

2ij.39



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

**UNA REVISION DE ALGUNAS TEORIAS
DE TURBULENCIA HOMOGENEA
E ISOTROPICA**

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

Alejandro Eduardo Mendoza Blanco

México, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

INDICE

i

CAPITULO I. FORMULACION DEL PROBLEMA DE LA TURBULENCIA.

I. Dinámica de fluidos	3
I.1 Descripción del fluido	3
I.2 Conservación de masa	4
I.3 Conservación de momento	5
I.4 Conservación de momento angular	6
I.5 Conservación de energía	7
I.6 Ecuaciones constitutivas	9
I.7 Ecuaciones de Navier-Stokes	11
I.8 Vorticidad	13
I.9 Condiciones de frontera e iniciales	15
II. Formulación del problema de la turbulencia	15
II.1 El problema de las condiciones iniciales	15
II.2 Formulación del problema	17
II.3 Especificación estadística del campo de la turbulencia.	19
III. Ecuaciones dinámicas de la turbulencia.	22
III.1 Jerarquía d Friedmann-Keller	22
III.2 Verificación experimental y problema ergódico	23

CAPITULO II. TEORIAS SEMIEMPIRICAS	26
I. Introduccion	27
II. Teorias semiempiricas	28
II.1 Teoria de J. Boussinesq	28
II.2 Teoria de longitud de mezclado de L. Prandtl	29
II.3 Hipotesis de semejanza de T. von Karman	34
II.4 Vorticidad y teoria de G. I. Taylor	36
II.5 Teoria de H. Reichardt	37
III. ANALISIS	38
IV. CONCLUSIONES	42
CAPITULO III. TEORIAS ESTADISTICAS	43
I. DESCRIPCION DE LA TURBULENCIA HOMOGENEA	
B ISOTROPICA	44
II. ECUACION DE VON KARMAN-HOWARTH Y SU VERIFICACION	
EXPERIMENTAL	50
III. HIPOTESIS DE AUTOPRESERVACION	52
III.1 Teoria de T. von Karman	54
III.2 Teoria modificada de von Karman	54
III.3 Teoria de C. C. Lin	54
IV. CRITICA Y VERIFICACION EXPERIMENTAL DE LAS HIPOTESIS	
DE AUTOPRESERVACION	55
V. HIPOTESIS SOBRE LA TRANSFERENCIA ESPECTRAL DE	
ENERGIA	59
V.1 Hipotesis de Kovaznay	60
V.2 Hipotesis de difusion de Leith	60

V.3 Hipótesis de Obukhov	61
V.4 Hipótesis modificada de Obukhov	61
V.5 Hipótesis de Heisenberg	62
V.6 Hipótesis modificadas de Heisenberg	63
V.7 Hipótesis de von Kármán	64
V.8 Hipótesis de Goldstein	64
VI. VERIFICACION EXPERIMENTAL DE LAS HIPOTESIS DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA	64
VII. TEORIAS ANALITICAS DE LA TURBULENCIA	68
VII.1 Problema de la cerradura	69
VIII. CONCLUSIONES	71
CAPITULO IV. TEORIA DE KOLMOGOROV	75
I. INTRODUCCION	76
II. TURBULENCIA LOCALMENTE ISOTROPICA	77
III. TEORIA DE KOLMOGOROV	78
IV. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LA AUTOPRESERVACION DE LA TEORIA DE KOLMOGOROV	80
V. CRITICA A LA TEORIA DE KOLMOGOROV	80
CAPITULO V. RESUMEN, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	85
I. TECNICAS DIAGRAMATICAS Y TEORIA DE PERTURBACION	86
II. TECNICAS DEL GRUPO DE RENORMALIZACION	89
III. TRANSICION A LA TURBULENCIA: LA TEORIA DE LANDAU	92
IV. RESUMEN Y CONCLUSIONES	95

APENDICE UNO. FORMULACION FUNCIONAL.	102
I. INTRODUCCION	102
II. ECUACIONES	106
II.1 Ecuación de continuidad	106
II.2 Ecuaciones de Navier-Stokes	107
III. FORMULACION ESPECTRAL	110
IV. ECUACIONES PARA LA FUNCIONAL ESPACIO-TEMPORAL	
CARACTERISTICA	113
V. METODOS PARA RESOLVER LAS ECUACIONES	114
V.1 Solución en series	115
V.2 Aproximación a orden cero en el número	
de Reynolds	116
V.3 Integración funcional	116
BIBLIOGRAFIA	118

" ... a dark

Illimitable ocean, without bound,
without dimension, where length, breadth and height
And time, and place are lost; where the eldest Night
And Chaos, ancestors of nature, hold
Eternal anarchy, ... "

John Milton, *Paradise Lost*

CAPITULO UNO.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE LA TURBULENCIA.

Given for one instant an intelligence which could comprehend all the forces by which nature is animated and the respective situation of the beings who compose it - an intelligence sufficiently vast to submit these data to analysis - it would embrace in the same formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the lightest atom; for it, nothing would be uncertain and the future, as the past, would be present to its eyes.

Pierre Simon, Marquis de Laplace (1795)

El objetivo de este capítulo es el de formular el problema de la turbulencia. A fin de formular el problema, la sección uno está dedicada a resumir los conceptos básicos de la dinámica de fluidos. Estos conceptos son utilizados en la sección dos para formular el problema. La sección tres está dedicada a establecer las ecuaciones dinámicas que describen el problema. La conexión entre teoría y experimentos es analizada en la última sección. Este capítulo permitirá analizar, posteriormente, el problema de la transición a la turbulencia.

I. DINAMICA DE FLUIDOS.

I.1 Descripción del fluido. Un fluido, como sistema físico, puede ser modelado de muchas maneras. La más útil en este problema consiste en suponer que el fluido es un continuo de materia. En este enfoque, la estructura atómica de la materia es ignorada. La suposición implica un número infinito de grados de libertad asociados con los "puntos materiales" que constituyen el continuo. Si se introduce el camino libre medio como la distancia promedio que recorre una partícula entre colisiones sucesivas, la hipótesis del continuo es excelente si las dimensiones del flujo son mucho mayores que las del camino libre medio (Currie, 1974). Cualquier elemento de volumen al que se haga referencia se supondrá lo suficientemente grande como para tener un número grande de partículas, y se le trate como continuo; pero suficientemente pequeño para ser considerado puntual desde el punto de vista macroscópico.

Existen dos conjuntos de coordenadas para describir al fluido. El conjunto euleriano consiste en las coordenadas (x, y, z, t) del espacio-tiempo tomadas como independientes. La descripción está dada en términos de los campos de velocidad, presión, etc. En el lagrangiano, las coordenadas del espacio-tiempo ya no son independientes. La descripción está dada por el movimiento de las partículas individuales de fluido. Si las ecuaciones dinámicas (Monin & Yaglom, 1975) son suficientes para describir la trayectoria del elemento de fluido como función del tiempo, las coordenadas independientes son la posición inicial (x_0, y_0, z_0) y el tiempo t .

Las leyes de la mecánica y de la termodinámica se aplican a un elemento de fluido, por lo que las coordenadas lagrangianas son las ideales para elaborar las ecuaciones dinámicas. Sin embargo, generalmente la solución de problemas se lleva a cabo en coordenadas eulerianas.

Del párrafo anterior es clara la necesidad de tener una conexión entre ambos sistemas. Dicha conexión es un resultado matemático conocido como el teorema de transporte de Reynolds (Currie, 1974):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha \, dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dV,$$

donde α es una función escalar y \vec{u} es la velocidad del fluido.

1.2 Conservación de masa. (Currie, 1974) La conservación de masa conduce a la ecuación de continuidad. El principio establece que la cantidad de masa en el espacio-tiempo permanece constante. Esto significa que el cambio en la cantidad de masa en una región V del espacio, delimitada por una superficie S fija, se debe sólo al flujo de masa a través de la superficie S . El principio de conservación establece:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0,$$

aquí, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)$ denota la derivada material y ρ es la densidad del fluido. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds y el hecho de que el volumen es arbitrario, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

en donde se utiliza la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos. Esta última ecuación puede reescribirse como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{1.1}$$

que se conoce como ecuación de continuidad. Esta ecuación relaciona la densidad con el campo de velocidades \vec{u} del fluido.

Existen situaciones en las que se puede considerar la densidad constante, en cuyo caso se dice que se tiene un fluido incompresible. Si $\rho = \text{cte}$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_k} v_k = 0,$$

o bien,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.2)$$

Cabe aclarar que lo inverso no es cierto, es decir, si la divergencia del campo de velocidades es cero, la densidad no es necesariamente constante. Como ejemplo, se puede mencionar un flujo estacionario en el que la densidad cambia en la dirección perpendicular a la velocidad, por lo que $\vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$; la ecuación de continuidad conduce, en este caso, a $\partial \rho / \partial t + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$. Este tipo de flujos reciben el nombre de estratificados.

1.3 Conservación de momento. (Landau & Lifshitz, 1959) La conservación de momento resulta de la segunda ley de Newton aplicada a un elemento de volumen. Se pueden distinguir dos tipos de fuerzas y su clasificación depende de la forma en cómo actúan sobre el elemento. Se denominan fuerzas de cuerpo o volumétricas a aquellas que actúan sobre cada elemento del fluido, como es el caso de las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas. Este tipo de fuerzas depende de la masa contenida en el elemento de volumen. El otro tipo de fuerzas actúa sobre la superficie del elemento y sólo depende de la magnitud y orientación de la misma. Este es el tipo de fuerzas al que pertenecen los esfuerzos viscosos y la presión. Las fuerzas superficiales son englobadas en el tensor de esfuerzos σ_{ij} , que representa el esfuerzo (fuerza por unidad

de área) que actúa sobre el plano $x_i = \text{cte}$, en la dirección x_j (Batchelor, 1967).

Utilizando el teorema de la divergencia (Synge & Schild, 1949), las fuerzas superficiales se escriben como una integral de volumen. La segunda ley de Newton se escribe en forma sencilla:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \left[\rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ki} \right] dV ;$$

aplicando el teorema de Reynolds, usando la ecuación de continuidad y el hecho de que el volumen es arbitrario, la ecuación anterior se convierte en

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ki} + \rho F_i$$

o bien,

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right] \vec{u} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \vec{F}. \quad (1.3)$$

El primer término de esta ecuación es la aceleración temporal, mientras que el segundo término, no lineal, es una aceleración advectiva debida a un gradiente de velocidades. Los últimos dos términos son las causas de estas aceleraciones, es decir, las fuerzas que actúan sobre el fluido.

1.4 Conservación de momento angular. La conservación de momento angular conduce a la simetría del tensor de esfuerzos (Synge y Schild, 1949). La ecuación de momento angular es:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{u}) dV = \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{F}) dV + \int_S \vec{r} \times \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n} dS,$$

en donde \vec{r} representa la posición. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds al miembro derecho, y utilizando el hecho de que el producto vectorial de vectores paralelos es cero,

resulta

$$\int_V \rho (\vec{x} \times \vec{z}) dV = \int_V \rho (\vec{x} \times \vec{F}) dV + \int_S \vec{x} \times \sigma \cdot \hat{n} dS,$$

donde $\vec{z} = \frac{d}{dt} \vec{u}$ es la aceleración. Esta ecuación puede escribirse en forma tensorial

$$\int_V \rho (x_i \alpha_j - x_j \alpha_i) dV = \int_V \rho (x_i F_j - x_j F_i) dV + \int_S (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}) n_k dS;$$

aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie y la segunda ley de Newton: $\alpha_i = F_i$, resulta:

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) dV = 0,$$

como el volumen es arbitrario, concluimos que el tensor de esfuerzos es simétrico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.4)$$

1.5 Conservación de energía (Currie, 1974). El tercer principio de conservación utilizado es el de energía. La idea principal es encontrar una expresión hidrodinámica para la primera ley de la termodinámica. Dado que una partícula de fluido no se encuentra, por lo general, en equilibrio, la aplicación de la primera ley no es directa. Esto obliga a introducir una hipótesis extra que permita aplicar la primera ley al elemento de fluido. La hipótesis de equilibrio local (De Groot y Mazur, 1962) permite definir la energía interna instantánea y aplicar la termodinámica al elemento. La energía total es la suma de la energía interna por unidad de masa e y la energía cinética $1/2(\rho u_k u_k)$.

Para establecer la primera ley, se debe encontrar la potencia realizada por el sistema y el flujo de calor. La potencia realizada se debe a los dos tipos de fuerzas, volumétricas y

superficiales. La primera ley de la termodinámica conduce a

$$\frac{D}{Dt} \int_V [\rho e + 1/2(\rho u^2)] dV = \int_S \vec{u} \cdot \underline{\sigma} \cdot \hat{n} dS + \int_V \vec{u} \cdot \rho \vec{F} dV - \int_S \vec{q} \cdot \hat{n} dS,$$

donde \vec{q} el flujo de calor y \hat{n} es la normal exterior a la superficie. Con esta convención para el vector normal \hat{n} , es necesario incluir un signo menos a fin de obtener el flujo de calor que entra al sistema. El lado izquierdo de esta ecuación representa la variación temporal de la energía; el lado derecho da la potencia de las fuerzas y la pérdida de energía por calor. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds, las ecuaciones de conservación de momento y continuidad, obtenemos:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j},$$

o bien,

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla e \right] = \underline{\sigma} : \nabla \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q}. \quad (1.5)$$

Los términos en esta última ecuación son fáciles de interpretar. El primer término del miembro izquierdo representa la variación temporal de la energía interna y el segundo da la variación debida al flujo de masa. Los términos del miembro derecho son la causa de estas variaciones. La doble contracción del tensor de esfuerzos con el gradiente de la velocidad está relacionada con el trabajo reversible y la disipación viscosa; el segundo término es el flujo de calor. La descripción termodinámica completa requiere de dos ecuaciones de estado $p = p(\rho, T)$ y $e = e(\rho, T)$, donde p es la presión termodinámica y T la temperatura.

La descripción mecánica y termodinámica del sistema ha conducido, a través de los principios de conservación, a un

sistema de siete ecuaciones escalares: la de continuidad, la de conservación de energía, dos ecuaciones de estado y tres más correspondientes a las componentes de la ecuación vectorial de conservación de momento. Para estas siete ecuaciones tenemos un total de 14 incógnitas: ρ , ϵ , las tres componentes de la velocidad u_i , las tres componentes del flujo de calor q_i y seis componentes del tensor de esfuerzos σ_{ij} .

1.6 Ecuaciones constitutivas. (Currie, 1974) El propósito fundamental de las ecuaciones constitutivas es cerrar el sistema de ecuaciones. Dos ecuaciones constitutivas son suficientes para cerrar el sistema. La primera ecuación relaciona la parte viscosa del tensor de esfuerzos con los gradientes de la velocidad; la segunda ecuación relaciona el flujo de calor \vec{q} con el gradiente de la temperatura.

Cuando el fluido está en reposo, la única fuerza superficial que actúa sobre el fluido es la presión termodinámica. La presión es un esfuerzo perpendicular a la superficie, es decir, se encuentra en la diagonal del tensor de esfuerzos: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Cuando el fluido se encuentra en movimiento aparecen otros esfuerzos superficiales debidos a la interacción entre elementos cercanos. Estos esfuerzos superficiales se agrupan en el tensor de esfuerzos viscosos τ_{ij} , lo que permite escribir

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (1.6)$$

donde el tensor τ_{ij} se anula para campo de velocidades nulo o constante. Los resultados experimentales indican que el tensor τ_{ij} depende fuertemente de los gradientes de la velocidad. Para encontrar la forma explícita del tensor es necesario introducir

ciertas hipótesis sobre la naturaleza del tensor.

La primera hipótesis establece que el tensor τ_{ij} sólo depende del tensor de rapidez de corte $e_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j) + (\partial u_j / \partial x_i)$. La dependencia más general para este tensor es de la forma

$$\tau_{ij}(x, y, z) = F_{ij}(x, y, z) + F_{ijkl}(x, y, z) e_{kl} + \\ + F_{ijklmn}(x, y, z) e_{kl} e_{mn} + \dots,$$

donde F_{ij} es un tensor de rango dos, F_{ijkl} es un tensor de rango cuatro, etc. Estos tensores también pueden depender de los invariantes del tensor e_{ij} , que son: la traza, el determinante y la suma de los determinantes de los cofactores.

La segunda hipótesis establece que la dependencia en el tensor e_{ij} es lineal por lo que:

$$F_{ij} = f_{ij}(x, y, z) e_{kk},$$

donde e_{kk} es la traza del tensor y

$$F_{ijkl} = f_{ijkl}(x, y, z) e_{kk},$$

donde las funciones f_{ij} y f_{ijkl} no dependen de los invariantes del tensor. Los demás tensores son cero debido a linealidad.

Los fluidos con estas características son conocidos como newtonianos. Si el fluido es homogéneo e isotrópico el tensor f_{ijkl} también lo será. La forma más general (Synge & Schild, 1949) de un tensor isotrópico de rango cuatro es:

$$f_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}),$$

y para tensores de segundo orden, el único tensor isotrópico es

$$f_{ij} = \alpha \delta_{ij},$$

donde los factores λ , μ , γ y α son escalares que pueden depender de \vec{x} . La simetría (Synge y Schild, 1949) del tensor de esfuerzos implica que sólo dos de estos coeficientes son independientes por

lo que

$$\tau_{ij} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right] + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_l} u_l, \quad (1.7)$$

donde η se conoce como el coeficiente de viscosidad cortante y ζ es el coeficiente de viscosidad volumétrica. En el caso de fluido incompresible, los términos que contienen la divergencia del tensor de esfuerzos se cancelan. Existen otros tipos de fluidos (Bird, Stewart y Lightfoot, 1960) que no tienen un comportamiento newtoniano.

La segunda ecuación constitutiva es la llamada ley de Fourier (Landau y Lifshitz, 1959), y relaciona el flujo de calor con el gradiente de la temperatura:

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

o bien,

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T, \quad (1.8)$$

donde κ es la conductividad térmica del fluido.

1.7 Ecuaciones de Navier-Stokes. (Currie, 1974) Utilizando estas dos ecuaciones constitutivas podemos reescribir las ecuaciones de conservación como un sistema cerrado. La ecuación de continuidad queda igual. La ecuación de momento es simplificada. Tomando la derivada del tensor de esfuerzos y sustituyéndola en la ecuación de momento resulta:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} u_j + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} p + \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \left(\zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

conocida como ecuación de Navier-Stokes.

Por otra parte, si el fluido no es newtoniano la ecuación de Navier-Stokes no es aplicable. El procedimiento a seguir es encontrar la expresión para el tensor de esfuerzos viscosos, sustituirla en las ecuaciones de momento y energía y obtener las ecuaciones que describen correctamente al fluido. En lo que respecta a la ecuación de energía la hipótesis newtoniana simplifica la ecuación:

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = -p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \Phi,$$

donde Φ se conoce como función de disipación y está dada por

$$\Phi = \frac{1}{2} \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right]^2 + \zeta \left[\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \right]^2$$

y representa la conversión de energía mecánica en calor por efecto de la viscosidad. El término $-p(\partial u_k / \partial x_k)$ corresponde al trabajo reversible debido a la compresión; para un fluido incompresible este término será cero. El penúltimo término tiene su origen en el gradiente de temperaturas y está asociado al flujo de calor.

En conclusión, el uso de ecuaciones constitutivas permite reducir el número de incógnitas y tener un sistema cerrado de ecuaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (1.11a)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u_j + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_k = \quad (1.11b)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_j} p + \eta \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} u_j + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right], \quad (1.11c)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = -p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \Phi, \quad (1.11d)$$

$$p = p(\rho, T), \quad (1.11e)$$

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T); \quad (1.11f)$$

son un total de siete ecuaciones con siete incógnitas. Las dos últimas ecuaciones termodinámicas permiten describir el fluido con sólo conocer las tres componentes del campo de velocidades y dos variables termodinámicas, por ejemplo ρ y T .

El problema se puede simplificar si el fluido en cuestión es incompresible. Las primeras cuatro ecuaciones se desacoplan del sistema, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u_k = 0,$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u_j + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j = - \frac{\partial}{\partial x_j} p + \eta \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} u_j,$$

o bien,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.12a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{F}. \quad (1.12b)$$

son suficientes para describir el problema.

I.8 Vorticidad. (Batchelor, 1967) La ecuación de vorticidad se obtiene al tomar el rotacional de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (1.13)$$

donde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ se denomina la vorticidad. Esta ecuación no contiene a la presión. El primer término del lado derecho de la ecuación representa el cambio debido a la convección del fluido en el que hay un gradiente de la vorticidad, el último término tiene su origen en la difusión de vorticidad. El segundo término $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}$

no tiene contraparte en la ecuación para la velocidad (Navier-Stokes) y representa la contribución debida al movimiento en dirección perpendicular a la rotación.

En el caso de flujo bidimensional $(\vec{\omega}, \nabla) \vec{u} = 0$ y la ecuación de vorticidad se reduce a

$$\frac{D}{Dt} \vec{\omega} = \nu \nabla^2 \vec{\omega},$$

que es equivalente a una ecuación para la densidad de una cantidad conservada en convección con el fluido y en difusión dentro de él. En tres dimensiones, en general la vorticidad no es una cantidad que se conserve. En el caso de un flujo paralelo donde solo una de las tres componentes de la velocidad es distinta de cero, se obtiene nuevamente una ecuación de difusión.

Para flujos estacionarios con número de Reynolds grande, el volumen de fluido puede ser dividido en dos regiones con distribuciones de vorticidad diferentes. En una de estas regiones el flujo es rotacional, en la otra la vorticidad es cero y se tiene un flujo potencial. La idea básica, aunque no rigurosa, (Landau y Lifshitz, 1959) es que a lo largo de las líneas de flujo del campo de velocidades, definidas como aquellas donde la velocidad es tangencial y denotadas como líneas de corriente, se cumple que si en un punto $\vec{\omega} = 0$, entonces esta condición se mantendrá a lo largo de toda la línea de corriente. Análogamente si $\vec{\omega} \neq 0$ en un punto, se mantendrá así en toda la línea de corriente.

I.9 Condiciones iniciales y de frontera. (Landau y Lifshitz, 1959) Las ecuaciones anteriores deben ser resueltas bajo ciertas condiciones iniciales y de frontera. Las condiciones de frontera establecen que la velocidad del fluido, sobre superficies sólidas, está restringida por la condición

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = \vec{v}_s \cdot \hat{n},$$

donde \vec{v}_s es la velocidad de la superficie sólida y \hat{n} la normal exterior a la superficie. La componente tangencial se toma como cero. Estas dos condiciones sobre la velocidad se conocen como condición de adherencia. Esta condición de adherencia establece que la velocidad del fluido sobre la superficie coincide con la velocidad de la superficie misma

$$\vec{v} = \vec{v}_s.$$

Las ecuaciones también deben satisfacer condiciones iniciales, que se expresan como los valores del campo de velocidades y demás variables termodinámicas en un instante dado del tiempo. Las condiciones iniciales en flujos turbulentos son muy complicadas.

II. FORMULACION DEL PROBLEMA DE LA TURBULENCIA.

II.1 El problema de las condiciones iniciales. Para visualizar el tipo de condiciones iniciales asociadas a un flujo turbulento se puede observar la figura 1, que muestra la variación temporal de la temperatura, la rapidez $|\vec{v}|$ y la componente vertical de la velocidad en un flujo turbulento. Experimentos de esta índole se realizan normalmente en un túnel de viento (Reichardt, 1938).

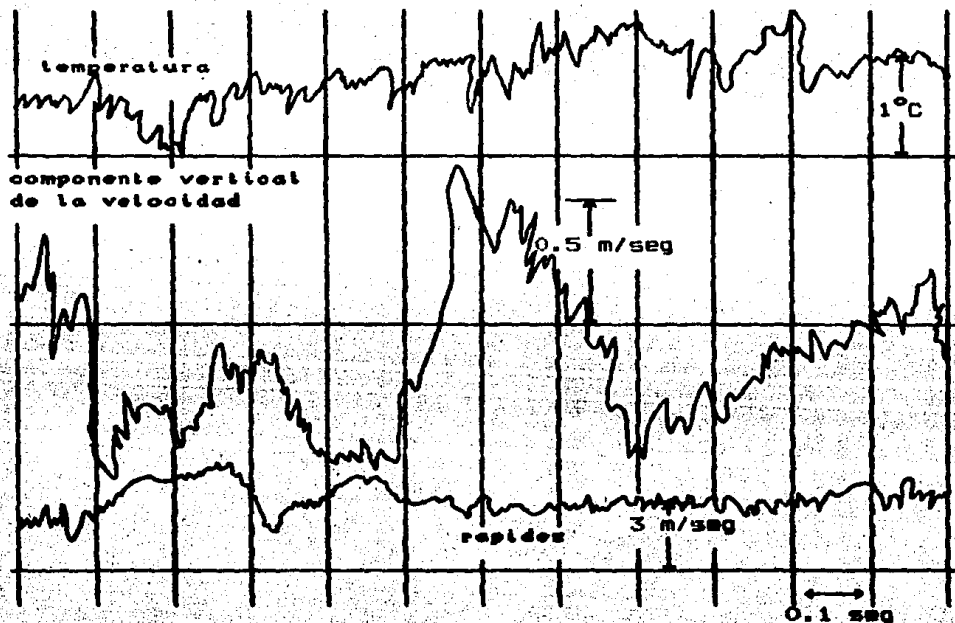


Fig. 1. Ejemplo típico de la variación de la temperatura, rapidez y componente vertical de la velocidad del viento.

La variación espacial de estas cantidades es similar. La complejidad de las ecuaciones de Navier-Stokes aunada a condiciones iniciales como las anteriores hacen intratable el problema en este enfoque. Por otra parte, experimentalmente es imposible fijar condiciones iniciales arbitrarias, por lo que difícilmente se podría hablar de una verificación experimental.

Es necesario cambiar el enfoque para resolver el problema de la turbulencia. Usualmente se buscan características generales que sean aplicables a todos los flujos del mismo tipo, características de tipo estadístico. En este sentido se puede definir un ensemble de flujos similares y promedios sobre dicho ensemble (Monin y Yaglom, 1975).

II.2 Formulación del problema. Como se ha mencionado, la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de Navier-Stokes, con condiciones iniciales arbitrarias, es prácticamente imposible. Por otro lado no se puede asegurar que tal solución exista, es decir, no existe un teorema de existencia, y mucho menos de unicidad, para las ecuaciones de Navier-Stokes. En este aspecto se ha trabajado y bajo ciertas hipótesis del flujo, y del fluido mismo, se han logrado algunos avances (Milne y Thomson, 1968).

Por otra parte, aún bajo condiciones iniciales y de frontera sencillas, la solución exacta de las ecuaciones es difícil de obtener. Solo algunos flujos laminares han sido resueltos completamente (Landau y Lifshitz, 1959). Esto se debe principalmente a la complejidad de la ecuaciones no lineales de Navier-Stokes.

Si se conociera la solución de un flujo turbulento particular, se tendría una descripción tal vez demasiado detallada y compleja como para ver con claridad el problema. Por otra parte, esta solución sería aplicable sólo a este flujo y difícilmente se pueden dar conclusiones sobre otros flujos aún cuando su realización experimental fuera bajo las mismas condiciones controlables. Es posible repetir un experimento bajo las mismas condiciones experimentales (o ambientales) controlables, y construir un ensemble con este tipo de flujos, pero no es posible obtener un flujo con condiciones iniciales precisas. No hay forma de comprobar experimentalmente una solución particular. Es por esto que el tipo de descripción requerida debe ser aplicable a todos los miembros de este ensemble de flujos semejantes y no a

uno en particular.

El nuevo enfoque consistirá en analizar el ensemble de flujos turbulentos semejantes, y las conclusiones que se hagan se harán a través de promedios sobre dicho ensemble. En este sentido, los resultados obtenidos son de carácter estadístico.

El siguiente punto es establecer que se entiende por flujo turbulento. Intuitivamente, entendemos un flujo en el que se observa un comportamiento complicado en los campos que describen al movimiento. Esto significa, que en el caso de flujo turbulento, las mediciones experimentales de los campos que describen el fluido en un mismo punto del espacio-tiempo serán distintas en cada experimento, aún cuando los experimentos se realizan bajo las mismas condiciones experimentales controlables. Con base en esto, se supone que los valores de los campos, como la velocidad y la presión, se comportan como variables aleatorias, por lo que sus valores no podrán ser determinados a partir de los datos del problema.

Una variable aleatoria, en el sentido estadístico, está determinada por una ley o densidad probabilística, la cual se supondrá determinable de los datos del problema. La descripción del problema de la turbulencia será a través de las densidades de probabilidad de los campos y las conclusiones que se obtengan serán en términos de promedios probabilísticos. El campo de la turbulencia está estadísticamente especificado cuando se conocen todas las densidades de probabilidad conjuntas en n puntos del espacio-tiempo, para cualquier entero n . Este tipo de densidades permiten relacionar el campo de la turbulencia en dos o más puntos permitiendo observar, por ejemplo, la correlación del campo de velocidades en puntos distintos.

Hasta ahora, la construcción ha sido general. A fin de simplificar el problema y lograr un mejor entendimiento, el análisis se limitará al caso de fluido incompresible. El flujo está constituido por una superposición de vórtices o movimientos de diferentes escalas. Se toma como premisa, y no hay razón para suponer lo contrario, que las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes siguen siendo válidas en el contexto en que fueron formuladas. La viscosidad tiene un efecto destructivo sobre vórtices o movimientos de pequeña escala donde hay grandes gradientes de la velocidad, este carácter destructivo permite aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes en todas las escalas que aparecen en el flujo.

La formulación del problema de la turbulencia puede ser puesta en los siguientes términos. *Dado un fluido homogéneo e isotrópico, cuyo movimiento está descrito por las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes, y dado el campo de velocidades en un instante de tiempo como una función aleatoria de la posición \vec{x} , el problema consiste en determinar las leyes probabilísticas que describen el movimiento del fluido en instantes posteriores.*

II.3 Especificación estadística del campo de la turbulencia.

Una de las más importantes contribuciones de G. I. Taylor al desarrollo de las teorías de la turbulencia fue hacer un modelo más simplificado del problema. La simplificación radica en hacer hipótesis sobre la forma de las leyes probabilísticas como funciones de la posición \vec{x} . La hipótesis más sencilla es suponer que las funciones de densidad permanecen inalteradas ante una translación de los ejes coordenados, esto es, el flujo es estadísticamente homogéneo. Si además, no existen direcciones

privilegiadas, es decir, las funciones de densidad no se alteran ante rotaciones de los ejes coordenados, el flujo es isotrópico. Estas simplificaciones ciertamente reducen el campo de acción de las teorías, pero a partir de éstas se pueden hacer modelos más generales. Las teorías aquí desarrolladas serán, en su mayoría, isotrópicas y homogéneas, a las que simplemente se referirá como isotrópicas, sobreentendiéndose que también son homogéneas.

Las densidades de probabilidad conjuntas, que se denotan como $P_{M_1 M_2 \dots M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, donde u_i representa la velocidad evaluada en el punto $M_i = (\vec{x}_i, t_i)$, etc., permitirán obtener los promedios probabilísticos de una función F que dependa de las n variables u_1, u_2, \dots, u_n

$$F = \int F P_{M_1 M_2 \dots M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n. \quad (1.13)$$

Se usará una barra para denotar promedio probabilístico.

Turbulencia homogénea implica que las densidades de probabilidad conjunta $P_{M_1 M_2 \dots M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ permanecen inalteradas si se cambian los puntos (\vec{x}_i, t) por $(\vec{x}_i + \vec{y}, t)$, donde \vec{y} es un vector constante. Esto es, la densidad de probabilidad solo depende de la configuración relativa de los puntos y no de su ubicación en el espacio. Si además hay isotropía, se puede rotar el sistema de ejes coordenados y la densidad permanecerá inalterada, es decir, la orientación en el espacio de la configuración de vectores no altera la densidad de probabilidad conjunta.

Un resultado de la teoría de la probabilidad (Kolmogorov, 1933; Cramer, 1946) permite asegurar que una función aleatoria $f(\alpha)$ está estadísticamente determinada por todas las densidades de probabilidad conjuntas de la función f en n puntos α , donde n

puede ser cualquier entero.

Como se ha formulado el problema, se ha supuesto que las propiedades estadísticas del campo de la turbulencia, a diferentes valores de t , están relacionadas de manera única a través de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes. Esto implica que si se conocen todas las distribuciones de probabilidad conjuntas en un instante de tiempo dado, las ecuaciones anteriores son suficientes para especificarlas en instantes posteriores.

En vez de trabajar con las densidades de probabilidad, se puede trabajar con su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \phi_{M_1 M_2 \dots M_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= \\ &= \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \sum_{k=1}^n \theta_k u_k\right] P_{M_1 M_2 \dots M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n \end{aligned}$$

conocida como función característica de la correspondiente distribución de probabilidad. Se puede definir la funcional:

$$\Phi[\vec{\theta}(\vec{x}, t)] = \exp \left[i \int \int \int \sum_{k=1}^n \theta_k(\vec{x}, t) u_k(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \right],$$

y transformar las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad a este lenguaje. El resultado es la ecuación de Hopf que resulta ser lineal y de primer orden. Esta formulación es aparentemente más sencilla, pero la teoría de integración funcional no está completamente desarrollada, aunque existen algunos resultados importantes al respecto. En el apéndice A se hace un análisis de esta formulación.

III. ECUACIONES DINAMICAS DE LA TURBULENCIA.

III.1 Jerarquía de Friedmann-Keller. Como se va a trabajar con cantidades promedio sobre el ensemble, es útil establecer las propiedades que deben satisfacer. Esto fue hecho por primera vez por Reynolds (1894). Actualmente se utiliza una variación un poco distinta. Estas propiedades se conocen como condiciones de Reynolds. Sean f y g funciones cuyos promedios existen; f y g deben satisfacer

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}, \quad (1.14a)$$

$$\overline{af} = a\overline{f}, \quad \text{si } a \text{ es constante,} \quad (1.14b)$$

$$\overline{a} = a, \quad \text{si } a \text{ es constante,} \quad (1.14c)$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_s}} = \frac{\partial}{\partial x_s} \overline{f}, \quad \text{donde } s \text{ es } x_1, x_2, x_3 \text{ o } t, \quad (1.14d)$$

$$\overline{f g} = \overline{f} \overline{g}. \quad (1.14e)$$

El punto de partida es la descomposición de la velocidad en un campo promedio más una fluctuación, i. e., $u_i = \overline{u}_i + u'_i$, donde $\overline{u'_i} = 0$. Esto también se aplica a las demás variables de campo. La aplicación más simple fue hecha por Reynolds (Reynolds, 1894), quién directamente promedió la ecuación de Navier-Stokes utilizando las condiciones de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k} + \overline{u'_i u'_k}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p} + \nu \nabla^2 \overline{u}_i + F_i, \quad (1.15)$$

que recibe el nombre de ecuación de Reynolds, en donde $\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática. Esta es una ecuación para las cantidades promedio, en donde aparece un término correspondiente al promedio de un producto de fluctuaciones de la velocidad que representa una nueva incógnita. Este término se debe al carácter no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos nuevos términos se conocen como

esfuerzos de Reynolds: $\tau_{ik} = -\overline{\rho u_i' v_k'}$, en analogía con los esfuerzos laminares que aparecen en la ecuación de Navier-Stokes. El espíritu de trabajo de las teorías semiempíricas es construir modelos para este tensor de esfuerzos en términos de las cantidades promedio, para poder resolver la ecuación.

Teniendo presente que una variable aleatoria está completamente caracterizada por todos sus momentos, A. A. Friedmann y L. V. Keller en 1924 propusieron un método para obtener una serie infinita de ecuaciones que relacionan todos los momentos. Esta formulación analítica del problema es muy compleja. Cualquier conjunto finito de ecuaciones contendrá más variables que ecuaciones. El punto importante es que, al igual que en la ecuación de Reynolds, en la ecuación para los momentos de orden n (i.e., aquella en la que aparece la parcial respecto del tiempo del momento de orden n) aparecen términos que contienen momentos de orden $n+1$. Esto implica que no se puede resolver la serie de Friedmann-Keller en orden creciente (Friedmann y Keller, 1924).

Se usará este método para las teorías estadísticas, en particular se derivará, en el capítulo tres, la segunda ecuación de esta jerarquía, conocida como ecuación de von Kármán-Howarth. Esta ecuación relaciona los momentos de orden segundo y tercero. Posteriormente, en el capítulo cuatro se derivarán ecuaciones de orden superior.

III.2 Verificación experimental y problema ergódico. Un punto esencial en el análisis es establecer bajo que condiciones las teorías desarrolladas puede ser verificadas experimentalmente. En particular, como se están definiendo promedios sobre un ensamble es necesario introducir hipótesis de carácter ergódico.

La obtención de valores medios en forma empírica se realiza, por lo general, en un solo experimento. En esta clase de promedios empíricos se utilizan promedios espaciales o temporales, realizados sobre intervalos finitos. Cuando el intervalo es hecho infinito, el concepto de convergencia de promedios espaciales o temporales es algunas veces introducido como una hipótesis ergódica especial. La media temporal está fundamentada por las ideas generales de Landau sobre la naturaleza de la turbulencia (Landau y Lifshitz, 1959). Por otra parte, la validez de reemplazar promedios probabilísticos por promedios temporales o espaciales puede ser probada mediante la ayuda de "teoremas ergódicos" de la teoría moderna de procesos y campos estocásticos (Khintchine, 1933; Hopf, 1937 y Monin y Yaglom, 1975).

Se supondrán válidos los resultados de esta teoría. Consecuentemente, en el caso de turbulencia homogénea los promedios espaciales, tomados de un experimento, serán los mismos que los promedios probabilísticos. La verificación de turbulencia homogénea se lleva a cabo, por lo general, en túneles de viento, donde una reja es colocada sobre la corriente de viento. La turbulencia resultante es estadísticamente estacionaria y aunque no es completamente homogénea, para la mayoría de los propósitos, puede ser considerada como tal en buena aproximación (Hinze, 1975). Debido a la disipación viscosa, es necesario dar energía al sistema para mantener un estado estacionario. Si no se proporciona energía, la turbulencia entrará en un proceso de decaimiento. El problema del decaimiento en el tiempo consiste en determinar la variación temporal de los promedios en su proceso de relajación. Este problema es reemplazado por el decaimiento con la distancia desde la reja. Tiempos y distancias están

conectadas a través de la velocidad media del viento; este hecho se conoce como hipótesis de Taylor. Usualmente las medidas son hechas con un anemómetro de hilo caliente. Este instrumento mide la variación de la resistencia de un hilo de alambre debida al flujo que incide sobre él. Un promedio temporal de la variación temporal de la resistencia permite calcular la velocidad promedio del flujo con buena aproximación. La relación entre el promedio temporal de la resistencia y la velocidad promedio es complicada, pero ha sido estudiada con detalle. Para obtener la velocidad promedio, se coloca el anemómetro en una posición fija respecto de la reja y se registra la variación temporal de la resistencia sobre un intervalo de tiempo muy grande. El promedio de la velocidad medido es temporal. Dado que el campo experimental de turbulencia es tal que la velocidad en un punto fijo, relativo a la reja, es una función aleatoria estacionaria del tiempo, podemos concluir, mediante hipótesis ergódicas adecuadas, que el promedio temporal es igual al promedio probabilístico (Kolmogorov, 1933).

CAPITULO DOS.

TEORIAS SEMIEMPIRICAS.

All things come into being by necessity, the cause of the coming into being of all things being the vortex, which Democritus calls "law of nature".

Diogenes Laertius.

En este capítulo se analizan las teorías semiempíricas de la turbulencia. Estas teorías son de carácter fenomenológico ya que mediante analogías con teoría cinética construyen modelos para el tensor de esfuerzos de Reynolds. Estas teorías son construidas esencialmente para reproducir datos experimentales.

I. INTRODUCCION.

La idea fundamental en este capítulo es analizar las teorías semiempíricas de la turbulencia, que fueron las primeras en aparecer. Al margen de una discusión detallada de cada modelo teórico, es conveniente analizar el contexto global en el que se encontraba el problema a finales del siglo pasado. O. Reynolds hizo el primer intento serio de resolver el problema de la turbulencia. Habiéndose percatado de la magnitud del problema, estableció los principios básicos en el estudio de la turbulencia, que siguen siendo aplicados hoy en día. Su hipótesis de separar el flujo en dos partes, una promedio y otra fluctuante, es el punto clave de la descripción. Sustituyendo esta hipótesis en la ecuación de Navier-Stokes encontró una ecuación para el flujo medio. En esta ecuación, llamada de Reynolds, aparece un término que depende del promedio de productos de las fluctuaciones de la velocidad. Este término extra es originado por el término no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes y se conoce como esfuerzo de Reynolds. Este esfuerzo aparente sólo aparece cuando hay fluctuaciones en la velocidad.

Fue hasta 1877 cuando J. Boussinesq (Boussinesq, 1877) y L. Prandtl (Prandtl, 1927) hicieron los primeros intentos para resolver la ecuación de Reynolds. La idea básica era dar una expresión para los esfuerzos de Reynolds en términos de las cantidades promedio. Estos intentos estaban directamente ligados con los experimentos, y era de éstos de donde se sugerían los modelos. Los modelos eran construcciones cinéticas que se esperaba describieran fenomenológicamente el proceso en el que se encuentran los flujos turbulentos. Es por esto que estas teorías

no pueden ser completamente ciertas ya que no parten de primeros principios. Este fue el espíritu con el que se desarrollaron las teorías semiempíricas. En su artículo de 1927, L. Prandtl señala el camino a seguir: se proponía encontrar expresiones para las fuerzas viscosas aparentes, producidas por el proceso de mezclado característico de los flujos turbulentos.

Las primeras teorías en la descripción de la turbulencia son de carácter fenomenológico. El propósito general es establecer una ecuación que relacione el tensor de esfuerzos de Reynolds con las cantidades promedio, i. e., expresar los momentos de segundo orden en términos de los de primer orden. Esto puede ser hecho de muchas maneras, empezando con una relación completamente empírica obtenida de resultados experimentales, hasta modelos bastante elaborados que incluyen analogías con la teoría cinética de gases. La idea de estas teorías es reproducir los datos experimentales. En este sentido existen teorías excelentes. Por este camino no se puede encontrar la solución al problema tal y como se planteó en el capítulo anterior.

II. TEORIAS SEMIEMPIRICAS.

En esta sección se analizan las teorías semiempíricas más importantes, como son las de J. Boussinesq, G. I. Taylor, L. Prandtl, T. von Kármán y H. Reichardt; así como algunas variantes, que son esencialmente correcciones de orden superior a las teorías originales.

II.1 Teoría de J. Boussinesq. (Boussinesq, 1877) La primera teoría en orden cronológico fue la de J. Boussinesq en 1877. La idea de Boussinesq es bastante sencilla, define un coeficiente de

mezclado A_t , de tal forma que el esfuerzo de Reynolds se ve en forma análoga al coeficiente de viscosidad en la ley de Newton:

$$\tau_t = \mu \frac{\partial u}{\partial y} ;$$

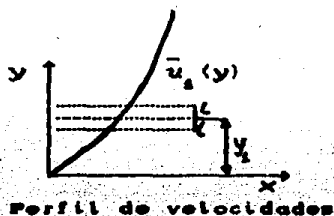
el esfuerzo de Reynolds se ve como

$$\tau_t = -\rho \overline{u'_1 v'_2} = A_t \frac{d}{dy} \bar{u}_2 . \quad (2.1)$$

Este coeficiente de mezclado A_t juega un papel de "viscosidad turbulenta" o aparente. El punto importante es que este coeficiente no es una propiedad del fluido, si no que depende de la velocidad media \bar{u} . Experimentalmente se observa que las fuerzas viscosas son proporcionales al cuadrado de la velocidad promedio. Esto significa que A_t es proporcional a la velocidad promedio. Esta teoría es una analogía con el flujo laminar. La viscosidad aparente permite definir una viscosidad efectiva, una viscosidad renormalizada. Los efectos de las viscosidades cinemática y aparente deben ser tomados como el efecto de una viscosidad efectiva. En el capítulo cinco se discutirá la aplicación de la teoría del grupo de renormalización a la turbulencia, donde la viscosidad es renormalizada.

II.2 Teoría de longitud de mezclado de L. Prandtl.
 (Prandtl, 1925). La siguiente teoría fue la propuesta por L. Prandtl en 1925, en la que introdujo una longitud de mezclado, la cual puede ser entendida considerando en un flujo paralelo en el que sólo la componente x de la velocidad promedio es diferente de cero. Dicha componente \bar{u}_1 es función de la coordenada y del punto: $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(y)$ (fig. 2). Prandtl propuso un proceso de mezclado de conglomerados de partículas (lump) cuyo mecanismo da origen a la longitud de mezclado. Haciendo una analogía con procesos de transporte en teoría cinética para establecer un

modelo de mezclado donde la cantidad transportada en el intercambio turbulento era el momento. Introdujo una longitud característica



Componentes de la velocidad promedio:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_1(y),$$

$$\bar{u}_2 = 0,$$

$$\bar{u}_3 = 0.$$

Fig. 2. Componentes de la velocidad en un flujo paralelo.

que es la análoga al camino libre medio en teoría cinética de gases. Esta longitud l de mezclado es la distancia recorrida en la dirección transversa al movimiento promedio del fluido, por un conglomerado de fluido que conserva su identidad y su momento. Existirá una diferencia en las velocidades que posee la partícula antes de desplazarse y la de la partícula que se encuentra a una distancia transversal l . En primera aproximación esta diferencia es $l(d\bar{u}_1/dy)$ y de esta forma la fluctuación u_1' se toma como proporcional a esta cantidad.

Un elemento de fluido se encuentra siempre en un proceso de mezclado con otros elementos de fluido. Las dimensiones de estas zonas de mezclado son mucho menores que las distancias recorridas transversalmente. La fluctuación transversal u_2' puede calcularse considerando dos elementos de fluido con valores diferentes de \bar{u}_1 . La diferencia entre las velocidades de partículas situadas a distancias l por arriba y por abajo del valor de y es proporcional, en primera aproximación, a $l(d\bar{u}_1/dy)$. El valor de la fluctuación u_2' se supone proporcional a esta diferencia. Este

mecanismo debe ser válido, cuando menos en promedio, por lo que podemos escribir:

$$\overline{|u_1'|^2|} = l \left| \frac{d}{dy} \bar{u}_1 \right|,$$

$$\overline{|u_2'|^2|} = cl \left| \frac{d}{dy} \bar{u}_1 \right|,$$

siendo c una constante. De aquí suponemos que:

$$\overline{|u_1' u_2'|} = c_0 \overline{|u_1'|} \overline{|u_2'|},$$

con $0 < c_0 < 1$. El factor c_0 es igual al factor de correlación ψ , que es definido como

$$\psi = \frac{\overline{u_1' u_2'}}{\left[\overline{|u_1'|^2} \right]^{1/2} \left[\overline{|u_2'|^2} \right]^{1/2}}.$$

El comportamiento experimental de ψ , las velocidades cuadráticas medias y el esfuerzo de Reynolds se muestran en las figuras 3 y 4:

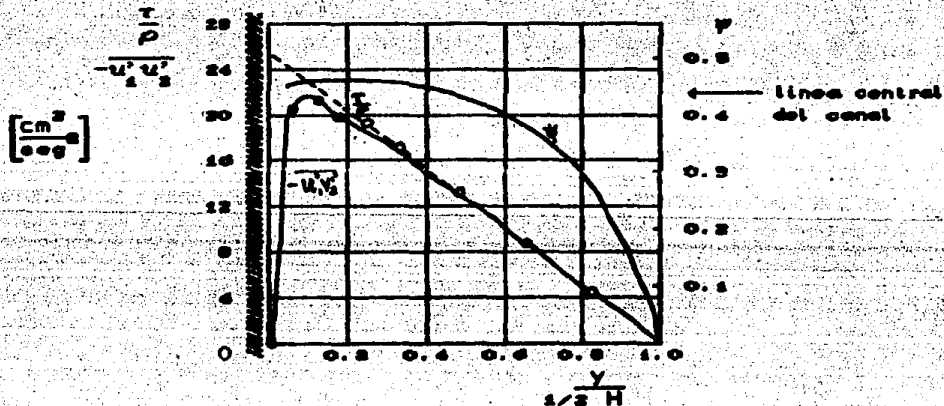


Fig. 3. Mediciones tomadas por Reichardt (1955) en un canal.

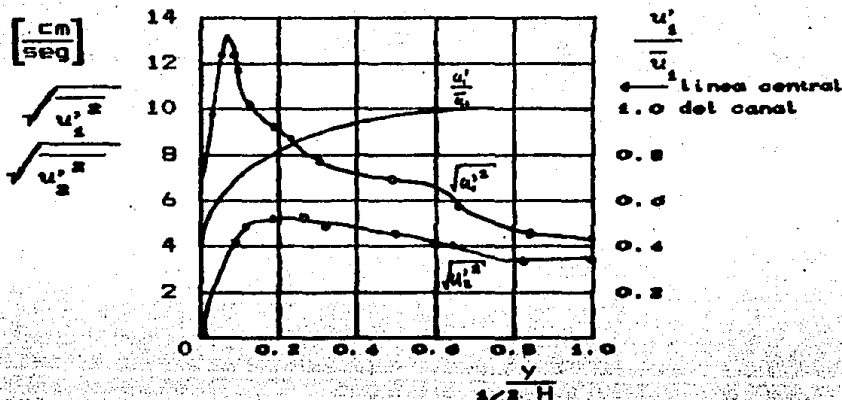


Fig. 4. Mediciones de las componentes fluctuantes turbulentas en un tunel de viento, medidas por Reichardt. $u_1 = 100$ cm/seg.

El esfuerzo de Reynolds resultante es

$$\tau_t = -\rho l^2 \left| \frac{d}{dy} \bar{u}_1 \right| \frac{d}{dy} \bar{u}_1. \quad (2.2)$$

Aún cuando esta teoría se hizo para flujos en canales rectangulares, presenta discrepancias con los resultados experimentales. En efecto, la expresión para τ_t se hace cero para máximos y mínimos de la velocidad. En el centro del canal la velocidad presenta un máximo y como reporta Reichardt (1938), el tensor de esfuerzos no es cero.

Prandtl mismo se dió cuenta y obtuvo una expresión más complicada que podía explicar el flujo en la parte central del canal. La nueva expresión para el tensor esfuerzos es

$$\tau_t = \rho l^2 \left[\left(\frac{d}{dy} \bar{u}_1 \right)^2 + l_1^2 \left(\frac{d^2}{dy^2} \bar{u}_1 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.3)$$

donde l_1 es una nueva longitud que tiene que ser determinada experimentalmente.

Esta ecuación es difícil de manejar. Posteriormente, Prandtl atacó el problema más sencillo en donde no hay paredes. Para este problema obtuvo una solución sencilla. La hipótesis de trabajo fue que las dimensiones de los elementos de fluido que viajan en dirección transversa son del mismo orden que las de la zona de mezclado. Con esta hipótesis, se debe tomar la diferencia entre las velocidades mínima y máxima, en vez de $l(d\bar{u}_1/dy)$. La expresión para el tensor será

$$\tau_t = \rho \bar{u}_1 (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \frac{d}{dy} \bar{u}_1 \quad (2.4)$$

Desde un punto de vista formal, los conceptos usados por Prandtl no son claros y por lo general no se puede decir mucho sobre l , excepto que depende de las condiciones de frontera. En algunos casos se puede obtener una relación entre l y una longitud característica del flujo. Los anteriores modelos se aplican con bastante éxito al cálculo de flujos turbulentos (Schlichting, 1968).

De la hipótesis (2.1) se puede derivar una ley de distribución de velocidades (Schlichting, 1968) bajo la suposición de que en las cercanías de la pared la longitud de mezclado es proporcional a la distancia de mezclado, $l = \alpha y$, y por tanto

$$\frac{u_{\max} - u}{(\tau_0/\rho)^{1/2}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{h}{y}, \quad (2.5)$$

donde y es la distancia desde la pared. Esta distribución se conoce como la ley de la pared y tiene la desventaja de ser divergente en la pared ($y = 0$). Esta divergencia se debe a la suposición de que la fricción turbulenta es mayor a la fricción viscosa, lo que en las cercanías de la pared, es falso.

II.3 Hipótesis de semejanza de T von Kármán. (Kármán, 1930).

El espíritu del trabajo realizado por von Kármán es hacer más accesibles los cálculos utilizando un mínimo de suposiciones. Básicamente su trabajo está relacionado con el flujo turbulento en canales, en particular, en canales rectangulares. Los resultados están basados en dos hipótesis principales:

i) Despreciar el término viscoso en las ecuaciones hidrodinámicas.

ii) El estado del flujo, en la vecindad de puntos correspondientes a diferentes valores de la posición, sólo difiere en las escalas de velocidad y longitud.

Esta segunda hipótesis, de carácter estadístico, supone semejanza en la fluctuación con el flujo medio, independiente de la posición del punto considerado.

Si expresamos la velocidad u en potencias de y , y definimos la función de corriente $\psi(x, y)$ por las relaciones

$$u'_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u'_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

encontramos que

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} \bar{u}'_0 y^2 + \frac{1}{6} \bar{u}'_0 y^3 + \dots + \psi(x, y),$$

donde $\psi(x, y)$ es la función de corriente de las fluctuaciones y \bar{u}'_0 , \bar{u}'_0 , etc., denotan las derivadas de \bar{u}'_1 evaluadas en $y = 0$.

Introduciendo variables adimensionales: $x = l\xi$, $y = l\chi$ y $\psi(x, y) = Af(\xi, \chi)$, la condición de semejanza requiere que sólo l y A dependan del punto en cuestión, i.e., de u'_0 , u'_0 , ... La ecuación de Navier-Stokes escrita en términos de la función de corriente tiene la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi.$$

Despreciando el término viscoso, y tomando los primeros términos del desarrollo en series de la función de corriente

$$u_0' x \frac{A}{l^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial x} u_0'' + \frac{A^2}{l^2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] = 0.$$

Si usamos la hipótesis dos, la ecuación debe ser independiente de los parámetros A, l, u_0', u_0'', etc, lo cual se satisface si

$$u_0' \sim \frac{A}{l} ; u_0'' \sim \frac{A}{l^2} ;$$

de donde

$$l \sim \frac{u_0'}{u_0''} , A \sim \frac{u_0'^2}{u_0''} = l^2 u_0''.$$

La expresión para el esfuerzo es:

$$\tau = -\rho u_1' u_2' = \rho \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \rho \frac{A^2}{l^2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] . \quad (2.6)$$

Este resultado es compatible con el obtenido por Prandtl y puede reescribirse como:

$$\tau \sim \rho l^2 u_0''^2 .$$

En el caso de flujo en un canal rectangular de ancho 2h y a una distancia y de la mitad del canal, la expresión para el tensor de esfuerzos es:

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{h} = c^2 \rho \frac{u_0'^4}{u_0''^2} , \quad (2.7)$$

de donde es directo que:

$$\frac{u_0'}{u_0''} = c \sqrt{\frac{h\rho}{\tau_0}} y^{-1/2} ,$$

siendo c es una constante.

Integrando dos veces, se obtiene la distribución de velocidades (En la primera integración ($\partial u_1 / \partial y$) se va a infinito en $y = h$, i.e., en la paredes):

$$u = u_{\max} + \frac{1}{c} \left[\frac{\tau_0}{\rho} \right]^{1/2} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right] + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\} \quad (2.8)$$

La distancia desde la pared está dada por h-y.

II.4 Vorticidad y teoría de G. I. Taylor (Taylor, 1935a).

De acuerdo con los teoremas de Kelvin sobre movimientos en dos dimensiones, la vorticidad permanece constante (sección 1.8). Haciendo uso de esto, Taylor derivó años antes una teoría en la que la cantidad conservada era la vorticidad y no el momento; obtuvo la siguiente expresión para el tensor de esfuerzos (Schlichting, 1968):

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \rho l_v^2 \left| \frac{d}{dy} \bar{u}_1 \right| \frac{d}{dy} \bar{u}_2, \quad (2.9)$$

que difiere de la obtenida por Prandtl por un factor de 1/2; en términos de la longitud de mezcla, la relación es $l_v = \sqrt{2}l$. Excepto por un factor numérico, se obtiene la misma distribución de velocidades obtenida por Prandtl. En dos dimensiones la suposición de que la vorticidad es conservada es correcta, en tres dimensiones no es válida, excepto en casos como el de flujo estrictamente paralelo.

El uso de la vorticidad esclarece el proceso en el que están sometidos este tipo de flujos. La vorticidad que aparece en los flujos sobre un canal tiene su origen en la pared. La condición de no deslizamiento del fluido sobre la pared requiere que la componente tangencial de la velocidad sea cero en la superficie, lo que origina gradientes de velocidad y una vorticidad "infinita" en la superficie. La pared actúa como fuente de vorticidad que es difundida por la viscosidad. Además de la difusión por viscosidad, la vorticidad se mueve al interior del fluido por efectos de convección representado por el primer término del lado derecho de la ecuación de vorticidad; el segundo término en la ecuación de vorticidad indica que la vorticidad es cambiada también por distorsión local y rotación del fluido. El mecanismo

de generación de vorticidad en sistemas donde no hay fronteras se debe a superficies donde la presión es constante y el esfuerzo tangencial es cero.

Si se parte de un flujo originalmente sin vorticidad, esto es, un flujo potencial, la formación y transporte de vorticidad conducirá a dos regiones en el fluido: una con vorticidad y en la otra un flujo potencial. El transporte de vorticidad es de la región potencial a la de vorticidad y no ocurre en el sentido contrario. Aún si ambas regiones se encuentran en un proceso turbulento sus características son diferentes (Landau y Lifshitz, 1959). Fuera de la región potencial los vórtices se encuentran amortiguados. Entre más pequeños es mayor el amortiguamiento y por lo tanto no penetran en la región potencial. Sólo los vórtices de mayor escala son importantes en esta región y son amortiguados en distancias del orden de su escala. Es por esto que se habla de una separación de regiones y de la dirección de transporte de vorticidad. La disipación se lleva a cabo en los vórtices de escalas pequeñas donde los gradientes de la velocidad son grandes. Por lo tanto la disipación se lleva a cabo en la región de vorticidad. La formación de estas regiones en el flujo sobre superficies sólidas se conoce como fenómeno de separación.

II.5 Teoría de H. Reichardt. (Reichardt, 1940) La teoría desarrollada por Reichardt es de carácter puramente fenomenológico. Despreciando los términos de viscosidad y presión, y suponiendo un flujo estacionario para las cantidades promedio, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1'^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_1' u_2'} = 0.$$

Para resolver esta ecuación Reichardt propuso su ley de transferencia de momento que establece:

$$\overline{u_1' u_2'} = - \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1'^2}, \quad (2.10)$$

donde \mathcal{E} es un coeficiente que puede depender de x . Con esta suposición $\overline{u'^2}$ satisface la ecuación parabólica:

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{u_1'^2} = \mathcal{E} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \overline{u_1'^2}$$

cuya solución es la función error.

III. ANALISIS.

Empezaremos el análisis con la teoría de Boussinesq. El primer punto es que el coeficiente de viscosidad turbulenta A_t dado por (2.1) no es una propiedad del fluido, depende de la velocidad media. En efecto, los resultados experimentales muestran que las fuerzas viscosas en flujos turbulentos son proporcionales al cuadrado de la velocidad media, en oposición con una dependencia lineal en el caso de flujo laminar. Sin embargo, la analogía entre viscosidades cinemática y aparente es el punto de partida para muchas teorías, en las que con base en ciertas suposiciones, se encuentran expresiones para este factor. Los conceptos de viscosidad aparente y viscosidad efectiva son realizados en los resultados obtenidos aplicando las técnicas del grupo de renormalización.

La siguiente teoría que analizamos es la propuesta por L. Prandtl y resumida por las ecuaciones (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5). La primera objeción de carácter teórico es sobre la teoría de transporte de momento y la individualidad de los conglomerados. La individualidad de los conglomerados no puede ser conservada en una distancia l , las partículas de fluido están en constante

movimiento y no forman un conglomerado que viaje tal distancia. En esta teoría no se toma en cuenta el efecto en las fluctuaciones de la presión; el movimiento de partículas no es el único mecanismo de transferencia de momento, las diferencias de presión ocasionan transporte de momento. Debido a esto la suposición de que el momento y la individualidad se conservan a lo largo de la longitud de mezclado l no es completamente válida. La longitud de mezclado tiene la desventaja de no ser una propiedad del fluido. Por otro lado, de esta teoría se puede deducir una dependencia cuadrática de las fuerzas viscosas, como se observa experimentalmente. También esta teoría ha sido usada con mucho éxito para estudiar el flujo turbulento a lo largo de paredes y al problema de la llamada turbulencia libre, caso en donde no hay superficies sólidas (Schlichting, 1968). Un primer comentario sobre la curva teórica es que, cerca de la pared, el tensor de esfuerzos de Reynolds (2.5) tiene una singularidad (Fig. 5):

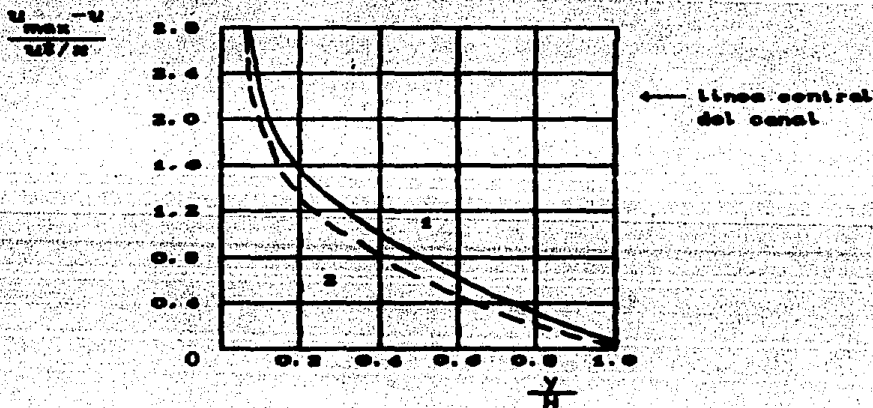


Fig. 5. Distribución universal de velocidades para flujo turbulento en un canal, y es la distancia desde la pared. Curva (1) corresponde a la teoría de Prandtl la curva (2) corresponde a la teoría de von Karman.

Este comportamiento se debe a que se ha despreciado la

fricción viscosa con respecto de la fricción turbulenta aparente. El número de Reynolds se define como el producto de una longitud y velocidad características del fluido divididos por la viscosidad cinemática. Este número es un parámetro muy importante y su valor puede usarse para indicar si el flujo es turbulento o no. Cuando el número de Reynolds es muy grande, la fricción turbulenta puede superar a la fricción viscosa; con base en esto, debemos considerar el resultado de Prandtl como el comportamiento asintótico para números de Reynolds muy grandes. Para números de Reynolds pequeños la fricción viscosa tiene un efecto dominante en una pequeña capa cerca de la pared; experimentalmente se observa que tiene un comportamiento potencial de la forma $\phi(\eta) = C\eta^n$, con n aproximadamente $1/7$, pero variando ligeramente con el número de Reynolds. Para números de Reynolds grandes, se tiene buena concordancia y la distribución se aplica cada vez más cerca de la pared. Existe otro detalle que esta teoría no explica correctamente, si observamos la predicción teórica (2.5) en el centro del canal la curva no es suave, de hecho forma un pico. El problema es que la teoría no es aplicable aquí, ya que la longitud de mezclado se hace cero.

Se ha marcado anteriormente la necesidad de corregir la teoría de Prandtl debido a que la longitud de mezclado se hace cero donde du/dy es cero. Prandtl mismo hizo una corrección (2.3), pero esta introduce una longitud extra a ser determinada experimentalmente. Esta corrección permite una mejor descripción del comportamiento turbulento. Uno de los problemas es la dificultad de operar con esta expresión (2.3) y por eso ha sido poco utilizada. Esta corrección puede ser generalizada, ya que el término correctivo puede ser pensado como el segundo término de un desarrollo en

series. Cada nuevo término llevará consigo un nuevo coeficiente a ser determinado experimentalmente. Cada coeficiente permitirá que haya variaciones en el término correctivo sobre la distancia de longitud de mezclado.

En el caso de turbulencia libre el modelo de Prandtl (2.4) describe el fenómeno con buena aproximación. (Schlichting, 1968). Algunos autores señalan que la definición misma de los conglomerados no es clara (Batimelli, 1986).

En cuanto a la teoría de von Kármán (ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8)), podemos decir que presenta los mismos problemas que la teoría de Prandtl, las curvas teóricas (2.5) y (2.8) son muy parecidas. Lo expuesto para el caso de Prandtl es aplicable aquí.

La teoría de Taylor presenta problemas teóricos en el caso de tres dimensiones. En efecto, en este caso la vorticidad no es una cantidad que se conserve a lo largo de la longitud de mezclado (Hinze, 1975). En general, en el sentido de que esta teoría predice un tensor de esfuerzos (2.9) similar al de las de las teorías de Prandtl y von Kármán, los mismos comentarios son válidos aquí. En lo que al primer punto se refiere, Taylor derivó una teoría modificada, extendiéndola a tres dimensiones, en donde supuso que la vorticidad seguía conservándose. El punto importante es que su versión para tres dimensiones se reducía a la obtenida en el caso de transferencia de momento bajo ciertas condiciones. En caso de tener turbulencia homogénea y una propiedad de isotropía de las cantidades transferidas, es posible recuperar los resultados de la teoría de transporte de momento. Este punto se volvió de trascendental importancia ya que, posteriormente, cambiaría drásticamente la dirección de las investigaciones.

Finalmente, la teoría de Reichardt (ecuación (2.10) enfrenta

severos problemas. Las ecuaciones de Navier-Stokes son invariantes ante una transformación de Galileo, pero la ecuación parabólica que satisface u''^2 no lo es. Es por esto que nos inclinamos a deshechar esta teoría. Sin embargo, Reichardt dió un argumento que describe perfectamente los resultados experimentales; pero esto no es sorprendente ya que las ecuaciones fueron transformadas especialmente para ajustarse a los datos. Desde el punto de vista práctico presenta ventajas pero no permite un mejor entendimiento del fenómeno.

IV. CONCLUSIONES.

El espíritu general de estas teorías era describir los resultados experimentales que se conocían. En ese sentido, las teorías fueron formuladas ad-hoc para reproducir los datos experimentales obtenidos en canales. El hecho de que, en general, existe una buena concordancia con los experimentos no es sorprendente.

En general, todas las teorías presentan problemas de carácter teórico, en mayor o menor grado. La analogía con teoría cinética no es del todo correcta como ya se ha mencionado. El carácter práctico de estas teorías las convierte en ideales para realizar cálculos y aproximaciones.

La existencia de una viscosidad aparente motiva la utilización de las técnicas del grupo de renormalización cuyas conclusiones, brevemente mencionadas en el capítulo V, son útiles para la comprensión del problema.

CAPITULO TRES.

TEORIAS ESTADISTICAS.

... que tous les mouvements qui se font au Monde sont en quelque façon circulaires; c'est à dire que, quand un corps quitte sa place, il entre toujours en celle d' un autre, & ce-lui en celle d' un autre, & ainsi de suite jusques au dernier, qui occupe au même instant le lieu délaissé par la premier.

Descartes, Le Monde.

En 1921 Taylor introdujo los conceptos de homogeneidad e isotropía, y señaló que las características del flujo se describen convenientemente en términos de las funciones de correlación. No fue hasta 1935 cuando el problema dio un giro y tomó nuevas direcciones. El artículo de Taylor publicado en 1935 marcó el punto de cambio entre las teorías estadísticas y las semiempíricas. Se pasó de hacer teorías para describir experimentos con paredes al problema de una turbulencia uniformemente distribuida sin fronteras. En este capítulo se analiza el nuevo enfoque representado por las teorías estadísticas.

I. DESCRIPCIÓN DE LA TURBULENCIA HOMOGÉNEA E ISOTRÓPICA.

Ningún flujo turbulento puede ser, en principio, homogéneo e isotrópico. Esto se debe a que los flujos son finitos. El concepto de turbulencia isotrópica es una idealización matemática. Desde el punto de vista teórico el problema es interesante y constructivo: al resolver el caso más sencillo, se espera obtener la información necesaria como para captar las ideas principales que están detrás. Una vez entendido el caso más simple se puede generalizar.

En los términos en que se definió el problema de la turbulencia consiste en encontrar todos los momentos de la velocidad. Friedmann y Keller desarrollaron un método para construir una jerarquía infinita de ecuaciones que involucran a todos los momentos. El problema así planteado tiene la desventaja de que la ecuación para los momentos de orden n no incluye momentos de orden superior. Cualquier conjunto finito de ecuaciones tendrá más incógnitas que ecuaciones. Para resolver el problema es necesario hacer hipótesis sobre los momentos de orden mayor. La primera ecuación de la jerarquía de Friedmann-Keller es la ecuación de Reynolds. Esta fue la ecuación básica para las teorías semiempíricas. Con la segunda ecuación es posible obtener mucha información sobre el problema. Las teorías estadísticas analizadas en este capítulo la utilizan como ecuación principal. Esta ecuación relaciona los momentos de orden dos y tres. Al final del capítulo se analizarán teorías que emplean ecuaciones de orden superior.

Las hipótesis de homogeneidad e isotropía simplifican enormemente el sistema de ecuaciones. Sin estas hipótesis sería

prácticamente imposible resolver siquiera la segunda ecuación. Las hipótesis reducen de seis a dos el número de momentos de orden dos, y de 18 a 3 en el caso de orden tres. Se define la función de correlación de orden 2 (o segundo momento) como:

$$B_{ij}(\vec{x}, \vec{r}) = \overline{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r})},$$

donde las componentes de la velocidad son evaluadas en el mismo instante de tiempo. La hipótesis de homogeneidad implica que la función de correlación no depende de \vec{x} . La hipótesis de isotropía lleva a la conclusión de que la dependencia en \vec{r} es solo a través de su magnitud. Con base en esto, el promedio de cualquier componente de la velocidad es cero. Utilizando el hecho de que el tensor de correlación es isotrópico, las nueve componentes pueden escribirse en términos de dos funciones escalares, denotadas por $B_{LL}(r)$ y $B_{NN}(r)$, y denominadas funciones de correlación a lo largo de las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente:

$$B_{LL}(r) = \overline{u_L(\vec{x}) u_L(\vec{x} + \vec{r})},$$

$$B_{NN}(r) = \overline{u_N(\vec{x}) u_N(\vec{x} + \vec{r})},$$

donde u_L y u_N representan las componentes de la velocidad en las direcciones longitudinal y transversal al vector \vec{r} , respectivamente. Las nueve componentes del tensor de correlación B_{ij} tienen la forma

$$B_{ij}(r) = [B_{LL}(r) - B_{NN}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + B_{NN}(r) \delta_{ij}, \quad (3.1)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, r_i , $i=1,2,3$, son las tres componentes del vector \vec{r} . La función de correlación de tercer

orden es de la forma:

$$B_{ijk}(\vec{x}, \vec{r}, \vec{r}') = \frac{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) u_k(\vec{x} + \vec{r}')}{r^3}.$$

Esta forma general se conoce como función de correlación en dos puntos \vec{r} y \vec{r}' . Las necesidades para la segunda ecuación de la serie son satisfechas con un caso particular, en el que $\vec{r}' = \vec{0}$. Cuando se haga referencia al momento de orden tres, se refiere a este caso particular; se señalará claramente si se utiliza la forma general.

Las hipótesis de homogeneidad e isotropía tienen consecuencias inmediatas: los momentos de tercer orden no dependen de \vec{x} y dependen de \vec{r} a través de su magnitud. En forma análoga, las 27 componentes de este tensor se pueden escribir en términos de tres funciones escalares (Monin y Yaglom, 1975):

$$B_{ijk}(r) = \frac{B_{LL,L}(r) - B_{NN,L}(r) - 2B_{LN,N}(r)}{r^3} r_i r_j r_k + \frac{B_{LN,N}(r)}{r} (\delta_{ij} r_k + \delta_{ik} r_j) + \frac{B_{NN,L}(r)}{r} \delta_{ij} r_k, \quad (3.2)$$

siendo

$$B_{LL,L}(r) = \overline{u_L^3(\vec{x}) u_L(\vec{x} + \vec{r})},$$

$$B_{NN,L}(r) = \overline{u_N^3(\vec{r}') u_L(\vec{x} + \vec{r}')},$$

$$B_{LN,N}(r) = \overline{u_L(\vec{x}) u_N(\vec{r}') u_N(\vec{x} + \vec{r}')},$$

Como segundo punto de esta sección se examinan las consecuencias de la ecuación de continuidad. Como se está trabajando el caso de densidad constante, la ecuación de continuidad implica que la divergencia del campo de velocidades es cero. Esto, a su vez, implica restricciones sobre los momentos de la velocidad.

Usando el hecho de que:

$$\frac{\partial B_{jl}(r)}{\partial r_j} = \frac{\partial B_{jl}(r)}{\partial r_l} = 0,$$

que resulta del hecho de que el orden entre derivar y tomar promedio puede ser intercambiado y del uso de la ecuación de continuidad. Resulta en forma directa que:

$$B_{NN}(r,t) = B_{LL}(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial B_{LL}(r)}{\partial r}. \quad (3.3a)$$

De forma completamente similar, las implicaciones sobre los momentos de tercer orden son:

$$B_{NN,L}(r,t) = -\frac{1}{2} B_{LL,L}(r,t). \quad (3.3b)$$

$$B_{LN,N}(r,t) = \frac{1}{2} B_{LL,L}(r,t) + \frac{r}{4} \frac{\partial B_{LL,L}(r,t)}{\partial r}. \quad (3.3c)$$

La ecuación de continuidad permite escribir todos los momentos de orden 2 y 3 en términos de dos funciones escalares: $B_{LL}(r,t)$ y $B_{LL,L}(r,t)$. La ecuación de Navier-Stokes provee una relación entre las funciones $B_{LL}(r,t)$ y $B_{LL,L}(r,t)$. Para derivar la ecuación correspondiente se realizan los siguientes pasos: se escribe la componente l de la ecuación de Navier-Stokes en el punto \vec{x} y la componente j en el punto $\vec{x} + \vec{r}$. Se multiplica la primera de estas componentes por u_j evaluada en $\vec{x} + \vec{r}$ y la segunda por u_l evaluada en \vec{x} . Se suman estas expresiones y se toma el promedio. Usando (Monin y Yaglom, 1975) el hecho de que no hay correlación entre la presión y las componentes de la velocidad, se obtiene la ecuación para las funciones de correlación:

$$\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right] \left[B_{LL,L}(r,t) + 2\nu \frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r} \right]. \quad (3.4)$$

Esta es la ecuación básica para las teorías estadísticas y fue derivada por primera vez por von Kármán y Howarth en 1938. Dado que las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes son consecuencias de los principios de conservación de masa y momento y de las ecuaciones constitutivas, todas las conclusiones serán consecuencia de estos principios.

Para finalizar esta sección se dará una expresión alternativa para la ecuación de von Kármán-Howarth. La llamada ecuación espectral utiliza las transformadas de Fourier de los momentos de la velocidad. La ecuación espectral se puede obtener en forma análoga a la ecuación de von Kármán-Howarth tomando la transformada de Fourier de los momentos $B_{ij}(r,t)$ y $B_{ijk}(r,t)$. Se obtiene

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t), \quad (3.5)$$

donde $E(k,t) = 4\pi k^2 F_{NN}(k,t)$ y $T(k,t) = -8\pi k^2 F_9(k,t)$; siendo $F_{NN}(k,t)$ la transformada de Fourier de $B_{NN}(r,t)$ y $F_9(k,t)$ es la transformada de Fourier de $B_{LN,N}(r,t)$. En este formalismo $E(k,t)$ da la distribución de energía como función del número de onda k y el último término de esta ecuación representa la disipación viscosa. El término $T(k,t)$ describe la variación de la energía de la "componente espectral" de la turbulencia con número de onda k debida a los términos no lineales de la ecuación dinámica.

La integral de cero a infinito sobre k de $E(k,t)$ da la energía total del sistema. La variación de la energía total es

$$\frac{\partial u_i u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k,t) dk = -2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k,t) dk$$

De la expresión para la disipación viscosa puede verse que juega un papel muy importante en escalas pequeñas (valores grandes de k), esta región está caracterizada por grandes gradientes de la velocidad. El término no inercial de la ecuación de Navier-Stokes se convierte en $T(k,t)$. El término no inercial está asociado con la transmisión de energía entre las diferentes escalas del movimiento. Se observa que $T(k,t)$ es negativa para valores pequeños de k y positiva para valores grandes de k . Esto implica que hay un flujo de energía de las escalas mayores a las escalas menores. Se denomina intervalo de energía al intervalo sobre el eje k en donde se encuentra la mayor parte de la energía y de disipación aquel en la que la mayor parte de la disipación total se lleva a cabo (usualmente se habla de un 80-90%). En la figura 6 se puede apreciar cualitativamente este esquema:

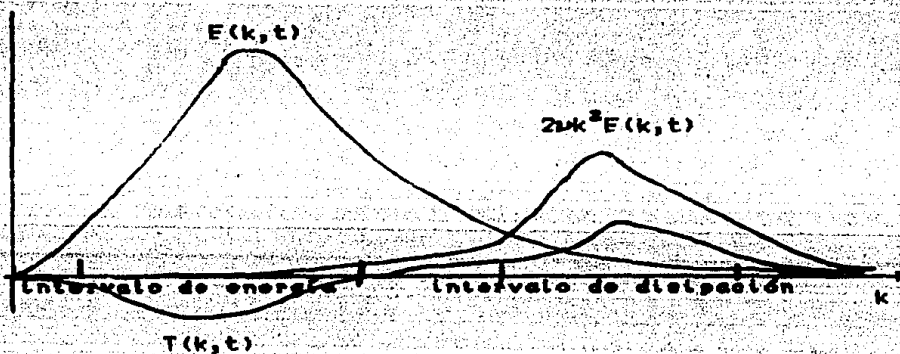


Fig. 6. Esquema cualitativo de los espectros de energía, disipación y de redistribución de energía.

La forma cuantitativa de estas curvas depende del número de Reynolds. En ocasiones los intervalos de energía y disipación pueden traslaparse.

II. ECUACION DE VON KARMAN-HOWARTH Y SU VERIFICACION EXPERIMENTAL.

La condición sobre los momentos de orden dos impuesta por la ecuación de continuidad, es fácil de verificar experimentalmente. Los experimentos indican buena concordancia, como el realizado por MacPhail en 1940, de donde la figura 7 es tomada:

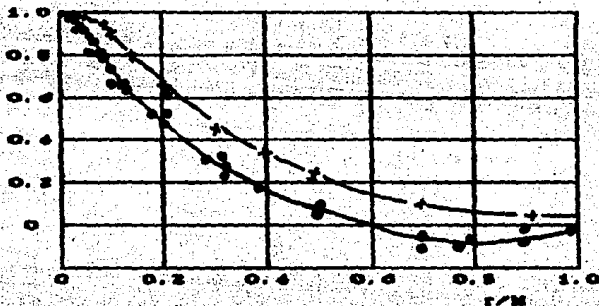


Fig. 7. Dependencia de las funciones de correlación $B_{LL}(r)/B_{LL}(0)$ (cruces) y $B_{MM}(r)/B_{MM}(0)$ (puntos) en r/M , donde M es la medida de la malla (MacPhail, 1940). La curva superior es dibujada con los puntos experimentales; la curva inferior es calculada de esto usando la ecuación de continuidad.

Se observa que $B_{MM}(r)$ tiene una parte negativa. La situación para $B_{LL}(r)$ es menos clara: en la mayoría de las mediciones es positiva; algunos trabajos recientes muestran que también tiene un mínimo negativo muy pequeño (Van Atta y Chen, 1969b).

En lo que respecta a los momentos de tercer orden, tienen el problema de que son más difíciles de medir y los resultados son mucho menos precisos. Es por esto que los artículos que reportan medidas de estos momentos, no aseguran la validez de las relaciones impuestas por la ecuación de continuidad (3.3b y 3.3c). (Townsend, 1947 y Mills, Kistler, O'Brien y Corrsin 1958). *

La figura 8 representa $B_{LL,L}(r)$ que es la que usualmente se mide:

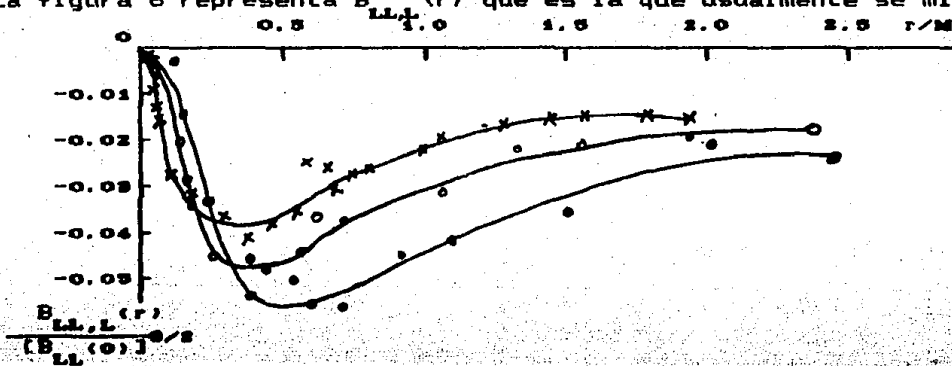


Fig. 8. Función $B_{LL,L}(r)$ medida de acuerdo a Stewart (1951). Puntos cruces y círculos representan mediciones correspondientes a diferentes valores del número de Reynolds.

Van Atta y Chen (1956a,b) reportan la función $B_{LN,N}(r)$ (fig. 9):

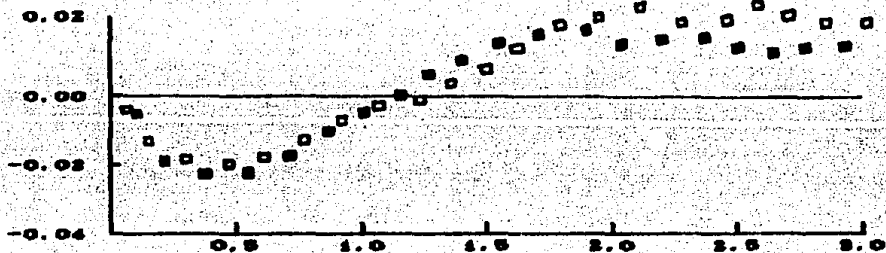


Fig. 9. valores empíricos de la función normalizada $B_{LN,N}(r)$, Van Atta y Chen (1956a,b). Los valores de $B_{LN,N}(r)$ mostrados en la figura fueron obtenidos de datos medidos en la correlación temporal de tercer orden sobre la suposición de la validez de la hipótesis de Taylor (Cuadrados abiertos y cerrados corresponden a dos diferentes medidas bajo condiciones ligeramente diferentes).

En cuanto a la ecuación de von Kármán-Howarth existen trabajos que aseguran buena concordancia entre teoría y experimento. (Stewart 1951 y Mills, Klister, O'Brien y Corrsin 1958).

III. HIPOTESIS DE AUTOPRESERVACION.

Bajo ciertas condiciones el decaimiento de la turbulencia es muy lento y el sistema se encuentra en un estado de cuasiequilibrio estadístico, independiente de las condiciones en que la turbulencia fue generada. Los parámetros de que depende este movimiento son la energía inyectada al sistema por unidad de masa ϵ , la densidad ρ del fluido, los coeficientes (Bird, Stewart y Lightfoot, 1960) de transporte molecular (masa, momento y energía) y la difusividad térmica α . Para las fluctuaciones de la velocidad, los únicos parámetros que intervienen son la energía ϵ y la viscosidad ν .

Esta hipótesis de cuasiequilibrio conduce a la autopreservación del movimiento, i. e., las características estadísticas no cambian en el tiempo y las funciones de correlación presentan un comportamiento universal. Los experimentos han demostrado que la hipótesis de preservación no es válida en todas las escalas. La condición de isotropía global no es satisfecha; sin embargo, en pequeñas escalas se observa la autopreservación del movimiento. La hipótesis de cuasiequilibrio se postula para número de Reynolds suficientemente grande.

La hipótesis de autopreservación restringe el comportamiento temporal de las funciones de correlación. Con un escalamiento apropiado obtienen un carácter universal.

A fin de aplicar esta hipótesis hay que encontrar escalas de longitud y velocidad apropiadas. Por escala de longitud se puede tomar la escala integral o la escala diferencial de Taylor, que son definidas en términos de las funciones de correlación. La escala diferencial de Taylor se define como

$$\lambda = \left[-\frac{B_{LL}'(0)}{2B_{LL}''(0)} \right]^{1/2},$$

donde las primas denotan derivación. La escala integral es

$$L = \frac{1}{B_{LL}'(0)} \int_0^{\infty} B_{LL}(r) dr.$$

Para la velocidad se puede tomar la intensidad $[v^2]^{1/2} = [B_{LL}(0, t)]^{1/2}$. En general, pueden escogerse cualesquiera escalas de longitud y velocidad que estén determinadas de manera única por las funciones de correlación. En este lenguaje las funciones de correlación se escriben en la forma:

$$B_{LL}(r, t) = v^2(t) f \left[\frac{r}{l(t)} \right], \quad B_{LLL}(r, t) = v^3(t) h \left[\frac{r}{l(t)} \right].$$

donde f y h son funciones universales y l y v son las escalas de longitud y velocidad, respectivamente.

La hipótesis de autopreservación de Kolmogorov es analizada en el siguiente capítulo. Esta teoría es la que parece estar en mejor acuerdo con los resultados experimentales. Es por esto que usualmente las diferentes teorías son comparadas con la de Kolmogorov, que ha sido ampliamente estudiada experimentalmente. La teoría de Kolmogorov conduce a la ley dos tercios para la función de correlación de segundo orden (o la correspondiente ley cinco tercios en el lenguaje espectral) que ha sido confirmada experimentalmente.

III.1 Teoría de T. von Kármán. Los trabajos de von Kármán van en el sentido de introducir la expresión de autopreservación de las funciones de correlación en la ecuación de von Kármán-Howarth. Si se desarrolla la ecuación de von Kármán-Howarth en series de Taylor alrededor de $r = 0$ y se sustituye la hipótesis de autopreservación se obtiene un sistema de ecuaciones para las funciones f y h . En particular si se considera el término de orden cero en este desarrollo se obtiene una ecuación para f donde no aparece h , por lo que es posible resolverla para encontrar f . Sustituyéndola en la ecuación de von Kármán-Howarth se obtiene una expresión para h . El punto importante es que ésta no es una solución exacta, aún más, con este esquema no es posible encontrar una solución exacta en un proceso finito; pero provee un método para encontrar f y h en forma aproximada.

III.2 Teoría modificada de von Kármán. Existe una formulación menos fuerte de la hipótesis de von Kármán. En ésta la idea principal es que la hipótesis de von Kármán es aplicable sólo para ciertos valores de r . En particular, se propone un intervalo $0 \leq r \leq R$ donde la hipótesis es válida.

III.3 Teoría de C. C. Lin. (Lin, 1948) Posteriormente, Lin (1948) propone las mismas ideas que von Kármán cambiando las funciones de correlación por las funciones de estructura $D_{LL}(r, t)$ y $B_{LL}(r, t)$. Las funciones de estructura son parecidas a las funciones de correlación, pero utilizan diferencias de velocidades en vez de las velocidades mismas:

$$D_{LL}(r, t) = \overline{[u_L(\vec{r} + \vec{r}', t) - u_L(\vec{r}, t)]^2} = 2 \overline{u^2(t)} - 2 B_{LL}(r, t),$$

$$D_{LLL}(r,t) = [u_L(\vec{x}+\vec{r},t) - u_L(\vec{x},t)]^2 = 6R_{LLL}(r,t).$$

Las hipótesis de Lin son:

$$D_{LL}(r,t) = v^2 f_1(r/l), \quad D_{LLL}(r,t) = v^3 h_1(r/l), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Hay que recalcar que la hipótesis de Lin puede ser deducida de la hipótesis de von Kármán, pero no viceversa.

Existen hipótesis formuladas en el lenguaje espectral. El escalamiento adecuado es

$$E(k,t) = v^2 \phi(kl), \quad T(k,t) = v^3 \psi(kl).$$

Posteriormente, en este capítulo, se analiza este tipo de hipótesis.

IV. CRITICA Y VERIFICACION EXPERIMENTAL DE LAS HIPOTESIS DE AUTOPRESERVACION.

Los resultados experimentales deben ser interpretados con cuidado ya que no se aplican a todos las teorías por igual. Primeramente se señala que los resultados no son completos como en el caso de turbulencia detrás de una reja y por otra parte, en ocasiones, resultan contradictorios. Los resultados varían dependiendo del autor, lo cual complica aún más la situación.

Stewart y Townsend (1931) mostraron que las hipótesis de autosemejanza para las funciones de correlación no son válidas para todos los valores de r . Las siguientes dos gráficas (Figs. 10 y 11) muestran los resultados obtenidos por Stewart y Townsend para las funciones:

$$f(\xi) = \frac{1}{v^2(\xi)} B_{LL}(r/\lambda), \quad \Lambda(\xi) = \frac{1}{[v^2(\xi)]^{3/2}} B_{LLL}(r/\lambda),$$

para un número de Reynolds de 5300. La porción quebrada de las curvas es señalada por los autores como poco confiable:

$$\frac{B_{LL}(r)}{B_{LL}(0)}$$

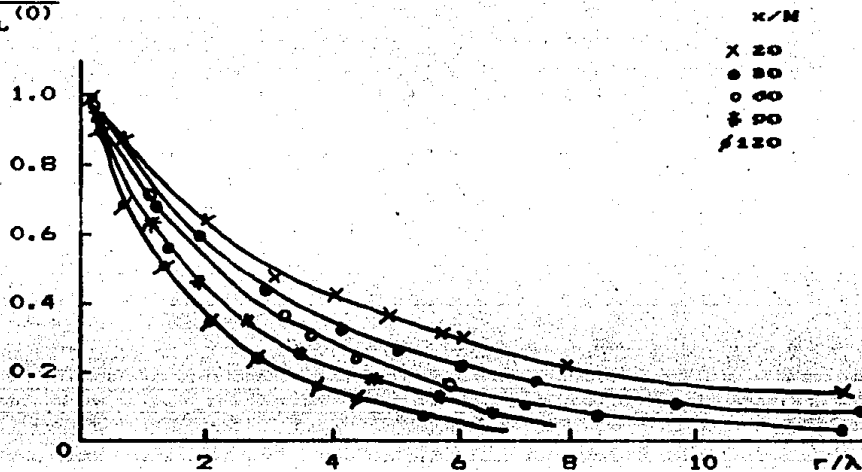


Fig. 10. Función de correlación longitudinal de la velocidad a diferentes distancias de la rejá, de acuerdo a Stewart y Townsend (1951).

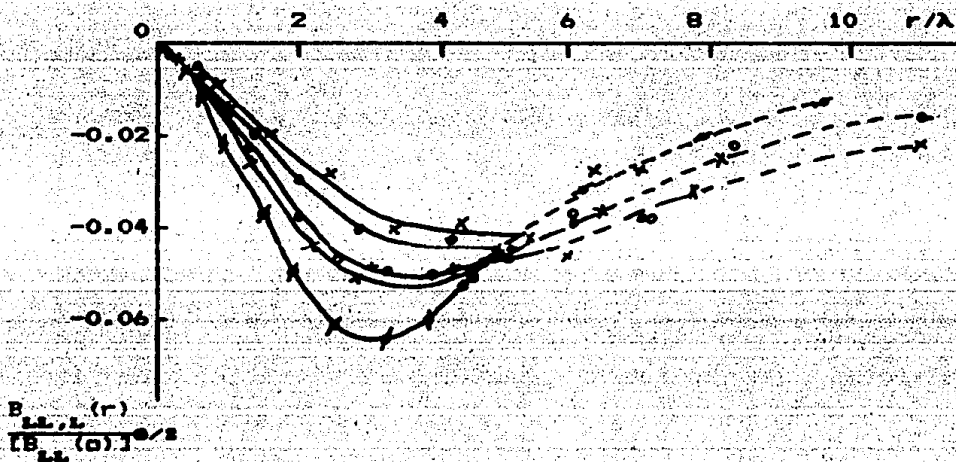


Fig. 11. Función de correlación de tercer orden de la velocidad a diferentes distancias de la rejá. [Stewart y Townsend 1951]. La notación es la misma que en la figura anterior.

Si las hipótesis de autopreservación son válidas las curvas deben coincidir. Excepto cerca de $r = 0$ esto no sucede, aunque guardan cierta semejanza. Esta conclusión fue confirmada por Uberoi (1963). Ambos experimentos fueron realizados en turbulencia detrás de una reja.

Por otra parte si se transforman las funciones de correlación a funciones de estructura y se utiliza una escala de velocidad adecuada se obtiene, dentro de los límites experimentales, autopreservación de la función de estructura $D_{LL}(r,t)$. Para la función de estructura de orden 3, $D_{LLL}(r,t)$, los datos son menos exactos, por lo que no se puede asegurar la forma autopreservada para valores relativamente grandes de r (comparados con la medida λ de la reja), como se observa en la figura anterior. Las siguientes dos figuras (Figs. 12 y 13) muestran el punto:

$$\frac{D_{LL}(r,t)}{v^2(\epsilon)}$$

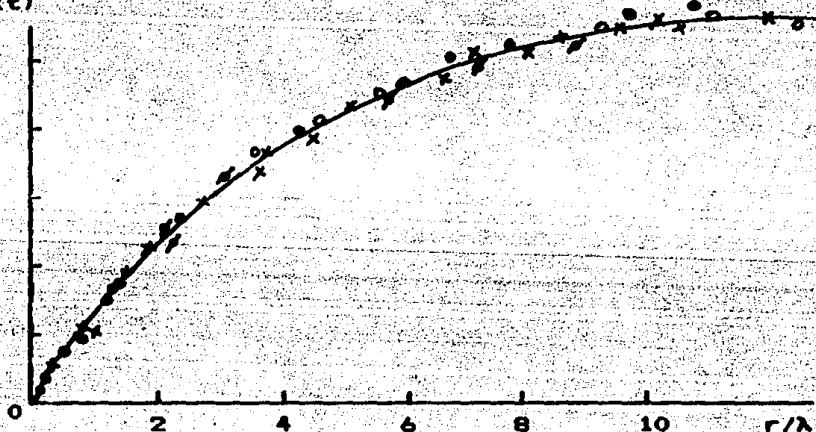


Fig. 12. Verificación de la autopreservación de las funciones de estructura longitudinales de la velocidad medidas por Stewart y Townsend (1951).

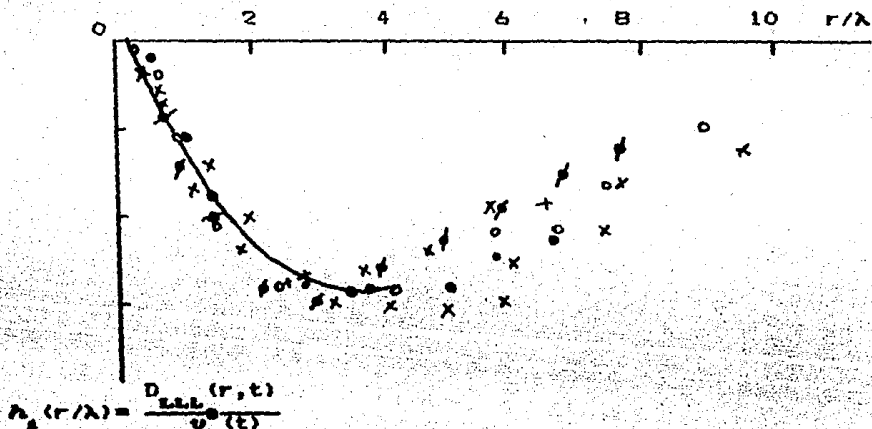


Fig. 13. Verificación de la autopreservación de las funciones de estructura longitudinales de tercer orden medidas por Stewart y Townsend (1951).

Es por esto que la teoría de Lin está más cerca de los resultados experimentales que las teorías que utilizan las funciones de correlación. La teoría de turbulencia localmente isotrópica está formulada en términos de las funciones de estructura que, a juzgar por los experimentos, es una buena suposición. La turbulencia localmente isotrópica será analizada en el capítulo cuatro.

Las hipótesis de semejanza son utilizadas con mucha frecuencia y generalmente con buenos resultados en otros campos de la Física. El método utilizado por von Kármán puede llevarse a llevarse a órdenes superiores utilizando más términos en el desarrollo en series de Taylor de la ecuación de von Kármán-Howarth de esta manera, las funciones f y h se pueden obtener con buena

aproximación. En ninguna de estas teorías se puede obtener la solución exacta lo cual se debe a que la ecuación de von Kármán-Howarth tiene dos incógnitas.

V. HIPOTESIS SOBRE LA TRANSFERENCIA ESPECTRAL DE ENERGIA.

Como hemos visto, las hipótesis de autopreservación no cierran el problema. Ahora trataremos de cerrar el sistema mediante hipótesis adicionales. El punto de partida es nuevamente la ecuación de von Kármán-Howarth escrita en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k', t) dk' = -W(k, t) - 2\nu \int_0^k k'^2 E(k', t) dk'$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_k^{\infty} E(k', t) dk' = -W(k, t) - 2\nu \int_k^{\infty} k'^2 E(k', t) dk',$$

donde

$$\int_0^k E(k', t) dk' \quad \text{y} \quad \int_k^{\infty} E(k', t) dk'$$

son las energías asociadas con las velocidades de número de onda pequeño y grande, respectivamente, conocidas como macro y micro-componente de la turbulencia, en la terminología de Obukhov (1941 a, b);

$$2\nu \int_k^{\infty} k'^2 E(k', t) dk' \quad \text{y} \quad 2\nu \int_0^k k'^2 E(k', t) dk'$$

representan la tasa de disipación de energía. Finalmente

$$W(k, t) = \int_k^{\infty} T(k', t) dk',$$

representa la transferencia de energía a través del punto k ,

i. e., la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo, de la macro hacia la micro-componente.

Las hipótesis de transferencia espectral de energía expresan la función $W(k, t)$ en términos de $E(k, t)$, con lo que las ecuaciones para la macro y micro-componente forman un sistema cerrado de ecuaciones.

V.1 Hipótesis de Kovaznay (Kovaznay, 1948). Haciendo un análisis dimensional la hipótesis más sencilla es:

$$W(k) = 2\gamma_k [E(k)]^{3/2} k^{5/2}.$$

Esta es una hipótesis muy burda ya que no muestra dependencia en las características estadísticas del movimiento para valores pequeños de k , así como para valores grandes. Sin embargo, esta sencilla hipótesis lleva a conclusiones correctas sobre el espectro de energía en cuanto a la forma se refiere.

Por la misma manera en cómo están construidas estas teorías, no sorprende que sean inconsistentes con la ecuación de von Kármán-Howarth. Pero el punto importante es que tan lejos están de los resultados experimentales, los cuales deben ser interpretados con mucho cuidado.

V.2 Hipótesis de difusión de Leith. El trabajo de Leith (1967) es una analogía con la radiación o transporte de neutrones en la aproximación de difusión que ha resultado exitosa. Leith sugirió una relación de la forma $W(k) = -D(\partial Q/\partial k)$, donde D y Q dependen de k y $E(k)$. La dependencia es puesta en una forma en que dimensionalmente concuerde con W . La hipótesis de Leith es:

$$W(k) = -2\gamma_L k^{1/2} \frac{\partial}{\partial k} [k^{-3} [E(k)]^{3/2}],$$

donde γ_L es una constante adimensional.

V.3 Hipótesis de Obukhov. Esta fue la primera hipótesis y fue desarrollada por Obukhov en 1941. Si asociamos la velocidad media con la macrocomponente de la velocidad y la fluctuación con la microcomponente, podemos escribir el tensor de esfuerzos de Reynolds en términos de la microcomponente

$$\frac{1}{2} \overline{u_i'(k) u_j'(k)} = \frac{1}{2} \overline{u_i(k) u_j(k)},$$

donde $\underline{u}(k)$ denota la microcomponente de la velocidad. La hipótesis de Obukhov es escribir $W(k)$ proporcional a este término multiplicada por el gradiente de la macrocomponente de la velocidad. En primera aproximación el esfuerzo de Reynolds debe ser proporcional a la energía

$$\frac{1}{2} \overline{u_i(k) u_j(k)} = \int_k^{\infty} E(k') dk',$$

y a la raíz cuadrática media de la derivada $\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i(k)}$, donde $\overline{u_i(k)}$ es la macrocomponente de la velocidad, que puede ser tomada proporcional a

$$\left[2 \int_0^k k'^2 E(k') dk' \right]^{1/2}.$$

La hipótesis de Obukhov es

$$W(k) = 2\gamma_0 \left[\int_0^k k'^2 E(k') dk' \right]^{1/2} \int_k^{\infty} E(k'') dk''.$$

V.4 Hipótesis modificada de Obukhov. Debido a que la hipótesis original llevaba a consecuencias no físicas, Ellison (1962) modificó la teoría suponiendo que los esfuerzos de Reynolds promedios de la microcomponente pueden ser expresados en términos de $E(k)$ y k . El análisis dimensional nos lleva a que deben ser

proporcionales a $kE(k)$, y de aquí:

$$W(k) = 2\gamma_k k E(k) \left[\int_0^{\infty} k'^2 E(k') dk' \right]^{1/2},$$

donde γ_k es una constante adimensional. Esta expresión es, en cierto sentido, intermedia entre Obukhov y Kovaznay: depende del comportamiento de $E(k')$ en el rango $k'Sk$, pero es independiente de las características estadísticas del movimiento de pequeña escala. Desde el punto de vista físico esto no es muy satisfactorio.

V.5 Hipótesis de Heisenberg. Algunos años después, Weizsäcker (1948) y Heisenberg (1948a), aparentemente sin conocer el trabajo de Obukhov, desarrollaron teorías basados en las ideas clásicas de Boussinesq de que el esfuerzo de Reynolds $\overline{\rho u_i' u_j'}$ podía ser escrito como el producto del coeficiente de "viscosidad" turbulenta K y la deformación del campo de velocidad media $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. De esta forma la transferencia de energía del movimiento medio a las fluctuaciones toma la forma

$$W = \frac{1}{2} K \sum_{i,j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]^2.$$

Si interpretamos a la fluctuación de la velocidad como la velocidad de la microcomponente del flujo y a la velocidad media como la macrocomponente tenemos:

$$W(k) = 2K(k) \int_0^k k'^2 E(k') dk',$$

donde $K(k)$ es la viscosidad turbulenta de los movimientos con número de onda superior a k . Heisenberg utilizó analogías con la teoría cinética de los gases (que era el espíritu de trabajo de las teorías semiempíricas), para definir el coeficiente $K(k)$: la

contribución de la viscosidad turbulenta debido a los movimientos de longitud de onda $l' = 2\pi/k'$ es proporcional al producto de la correspondiente longitud de mezclado l_k , y la escala de velocidad característica v_k . De aquí Heisenberg obtuvo:

$$K(k) = \gamma_H \int_k^{\infty} \sqrt{\frac{E(k')}{k'^3}} dk',$$

donde γ_H es una constante adimensional, por lo que

$$W(k) = 2 \gamma_H \int_k^{\infty} \sqrt{\frac{E(k')}{k'^3}} dk' \int_0^k k''^2 E(k'') dk''.$$

V.6 Hipótesis modificadas de Heisenberg. Existen algunas otras expresiones para el coeficiente $K(k)$. Stewart y Townsend propusieron un modelo más general:

$$K(k) = \gamma_{ST} \left[\int_k^{\infty} \frac{[E(k')]^{1/2 c_0}}{(k')^{1+(1/2 c_0)}} dk' \right]^c,$$

donde c es un número positivo y γ_{ST} es una constante adimensional. Cuando $c = 1/2$ se obtiene una forma analítica simple; fue utilizada por esta razón por Howells (1960) y Monin (1962).

También se puede usar la expresión

$$K(k) = \sum_l \gamma_l \left[\int_k^{\infty} \frac{[E(k')]^{1/2 c_l}}{(k')^{1+(1/2 c_l)}} dk' \right]^{c_l},$$

donde γ_l y c_l son números no negativos. Por otra parte, Ogura y Miyakoda (1953) propusieron

$$K(k) = \frac{\gamma_{OM}}{k} \left[\int_k^{\infty} E(k') dk' \right]^{1/2},$$

que corresponde a la suposición de que la escala de velocidad v_k debe ser sustituida por la raíz de la velocidad cuadrática media de la microcomponente y $l_k \sim 1/k$.

V.7 Hipótesis de von Kármán.

Von Kármán propuso

$$W(k) = 2\gamma_k \int_k^{\infty} (k')^m [E(k')]^n dk' \int_0^k (k'')^{1/2-m} [E(k'')]^{3/2-n} dk''.$$

Poniendo $m = -3/2$, $n = 1/2$ recuperamos la hipótesis de Heisenberg.

V.8 Hipótesis de Goldstein. Goldstein (1951) encontró una expresión general que abarca las hipótesis de von Kármán, Obukhov, Heisenberg y Stewart-Townsend:

$$W(k) = 2\gamma_0 \left[\int_k^{\infty} (k')^m [E(k')]^n dk' \right]^{\lambda} \left[\int_0^k (k'')^{m_1} [E(k'')]^{n_1} dk'' \right]^{\lambda_1},$$

donde γ_0 y $m, n, \lambda, m_1, n_1, \lambda_1$ son números reales, los últimos seis están relacionados por

$$(m + 1)\lambda + (m_1 + 1)\lambda_1 = 5/2, \quad n\lambda + n_1\lambda_1 = 3/2,$$

relación obtenida de análisis dimensional. En la práctica resulta ser una expresión muy complicada pues contiene muchas constantes indeterminadas.

VI. VERIFICACION EXPERIMENTAL DE LAS HIPOTESIS DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA.

Las hipótesis anteriores sobre la transferencia de energía son susceptibles de verificación experimental. La ley "cinco tercios" de Kolmogorov ha sido verificada experimentalmente con gran precisión. Con base en esto, se espera que los modelos anteriores se reduzcan a la ley cinco tercios en la región de validez de esta ley.

La teoría de Kovaznay conduce a

$$E(k) = \begin{cases} (2\gamma_k)^{-2/3} e^{2/3} k^{-5/3} \left[1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^{4/3} \right]^2 & k < k_1 \\ 0 & k > k_1 \end{cases}$$

donde

$$k_1 = 2^{3/4} \gamma_k^{1/2} e^{2/3} \nu^{-3/4} = 2^{3/4} \gamma_k^{1/2} k_\eta. \quad \text{Cuando } k \ll k_1 \text{ se}$$

recupera la ley cinco tercios. La distribución alcanza el cero en $k = k_1$, para valores de k mayores se hace cero. Esto implica que no hay movimiento de esta escala.

La hipótesis de Obukhov lleva al espectro de energía

$$E(k) = \gamma_0^{-2/3} e^{1/6} \nu^{5/6} 2^{-1/6} \frac{h^2(k/k_s)}{(k/k_s)^2},$$

donde $k_s = 2^{-1/6} \gamma_0^{1/2} k_\eta$ y $h(x)$ satisface la ecuación cúbica $4h^3 = x^6 (1+h)^2$ para toda x . Este espectro es positivo sólo para $k < k_s$ y cae a cero en $k = k_s$ en forma discontinua. Para $k \ll k_s$, en primera aproximación $h(x) \sim 2^{-2/3} x^{4/3}$, por lo que en este límite se recupera la ley cinco tercios. Esta fue la forma en como primeramente fue derivada esta ley. Se señaló que esta ley conducía a conclusiones no físicas, la razón es la discontinuidad que presenta en $k = k_s$. La corrección obtenida por Ellison conduce al espectro

$$E(k) = \gamma_E^{-2/3} e^{1/6} \nu^{5/6} 2^{-7/6} \frac{h^2(k/k_s)}{(k/k_s)^2},$$

donde $k_s = 2^{1/6} \gamma_E^{1/2} k_\eta$ y $h(x)$ satisface la ecuación

$$2\sqrt{h} + 21 \ln \left[\frac{1 - \sqrt{h}}{\sqrt{1-h}} \right] + x^3 = 0.$$

En primera aproximación $h(x) = (3/2)^{2/3} x^{4/3}$ y la ley cinco tercios es recuperada. La función $E(k)$ decae exponencialmente al infinito con k .

La hipótesis de Heisenberg lleva a la familia de funciones

$$E(k) = \begin{cases} \frac{4}{3^{4/3}} \gamma_H^{-2/3} e^{2/3} k^{-5/3} \left[1 + \left(\frac{8}{3\gamma_H^2} - \frac{1}{m} \right) \left(\frac{k}{k_\eta} \right)^4 \right]^{-3/2} & k < mk_\eta \\ 0 & k > mk_\eta \end{cases}$$

Todas estas funciones decaen monótonicamente a cero con un cambio demasiado brusco, por lo que es conveniente tomar el límite cuando m tiende a infinito :

$$E(k) = \frac{4}{3^{4/3}} \gamma_H^{-2/3} e^{2/3} k^{-5/3} \left[1 + \frac{8}{3\gamma_H^2} \left(\frac{k}{k_\eta} \right)^4 \right]^{-3/2}$$

Este espectro es positivo y cae monótonicamente a cero en infinito como k^{-7} y para $k \ll k_\eta$ se recupera la ley cinco tercios. Las siguientes dos figuras (Figs. 14 y 15) muestran el comportamiento del espectro en estos modelos.

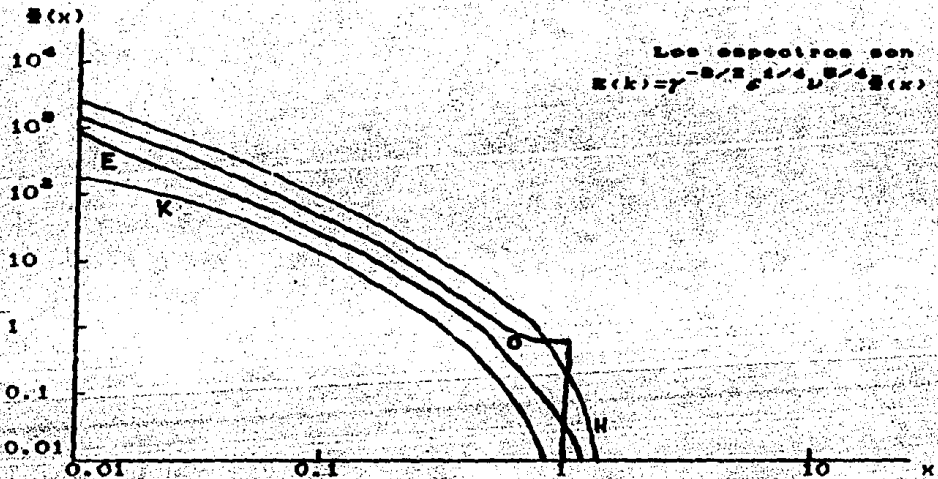


Fig. 14. Factor $Z(x)$ correspondiente a las hipótesis de Kovasny (K) Obukhov (O), modificada de Obukhov (E) y Heisenberg (H), en escala bilogarítmica.

El valor de la constante γ varía de acuerdo a

$$\gamma_K : \gamma_O : \gamma_E : \gamma_H = \frac{9}{16} : \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{3\sqrt{3}}{8} : 1,$$

la siguiente figura (Fig. 15) muestra el espectro adimensional

$$\bar{\epsilon}(k/k_1) = \frac{E(k)}{\gamma_1^{-5/2} \epsilon^{1/4} \nu^{5/4}}$$

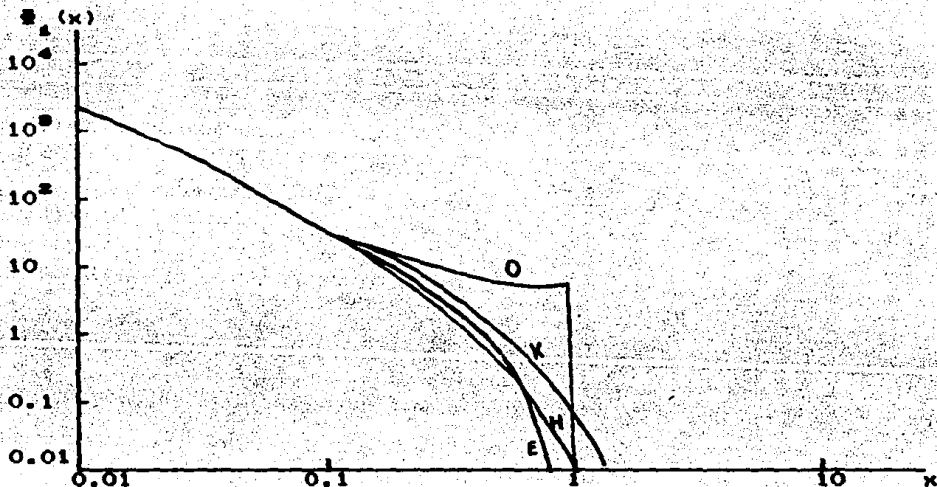


Fig. 15. Espectro adimensional $\bar{\epsilon}_1(x)$ para las cuatro hipótesis de transferencia de energía anteriores.

Las otras hipótesis de transferencia de energía pueden ser adaptadas para reproducir la ley cinco tercios ya que contienen varios parámetros. La hipótesis de Goldstein puede llevarse (Monin y Yaglom, 1975) a la forma

$$E(k) \sim k^{-\frac{5-(m+1)\lambda}{1-n\lambda}}$$

en el límite $k \gg k_\eta$; para asegurar que ϵ es una cantidad finita, debe satisfacerse

$$\frac{5-(m+1)\lambda}{1-n\lambda} > 3 \quad \text{y} \quad n_1 \frac{5-(m+1)\lambda}{1-n\lambda} > 1 + m_1.$$

VII. TEORIAS ANALITICAS DE LA TURBULENCIA.

El problema principal de la jerarquía de Friedmann-Keller es que el número de incógnitas aumenta más rápido que el de ecuaciones. La tercera ecuación de esta serie se deriva en forma análoga a la ecuación de von Kármán-Howarth y es utilizada con frecuencia para obtener un sistema cerrado de ecuaciones. Siguiendo a Proudman y Reid (1954) y Tatsumi (1957a) la ecuación para los momentos de orden tres,

$$B_{ij,l}(r,t) = \overline{u_i(\vec{R},t)u_j(\vec{R},t)u_l(\vec{R} + \vec{r},t)},$$

en la formulación espectral es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(k,k',\mu) = & k_l k'_l \Delta_{ij}(\vec{R}^{**}) F_{(\alpha,l)}(\vec{R},\vec{R}^{**}) + \\ & + k_l k'_l \Delta_{ij}(\vec{R}) F_{(\alpha,l)}(\vec{R}^{**},\vec{R}^{**}) + k_l k'_l \Delta_{ij}(\vec{R}^{**}) F_{(\alpha,l)}(\vec{R}^{**},\vec{R}) - \\ & - \nu(k^2 + k'^2 + k^{**2}) \Gamma(k,k',\mu), \end{aligned}$$

y

$$\Gamma(k) = \int \Gamma(\vec{R},\vec{R}^{**}) d\vec{R}^{**} = 2\pi \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\vec{R},\vec{R}^{**},\mu) k'^2 dk' d\mu,$$

donde $\Gamma(k,k',\mu) = ik_l F_{ij}(\vec{R},\vec{R}^{**})$, $\mu = \vec{R} \cdot \vec{R}^{**} / kk'$ y $\Gamma(k) = ik_l F_{ij}(\vec{R})$, $\Delta_{ij}(\vec{R}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ y las funciones $F_{ij,l}$ y $F_{(\alpha,j),l}$ son las transformadas de Fourier de $B_{ij,l}$ y $B_{(\alpha,j),l}^{(0)}(\vec{r},\vec{r}')$. Este último momento es definido por

$$B_{(\alpha,j),l}^{(0)}(\vec{r},\vec{r}') = B_{(\alpha,j),l}(\vec{r},\vec{r}') - B_{(\alpha)}(0)B_{\beta}(0).$$

La notación se basa en las siguientes reglas: F denota transformada de Fourier y los índices denotan cuales son las componentes que se promedian. Las comas entre los índices se utilizan para separar y ordenar los puntos en donde son evaluadas

las componentes de la velocidad : el primer conjunto de índices se evalúa en \vec{x} , el segundo en $\vec{x} + \vec{r}$, etc.

VII.1 Problema de la cerradura.

La hipótesis más simple para obtener un sistema cerrado de ecuaciones es despreciar los momentos de orden cuatro en las ecuaciones anteriores. Esta hipótesis es justificada (Kraichnan, 1962) en el caso de turbulencia débil con número de Reynolds pequeño y tiempos alcanzando el periodo final de decaimiento. En el caso de turbulencia completamente desarrollada (número de Reynolds muy grande) la hipótesis puede conducir a resultados incorrectos.

En vez de despreciar los momentos de orden cuatro, se puede formular una relación analítica entre éstos y los momentos de orden menor. Esta clase de relaciones analíticas hipotéticas son las usadas para cerrar el problema. Por este motivo esta clase de teorías se conoce como teorías analíticas de turbulencia. La más vieja, y probablemente la más simple, es la propuesta por Millionshchikov (1941a,b). Esta teoría relaciona los momentos de orden cuatro con los de orden dos. Esta hipótesis es válida para distribuciones de probabilidad normales, que experimentalmente parece ser el caso. La hipótesis de Millionshchikov establece

$$\overline{u_i u_j u'_m u'_n} = \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u'_m u'_n} + \overline{u'_m u'_j} \cdot \overline{u_i u'_n} + \overline{u'_n u'_j} \cdot \overline{u_i u'_m},$$

donde las variables no primadas están evaluadas en \vec{x} y las primadas en $\vec{x} + \vec{r}$. Esta es una relación para los momentos de cuarto orden en dos puntos.

La aproximación cumulante-cuarto-cero o cuasi-normal supone que los momentos de orden cuatro en tres puntos son idénticamente

cero. Usando esta hipótesis y la de Millionshchikov es posible obtener un sistema cerrado de ecuaciones. Proudman y Reid (1954) obtuvieron

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(k, k', k'', t) = F(k'', t) [F(k', t) - F(k, t)] - \\ - \nu (k^2 + k'^2 + k''^2) \Phi(k, k', k'', t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(k, k', k'', t) = -\nu (k^2 + k'^2 + k''^2) \Psi(k, k', k'', t)$$

que junto con la ecuación de von Kármán-Howarth y la relación que conecta $\Gamma(k)$ con $\Phi(k, k', k'')$ se obtiene un sistema cerrado de ecuaciones. El tensor $F_{ij}(\vec{k}, \vec{k}')$ se escribe en términos de las funciones escalares Φ y Ψ

$$F_{ij}(\vec{k}, \vec{k}') = -i \Delta_{im}(\vec{k}'') \Delta_{jn}(\vec{k}) \Delta_{lp}(\vec{k}') [\Phi(k, k', k'') - \\ - \Psi(k, k', k'') k_n^m \delta_{mp} + \Psi(k, k', k'') k_p^m \delta_{nm} + \\ + \Psi(k, k', k'') k_m k_n^p k''^m]$$

debido a que el campo solenoidal de velocidades tiene momentos isotrópicos. La relación que expresa $\Gamma(k)$ en términos de estas funciones escalares es muy compleja en la formulación de Proudman y Reid. Tatsumi (1957a) derivó, a partir de este conjunto de ecuaciones, un sistema más sencillo

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = -2\pi \int_0^1 \int_{-1}^1 \Gamma_1(k, k', k'', \mu, t) k'^2 dk' d\mu - 2\nu k^2 F(k, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_1(k, k', \mu, t) = -2 \left[F(k, t) [F(k', t) k^2 + F(k'', t) \mu k k'] - \right. \\ \left. - F(k', t) F(k'', t) (k^2 + \mu k k') \right] (1 - \mu^2) - \\ - 2\nu (k^2 + k'^2 + \mu k k') \Gamma_1(k, k', \mu, t).$$

La primera de estas ecuaciones es directamente integrable. Sin embargo, la segunda ecuación es demasiado compleja para ser analizada. Jahnke, Emde y Lösch (1960) estudiaron el caso de viscosidad cero y obtuvieron ecuación para la generación de vorticidad debida a la deformación del flujo. La simplificación ganada por la cerradura en las teorías analíticas es opacada por la complejidad de las ecuaciones resultantes. La validez de estas ecuaciones no ha podido ser verificada experimentalmente.

VIII. CONCLUSIONES.

Las teorías estadísticas de la turbulencia ofrecen una descripción cualitativamente superior a las teorías semiempíricas. El aspecto cuantitativo no es comparable directamente ya que se aplican a experimentos de naturaleza distinta.

Los experimentos muestran que la hipótesis de autopreservación es válida a nivel local por lo que el uso de funciones de estructura es más adecuado. Las funciones de correlación son aplicables a la idealización matemática del problema donde se supone isotropía global, sin embargo, los flujos reales son localmente isotrópicos. Las conclusiones de las teorías estadísticas no son válidas globalmente. La ecuación de von Kármán no es aplicable a flujos reales para cualquier valor de la variable r , sin embargo, es satisfecha al menos para valores pequeños de r , como se observa en la teoría modificada de von Kármán. La teoría de Lin da un paso adelante, sin embargo el concepto de isotropía global utilizado no es el correcto.

La formulación espectral es más flexible en este sentido, ya que las hipótesis de transferencia espectral permiten modelar el

flujo de energía entre las diferentes escalas del movimiento. Estos modelos son elaborados con enfoques que van desde consideraciones puramente dimensionales, analogías con procesos de transporte de neutrones, hasta modelos que utilizan ideas cualitativas de cómo debe ser el proceso. Sin embargo, ninguna de estas hipótesis puede ser completamente cierta en el sentido de que no son deducidas de primeros principios. La aplicación de los diferentes modelos debe ser entonces cuidadosa. La hipótesis de Kovaznay se basa en consideraciones dimensionales, el uso de esta hipótesis está justificado en la medida en que tan conveniente resulta para describir datos experimentales. Esta teoría no predice un intervalo de aplicabilidad y no es clara la validez física de sus conclusiones.

Por otra parte, la teoría de difusión de Leith se basa en una analogía con el proceso de transporte de electrones. La analogía es por sí misma cuestionable y las conclusiones físicas que de ella se deduzcan no reflejan el aspecto cualitativo del proceso. Los modelos de Kovaznay y Leith son cuantitativamente similares pero cualitativamente distintos. En la medida en que se desconoce el proceso real de transferencia de energía y de que las mediciones experimentales no son lo suficientemente precisas ni completas, la hipótesis de Leith es justificable en el mismo sentido que la de Kovaznay.

La hipótesis de Obukhov está basada en un esquema cualitativo del proceso de transferencia. Utiliza una analogía entre las micro y macrocomponentes de la velocidad y los conceptos de velocidades promedio y fluctuante. Esta analogía no es estrictamente correcta, sin embargo, no está muy alejada de la realidad y para la mayoría de los casos prácticos puede tomarse

como válida. El punto importante en estas teorías es la forma de conectar las escalas pequeña y grande del movimiento. La transferencia de energía involucra una interacción entre las velocidades de estas escalas. La interacción entre estas escalas, en el modelo de Obukhov depende de la correlación de la microcomponente de la velocidad y del gradiente de la macrocomponente. Esta teoría está un paso adelante de las dos anteriores en el sentido de que establece un mecanismo de transferencia, aunque presenta una discontinuidad que es inconsistente con el aspecto cualitativo observado en los experimentos.

La corrección propuesta por Ellison tiene la virtud de salvar esta inconsistencia en particular, aunque no es muy satisfactoria desde el punto de vista físico ya que no muestra dependencia en el espectro de energía para números de onda grandes, en donde la disipación viscosa se lleva a cabo.

La hipótesis de Heisenberg está basada en la idea clásica de Boussinesq de que los esfuerzos de Reynolds pueden ser escritos como el producto de la viscosidad aparente la deformación del campo de velocidad medio. Esta idea conduce a una familia de espectros, presentando como característica general la misma discontinuidad básica encontrada por Obukhov. Este problema puede ser resuelto tomando el el espectro límite de esta familia.

Desde un punto de vista general las teorías de Heisenberg, Ellison y Kovaznay, conducen a comportamientos del espectro cualitativamente similares. Los experimentos no pueden indicar cual de estas es la más correcta. La hipótesis de Obukhov difiere de las anteriores ya que presenta una discontinuidad.

Como punto de referencia puede utilizarse la ley cinco tercios

de Kolmogorov, que constituye el resultado más famoso en turbulencia y que ha sido sujeto a una extensiva verificación experimental mostrando excelente concordancia en el intervalo inercial, donde es aplicable. Debe ser claro que no se ha determinado que la teoría de Kolmogorov sea la correcta, pero sus predicciones experimentales está muy cerca de lo que se observa. Esta comparación fue hecha en secciones anteriores, de donde se vuelve a mencionar que estas teorías se reducen a la ley cinco tercios en el intervalo inercial.

Las teorías modificadas son generalizaciones que utilizan más parámetros ajustables para apearse más a los resultados experimentales, dichos parámetros no son determinables de las teorías. La hipótesis de Goldstein comparte este espíritu, pero es muy compleja ya que incluye 7 parámetros.

Finalmente, la teoría desarrollada por von Kármán introduce dos constantes y basa su hipótesis de transferencia en la energía de las micro y macrocomponentes de la velocidad. Las predicciones teóricas son similares a las de Heisenberg y Ellison.

CAPITULO CUATRO.

LA TEORIA DE KOLMOGOROV.

*Big whorls have little whorls,
which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity.*

L. F. Richardson

Se ha mencionado que la turbulencia isotrópica es una idealización matemática. Sin embargo, existe evidencia experimental para suponer que a pequeñas escalas de tiempo y espacio la turbulencia es isotrópica. Estas ideas fueron mencionadas por primera vez por L. F. Richardson en 1926, quien supuso que la turbulencia desarrollada era una serie de movimientos o vórtices de varias escalas de longitud y velocidad.

La autopreservación de las funciones de estructura conduce a una formulación de turbulencia localmente isotrópica. En este capítulo se analiza la teoría de Kolmogorov.

I.1 INTRODUCCION.

Analicemos cualitativamente el proceso al que se encuentra sometido la turbulencia completamente desarrollada. El flujo completo puede entenderse como una superposición de vórtices o movimientos de diferentes escalas. Para números de Reynolds pequeños se tiene un flujo laminar y a medida que aumenta empiezan a aparecer movimientos o vórtices superpuestos al flujo laminar. Estos vórtices tienen escala de longitud del orden de las del flujo mismo y escala de velocidad del orden de la diferencia máxima de velocidades en el flujo. Con estos parámetros se puede construir un número de Reynolds $Re_1 = u_1 l_1 / \nu$, que en el caso de turbulencia completamente desarrollada es muy grande; el movimiento de esta escala es inestable y se rompe formando vórtices de escalas menores. El movimiento cede su energía al movimiento de escala menor. Estos nuevos movimientos de escala menor poseen un número de Reynolds todavía muy alto, por lo que se rompen, cediendo su energía a movimientos de escalas menores. Este proceso continua hasta una escala de longitud η y velocidad v_η , que posee un número de Reynolds suficientemente pequeño como para ser estable. Sin embargo a medida que disminuye la escala, los efectos viscosos se vuelven más importantes. El movimiento estable no cede su energía a movimientos de escalas menores, lo convierte en calor por medio de las fuerzas viscosas. Las fuerzas viscosas tienen un efecto destructivo sobre las escalas muy pequeñas. Un papel muy importante en este mecanismo de transferencia de energía es jugado por la presión. Las fluctuaciones de la presión tienden a distribuir la energía en todas direcciones, homogeneizando el campo de velocidades. La presión tiene el efecto de hacer que los vórtices de escalas

menores no dependan directamente del flujo medio. Su única dependencia es a través del flujo de energía por lo que en escalas pequeñas se tiene turbulencia isotrópica. Este proceso ha sido observado experimentalmente y se intuye desde Leonardo Da Vinci (código Hammer de Leonardo Da Vinci).

II. TURBULENCIA LOCALMENTE ISOTROPICA.

La intención de esta sección es definir el concepto de turbulencia localmente isotrópica. Primero definimos las cantidades relevantes para el problema. Definimos un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad $\vec{u}(\vec{x}_0, t_0)$ con centro en el punto (\vec{x}_0, t_0) , correspondiente una pequeña región B del espacio dado por:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{u}(\vec{x}_0, t_0) (t - t_0), \quad \tau = t - t_0.$$

La transformación de velocidades está dada por:

$$v(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{x}_0, t_0).$$

En términos de estas cantidades definimos turbulencia localmente isotrópica. Una región B dada del espacio-tiempo es llamada localmente isotrópica si, para cualquier valor fijo $\vec{u}(\vec{x}_0, t_0) = \vec{u}_0$, la distribución de probabilidad multidimensional para cada conjunto finito de velocidades relativas $v(\vec{r}_k, \tau_k)$, $k=1, 2, \dots, n$, que consiste de los valores de la velocidad $\vec{u}(\vec{x}, t)$ en los $n + 1$ puntos $(\vec{x}_0, t_0), (\vec{x}_1, t_1), \dots, (\vec{x}_n, t_n)$ de B es (i) independiente de \vec{u}_0 , (ii) estacionario (independiente de t_0 en B), (iii) homogéneo (independiente de la elección de \vec{x}_0 en B) y (iv) isotrópica (i.e., invariante ante rotaciones y reflexiones en el espacio de vectores \vec{r}).

III. TEORIA DE KOLMOGOROV.

La teoría de Kolmogorov es muy sencilla y es experimentalmente satisfactoria en muchos casos. Las ideas básicas atrás de la teoría son la hipótesis de autopreservación y un análisis dimensional de las funciones de estructura. Es importante señalar que la teoría está hecha en términos de las funciones de estructura y no de las funciones de correlación, lo cual es experimentalmente más adecuado.

Se puede resumir la teoría de Kolmogorov como sigue:

(i) Una hipótesis de autopreservación. Si los valores de r y t son lo suficientemente pequeños se tiene turbulencia localmente isotrópica. Por consecuencia, las funciones de estructura de orden dos y tres se determinan con dos funciones escalares. La hipótesis de autopreservación asegura que las funciones de estructura tienen una forma universal. El mismo argumento es aplicable a la energía $E(A, t)$.

(ii) Una hipótesis sobre las escalas de velocidad y longitud. La única dependencia de parámetros externos del movimiento en pequeña escala es a través de la viscosidad ν y la tasa de energía suministrada ϵ . Existen combinaciones únicas de estos parámetros para obtener las escalas de longitud y velocidad.

(iii) Una hipótesis sobre la fenomenología del problema de la turbulencia. Esencialmente se supone la existencia de dos intervalos separados, uno de los cuales está completamente determinado por el parámetro ϵ (denominado intervalo inercial); en este intervalo el proceso dominante es el de transferencia de energía de movimientos de escalas mayores a los de escalas menores, en donde la viscosidad no juega un papel importante, i.e., la conversión de energía mecánica en calor por efectos de la

viscosidad es despreciable. Un segundo intervalo, donde la energía transferida es convertida en calor por efectos de la viscosidad (denominado intervalo disipativo); dicho intervalo está caracterizado por los dos parámetros ϵ y ν . La existencia de dichos intervalos y su separación se postula para números de Reynolds suficientemente grandes.

Las hipótesis uno y dos permiten escribir

$$D_{LL}(r) = \frac{v_\eta^2}{\eta} \beta_{LL}(r/\eta), \quad D_{LLL}(r/\eta) = \frac{v_\eta^3}{\eta} \beta_{LLL}(r/\eta),$$

donde las escalas de longitud η y de velocidad v_η se obtienen de los parámetros ϵ y ν por dimensionalidad:

$$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad v_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad \tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}.$$

Las funciones β_{LL} y β_{LLL} son universales como es requerido por la hipótesis de autopreservación.

Para $r \ll \eta$, desarrollamos en serie de Taylor las funciones de estructura

$$D_{LL}(r) \sim Ar^2, \quad D_{LLL}(r) \sim Br^3 \quad \text{para } r \ll \eta,$$

donde $A = (\partial u_x / \partial x)^2$ y $B = (\partial u_x / \partial x)^3$. En el intervalo inercial el parámetro ν debe desaparecer, por lo que

$$D_{LL}(r) \sim Cr^{2/3} r^{2/3}, \quad D_{LLL}(r) \sim Dr, \quad \text{para } \eta \ll r \ll L,$$

donde C y D son constantes. En la formulación espectral las hipótesis uno y dos llevan a

$$E(k) = \eta v_\eta^2 \phi(\eta k),$$

por lo que en el intervalo inercial ν debe desaparecer

$$E(k) \sim C_1 \epsilon k^{-5/3}, \quad \text{para } 1/L \ll k \ll 1/\eta,$$

que es la famosa ley cinco tercios de Kolmogorov. Este es uno de los resultados más conocidos por su sencillez y amplia verificación experimental.

IV. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LA AUTOPRESERVACION DE LA TEORIA DE KOLMOGOROV.

Para que los intervalos de energía e inercial estén separados por varios órdenes de magnitud, i.e., que la escala de longitud η (conocida como longitud interna de Kolmogorov) satisfaga $\eta \ll L$, donde L es una longitud macroscópica característica del flujo, se exige un número de Reynolds mayor que el requerido para que existan. Las implicaciones sobre el número de Reynolds, establecidas por la hipótesis de cuasiequilibrio universal requiere, para la existencia de los intervalos

$$\left[\frac{LU}{\nu} \right]^{3/4} = (Re_L)^{3/4} \gg 1,$$

donde U es la velocidad media.

La separación de los intervalos requiere una condición más fuerte.

Para que

$$L \gg l \gg \eta$$

se debe cumplir que

$$(Re_L)^{3/8} \gg 1.$$

Para observar un intervalo inercial apreciable, los órdenes de magnitud para el número de Reynolds, estimados por Proudman (1951), Stewart y Townsend (1951) y Gibson y Schwarz (1963b) son del orden de varios cientos o miles.

V. CRITICA A LA TEORIA DE KOLMOGOROV.

La hipótesis de autopreservación para el espectro de energía fue verificada por experimentos realizados en túneles de viento. Los experimentos llevados a cabo por Townsend (1951), Uberoi (1963) y algunos otros autores parecen estar en conflicto parcial. La siguiente figura (Fig. 16) muestra la dependencia empírica

entre el cociente $E_1(k)/\eta\nu^2$ y ηk , reportada por Stewart y Townsend

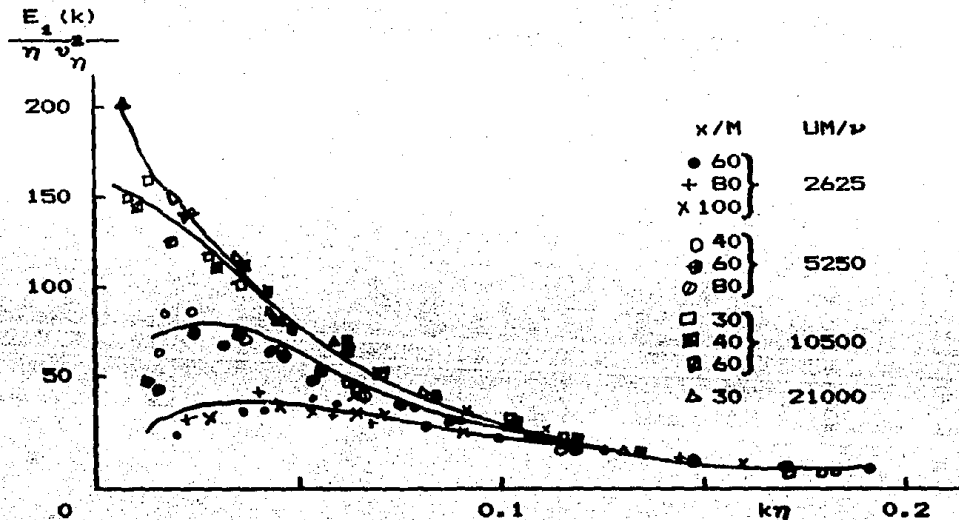


Fig. 16. Espectro unidimensional longitudinal normalizado a diferentes distancias de la rejilla y para diferentes números de Reynolds. [Stewart y Townsend, 1951].

para valores de $\eta k > 0.1$ se observa un comportamiento universal. Para valores de $\eta k < 0.1$ no se observa comportamiento universal. De este análisis se sigue que para $\eta k > 0.1$ y número de Reynolds suficientemente grande se tiene el comportamiento universal predicho por Kolmogorov. Este mismo comportamiento universal fue observado por experimentos posteriores para números Reynolds moderados y valores de ηk suficientemente pequeños, reportados por Gibson y Schwarz (1963) y Van Atta y Chen (1968, 1969a). Los valores para $\eta k > 0.1$ no permiten estimar el grado de coincidencia de las curvas donde los valores del valor absoluto del espectro son relativamente pequeños.

Experimentalmente las funciones de estructura tienen un comportamiento autopreservativo. Diferentes autores han reportado

que la hipótesis de autopreservación de Kolmogorov es observada. Experimentos hechos en flujos turbulentos naturales en la atmósfera y en océanos, caracterizados por números de Reynolds mucho mayores que los obtenidos en el laboratorio, reflejan la validez de estas hipótesis. Van Atta y Chen (1970) realizaron experimentos en la capa superficial de la atmósfera, sobre el mar, e hicieron mediciones a diferentes alturas para las funciones de estructura de segundo y tercer orden (Figs. 17 y 18).

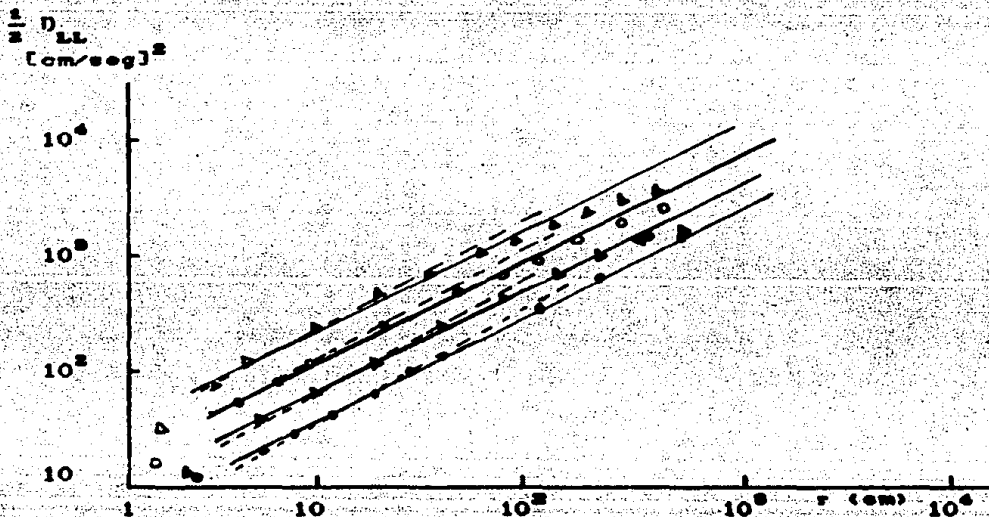


Fig. 17. Funciones de estructura de segundo orden medidas por Van Atta y Chen (1970). Simbología: $z = 3m$, $u = 7.3m/s$; $z = 9m$, $u = 9.4m/s$; $z = 21m$, $u = 11.5m/s$. Las líneas continuas tienen pendiente $2/3$. Las cortadas 0.722 .

Existen muchos trabajos que confirman este comportamiento (Monin y Yaglom, 1975). La formulación espectral también ha sido ampliamente verificada experimentalmente. Tsvang et al (1963) realizaron experimentos a 300 m de altura. Utilizando la hipótesis de Taylor para convertir $k = \omega / \bar{u}$, donde \bar{u} es el promedio de la

componente horizontal, obtuvieron el espectro $E_1^{(u)}$; análogamente

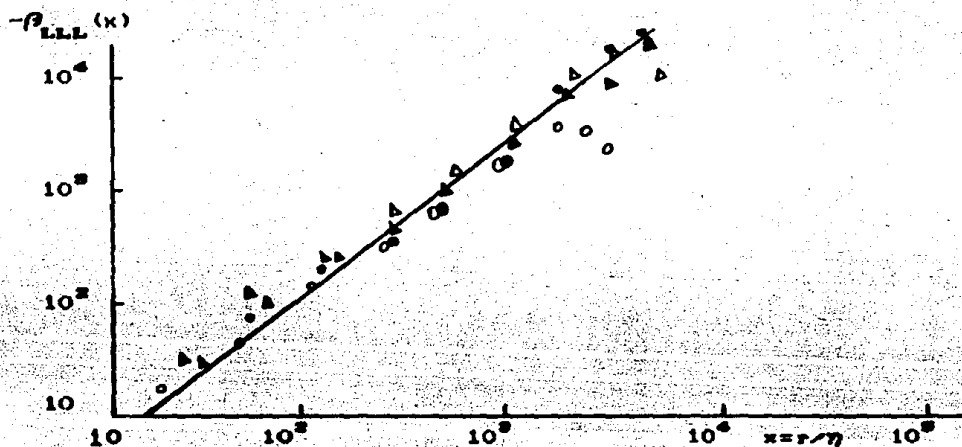


Fig. 18 Funciones de estructura de tercer orden normalizadas con las escalas de Kolmogorov [van Atta y Chen (1970)]. La simbología es la misma.

para la componente horizontal \bar{w} (Fig. 19).

La teoría de Kolmogorov surge en forma independiente al formalismo de la hidrodinámica representado por la ecuación de von Kármán-Howarth. En este sentido ambos enfoques son independientes, aunque describen el mismo fenómeno. La ecuación de von Kármán-Howarth es una consecuencia directa de la ecuación de Navier-Stokes y la hipótesis de isotropía global, válida para cualquier valor de r . La hipótesis de isotropía global es una idealización y no corresponde a flujos reales. Si suponemos isotropía local, la ecuación debe aplicarse sólo en un intervalo de valores de r . Para comparar ambas teorías, es necesario escribir la ecuación de von Kármán-Howarth en términos de las funciones de correlación

$$D_{LL}(r,t) = 2B_{LL}(0,t) - 2B_{LL}(r,t),$$

$$D_{LLL}(r,t) = 6B_{LLL}(r,t),$$

resultando la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{LL}(r, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B_{LL}(0, t) = \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right] \left[-\frac{1}{2} D_{LLL}(r, t) + \nu \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r, t) \right].$$

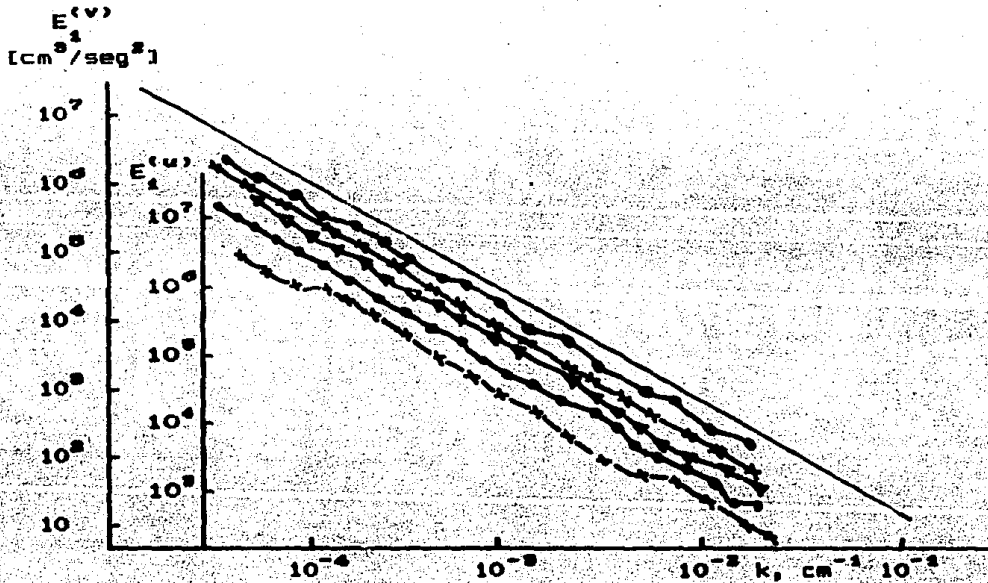


Fig. 19. Espectro unidimensional de las componentes horizontal (u) y vertical (v) de la velocidad del viento a una altura de 300m.

En equilibrio, resulta

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right] \left[-\frac{1}{2} D_{LLL}(r, t) + \nu \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r, t) \right] = 0,$$

de donde

$$-\frac{1}{2} D_{LLL}(r, t) + \nu \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r, t) = cr^{-6},$$

siendo c una constante. Las funciones de estructura obtenidas de la teoría de Kolmogorov no satisfacen la ecuación de von Kármán-Howarth. Los trabajos de Heisenberg, Obukhov y algunos otros autores parten de la ecuación de von Kármán-Howarth y, bajo

ciertas condiciones, recuperan la ley dos tercios de Kolmogorov.

Por otro parte, la teoría de Kolmogorov no se puede extender, al menos en forma directa, al caso de turbulencia seca (viscosidad cero). Las escalas de velocidad y longitud dependen de ν . El límite de viscosidad cero debe de ser tomado con cuidado, y tanto ν como ϵ tienden a cero. El flujo inviscido presenta una energía espectral $E(k) \sim k^{-2}$.

Posteriormente, Kolmogorov (1962a,b) y Obukhov (1962a,b) desarrollaron correcciones a las antiguas fórmulas que aún no han podido ser verificadas experimentalmente.

Por otra parte, los resultados de la teoría de Kolmogorov son incompatibles con la ecuación de von Kármán-Howarth en el sentido de que no la satisfacen.

CAPITULO CINCO.

RESUMEN CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

*And it boils and it roars, and it hisses and seethes,
As when water and fire first blend;
To the sky spurts the foam in steam-laden wreaths,
And wave presses hard upon wave without end.
And the ocean will never exhausted be,
As if striving to bring forth another sea.*

*But at length the wild tumult seems pacified,
And blackly amid the white swell
A gaping chasm its jaws open wide,
As if leading down to the depths of shell:
And the howling billows are seen by each eye
Down the whirling funnel all madly to fly.*

F. Schiller, The Diver

En este capítulo se mencionan brevemente otros enfoques del problema de la turbulencia. También, brevemente se menciona la teoría de Landau referente a la transición a la turbulencia. Finalmente se incluye un resumen y conclusiones generales.

I. TÉCNICAS DIAGRAMÁTICAS Y TEORÍA DE PERTURBACION.

Si se escriben las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de variables adimensionales, con escala de longitud l y de tiempo l^2/ν , el término no lineal aparece multiplicado por el número de Reynolds. El número de Reynolds es un parámetro de interacción inercial que identifica la no linealidad de las ecuaciones. Se pueden usar las técnicas diagramáticas y la teoría de perturbaciones para analizar el problema puesto en términos de una serie de potencias en el número de Reynolds. Este tipo de análisis es válido aún para números de Reynolds grandes.

Usando la ecuación de Poisson y suponiendo una fuerza F solenoidal, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser escritas en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) u_i = F_i - \lambda_{\alpha} \mathcal{G}_{ij}(\vec{u} \cdot \nabla) u_j,$$

donde $\mathcal{G}_{ij} = \delta_{ij} - \nabla_i \nabla_j / \nabla^2$. El segundo término del lado derecho puede ser puesto en la forma

$$P_{\alpha\beta}(M, M_1) u_{\alpha}(M_1) u_{\beta}(M_1) = \int P_{\alpha\beta}(M - M_1) u_{\alpha}(M_1) u_{\beta}(M_1) dM_1,$$

donde M y M_1 denotan puntos en el espacio-tiempo y se puede verificar (Monin y Yaglom, 1975) que $P_{\alpha\beta}$ es el resultado de la aplicación del operador \mathcal{G}_{ij} a la función $\delta(M)$. Se define el propagador de Green $G(M, M_1)$ como el inverso del operador $(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2)$. Considerando un espacio infinito, y con condiciones iniciales cero cuando $t \rightarrow -\infty$, el operador puede ser representado por

$$G(M, M_1) f(M_1) = \int G(M - M_1) f(M_1) dM_1,$$

donde

$$G(M) = (2\sqrt{\pi\nu\tau})^{-3} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu\tau}\right] E(\tau),$$

y la función $E(\tau)$ es igual a uno para $\tau \geq 0$ y cero para $\tau < 0$. El

resultado de aplicar este operador a la fuerza externa F se puede escribir como

$$G(M, M_2) F_j(M_1) = u_j^{(0)}(M).$$

Con base en esto, las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben como

$$u_j(M) = u_j^{(0)}(M) + G_{ja}(M, M_1) P_{\alpha\beta\gamma}(M_1, M_2) u_\beta(M_2) u_\gamma(M_2),$$

donde $G_{ji} = \delta_{ji} G$ y no hay fuerzas externas. Como $P_{\alpha\beta\gamma}$ es el término resultante del término no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes y debe ser del orden del número de Reynolds, R . La solución puede ser expresada en serie de "potencias del número de Reynolds" escribiendo $u_j(M)$ como

$$u_j(M) = u_j^{(0)}(M) + u_j^{(1)}(M) + u_j^{(2)}(M) + \dots$$

que sustituyéndola en la ecuación anterior y ordenando términos del mismo orden en R , conduce a las primeras dos ecuaciones

$$u_j^{(1)}(M) = G_{ja}(M, M_1) P_{\alpha\beta\gamma}(M_1, M_2) u_\beta^{(0)}(M_2) u_\gamma^{(0)}(M_2),$$

$$u_j^{(2)}(M) = 2G_{ja}(M, M_1) P_{\alpha\beta\gamma}(M_1, M_2) u_\beta^{(0)}(M_2) u_\gamma^{(1)}(M_2).$$

Esta última ecuación puede ser puesta en términos de $u_j^{(0)}(M)$. Estas ecuaciones pueden ser escritas en formas de diagramas. Wyld (1961) usó la técnica diagramática para representar estas ecuaciones y obtuvo un sistema cerrado de tres ecuaciones. Para obtener este sistema, descartó diagramas correspondientes a momentos de orden superior, de forma análoga a las usadas en la hipótesis cumulante-cuarto-cero. Las técnicas diagramáticas son complicadas y su aplicación ha sido cuestionada (Lee, 1965 y Beran, 1968). Este método, sin embargo, ha conducido a ecuaciones que pueden ser derivadas en una forma completamente diferente (Kraichnan, 1959), como es el caso de la aproximación de interacción-directa de Kraichnan.

Kraichnan tomó en cuenta el carácter no lineal de las ecuaciones dinámicas, para proponer que las tres componentes de la transformada de Fourier de la velocidad, interactúan directa e indirectamente a través de diferentes números de onda. También, supuso que las interacciones indirectas son despreciables comparadas con las directas. Es por esto que la teoría recibe el nombre de aproximación de interacción-directa. El trabajo de Kraichnan es analizado y criticado extensivamente por muchos autores (Proudman, 1962; Batchov, 1966 y 1967; O'Brien, 1968; Orszag 1970 y Phythian, 1969).

Ni estas teorías, ni las analíticas permiten considerar en forma separada la evolución entre las escalas pequeña y grande de la turbulencia, i. e., no eliminan la interacción directa entre dichas escalas. La segunda aproximación del método de modelos estocásticos (del que la aproximación de interacción-directa es la primera ecuación), desarrollada por Kraichnan (1961) tiene el mismo defecto. La forma más sencilla (Kraichnan, 1964c) de eliminar esta interacción es introduciendo un corte artificial en las ecuaciones de Navier-Stokes. Este corte elimina la interacción entre las componentes de Fourier de la velocidad con vectores de onda \mathbf{k} y \mathbf{k}' tales que $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$ es muy pequeño. Esta hipótesis lleva a la ley cinco tercios de Kolmogorov.

Posteriormente el mismo Kraichnan (1965b; 1966a,b) usó la invariancia galileana para la cerradura de las ecuaciones dinámicas en la aproximación de interacción-directa. Esta aproximación fue llamada de historia-lagrangiana de interacción-directa por el propio Kraichnan. Esta aproximación es bastante complicada, lo que le obligó a introducir un procedimiento no riguroso para simplificar las ecuaciones. Obtuvo

un sistema cerrado de ecuaciones cuya validez no es clara. Sin embargo, las características principales de los flujos reales están reflejadas en los resultados obtenidos por Kraichnan, en concordancia con los resultados obtenidos por Kolmogorov en turbulencia localmente isotrópica. El término historia-lagrangiana es usado debido a que consideró la velocidad en coordenadas lagrangianas, en vez de eulerianas. Las ecuaciones obtenidas en este enfoque son obtenidas de forma similar a la utilizada por Wyld. Kraichnan ha desarrollado sus teorías en una extensa serie de artículos. En términos generales, los resultados obtenidos por Kraichnan son los deducidos de la teoría localmente isotrópica de Kolmogorov. Estos enfoques merecen un análisis mucho más cuidadoso y extenso que el aquí esbozado.

II. TÉCNICAS DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN.

En esta sección se pretende mostrar cual es el tipo de resultados que pueden obtenerse si se utilizan las técnicas del grupo de renormalización.

El concepto de viscosidad aparente en la teoría de J. Boussinesq hace pensar en una renormalización de la viscosidad. Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes con una viscosidad ν_0 , se pueden aplicar las técnicas usuales del grupo de renormalización dinámico para estudiar el comportamiento de la correlación de la velocidad cuando una fuerza aleatoria es aplicada. Usualmente se considera un parámetro perturbativo λ_0 que eventualmente se hará igual a uno. Las ecuaciones de Navier-Stokes para el problema son

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \lambda_0 (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \lambda_0 \nabla p + \nu_0 \nabla^2 \vec{u} + \vec{F},$$

que junto con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

son las ecuaciones que rigen el comportamiento, aún en turbulencia completamente desarrollada. Para un fluido incompresible, la presión puede ser escrita en términos de la velocidad utilizando la ecuación de Poisson, las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben entonces en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = -\lambda_0 \mathcal{E}_{ij} (\vec{u} \cdot \nabla) u_j + \nu_0 \nabla^2 u_i + F_i,$$

donde $\mathcal{E}_{ij} = \delta_{ij} - \nabla_i \nabla_j / \nabla^2$.

Dada una fuerza aleatoria F se espera obtener características del movimiento. La definición de la fuerza es la que, en última instancia, determina las características. P. C. Martin y C. De Dominicis postulan que la viscosidad ν_0 es el resultado de la eliminación de los modos con número de onda k mayor que el de corte k_0 , y los términos adicionales surgidos de la eliminación son despreciados.

El parámetro importante es el número de Reynolds. A medida que este aumenta, el número de modos excitados va aumentando. Los modos de número de onda pequeño reflejan las propiedades geométricas del flujo, pero los modos de número de onda grande se van haciendo independientes de estas características. Estas son ideas que aparecen en el esquema de la turbulencia desarrollado por Kolmogorov, en donde el corte es $k_0 \approx L^{-1}$, siendo L una dimensión característica del fluido. Utilizando argumentos dimensionales, el número de Reynolds se puede escribir

$$R \approx e^{2/3} k_0^{-2/3} / \nu,$$

y

$$E(k) = k^{d-1} \int d^d r e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} E_{LL}(0) \approx e^{2/3} k^{-2/3} \phi(k/k_0, R),$$

y si existe una región inercial $k_0 \ll k \ll k_d$, se espera un comportamiento universal para el espectro :

$$E(k) \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3} R^\mu (k/k_0)^{\mu/3} .$$

Si la disipación iguala a la energía suministrada ϵ , independientemente de ν y R , la región inercial debe ser cortada en k_d

$$\int_0^{k_d} dk \nu k^2 E(k) \approx \nu k_d^{(4-10)/3} R^\mu k_0^{\mu/3} \epsilon^{2/3} ,$$

R^μ debe ser uno, y

$$k_d \approx R^{3/10-10/3} k_0 .$$

Para deducir el esquema de Kolmogorov es necesario que

- (i) Cuando R tiende a infinito, la ecuación (1) debe ser válida para μ pequeño o cero;
- (ii) El resultado es independiente de ν y ϵ ;
- (iii) Para $k \gg k_d$, definida por (2), $E(k)$ decae rápidamente.

Se pueden usar técnicas del grupo de renormalización para deducir el esquema de Kolmogorov. Las ideas básicas (Kogut y Wilson, 1962) son las siguientes:

- (i) Eliminar los vórtices o remolinos mayor escala, tomando en cuenta su efecto modificando la fuerza y el acoplamiento de los remolinos restantes.
- (ii) Reescalar para que el tamaño de los remolinos restantes de mayor escala tengan el tamaño de los remolinos eliminados y ver el efecto sobre la viscosidad ν .
- (iii) Repetir el proceso ad infinitum.

Los resultados dependen de la fuerza aleatoria introducida en las ecuaciones de Navier-Stokes. Martin y Dominicis (1978) obtuvieron resultados para fuerzas particulares que son consistentes con los resultados obtenidos por Kolmogorov. Este

y si existe una región inercial $k_0 \ll k \ll k_d$, se espera un comportamiento universal para el espectro:

$$E(k) \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3} R^\mu (k/k_0)^{4\mu/3}$$

Si la disipación iguala a la energía suministrada ϵ , independientemente de ν y R , la región inercial debe ser cortada en k_d

$$\int_0^{k_d} dk \nu k^2 E(k) \approx \nu k_d^{(4-10)/3} R^\mu k_0^{4\mu/3} \epsilon^{2/3}$$

R^μ debe ser uno, y

$$k_d \approx R^{3/(4-10)} k_0$$

Para deducir el esquema de Kolmogorov es necesario que

- (i) Cuando R tiende a infinito, la ecuación (1) debe ser válida para μ pequeño o cero;
- (ii) El resultado es independiente de ν y ν ;
- (iii) Para $k \gg k_d$, definida por (2), $E(k)$ decae rápidamente.

Se pueden usar técnicas del grupo de renormalización para deducir el esquema de Kolmogorov. Las ideas básicas (Kogut y Wilson, 1962) son las siguientes:

(i) Eliminar los vórtices o remolinos mayor escala, tomando en cuenta su efecto modificando la fuerza y el acoplamiento de los remolinos restantes.

(ii) Rescalar para que el tamaño de los remolinos restantes de mayor escala tengan el tamaño de los remolinos eliminados y ver el efecto sobre la viscosidad ν .

(iii) Repetir el proceso ad infinitum.

Los resultados dependen de la fuerza aleatoria introducida en las ecuaciones de Navier-Stokes. Martin y Dominicis (1978) obtuvieron resultados para fuerzas particulares que son consistentes con los resultados obtenidos por Kolmogorov. Este

enfoque merece un análisis más cuidadoso y detallado del aquí esbozado.

III. TRANSICION A LA TURBULENCIA: LA TEORIA DE LANDAU.

Básicamente, la teoría de Landau propone un modelo en el que el flujo puede ser considerado como un conjunto de osciladores elementales no lineales que interactúan entre sí. La energía suministrada produce oscilaciones autoexcitadas. Al ir aumentando el número de Reynolds van apareciendo nuevas frecuencias o modos para el sistema. La turbulencia completamente desarrollada consta de un número infinito de frecuencias.

En principio, debe existir una solución a los problemas de flujo viscoso independientemente del número de Reynolds. Los flujos que ocurren en la naturaleza, además de satisfacer las ecuaciones de movimiento, deben ser estables. Por lo que si aparecen pequeñas perturbaciones en el flujo, deben desaparecer con el tiempo, si no, el flujo es inestable.

Para examinar el comportamiento de una pequeña fluctuación \vec{u}_1 en un flujo estacionario con velocidad \vec{u}_0 se sustituye $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1$ en las ecuaciones de Navier-Stokes, eliminando

$$(\vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 + \nu \nabla^2 \vec{u}_0,$$

que corresponde a la ecuación del flujo estacionario \vec{u}_0 , la ecuación resultante para \vec{u}_1 es

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 + ((\vec{u}_0 + \vec{u}_1) \cdot \nabla) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{u}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \nu \nabla^2 \vec{u}_1.$$

En primera aproximación despreciamos el término cuadrático $(\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{u}_1$. La condición de frontera es que \vec{u}_1 se hace cero en fronteras sólidas. Estas son ecuaciones lineales para las componentes de \vec{u}_1 cuyos coeficientes dependen de las coordenadas,

pero no del tiempo. La solución se escribe como una suma de soluciones particulares en las que la dependencia temporal de \vec{u}_1 es $e^{-i\omega t}$, donde la frecuencia ω es por lo general compleja. Por lo tanto, si una perturbación tiene una frecuencia ω con parte imaginaria positiva, aumentará exponencialmente en el tiempo. Los flujos estables tendrán una parte imaginaria negativa.

Existe un valor crítico del número de Reynolds R_c , por debajo del cual la parte imaginaria de las frecuencias de las perturbaciones es negativa: $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$, $\gamma_1 < 0$. En el número de Reynolds crítico la parte imaginaria se hace cero. Para valores un poco arriba del valor crítico: $R - R_c$ es positivo pero pequeño, de tal forma que el valor de γ_1 es pequeño comparado con $\omega_1 > 0$; la fluctuación es de la forma

$$\vec{u}_1 = A(t) \vec{f}(x, y, z),$$

donde \vec{f} es una función compleja de las coordenadas y la amplitud A es de la forma

$$A(t) = C_0 \exp[\gamma_1 t - i\omega_1 t].$$

Esta ecuación es válida para perturbaciones pequeñas comparadas con el flujo \vec{u}_0 . De esta expresión se observa que la perturbación crece en el tiempo determinada por la ecuación anterior para valores pequeños de $A(t)$. Para tiempos pequeños, la magnitud de $A(t)$ está determinada por

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2,$$

que corresponde al primer término de un desarrollo en series para la magnitud de A . El siguiente término conduce a la ecuación

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4, \quad \alpha = \text{cte.}$$

Se postula que el valor de α es positivo, lo que para flujos alrededor de cuerpos parece ser así. La solución de esta ecuación es

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + C_0 \exp[-2\gamma_1 t],$$

de donde se concluye que $|A|^2 \longrightarrow |A|_{\text{max}}^2 = 2\gamma_1/\alpha$.

Desarrollando γ_1 en serie de potencias de $(R - R_c)$, Landau encontró, a primer orden

$$|A|_{\text{max}} = (R - R_c)^{1/2}.$$

En conclusión, la inestabilidad de un flujo para $R > R_c$ introduce un flujo no estacionario periódico. Para este flujo resultante existirá otro número de Reynolds crítico, mayor al anterior, por el cual se vuelva inestable. La ecuación para una pequeña perturbación \hat{u}_2 en este nuevo flujo tiene coeficientes dependientes de las coordenadas y del tiempo. La solución de esta ecuación llevará a una nueva frecuencia, que será inconmensurable con la anterior. Este proceso se repite ad infinitum, dando por resultado un número infinito de frecuencias. El flujo resultante es una superposición de movimientos con distintas frecuencias. La turbulencia completamente desarrollada se obtiene para un número infinito de frecuencias.

Las suposiciones de Landau son plausibles y físicamente convincentes, pero no son rigurosas y no pueden ser consideradas completamente ciertas. En efecto, la ecuación

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4,$$

está basada en la suposición de que únicamente una perturbación inestable será excitada para pequeños valores de $R - R_c$ aún cuando muchas de tales perturbaciones puedan existir para $R > R_c$, y las

interacciones entre ellas pueden ser de considerable importancia (Eckhaus, 1965 da una buena exposición de la inestabilidad no lineal de Landau). También hay casos experimentales excepcionales de inestabilidad hidrodinámica; cuando en puntos críticos de los parámetros del flujo, no solo $\gamma = 0$ si no también $\alpha = 0$, el término $|A|^2$ juega un papel importante (Ponomarenko, 1965).

El defecto más importante de la teoría de Landau es que no ha sido verificada experimentalmente en todos los casos, por lo que el mecanismo de transición no es universal. En un flujo plano de Couette o uno circular de Poiseuille el número de Reynolds $R_c = R_{cmax}$ definido por la teoría linealizada de estabilidad es, aparentemente, infinito. Consecuentemente, el movimiento turbulento debe ocurrir como un resultado de la inestabilidad con respecto a perturbaciones no pequeñas, si no finitas, mientras que, probablemente, desde el principio posea un número muy grande de grados de libertad.

Existen teorías, como la propuesta por Ruelle y Takens (Ruelle y Takens, 1976), en la que el proceso de transición a la turbulencia no consta de un número infinito de frecuencias excitadas. Ruelle y Takens establecen un mecanismo tal que a partir de tres frecuencias es posible obtener turbulencia completamente desarrollada.

IV. RESUMEN Y CONCLUSIONES.

El estudio de la turbulencia ha pasado por varias etapas. Los primeros análisis tenían un enfoque descriptivo, su objetivo principal era reproducir los resultados experimentales cuya cantidad aumentaba cada vez más. Cada experimento era analizado en forma separada con teorías formuladas ad-hoc. Los argumentos

eran de carácter fenomenológico, y en la mayoría de las ocasiones eran formuladas utilizando conceptos oscuros. La validez de los argumentos no puede ser justificada a partir de primeros principios y en ocasiones conducían a inconsistencias teóricas serias. La precisión con la que podían reproducir los datos experimentales era uno de los criterios para justificar las hipótesis. La teoría de Reichardt es un ejemplo claro del espíritu de este enfoque, sus hipótesis están en desacuerdo con el principio de invariancia galileano; pese a esto, el mismo Reichardt defendió su modelo argumentando la precisión con la que se apegaba a los experimentos. Teorías como la de L. Prandtl, utilizan conceptos no claros como el de conglomerado (lump) de partículas e hipótesis que no pueden ser completamente válidas, como es la suposición de que la individualidad y el momento de los conglomerados es conservado a lo largo de la longitud de mezclado, sin olvidar que el valor de esta longitud de mezclado no es deducible de la teoría y tiene que ser evaluado experimentalmente en cada caso. Aún más, los resultados no son aplicables globalmente, lo que refleja que las hipótesis mismas no son aplicables en forma global. En particular, los efectos de la viscosidad eran despreciados al ser comparados con los de la viscosidad aparente, lo cual es falso en las cercanías de superficies sólidas. La forma de resolver este problema no era modificando los principios sobre los que se estructuraban las teorías, si no agregando términos correctivos cuya motivación física no es clara. La teoría desarrollada por Taylor cambiaba la hipótesis de conservación de momento por una análoga para la vorticidad. Esta hipótesis es falsa en tres dimensiones. Además, esta teoría se enfrentaba con problemas que eran comunes a todas

estas teorías semiempíricas. La aplicabilidad de una analogía con la teoría cinética es por sí misma cuestionable. Con un enfoque distinto, la hipótesis de semejanza de von Kármán conduce a resultados similares, esta teoría también desprecia los efectos de la viscosidad. Sin embargo, esta teoría aporta un elemento nuevo, de carácter estadístico, que la hace particularmente interesante; la hipótesis de semejanza utilizada por von Kármán encierra ideas de universalidad del comportamiento, que son fundamentales en las teorías actuales. En general, la justificación del uso de estas teorías está principalmente sustentada en la precisión con la que pueden reproducir datos experimentales.

La siguiente etapa en el desarrollo de teorías de turbulencia es marcada por las teorías estadísticas. Estas teorías están basadas principios de universalidad y autopreservación, y esto es, un enfoque radicalmente distinto al empleado en las teorías semiempíricas. La mentalidad con que es analizado el problema cambia drásticamente, se busca una concepción más clara del proceso en que se encuentran los flujos turbulentos. Un mejor entendimiento de los principios básicos que rigen el comportamiento de estos flujos usualmente conlleva a una mejor descripción fenomenológica y experimental del fenómeno. Sin embargo, esto es acompañado por una complejidad mucho mayor de las ecuaciones dinámicas. El problema es prácticamente imposible de resolver en su forma más general, por lo que es necesario sacrificar la aplicabilidad de la teoría. Este nuevo enfoque considera el caso más sencillo en el que existe homogeneidad e isotropía en el flujo. Este enfoque tampoco puede explicar lo que sucede en las cercanías de superficies sólidas, los experimentos deben ser diseñados cuidadosamente para verificar estas teorías.

Los experimentos son realizados usualmente en túneles de viento, donde la turbulencia generada puede ser considerada, para la mayoría de los casos prácticos, como homogénea e isotrópica. Las hipótesis de homogeneidad e isotropía hacen tratable el problema ya que reducen enormemente el número de variables. Aunque las hipótesis utilizadas no pueden ser deducidas de primeros principios, no presentan inconsistencias tan graves como era el caso de las teorías semiempíricas y han demostrado ser experimentalmente adecuadas.

Las variables usadas para describir el comportamiento también son cambiadas. Los conceptos de longitud de mezclado, distancia a la pared, conservación de vorticidad son sustituidos por los de funciones de correlación, isotropía, equilibrio estadístico, etc. Sin embargo, la suposición de que la velocidad y demás variables pueden ser separadas en una cantidad promedio y una fluctuante es compartida por ambos enfoques. Esta hipótesis está presente en todas las teorías de turbulencia, aunque la forma como es utilizada sea diferente. La relación entre estas dos componentes ha probado ser de vital importancia para el entendimiento del fenómeno. Intuitivamente se puede asociar la componente fluctuante de la velocidad como la velocidad para el movimiento de pequeña escala y la promedio con el de gran escala. La relación entre el movimiento de pequeña escala y el de gran escala es crucial, como se ha visto en los últimos capítulos. Experimentalmente se observa que ambas escalas son independientes, i. e., el movimiento de pequeña escala es independiente de las características promedio del flujo. Esta independencia es introducida como hipótesis extra en la teoría de turbulencia localmente isotrópica.

El número de Reynolds es un parámetro que representa el cociente entre fuerzas viscosas e inerciales, por lo que su valor numérico está directamente asociado con el "estado de turbulencia", si es pequeño se observa un flujo laminar, si es muy grande se observa turbulencia completamente desarrollada. Los valores intermedios son más difíciles de describir.

La hipótesis de autopreservación está asociada al concepto de equilibrio estadístico del flujo, en el que las variables conservan su forma en el espacio y en el tiempo. Esta hipótesis refleja un estado estacionario para las cantidades promedio, presentando un comportamiento universal. El concepto de universalidad es asociado con un escalamiento de las variables cuya forma es preservada. Estas hipótesis, independientemente de las ecuaciones dinámicas, han demostrado ser válidas experimentalmente, aunque no en forma global. Su existencia se postula para números de Reynolds suficientemente grandes.

La ecuación de von Kármán-Howarth es la ecuación básica para las teorías estadísticas. Como esta ecuación tiene dos incógnitas, llamadas funciones de correlación de orden dos y tres, es necesario introducir una hipótesis extra para obtener un sistema cerrado de ecuaciones. Este punto es de extrema importancia ya que indica que las soluciones obtenidas no pueden ser exactas en el sentido de satisfacer las consecuencias de las ecuaciones de Navier-Stokes, una de las cuales es la ecuación de von Kármán-Howarth. Esta ecuación es la segunda de una serie infinita de ecuaciones que relacionan todos los momentos de la velocidad. La primera ecuación de esta jerarquía de Friedmann-Keller es la ecuación de Reynolds, usada en las teorías semiempíricas. Esta hipótesis extra es expresada en términos de

la transferencia de energía entre las diferentes escalas del movimiento. Para formular esta hipótesis es necesario establecer un esquema que refleje el proceso de transferencia de energía, la forma del espectro de energía depende de esta hipótesis. Esta hipótesis sobre la naturaleza de la transferencia de energía es análoga a las hechas para el tensor de esfuerzos de Reynolds en las teorías semiempíricas.

Las teorías analíticas son un intento de obtener un sistema cerrado de ecuaciones utilizando ecuaciones de orden mayor y expresiones analíticas que relacionan los momentos de orden superior en términos de los de orden inferior. Estas teorías están elaboradas dentro del mismo espíritu.

Experimentalmente se ha observado que es más conveniente usar funciones de estructura en vez de funciones de correlación en cuanto a autopreservación se refiere. La teoría de turbulencia localmente isotrópica desarrollada por Kolmogorov conduce a la ley cinco tercios que es, probablemente, el resultado más famoso en teoría de la turbulencia. Su verificación experimental ha sido ampliamente estudiada y "confirmada". Las teorías estadísticas se reducen, en cierto límite, a los resultados obtenidos por Kolmogorov. Aunque esta no es una verificación, ya que no se ha probado que la teoría de Kolmogorov es la correcta, experimentalmente indica buena concordancia.

Usando los mismos conceptos aunque en un contexto diferente, Kraichnan ha desarrollado, en una extensa serie de artículos, una teoría de interacción directa entre las diferentes escalas del movimiento. La teoría de Kraichnan es equivalente, bajo ciertas condiciones, a la teoría de Kolmogorov.

Existen otras formas de analizar el problema, una de las

cuales consiste en aplicar las técnicas del grupo de renormalización. La idea básica es renormalizar la viscosidad. Los resultados en esta teoría dependen de la forma que se introduce para representar el proceso en que la energía es inyectada al sistema. Existen varios modelos, de entre los cuales se puede derivar la ley cinco tercios. De esta teoría pueden obtenerse otro tipo de resultados, como es el hecho de que no puede existir turbulencia para dimensiones menores que dos. Este enfoque es una de las principales maneras en que es atacado el problema en la actualidad.

APENDICE UNO

FORMULACION FUNCIONAL

I. Introduccion.

Se define la funcional característica asociada a la distribución de probabilidad conjunta $P_{M_1, M_2, \dots, M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, como su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \phi_{M_1, M_2, \dots, M_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \sum_{k=1}^n \theta_k u_k \right] P_{M_1, M_2, \dots, M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \\ &= \exp \left[i \sum_{k=1}^n \theta_k u_k \right]. \end{aligned}$$

A través de la transformada de Fourier inversa, se puede recuperar la distribución conjunta de probabilidad:

$$\begin{aligned} P_{M_1, M_2, \dots, M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \sum_{k=1}^n \theta_k u_k \right] \phi_{M_1, M_2, \dots, M_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n. \end{aligned}$$

Una generalización directa puede obtenerse para funciones \vec{u} vectoriales. Ahora se define la funcional:

$$\begin{aligned} \Phi[\vec{\theta}(\vec{x}, t)] &= \Phi[\theta_1(\vec{x}, t), \theta_2(\vec{x}, t), \theta_3(\vec{x}, t)] = \\ &= \exp \left[i \iiint_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \theta_k(\vec{x}, t) u_k(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \right]. \end{aligned}$$

que define en forma única al campo de velocidades. En efecto, si se conoce la funcional, es posible conocer todas las distribuciones de probabilidad de \vec{u} en los puntos (\vec{x}_i, t_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Para lograrlo, se sustituye $\vec{\theta}(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^n \theta_k \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) \delta(t - t_k)$ en la funcional:

$$\begin{aligned} S[\vec{\theta}(\vec{x}, t)] &= S\left[\sum_{k=1}^n \theta_k \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) \delta(t - t_k)\right] = \\ &= \exp\left[-i \int \int \int \sum_{k=1}^n \theta_k \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) \delta(t - t_k) \vec{u}\right] = \\ &= \exp\left[-i \left(\sum_{k=1}^n \vec{\theta}_k\right) \cdot \vec{u}\right] = \phi_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa, se recupera la distribución de probabilidad conjunta. Además, los momentos asociados al campo aleatorio de velocidades \vec{u} , pueden ser obtenidos a través de las "derivadas funcionales" de S . En efecto,

$$\begin{aligned} B_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= u_{i_1}(x_1) u_{i_2}(x_2) \dots u_{i_n}(x_n) = \\ &= (-i)^n \frac{\delta^n S[\vec{\theta}(\vec{x})]}{\delta \theta_{i_1}(x_1) \delta x_1 \dots \delta \theta_{i_n}(x_n) \delta x_n} \Big|_{\vec{\theta}(\vec{x})=0} \end{aligned}$$

Estas derivadas funcionales permiten obtener una serie de Taylor para la funcional, que es útil cuando se intenta resolver las ecuaciones.

La funcional que se ha estado manejando es conocida con el nombre de funcional característica espacio-temporal. Una

descripción menos completa se obtiene de la funcional espacial:

$$\mathbb{E} [\theta(\vec{x}), t] = \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \theta_k(\vec{x}, u_k(\vec{x}, t)) d\vec{x} \right],$$

esta funcional describe el campo de velocidades a un tiempo dado, (no es posible obtener momentos de la velocidad para tiempos distintos).

En el caso de un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) el campo de la presión puede obtenerse de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j),$$

por lo que el campo de velocidades provee una descripción completa del problema, y la funcional da todas las características estadísticas del flujo.

Se sabe que de las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad es posible obtener un sistema infinito de ecuaciones que relacionan los momentos de la distribución, además, como de la funcional se pueden obtener los momentos, se encontrarán las ecuaciones dinámicas que satisface la funcional. En particular, la funcional espacial satisface ecuaciones dinámicas, que son consecuencia directa de las de continuidad y Navier-Stokes. Por lo que, en principio, puede atacarse el problema de la misma forma en que se hizo en las teorías estadísticas. La condición inicial en este caso es $\mathbb{E}[\theta(\vec{x}), t_0] = \mathbb{E}_0[\theta(\vec{x})]$. Este desarrollo fue hecho por primera vez por Hopf (1952). En lo que sigue, se denotará el producto escalar en el espacio de funciones como

$$(\vec{\theta}, \vec{u}) = \int \vec{\theta}(M) \vec{u}(M) dM, \text{ donde } dM = d\vec{x} \text{ si } M = \vec{x} \text{ ó } d\vec{x}dt \text{ si } M = (\vec{x}, t). \text{ De esta forma:}$$

$$\mathbb{E} [\theta(\vec{x}), t] = \exp [i (\vec{\theta}, \vec{u})], \quad M = \vec{x}.$$

II. Ecuaciones.

Las ecuaciones de movimiento conducen a las ecuaciones que debe satisfacer la funcional característica, es decir, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes son suficientes para establecer un sistema cerrado de ecuaciones. Se obtienen las implicaciones de cada una de estas ecuaciones:

II.1 Ecuación de continuidad. Las implicaciones desarrolladas aquí, se aplican por igual a las funcionales características espacial y espacio-temporal. $\mathcal{E}[\hat{\mathcal{E}}(\vec{x})]$ denota la funcional característica.

Sea V un volumen finito delimitado por una frontera Γ suave y $\phi(\vec{x})$ una función escalar. Entonces

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \hat{\mathcal{U}} dV &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi u_i) - \phi \frac{\partial}{\partial x_i} u_i \right] dV = \\ &= - \int_{\Gamma} \phi \hat{\mathcal{U}} \cdot \hat{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} u_n \phi d\Gamma, \end{aligned}$$

donde \hat{n} es la normal interior y se utiliza el hecho de que la divergencia del campo de velocidades es cero. Dado que la componente normal u_n de la velocidad es cero sobre la superficie, esta última integral es cero y como el volumen es arbitrario

$$\nabla \phi \cdot \hat{\mathcal{U}} = 0,$$

por lo que $((\hat{\mathcal{E}} + \nabla \phi) \cdot \hat{\mathcal{U}}) = (\hat{\mathcal{E}} \cdot \hat{\mathcal{U}})$. De aquí se sigue que

$$\mathcal{E}[(\hat{\mathcal{E}} + \nabla \phi)] = \mathcal{E}[\hat{\mathcal{E}}].$$

Si la condición de frontera $u_n|_{\Gamma} = 0$ no es válida en una cierta porción $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, la conclusión seguirá siendo válida si se pide que ϕ permanezca constante en Γ_1 ; por la ecuación de

continuidad

$$\oint_{\Gamma} u_n d\Gamma = \int_{\Gamma_1} u_n d\Gamma + \int_{\Gamma-\Gamma_1} u_n d\Gamma = 0,$$

de donde

$$\int_{\Gamma_1} u_n d\Gamma = 0.$$

El caso de un volumen infinito se construye de forma similar, pidiendo que ϕ se haga cero fuera de un cierto volumen acotado y después pasar al límite de volumen infinito.

Cualquier campo vectorial se puede descomponer en una parte potencial $\nabla\phi(\vec{x})$, y una solenoidal $\vec{\theta}(\vec{x})$, con componente normal sobre una superficie Γ igual a cero; esto es

$$\vec{\theta}(\vec{x}) = \vec{\tilde{\theta}}(\vec{x}) + \nabla\phi(\vec{x}), \quad \theta_n(\vec{x}) \Big|_{\Gamma} = 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \theta_i(\vec{x}) = 0.$$

Con base en esto se puede asegurar que existe un operador lineal que asocia a cada campo vectorial $\vec{\theta}(\vec{x})$, definido en un volumen V , un campo solenoidal $\vec{\tilde{\theta}}(\vec{x})$, con la propiedad $\theta_n(\vec{x}) \Big|_{\Gamma} = 0$,

$$\mathcal{L} \vec{\theta}(\vec{x}) = \vec{\tilde{\theta}}(\vec{x}),$$

donde \mathcal{L} representa al operador lineal.

Por tanto

$$\mathcal{L} [\vec{\theta}(\vec{x})] = \mathcal{L} [\vec{\tilde{\theta}}(\vec{x}) + \nabla\phi(\vec{x})] =$$

$$= \exp \left[\int (\vec{\tilde{\theta}}(\vec{x}) + \nabla\phi(\vec{x})) \cdot \vec{u} \right] = \exp \left[\int (\vec{\tilde{\theta}} \cdot \vec{u}) \right] = \mathcal{L} [\vec{\tilde{\theta}}(\vec{x})],$$

de aquí que la funcional sea invariante ante la transformación lineal \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} [\vec{\theta}(\vec{x})] = \mathcal{L} [\vec{\theta}(\vec{x})], \quad (A1)$$

esta ecuación expresa que el campo de velocidades es solenoidal, i.e., es la forma funcional de la ecuación de continuidad. Si en esta ecuación se intercambian los papeles de $\vec{\theta}$ y \vec{u} resulta que

$$(\vec{\theta}, \vec{u}) = (\vec{\theta}, \vec{u}),$$

para cualquier \vec{u} no necesariamente solenoidal. Lo cual quiere decir que la funcional característica de cualquier campo \vec{u} que satisface (A1) es la misma que la de su componente solenoidal \vec{u} . Para encontrar una ecuación diferencial análoga a (A1). Partimos de que

$$D_j(M) \mathcal{L} = \overline{u_j(M) \exp[i(\vec{\theta}, \vec{u})]}$$

diferenciando nuevamente respecto a x_j , y sumando sobre j :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j(M) \exp[i(\vec{\theta}, \vec{u})]} \right] = \overline{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_j(\vec{x}, t) \right) \exp[i(\vec{\theta}, \vec{u})]} = 0,$$

ya que $(\vec{\theta}, \vec{u})$ no depende de x_j , y se trata de un campo solenoidal.

Luego entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_i(\vec{x}) \phi \right] = 0, \quad (A2)$$

que es una ecuación diferencial análoga a (A1).

II.2 Ecuaciones de Navier-Stokes. Ahora se obtendrán la ecuación que resulta de que el campo de velocidades satisface las ecuaciones de Navier-Stokes. Dado que aquí intervienen las derivadas parciales temporales, hay que tener cuidado en la diferencia entre las funcionales características espacial y espacio-temporal. Se analiza el caso para la funcional espacial.

Utilizando el hecho de que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\theta} \cdot \vec{u}) \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})] = (\vec{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})],$$

ya que $(\vec{\theta} \cdot \vec{u})$ no depende de \vec{x} , podemos evaluar la derivada paracial temporal respecto del tiempo de la funcional:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i (\vec{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})] = (\vec{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})]. \quad (A3)$$

Despejando de las ecuaciones de Navier-Stokes $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i (\vec{\theta} \cdot \left[- \frac{\partial}{\partial x_k} [\vec{u} u_k \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})]] - \nabla \frac{P}{\rho} \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})] + \nu \nabla^2 \vec{u} \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})] \right]).$$

Si introducimos la notación:

$$\Pi = \Pi(\vec{\theta}(\vec{x}); \vec{x}, t) = \frac{1}{\rho} p \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})],$$

y

$$\vec{D} = (D_1, D_2, D_3),$$

tenemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\vec{\theta} \cdot \left[i \frac{\partial}{\partial x_k} [D D_k \Phi] - i \nabla \Pi + \nu \nabla^2 D \Phi \right]). \quad (A4)$$

Las ecuaciones (A2) y (A4) forman un sistema para las funcionales Φ y Π . A partir de la ecuación (A3), se puede probar que tomando la divergencia obtenemos cero:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial t} u_k \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})] \right] = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{u})] = 0;$$

por tanto, utilizando la ecuación de continuidad,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} [DD_i \mathbb{S}] - \epsilon \nabla \Pi + \nu \nabla^2 D \mathbb{S} \right] = \\ = -\epsilon \nu \nabla^2 \Pi + \frac{\partial^2 D_i D_j \mathbb{S}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 \frac{\partial D_i \mathbb{S}}{\partial x_i} = 0, \end{aligned}$$

nuevamente, de la ecuación de continuidad, el último término se hace cero:

$$\nabla^2 \Pi = \frac{\partial^2 D_i D_j \mathbb{S}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Se ha obtenido una relación entre Π y \mathbb{S} , de la cual permite despejar Π y sustituirla en la ecuación (A4):

$$\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial t} = \left(\vec{\theta} \cdot \left[\epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} [DD_i \mathbb{S}] - \epsilon (\nabla^2)^{-1} \frac{\partial^2 D_i D_j \mathbb{S}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 D \mathbb{S} \right] \right),$$

donde $(\nabla^2)^{-1}$ representa el operador inverso de Laplace. Esta ecuación solo contiene a la funcional \mathbb{S} , y se conoce como ecuación de Hopf para la funcional característica espacial.

La condición inicial $\mathbb{S}_0[\vec{\theta}(\vec{x})]$ debe satisfacer la ecuación de continuidad: $\mathbb{S}_0[\vec{\theta}(\vec{x})] = \mathbb{S}_0[\vec{\theta}(\vec{x})]$. Si esto es así, $\mathbb{S}[\vec{\theta}(\vec{x}), t]$ la satisface para todo $t > t_0$. En efecto, si la funcional $\mathbb{S}_0[\vec{\theta}(\vec{x})]$ satisface la ecuación de continuidad, el campo de velocidades inicial es solenoidal, i.e., $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$; ahora, se sabe que la solución de la ecuación de Navier-Stokes para una condición inicial solenoidal es solenoidal para $t > t_0$ (Monin y Yaglom, 1975). Por tanto, la solución de la ecuación de Hopf tendrá la propiedad $\mathbb{S}[\vec{\theta}(\vec{x}), t] = \mathbb{S}[\vec{\theta}(\vec{x}), t]$ para $t > t_0$.

La ecuación de Hopf es lineal y de primer orden en el tiempo, por lo que en principio, puede ser usada para determinar

$\vec{\theta}(\vec{x}, t)$ a partir de la condición inicial $\vec{\theta}_0(\vec{x})$.

A este nivel hay que aclarar que la teoría de integración para ecuaciones diferenciales funcionales en espacios de dimensión infinita no está completamente establecida. Aún los criterios de existencia y unicidad no han sido desarrollados en forma general.

La linealidad de la ecuación de Hopf indica un principio de superposición para las funcionales. Si la condición inicial $\vec{\theta}_0(\vec{x})$ es una combinación lineal de funcionales $\vec{\theta}_0^{(r)}$, la funcional característica $\vec{\theta}(\vec{x}, t)$ puede ser escrita como una combinación lineal de funcionales $\vec{\theta}^{(r)}(\vec{x}, t)$ que son soluciones de la ecuación de Hopf con la condición inicial $\vec{\theta}_0^{(r)}$.

III. FORMULACION ESPECTRAL.

La formulación espectral tiene ciertas ventajas, como se ha visto en las teorías estadísticas. La descripción espectral de un campo (idealizado) estadísticamente homogéneo o localmente homogéneo se entiende a través de la transformada de Fourier de $\vec{\theta}$.

Como el argumento $\vec{\theta}(\vec{x})$ de la función característica es una función no aleatoria que puede escogerse prácticamente en forma arbitraria, puede tomarse como una integral de Fourier:

$$\vec{\theta}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int \exp[i\vec{k} \cdot \vec{x}] \vec{z}(\vec{k}) d\vec{k},$$

evaluada en todo el espacio \vec{k} . Fijándonos en funciones de este tipo, obtenemos la representación espectral si la transformamos en la funcional para la nueva variable independiente:

$$\vec{z} = \int \exp[-i\vec{k} \cdot \vec{x}] \vec{\theta}(\vec{x}) d\vec{x}.$$

La funcional espacial característica del campo de velocidades, en la representación espectral, está dada por:

$$\vec{\Psi}(\vec{z}(\vec{k}), t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[i\vec{k} \cdot \vec{x}] \vec{z}(\vec{k}) d\vec{k}, \quad t \geq 0$$

y por lo tanto

$$\vec{\Psi}(\vec{z}(\vec{k}), t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp\left[-i \int_0^t \vec{z}^*(\vec{k}) d\vec{z}(\vec{k}, t)\right].$$

La fórmula anterior sigue siendo válida para campos \vec{u} localmente isotrópicos, siempre que $\int \vec{\theta}(\vec{x}) d\vec{x} = 0$, i.e., $\vec{z}(0) = \vec{0}$. Tenemos;

$$D_j(\vec{x}) \vec{\Psi} = \int \exp[-i\vec{k} \cdot \vec{x}] D_j(\vec{k}) \vec{\Psi} d\vec{k},$$

de donde encontraremos la condición requerida por la ecuación de continuidad. Para ello, diferenciamos la ecuación anterior con respecto a x_j , sumamos sobre j , y usamos la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (D_j(\vec{x}) \vec{\Psi}) = 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (D_j(\vec{x}) \vec{\Psi}) &= \int \exp[-i\vec{k} \cdot \vec{x}] (-ik_j) D_j(\vec{k}) \vec{\Psi} d\vec{k} = \\ &= -i \int \exp[-i\vec{k} \cdot \vec{x}] \vec{k} \cdot \vec{\Psi} d\vec{k}. \end{aligned}$$

Si la transformada de Fourier de una función es cero, la función misma es cero:

$$\vec{k} \cdot \vec{\Psi} = 0$$

Esta es la ecuación equivalente a la de continuidad en la representación espectral de la formulación funcional.

Ahora derivaremos la forma espectral de la ecuación de Hopf. Utilizaremos la relación de Parseval (Synge y Schild, 1949) de la teoría de integrales de Fourier y la ecuación de continuidad. De acuerdo con la relación de Parseval, la transformada de Fourier no

afecta el producto escalar funcional:

$$(\vec{\theta}, f) = (\vec{z}, \mathcal{A}[f]) \quad (A5)$$

donde \vec{z} es la transformada de $\vec{\theta}$ y $\mathcal{A}[f]$ la de f . Utilizando la ecuación de Hopf llegamos a que:

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \left(\vec{z}, \mathcal{A} \left[i \frac{\partial \mathcal{D}_i \vec{\psi}}{\partial x_i} - i \nabla (\nabla^2)^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \vec{\psi}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 \vec{\psi} \right] \right)$$

Utilizando la ecuación (A5) podemos aplicar la transformada de Fourier y obtener:

$$\vec{A} \left[\nu \nabla^2 \vec{\psi} \right] = -\nu k^2 \vec{D}(\vec{k}) \psi,$$

$$\vec{A} \left[i \frac{\partial \mathcal{D}_i \vec{\psi}}{\partial x_i} \right] = k_i \int \mathcal{D}_i(\vec{k}') \vec{D}(\vec{k} - \vec{k}') \psi \, d\vec{k}',$$

y

$$\begin{aligned} \vec{A} \left[-i \nabla (\nabla^2)^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \vec{\psi}}{\partial x_i \partial x_j} \right] &= \\ &= -\vec{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \int \mathcal{D}_i(\vec{k}') \mathcal{D}_j(\vec{k} - \vec{k}') \psi \, d\vec{k}'. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} &= \iint \tilde{z}_i(\vec{k} + \vec{k}') k_j' \mathcal{D}_j(\vec{k}') \mathcal{D}_i(\vec{k}'') \psi \, d\vec{k}' d\vec{k}'' - \\ &\quad - \nu \int k^2 \tilde{z}_i(\vec{k}) \mathcal{D}_i(\vec{k}) \psi \, d\vec{k}, \end{aligned}$$

$$\text{donde } \tilde{z}_i = z_i - \frac{\vec{k} \cdot \vec{z}}{k^2} k_i.$$

Esta es la forma espectral de la ecuación de Hopf. Podemos sustituir $z_i(\vec{k})$ por $\tilde{z}_i(\vec{k})$ ya que $(z_i - \tilde{z}_i) \mathcal{D}_i \psi = \frac{\vec{k} \cdot \vec{z}}{k^2} k_i \mathcal{D}_i \psi = 0$ (esto es porque $\vec{k} \mathcal{D}(\vec{k}) \psi = 0$). Por tanto resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} &= \iint \tilde{z}_i(\vec{k} + \vec{k}') k_j' \mathcal{D}_j(\vec{k}') \mathcal{D}_i(\vec{k}'') \psi \, d\vec{k}' d\vec{k}'' - \\ &\quad - \nu \int k^2 \tilde{z}_i(\vec{k}) \mathcal{D}_i(\vec{k}) \psi \, d\vec{k}. \end{aligned}$$

IV. ECUACIONES PARA LA FUNCIONAL ESPACIO-TEMPORAL CARACTERISTICA.

Definimos las siguientes representaciones espectrales:

$$\vec{\Psi} [\vec{z}(\vec{k}, t)] = \vec{\Psi} [(2\pi)^{-3} \int \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x})] \vec{z}(\vec{k}, t) d\vec{k}],$$

conocida como representación de onda tridimensional.

$$\vec{\Psi}_2 [\vec{\eta}(\vec{x}, \omega)] = \vec{\Psi} [(2\pi)^{-1} \int \exp[i\omega t] \vec{\eta}(\vec{x}, \omega) d\omega],$$

conocida como representación de frecuencia y :

$$\vec{\Psi}_2 [\vec{z}(\vec{k}, \omega)] = \vec{\Psi} [(2\pi)^{-4} \int \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)] \vec{z}(\vec{k}, \omega) d\vec{k} d\omega],$$

conocida como la de onda-frecuencia o tetradimensional.

IV.1 Ecuación de continuidad. Es independiente del tiempo o de la frecuencia, por lo que $\vec{\Psi} [\vec{\theta}(\vec{x}, t)]$ y $\vec{\Psi}_2 [\vec{\theta}(\vec{x}, t)]$ presentan la misma forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [D_i(\vec{x}, t) \vec{\Psi} [\vec{\theta}(\vec{x}, t)]] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [D_i(\vec{x}, t) \vec{\Psi}_2 [\vec{\eta}(\vec{x}, t)]] = 0.$$

Para las otras dos representaciones, podemos escribir:

$$\vec{k} \cdot D(\vec{k}, t) \vec{\Psi} [\vec{z}(\vec{k}, t)] = 0,$$

$$\vec{k} \cdot D(\vec{k}, \omega) \vec{\Psi}_2 [\vec{z}(\vec{k}, \omega)] = 0.$$

IV.2 Ecuaciones de Navier-Stokes. Consideremos la ecuación :

$$\frac{\partial}{\partial t} [D(\vec{x}, t) \vec{\Psi}] = \nu \frac{\partial D D_i \vec{\Psi}}{\partial x_i} - \nu (\nabla^2)^{-1} \frac{\partial^2 D_i D_j \vec{\Psi}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 D \vec{\Psi},$$

podemos reducir el orden de esta ecuación definiendo la funcional

$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ de $\vec{\theta}(\vec{x}, t)$ como:

$$\vec{\theta}[\vec{\theta}(\vec{x}, t), \vec{x}, t] = D(\vec{x}, t) \otimes [\vec{\theta}(\vec{x}, t)],$$

tomando la componente j :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right] \theta_j = \epsilon \left[\delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}.$$

Las ecuaciones para las otras representaciones se obtienen en forma completamente análoga:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right] D_k(\vec{k}, t) \vec{\theta} = k_i \nabla_{k_j}^2(\vec{k}) \int D_i(\vec{k}', t) D_j(\vec{k} - \vec{k}', t) \vec{\theta} d\vec{k}',$$

$$(\epsilon \omega - \nu k^2) D_k(\vec{k}, \omega) \vec{\theta}_k =$$

$$= -\epsilon \left[\delta_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \int D_i(\vec{k}', \omega) D_j(\vec{k}, \omega - \omega') \vec{\theta}_k d\omega'$$

y

$$(\epsilon \omega - \nu k^2) D_k(\vec{k}, \omega) \vec{\theta}_k =$$

$$= -k_i \nabla_{k_j}^2 \int D_i(\vec{k}', \omega') D_j(\vec{k} - \vec{k}', \omega - \omega') \vec{\theta}_k d\vec{k}' d\omega',$$

$$\text{donde } \nabla_{k_j}^2 = \delta_{kj} - \frac{k_k k_j}{k^2}.$$

V. METODOS PARA RESOLVER LAS ECUACIONES.

Resolver la ecuación de Hopf resulta complicado porque la teoría de integración no ha sido completamente desarrollada. Ni siquiera existen teoremas generales sobre la existencia y unicidad de las soluciones. Ya se ha comentado que las ecuaciones de Navier-Stokes tampoco cuentan con teoremas generales sobre existencia y unicidad de soluciones. En este contexto está el trabajo de Foias (1970, 1971). Existen algunos métodos especiales para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales funcionales,

entre ellos se encuentran los trabajos de Tatarskii (1961) y Novikov (1961d). La teoría de integración en espacio de funciones de dimensión infinita tampoco está completa.

Sin embargo, existen algunos métodos aproximados para encontrar soluciones (Monin y Yaglom, 1975)

V.1 Solución en series.

El camino más sencillo es utilizar series de potencias para describir la funcional:

$$\vec{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{S}_n,$$

donde \vec{S} es la funcional espacial

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Hopf:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \vec{S}_n}{\partial t} = \epsilon (\vec{\partial} \cdot \frac{\partial \vec{D}_l}{\partial x_l} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{S}_n)) + \nu (\vec{\partial} \cdot \nabla^2 \vec{D} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{S}_n))$$

al igualar las funciones del mismo grado:

$$\frac{\partial \vec{S}_n}{\partial t} = \epsilon (\vec{\partial} \cdot \frac{\partial \vec{D}_l}{\partial x_l} \vec{S}_{n+1}) + \nu (\vec{\partial} \cdot \nabla^2 \vec{D} \vec{S}_n)$$

con $n = 1, 2, \dots$. De estas ecuaciones se observa que están mezclados los momentos de orden n y $n+1$, lo cual fue obtenido en la jerarquía de Friedan-Keller. Podemos utilizar otras series, por ejemplo:

$$\ln \vec{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{S}^n$$

que nos conduciría a otra serie de ecuaciones análogas. De manera alternativa podemos proponer series para \vec{D} .

V.2 Aproximación a orden cero en el número de Reynolds.

Si se escalan longitudes y velocidades con se obtiene una ecuación de Hopf con variables adimensionales, el término con segunda derivada funcional está multiplicado por el número de Reynolds R . Este es el motivo para presentar la solución como una serie de potencias en el parámetro R . Si se sustituye esta serie en la ecuación de Hopf y se igualan a cero los coeficientes de R^n se obtiene una serie de ecuaciones. La ecuación de orden n contiene sólo términos de orden menor de las potencias de R . Es por esto que el sistema de ecuaciones puede irse resolviendo de órdenes menores a mayores.

Si se suma la serie tendremos una solución exacta cuya convergencia depende de R . La primera ecuación de esta serie se obtiene al eliminar el término de la segunda derivada en la ecuación de Hopf. Para construir esta solución no se necesita pasar a variables adimensionales, simplemente se propone:

$$\vec{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{z}_n,$$

donde \vec{z}_n es un término del orden de R^n . La simplicidad de las ecuaciones en la formulación funcional permite formular el caso más general en el que se puede incluir una fuerza externa \vec{F} (Monin & Yaglom, 1975).

V.3 Integración funcional.

Al igual que en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el uso de la transformada de Fourier simplifica las ecuaciones. En análisis funcional se define la transformada de Fourier como:

$$\mathbb{E} [\vec{\theta}(M)] = \int \exp[i(\vec{\theta} \cdot \vec{F})] \Psi [\vec{F}(M)] d\mu[\vec{F}(M)],$$

donde μ es la medida utilizada en el espacio infinitamente dimensional de funciones.

La medida más importante es la llamada de Green y es utilizada en la solución de ecuaciones de evolución de la forma:

$$\frac{\partial \mathbb{E} [\vec{\theta}(\vec{x}), t]}{\partial t} = \mathcal{L} \mathbb{E} [\vec{\theta}(\vec{x}), t],$$

con \mathcal{L} operador lineal.

La ecuación de Hopf es una ecuación de evolución

$$\mathcal{L}_{\vec{\theta}} = i(\vec{\theta}, A[-D\vec{\theta}]),$$

donde $A[\vec{u}]$ es el operador integro-diferencial de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = A[\vec{u}],$$

donde la presión se expresa como una función de la velocidad Rosen (1960) y Tatarskii (1962b) utilizaron esta medida de Green, y obtuvieron expresiones para la solución de Hopf en términos de $\mathbb{E}_{\vec{\theta}}$. Se debe aclarar que la justificación precisa de estas fórmulas y su significado no está completamente terminado y solo indican posibles direcciones de investigación.

BIBLIOGRAFIA

- Batchelor, G. K. (1953) The theory of homogeneous turbulence, Cambridge University Press, Cambridge; (1967) An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Batimelli, G. (1986) On the history of the Statistical theories of turbulence, *Mem. 3a. Esc. Mex Fis. Est.*, 53-548. *Rev. Mex. Fis.*
- Beran, M. J. (1968) Statistical Continuum Theories. Interscience Publ., New York, London, Sidney.
- Betchov, R. (1966) Introduction to the Kraichnan theory of turbulence. *Dynamics of fluids and plasmas*. (S. I. Pai, ed.), Academic Press, New York, 215-237; (1967) Review of Kraichnan's theory of turbulence, *Phys. Fluids*, 10 (supplement), S17-524.
- Bird, R. B., W. E. Stewart y E. N. Lightfoot (1960), *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, New York.
- Boussinesq, J. (1877) Théorie de l'écoulement tourbillant, *Mém. Prés. Acad. Sci.*, XXIII, 46, Paris.
- Cramer, H., Mathematical methods of statistics, Princeton, 1946.
- Currie, I. G. (1974) Fundamental Mechanics of fluids, Mc Graw-Hill, New York.
- De Groot, S. R. y P. Mazur (1962), *Non-equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam.

- Ellison, T. H. (1962) The universal small scale spectrum of turbulence at high Reynolds number, Mécanique de la turbulence, (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Ed. CNRS, 113-121.
- Foias, C., (1970) Ergodic problems in functional spaces related to Navier-Stokes equations, *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics* (Tokio, abril 1969), University of Tokio Press, 290-304; (1971) Solutions statistiques des équations d'évolutions non linéaires. Problems in non-linear Analysis, (CIME, Varenna, agosto 1970) Edizione Cremonese, Roma, 131-188.
- Friedmann, M. B. y J. B. Keller (1924) Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, *Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech.*, p 395.
- Gibson, C.H. y W. H. Schwarz (1963b) The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields. *J. Fluid Mech.*, 10, No. 3, 365-384.
- Goldstein, S. (1951) On the law of decay of homogeneous isotropic turbulence and the theories of the equilibrium and similarity spectra, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 47, No. 3, 554-574.
- Heisenberg, W. (1948a) Zur Statistischen Theorie der Turbulenz, *Z. Physik*, 124, No. 7, 628-657.
- Hinze, J. O. (1975) Turbulence, Mc Graw-Hill, New York.
- Hopf, E. (1937) Ergodentheorie, *Ergebn. Math., Berlin*, 5, 63-151.
- Howells, I. D. (1960) An approximate equation for the spectrum of a conserved scalar quantity in a turbulent fluid, *J.*

Fluid Mech., 9, No. 1, 104-106.

Jahnke, E., F. Emde y F. Lösch (1960) Tables of higher Functions, Mc Graw-Hill, New York.

Kármán, T. von, (1930) Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, *Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, Math. Phys.*, K1., 58-76; (1948a) Sur la théorie statistique de la turbulence, *C. r. Acad. Sci.*, 226, No. 26, 2108-2114; (1948b) Progress in the statistical theory of turbulence, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 34, No. 11, 530-539. Kármán, T. y L. Howarth (1938) On the statistical theory of turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A164, No. 917, 192-215.

Khintchine, A (1933) Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, *Math. Ann.* 109, 604-615.

Kogut, J. y K. Wilson (1974), *Phys. Report* 12C, 75.

Kolmogorov, A.N. (1933), Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin.

Kolmogorov, A.N., (1941a) Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30, No. 4, 299-303; (1962a) Refined description on the Local Structure of Turbulence in an Incompressible Viscous Fluid at High Reynolds Numbers. *Mécanique de la Turbulence* (Coll. Intern. du CNRS à Marseille). Ed. CNRS, Paris, 447-458; (1962b) A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 13, No. 1, 82-85.

Kovaznay, L. S. G. (1948) Spectrum of locally isotropic

- turbulence, *J. Aeronaut. Sci.* 15, No. 12, 745-753.
- Kraichnan, R. H. (1959) The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 8, No. 4, 497-543; (1961) Dynamics of nonlinear stochastic systems, *J. Math. Phys.*, 2, No. 1, 124-148; (1962) The closure problem of turbulence theory, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13, (Hydrodynamic stability), 199-225; (1964c) Kolmogorov's hypothesis and Eulerian turbulence theory, *Phys. Fluids*, 7, No. 11, 1723-1734; (1965b) Preliminary calculation of the Kolmogorov turbulence spectrum, *Phys. Fluids*, 8, No. 5, 995-997; (1966a) Isotropic turbulence and inertial-range structure, *Phys. Fluids*, 9, No. 9, 1728-1752; (1966b) Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence, *Phys. Fluids*, 9, No. 10, 1937-1943.
- Landau, L. D. & E. M. Lifshitz (1959) Fluid Mechanics. Pergamon Press, London.
- Lee, D. A. (1965) Spectrum of homogeneous turbulence in the final stage of decay, *Phys. Fluids*, 10, No. 10, 1911-1913.
- Leith, C. E. (1967) Diffusion approximation to inertial energy transfer in isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, 10, No. 7, 1409-1416.
- Lin, C. C. (1948) Note on the law of decay of isotropic turbulence, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 34, No. 4, 230-233.
- MacPhail, D. C. (1940) An experimental verification of the isotropy of turbulence produced by a grid, *J. Aeronaut.*

Martin, P. C. y C. De Dominicis (1978), The long distance behavior of randomly stirred fluids, *Prog. Theor. Phys.*, (Suplemento), No. 64, 108.

Milne-Thomson, L. M. (1968) Theoretical Hidrodynamics, MacMillan Press, London.

Millionschikov, M. D. (1941a) Theory of homogeneous isotropic turbulence in a viscous incompressible fluid, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 22, No. 5, 611-614; (1941b) Theory of homogeneous isotropic turbulence, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. i zgeofiz.*, 5, No. 4-5, 433-446.

Mills, R. R. Jr., A. L. Kistler, V. O'Brien y S. Corrsin (1958) Turbulence and temperature fluctuations behind a heated grid, *Nat. Adv. Com. Aeronaut. Tech. Note* 4288, 1-67.

Monin, A. S. y Yaglom A. M. (1975) Statistical Fluid Mechanics, vol. 1 y 2, The MIT Press, Cambridge.

Novikov, E. A., (1961d) Solution of some equations with functional derivatives, *Usp. Mat. Nauk*, 16, No. 2, 98.

O'Brien, E. E. (1968) Qualitative test of the direct interaction hypothesis, *Phys. Fluids*, 6, No. 7, 1016-1020.

Obukhov (1941a) Spectral energy distribution in a turbulent flow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32, No. 1, 22-24; (1941b) Spectral energy distribution in a turbulent flow, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. i Geofiz*, 5, No. 4/5, 453-466; (1962a) Some specific features of atmospheric turbulence, *J. Geophys. Res.* 67, No. 8, 3011-3014; (1962b)

- Some specific features of atmospheric turbulence, *J. Fluid Mech.*, **13**, No. 1, 77-81.
- Ogura, Y. y K. Miyakoda (1953) Some remarks on the "turbulent element model" of the isotropic turbulence, *J. Meteorol. Soc. Japan*, **31**, No. 26, 2108-2114.
- Orzag, S. A. (1970) Analytical theories of turbulence, *J. Fluid Mech.*, **41**, No. 2, 363-386.
- Phytian, R. (1969) Self-consistent perturbation series for stationary homogeneous turbulence, *J. Phys.*, A (Gen. Phys.), **2**, No. 2, 181-192.
- Prandtl, L. (1925) Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Zs. angew. Math. Mech.*, **5**, No. 2, 136-139; (1927) Über den Reibungswiderstand strömender Luft, *Ergbn. Aerodyn. Versuchsanst.*, Göttingen, **3**, 1-5; (1942) Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz. *ZAMM* **22**, 241-243.
- Proudman, I., (1951) A comparison of Heisenberg's spectrum of turbulence with experiment, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47**, No. 1, 158-176; (1962) On Kraichnan's theory of turbulence, *Mécanique de la Turbulence*, (Coll. Inter. du CNRS à Marseille), Paris, Ed. CNRS, 107-112.
- Proudman, I. y W. H. Reid (1954) On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A247**, No. 926, 163-189.
- Reichardt, H. (1938) Messungen turbulenter Schwankungen, *Naturwissenschaften* **25**, No 24/25, 404-408; (1940) Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten, *Zs. angew. Math. Mech.*, **20**, No. 6, 297-328; (1951)

Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Zs. angew. Math. Mech.*, 31, No. 7, 208-219.

Richardson, L. F. (1926) Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. Roy. Soc.*, A110, No. 756, 709-737; (1929) A search for the law of atmospheric diffusion, *Brit. Phys. frein. Atmosph.*, 15, No. 1, 24-29.

Reynolds, O. (1894) On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 180, 123-161.

Rosen, G. (1960) Turbulence theory and functional integration. I, II, *Phys. Fluids*, 3, No. 4, 519-524, 523-528.

Ruelle, D. y F. Takens (1970), On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, 20, 167; erratum 23 (1971), 343.

Schlichting, H. (1968) Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill, New York.

Sokolnikoff, I. S. (1956) Mathematical Theory of elasticity, Mc Graw-Hill, New York.

Stewart, R. W. (1951) Triple velocity correlations in isotropic turbulence, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 47, No. 1, 146-147.

Stewart, R.W., y A.A. Townsend, (1951) Similarity and self-preservation in isotropic turbulence, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A243, No. 867, 359-386.

Synge, J. L. y A. Schild (1949) Tensor Calculus, Dover, Canada.

Tatarskii, V. I. (1961) On the primitive functional and its application to the integration of certain equations involving functional derivatives, *Usp. Mat. Nauk*, 16, No.

- 4, 100; (1962b) Application of quantum field theory to the problem of the decay of homogeneous turbulence, *Zh. Exper Teor. Fiz*, **42**, No. 5, 1386-1396.
- Tatsumi, T. (1957a) The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence, *Proc. Roy. Soc., A* **239**, No. 1216, 16-45.
- Taylor, G. I. (1921) Diffusion by continuous movements, *Proc. London Math. Soc. (2)*, **20**, 196-211; (1932) The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. *Proc. Roy. Soc. London, A* **135**, 685-705; (1935a) Statistical theory of turbulence, I-III, *Proc. Roy. Soc., A151*, No. 874, 421-464; (1935b) Statistical theory of turbulence, IV, Diffusion in a turbulent air stream, *Proc. Roy. Soc. A151*, No. 874, 465-478; (1935c) Distribution of velocity and temperature between concentric rotating cylinders, *Proc. Roy. Soc., A151*, No. 874, 494-512; (1936a) Statistical theory of turbulence, V, Effect of turbulence on boundary layer, *Proc. Roy. Soc., A156*, No. 889, 307-317.
- Townsend, A.A. (1947) The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **43**, No. 4, 560-570; (1951) On the fine scale structure of turbulence, *Proc. Roy. Soc., A208*, No. 1095, 534-542.
- Tsvang, L.R., S. L. Zubkovskii, V. N. Ivanov, F. A. Klinov, y T. K. Kravchenko, (1963) Measurements of some turbulence properties in the lowest 300-meters of the atmosphere, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz.*, No. 5, 769-782.

- Uberoi, M.S. (1963) Energy transfer in isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, **6**, No. 8, 1048-1056.
- Van Atta, C.W. y W.Y. Chen (1968) Correlation measurements in grid turbulence using digital harmonic analysis, *J. Fluid Mech.*, **34**, No. 3, 497-515; (1969a) Measurements of spectral energy in grid turbulence, *J. Fluid Mech.*, **38**, No. 4, 743-763; (1969b) Correlation measurements in turbulence using digital Fourier analysis, *Phys Fluids*, **12**, Supplement II, II-264-II269; (1970) Structure functions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean, *J. Fluid Mech.*, **44**, No.1, 145-159.
- Weizsäcker, C. F. von, (1948) Das spektrum der turbulenz bei grossen Reynolds' schen, *Zahlen*, *Z. Physik*, **124**, 614-627.
- Wyld, H. W. (1961) Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid, *Ann. Phys.*, **14**, No. 2, 143-165.