$

Debido al carácter exponencial de la solución, se define un tiempo característico τ^* tal que:

$$\theta_w(\tau^*) = \exp(-1) \quad (\text{D.55})$$

Así, las expresiones para $\alpha \tau^*$ para los tres casos considerados son:

$$\begin{aligned} \alpha \tau^* &= 1.065 && ; \text{ para } \text{Pr} = 1 \\ \alpha \tau^* &= 0.6266 \text{ Pr}^{1/2} && ; \text{ para } \text{Pr} \ll 1 \\ \alpha \tau^* &= 1.044 \text{ Pr}^{2/3} && ; \text{ para } \text{Pr} \gg 1 \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

La figura (D.9) muestra al parámetro $\alpha \tau^*$ como una función del número de Prandtl, señalando también la solución numérica de las ecuaciones (D.43) y (D.44), así como las aproximaciones $\text{Pr} \ll 1$

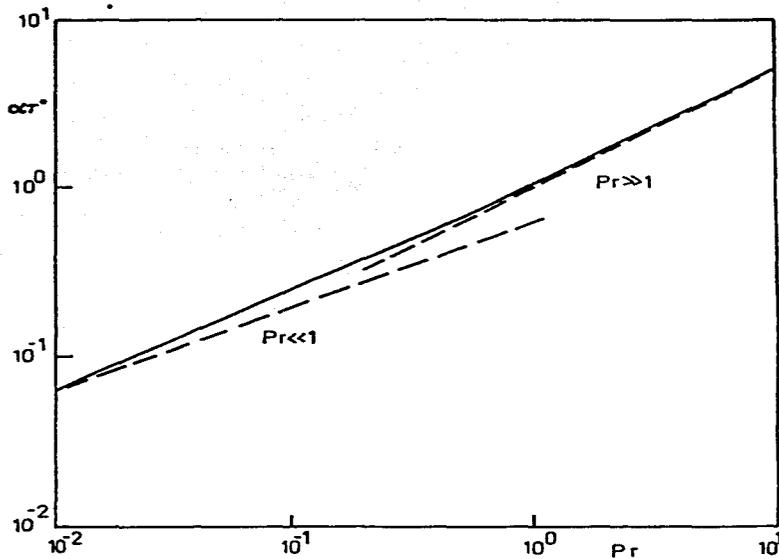


Fig. (D.9) Variación del tiempo característico de enfriamiento con el número de Prandtl. Aquí también se presentan las aproximaciones $Pr \gg 1$ y $Pr \ll 1$.

y $Pr \gg 1$. La aproximación $Pr \gg 1$ da valores muy cercanos a los calculados numéricamente para $Pr > 0.5$. Asimismo, la aproximación $Pr \ll 1$ es aplicable para $Pr < 0.02$. Valores realistas para α y Pr traen consigo valores de τ^* muy superiores (del orden de 10^4) a los tiempos característicos en el fluido ($\tau = Pr^2/D$), tal como se desprende de la figura (D.8). Con ésto se cumple la suposición sobre la cual se basa la utilización del método cuasi-estático.

La tabla (D.1) muestra la temperatura de la placa como una función de τ , deducida de dos formas diferentes, para $Pr=1$ y $\alpha=4.24 \cdot 10^{-5}$.

τ	$\theta_w(\delta \rightarrow \infty)$	$(\theta_w)_p (\delta = 1.11 \cdot 10^{-5})$
0	1.	1.
3	.887	.898
15	.550	.577
27	.341	.368
39	.212	.234
51	.131	.149
63	.081	.095
75	.050	.060
87	.031	.039
99	.019	.022

Tabla (D.1) Esta tabla muestra comparadas la temperatura de la placa obtenida mediante:
a) método aproximado ($\delta \rightarrow \infty$).
b) método numérico, utilizando las ecuaciones (D.1), (D.17) y (D.34).

La primer columna de valores corresponde a la aproximación $\delta \rightarrow 0$, mientras que la segunda corresponde a la solución numérica del conjunto de ecuaciones (D.1), (D.17) y (D.34), para un valor de $\delta = 1.11 \cdot 10^{-3}$, parámetro dado por una placa de aluminio de 0.01 metros de espesor, 0.2 metros de longitud y expuesta a un flujo de aire con una velocidad de $u_{\infty} = 10$ metros/segundo. Los resultados obtenidos por ambos métodos son sorprendentemente parecidos, con lo que se ve la utilidad de la solución aproximada. Es de hacerse notar que para el caso de conductividad térmica finita en la placa, la temperatura de la misma depende de la coordenada longitudinal. La temperatura de la placa indicada en la última columna de la tabla (D.1), representa la temperatura promedio, definida de la siguiente forma:

$$(\theta_w(\tau))_p = \int_0^1 \theta_w(z, \tau) dz \quad (D.57)$$

Solución para conductividad térmica finita en la placa

El conjunto de ecuaciones (D.17) y (D.34) se resolvió numéricamente por diferencias finitas. Para la solución de la ecuación (D.17) se utilizó el método desarrollado en la sección (D.3), donde las derivadas se reemplazan por diferencias finitas dadas en las ecuaciones (D.21) y (D.22). Para la solución de la ecuación (D.34) se tomaron las siguientes diferencias finitas en reemplazo de las derivadas:

$$\theta_{w\tau} = (\theta_{wm, k+1} - \theta_{wm, k}) / \Delta\tau \quad (D.58)$$

$$\theta_{wz} = (\theta_{wm+1, k+1} - 2\theta_{wm, k+1} + \theta_{wm-1, k+1} + \theta_{wm+1, k} - 2\theta_{wm, k} + \theta_{wm-1, k}) / 2\Delta z^2$$

Introduciendo estas relaciones en la ecuación (D.34) y despejando $\theta_{wm+1,k+1}$, se obtiene:

$$\theta_{wm+1,k+1} = 2(\Delta t)^2 / 8\Delta x^2 (\theta_{wm,k+1} - \theta_{wm,k} - \alpha q'_m \Delta t) - (\nu_{wm+1,k} - 2\theta_{wm,k} + \theta_{wm-1,k} - 2\theta_{wm,k+1} + \theta_{wm-1,k+1}) \quad (D.59)$$

donde q'_m representa el flujo de calor adimensional definido por:

$$q'_m = 1/\sqrt{\pi} (\partial \theta / \partial x)_{x=0}$$

En diferencias finitas, esta expresión toma la forma:

$$q'_m = 1/\sqrt{\pi} (\theta_{m,1} - \theta_{m,0}) / \Delta x \quad (D.60)$$

El procedimiento seguido en el cálculo es el siguiente:

- a) Dada la temperatura inicial en la placa, se calcula la ecuación (D.17) y se obtiene el flujo de calor adimensional q'_m para el tiempo nuevo.
- b) Se calcula la ecuación (D.34) y se obtiene la nueva distribución de temperaturas en la placa.

Con este método, las ecuaciones acopladas se resuelven mediante un proceso donde la solución de ambas ecuaciones se intercalan, eliminando con ello la utilización de un método iterativo que involucra un enorme aumento en el tiempo de computación. Sin embargo, los resultados obtenidos por este método son satisfactorios, como lo muestra la tabla (D.1). Este método es utilizado con frecuencia en estudios de fenómenos, tanto de transferencia de calor como en combustión. Como un ejemplo de su empleo, véase Kashiwagi y Summerfield (1973).

Las dos condiciones de frontera tomadas para la placa, son las siguientes:

- a) Bordes de ataque y de salida de la placa adiabáticos.
- b) Borde de ataque a la temperatura T_m y borde de salida adiabático.

Para el caso del borde de ataque adiabático, dicha condición de frontera se expresa en diferencias finitas:

$$(\theta_c)_{\zeta=0} = (-3\theta_{w1,k+1} + 4\theta_{w2,k+1} - \theta_{w3,k+1}) / 2\Delta\zeta = 0$$

De esta relación, se deduce que:

$$\theta_{w3,k+1} = 4\theta_{w2,k+1} - 3\theta_{w1,k+1} \quad (D.61)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (D.59) y despejando $\theta_{w1,k+1}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_{w1,k+1} = & (1 - \Delta\zeta^2 / 8\Delta\tau) \theta_{w2,k+1} + \Delta\zeta^2 / 8\Delta\tau (\theta_{w2,k} + \alpha q'_{2\Delta\tau}) \\ & + (\theta_{w3,k} - 2\theta_{w2,k} + \theta_{w1,k}) / 2 \end{aligned} \quad (D.62)$$

Como valor inicial para el tiempo adimensional $\tau = \Delta\tau$, de acuerdo a la ecuación (D.56), se escogió un valor para $\theta_{w2,2}$ dado por:

$$\theta_{w2,2} = \exp(-\alpha\Delta\tau / 1.044Pr^2 / \delta) \quad (D.63)$$

Para los tiempos siguientes, se tiene como valor inicial de la iteración:

$$\theta_{w2,k+1} = \theta_{w2,k} \quad (D.64)$$

Dado un valor para $\theta_{w2,2}$, se calculan todos los valores de θ_w y se verifica la condición de adiabaticidad en el borde de salida de la

placa. Esto se consigue mediante una interpolación lineal, lo que requiere de un segundo cálculo de θ_w realizado mediante una corrección en el valor de $\theta_{w2,2}$.

Para el caso concreto donde el borde de ataque de la placa se encuentre a la temperatura T_m , se tiene que:

$$\theta_{w1,k+1}=0 \quad (D.65)$$

El valor inicial para $\theta_{w2,2}$, para el tiempo $\tau=\Delta\tau$, se escogió:

$$\theta_{w2,2}=0.25 \quad (D.66)$$

Para los valores subsiguientes de $\theta_{w2,k+1}$, se tomó:

$$\theta_{w2,k+1}=\theta_{w2,k}$$

La figura (D.10) muestra la variación de la temperatura adimensional promedio en la placa, definida en la ecuación (D.57), como una función de τ , para $\beta=10^{-5}$ y $Pr=1$. La línea continua indica que los bordes de ataque y de salida son adiabáticos. Los resultados mostrados en dicha gráfica no difieren en gran medida de los dados por la solución analítica, dada por la ecuación (D.46). Sin embargo, las otras tres curvas indican una gran variación con respecto a la línea continua, obteniéndose un tiempo de enfriamiento mucho más corto. Ello demuestra la gran importancia que tienen las condiciones del borde de ataque. La figura (D.11) es un complemento de la figura (D.10) y muestra la temperatura promedio adimensional como una función de τ , para $\alpha=10^{-5}$, $Pr=1$ y diferentes valores de β . Aquí también se muestra la poca variación del tiempo de enfriamiento adimensional, cuando ambos bordes de la placa son considerados como adiabáticos.

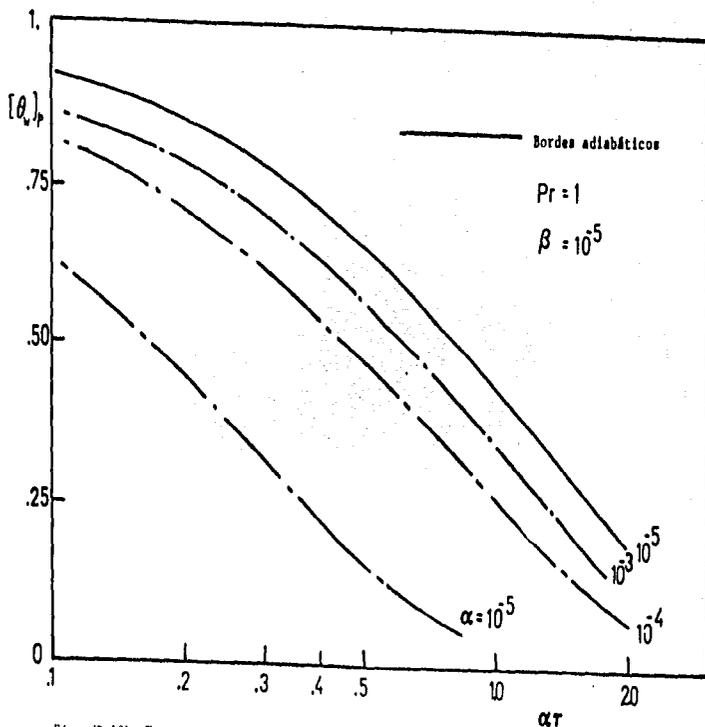


Fig. (D.10) Temperatura promedio dimensional de una placa, expuesta a un flujo convectivo laminar, como una función del tiempo dimensional, para diferentes valores de α y $\beta = 1 \cdot 10^{-5}$. La línea continua supone borde de ataque adiabático.

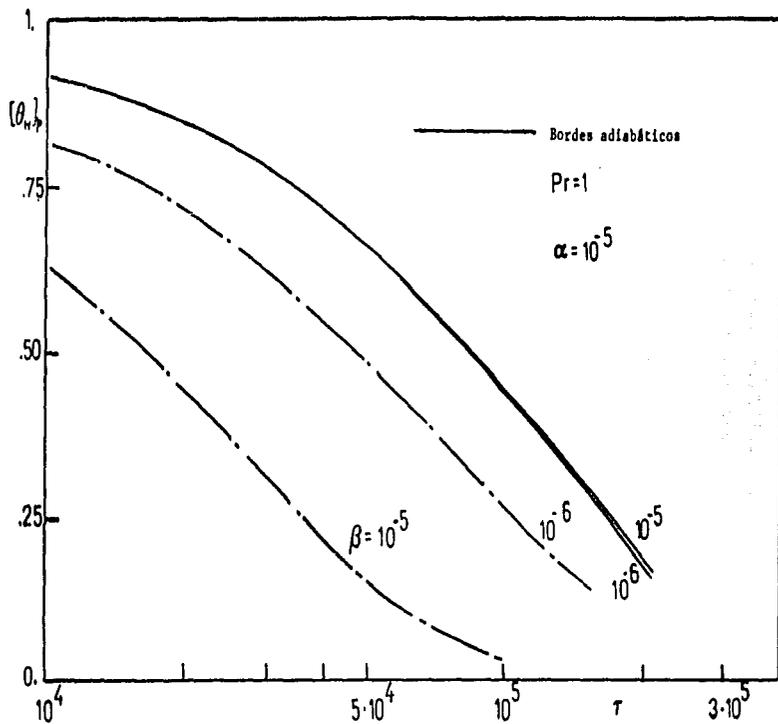


Fig. (D.11) Temperatura promedio adimensional de una placa, expuesta a un flujo convectivo laminar, como una función del tiempo adimensional para diferentes valores de α y $\beta = 1 \cdot 10^{-3}$. La línea continua asume un borde de ataque adiabático.

D.5 Efecto de la resistencia térmica transversal de la placa en el fenómeno global de transferencia de calor

En esta sección se analiza el efecto del espesor de una placa plana, en el proceso de transferencia de calor. Se tiene un flujo permanente laminar de un gas ideal sobre una placa plana delgada con espesor \bar{e} y conductividad térmica k_w . Las condiciones de flujo libre corresponden a una velocidad u_∞ y una temperatura T_∞ . Este problema se analiza en dos partes. La primera considera que la totalidad de la superficie inferior de la placa se encuentra a una temperatura T_{w2} , mientras que la segunda involucra un cambio brusco, en forma de escalón, de la temperatura en la superficie inferior de la placa. Esto es:

$$\begin{aligned} T_w &= T_\infty && ; \text{ en } y = -\bar{e} \text{ y para } x < x_0 \\ T_w &= T_{w1} && ; \text{ en } y = -\bar{e} \text{ y para } x \geq x_0 \end{aligned} \quad (D.67)$$

Para la fase gaseosa, es conveniente introducir coordenadas adimensionales de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \zeta &= (2Pr^2 \lambda_w^3 / C_p^2 \rho_w \mu_w u_\infty \bar{e}^2) x \\ \eta &= \sqrt{u_\infty / 2x \rho_w \mu_w} \int_0^y \rho(x, \gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (D.68)$$

Las ecuaciones que gobiernan este proceso para la fase gaseosa, son:

$$f'''' + ff'' = 0 \quad (D.1)$$

$$1/Pr \theta_{\eta\eta} + f\theta_\eta = 2\zeta f' \theta_\zeta \quad (D.2)$$

donde: $\theta = (T - T_{\infty}) / (T_{w_i} - T_{\infty})$ (D.69)

Para la ecuación del balance de la energía en la placa, se supone que el flujo de calor axial es despreciable. Dicha ecuación, por lo tanto, toma la forma adimensional siguiente:

$$\partial_{\bar{y}} \bar{y} = 0 \quad (D.70)$$

donde: $\bar{y} = y / \bar{e}$ (D.71)

La solución de la ecuación (D.70) es:

$$\theta_w = 0 \quad ; \text{ para } \zeta < \zeta_0 \quad (D.72)$$

$$\theta_w = 1 + (\bar{y} + 1)(\theta_{wu} - 1) \quad ; \text{ para } \zeta \geq \zeta_0$$

donde θ_{wu} corresponde a la temperatura adimensional en la superficie superior de la placa y ζ_0 corresponde al valor de ζ para $x = x_0$.

En la interfase placa-gas, el balance de flujo de calor viene dado por:

$$(\theta_{\eta})_{\eta=0} = \sqrt{\zeta} (\theta_{wu}(\zeta) - 1) \quad (D.73)$$

Las condiciones de frontera para este problema son:

$$f - f' = 0, \quad \theta_{\eta} = \sqrt{\zeta} (\theta - 1) \quad ; \text{ en } \eta = 0$$

$$f' = 1, \quad \theta = 0 \quad ; \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty$$

Es conveniente representar el proceso de transferencia de calor mediante el número adimensional de Nusselt Nu , definido de la siguiente forma:

$$\text{Nu} = q_x / \lambda_m (T_{w\bar{x}} - T_m) \quad (\text{D.74})$$

donde q representa el flujo de calor en la interfase y se puede expresar de la siguiente forma:

$$q = (\lambda_w)_{eq} (T_{w\bar{x}} - T_m) / \bar{E} \quad (\text{D.75})$$

Aquí, $(\lambda_w)_{eq}$ representa una conductividad térmica equivalente de la placa y se define como:

$$(\lambda_w)_{eq} = \lambda_w / \sqrt{\zeta} \quad (\theta_{\eta})_{\eta=0} \quad (\text{D.76})$$

El número adimensional resultante de interés es:

$$\text{Nu}^+ = \text{Nu} / \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} = (\theta_{\eta})_{\eta=0} \text{Pr} = 1 / \sqrt{\zeta} \quad (\text{D.77})$$

Para la solución numérica de la ecuación (D.2), con la condición de balance de flujo de calor en la interfase dada por la ecuación (D.73), se utilizó el método de diferencias finitas tipo implícito, donde las derivadas se expresan en diferencias finitas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \theta_{\eta} &= (\theta_{m,n+1} - \theta_{m,n-1}) / 2\Delta\eta \\ \theta_{\eta\eta} &= (\theta_{m,n+1} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}) / \Delta\eta^2 \\ \theta_{\zeta} &= (3\theta_{m-2,n} - 4\theta_{m-1,n} + \theta_{m,n}) / 2\Delta\zeta \end{aligned} \quad (\text{D.78})$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (D.2), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} &(1 - \text{Pr}f_n \Delta\eta / 2) \theta_{m,n-1} - (2 + (m-1)\text{Pr}f_n' \Delta\eta^2) \theta_{m,n} + (1 + \text{Pr}f_n \Delta\eta / 2) \theta_{m,n+1} \\ &= (m-1)\text{Pr}f_n' \Delta\eta^2 (3\theta_{m-2,n} - 4\theta_{m-1,n}) \end{aligned} \quad (\text{D.79})$$

Las condiciones de frontera se representan mediante la introducción de las dos ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_{m,nmax} &= 0 \\ (1 + \sqrt{(m-1)\Delta\zeta}) \theta_{m,1} - \theta_{m,2} &= \sqrt{(m-1)\Delta\zeta} \Delta\eta \end{aligned} \quad (D.80)$$

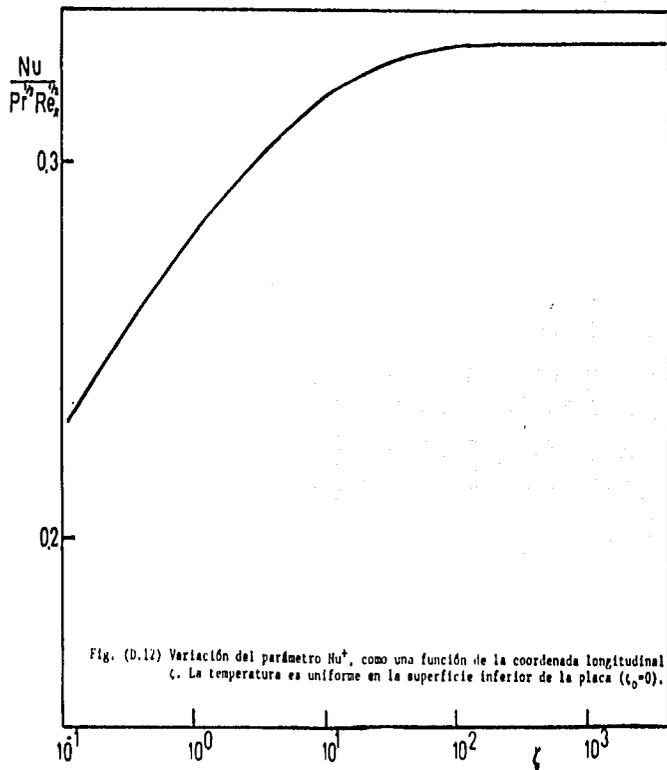
Esta última ecuación se deriva de la condición en la interfase, dada por la ecuación (D.73).

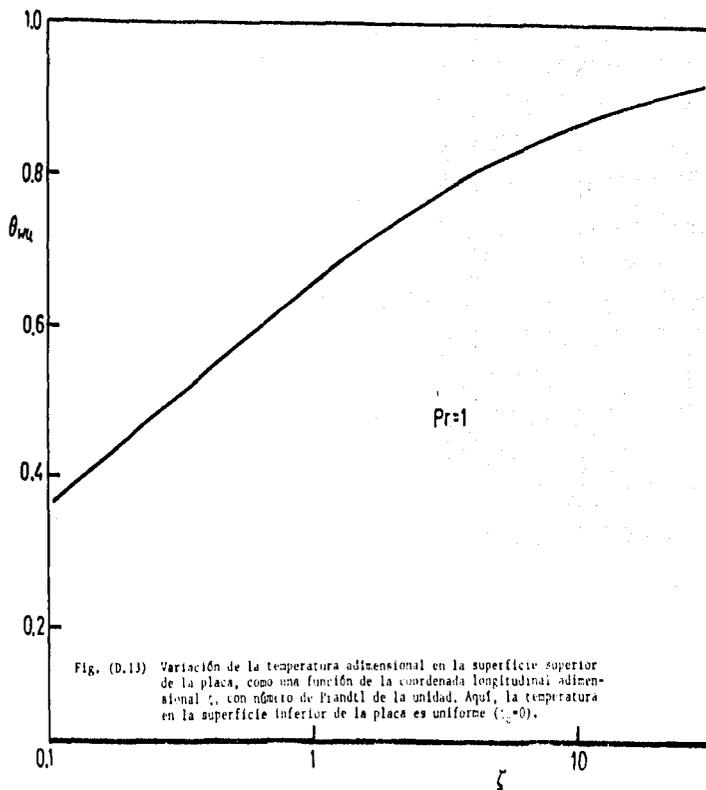
Para cada posición longitudinal m , el sistema de ecuaciones (D.79), se representa por una matriz de transformación tridimensional, la cual se resuelve por el método de triangulación. La figura (D.12) muestra la variación del parámetro Nu^+ como una función de ζ , para $\zeta = \zeta_0$. Como se puede observar de dicha figura, el valor de Nu^+ se aproxima asintóticamente al muy familiar valor de 0.332. Este valor se alcanza en $\zeta > 100$, es decir que para longitudes de la placa mayores de dicho valor, el espesor de la placa es despreciable. Como es obvio, el valor de Nu^+ se anula en el borde de ataque. Como un complemento a la figura anterior, la figura (D.13) muestra la temperatura adimensional en la superficie superior de la placa, como una función de ζ y para $Pr=1$.

Ahora, se considera la segunda parte del problema, o sea $\zeta_0 \neq 0$. En el punto $\zeta = \zeta_0$, la conductividad térmica equivalente es:

$$(\lambda_w)_{eq} = \lambda_w$$

por lo tanto, de la ecuación (D.76) se tiene:





$$(v_n)_{n=0} = \sqrt{\zeta_0}$$

El parámetro Nu^+ toma el valor, en este punto, de:

$$(Nu^+)_{\zeta=\zeta_0} = \sqrt{\zeta_0/2} \quad (D.81)$$

Como puede observarse, este parámetro es finito y depende del punto donde cambia la temperatura de la superficie inferior de la placa. Sin embargo, si $\zeta_0 \rightarrow \infty$, entonces la resistencia térmica de la placa es despreciable y, por lo tanto, se reduce al problema de Eckert (Eckert y Drake, 1972), reportado para el caso concreto donde el escalón de temperatura se realiza en la superficie superior de la placa. En este caso, el valor del parámetro Nu^+ viene dado por:

$$Nu^+ = 0.332 / (1 - (\zeta_0/\zeta)^{1/4})^{1/3} \quad (D.82)$$

Las figuras (D.14) y (D.15) muestran el parámetro Nu^+ como una función de ζ_0/ζ , para diferentes valores de ζ_0 . También en la figura (D.14) se muestra la relación (D.82), que coincide con la curva para $\zeta_0 \rightarrow \infty$. Para valores de $\zeta_0 \gg 0.22$, la tendencia es similar que para $\zeta_0 \rightarrow \infty$, pero con un valor finito del parámetro Nu^+ para $\zeta = \zeta_0$. Para valores de $\zeta \gg \zeta_0$, Nu^+ tiende asintóticamente al valor 0.332. Por otro lado, para $\zeta_0 \ll 0.22$, la tendencia es inversa al caso anterior, ya que Nu^+ aumenta monótonicamente al disminuir el valor de ζ_0/ζ . Para valores de ζ_0 del orden de 0.22, el valor de Nu^+ primero disminuye al disminuir ζ_0/ζ , aumentando después hasta alcanzar asintóticamente el valor de 0.332 para $\zeta_0/\zeta = 0$.

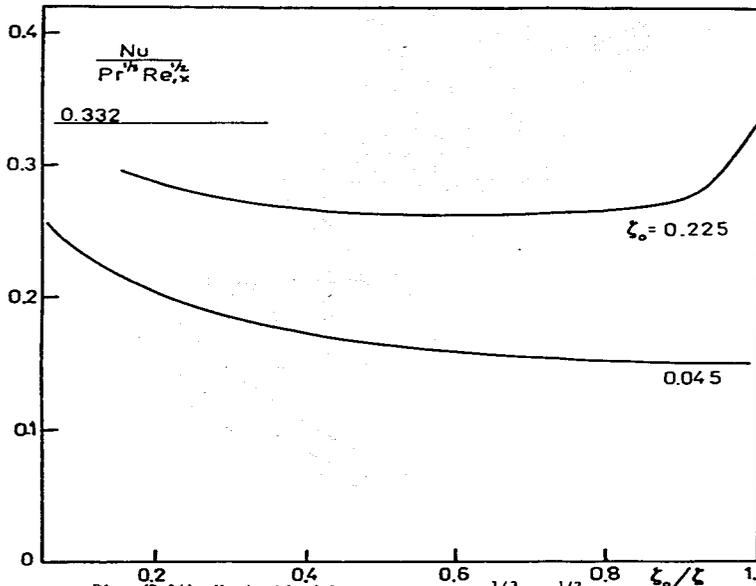
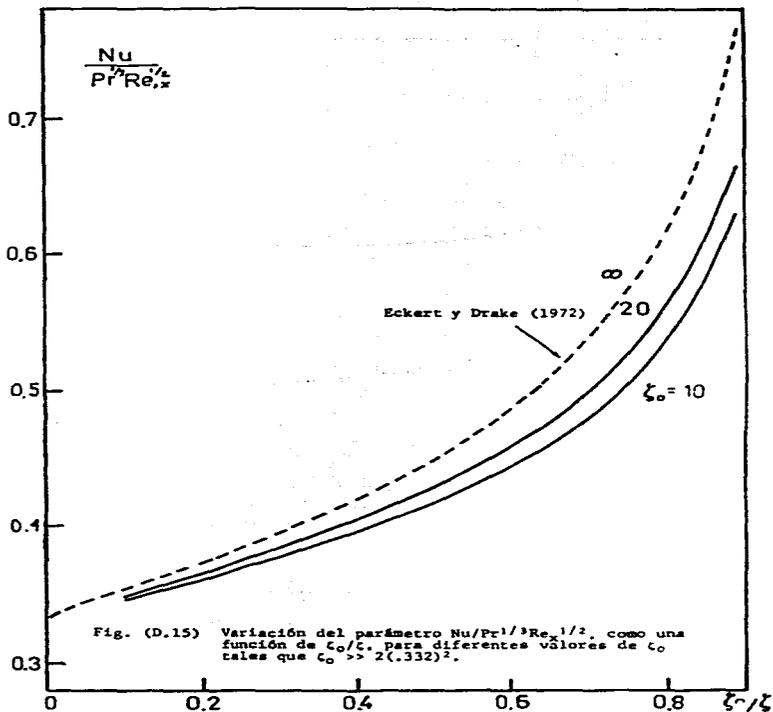


Fig. (D.14) Variación del parámetro $\frac{Nu}{Pr^{1/3} Re_x^{1/2}}$ como una función de la relación $\frac{\zeta_0}{\zeta}$ para diferentes valores de ζ_0 , tales que $\zeta_0 = 2(0.332)^2$.



D.6 Efecto de la conducción axial de calor en la fase gaseosa

En esta sección se analiza el efecto de la conducción longitudinal en la fase gaseosa, para un flujo de capa límite, donde la temperatura en la superficie superior de la placa presenta un cambio repentino de T_s a T_w , en la posición $x=x_0$. Las ecuaciones adimensionales que gobiernan este proceso son, tomando en cuenta la conducción axial de calor:

$$f'''' + ff'' = 0 \quad (D.1)$$

$$1/Pr \theta_{\eta\eta} + f\theta_{\eta} + 1/Pr Re_{x_0} (2\zeta\theta_{\zeta\zeta} - 2n\theta_{\eta\zeta} + 3n/2\zeta \theta_{\eta} + n/2\zeta \theta_{\eta\eta}) = 2\zeta f'\theta_{\zeta} \quad (D.83)$$

donde: $Re_{x_0} = u_{\infty} x_0 \rho_{\infty} / \mu_{\infty}$

$$\zeta = x/x_0$$

$$\theta = (T - T_m) / (T_w - T_m)$$

En la ecuación (D.83) se han despreciado los términos de compresibilidad, para su simplificación. El tercer miembro del lado izquierdo de la ecuación (D.83) representa el término de la difusión axial de calor en el gas. Para el caso concreto del cambio de la temperatura en la superficie superior de la placa en forma de escalón, el gradiente de temperatura más importante tiene lugar en una región donde:

$$\zeta = 1 \text{ y } \eta = 0 \quad (D.84)$$

De aquí se deduce que el término más importante referente a la conducción axial de calor, lo representa $2\zeta\theta_{\zeta\zeta}$, por lo que la ecuación (D.83) puede aproximarse de la forma siguiente:

$$1/\text{Pr} \theta_{\eta\eta} + f\theta_{\eta} = 2\zeta(f'v_{\zeta} - 1/\text{PrRe}_{x_0} \theta_{\zeta\zeta}) \quad (\text{D.85})$$

Para la solución numérica de la ecuación (D.85), se utilizó el método de diferencias finitas, donde las derivadas se reemplazan por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \theta_{\eta} &= (\theta_{m,n+1} - \theta_{m,n-1}) / 2\Delta\eta \\ \theta_{\zeta} &= (\theta_{m+1,n} - \theta_{m-1,n}) / 2\Delta\zeta \\ \theta_{\eta\eta} &= (\theta_{m,n+1} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}) / \Delta\eta^2 \\ \theta_{\zeta\zeta} &= (\theta_{m+1,n} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}) / \Delta\zeta^2 \end{aligned} \quad (\text{D.86})$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (D.85), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} (1 + \text{Pr}f_n\Delta\eta/2)\theta_{m,n+1} - (2 + 4(m-1)\Delta\eta^2/\text{Re}_{x_0}\Delta\zeta)\theta_{m,n} + (1 - f_n\text{Pr}\Delta\eta/2)\theta_{m,n-1} \\ + (m-1)\Delta\eta^2\{(2/\text{Re}_{x_0}\Delta\zeta - \text{Pr}f'_n)\theta_{m+1,n} + (2/\text{Re}_{x_0}\Delta\zeta + \text{Pr}f'_n)\theta_{m-1,n}\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.87})$$

Este sistema de $n_{\text{max}} \times m_{\text{max}}$ ecuaciones lineales, se representa por una matriz de transformación cuya banda es de $2n_{\text{max}} + 1$. Es de hacerse notar que dado que la ecuación (D.85) es del tipo elíptica, es necesario el cálculo simultáneo en todo el espacio.

Las figuras (D.16) y (D.17) muestran el parámetro Nu^+ como

una función de ζ^{-1} , para $\zeta > 1$ y $\zeta < 1$, respectivamente, para diferentes valores de Re_{x_0} . Para el caso concreto del número de Reynolds infinito ($Re_{x_0} \rightarrow \infty$), la ecuación (D.85) es parabólica, siendo su solución la dada por la ecuación (D.82). Debido a problemas de inestabilidad numérica, el valor máximo tomado para Re_{x_0} fue 300. Para valores de $\zeta > 1$, en general el parámetro Nu^+ es mayor para valores más bajos del número de Reynolds Re_{x_0} , excepto en la vecindad de $\zeta = 1$, donde Nu^+ se mantiene finito para Re_{x_0} finito. Esto se puede extraer de la figura (D.16). El flujo de calor (a través de Nu^+) representado en la figura (D.17), es el proveniente de la fase gaseosa hacia la placa, en regiones aguas arriba del punto de cambio de temperatura x_0 . Ello indica cuantitativamente el calor difundido longitudinalmente en la fase gaseosa.

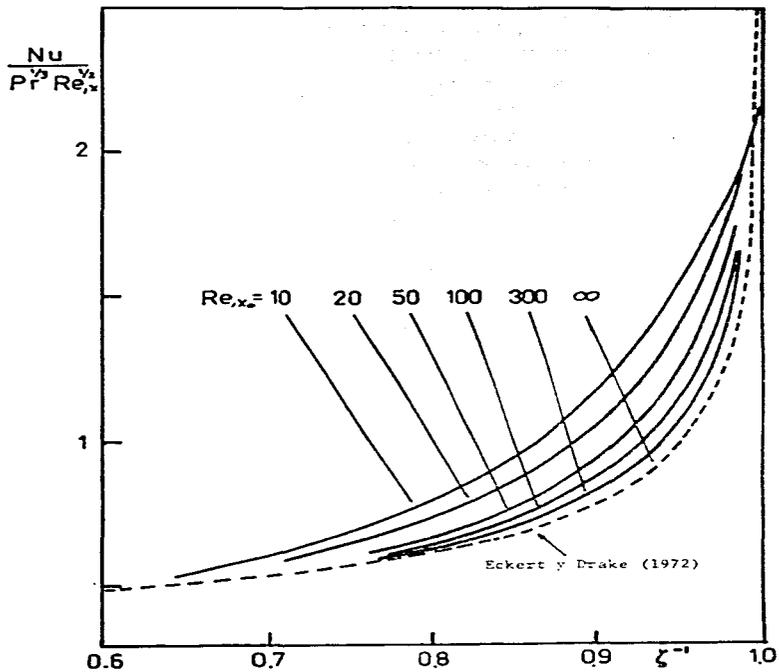


Fig. (D.16) Efecto de la conducción axial de calor en la fase gaseosa, para diferentes valores del número de Reynolds y en posiciones de la placa tales que $\zeta > 1$.

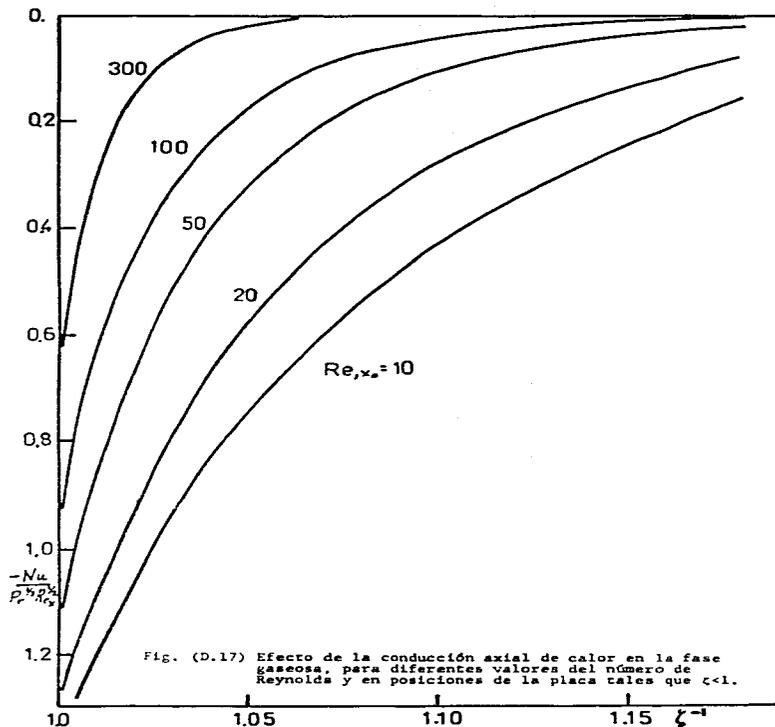


Fig. (D.17) Efecto de la conducción axial de calor en la fase gaseosa, para diferentes valores del número de Reynolds y en posiciones de la placa tales que $z < 1$.