UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPARACION ENTRE DEFINICIONES DE SUMA ACTIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

MEXICO, D. F. 1987

INDICE.

INTRODUCCION.

Cuando se trata de estudiar alguna estructura en particular, es una técnica usual en matematicas estudiar estructuras más sencillas, a partir de las cuales, de alguna manera, se recobra la estructura original. Siguiendo esta técnica resulta tan importante estudiar las estructuras simples como la manera de recobrar la estructura original a partir de estas.

Cuando hablamos de la teoría de grupos, tenemos que se ha buscado utilizar esta técnica, para describir la estructura de cualquier grupo en terminos de grupos con estructura sencilla, y se han logrado describir completamente cuando se habla de grupos abelianos finitos, en los cuales, la manera de recobrar la estructura original es mediante la suma directa. Se busca dar una solución semejante para el caso general, en el cual tal vez sea necesario considerar otros grupos de estructura sencilla y otras maneras de combinarlos. Este es el caso de la suma activa, que es otra manera de combinar grupos para recobrar otros de estructuras más complicadas.

Como sucede a menudo, cuando se trata de definir un nuevo concepto, se dan muchas definiciones y, sólo despues de cierto tiempo se adopta alguna como la más conveniente.

El proposito de este trabajo es comparar las diferentes definiciones que se tienen de suma activa. El trabajo está dividido en dos partes. En la primera parte se exponen, con cierto detalle, las cinco definiciones de suma activa que se tienen, mientras que en la segunda es en donde se comparan.

Las dos primeras definiciones fueron dadas por Francisco Tomás Pons, una en 1973 y la otra en 1978.

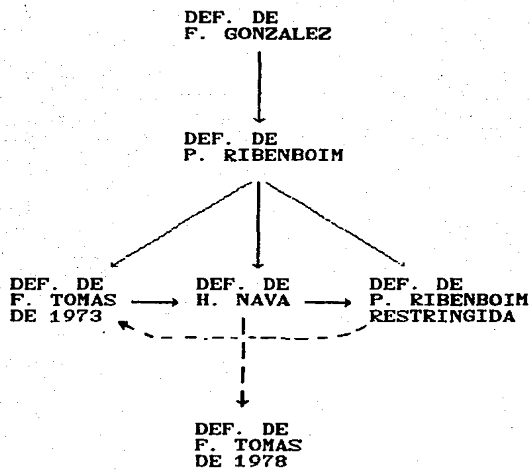
La tercera definición fué dada por Hugo Nava Lopéz en 1978 y es una generalización de la segunda dada por F. Tomás.

La cuarta definición corrió a cargo de Paulo Ribenboim en 1981.

La quinta definición fué dada por Francisco Gonzalez Acuña en 1984. Esta es la primera vez que se publica esta definición, y el trabajo aquí presentado esta basado en unas notas elaboradas por Leopoldo Román Sanchez.

En el segundo capítulo se hace una comparación detallada de las cinco definiciones, procurando ir de la mas general a la mas particular. Primero se ve que la definición de F. Gonzalez implica la definición de P. Ribenboim. A continuación se ve que la definición de P. Ribenboim implica a la definición dada por F. Tomás en 1973, la cual se ve, a continuación, que implica la definición de H. Nava. Finalmente se ve que, con ciertas restricciones, la definición de P. Ribenboim es un caso particular de la definición de H. Nava. Cabe hacer notar que las restricciones que se piden en este último caso son satisfechas por la definición de suma activa de F. Tomás de 1973 cuando se ve como caso particular de la definición de P. Ribenboim.

Esquematicamente podríamos representar la situación de la siguiente manera:



Donde las líneas punteadas significan que las demostraciones de dichas implicaciones no se dan explicitamente pues son claras.

CAPITULO I

1. DEFINICION DE SUMA ACTIVA DE GRUPOS DADA POR FRANCISCO TOMAS PONS EN 1973.

Dado cualquier grupo H, consideramos el conjunto $\mathrm{Aut}H$ de automorfismos de H con la siguiente operación:

Si $s, t \in \mathrm{Aut}H$, $h \in H$ entonces $st(h) = t \circ s(h) = t(s(h))$.
Con esta operación es claro que $\mathrm{Aut}H$ es un grupo.

Denotamos por $int_H \colon H \longrightarrow \mathrm{Aut}H$ el homomorfismo que asocia a cada $h \in H$ el automorfismo interior correspondiente, esto es, si $a \in H$ entonces $int_H(h)(a) = h^{-1}ah$.

1.1 La Categoría $\mathfrak{C}_X$ Asociada al Grupo X.

Dado cualquier grupo X, los objetos de la categoría $\mathfrak{C}_X$ son las ternas (H, j_H, k_H), donde H es un grupo y j_H, k_H son homomorfismos

$$j_H : H \longrightarrow X$$

$$k_H : X \longrightarrow \mathrm{Aut}H$$

que cumplen $k_H \circ j_H = int_H$ y si $x \in X$ y $h \in H$ entonces

$$j_H(k_H(x)(h)) = x^{-1} j_H(h) x$$

Si (F, j_F, k_F) y (G, j_G, k_G) son ternas con estas propiedades, un morfismo de (F, j_F, K_F) en (G, j_G, k_G) es un homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ tal que

$$j_G \circ \varphi = j_F$$

y si $x \in X$, $f \in F$ $\varphi(k_F(x)(f)) = k_G(x)(\varphi(f))$.

La composición de morfismos es la composición usual de funciones.

Con estas definiciones es claro que $\mathfrak{C}_X$ es una categoría.

Notación: Si $f \in F$, $g \in G$ denotamos f^g como

$$f^g = k_F \circ j_G(g)(f)$$

Si ademas $h \in H$ denotamos por f^{gh} a $f^{gh} = (f^g)^h$.
Tenemos que si $f, f_1 \in F$ entonces

$$f^{f_1} = k_F \circ j_F(f_1)(f) = \mathrm{int}_F(f_1)(f) = f_1^{-1} f f_1$$

$$\therefore \quad f^{f_1} = f_1^{-1} f f_1 .$$

Si $g_1, g_2 \in G$ entonces, haciendo uso de que k_F y j_G son homomorfismos se comprueba directamente que $f^{g_1 g_2} = f^{(g_1 g_2)}$.

Ademas tenemos que

$$\begin{aligned}
(k_G(x)(g))^{k_F(x)(f)} &= [k_G \circ j_F(k_F(x)(f))](k_G(x)(g)) \\
&= [k_G(x^{-1} j_F(f) x)](k_G(x)(g)) \\
&= [k_G(x) \circ k_G(j_F(f)) \circ k_G(x^{-1})](k_G(x)(g)) \\
&= k_G(x)(k_G \circ j_F(f)(g)) \\
&= k_G(x)(g^f)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (k_G(x)(g))^{k_F(x)(f)} = k_G(x)(g^f).$$

Notación: Si $f \in F$, $g \in G$, $h \in H$ entonces denotamos

$$f^{g*h} = f^{(g^h)}$$

Entonces, por cómputo directo se comprueba que

$$f^{g*h} = f^{h^{-1}gh}$$

y también que $\quad j_F(f^g) = j_G(g^{-1})j_F(f)j_G(g)$

y si $\lambda_F \in Mor((F,j_F,k_F), (H,j_H,k_H))$; $\lambda_G \in Mor((G,j_G,k_G),(H,j_H,k_H))$

entonces $\quad \lambda_G(g^f) = \lambda_F(f^{-1})\lambda_G(g)\lambda_F(f)$.

1 .2 Coproductos Finitos en $\mathcal{E}_X$.

Supongamos que (F,j_F,k_F), $(G,j_G,k_G) \in Ob(\mathcal{E}_X)$. Definimos en FxG la siguiente operación:

$$(f,g)\cdot(f_1,g_1) = (ff_1, g^{f_1}g_1)$$

con esta operación FxG es un grupo. $(1_F,1_G)$ es el elemento neutro, y el inverso de (f,g) es $(f^{-1},(g^{-1})^{f^{-1}})$. La asociatividad se comprueba directamente.

Sea $R_{F,G}$ el subgrupo normal generado por los elementos de la forma $(f^{-1}f^g, g^{-1}g^f)$, $f \in F$, $g \in G$.

Definimos $F+G = FxG/R_{F,G}$

Lema 1.2.1 Si $(f_1,g_1) \in (f,g)R_{F,G}$ entonces

$$j_F(f_1)j_G(g_1) = j_F(f)j_G(g)$$

dem.- Cualquier elemento de $R_{F,G}$ es el producto de elementos de la siguiente forma

$$(f_3,g_3)^{-1}(f_2^{-1}f_2^{g_2},g_2^{-1}g_2^{f_2})(f_3,g_3)$$

por lo tanto, basta demostrar el lema cuando

$$(f_1,g_1) = (f,g)(f_3,g_3)^{-1}(f_2^{-1}f_2^{g_2},g_2^{-1}g_2^{f_2})(f_3,g_3)$$

$$\therefore \quad (f_1,g_1) = (ff_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3,(gg_3^{-1})^{f_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3}(g_2^{-1})^{f_3}g_2^{f_2f_3}g_3)$$

Entonces tenemos que

$$j_F(f_1)j_G(g_1) = j_F(ff_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3)j_G((gg_3^{-1})^{f_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3}(g_2^{-1})^{f_3}g_2^{f_2f_3}g_3)$$

$$= j_F(f)j_F(f_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3)j_F(f_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3)^{-1}j_G(gg_3^{-1})j_F(f_3^{-1}f_2^{-1}f_2^{g_2}f_3)\cdot$$

$$j_F(f_3^{-1})j_G(g_2^{-1})j_F(f_3)j_F((f_2f_3)^{-1})j_G(g_2)j_F(f_2f_3)j_G(g_3)$$

$$= j_F(f)j_G(gg_3^{-1})j_F(f_3^{-1}f_2^{-1})j_F(f_2^{g_2})j_G(g_2^{-1})j_F(f_3)j_F(f_3^{-1})j_F(f_2^{-1})j_G(g_2)\cdot$$

$$j_F(f_2f_3)j_G(g_3)$$

$$= j_F(f)j_G(g)$$

$$\therefore \quad j_F(f_1)j_G(g_1) = j_F(f)j_G(g)$$

Lema 1.2.2 Para cada $x \in X$, la función

$$\eta_x : \begin{array}{ccc} F\times G & \longrightarrow & F\times G \\ (f,g) & \longmapsto & (k_F(x)(f), k_G(x)(g)) \end{array}$$

es un automorfismo que aplica $R_{F,G}$ en sí mismo.

dem.- Primero se ve que es homomorfismo

$$\eta_x((f,g)(f_1,g_1)) = \eta_x(ff_1, g^f g_1)$$

$$= (k_F(x)(f)k_F(x)(f_1), k_G(x)(g)^{k_F(x)(f)} k_G(x)(g_1))$$

$$= \eta_x(f,g)\eta_x(f_1,g_1).$$

Es claro que η_x es automorfismo pues $k_F(x)$ y $k_G(x)$ son automorfismos. Para ver que η_x aplica $R_{F,G}$ en sí mismo basta demostrar que lo hace para los elementos de la forma

$$(f_1,g_1)^{-1}(f^{-1}f^g, g^{-1}g^f)(f_1,g_1)$$

entonces

$$\eta_x((f_1,g_1)^{-1}(f^{-1}f^g, g^{-1}g^f)(f_1,g_1)) =$$

$$= (\eta_x(f_1,g_1))^{-1}\eta_x(f^{-1}f^g, g^{-1}g^f)(\eta_x(f_1,g_1))$$

$\therefore$ basta ver que $\eta_x(f^{-1}f^g, g^{-1}g^f) \in R_{F,G}$

$$\eta_x(f^{-1}f^g, g^{-1}g^f) = (k_F(x)(f^{-1})k_F(x)(f^g), k_G(x)(g^{-1})k_G(x)(g^f))$$

$$= (k_F(x)(f^{-1})k_F(x)(f)^{k_G(x)(g)}, k_G(x)(g^{-1})k_G(x)(g)^{k_F(x)(f)}) \in R_{F,G}$$

$$\therefore \quad \eta_x(R_{F,G}) \subset R_{F,G}$$

Como consecuencia de este lema tenemos que si $(f_1, g_1) \in (f,g)R_{F,G}$ entonces $(k_F(x)(f_1), k_G(x)(g_1)) \in (k_F(x)(f), k_G(x)(g))R_{F,G}$.

Definimos ahora j_{F+G}: $\begin{array}{l} F+G \longrightarrow X \\ (f,g)R_{F,G} \longmapsto j_F(f)j_G(g) \end{array}$

Por el lema 1.2.1 tenemos que j_{F+G} está bien definido. Veamos que j_{F+G} es un homomorfismo

$$\begin{aligned} j_{F+G}((f,g)(f_1,g_1)R_{F,G}) &= j_F(ff_1)j_G(g^{f_1}g_1) \\ &= j_F(ff_1)j_F(f_1)^{-1}j_G(g)j_F(f_1)j_G(g_1) \\ &= j_F(f)j_G(g)j_F(f_1)j_G(g_1) \\ &= j_{F+G}((f,g)R_{F,G})j_{F+G}((f_1,g_1)R_{F,G}) \end{aligned}$$

Se define a continuación $k_{F+G} : X \longrightarrow \mathrm{Aut}(F+G)$:
Si $x \in X$ entonces $k_{F+G}(x)((f,g)R_{F,G}) = (k_F(x)(f), k_G(x)(g))R_{F,G}$.
Por el lema 1.2.2 tenemos que $k_{F+G}(x)$ está bien definido y que $k_{F+G}(x) \in \mathrm{Aut}(F+G)$.

Haciendo el cálculo directamente se ve que k_{F+G} es un homomorfismo.

Lema 1.2.3 $(F+G, j_{F+G}, k_{F+G})$ es un objeto de la categoría $\mathfrak{C}_X$.

dem.– Basta demostrar:

1) $k_{F+G} \circ j_{F+G} = int_{F+G}$

2) $j_{F+G}(k_{F+G}(x)((f,g)R_{F,G})) = x^{-1} j_{F+G}((f,g)R_{F,G})x$.

Veamos primero 1).

Sean $D_1 = (k_{F+G} \circ j_{F+G}((f,g)R_{F,G})((f_1,g_1)R_{F,G})$

$D_2 = [(f,g)R_{F,G}]^{-1}[(f_1,g_1)R_{F,G}][(f,g)R_{F,G}]$.

Entonces basta ver que $D_2 D_1^{-1} = R_{F,G}$

$$D_1 = (k_{F+G} \circ j_{F+G}((f,g)R_{F,G}))(f_1,g_1)R_{F,G})$$

$$D_1 = (f_1^{fg}, g_1^{fg})R_{F,G}$$

$$\therefore \quad D_1^{-1} = ((f_1^{-1})^{fg}, (g_1^{-1})^{f(f_1^{-1})^f g})R_{F,G}$$

Tenemos además que

$$D_2 = ((f,g)^{-1}(f_1,g_1)(f,g))R_{F,G}$$

$$\therefore \quad D_2 = (f^{-1}f_1 f, (g^{-1})^{f^{-1}f_1 f} g_1^f g)R_{F,G}$$

Entonces

$$D_2 D_1^{-1} = (f^{-1}f_1 f, (g^{-1})^{f^{-1}f_1 f} g_1^f g)((f_1^{-1})^{fg}, (g_1^{-1})^{f(f_1^{-1})^f g})R_{F,G}$$

$$D_2 D_1^{-1} =$$

$$(((f_1^{-1})^f)^{-1}((f_1^{-1})^f)^g, ((g^{-1})^{f_1^f} g_1^f g)((f_1^{-1})^f)^g (g_1^{-1})^f (f_1^{-1})^f g))R_{F,G}$$

Si $f_2 = (f_1^{-1})^f$ entonces

$$D_2 D_1^{-1} = (f_2^{-1} f_2^g, g^{-1} g^{f_2} (g_1^{-1})^{f_2} g (g^{-1})^{f_2^{-1} f_2^g} g_1^{f f_2^g} (g_1^{-1})^{f f_2 g})R_{F,G}$$

$$D_2 D_1^{-1} = (f_2^{-1} f_2^g, g^{-1} g^{f_2} d)R_{F,G}$$

donde $d = (g^{-1})^{f_2} g (g^{-1})^{f_2^{-1} f_2^g} g_1^{f f_2^g} g^{f_2^g} (g_1^{-1})^{f f_2 g}$

Se ve por cálculo directo que $d = 1$

$$\therefore \quad k_{F+G} \circ j_{F+G} = int_{F+G}$$

Veamos ahora 2).

$$\begin{aligned} j_{F+G}(k_{F+G}(x)((f,g)R_{F,G})) &= j_F(k_F(x)(f) j_G(k_G(x)(g)) \\ &= x^{-1} j_F(f) x x^{-1} j_G(g) x \\ &= x^{-1} j_{F+G}((f,g)R_{F,G}) x \end{aligned}$$

Lo cual completa la demostración.

Se definen los morfismos

$$\begin{aligned} \varphi_F : (F, j_F, k_F) &\longrightarrow (F+G, j_{F+G}, k_{F+G}) \\ f &\longmapsto (f, 1_G)R_{F,G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_G : (G, j_G, k_G) &\longrightarrow (F+G, j_{F+G}, k_{F+G}) \\ g &\longmapsto (1_F, g)R_{F,G} \end{aligned}$$

Se demuestra a continuación que φ_F es un morfismo de la categoría $\mathfrak{C}_X$. La demostración para φ_G es completamente análoga.

Es claro que $\varphi_F : F \longrightarrow F+G$ es homomorfismo, para que sea morfismo de $\mathfrak{C}_X$ debe cumplir:

$$1)\ j_{F+G}\circ\varphi_F = j_F$$

$$2)\ \varphi(k_F(x)(f)) = k_{F+G}(x)(\varphi_F(f)).$$

Veamos 1) $\quad j_{F+G}\circ\varphi_F(f) = j_F(f)j_G(1_G) = j_F(f)$

Ahora 2) $\quad \varphi(k_F(x)(f)) = (k_F(x)(f),k_G(x)(1_G))R_{F,G}$

$$= k_{F+G}(x)(\varphi_F(f)).$$

Proposición 1.2.4. La colección $[(F+G,j_{F+G},k_{F+G}):\varphi_F,\varphi_G]$ del objeto $(F+G,j_{F+G},k_{F+G})$ y los morfismos φ_F,φ_G es un coproducto de $(F,j_F,k_F),(G,j_G,k_G)$ en $\mathfrak{C}_X$.

$$\text{si}\quad \lambda_F : (F,j_F,k_F) \longrightarrow (H,j_H,k_H)$$

$$\lambda_G : (G,j_G,k_G) \longrightarrow (H,j_H,k_H).$$

Entonces definimos λ:

$$\begin{aligned}\lambda:\ (F+G,j_{F+G},k_{F+G}) &\longrightarrow (H,j_H,k_H)\\ (f,g)R_{F,G} &\longmapsto \lambda_F(f)\lambda_G(g)\end{aligned}$$

La demostración de que λ no depende del representante es idéntica a la del lema 1.2.1.

Veamos que λ es homomorfismo

$$\lambda((f_1,g_1)(f,g)R_{F,G}) = \lambda_F(f_1)\lambda_F(f)(\lambda_F(f^{-1})\lambda_G(g_1)\lambda_F(f))\lambda_G(g)$$

$$= \lambda((f_1,g_1)R_{F,G})\lambda((f,g)R_{F,g})$$

Sólo resta mostrar que λ es morfismo de $\mathfrak{C}_X$

$$j_H\circ\lambda((f,g)R_{F,G}) = j_H(\lambda_F(f))j_H(\lambda_G(g)) = j_F(f)j_G(g)$$

$$= j_{F+G}((f,g)R_{F,G})$$

además,

$$\lambda(k_{F+G}(x)((f,g)R_{F,G})) = \lambda_F(k_F(x)(f))\lambda_G(k_G(x)(g))$$

$$= k_H(x)(\lambda_F(f)\lambda_G(g)) = k_H(x)(\lambda((f,g)R_{F,G}))$$

$\therefore$ λ es un morfismo de $\mathfrak{C}_X$

Se demuestra directamente que $\lambda\circ\varphi_F = \lambda_F$ y $\lambda\circ\varphi_G = \lambda_G$.

Falta únicamente demostrar la unicidad de λ.

Supongamos $\lambda' : (F+G, j_{F+G}, k_{F+G}) \longrightarrow (H, j_H, k_H)$ morfismo de $\mathfrak{C}_X$ tal que $\lambda'\circ\varphi_F = \lambda_F$ y $\lambda'\circ\varphi_G = \lambda_G$.

$$\lambda'((f,g)R_{F,G}) = \lambda'((f,1_G)R_{F,G})\lambda'((1_F,g)R_{F,G})$$

$$= \lambda'\circ\varphi_F(f)\lambda'\circ\varphi_G(g) = \lambda_F(f)\lambda_G(g)$$

$$= \lambda((f,g)R_{F,G})$$

lo cual concluye la demostración.

1.3 Coproductos en $\mathfrak{C}_X$.

Sea I un conjunto de índices y para cada $p \in I$ un objeto (F_p, j_{F_p}, k_{F_p}) de $\mathfrak{C}_X$. Por simplicidad denotaremos por j_p y k_p a j_{F_p} y k_{F_p} respectivamente.

Elegimos un orden total en I. Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de subconjuntos finitos de I, para cada $S \in \mathfrak{F}$ se construirá un coproducto $\phi_S = [(F_S, j_S, k_S); \{\varphi_p^S\}_{p\in S}]$ de la familia $(F_p, j_p, k_p)_{p\in S}$. Esta construcción se hará recursivamente sobre el número n de elementos de S. Si $n = 1$ y $S = \{p\}$ entonces

$$\phi_{\{p\}} = [(F_p, j_p, k_p);\ \{\phi_p^{\{p\}}\}_{p\in\{p\}}]$$

donde
$$\varphi_p^{\{p\}} = 1_{F_p}.$$

Supongamos que siempre que S tenga n elementos, tenemos definido ϕ_S.

Supongamos que S' tiene n+1 elementos, y que q es el último elemento de S'. Sea $S = S'-\{q\}$, entonces S tiene n elementos y $S' = S \cup \{q\}$. Entonces definimos

$$\phi_{S'} = [(F_S+F_q, j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q});\ \{\varphi_p^{S'}\}_{p\in S'}]$$

donde si $p \in S$
$$\varphi_p^{S'}(f_p) = (\varphi_p^S(f_p), 1_{F_q}) R_{F_S\ ,F_q}$$

y
$$\varphi_q^{S'}(f_q) = (1_{F_S}, f_q) R_{F_S\ ,F_q}.$$

Se comprueba a continuación que $\phi_{S'}$ es un coproducto de la familia $(F_p, j_p, k_p)_{p\in S'}$.

Sabemos que $[(F_S+F_q, j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q}); \varphi_{F_S}, \varphi_{F_q}]$ es un coproducto de (F_S, j_S, k_S) y (F_q, j_q, k_q) y tenemos que si $p \in S$

$$\varphi_p^{S'} = \varphi_{F_S} \circ \varphi_p^S \qquad y \qquad \varphi_q^{S'} = \varphi_{F_q}$$

entonces $(\varphi_p^{S'})_{p\in S'}$ es una familia de morfismos de $\mathfrak{C}_X$.

Supongamos (G, j_G, k_G) un objeto de $\mathfrak{C}_X$ y para cada $p \in S'$ un morfismo

$$\psi_p : (F_p, j_p, k_p) \longrightarrow (G, j_G, k_G).$$

Entonces por la propiedad universal de ϕ_S tenemos un morfismo

$$\psi : (F_S, j_S, k_S) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$$

único tal que para todo $p \in S$ $\psi \circ \varphi_p^S = \psi_p$.

Además tenemos $\psi_q : (F_q, j_q, k_q) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$ y como

$$[(F_S+F_q, j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q}), j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q}; \varphi_{F_S}, \varphi_{F_q}]$$

es un coproducto, entonces existe un único

$$\eta : (F_S+F_q, j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q}) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$$

tal que $\qquad \eta \circ \varphi_{F_S} = \psi \qquad y \qquad \eta \circ \varphi_{F_q} = \psi_q.$

Si $p \in S$ tenemos que

$$\eta \circ \varphi_p^{S'} = \eta \circ \varphi_{F_S} \circ \varphi_p^S = \psi \circ \varphi_p^S = \psi_p$$

y $$\eta\circ\varphi_q^{S'} = \eta\circ\varphi_{F_q} = \psi_q$$

$$\therefore \quad \forall \quad p \in S' \qquad \eta\circ\varphi_p^{S'} = \psi_p.$$

Unicamente falta demostrar la unicidad de η.

Supongamos

$$\eta' \ : \ (F_S+F_q, j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q}) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$$

tal que $\eta\circ\varphi_p^{S'} = \psi_p$ para todo $p \in S'$. Entonces

$$\begin{aligned} \eta'((f,f_g)R_{F_S+F_q}) &= \eta'((f,1_{F_q})R_{F_S+F_q})\eta'((1_{F_S},f_q)R_{F_S+F_q}) \\ &= \eta'\circ\varphi_{F_S}(f)\eta'\circ\varphi_{F_q}(f_q) \\ &= \eta'\circ\varphi_{F_S}(f)\eta'\circ\varphi_q^{S'}(f_q) \\ &= \eta'\circ\varphi_{F_S}(f)\psi_q(f_q). \end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que

$$\eta'\circ\varphi_{F_S}\colon (F_S, j_S, k_S) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$$

y es tal que $\eta'\circ\varphi_{F_S}\circ\varphi_p^S = \eta'\circ\varphi_p^{S'} = \psi_p$ para toda $p \in S$.

Como ψ era único en esta propiedad

$$\therefore \quad \psi = \eta'\circ\varphi_{F_S}$$

$$\therefore \quad \eta'((f,f_q)R_{F_S+F_q}) = \psi(f)\psi_q(f_q)$$

y tenemos que $\qquad \eta((f,f_q)R_{F_S+F_q}) = \psi(f)\psi_q(f_q)$

$$\therefore \quad \eta = \eta'$$

Con lo cual queda demostrado que un coproducto de la familia $(F_p, j_p, k_p)_{p\in S'}$, es

$$\phi_{S'} = [(F_S+F_q, j_{F_S+F_q}, k_{F_S+F_q};\ (\varphi_p^{S'})_{p\in S'}]$$

Utilizando la propiedad universal del coproducto tenemos que si $S \subseteq T \in \mathfrak{F}$ existe un único morfismo de $\mathfrak{C}_X$

$$\varphi_S^T : (F_S, j_S, k_S) \longrightarrow (F_T, j_T, k_T)$$

tal que $\qquad \varphi_S^T \circ \varphi_p^S = \varphi_p^T$

y si $S \subseteq T \subseteq V \in \mathfrak{F}$ entonces $\varphi_S^V = \varphi_T^V \circ \varphi_S^T$.

Sea $F' = \bigcup_{S\in\mathfrak{F}} F_S$ unión ajena y se define la siguiente relación R en F'

Si $f \in F_S$, $f' \in F_T$ entonces $(f,f') \in R$ si existe $V \in \mathfrak{F}$ tal que $V \supseteq S \cup T$ y $\varphi_S^V(f) = \varphi_T^V(f')$.

Se comprueba fácilmente que R es relación de equivalencia.

Sea $F = F'/R$. Denotamos por $\bar{f}$ a la clase de f .

Definimos la siguiente operación en F:

si $f \in F_S$, $g \in F_T$ y $V \supseteq S \cup T \in \mathfrak{F}$ y $h = \varphi_S^V(f)\varphi_T^V(g)$ se define

$$\bar{f}\ \bar{g} = \bar{h}.$$

Veamos que la definición no depende de los representantes, supongamos $f' \in F_{S'}$, $g' \in F_{T'}$, $f' \in \bar{f}$, $g' \in \bar{g}$. Entonces existen U, $U' \in \mathfrak{F}$ tal que $U \geq S \cup S'$, $U' \geq T \cup T'$ y

$$\varphi_S^U(f) = \varphi_{S'}^U(f') \qquad \text{y} \qquad \varphi_T^{U'}(g) = \varphi_{T'}^{U'}(g')$$

Supongamos que $V' \in \mathfrak{F}$ tal que $V' \geq S' \cup T'$ y

$$h' = \varphi_{S'}^{V'}(f')\varphi_{T'}^{V'}(g').$$

Sea $W \in \mathfrak{F}$ tal que $W \geq V \cup V' \cup U \cup U'$ entonces

$$\varphi_V^W(h) = \varphi_V^W(\varphi_S^V(f)\varphi_T^V(g)) = \varphi_S^W(f)\varphi_T^W(g)$$

$$= \varphi_U^W(\varphi_S^U(f))\varphi_{U'}^W(\varphi_T^{U'}(g)) = \varphi_U^W(\varphi_{S'}^U(f'))\varphi_{U'}^W(\varphi_{T'}^{U'}(g'))$$

$$= \varphi_{S'}^W(f')\varphi_{T'}^W(g') = \varphi_{V'}^W(\varphi_{S'}^{V'}(f')\varphi_{T'}^{V'}(g') = \varphi_{V'}^W(h')$$

$\therefore$ $(h,h') \in R$

$\therefore$ la operación esta bien definida.

F con esta operación resulta ser un grupo. El elemento neutro es $\bar{1}_{F_S}$, con $S \in \mathfrak{F}$, se comprueba directamente que la operación es asociativa, y si $f \in F_S$ entonces el inverso de $\bar{f}$ es $\overline{f^{-1}}$.

Definimos el homomorfismo $j_F : F \longrightarrow X$ como sigue: si $\bar{f} \in F$ entonces existe $S \in \mathfrak{F}$ tal que $f \in F_S$ entonces

$$j_F(\bar{f}) = j_S(f)$$

si $f' \in F_T$ es tal que $f' \in \bar{f}$ entonces existe $V \in \mathfrak{F}$ tal que $V \geq S \cup T$ y $\varphi_S^V(f) = \varphi_T^V(f')$ y como φ_S^V y φ_T^V son morfismos de $\mathfrak{C}_X$

entonces

$$j_V(\varphi_S^V(f)) = j_S(f) \qquad y \qquad j_V(\varphi_T^V(f')) = j_T(f')$$

y como $\varphi_S^V(f) = \varphi_T^V(f')$

$$\therefore \quad j_S(f) = j_T(f')$$

$\therefore$ la definición no depende del representante.

Veamos que j_F es un homomorfismo. Sean $f \in F_S$, $g \in F_T$ y $V \in \mathfrak{Z}$ tal que $V \geq S \cup T$ y $h = \varphi_S^V(f)\varphi_T^V(g)$ entonces, como

$$\bar{f} = \overline{\varphi_S^V(f)} \qquad y \qquad \bar{g} = \overline{\varphi_T^V(g)}$$

entonces

$$j_F(\bar{f}\ \bar{g}) = j_F(\overline{\varphi_S^V(f)}\ \overline{\varphi_T^V(g)}) = j_F(\overline{\varphi_S^V(f)\varphi_T^V(g)})$$

$$= j_V(\varphi_S^V(f))j_V(\varphi_T^V(g)) = j_S(f)j_T(g) = j_F(\bar{f})j_F(\bar{g})$$

$$\therefore \quad j_F \text{ es homomorfismo}$$

Ahora definimos un homomorfismo $k_F\colon X \longrightarrow \mathrm{Aut}F$ tal que si $x \in X$ y $f \in F_S$ entonces

$$k_F(x)(\bar{f}) = \overline{k_S(x)(f)}$$

Se comprueba directamente que $k_F(x)$ no depende del representante.

Veamos que $k_F(x)$ es un homomorfismo:

Sean $f \in F_S$, $g \in F_T$ y $V \in \mathfrak{F}$ tal que $V \geq S \cup T$ y supongamos $h = \varphi_S^V(f)\varphi_T^V(g)$ entonces

$$k_F(x)(\bar{f}\ \bar{g}) = k_F(x)(\bar{h}) = \overline{k_V(x)(h)} = \overline{k_V(x)(\varphi_S^V(f)\varphi_T^V(g))}$$

$$= \overline{k_V(x)(\varphi_S^V(f))}\ \overline{k_V(x)(\varphi_T^V(g))} = \overline{\varphi_S^V(k_S(x)(f))}\ \overline{\varphi_T^V(k_T(x)(g)}$$

$$= k_F(x)(\bar{f})k_F(x)(\bar{g}).$$

y como $k(x^{-1})$ es el inverso de $k(x)$

$$\therefore \quad k(x) \in \mathrm{Aut}F$$

Proposición 1.3.1 (F, j_F, k_F) es un objeto de $\mathfrak{C}_X$.

dem.- Sean $f \in F_S$, $g \in F_T$. Sea $V \in \mathfrak{F}$ tal que $V \geq S \cup T$ entonces $\bar{f} = \overline{\varphi_S^V(f)}$, $g = \overline{\varphi_S^V(g)}$

$$\therefore \quad k_F \circ j_F(\bar{f})(\bar{g}) = k_F(j_F(\overline{\varphi_S^V(f)})(\overline{\varphi_T^V(g)})$$

$$= \overline{k_V(j_V(\varphi_S^V(f))(\varphi_T^V(g)))}$$

$$= \overline{g^{-1}}\ \bar{f}\ \bar{g}$$

y si $x \in X$ es fácil ver que

$$j_F(k_F(x)(\bar{f}) = x^{-1} j_F(\bar{f})x.$$

con lo cual se completa la demostración.

Se definen ahora los morfismos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p : (F_p, j_p, k_p) & \longrightarrow & (F, j_F, k_F) \\ f & \longmapsto & \bar{f} \end{array}$$

Es inmediato que φ_p es homomorfismo, y también que es morfismo de $\mathfrak{C}_X$.

Observación: F está generado por la unión de los $\varphi_p(F_p)$

dem.- F_S con $S \in \mathfrak{F}$ está generado por la unión de los $\varphi_p^S(F_p)$, $p \in S$. Si $\bar{f} \in F$ entonces $f \in F_T$ para alguna $T \in \mathfrak{F}$. ∴ existen f_{p_j} con $p_j \in S$ tales que

$$f = \varphi^T_{p_{j_1}}(f_{p_1}) \ \dots \ \varphi^T_{p_{j_n}}(f_{p_n})$$

entonces

$$\bar{f} = \overline{\varphi^T_{p_1}(f_{p_1}) \ \dots \ \varphi^T_{p_{j_n}}(f_{p_n})}$$

$$\therefore \quad \bar{f} = \varphi_{p_{j_1}}(f_{p_1}) \ \dots \ \varphi_{p_{j_n}}(f_{p_n}).$$

Proposición 1.3.2 $[(F, j_F, k_F); \{\varphi_p\}_{p \in I}]$ es un coproducto de $(F_p, j_p, k_p)_{p \in I}$.

dem.- Supongamos (G, j_G, k_G) un objeto de $\mathfrak{C}_X$ y para cada

$p \in I$ un morfismo

$$\psi_p : (F_p, j_p, k_p) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$$

entonces definimos $\psi : (F, j_F, k_F) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$ como sigue:

si $\bar{f} \in F$ entonces existe $S \in \mathfrak{F}$ tal que $f \in F_S$

por la propiedad universal del coproducto $[(F_S, j_S, k_S);\ \{\varphi_p^S\}_{p\in S}]$ existe un único morfismo $\eta_S : (F_S, j_S, k_S) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$ tal que para toda $p \in S$ $\eta_S \circ \varphi_p^S = \psi_p$.

Entonces se define $\psi(\bar{f}) = \eta_S(f)$.

Veamos que esta definición no depende del representante. Si $f' \in F_T$ es tal que $f' \in \bar{f}$, sea $V \in \mathfrak{F}$ tal que $V \supseteq S \cup T$ y $\varphi_S^V(f) = \varphi_T^V(f')$, tenemos que $\eta_V \circ \varphi_S^V \circ \varphi_p^S = \eta_V \circ \varphi_p^V = \psi_p$ para toda $p \in S$ y como η_S es única con dicha propiedad

$$\therefore \quad \eta_V \circ \varphi_S^V = \eta_S$$

análogamente $\eta_V \circ \varphi_T^V = \eta_T$

$$\therefore \quad \eta_S(f) = \eta_V \circ \varphi_S^V(f) = \eta_V \circ \varphi_T^V(f') = \eta_T(f')$$

Se comprueba directamente que ψ es homomorfismo y que es de hecho un morfismo de $\mathfrak{C}_X$. Tenemos que

$$\psi \circ \varphi_p(f) = \psi(\bar{f}) = \eta_p(f) = \eta_p(\varphi_p^p(f)) = \psi_p$$

$$\therefore \quad \psi \circ \varphi_p = \psi_p$$

Veamos ahora la unicidad de ψ.

Supongamos $\xi : (F, j_F, k_F) \longrightarrow (G, j_G, k_G)$ tal que $\forall\ p \in I$ $\xi \circ \varphi_p = \psi_p$.

Sea $\bar{f} \in F$. Como F está generado por los $\varphi_p(F_p)$ entonces $\exists\ f_{p_1}, \ldots, f_{p_n}$ con $f_{p_i} \in F_{p_i}$ tales que

$$\bar{f} = \varphi_{p_1}(f_{p_1}) \ldots \varphi_{p_n}(f_{p_n})$$

$$\therefore\ \xi(\bar{f}) = \xi(\varphi_{p_1}(f_{p_1}) \ldots \varphi_{p_n}(f_{p_n}))$$

$$= \psi_{p_1}(f_{p_1}) \ldots \psi_{p_n}(f_{p_n})$$

y tenemos que $\quad \psi(\bar{f}) = \psi_{p_1}(f_{p_1}) \ldots \psi_{p_n}(f_{p_n})$

$$\therefore\ \xi = \psi$$

lo cual completa la demostración.

1.4 Sistemas Admisibles de Grupos y Operaciones.

Sea $\{F_p\}_{p\in I}$ una familia cualquiera de grupos junto con homomorfismos

$$k_q^r : F_r \longrightarrow \mathrm{Aut}F_q$$

para todo $r, q \in I$. A la familia de grupos junto con los homomorfismos la denotamos por

$$(F_p, k_q^r)_I$$

Definición 1.4.1 Decimos que $(F_p, k_q^r)_I$ es un sistema admisible de grupos y operaciones si existe algún grupo X y para cada $p \in I$ homomorfismos j_p, k_p tales que se cumplen:

1) (F_p, j_p, k_p) es un objeto de $\mathfrak{C}_X$ para cada $p \in I$

2) $k_q^r(f) = k_q \circ j_r(f)$ para todo $q, r \in I$, $f \in F_r$.

En este caso decimos que $\mathfrak{C}_X$ es una categoría apropiada al sistema y que la colección de las parejas (j_p, k_p) es una inmersión de $(F_p, k_q^r)_I$ en $\mathfrak{C}_X$.

Para cada inmersión del sistema en una categoría apropiada se tiene que existe un coproducto

$$[(F_X, j_X, k_X);\ (\varphi_p^X)_{p\in I}]$$

Lema 1.4.2 Si $\mathfrak{C}_X$ y $\mathfrak{C}_Y$ son categorías apropiadas a $(F_p, k_q^r)_I$ entonces existe un isomorfismo

$$\varphi : F_X \longrightarrow F_Y$$

tal que
$$\varphi_p^Y = \varphi \circ \varphi_p^X$$

$$\varphi_p^X = \varphi^{-1} \circ \varphi_p^Y$$

para todo $p \in I$.

dem.- Para una inmersión cualquiera del sistema en $\mathfrak{C}_X$ se considera el coproducto obtenido como arriba para un cierto orden total I. Denotamos este coproducto por

$$[(F, j_F, k_F);\ (\varphi_p)_{p\in I}].$$

Ahora si tomamos cualquier inmersión en $\mathfrak{C}_Y$ y aplicamos el mismo porocedimiento con el mismo orden en I obtenemos un coproducto

$$[(F, j_F', k_F'); \{\varphi_p\}_{p\in I}]$$

donde se obtiene el mismo grupo F y los mismos morfismos φ_p.

Si $[(F_X, j_X, k_X); \{\varphi_p^X\}_{p\in I}]$ en X

y $[(F_Y, j_Y, k_Y); \{\varphi_p^Y\}_{p\in I}]$ en Y

son coproductos respecto a las mismas inmersiones tenemos isomorfismos

$$\psi : F_X \longrightarrow F \quad \text{tal que} \quad \varphi_p = \psi\circ\psi_p^X$$

$$\psi' : F \longrightarrow F_Y \quad \text{tal que} \quad \varphi_p^Y = \psi'\circ\varphi_p$$

definimos $\varphi = \psi'\circ\psi$, entonces φ es un isomorfismo

$$\varphi : F_X \longrightarrow F_Y$$

y $$\varphi\circ\varphi_p^X = \psi'\circ\psi\circ\varphi_p^X = \psi'\circ\varphi_p = \varphi_p^Y$$

y es claro que $\varphi_p^X = \varphi^{-1}\circ\varphi_p^Y$ para toda $p \in I$. Esto permite la siguente definición.

Definición 1.4.3 Una suma activa de un sistema admisible $(F_p, k_q^\Gamma)_I$ de grupos y operaciones es una colección

$$(F, \{\varphi_p\}_{p\in I})$$

Constituida por un grupo F y homomorfismos

$$\varphi_p : F_p \longrightarrow F$$

con la propiedad de que, para cada inmersión $(j_p, k_p)_{p\in I}$ del sistema en una categoría apropiada de $\mathfrak{C}_X$ existan j_X, k_X tales que

$$[(F, j_X, k_X); \{\varphi_p\}_{p\in I}]$$

es un coproducto de (F_p, j_p, k_p) en la categoría $\mathfrak{C}_X$.

Proposición 1.4.4 Todo sistema admisible tiene una suma activa. Dadas las sumas activas,

$$(F; \{\varphi_p\}_{p\in I}) \quad \text{y} \quad (F'; \{\varphi'_p\}_{p\in I})$$

existe un isomorfismo $\varphi : F \longrightarrow F'$ tal que

$$\varphi'_p = \varphi\circ\varphi_p \quad \text{y} \quad \varphi_p = \varphi^{-1}\circ\varphi'_p$$

dem.– Es claro.

2. DEFINICION DE SUMA ACTIVA DADA POR FRANCISCO TOMAS PONS EN 1978.

Como en la sección anterior, si X es un grupo, consideramos Aut(X) el grupo de automorfismos con la operación

$$st = t\circ s \quad \text{si} \quad s,\ t \in \mathrm{Aut}(X).$$

supongamos ahora que se tienen varios grupos, H_1, H_2, ... , H_r, ajenos dos a dos, y homomorfismos

$$\phi^i_j\colon H_i \longrightarrow \mathrm{Aut}H_j$$

Notación.– Si $f \in H_i$, $g \in H_j$ entonces $f^g = \phi^j_i(g)(f)$.

Si $f,g,h \in H_1 \cup \dots \cup H_r$ entonces $f^{gh} = (f^g)^h$.

Para evitar doble exponenciación se utilizan también: $f*g = f^g$, $f*gh = f^{gh}$, etc.

Estas notaciones no causan confusión ya que los H_i son ajenos dos a dos.

Suponemos ademas que los homomorfismos ϕ^i_j cumplen las siguientes condiciones:

$$i)\quad \phi^i_i(g)(h) = g^{-1}hg \qquad \forall\, g,h \in H_i$$

$$ii)\quad f^{g*h} = f^{h^{-1}gh} \qquad \forall\, f,g,h \in H_1\cup H_2\cup \dots \cup H_r$$

Convenimos en que f_i, g_i, h_i representan elementos de H_i.

Consideremos el producto cartesiano $H_1 x H_2 x \dots x H_r$ con la operación

$$(f_1,f_2,\dots,f_r)(g_1,g_2,\dots,g_r) = (f_1g_1, f_2^{g_1}g_2, \dots, f_r^{g_1g_2\cdots g_{r-1}}g_r)$$

Tenemos que con esta operación $H_1xH_2x \dots xH_r$ es grupo. En efecto, el elemento identidad es (1,1, ... ,1). El inverso de $(f_1,f_2, \dots ,f_r)$ es $(f_1^{-1},(f_2^{-1})^{f_1^{-1}}, \dots ,(f_r^{-1})^{f_{r-1}^{-1}\cdots f_2^{-1}f_1^{-1}})$

Si calculamos la coordenada k del producto

$$(f_1,f_2, \dots ,f_r)(f_1^{-1},(f_2^{-1})^{f_1^{-1}}, \dots ,(f_r^{-1})^{f_{r-1}^{-1}\dots f_2^{-1}f_1^{-1}})$$

obtenemos

$$f_k^{f_1^{-1}(f_2^{-1}*f_1^{-1})(f_3^{-1}*f_2^{-1}f_1^{-1}) \dots (f_{k-1}*f_{k-2}^{-1} \dots f_1^{-1})}(f_k^{-1})^{f_{k-1}^{-1}\dots f_1^{-1}} =$$

$$= f_k^{f_{k-1}^{-1}f_{k-2}^{-1} \dots f_1^{-1}}(f_k^{-1})^{f_{k-1}^{-1}f_{k-2}^{-1} \dots f_1^{-1}} = 1_k$$

análogamente el producto al revés.

Se cumple la ley asociativa. Calculando el elemento de la coordenada k del producto

$$(f_1,f_2, \dots f_r)[(g_1, \dots ,g_r)(h_1, \dots ,h_r)]$$

obtenemos

$$f_k^{g_1h_1(g_2*h_1)h_2(g_3*h_1h_2)h_3 \dots (g_{k-1}*h_1h_2\dots h_{k-2})h_{k-1}}g_k^{h_1\dots h_{k-1}}h_k =$$

$$= f_k^{g_1h_1(h_1^{-1}g_2h_1)\dots(h_{k-2}^{-1}\dots h_1^{-1}g_{k-1}h_1\dots h_{k-2})h_{k-1}}g_k^{h_1\dots h_{k-1}}h_k =$$

$$= (f_k^{g_1g_2\dots g_{k-1}}g_k)^{h_1h_2\dots h_{k-1}}h_k$$

que es precisamente el elemento de la coordenada k del producto

$$[(f_1,f_2, \dots f_r)(g_1, \dots ,g_r)](h_1, \dots ,h_r)$$

Sea R el subgrupo normal de $H_1 x H_2 x \dots x H_r$ generado por los elementos de la forma

$$(1,1, \dots ,f_i^{-1}f_i^{g_j},1, \dots ,g_j^{-1}g_j^{f_i},1, \dots ,1)$$

para todo $i \neq j$.

Definición 2.1. Al grupo $S = H_1 x H_2 x \dots x H_r / R$ lo llamamos la suma activa de los H_i y los ϕ_j^i.

Denotamos por $(f_1,f_2, \dots , f_r)' = (f_1, \dots ,f_r)R$.

Para cada i tenemos el homomorfismo

$$\begin{aligned}\psi_i :\ & H_i \longrightarrow S \\ & h \longmapsto (1, \ \dots \ ,1,h,1, \ \dots \ ,1)'\end{aligned}$$

Proposición 2.2. Para todo $i,j = 1,2,\dots,r$ se cumple:

$$\psi_i(f_i)^{-1}\psi_j(g_j)\psi_i(f_i) = \psi_j(g_j^{f_i})$$

dem.– Consideramos tres casos:

$i)$ $i < j$

$$\psi_i(f_i)^{-1}\psi_j(g_j)\psi_i(f_i) =$$

$$= (1,\dots,1,f_i^{-1},1,\dots,1)'(1,\dots,1,g_j,1\dots,1)'(1,\dots,1,f_i,1,\dots,1)'$$

$$= (1,\dots,1,g_j^{f_i},1,\dots,1)' = \psi_j(g_j^{f_i})$$

$ii)$ $i = j$

$$\psi_i(f_i)^{-1}\psi_j(g_j)\psi_i(f_i) = \psi_j(f_i^{-1}g_jf_i) = \psi_j(g_j^{f_i})$$

$iii)$ $i > j$

$$\psi_i(f_i)^{-1}\psi_j(g_j)\psi_i(f_i) = (1,\dots,1,g_j,1,\dots,1,(f_i^{-1})^{g_j}f_i,1,\dots,1)' =$$

$$(1,..,1,g_j,1,..,1,(f_i^{-1})^{g_j}f_i,\dots,1)'(1,..,1,g_j^{-1}g_j^{f_i},..,1,f_i^{-1}f_i^{g_j},..1)'$$

$$= (1,..,1,\ g_j^{f_i},1,..,1,(f_i^{-1})^{g_j * f_i f_i^{g_j^{-1}(g_j * f_i)}} f_i^{-1}f_i^{g_j},1,\dots,1)$$

y tenemos que

$$(f_i^{-1})^{g_j * f_i f_i^{g_j^{-1}(g_j * f_i)}} f_i^{-1}f_i^{g_j} = (f_i^{-1})^{f_i^{-1}g_jf_if_i^{g_j^{-1}f_i^{-1}g_jf_i}} f_i^{-1}f_i^{g_j}$$

$$= (f_i^{-1}f_i^{-1}f_i)^{g_jf_if_i^{-1}(f_i^{g_j^{-1}f_i^{-1}g_j})} f_if_i^{-1}f_i^{g_j}$$

$$= f_i^{-1}(f_i^{-1})^{g_j}f_if_i^{-1}(f_i^{f_i^{-1} * g_j})f_if_i^{-1}f_i^{g_j}$$

$$= f_i^{-1}(f_i^{-1})^{g_j} f_i^{g_j} f_i (f_i^{-1})^{g_j} f_i^{g_j} = 1$$

$$\therefore \quad \psi_i(f_i)^{-1}\psi_j(g_j)\psi_i(f_i) = \psi_j(g_j^{f_i})$$

La siguiente proposición es la propiedad universal de la suma activa:

Proposición. 2.3. Si T es un grupo y se tienen para toda i

$$\chi_i\colon H_i \longrightarrow T$$

homomorfismos tales que

$$\chi_i(f_i)^{-1}\chi_j(g_j)\chi_i(f_i) = \chi_j(g_j^{f_i})$$

para todo i, j, $f_i \in H_i$, $g_j \in H_j$, entonces existe un único homomorfismo $\psi\colon S \longrightarrow T$ tal que

$$\chi_i = \psi\circ\psi_i \quad \text{para todo } i = 1,2,\dots,r$$

dem.— Sea T un grupo y $\chi_i\colon H_i \longrightarrow T$ una familia de homomorfismos con la propiedad

$$\chi_i(f_i)^{-1}\chi_j(g_j)\chi_i(f_i) = \chi_i(g_j^{f_i})$$

entonces se define

$$\begin{aligned} \psi'\colon H_1 x H_2 x \dots x H_r &\longrightarrow T \\ (h_1, \dots, h_r) &\longmapsto \chi_1(h_1)\chi_2(h_2)\dots\chi_r(h_r) \end{aligned}$$

Se comprueba directamente que ψ' es homomorfismo.

Ademas se tiene que

$$\psi'((1,\dots,1,g_j^{-1}g_j^{f_i},1,\dots,1,f_i^{-1}f_i^{g_j},1,\dots,1)) = 1_T$$

$$\therefore \quad \psi'(R) = 1_T$$

$\therefore$ $\exists$ $\psi\colon S \longrightarrow T$ homomorfismo tal que

$$\psi((h_1,h_2,\dots,h_r)') = \psi'((h_1,\dots,h_r)) = \chi_1(h_1)\chi_2(h_2)\dots\chi_r(h_r)$$

Se comprueba directamente que para toda i

$$\chi_i = \psi \circ \psi_i.$$

Si μ: S $\longrightarrow$ T es tal que $\forall i$ $\mu \circ \psi_i = \chi_i$ tenemos que

$$\mu((h_1, h_2, \ldots, h_r)') =$$

$$= \mu((h_1, 1, \ldots, 1)')\mu((1, h_2, 1, \ldots, 1)')\ldots\mu((1, \ldots, 1, h_r)')$$

$$= \mu(\psi_1(h_1))\mu(\psi_2(h_2))\ldots\mu(\psi_r(h_r))$$

$$= \psi((h_1, h_2, \ \ldots \ , h_r)')$$

$$\therefore \quad \mu = \psi$$

$\therefore$ ψ es única

Corolario 2.4. La suma activa de los H_i y los ϕ^i_j no depende del orden en que se tomen los H_i.

dem.- Se deduce facilmente utilizando la propiedad universal de la suma activa S y los morfismos ψ_i.

3. DEFINICION DE SUMA ACTIVA DADA POR HUGO NAVA LOPEZ.

Esta definición es una generalización de la definición dada por Tomás en 1978 (sección anterior). La mayor parte de las demostraciones se omiten, por ser generalizaciones de las demostraciones dadas en la sección anterior.

Como en la sección anterior, si G es un grupo, consideramos al grupo AutG de automorfismos de G con la operación

$$\text{si} \quad s,t \in \mathrm{Aut}G \quad \text{entonces} \quad st = t \circ s$$

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos ajenos dos a dos, donde I es un conjunto totalmente ordenado de índices. Y para cada $i,j \in I$ un homomorfismo

$$\varphi_j^i \colon G_i \longrightarrow \mathrm{Aut}G_j$$

Notación. 1) Si $g \in G_i$, $a \in G_j$ entonces $a^g = \varphi_j^i(g)(a)$

2) Si $a,g,h \in \bigcup_{i \in I} G_i$ entonces $a^{gh} = (a^g)^h$.

Suponemos, además, que los morfismos φ_j^i cumplen las siguientes dos condiciones

1) $\forall\, a,g \in G_i \qquad a^g = g^{-1}ag$

2) $\forall\, a,g,h \in \bigcup_{i \in I} G_i \qquad a^{g^h} = a^{h^{-1}gh}$.

Sea $\bigoplus_{i \in I} G_i = \{ f \colon I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \mid f(i) \in G_i \ \forall\, i \in I,$ y $f(i) \neq 1$ sólo para un número finito de $i \in I \}$

Entonces $\bigoplus_{i \in I} G_i$ son las I-adas, donde la coordenada i pertenece a G_i, y solo un número finito de coordenadas es distinto de 1.

Definimos

$$\begin{aligned} p_j\colon \bigoplus_{i\in I} G_i &\longrightarrow G_j \\ f &\longmapsto f(j) \end{aligned}$$

la proyección natural sobre la coordenada j.

Notación. Si $\alpha \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ se denota por $\alpha_j = p_j(\alpha) = \alpha(j)$

En $\bigoplus_{i\in I} G_i$ se define el siguiente producto:

si $\alpha, \beta \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ y $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{r(j)}$ son los índices de I menores que j tales que $\beta_{\ell_k} \neq 1$, $k = 1, 2, \ldots, r(j)$, entonces $\alpha\beta = \gamma$, donde γ es tal que

$$\gamma_j = \alpha_j^{\beta_{\ell_1}\beta_{\ell_2}\cdots\beta_{\ell_{r(j)}}}\beta_j$$

Como solo un número finito de α_j y β_j es distinto de 1, es claro que solo un número finito de γ_j es distinto de 1.

$$\therefore \quad \gamma \in \bigoplus_{i\in I} G_i$$

Con esta operación $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es un grupo: el elemento identidad es α, donde $\forall\, j \in I \;\; \alpha_j = 1$; si $\alpha \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ el inverso de α es tal que $(\alpha^{-1})_j = (\alpha_j^{-1})^{\alpha_{\ell_{r(j)}}^{-1}\cdots\alpha_{\ell_2}^{-1}\alpha_{\ell_1}^{-1}}$ donde $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{r(j)}$ son los índices menores que j donde $\alpha_{\ell_k} \neq 1$; la operación es asociativa, lo cual se comprueba análogamente a como se hizo en la sección anterior.

De aquí en adelante denotaremos a $\bigoplus_{i\in I} G_i$ simplemente por $\oplus G_i$.

Sea N el subgrupo normal de $\oplus G_i$ generado por los elementos $\alpha \in \oplus G_i$ tales que $\exists\, i, j \in I$, con $i \neq j$ y

$$\alpha_\ell = 1 \quad \text{si} \quad \ell \neq i,\ \ell \neq j$$

$$\alpha_i = g_i^{-1} g_i^{g_j}, \quad \alpha_j = g_j^{-1} g_j^{g_i} \quad \text{con} \quad g_i \in G_i,\ g_j \in G_j$$

Definición 3.1. La suma activa de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ y los homomorfismos φ_j^i es

$$S = \oplus G_i / N$$

Notación. α' denotará la clase αN de α en S.

Para cada $i \in I$ tenemos definidos los homomorfismos

$\psi_i\colon \begin{array}{ccc} G_i & \longrightarrow & S \\ g & \longmapsto & \alpha' \end{array}$ donde α' es tal que $\alpha_j = 1$ si $j \neq i$ y $\alpha_i = g$

Proposición 3.2. Para todo $i, j \in I$

$$\psi_i(g_i^{-1})\psi_j(g_j)\psi_i(g_i) = \psi_j(g_j^{g_i})$$

si $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$.

dem.— Análoga a la proposición 2.2.

Proposición 3.3. (Propiedad universal) Si $\chi_i\colon G_i \longrightarrow T$ son homomorfismos definidos $\forall\, i \in I$, tales que si $i, j \in I$, $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$

$$\chi_i(g_i^{-1})\chi_j(g_j)\chi_i(g_i) = \chi_j(g_j^{g_i})$$

entonces existe un único homomorfismo $\varphi\colon S \longrightarrow T$ tal que

$$\forall\, i \in I \qquad \chi_i = \varphi\circ\psi_i.$$

dem.— Análoga a la proposición 2.3.

Corolario 3.4. La suma S de $\{G_i\}_{i\in I}$ y los morfismos φ_j^i no depende del orden de I.

dem.— Se deduce fácilmente utilizando la propiedad universal de la suma S.

4. DEFINICION DE SUMA ACTIVA DADA POR PAULO RIBENBOIM.

1. Gráficas Dirigidas.

Definición. 4.1.1. Una gráfica dirigida $\mathfrak{F}$ consiste de un conjunto no vacío I, que llamamos vértices, y para toda $i,j \in I$ un conjunto $A(i,j)$, que llamamos flechas ($A(i,j)$ puede ser vacío). Si $\alpha \in A(i,j)$, $i = o(\alpha)$ es el vértice inicial de α, y $j = t(\alpha)$ es el vértice terminal de α. Denotaremos por A al conjunto de todas las flechas

$$A = \dot{\bigcup_{i,j\in I}} A(i,j) \qquad \text{(unión ajena)}$$

En caso necesario se escribirá $\mathfrak{F} = (I,A,o,t)$.

Un camino de $\mathfrak{F}$ es una n-ada

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_n, \ \ldots \ ,\alpha_2,\alpha_1)$$

donde $n \geq 1$, y cada α_k es una flecha y $t(\alpha_k) = o(\alpha_{k+1})$ para $k = 1,2,\ldots,n-1$.

El vértice inicial de $\tilde{\alpha}$ es $o(\alpha_1)$ y el vértice terminal de $\tilde{\alpha}$ es $t(\alpha_n)$. La longitud de $\tilde{\alpha}$ es n, y cada flecha esta asociada de manera natural con un camino de longitud 1.

Si $\tilde{\alpha} = (\alpha_n, \ \ldots \ ,\alpha_2,\alpha_1)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_m, \ \ldots \ ,\beta_2,\beta_1)$ son caminos de $\mathfrak{F}$. y $o(\beta_1) = t(\alpha_n)$ entonces

$$(\beta_m, \ \ldots \ ,\beta_2,\beta_1,\alpha_n, \ \ldots \ ,\alpha_2,\alpha_1)$$

es un camino de longitud n+m denotado por $\tilde{\alpha}\circ\tilde{\beta}$.

Un morfismo de una gráfica $\mathfrak{F}$ a una gráfica $\mathfrak{F}'$ es una función

$$\sigma\colon I\dot{\cup}A \longrightarrow I'\dot{\cup}A' \quad \text{(unión ajena)}$$

tal que $\sigma(I) \subseteq I'$, $\sigma(A) \subseteq A'$ y

$$\sigma\circ o = o'\circ\sigma, \qquad \sigma\circ t = t'\circ\sigma$$

Un morfismo de $\mathfrak{Z}$ en $\mathfrak{Z}$ que es biyectivo se llama un autmorfismo de $\mathfrak{Z}$. El conjunto $\mathrm{Aut}\mathfrak{Z}$ de automorfismos de $\mathfrak{Z}$ es un grupo bajo la composición.

2. Carcajes de Grupos.

Sea $\mathfrak{Z}$ una gráfica dirigida. Un carcaj de grupos sobre $\mathfrak{Z}$ es una familia $\mathfrak{G} = (G_i)_{i\in I}$ de grupos, donde los índices son los vértices de $\mathfrak{Z}$, y para todo $i, j \in I$ una familia $(c_\alpha)_{\alpha\in A(i,j)}$ de homomorfismos de grupos:

$$c_\alpha\colon G_i \longrightarrow G_j$$

Si $\tilde\alpha = (\alpha_n, \ldots, \alpha_2, \alpha_1)$ es un camino, con $o(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$ entonces, sea $c_{\tilde\alpha} = c_{\alpha_n}\circ \ldots \circ c_{\alpha_2}\circ c_{\alpha_1}$ entonces $c_{\tilde\alpha}\colon G_i \longrightarrow G_j$ es un homomorfismo.

Sea $\mathfrak{G}$ un carcaj sobre $\mathfrak{Z}$. Sea $\bar I = I$ y si $i, j \in I$ y $\alpha, \beta \in A(i,j)$, se define $\alpha \cong \beta$ cuando $c_\alpha = c_\beta$. Es claro que $\cong$ es relación de equivalencia.

Sea $\bar A(i,j) = A(i,j)/\cong$ y $\bar{\mathfrak{Z}}$ la gráfica dirigida con vértices $\bar I$ y flechas $\bar A(i,j)$. Entonces es claro que $\mathfrak{G}$ es un carcaj sobre $\mathfrak{Z}$ que satisface:

$$\forall\ \alpha, \beta \in \bar A(i,j) \text{ se tiene que } c_\alpha \neq c_\beta.$$

De aquí en adelante suponemos, sin perdida de generalidad, que la condición anterior se satisface.

El esparcido de un carcaj $\mathfrak{G}$ es el conjunto $\dot\bigcup_{i\in I} G_i$ (unión ajena), que denotaremos por $\coprod\mathfrak{G}$.

Definimos la siguiente operación parcial en $\coprod\mathfrak{G}$:

Si $f, g \in \coprod\mathfrak{G}$ y existe $i \in I$ tal que $f, g \in G_i$ entonces fg esta definido en $\coprod\mathfrak{G}$ como el producto fg de G_i.

Sea $\mathfrak{G}$ un carcaj de grupos sobre $\mathfrak{Z}$ y $\mathfrak{G}'$ un carcaj de grupos sobre $\mathfrak{Z}'$. Un morfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{G}'$ es una función $\sigma\colon \coprod\mathfrak{G} \longrightarrow \coprod\mathfrak{G}'$

tal que existe un morfismo $\underline{\sigma}$: $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{Y}'$ que satisface las siguientes condiciones:

1) $\forall\ i \in I \quad \sigma: G_i \longrightarrow G'_{\underline{\sigma}(i)}$ es homomorfismo de grupos.

2) $\forall\ i, j \in I$ y cada $\alpha \in \Lambda(i, j)$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{c_\alpha} & G_j \\ \sigma \big\downarrow & & \big\downarrow \sigma \\ G'_{\underline{\sigma}(i)} & \xrightarrow[c'_{\sigma(\alpha)}]{} & G'_{\underline{\sigma}(j)} \end{array}$$

es conmutativo.

Se dice que σ descansa sobre $\underline{\sigma}$.

Un automorfismo del carcaj $\mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{Y}$ es un morfismo σ: $\coprod\mathfrak{G} \longrightarrow \coprod\mathfrak{G}$ tal que

1) $\forall\ i \in I \quad \sigma: G_i \longrightarrow G_{\underline{\sigma}(i)}$ es un isomorfismo de grupos.

2) $\underline{\sigma}$ es un automorfismo de $\mathfrak{Y}$.

Al conjunto de automorfismos de $\mathfrak{G}$ lo denotamos por Aut$\mathfrak{G}$. Si $\sigma: \coprod\mathfrak{G} \longrightarrow \coprod\mathfrak{G}$ es un elemento de Aut$\mathfrak{G}$, entonces es claro que existe la función inversa, es decir, que σ es biyectiva, y $\sigma^{-1} \in$ Aut$\mathfrak{G}$.

El conjunto Aut$\mathfrak{G}$ es un grupo bajo la composición:

Si $\tau, \sigma \in$ Aut$\mathfrak{G}$ entonces $\tau \circ \sigma$ descansa sobre $\underline{\tau} \circ \underline{\sigma}$.

La identidad $1_{\coprod\mathfrak{G}}$: $\coprod\mathfrak{G} \longrightarrow \coprod\mathfrak{G}$ es el 1 del grupo y descansa sobre $1_{\mathfrak{Y}}$.

Si $\sigma \in$ Aut$\mathfrak{G}$ entonces σ^{-1} descansa sobre $\underline{\sigma}^{-1}$.

Notamos que si $\sigma \in$ Aut$\mathfrak{G}$ entonces $\underline{\sigma}$ esta determinada de manera única por σ.

Es claro que la composición de morfismos de carcajes es también morfismo de carcajes.

3. Acciones.

Definición 4.3.1. Sea $\mathfrak{G}$ un carcaj de grupos sobre la gráfica dirigida $\mathfrak{Z}$. Una acción en $\mathfrak{G}$ es una función

$$\tau\colon \coprod \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$$

tal que satisface las siguientes condiciones:

1) Si $h, h' \in \coprod \mathfrak{G}$ y hh' esta definido entonces

$$\tau^{hh'} = \tau^{h'} \circ \tau^{h}$$

2) Si $i \in I$ y $h = 1_{G_i}$ el elemento neutro de G_i entonces τ^h es el automorfismo identidad en $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$.

3) Si $i \in I$ y $h \in G_i$ entonces τ^h restringido a G_i es el automorfismo interior de G_i definido por h.

4) $\forall\, i, j \in I$, $\alpha \in A(i, j)$ y $h \in G_i$ $\quad \tau^{c_\alpha(h)} = \tau^h$.

Entonces, por 1) y 2) τ es homomorfismo. Y como $\tau^h \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$, entonces τ^h descansa sobre algun $\underline{\tau}^h \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{Z}$, y de acuerdo con la definición tenemos que:

5) $\forall\, h \in \coprod \mathfrak{G}$, $i \in I$ $\quad \tau^h\colon G_i \longrightarrow G_{\underline{\tau}^h(i)}$ es un isomorfismo de grupos.

6) $\forall\, h \in \coprod \mathfrak{G}$, $i, j \in I$, $\alpha \in A(i, j)$ el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "c_\alpha"] \arrow[d, "\tau^h"'] & G_j \arrow[d, "\tau^h"] \\
G_{\underline{\tau}^h(i)} \arrow[r, "c_{\underline{\tau}^h(\alpha)}"'] & G_{\underline{\tau}^h(j)}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Notación.- Se denota $h*k = \tau^h(k)$ $\;\forall\, h, k \in \coprod \mathfrak{G}$ cuando no se preste a confusión.

Se dice que la acción es trivial cuando

$$\forall \quad h,k \in \coprod\mathfrak{G} \qquad h*k = k$$

Observación 4.3.2. Si τ es una acción trivial en $\mathfrak{G}$, entonces G_i es abeliano $\forall\ i \in I$.

dem.- Sean $h,k \in G_i$ entonces $h*k = k$

$$\therefore \quad h*k = hkh^{-1} = k$$

$$\therefore \quad hk = kh$$

Se dice que la acción es normal cuando τ^h es el automorfismo identidad de $\mathfrak{Y}$, para todo $h \in \coprod\mathfrak{G}$.

Definición 4.3.3 Un carcaj activo de grupos consiste de un carcaj $\mathfrak{G}$ sobre una gráfica dirigida $\mathfrak{Y}$, junto con una acción τ en $\mathfrak{G}$. Si la acción τ es normal entonces lo llamamos un carcaj activo normal de grupos.

En caso de que $\mathfrak{Y} = I$ sea una gráfica discreta, llamamos a $\mathfrak{G}$ una familia activa de grupos, y si ademas la acción es normal la llamamos una familia activa normal de grupos.

4. Construcción de la Suma Activa.

Proposición 4.4.1. Sea $\mathfrak{G}$ un carcaj activo de grupos sobre la gráfica dirigida $\mathfrak{Y}$. Entonces:

1) Existe un grupo G y un homomorfismo

$$\phi\colon \coprod\mathfrak{G} \longrightarrow G$$

tales que

$$\phi(h*k) = \phi(h)\phi(k)\phi(h^{-1}) \qquad \forall \quad h,k \in \coprod\mathfrak{G}$$

$$\phi\circ c_\alpha = \phi \qquad \forall \quad \alpha \in \Lambda$$

2) Si G' es un grupo, $\phi'\colon \coprod\mathfrak{G} \longrightarrow G'$ es un homomorfismo que satisfacen las propiedades anteriores, entonces existe un único homomorfismo $\rho\colon G \longrightarrow G'$ tal que

$$\phi' = \rho\circ\phi$$

dem.— Sea F el producto libre de la familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$. Sea R el subgrupo normal de F generado por los elementos de la forma:

$$[h][k][h^{-1}][h*k]^{-1} \qquad \forall\ h,k \in \coprod\mathfrak{G}$$

$$[c_\alpha(h)][h^{-1}] \qquad \forall\ i,j \in I,\ \alpha\in A(i,j),\ h\in G_i$$

donde $[h]$ es la imagen de $h \in \coprod\mathfrak{G}$ en F.

Sea $G = F/R$ y $\gamma\colon F \longrightarrow G$ el homomorfismo canónico, entonces definimos $\phi\colon \begin{array}{ccc}\coprod\mathfrak{G} & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & \gamma([h])\end{array}$.

Como γ es homomorfismo y $[\ \ ]\colon G_i \longrightarrow F$ también es homomorfismo, entonces es claro que ϕ es homomorfismo.

Como $[h][k][h^{-1}][h*k]^{-1} \in R \quad \forall\ h,k \in \coprod\mathfrak{G}$ entonces

$$\gamma([h][k][h^{-1}][h*k]^{-1}) = 1_G$$

$$\therefore \quad \gamma([h])\gamma([k])\gamma([h^{-1}]) = \gamma([h*k])$$

$$\therefore \quad \phi(h)\phi(k)\phi(h^{-1}) = \phi(h*k)$$

análogamente se comprueba que

$$\phi(c_\alpha(h)) = \phi(h).$$

Supongamos G' un grupo y $\phi'\colon \coprod\mathfrak{G} \longrightarrow G'$ un homomorfismo con las mismas propiedades que ϕ y G. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod\mathfrak{G} \arrow[r, "{[\ \ ]}"] \arrow[dr, "\phi'"'] & F \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma'"] & F/R = G \arrow[dl, dashed, "\rho"] \\
 & G' &
\end{tikzcd}$$

Tenemos por la propiedad universal de producto libre, que existe un único homomorfismo $\gamma'\colon F \longrightarrow G'$ tal que para toda $g \in \coprod\mathfrak{G}$

$$\gamma'([g]) = \phi'(g) \qquad i.e.\ \gamma'\circ[\ ] = \phi'$$

Haciendo directamente el cálculo sobre los generadores de R se comprueba que $\gamma'(R) = 1_G$,

$$\therefore \quad \exists\ \rho\colon F/R \longrightarrow G' \text{ homomorfismo tal que } \rho\circ\gamma = \gamma'.$$

$$\therefore \quad \phi' = \gamma'\circ[\ ] = \rho\circ\gamma\circ[\ ] = \rho\circ\phi$$

$$\therefore \quad \phi' = \rho\circ\phi.$$

La unicidad de ρ es inmediata, con lo cual queda concluida la demostración.

Definición 4.4.2. Al grupo G junto con el homomorfismo ϕ se llama la suma activa del carcaj activo de grupos $\mathfrak{G}$. Si no se presta a confusión se utilizará la notación $G = \boxplus\mathfrak{G}$.

Observación 4.4.3. $G = \boxplus\mathfrak{G}$ esta generado por

$$\phi(\coprod\mathfrak{G}) = \bigcup_{i\in I}\phi(G_i).$$

dem.— Esto es claro, ya que $G = F/R$ y F es el producto libre de los G_i. Entonces F esta generado por $\bigcup_{i\in I}[G_i]$. entonces el cociente esta generado por

$$\gamma(\bigcup_{i\in I}[G_i]) = \bigcup_{i\in I}\gamma([G_i]) = \bigcup_{i\in I}\phi(G_i)$$

$$\therefore \quad \boxplus\mathfrak{G} \text{ esta generado por } \phi(\coprod\mathfrak{G})$$

Observación 4.4.4. Si para todo $h \in \coprod\mathfrak{G}$, $\tau^h(i) = i$ con $i \in I$ entonces $\phi(G_i)$ es un subgrupo normal de G.

dem.— Sea $k \in G_i$, $h \in \coprod\mathfrak{G}$ entonces

$$\phi(h)\phi(k)\phi(h^{-1}) = \phi(h*k) \in \phi(G_i)$$

por la observación anterior concluimos que $\phi(G_i)$ es un subgrupo normal de G.

Observación 4.4.5. $\forall$ h,k,l $\in \coprod\mathfrak{G}$ se tiene que

1) $\phi((k*h)*l) = \phi(k*(h*(k^{-1}*l)))$

2) $\phi(k*(h*l)) = \phi((k*h)*(k*l))$.

dem.— Ambas se calculan directamente.

Observación 4.4.6. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $k*(h*l) = (k*h)*(k*l)$

2) $(k*h)*l = k*(h*(k^{-1}*l))$

dem.— Supongamos que se cumple 1), entonces

$$\begin{aligned}(k*h)*l &= (k*h)*(1*l) = (k*h)*(kk^{-1}*l)\\ &= (k*h)*(k*(k^{-1}*l))\\ &= k*(h*(k^{-1}*l))\end{aligned}$$

análogamente para la otra.

Definición 4.4.7 En caso de que la acción cumpla alguna de estas dos últimas condiciones se dice que la acción es ditributiva.

5. DEFINICION DE SUMA ACTIVA DADA POR FRANCISCO GONZALEZ ACUÑA.

1.- La Categoría Ad.

Definición 5.1.1. Un ad A es un conjunto $|A|$ y una función $m_A: M_A \longrightarrow |A|$ donde $M_A \subseteq |A|^2$.

Definición 5.1.2. Se define la categoría Ad como sigue:

i) los objetos $\mathcal{O}b$(Ad) son los ads.

ii) si A y B son ads, entonces los morfismos $f: A \longrightarrow B$ son las funciones $f: |A| \longrightarrow |B|$ tales que

a) $f \times f(M_A) \subseteq M_B$

b) $m_A \circ f \times f = f \circ m_A$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f\times f"'] & {|A|} \arrow[d, "f"] \\ M_B \arrow[r, "m_B"] & {|B|} \end{tikzcd}$$

iii) la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

Proposición 5.1.3. Ad es una categoría completa.

dem.- Basta demostrar que Ad tiene productos arbitrarios y productos fibrados:

Productos: Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de ads. Sea A el ad tal que

$$|A| = \{ (a_i)_{i\in I} \mid a_i \in |A_i| \}$$

y sea

$$M_A = \{ ((a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I}) \in |A|^2 \mid \forall\, i \in I \ \ (a_i,b_i) \in M_{A_i} \}$$

Definimos

$$\begin{array}{rccc} m_A: & M_A & \longrightarrow & |A| \\ & ((a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I}) & \longmapsto & (m_{A_i}(a_i,b_i))_{i\in I} \end{array}$$

Como $(a_i,b_i) \in M_{A_i}$ $\forall\, i \in I$ entonces m_A esta bien definid

Veamos que A es el producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$:

Para cada $j \in I$ definimos

$$\begin{array}{rccc} \pi_j: & |A| & \longrightarrow & |A_j| \\ & (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & a_j \end{array}$$

Directamente se comprueba que π_j es un morfismo de la categoría Ad.

Supongamos B un ad, y para cada $i \in I$ un morfismo de ads

$$\varphi_i: B \longrightarrow A_i$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} {|B|} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & {|A|} \arrow[d, "\pi_i"] \\ & {|A_i|} \end{tikzcd}$$

Entonces es claro que si definimos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & |B| & \longrightarrow & |A| \\ & b & \longmapsto & (\varphi_i(b))_{i\in I} \end{array}$$

φ es la única función tal que

$$\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$$

Veamos que φ es un morfismo de ads:

Sea $(b_1,b_2) \in M_B$ entonces

$$\varphi x \varphi(b_1,b_2) = ((\varphi_i(b_1))_{i\in I},(\varphi_i(b_2))_{i\in I})$$

Como φ_i es un morfismo de ads para todo $i \in I$ tenemos que

$$(\varphi_i(b_1),\varphi_i(b_2)) \in M_{A_i}$$

$$\therefore \quad \varphi x\varphi(b_1, b_2) \in M_A$$

$$\therefore \quad \varphi x\varphi(M_B) \leq M_A$$

Consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_B \arrow[r, "m_B"] \arrow[d, "\varphi x\varphi"'] & {|B|} \arrow[d, "\varphi"] \\ M_A \arrow[r, "m_A"'] & {|A|} \end{tikzcd}$$

Tenemos que si $(b_1, b_2) \in M_B$ entonces

$$\varphi\circ m_B(b_1, b_2) = (\varphi_i(m_B(b_1, b_2)))_{i\in I}$$

y como $\varphi_i\circ m_B = m_{A_i}\circ\varphi_i x\varphi_i$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi\circ m_B(b_1, b_2) &= (m_{A_i}\circ\varphi_i x\varphi_i(b_1, b_2))_{i\in I} \\ &= (m_{A_i}(\varphi_i(b_1), \varphi_i(b_2)))_{i\in I} \\ &= m_A((\varphi_i(b_1))_{i\in I}, (\varphi_i(b_2))_{i\in I}) \\ &= m_A\circ\varphi x\varphi(b_1, b_2)\end{aligned}$$

$\therefore$ φ: B $\longrightarrow$ A es un morfismo de ads y $\pi_i\circ\varphi = \varphi_i$ para toda $i \in I$.

Supongamos φ': B $\longrightarrow$ A morfismo de Ad tal que para toda $i \in I$ $\pi_i\circ\varphi' = \varphi_i$. Entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} {|B|} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & {|A|} \arrow[d, "\pi_i"] \\ & {|A_i|} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Y como φ es única con esta propiedad entonces

$$\varphi = \varphi'$$

$\therefore$ $(A, \{\pi_i\}_{i\in I})$ es un producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$

Productos fibrados: Sean A, B, C ads y f: A $\longrightarrow$ C y g: B $\longrightarrow$ C morfismos de ads. Entonces definimos el ad D como sigue:

$$|D| = \{(a,b) \in |A|X|B| \mid f(a) = g(b)\}$$

y $\quad M_D = \{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in |D|^2 \mid (a_1,a_2) \in M_A \text{ y } (b_1,b_2) \in M_B\}$

Definimos

$$m_D: \begin{array}{ccc} M_D & \longrightarrow & |D| \\ ((a_1,b_1),(a_2,b_2)) & \longmapsto & (m_A(a_1,a_2), m_B(b_1,b_2)) \end{array}$$

Con estas definiciones tenemos que D es un ad. Definimos las funciones

$$\pi_A: \begin{array}{ccc} |D| & \longrightarrow & |A| \\ (a,b) & \longmapsto & a \end{array} \qquad \pi_B: \begin{array}{ccc} |D| & \longrightarrow & |B| \\ (a,b) & \longmapsto & b \end{array}$$

Sea $((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in M_D$ entonces tenemos que

$$\pi_A x \pi_A((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = (a_1,a_2)$$

y por la definición de M_D tenemos que $(a_1,a_2) \in M_A$

$$\therefore \quad \pi_A x \pi_A(M_D) \subseteq M_A$$

Ademas, si consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M_D \arrow[r, "m_D"] \arrow[d, "\pi_A x \pi_A"'] & {|D|} \arrow[d, "\pi_A"] \\ M_A \arrow[r, "m_A"'] & {|A|} \end{tikzcd}$$

tenemos que $\pi_A \circ m_D((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = m_A(a_1,a_2)$

$$= m_A \circ \pi_A x \pi_A((a_1,b_1),(a_2,b_2))$$

$\therefore$ el diagrama anterior conmuta

$\therefore$ π_A es morfismo de ads

Análogamente se comprueba que π_B es también morfismo de ads.

Por las definiciones de D, M_D, π_A, π_B es cl~~aro que~~

$$f \circ \pi_A = g \circ \pi_B$$

$\therefore$ el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

conmuta

Supongamos E un ad y $\pi'_A\colon E \longrightarrow A$, $\pi'_B\colon E \longrightarrow B$ morfismos de ads tales que $f\circ\pi'_A = g\circ\pi'_B$. Entonces se define

$$\varphi\colon\ \begin{array}{ccc} |E| & \longrightarrow & |D| \\ e & \longmapsto & (\pi'_A(e),\pi'_B(e)) \end{array}$$

Entonces es claro que como funciones tenemos que

$$\pi_A\circ\varphi = \pi'_A \qquad\qquad \pi_B\circ\varphi = \pi'_B$$

Ahora bien, tenemos que si $(e_1,e_2) \in M_E$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi x\varphi(e_1,e_2) &= (\varphi(e_1),\varphi(e_2)) \\ &= ((\pi'_A(e_1),\pi'_B(e_1)),(\pi'_A(e_2),\pi'_B(e_2)))\end{aligned}$$

y como π'_A y π'_B son morfismos de ads entonces

$$(\pi'_A(e_1),\pi'_A(e_2)) \in M_A \quad y \quad (\pi'_B(e_1),\pi'_B(e_2)) \in M_B$$

$$\therefore\quad \varphi x\varphi(e_1,e_2) \in M_D$$

$$\therefore\quad \varphi x\varphi(M_E) \subseteq M_D$$

Ademas tenemos que

$$\begin{aligned}m_D\circ\varphi x\varphi(e_1,e_2) &= m_D((\pi'_A(e_1),\pi'_B(e_1)),(\pi'_A(e_2),\pi'_B(e_2))) \\ &= (m_A(\pi'_A(e_1),\pi'_A(e_2)),m_B(\pi'_B(e_1),\pi'_B(e_2))) \\ &= (m_A\circ\pi'_A x\pi'_A(e_1,e_2),m_B\circ\pi'_B x\pi'_B(e_1,e_2)) \\ &= (\pi'_A\circ m_E(e_1,e_2),\pi'_B\circ m_E(e_1,e_2)) \\ &= \varphi\circ m_E(e_1,e_2)\end{aligned}$$

$\therefore$ φ es un morfismo de ads.

Supongamos $\psi\colon E \longrightarrow D$ un morfismo de ads tal que

$$\pi_A\circ\psi = \pi'_A \qquad\qquad \pi_B\circ\psi = \pi'_B$$

entonces, si $e \in |E|$

$$\pi_A(\psi(e)) = \pi'_A(e) \qquad y \qquad \pi_B(\psi(e)) = \pi'_B(e)$$

$$\therefore \quad \psi(e) = (\pi'_A(e), \pi'_B(e)) = \varphi(e)$$

$$\therefore \quad \varphi \text{ es única.}$$

$\therefore$ Ad tiene productos fibrados.

$\therefore$ Ad es una categoría completa.

Proposición 5.1.4. La categoría Ad tiene coproductos.

dem.− Sea $\{A_j\}_{j\in I}$ una familia de ads. Se define el ad A como sigue:

$$|A| = \dot{\bigcup_{j\in I}} |A_j| \text{ unión ajena} \quad y \quad M_A = \dot{\bigcup_{j\in I}} M_{A_j} \text{ unión ajena.}$$

Tenemos que $M_A \leq |A|^2$. Definimos

$$m_A: M_A \longrightarrow |A|$$
$$(a,b) \longmapsto m_{A_j}(a,b) \quad \text{si } (a,b) \in M_{A_j}$$

con estas definiciones tenemos que A es un ad. Para cada $j \in I$ definimos un morfismo de ads

$$i_{A_j}: |A_j| \longrightarrow |A|$$
$$a \longmapsto a$$

Supongamos B un ad y para toda $j \in I$ morfismos

$$\nu_j: A_j \longrightarrow B$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} |A_j| \arrow[r, "i_{A_j}"] \arrow[dr, "\nu_j"'] & |A| \arrow[d, "f"] \\ & |B| \end{tikzcd}$$

Definimos $f: |A| \longrightarrow |B|$ como sigue:

Si $a \in |A|$ entonces $\exists\, j \in I$ tal que $a \in |A_j|$. Entonces

$$f(a) = \nu_j(a)$$

Es claro que $f \circ i_{A_j} = \nu_j$.

Se comprueba directamente, como en casos anteriores, que f es un morfismo de ads.

Supongamos $g\colon A \longrightarrow B$ morfismo de ads tal que

$$g \circ i_{A_j} = \nu_j \qquad \forall \ j \in I,$$

si $a \in |A|$ entobces $\exists!\ j \in I$ tal que $a \in A_j$.

$$\therefore \quad g(a) = g(i_{A_j}(a)) = \nu_j(a) = f(a)$$

$$\therefore \quad f = g$$

$\therefore \quad (A, \{i_{A_j}\}_{j \in I})$ es un coproducto de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$.

Proposicion 5.1.5. La categoría Ad tiene coigualadores.

dem.- Sean A, B ads, $f, g\colon A \longrightarrow B$ morfismos de ads.

Se definirá en $|B|$ una relación de equivalencia, para lo cual se procede como sigue:

Primero se define la relación $\underset{\circ}{\sim}^1$ en $|B|$

$b_1 \underset{\circ}{\sim}^1 b_2 \Leftrightarrow \exists\ a \in |A|$ tal que $f(a) = b_1$ y $g(a) = b_2$.

A la relación de equivalencia generada por $\underset{\circ}{\sim}^1$ la denotamos por $\sim^1$.

Supongamos que para $n \geq 1$ tenemos definida la relación $\sim^n$ entonces se define la relación $\underset{\circ}{\sim}^{n+1}$ como sigue:

$b_1 \underset{\circ}{\sim}^{n+1} b_2 \Leftrightarrow b_1 \sim^n b_2$ o existen $(b_1', b_1''), (b_2', b_2'') \in M_B$ tales que $b_1' \sim^n b_2'$, $b_1'' \sim^n b_2''$ y $m_B(b_1', b_1'') = b_1$ $m_B(b_2', b_2'') = b_2$.

A la relación de equivalencia generada por $\underset{\circ}{\sim}^{n+1}$ la denotamos por $\sim^{n+1}$.

Es claro que $b_1 \sim^k b_2 \Rightarrow b_1 \sim^n b_2 \quad \forall\ n \geq k$.

Definimos en $|B|$ la relación $\sim$:

$$b_1 \sim b_2 \Leftrightarrow \exists\ n \ \text{tal que}\ b_1 \sim^n b_2.$$

Veamos que esta relación es de equivalencia:

i) Reflexiva: Sea $b \in |B|$, como $\sim^1$ es relación de equivalencia

$$\therefore \quad b \sim^1 b$$

$$\therefore \quad b \sim b.$$

ii) Simétrica: Si $b_1 \sim b_2$ entonces existe n tal que

$$b_1 \sim^n b_2$$

como $\sim^n$ es relación de equivalencia

$$\therefore \quad b_2 \sim^n b_1$$

$$\therefore \quad b_2 \sim b_1$$

iii) Transitiva: Supongamos $b_1 \sim b_2, \quad b_2 \sim b_3$

$$\therefore \; \exists\, n,m \text{ tales que } b_1 \sim^n b_2 \text{ y } b_2 \sim^m b_3$$

sea $k = \max\{n,m\}$ entonces $b_1 \sim^k b_2$ y $b_2 \sim^k b_3$. Como $\sim^k$ es de equivalencia

$$\therefore \quad b_1 \sim^k b_3$$

$$\therefore \quad b_1 \sim b_3$$

Definimos el ad C como sigue:

$$|C| = |B|/_{\sim}$$

$M_C = \{(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \in |B|^2 \mid \exists\, b_1' \in \bar{b}_1,\ b_2' \in \bar{b}_2 \text{ con } (b_1', b_2') \in M_B\}$

y definimos $m_C \colon M_C \longrightarrow |C|$ como sigue:

Si $(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \in M_C$ y $b_1' \in \bar{b}_1$, $b_2' \in \bar{b}_2$ son tales que $(b_1', b_2') \in M_B$ entonces

$$m_C(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = m_B(b_1', b_2')$$

Veamos que m_C no depende de los representantes.

Supongamos $(c_1, c_2) \in M_B$ con $c_1 \in \bar{b}_1$, $c_2 \in \bar{b}_2$

$$\therefore \quad c_1 \sim b_1' \text{ y } c_2 \sim b_2'$$

$$\therefore \; \exists\, l,k \text{ tales que } c_1 \sim^l b_1' \text{ y } c_2 \sim^k b_2'$$

sea $n = \max\{l, k\}$

$$\therefore \quad c_1 \sim^n b_1' \quad y \quad c_2 \sim^n b_2'$$

y como (b_1', b_2'), $(c_1, c_2) \in M_B$

$$\therefore \quad m_B(b_1', b_2') \sim^{n+1} m_B(c_1, c_2)$$

$\therefore$ m_C no depende de los representantes.

Sea $\pi\colon\ \begin{array}{ccc} |B| & \longrightarrow & |B|/_\sim = |C| \\ b & \longmapsto & \bar{b} \end{array}$ la proyección canónica. Veamos que π es un morfismo de ads:

Por la definición de M_C es claro que $\pi x \pi(M_B) \subseteq M_C$.

Si $(b_1, b_2) \in M_B$ entonces

$$\pi \circ m_B(b_1, b_2) = \overline{m_B(b_1, b_2)} = m_C(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = m_C \circ \pi x \pi(b_1, b_2)$$

$\therefore$ π es morfismo de ads.

Sea $a \in |A|$ entonces $f(a) \sim^1 g(a)$, $\therefore$ $f(a) \sim g(a)$

$$\therefore \quad \pi \circ f = \pi \circ g$$

Supongamos D otro ad y $\pi'\colon B \longrightarrow D$ un morfismo de ads tal que $\pi' \circ f = \pi' \circ g$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & C \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Entonces definimos $\varphi\colon\ \begin{array}{ccc} |C| & \longrightarrow & |D| \\ \bar{b} & \longmapsto & \pi'(b) \end{array}$

Lema. 5.1.6 $b \sim b' \Rightarrow \pi'(b) = \pi'(b')$.

dem. – Supongamos $b \sim b'$, entonces existe n tal que $b \sim^n b'$ Se demostrará por inducción sobre n que $b \sim^n b' \Rightarrow \pi'(b) = \pi'(b')$

Para $n = 1$. Supongamos $b \sim^1 b'$. Sabemos que $\sim^1$ es la relación de equivalencia generada por $\underset{\circ}{\sim}^1$ entonces

$\exists\ b = b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,\ b_r = b' \in |B|$ tales que $\forall\ i = 1,2,\ \ldots\ ,r-1$ sucede alguna de las siguientes tres condiciones:

$$(a)\quad b_i = b_{i+1}$$

$$(b)\quad b_i \underset{o}{\sim}^1 b_{i+1}$$

$$(c)\quad b_{i+1} \underset{o}{\sim}^1 b_i$$

En el caso (a) es claro que $\pi'(b_i) = \pi'(b_{i+1})$.

En el caso (b): Supongamos $b_i \underset{o}{\sim}^1 b_{i+1}$

$$\therefore\quad \exists\ a \in |A| \text{ tal que } f(a) = b_i \text{ y } g(a) = b_{i+1}$$

como $\pi'\circ f = \pi'\circ g$ entonces

$$\pi'(b_i) = \pi'(f(a)) = \pi'(g(a)) = \pi'(b_{i+1})$$

$$\therefore\quad \pi'(b_i) = \pi'(b_{i+1})$$

El caso (c) es análogo al caso (b). Entonces

$$\pi'(b) = \pi'(b_1) = \pi'(b_2) = \ldots = \pi'(b_r) = \pi'(b')$$

$$\therefore\quad \pi'(b) = \pi'(b')$$

Supongamos ahora que

$$b \sim^n b' \Rightarrow \pi'(b) = \pi'(b')$$

entonces supongamos que $b \sim^{n+1} b'$. Como $\sim^{n+1}$ es la relación de equivalencia generada por $\underset{o}{\sim}^{n+1}$ existen

$$b = b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,\ b_r = b' \in |B|$$

tales que sucede alguna de las siguientes tres condiciones para toda $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ r-1$

$$(a)\quad b_i = b_{i+1}$$

$$(b)\quad b_i \underset{o}{\sim}^{n+1} b_{i+1}$$

$$(c)\quad b_{i+1} \underset{o}{\sim}^{n+1} b_i$$

En el caso (a) es claro que $\pi'(b_i) = \pi'(b_{i+1})$

Supongamos (b), entonces tenemos que $b_i \sim^n b_{i+1}$ o que existen (b_i', b_i''), $(b_{i+1}', b_{i+1}'') \in M_B$ tales que $b_i' \sim^n b_{i+1}'$, $b_i'' \sim^n$

b''_{i+1} y $m_B(b'_i, b''_i) = b_i$, $m_B(b'_{i+1}, b''_{i+1}) = b_{i+1}$.

Si $b_i \sim^n b_{i+1}$ tenemos por hipótesis de inducción que

$$\pi'(b_i) = \pi'(b_{i+1})$$

Supongamos entonces que b_i y b_{i+1} no estan relaciónados bajo $\sim^n$, entonces tenemos por hipotesis de inducción que

$$\pi'(b'_i) = \pi'(b'_{i+1}) \quad \text{y} \quad \pi'(b''_i) = \pi'(b''_{i+1})$$

como π' es morfismo de ads entonces

$$\begin{aligned} \pi'(b_i) &= \pi'(m_B(b'_i, b''_i)) = m_D(\pi'(b'_i), \pi'(b''_i)) \\ &= m_D(\pi'(b'_{i+1}), \pi'(b''_{i+1})) = m_D(\pi' x \pi'(b'_{i+1}, b''_{i+1})) \\ &= \pi'(m_B(b'_{i+1}, b''_{i+1})) = \pi'(b_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \pi'(b_i) = \pi'(b_{i+1})$$

El caso (c) es completamente análogo. Entonces es claro que

$$\pi'(b) = \pi'(b').$$

Como consecuencia de este lema tenemos que la definición de φ no depende del representante, pues si $b \sim b'$ entonces

$$\pi'(b) = \pi'(b')$$

$$\therefore \quad \varphi(\bar{b}) = \pi'(b) = \pi'(b') = \varphi(\bar{b}')$$

Veamos que de hecho φ es un morfismo de ads.

Si $(\bar{b}, \bar{c}) \in M_C$ y $b' \in \bar{b}$, $c' \in \bar{c}$ con $(b', c') \in M_B$ entonces

$$\varphi x \varphi(\bar{b}, \bar{c}) = \varphi x \varphi(\bar{b}', \bar{c}') = \pi' x \pi'(b', c') \in M_D$$

$$\therefore \quad \varphi x \varphi(M_C) \subseteq M_D$$

Además

$$\begin{aligned} \varphi \circ m_C(\bar{b}, \bar{c}) &= \varphi(\overline{m_B(b', c')}) = \pi'(m_B(b', c')) \\ &= m_D(\pi'(b'), \pi'(c')) = m_D \circ \varphi x \varphi(\bar{b}', \bar{c}') \end{aligned}$$

$$= m_D \circ \varphi \times \varphi(\bar{b}, \bar{c})$$

$\therefore$ φ es un morfismo de ads.

Es claro que

$$\varphi \circ \pi = \pi'$$

La demostración de que φ es única con esta propiedad es inmediata.

$\therefore$ Ad tiene coigualadores.

Proposición 5.1.6. La categoría Ad es cocompleta.

dem.- Basta demostrar que Ad tiene coproductos y coigualadores, que son las proposiciones 5.1.4 y 5.1.5.

2.- La Categoría Adact.

Definición 5.2.1. Un adactivo A es un conjunto $|A|$ junto con dos funciones

$$m_A\colon M_A \longrightarrow |A| \quad \text{y} \quad c_A\colon C_A \longrightarrow |A|$$

donde $M_A,\ C_A \subseteq |A|^2$.

Definición 5.2.2. La categoría Adact se define como sigue:

i) Los objetos de Adact, $\mathcal{O}b$(Adact) son los adactivos.

ii) Si A y B son adactivos $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo de Adact si $f\colon |A| \longrightarrow |B|$ es una función que satisface:

a) $f \times f(M_A) \subseteq M_B$

b) $f \times f(C_A) \subseteq C_B$

c) Los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M_A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f\times f"'] & {|A|} \arrow[d, "f"] \\ M_B \arrow[r, "m_B"'] & {|B|} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_A \arrow[r, "c_A"] \arrow[d, "f\times f"'] & {|A|} \arrow[d, "f"] \\ C_B \arrow[r, "c_B"'] & {|B|} \end{tikzcd}$$

iii) La composición de morfismos es la composición usual de funciones.

Con estas definiciones es claro que Adact es una categoría.

Proposición 5.2.3. Adact es una categoria completa.

dem.- la demostración es completamente analoga a la dada para la categoría Ad, proposición 5.1.3.

Proposición 5.2.4. Adact es una categoría cocompleta.

dem.- la demostración es analoga a la dada para la categoría Ad, proposiciones 5.1.4. y 5.1.5.

3.- Sumas Activas.

Llamemos Grp a la categoría de los grupos, y Set a la categoría de los conjuntos.

Definimos el funtor i: Grp $\longrightarrow$ Adact como sigue:

En los objetos: Si G es un grupo, $i(G)$ es el adactivo tal que $|i(G)|$ es el conjunto subyacente de G, $M_{i(G)} = |i(G)|^2 = C_{i(G)}$,

$$m_{i(G)}: \begin{array}{ccc} |i(G)|^2 & \longrightarrow & |i(G)| \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

donde ab denota el producto en G. Y

$$c_{i(G)}: \begin{array}{ccc} |i(G)|^2 & \longrightarrow & |i(G)| \\ (a,b) & \longmapsto & b^{-1}ab \end{array}$$

donde $b^{-1}ab$ denota el producto en G.

Con estas definiciones es claro que $i(G)$ es un adactivo.

En los morfismos: Si f: H $\longrightarrow$ K es un homomorfismo de grupos entonces definimos

$$i(f) = f$$

que es claro que es un morfismo de adactivos.

Con estas definiciones es claro que $i\colon \mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Adact}$ es un funtor.

Proposición 5.3.1. El funtor $i\colon \mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Adact}$ preserva límites.

dem.- Basta demostrar que preserva productos y productos fibrados:

Productos: Sea $\{G_j\}_{j\in I}$ una familia de grupos, consideremos $(G,\{\pi_j\}_{j\in I})$ el producto de la familia en Grp.

Supongamos A un adactivo y para cada $j \in I$ $f_j\colon A \longrightarrow i(G_j)$ un morfismo de adactivos. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} i(G) \arrow[r, "i(\pi_j)"] & i(G_j) \\ A \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces definimos $g\colon \begin{array}{ccc} |A| & \longrightarrow & |i(G)| \\ a & \longmapsto & (f_j(a))_j \end{array}$

entonces es claro que para toda $j \in I$

$$f_j = i(\pi_j)\circ g$$

Utilizando el hecho de que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} M_A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f\times f"'] & {|A|} \arrow[d, "f"] \\ M_B \arrow[r, "m_B"'] & {|B|} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_A \arrow[r, "c_A"] \arrow[d, "f\times f"'] & {|A|} \arrow[d, "f"] \\ C_B \arrow[r, "c_B"'] & {|B|} \end{tikzcd}$$

son conmutativos, por ser f_j morfismo de adact, se comprueba directamente que g es morfismo de Adact.

Se comprueba, también directamente, que g es única con la propiedad de que para toda $j \in I$

$$f_j = i(\pi_j)\circ g.$$

Productos fibrados: Sean G, H, K grupos y $f\colon G \longrightarrow K$, $g\colon H \longrightarrow K$ homomorfismos. Consideremos el producto fibrado de (f,g)

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\ell_1"] \arrow[d, "\ell_2"'] & G \arrow[d, "f"] \\ H \arrow[r, "g"'] & K \end{tikzcd}$$

con $L = \{(a,b) \in G\times H \mid f(a) = g(b)\}$ y los homomorfismos

$$\ell_1\colon \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & a \end{array} \qquad \ell_2\colon \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & H \\ (a,b) & \longmapsto & b \end{array}$$

Tenemos que al aplicar el funtor i al diagrama anterior obtenemos un diagrama conmutativo. Entonces supongamos A un adactivo y $p\colon A \longrightarrow i(G)$, $q\colon A \longrightarrow i(H)$ en Adact tales que $$i(f)\circ p = i(g)\circ q.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & i(L) \arrow[r, "i(\ell_1)"] \arrow[d, "i(\ell_2)"'] & i(G) \arrow[d, "i(f)"] \\ & i(H) \arrow[r, "i(g)"'] & i(K) \end{tikzcd}$$

Entonces se define

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} |A| & \longrightarrow & i(L) \\ a & \longmapsto & (p(a),q(a)) \end{array}$$

Utilizando el hecho de que p y q son morfismos de Adact, se comprueba directamente que φ es un morfismo de Adact. También se comprueba directamente la unicidad de φ.

$\therefore$ $i\colon \mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Adact}$ preserva límites

Consideremos los siguientes funtores:

$U\colon \mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Set}$ el funtor que olvida la estructura de grupo.

$\mathcal{V}$: Adact $\longrightarrow$ Set el funtor que olvida la estructura de adactivo.

Tenemos que $\mathcal{U}$ tiene adjunto izquierdo, y es claro que $\mathcal{V}$ es un funtor fiel.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Grp} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{U}"'] & & \mathrm{Adact} \arrow[dl, "\mathcal{V}"] \\ & \mathrm{Set} & \end{tikzcd}$$

conmutativo de categorias y funtores. Entonces como

i) Grp es completa, bien potenciada y bien copotenciada.

ii) i preserva límites.

iii) $\mathcal{U}$ tiene adjunto izquierdo.

iv) $\mathcal{V}$ es fiel.

$\therefore$ i tiene adjunto izquierdo.*

Si llamamos S a dicho adjunto izquierdo entonces, si A es un adactivo, S(A) es el grupo libre con base en |A| módulo el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$ab\, m_A(a,b)^{-1} \quad \text{con} \quad (a,b) \in M_A$$
$$b^{-1}ab\, c_A(a,b)^{-1} \quad \text{con} \quad (a,b) \in C_A$$

Definición 5.3.2. Una familia activa de ads consta de

i) Un funtor F de una categoría pequeña en Ad.

ii) Una función $c_{colimF}: C_{colimF} \longrightarrow |colimF|$ donde $C_{colimF} \subseteq |colimF|^2$.

Con el ad colimF y la función c_{colimF} obtenemos un adactivo que llamamos A.

Definición 5.3.3 Se llama suma activa de la familia activa de ads al grupo S(A).

* [1] HERRLICH, HORST pg. 213

CAPITULO II

1. LA DEFINICION DE F. GONZALEZ IMPLICA LA DEFINICION DE P. RIBENBOIM

Sean $\mathfrak{G}$ un carcaj activo de grupos sobre una gráfica dirigida $\mathfrak{J}$ y $\tau: \coprod \mathfrak{G} \longrightarrow Aut(\mathfrak{G})$ una acción, según el concepto de Ribenboim.

Entonces la gráfica $\mathfrak{J}$ puede ser vista como una categoría $\tilde{\mathfrak{J}}$ donde los objetos de $\tilde{\mathfrak{J}}$ corresponden a los vértices de la gráfica

$$\mathcal{O}b(\tilde{\mathfrak{J}}) = I$$

y si $i, j \in I$ entonces $\mathcal{H}om(i,j) = \{\alpha \mid \alpha$ es un camino dirigido de i a $j\}$.

Entonces el carcaj $\mathfrak{G}$ corresponde a un funtor $\tilde{\mathfrak{G}}: \tilde{\mathfrak{J}} \longrightarrow Grp$.

Definimos el funtor $H: Grp \longrightarrow Ad$ como sigue: En los objetos, si G es un grupo entonces $|H(G)|$ es el conjunto subyacente de G,

$$M_{H(G)} = |H(G)|^2 \quad y \quad m_{H(G)}: \begin{array}{ccc} M_{H(G)} & \longrightarrow & |H(G)| \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array} \quad \text{el producto}$$

definido en G. En los morfismos, si $f: G \longrightarrow K$ es un homomorfismo entonces $H(f) = f: |H(G)| \longrightarrow |H(K)|$.

Como f es homomorfismo entonces $H(f)$ es morfismo de ads

Definimos $F = H\circ\tilde{\mathfrak{G}}: \tilde{\mathfrak{J}} \longrightarrow Ad$. Entonces F es un funtor de una categoría pequeña en Ad. Podemos entonces considerar el colímite de F. Explícitamente el colímite se construye como sigue:

Sea C el coproducto de la familia $\{F(j)\}_{j\in I}$ entonces

$$|C| = \dot{\bigcup_{j\in I}} |F(j)| \quad y \quad M_c = \dot{\bigcup_{j\in I}} |F(j)|^2$$

Definimos en C una relación de equivalencia como sigue:
Primero se define la relación $\underset{\circ}{\backsim}^1$ en C

$$h \underset{\circ}{\backsim}^1 k \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \mathit{hom}(i,j) \text{ tal que } F(\alpha)(h) = k$$

Sea $\backsim^1$ la relación de equivalencia generada por $\underset{\circ}{\backsim}^1$.

Supongamos que para $n \geq 1$ tenemos definida la relación $\backsim^n$ entonces definimos la relación $\underset{\circ}{\backsim}^{n+1}$ como sigue:

$h \underset{\circ}{\backsim}^{n+1} k \Leftrightarrow h \backsim^n k$ ó bien existen $h', h'', k', k'' \in C$ tales que

$$h' \backsim^n k',\ h'' \backsim^n k'',\ \text{con } (h', h''),\ (k', k'') \in M_c \text{ y}$$

$$m_c(h', h'') = h \quad y \quad m_c(k', k'') = k$$

Sea $\backsim^{n+1}$ la relación de equivalencia generada por $\underset{\circ}{\backsim}^{n+1}$.
definimos en $|C|$ la relación de equivalencia

$$h \backsim k \Leftrightarrow \exists\ n \text{ tal que } h \backsim^n k.$$

Definimos el ad D como sigue:

$$|D| = {}^{|C|}\!/\!_{\backsim} \qquad y$$

$$M_D = \{(\bar{h}, \bar{k}) \in |D|^2 \mid \exists\ h' \in \bar{h},\ k' \in \bar{k} \text{ con } (h', k') \in M_c\}$$

Definimos m_D: $M_D \longrightarrow |D|$ como sigue:
Si $(\bar{h}, \bar{k}) \in M_D$ y h', k' son tales que $h' \in \bar{h}$, $k' \in \bar{k}$ con $(h', k') \in M_c$ entonces

$$m_D(\bar{h}, \bar{k}) = \overline{m_c(h', k')}$$

Se comprueba directamente que la definición de m_D no depende de los representantes. Tenemos π: $|C| \longrightarrow |D|$ la proyección canónica, que es de hecho un morfismo de ads.

Ademas tenemos $i_{F(j)}$: $F(j) \longrightarrow C$ la inclusión en el coproducto. Entonces, para cada $j \in I$ consideramos

$$\nu_j = \pi \circ i_{F(j)}: F(j) \longrightarrow D.$$

Supongamos j, $j' \in I$ y α: $j \longrightarrow j'$ un camino, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "\nu_j"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & D \\ F(j') \arrow[ur, "\nu_{j'}"'] & \end{tikzcd}$$

Supongamos E un ad, y para cada $j \in I$ un morfismo

$$f_j: F(j) \longrightarrow E$$

tal que si α: $j \longrightarrow j'$ entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & E \\ F(j') \arrow[ur, "f_{j'}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Entonces definimos φ: $|D| \longrightarrow |E|$ como sigue: Si $\bar{h} \in |D|$ con $h \in |F(j)|$ entonces

$$\varphi(\bar{h}) = f_j(h)$$

Se demuestra el siguiente lema por inducción, análogamente a la demostración dada en la sección 5 del capítulo 1.

Lema.- Si $h \backsim^{n} k$ con $h \in F(j)$ y $k \in F(j')$, $n \geq 1$ entonces $f_j(h) = f_{j'}(k)$.

Como consecuencia tenemos que la definición de φ no depende del representante.

Se comprueba directamente que φ es morfismo de ads y que

$$\varphi \circ \pi \circ i_{F(j)} = f_j$$

Además se ve directamente que φ es única con esta propiedad.

Por lo tanto D junto con los morfismos $\pi \circ i_{F(j)}$ es un colímite de F.

Definimos
$$\begin{aligned} c_D: \quad |D|^2 &\longrightarrow |D| \\ (\bar{h}, \bar{k}) &\longmapsto \overline{\tau^h(k)} \end{aligned}$$

lema.- $h \backsim^{n} h'$, $k \backsim^{n} k' \Rightarrow \overline{\tau^h(k)} = \overline{\tau^{h'}(k')}$

dem.- La demostración es por inducción y es análoga a las dadas anteriormente.

Con estas definiciones tenemos una familia activa de ads según la definición de Gonzalez. Entonces consideremos S(D) la suma activa.

S(D) es el grupo libre con base en $|D|$ módulo el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$abm_D(a, b)^{-1}$$

$$b^{-1}abc_D(a, b)^{-1}$$

Consideremos ahora el carcaj $\mathfrak{S}$ con su acción τ y veamos que S(D) corresponde a $⊞\mathfrak{S}$.

Definimos la función
$$\begin{aligned} g: \quad |D| &\longrightarrow S(D) \\ \bar{k} &\longmapsto [\bar{k}] \end{aligned}$$

donde $[\bar{k}]$ representa la clase de equivalencia de $\bar{k}$ en $S(D)$.

Entonces tenemos la sigiente situación:

$$F(j) \xrightarrow{id} |F(j)| \xrightarrow{i_{F(j)}} |C| \xrightarrow{\pi} |D| \xrightarrow{g} S(D)$$

donde id es el morfismo identidad.

Veamos que $g\circ\pi\circ i_{F(j)}\circ id : F(j) \longrightarrow S(D)$ es un homomorfismo de grupos. Sean $h, k \in F(j)$ entonces

$$g\circ\pi\circ i_{F(j)}\circ id(hk) = g\circ\pi\circ i_{F(j)}(hk) = g\circ\pi(hk) = g(\overline{hk})$$

Como $$m_D(\bar{h},\bar{k}) = \overline{m_C(h,k)} = \overline{hk}$$

$\therefore$ $$g\circ\pi\circ i_{F(j)}\circ id(hk) = g(m_D(\bar{h},\bar{k})) = [\bar{h}\ \bar{k}] = [\bar{h}][\bar{k}]$$

$$\therefore \quad g\circ\pi\circ i_{F(j)}\circ id \text{ es homomorfismo}$$

$\therefore$ $$(g\circ\pi\circ i_{F(j)}\circ id)_{j\in I} : \coprod \mathfrak{G} \longrightarrow S(D) \text{ es un homomorfismo.}$$

$$\text{Sea} \quad \phi = (g\circ\pi\circ i_{F(j)}\circ id)_{j\in I}$$

Sean $h, k \in \coprod\mathfrak{G}$, entonces tenemos que:

$$\phi(\tau^h(k)) = g(\pi(\tau^h(k))) = g(\overline{\tau^h(k)}) = g(c_D(\bar{h},\bar{k}))$$

$$= [c_D(\bar{h},\bar{k})] = [\bar{k}]^{-1}[\bar{h}][\bar{k}] = \phi(k)^{-1}\phi(h)\phi(k)$$

Supongamos $\alpha : j \longrightarrow j'$ una flecha, y $h \in F(j)$ entonces

$$\phi\circ c_\alpha(h) = \phi(c_\alpha(h)) = g(\overline{c_\alpha(h)}) = g(\bar{h}) = \phi(h)$$

$$\therefore \quad \phi\circ c_\alpha = \phi$$

$$\therefore \quad S(D) \simeq \boxplus\mathfrak{G}.$$

2 LA DEFINICION DE P. RIBENBOIM IMPLICA LA DEFINICION DE F. TOMAS DE 1973.

Sea $(F_p, k_q^r)_I$ un sistema admisible de grupos y operaciones según la definición de Tomás de 1973. Existen entonces un grupo X, y para cada $p \in I$ homomorfismos j_p, k_p de tal forma que (F_p, j_p, k_p) es un objeto de la categoría $\mathfrak{C}_X$ y tales que

$$k_q^r = k_q \circ j_r.$$

Sea $\mathfrak{Z}$ la gráfica discreta con I su conjunto de vértices y sea $\mathfrak{G}$ el carcaj de grupos sobre la gráfica $\mathfrak{Z}$ con la familia de grupos $\{F_p\}_{p\in I}$.

Definimos $\tau\colon \coprod\mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\mathfrak{G}$ tal que si $g \in F_r$ y $f \in F_q$ entonces $\tau(g)(f) = \tau^g(f) = k_q^r(g)(f)$.

Veamos primero que τ^g es elemento de $\mathrm{Aut}\mathfrak{G}$:

Si $g \in F_r$ entonces restringido a F_q tenemos que

$$\tau^g\colon F_q \longrightarrow F_q$$

es igual a $k_q^r(g) \in \mathrm{Aut}F_q$.

$$\therefore \quad \tau^g \in \mathrm{Aut}\mathfrak{G}$$

Veamos ahora que τ es una acción:

Sean $g, g' \in F_r$ y $f \in F_q$ entonces

$$\tau^{gg'}(f) = k_q^r(gg')(f) = k_q^r(g')(k_q^r(g)(f))$$

$$= \tau^{g'}(\tau^g(f))$$

$$\therefore \quad \tau^{gg'} = \tau^{g'} \circ \tau^g$$

Si 1_p es la identidad en F_p entonces es claro que

$$\tau^{1_p} = 1_{\coprod\mathfrak{G}}$$

Si $f, g \in F_r$ entonces

$$\tau^{g}(f) = k_r^{r}(g)(f) = g^{-1}fg$$

$\therefore$ τ es una acción.

Veamos ahora que τ es una acción distributiva:

Sean $f \in F_s$, $g \in F_r$, $h \in F_q$ entonces

$$\tau^{f}(\tau^{g}(h)) = k_q^{s}(f)(k_q^{r}(g)(h))$$

$$= k_q(j_s(f))(k_q(j_r(g))(h))$$

$$= k_q(j_r(g)j_s(f))(h)$$

$$= k_q(j_s(f)j_s(f)^{-1}j_r(g)j_s(f))(h)$$

$$= k_q(j_s(f)^{-1}j_r(g)j_s(f))(k_q(j_s(f))(h))$$

$$= k_q(j_r(k_r(j_s(f))(g))))(k_q^{s}(f)(h))$$

$$= \tau^{\tau^{f}(g)}(\tau^{f}(h)).$$

$\therefore$ τ es una acción distributiva

Además es claro que τ es normal.

Consideremos F el producto libre de la familia $\{F_i\}$ usado en la demostración de la proposición 4.4.1, y R el subgrupo normal de F considerado en la misma demostración.

Consideremos entonces la suma activa $(\boxplus \mathfrak{G}, \phi)$ definida por Ribenboim.

Definimos el homomorfismo $j_F\colon F \longrightarrow X$ de tal forma que si $g \in F_n$ entonces $j_F([g]) = j_n(g)$, y se extiende linealmente a todo F. Tenemos que si $f \in F_r, h \in F_q$ entonces

$$j_F([\tau^{f}(h)][f^{-1}][h][f]) = j_q(k_q(j_r(f))(h))j_r(f)^{-1}j_q(h)j_r(f)$$

$$= (j_r(f)^{-1} j_q(h) j_r(f))^{-1} j_r(f)^{-1} j_q(h) j_r(f)$$

$$= 1.$$

Entonces j_F manda a los generadores de R al 1

$$\therefore \quad j_F(R) = 1.$$

$\therefore$ existe un único morfismo $j_{\boxplus^{\circledast}} : \boxplus^{\circledast} \longrightarrow X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "j_F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \\
& \boxplus^{\circledast} \arrow[ur, "j_{\boxplus^{\circledast}}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definimos para cada $x \in X$ un automorfismo $k_F(x) : F \longrightarrow F$ en los generadores: si $g \in F_p$ entonces

$$k_F(x)([g]) = [k_p(x)(g)].$$

y se extiende linealmente a todo F. Como para cada $p \in I$ tenemos que $k_p(x) \in \mathrm{Aut}F_p$ entonces es claro que $k_F(x)$ es biyectiva, y que por lo tanto es un elemento de $\mathrm{Aut}F$.

Veamos que $k_F(x)(R) = R$. Sean $f \in F_r$, $g \in F_q$ entonces

$$k_F(x)([\tau^f(g)]) = k_F(x)([k_q(j_r(f))(g)])$$

$$= [k_q(x)(k_q(j_r(f))(g)]$$

$$= [k_q(j_r(f)x)(g))]$$

$$= [k_q(xx^{-1} j_r(f)x)(g)]$$

$$= [k_q(j_r(k_r(x)(f)))(k_q(x)(g))]$$

$$= [k_q^r(k_r(x)(f))(k_q(x)(g))]$$

$$= [\tau^{k_r(x)(f)}(k_q(x)(g))]$$

entonces

$$k_F(x)([\tau^f(g)][f^{-1}][g][f]) =$$

$$= [\tau^{k_{\varkappa}(x)(f)}(k_q(x)(g))][k_{\varkappa}(x)(f)^{-1}][k_q(x)(g)][k_{\varkappa}(x)(f)]$$

que es un elemento de R. Además dado el generador

$$[\tau^f(g)][f^{-1}][g][f]$$

de R este proviene, bajo $k_F(x)$ del elemento

$$[\tau^{k_{\varkappa}(x^{-1})(f)}(k_q(x^{-1})(g))][k_{\varkappa}(x^{-1})(f)^{-1}][k_q(x^{-1})(g)][k_{\varkappa}(x^{-1})(f)]$$

$$\therefore \quad k_F(x)(R) = R$$

entonces existe un único automorfismo $k_{\boxplus\circledS}(x)$ de $\boxplus\circledS$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "k_F(x)"] \arrow[d, "\pi"'] & F \arrow[d, "\pi"] \\ \boxplus\circledS \arrow[r, "k_{\boxplus\circledS}(x)"'] & \boxplus\circledS \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Tenemos asi definido un elemento de $\mathrm{Aut}\,\boxplus\circledS$ para cada $x \in X$, y es claro que

$$k_{\boxplus\circledS}(xx') = k_{\boxplus\circledS}(x')\circ k_{\boxplus\circledS}(x)$$

Veamos que $(\boxplus\circledS, j_{\boxplus\circledS}, k_{\boxplus\circledS})$ es un objeto de $\mathfrak{C}_X$:

Se demostrarán las propiedades para los generadores, de donde se sigue la propiedad para todos los elementos. Sea $f \in F_{\varkappa}$ y $x \in X$ entonces

$$j_{\boxplus\circledast}(k_{\boxplus\circledast}(x)(\pi([f]))) = j_{\boxplus\circledast}(\pi(k_F(x)([f]))$$

$$= j_F([k_\rho(x)(f)])$$

$$= j_\rho(k_\rho(x)(f))$$

$$= x^{-1}j_\rho(f)x$$

$$= x^{-1}j_{\boxplus\circledast}(\pi([f])x$$

análogamente se demuestra para los generadores que

$$k_{\boxplus\circledast}(j_{\boxplus\circledast}(f))(g) = g^{-1}fg$$

$$\therefore \quad (\boxplus\circledast, j_{\boxplus\circledast}, k_{\boxplus\circledast}) \text{ es un objeto de } \mathfrak{C}_X.$$

Veamos ahora que ϕ restringido a F_ρ es un morfismo de $\mathfrak{C}_X$:
Sea $g \in F_\rho$ y $x \in X$ entonces

$$j_{\boxplus\circledast}(\phi(g)) = j_{\boxplus\circledast}(\pi([g])) = j_F([g]) = j_\rho(g)$$

$$\therefore \quad j_{\boxplus\circledast}\circ\phi = j_\rho$$

y análogamenta tenemos que

$$k_{\boxplus\circledast}(x)(\phi(g)) = \phi(k_\rho(x)(g))$$

Entonces $\phi\colon F \longrightarrow \boxplus\circledast$ es un morfismo de $\mathfrak{C}_X$.

Veamos ahora que $((\boxplus\circledast, j_{\boxplus\circledast}, k_{\boxplus\circledast});\phi)$ es un coproducto de la familia $\{(F_\rho, j_\rho, k_\rho)\}_{\rho\in I}$.

Supongamos (H, j_H, k_H) un objeto de $\mathfrak{C}_X$ y para cada $\rho \in I$ un morfismo $\eta_\rho\colon F_\rho \longrightarrow H$, entonces si $g \in F_\rho$, $h \in F_q$ tenemos que

$$\eta_q(\tau^g(h)) = \eta_q(k_q(j_\rho(g))(h)) = k_H(j_\rho(g))(\eta_q(h))$$

$$= k_H(j_H(\eta_\rho(g)))(\eta_q(h)) = \eta_\rho(g)^{-1}\eta_q(h)\eta_\rho(g).$$

$$\therefore \quad \eta_q(\tau^g(h)) = \eta_\rho(g)^{-1}\eta_q(h)\eta_\rho(g)$$

Entonces por la propiedad universal del producto libre existe un único homomorfismo $\hat{\nu}\colon F \longrightarrow H$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_\rho \arrow[r, "{[\ ]}"] \arrow[dr, "\eta_\rho"'] & F \arrow[d, dashed, "\hat{\nu}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Supongamos $g \in F_\rho$, $f \in F_r$ entonces tenemos que

$$\hat{\nu}([\tau^g(f)]^{-1}[g^{-1}][f][g]) = \hat{\nu}([\tau^g(f)])^{-1}\hat{\nu}([g^{-1}])\hat{\nu}([f])\hat{\nu}([g])$$

$$= \eta_r(\tau^g(f))^{-1}\eta_\rho(g)^{-1}\eta_r(f)\eta_\rho(g)$$

$$= (\eta_\rho(g)^{-1}\eta_r(f)\eta_\rho(g))^{-1}\eta_\rho(g)^{-1}\eta_r(f)\eta_\rho(g))$$

$$= 1$$

entonces $\hat{\nu}(R) = 1$

$\therefore$ Existe un único morfismo $\nu\colon \boxplus\mathcal{G} \longrightarrow H$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_\rho \arrow[r, "{[\ ]}"] \arrow[dr, "\eta_\rho"'] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\hat{\nu}"] & F/R = \boxplus\mathcal{G} \arrow[dl, dashed, "\nu"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Es claro que ν es único con la propiedad de que

$$\nu \circ \pi \circ [\ \ ] = \eta_{\rho}$$

Veamos que ν es morfismo de la categoría $\mathfrak{C}_X$:

Se comprueba directamente en los generadores que

$j_H \circ \nu = j_{\boxplus^{\otimes}}$ y que $\nu(k_{\boxplus^{\otimes}}(x)(f)) = k_H(x)(\nu(f))$

$\therefore$ ν es un morfismo de la categoría $\mathfrak{C}_X$.

$\therefore$ $((\boxplus^{\otimes}, j_{\boxplus^{\otimes}}, k_{\boxplus^{\otimes}}); \phi)$ es un coproducto de la familia $\{(F_{\rho}, j_{\rho}, k_{\rho})\}_{\rho \in I}$.

3. LA DEFINICON DE F. TOMAS DE 1973 IMPLICA LA DEFINICION DE H. NAVA

Supongamos $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos ajenos dos a dos y homomorfismos φ_m^{ℓ}: $G_{\ell} \longrightarrow \mathrm{Aut}G_m$ tales que $\varphi_{\ell}^{\ell}(g)(a) = g^{-1}ag$ y si denotamos $a^g = \varphi_m^{\ell}(g)(a)$ entonces $a^{g^h} = a^{h^{-1}gh}$.

Teorema.3.1.– $(G_i, \varphi_m^{\ell})_I$ es un sistema admisible de grupos y operaciones, según el concepto de Tomás.

dem.– Sea $S = \oplus G_i/N$ la suma activa de $(G_i)_{i\in I}$ y los φ_m^{ℓ} según la constucción de Nava con respecto a un cierto orden total de I.

Se define entonces j_{ℓ}: $G_{\ell} \longrightarrow S$ como $j_{\ell} = \psi_{\ell}$ donde ψ_{ℓ} es el homomorfismo inclusión definido por Nava.

Se define $\hat{k}_{\ell}: \oplus G_i \longrightarrow \mathrm{Aut}G_{\ell}$ como sigue:
si $\alpha \in \oplus G_i$ y $\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_r$ son los índices de I en los cuales $\alpha_{\ell_k} \neq 1$ entonces

$$\hat{k}_{\ell}(\alpha)(g) = g^{\alpha_{\ell_1}\alpha_{\ell_2}\cdots\alpha_{\ell_r}}$$

Como $\hat{k}_{\ell}(\alpha) = \varphi_{\ell}^{\ell_r}(\alpha_{\ell_r})\circ\varphi_{\ell}^{\ell_{r-1}}(\alpha_{\ell_{r-1}})\circ\ldots\circ\varphi_{\ell}^{\ell_1}(\alpha_{\ell_1})$ entonces $\hat{k}_{\ell}(\alpha)$ es un automorfismo de G_{ℓ}.

Se comprueba directamente que $\hat{k}_{\ell}$ es un homomorfismo.

Ahora tomemos $\alpha \in \oplus G_i$ un generador de N. Entonces existen $r, k \in I$ con $r < k$ tales que

$$\alpha_m = 1 \quad \text{si } m \neq r \text{ y } m \neq k$$

$$\alpha_r = g_r^{-1} g_r^{f_k}$$

$$y \qquad \alpha_k = f_k^{-1} f_k^{g_r}$$

Entonces

$$\hat{k}_\ell(\alpha)(g) = g^{g_r^{-1} g_r^{f_k} f_k^{-1} f_k^{g_r}} = g$$

$$\therefore \quad \hat{k}_\ell(\alpha) = 1_{G_\ell}$$

$$\therefore \quad \hat{k}_\ell(N) = 1_{G_\ell}$$

Entonces existe un homomorfismo

$$k_\ell \colon S \longrightarrow \mathrm{Aut} G_\ell$$

tal que si $\sigma \colon \oplus G_i \longrightarrow S$ es la proyección natural entonces

$$k_\ell \circ \sigma = \hat{k}_\ell$$

Veamos que $(G_\ell, \bar{k}_\ell, j_\ell)$ es un objeto de $\mathfrak{C}_S$

Se comprueba directamente que

$$k_\ell \circ j_\ell(g)(h) = g^{-1} h g$$

Además, si $\alpha' \in S$ y $\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_r$ son los indices de I en los cuales α_{ℓ_j} es distinto de 1, entonces

$$\alpha' = \psi_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}) \psi_{\ell_2}(\alpha_{\ell_2}) \ldots \psi_{\ell_r}(\alpha_{\ell_r})$$

$$\therefore \quad \alpha'^{-1} j_{\ell}(g)\alpha' =$$

$$= (\psi_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}) \quad \dots \quad \psi_{\ell_r}(\alpha_{\ell_r}))^{-1}\psi_{\ell}(g)\psi_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}) \dots \psi_{\ell_r}(\alpha_{\ell_r})$$

$$= \psi_{\ell}(g^{\alpha_{\ell_1} \cdots \alpha_{\ell_r}})$$

$$= j_{\ell}(g^{\alpha_{\ell_1} \cdots \alpha_{\ell_r}})$$

$$= j_{\ell}(k_{\ell}(\alpha')(g))$$

finalmente se comprueba directamente que

$$\varphi_m^{\ell} = k_m \circ j_{\ell}$$

$\therefore$ $(G_{\iota}, \varphi_m^{\ell})_I$ es un sistema admisible de grupos y operaciones y $\mathfrak{C}_S$ es una categoría apropiada.

Se definen

$$j_S = 1_S\colon S \longrightarrow S$$

$$k_S = \mathrm{int}_S\colon S \longrightarrow \mathrm{Aut}S$$

con estas definiciones tenemos que (S, j_S, k_S) es un objeto de la categoría $\mathfrak{C}_S$.

Para cada $\ell \in I$ tenemos el morfismo $\psi_{\ell}\colon G_{\ell} \longrightarrow S$ definido por Nava, que es de hecho un morfismo

$$\psi_{\ell}\colon (G_{\ell}, j_{\ell}, k_{\ell}) \longrightarrow (S, j_S, k_S) \text{ de la categoría } \mathfrak{C}_S$$

Proposicion 3.2.- $[(S,\ j_S,\ k_S);\ (\psi_{\ell})_{\ell\in I}]$ es un coproducto de la familia $((G_{\ell},\ j_{\ell},\ k_{\ell}))_{\ell\in I}$ en $\mathfrak{C}_S$.

dem.- Supongamos $(T,\ j_T,\ k_T)$ un objeto de $\mathfrak{C}_S$ y para cada ℓ

$\in I$ un morfismo

$$\eta_\ell \colon (G_\ell,\ j_\ell,\ k_\ell) \longrightarrow (T,\ j_T,\ k_T)$$

entonces si $g \in G_\ell$, y $f \in G_m$

$$\begin{aligned}
\eta_\ell(g^f) &= \eta_\ell(k_\ell(j_m(f))(g)) \\
&= k_T(j_m(f))(\eta_\ell(g)) \\
&= k_T(j_T(\eta_m(f)))(\eta_\ell(g)) \\
&= \eta_m(f)^{-1}\eta_\ell(g)\eta_m(f)
\end{aligned}$$

Entonces por la propiedad universal de la suma activa S, según Nava, existe $\varphi \colon S \longrightarrow T$ homomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_\ell \arrow[r, "\psi_\ell"] \arrow[d, "\eta_\ell"'] & S \arrow[dl, "\varphi"] \\
T &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $\ell \in I$

Veamos a continuación que φ es un morfismo de $\mathfrak{C}_S$, tenemos que:

$$j_T \circ \eta_\ell = j_T \circ \varphi \circ \psi_\ell$$

y como η_ℓ es morfismo de $\mathfrak{C}_S$ entonces

$$j_T \circ \eta_\ell = j_\ell = \psi_\ell$$

$$\therefore \quad j_T \circ \varphi \circ \psi_{\ell} = \psi_{\ell}$$

Entonces, por la propiedad universal de la suma activa S de Nava tenemos que

$$j_S = 1_S = j_T \circ \varphi$$

ya que $1_S \circ \psi_{\ell} = \psi_{\ell}$.

Ahora bien, si α', $\beta' \in S$ y $\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_m$; $n_1 < \ldots < n_r$ son los indices en los cuales

$$\alpha_{\ell_s} \neq 1 \quad y \quad \beta_{n_t} \neq 1$$

entonces

$$k_T(\beta')(\varphi(\alpha')) = k_T(\beta')(\varphi(\psi_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}) \ldots \varphi(\psi_{\ell_m}(\alpha_{\ell_m}))$$

$$= k_T(\beta')(\eta_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}) \ldots \eta_{\ell_m}(\alpha_{\ell_m}))$$

$$= \eta_{\ell_1}(k_{\ell_1}(\beta')(\alpha_{\ell_1}) \ldots \eta_{\ell_m}(k_{\ell_m}(\beta')(\alpha_{\ell_m}))$$

$$= \eta_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}^{\beta_{n_1}\beta_{n_2}\cdots\beta_{n_t}}) \ldots \eta_{\ell_m}(\alpha_{\ell_m}^{\beta_{n_1}\cdots\beta_{n_t}})$$

$$= \varphi\circ\psi_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1}^{\beta_{n_1}\cdots\beta_{n_t}}) \ldots \varphi\circ\psi_{\ell_m}(\alpha_{\ell_m}^{\beta_{n_1}\cdots\beta_{n_t}})$$

$$= \varphi(\psi_{n_t}(\beta_{n_t})^{-1} \ldots \psi_{n_1}(\beta_{n_1})^{-1}\psi_{\ell_1}(\alpha_{\ell_1})\psi_{n_1}(\beta_{n_1}) \ldots$$

$$\ldots\psi_{n_t}(\beta_{n_t}) \ \ldots \ \psi_{n_t}(\beta_{n_t})^{-1}\ldots\psi_{n_1}(\beta_{n_1})^{-1}\psi_{\ell_m}(\alpha_{\ell_m})\psi_{n_1}(\beta_{n_1})\ldots\psi_{n_t}(\beta_{n_t}))$$

$$= \varphi(\beta'^{-1}\alpha'\beta')$$

$$= \varphi(k_S(\beta')(\alpha'))$$

$$\therefore \quad k_T(\beta')(\varphi(\alpha)) = \varphi(k_S(\beta')(\alpha'))$$

Entonces φ es de hecho un morfismo de $\mathfrak{C}_S$. Además, sabemos que φ es único por la propiedad universal de la suma activa S, según Nava.

$\therefore$ $[(S,\ j_S,\ k_S);\ \{\psi_\ell\}_{\ell\in I}]$ es un coproducto de la familia $(G_\ell,\ j_\ell,\ k_\ell)$.

4. LA DEFINICION DE H. NAVA IMPLICA LA DE P. RIBENBOIM SI SE TOMA ESTA CON UNA ACCION NORMAL Y DISTRIBUTIVA SOBRE UNA GRAFICA DISCRETA.

Sea $\mathfrak{F}$ una gráfica discreta, y $\mathfrak{F}$ un carcaj de grupos $(F_p)_{p\in I}$ sobre $\mathfrak{F}$. Supongamos $\tau: \coprod\mathfrak{F} \longrightarrow \mathrm{Aut}\mathfrak{F}$ una acción normal y distributiva, de acuerdo con la definición de Ribenboim.

Para $r, q \in I$ definimos $k_q^r(g) = \tau^g$ restringido a F_q. Como τ es una acción normal entonces $\tau^g \in \mathrm{Aut}F_q$.

Además tenemos que si $h \in F_r$ entonces

$$k_q^r(gh) = \tau^{gh} = \tau^g\tau^h = k_q^r(g)k_q^r(h)$$

$$\therefore \quad k_q^r : F_r \longrightarrow \mathrm{Aut}F_q \quad \text{es un homomorfismo.}$$

Como τ es una acción tenemos que si $g,h \in F_r$ entonces

$$k_r^r(g)(h) = g^{-1}hg.$$

Si denotamos por $h^g = k_q^r(g)(h)$ entonces por la ditributividad de τ tenemos

$$h^{g^f} = h^{k_r^m(f)(g)} = h^{\tau^f(g)} = \tau^{\tau^f(g)}(h)$$

$$= \tau^f(\tau^g(\tau^{f^{-1}}(h))) = h^{f^{-1}gf}.$$

Entonces, con la familia $(F_p)_{p\in I}$ y los homomorfismos $k_q^r: F_r \longrightarrow \mathrm{Aut}G_q$ $r, q \in I$ podemos tomar la suma activa S definida por H. Nava. Tenemos también las inclusiones $\psi_\ell: F_\ell \longrightarrow S$ ó, escrito de otra forma

$$\{\psi_r\}_{r\in I}: \coprod \mathfrak{G} \longrightarrow S$$

Por otro lado tenemos la suma activa de Ribenboim, con el homomorfismo canónico

$$\phi\colon \coprod \mathfrak{G} \longrightarrow \boxplus \mathfrak{G}.$$

Como
$$\begin{aligned}\{\psi_r\}(h^g) &= \{\psi_r\}(k_q^r(g)(h)) \\ &= \psi_q(k_q^r(g)(h)) \\ &= \psi_r(g)^{-1}\psi_q(h)\psi_r(g).\end{aligned}$$

tenemos que por la propiedad universal de $(\boxplus\mathfrak{G}, \phi)$ existe un único homomorfismo $\rho\colon \boxplus\mathfrak{G} \longrightarrow S$ tal que

$$\rho\circ\varphi = \{\psi_r\}$$

Como además

$$\phi(h^g) = \phi(\tau^g(h)) = \phi(g)^{-1}\phi(h)\phi(g)$$

entonces, por la propiedad universal de la suma S, existe un único homomorfismo $\rho'\colon S \longrightarrow \boxplus\mathfrak{G}$ tal que

$$\rho'\circ\{\psi_\ell\} = \phi$$

Entonces aplicando las propiedades universales se demuestra fácilmente que

$$\rho\circ\rho' = 1_S \qquad y \qquad \rho'\circ\rho = 1_{\boxplus\mathfrak{G}}.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] Herrlich, H. Category Theory.
Heldermann Verlag Berlin, 1979.

[2] Nava Lopez, H. Sumas Activas de Grupos.
Tesis para la obtención del título
de Licenciado en Matemáticas.
Universidad Nacional Autonoma de México.
Facultad de Ciencias. 1978.

[3] Ribenbiom, P. Active Sums of Groups.
Queens Mathematical Preprint, No. 1976-6
Queens University,
Kingston, Ontario, Canada.

[4] Ribenbiom, P. Active Sums of Groups.
J. Reine Angew.
Math. 325 (1981), 153-182.

[5] Tomas, F. Un Análogo de Suma Directa para
Sistemas de Subgrupos Normales.
Anales del Instituto de Matemáticas,
No. 13, 161-186,
UNAM, México, 1973.

[6] Tomas, F. Reconstrucción de los Grupos Finitos a
partir de las Cerraduras Normales de sus
Subgrupos de Sylow y sus Acciones Mutuas
Anales del Instituto de Matemáticas,
No. 18-1, 29-49,
UNAM, México, 1978.