



24.34

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

**IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL
DE DOS ALGORITMOS SUPERCONVERGENTES,
DERIVADOS DE LA
TEORIA ALGEBRAICA DE LOS METODOS NUMERICOS,
PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
DE SEGUNDO ORDEN**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A:
JUAN DIEGO MARTINEZ NAJERA

MEXICO, D. F. AGOSTO DE 1987.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PROLOGO.

El presente trabajo tiene una estructura que esta dirigida hacia la presentación de dos algoritmos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, de alta convergencia, hacia su implementación y su aplicación a ecuaciones de este tipo.

Hemos incluido un capítulo 0 para la presentación de motivaciones físicas, bajo las cuales surge la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales. Al igual que los métodos analíticos, los métodos numéricos presentan una opción para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo en los primeros, dada una ecuación diferencial con dominio de definición y condiciones de frontera no suficientemente regulares, obtener su solución requiere de técnicas matemáticas sofisticadas. Mientras que en los segundos tales como las Diferencias Finitas, Elemento Finito, etc. se requiere de conocimientos mínimos, además de ser aplicables a problemas con geometrías de dominio y condiciones a la frontera arbitrarios.

De este modo en la primera parte del trabajo hemos incluido un capítulo para presentar motivaciones físicas para la solución de ecuaciones diferenciales, mientras que de los capítulos I al III se presenta un resumen de la teoría básica de los métodos implementados; del capítulo IV al VI aplicamos la teoría básica a la construcción de ecuaciones explícitas para los algoritmos implementados, finalmente en el capítulo VII aplicamos los algoritmos a ecuaciones específicas para efectuar la comparación en el orden del error predicho con el obtenido en forma real. Por último hemos incluido tres apéndices los cuales muestran, en forma documentada los algoritmos en computadora.

El autor del presente trabajo quiere agradecer al Dr. Ismael Herrera Revilla por su estimable ayuda, para la comprensión de los

puntos claves de su difícil teoría, así como su prestancia para darme el ambiente necesario para la realización de mi trabajo. También deseo agradecer al Dr. Gonzalo Alduncin G. por sus críticas constructivas para el mejor desarrollo de mi trabajo de tesis. Agradezco también al Dr. Jorge Carrera Bolaños así como a la Maestra Lucía Chargoy Espínola por la paciente revisión y opiniones acerca del presente trabajo. Finalmente agradezco al Mat. José López Estrada por su atenta revisión de la tesis.

CONTENIDO.

prólogo	i
contenido	3i
introducción general	1
CAPITULO 0.	
MOTIVACIONES FISICAS.	
introducción	3
descripción del movimiento	4
tres resultados de cálculo	5
leyes de balance	12
leyes de balance en mecánica	13
balance de masa	14
conservación de la masa	15
transporte con difusión	16
referencias para el capítulo 0	21
CAPITULO I.	
CONSIDERACIONES INICIALES DE LA TEORIA ALGEBRAICA	
introducción	22
punto de inicio	22
objetivo de la teoría algebraica	25
CAPITULO II.	
FORMULAS DE GREEN EN CAMPOS CONTINUOS	
introducción	31
nociones preliminares y notación	33
relaciones entre subespacios nulos y operadores valuados en funciones	34
descomposición de operadores: un teorema de representación ...	39

operadores de frontera y fórmulas de Green 45

CAPITULO III.

FORMULAS DE GREEN EN CAMPOS DISCONTINUOS

introducción 49
fórmulas de Green para operadores diferenciales definidos
sobre la unión de regiones adyacentes 49

CAPITULO IV.

FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIOS

introducción 55
fórmulas de Green para operadores diferenciales lineales
ordinarios 55
alternativas para la obtención de la información, de la
fórmula de Green, para el operador diferencial ordinario 63

CAPITULO V.

ALGORITMOS DE ALTA CONVERGENCIA

introducción 68
resumen preliminar 68
fórmula de Green para la ecuación diferencial lineal
ordinaria de 2o. orden 69
derivación de dos algoritmos de alta convergencia en
diferencias finitas 74
discusión de los errores surgidos por teoría, por
redondeo y aritmética de computadora 79

CAPITULO VI.

FUNCIONES DE PESO Y ECUACIONES EXPLICITAS

introducción	85
construcción de las funciones de peso	86
ecuaciones explícitas para los algoritmos	86
algoritmos implementados	96

CAPITULO VII.

EXPERIMENTACION NUMERICA

introducción.....	98
ecuaciones que se resolvieron	98
critérios de error utilizados	101
resultados obtenidos	104
conclusiones	112
resultados gráficos	116

APENDICES.

a: listado para el algoritmo 1	155
b: listado para el algoritmo 2	168
c: sustituciones para el programa principal	178
referencias para los capítulos 1-7	184

INTRODUCCION.

El objetivo del presente trabajo de tesis es la implementación computacional de dos algoritmos de alta convergencia para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, derivados de la *Teoría Algebraica de los Métodos Numéricos* presentada por Ismael Herrera [3-4]. Así como la aplicación de los algoritmos implementados a la solución numérica de ecuaciones de dicho tipo; como lo es la ecuación de transporte y difusión en estado estacionario y en una dimensión. De la experimentación numérica se concluye que los ordenes de aproximación teóricos son conservadores.

La tesis se divide en las siguientes partes en general:

EXPOSICION DE LA TEORIA.

- + FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES DEFINIDOS EN CAMPOS CONTINUOS.
- + FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES DEFINIDOS EN CAMPOS DISCONTINUOS.
- + FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIOS EN CAMPOS DISCONTINUOS.
- + FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIOS DE 2o. ORDEN.

APLICACION NUMERICA Y COMPUTACIONAL.

- + IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL DE DOS ALGORITMOS DERIVADOS, PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE 2o. ORDEN. EL PRIMERO DA LA INFORMACION ACERCA DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL ASI COMO DE SU DERIVADA, MIENTRAS QUE EL SEGUNDO DA INFORMACION SOLO ACERCA DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL.

APLICACION DE LOS ALGORITMOS IMPLEMENTADOS.

- + APLICACION DE LOS ALGORITMOS IMPLEMENTADOS A LA ECUACION transporte y difusión EN ESTADO ESTACIONARIO Y EN UNA DIMENSION; ASI COMO A OTRAS ECUACIONES PIVOTES CUYA SOLUCION ANALITICA CONOCEMOS.**
- + ANALISIS DEL ERROR, RESULTADOS OBTENIDOS.**
- + CONCLUSIONES.**

En la parte inicial del trabajo se incluye una recompilación documental de la Teoría Algebraica mencionada de la cual se derivan los algoritmos que se implementan en computadora; esto esta dado del Capítulo II al V. Mientras que en el Capítulo VI se desarrollan las ecuaciones explícitas de los algoritmos, tal y como son implementados en computadora. Finalmente el Capítulo VII contituye la parte contributiva de mi trabajo de tesis, en este Capítulo se habla de la implementación de los algoritmos en computadora asi como de su aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden; se tiene una sección de comparaciones de los errores predichos y observados y las conclusiones de estas comparaciones.

A Catalina y Esteban
mis padres
a quienes agradezco
todo lo que pueda ser.

A Lupita, Inès e Isabel
mi esposa y mis pequeñas gemelitas
quienes dan calor
a mi vida.

MOTIVACIONES FISICAS

● INTRODUCCION.

La modelación matemática de sistemas físicos es una importantísima rama del que hacer científico contemporáneo. Constituye una amplia y poderosa metodología en la comprensión profunda de los fenómenos. Naturalmente su ejercicio requiere de un amplio conocimiento, no solo de matemáticas, sino de una buena intuición física.

Por lo general, al modelar un sistema físico determinado, se obtienen un conjunto de ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) que gobiernan su comportamiento. A estas ecuaciones de campo, se les dan condiciones iniciales y/o a la frontera adicionales, para completar la formulación del problema de interés, asociado al sistema físico.

También es general el hecho, de que la solución de las ecuaciones que modelan fenómenos físicos, son difíciles o imposibles de obtener, mediante métodos analíticos. Por otra parte, hoy en día hay una forma alternativa para la solución de ecuaciones diferenciales, la que esta dada por los métodos numéricos los cuales realizamos en computadora.

De este modo, hemos dedicado este primer Capítulo a una exposición muy general de lo que es la modelación matemática de sistemas físicos; haremos una digresión hacia las ecuaciones de transporte y difusión de masa, mencionaremos la dificultad de resolver, analíticamente, estas ecuaciones y las posibilidades que brindan los métodos computacionales.

● DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO.

A los elementos de un sistema macroscópico (también llamado continuo) se les llama partículas. Consideremos solo conjuntos de partículas que poseen algunas características especiales que llamaremos cuerpos. Sea \mathcal{B} un cuerpo. Entonces en cualquier tiempo cada partícula $X \in \mathcal{B}$ ocupa una posición en el espacio físico \mathbb{R}^3 . Esto define para cada t , una función:

$$p(t): \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (0.1)$$

y la coordenadas x de la partícula X están dadas en el tiempo t por:

$$x = p(X, t) \quad (0.2)$$

En general, las propiedades de los sistemas macroscópicos son intensivas y/o extensivas. Una propiedad intensiva π , está definida para cada tiempo y para cada partícula de \mathcal{B} ; esta puede ser escalar o vectorial.

Las propiedades intensivas se pueden describir de dos maneras diferentes; en términos Lagrangianos o Eulerianos. Tomemos una propiedad π y sea $\phi(X, t)$ el valor de ésta en la partícula $X \in \mathcal{B}$ en el tiempo t . Entonces la función $\phi(X, t)$ es la descripción Lagrangiana de la propiedad π (ϕ puede ser escalar o vector). Similarmente sean x las coordenadas de un conjunto de partículas en \mathbb{R}^3 y sea $\varphi(x, t)$ el valor de la propiedad π en el punto $x \in \mathbb{R}^3$ en el tiempo t . A la función $\varphi(x, t)$ se le llama descripción Euleriana de la propiedad π . De estas definiciones ambas descripciones están relacionadas mediante:

$$\phi(X, t) = \varphi(p(X, t), t) \quad (0.3)$$

La velocidad en términos Lagrangianos se define por:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{p}_t(\mathbf{X}, t) \quad (0.4)$$

y si \mathbf{v} es la descripción Euleriana de la velocidad entonces por (0.3), tenemos lo siguiente:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{X}, t), t) \quad (0.5)$$

Para derivar una función ϕ en el tiempo se mantiene fija a la partícula, mientras que para derivar a una función ϕ se mantiene fijo el punto en el espacio, entonces de (0.3):

$$\begin{aligned} \phi_t(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \phi(\mathbf{p}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(\mathbf{p}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \\ &= \phi_t(\mathbf{p}(\mathbf{X}, t), t) + \mathbf{p}_t(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{p}(\mathbf{X}, t), t) \end{aligned} \quad (0.6)$$

Si denotamos por $\partial \phi / \partial t$ la descripción Euleriana de la derivada, entonces (0.6):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \quad (0.7)$$

● TRES RESULTADOS DE CALCULO.

En esta sección se presentan resultados de cálculo que son importantes en la modelación matemática de sistemas macroscópicos.

El primero de ellos es el Teorema de Green.

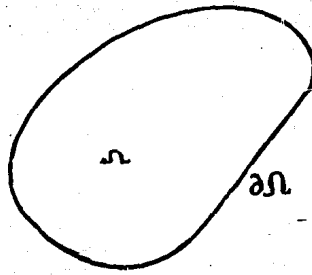


FIGURA 0.1

Si $u = u(x_1, \dots, x_n)$ es una función escalar, bajo ciertas condiciones sobre u (ver ref. [16]) y Ω es una región conexa (fig.0.1) entonces se satisface :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) n_j dx \quad (0.8)$$

donde la primera dx se entiende que es un elemento de volumen en Ω y la segunda dx como un elemento de superficie sobre $\partial\Omega$. La divergencia de una función vectorial $u(\mathbf{x})$ se define por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot u$$

aplicando (0.8) tenemos que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n dx \quad (0.9)$$

que constituye el primer resultado.

Para presentar el segundo resultado, consideremos una región Ω que contiene partículas, supongamos que $\Omega = \Omega(t)$, ver figura 0.2.

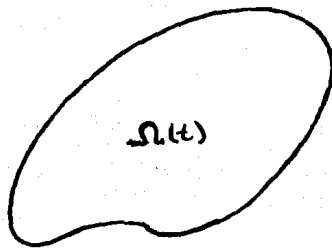


FIGURA 0.2

Consideremos una propiedad extensiva $I(t)$ definida en una región Ω , que varía con t , como:

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} f(x,t) dx \quad (0.10)$$

en donde $f(x,t)$ es una función del espacio y del tiempo.

Es de suma importancia saber como varía $I(t)$ con respecto a t la respuesta es la siguiente:

$$\frac{dI(t)}{dt} = I'(t) = \int_{\Omega(t)} f_t(x,t) dx + \int_{\partial\Omega(t)} f(x,t) v(x,t) \cdot n dx \quad (0.11)$$

donde la interpretación física de este resultado es el siguiente: la primera integral nos da cuenta de la variación de f , dentro de Ω y con respecto a t ; mientras que la segunda nos informa del cambio de la propiedad I en la frontera, esto es del intercambio con el exterior de Ω , aquí v es la velocidad con que se mueve la frontera de Ω .

Este resultado es válido solo si f y su derivada son continuas en Ω . Sin embargo, si tenemos una superficie $\Sigma \subset \Omega$, en donde f y/o su derivada son discontinuas entonces tenemos lo siguiente:

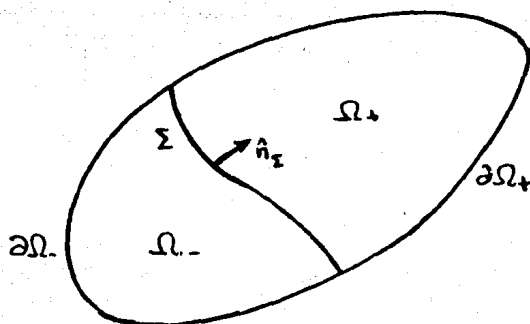


FIGURA 0.3. Aquí tenemos que:

$$\Omega = \Omega_- + \Omega_+ ; \partial\Omega_- = \partial\Omega_- + \Sigma$$

$$\partial\Omega_+ = \partial\Omega_+ + \Sigma.$$

Tomemos como referencia a la figura 0.3 y apliquemos el resultado anterior a cada región por separado, entonces tenemos que:

$$I'_+ = \int_{\Omega_+} f_t(\mathbf{x}, t) dx + \int_{\partial\Omega_+} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_+ \cdot \mathbf{n} dx - \int_{\Sigma} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} dx \quad (0.12)$$

$$I'_- = \int_{\Omega_-} f_t(\mathbf{x}, t) dx + \int_{\partial\Omega_-} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} dx + \int_{\Sigma} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} dx \quad (0.12')$$

si sumamos las dos ecuaciones anteriores:

$$I'(t) = \int_{\Omega} f_t(\mathbf{x}, t) dx + \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx - \int_{\Sigma} [f(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} dx \quad (0.13)$$

donde hemos tomado:

$$[f] = f_+ - f_-$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia tenemos lo siguiente:

$$I'(t) = \int_{\Omega} (f_t + \nabla \cdot f \mathbf{v}) dx - \int_{\Sigma} [f] \mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} dx \quad (0.14)$$

El tercer resultado que queremos presentar es el Lema de Dubois-Reymond.

Lema: Supongamos que $f(x)$ es continua en Ω y si para toda región $R \subset \Omega$ se tiene que:

$$\int_R f(x) dx = 0$$

entonces $f(x) = 0$ en Ω .

Una extensión del Lema anterior es que si una función $f(x)$ es continua en Ω , excepto en una superficie Σ a través de la cual f puede tener discontinuidades de salto, y además:

$$\int_R f(x) dx + \int_{\Sigma(R)} [f(x)] dx = 0 \quad (0.15)$$

para toda subregión R de Ω (donde $\Sigma(R)$ es la parte de Σ contenida en R), entonces:

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (0.16)$$

y

$$[f(x)] = 0 \quad \forall x \in \Sigma \quad (0.16')$$

Con los resultados del Cálculo que hemos presentado, podemos empezar un primer análisis de la evolución, en el tiempo, de las propiedades extensivas en sistemas macroscópicos.

Dada cualquier propiedad intensiva π , podemos definir una propiedad extensiva $E(t)$, mediante:

$$E(t) = \int_{B(t)} \varphi(x, t) dx \quad (0.17)$$

donde φ es la descripción Euleriana de π y $B(t)$ es la región ocupada por el cuerpo \mathcal{B} en el tiempo t . Por la relación (0.3) es posible expresar a la propiedad $E(t)$ como una integral sobre las partículas materiales del cuerpo \mathcal{B} , mediante:

$$E(t) = \int_{B(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dx = \int_{\mathcal{B}} \phi(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \quad (0.18)$$

en donde J es el determinante de la matriz Jacobiana J , que esta dada como:

$$J_{i,j}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} \quad (0.19)$$

usando los resultados de las ecuaciones (0.9) y (0.11), tenemos que el cambio de E con respecto a t esta dada por:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{B(t)} \varphi_t(\mathbf{x}, t) dx + \int_{\partial B(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dx = \\ &= \int_{B(t)} \{ \varphi_t + \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} \} dx = \int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} \right\} dx \end{aligned} \quad (0.20)$$

en donde en la última integral se usó la ecuación (0.7).

Esta última ecuación tiene una limitación importante; aquí se supone que la representación Euleriana (φ) de π y su derivada son continuas. Sin embargo hay aplicaciones importantes en que estas representaciones pueden ser discontinuas. De este modo se tiene la motivación de derivar ecuaciones en en donde la representación Euleriana (o Lagrangiana) de π sea discontinua.

Consideremos un cuerpo \mathcal{B} que ocupa una región $B(t)$ en el tiempo t . Supongamos que $\varphi(\mathbf{x}, t)$ puede tener discontinuidades en una su

perficie $\Sigma(t)$, dentro del interior de $B(t)$. Aplicando (0.14) tenemos lo siguiente:

$$E'(t) = \int_{B(t)} \varphi_t(\mathbf{x}, t) dx + \int_{\partial B(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dx - \int_{\Sigma} [\varphi] \mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} dx \quad (0.21)$$

Si $B(t)$ esta dividido en dos subregiones $B_+(t)$ y $B_-(t)$, de tal manera que las fronteras ∂B_+ y ∂B_- contengan a la superficie Σ entonces usando el Teorema de la Divergencia, en forma separada para las regiones $B_+(t)$ y $B_-(t)$, tenemos lo siguiente:

$$\int_{B(t)} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) dx = \int_{\partial B} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx - \int_{\Sigma} [\varphi \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} dx \quad (0.22)$$

sustituyendo esta ecuación en (0.21):

$$E'(t) \Big| = \int_{B(t)} \{\varphi_t + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v})\} dx + \int_{\Sigma} [\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\Sigma})] \cdot \mathbf{n} dx \quad (0.23)$$

De este modo hemos expuesto algunos de los resultados de cálculo que son importantes en la modelación matemática de sistemas macroscópicos.

Cuando se modela un sistema físico macroscópico, determinar su comportamiento, significa saber en lo futuro los cambios que tendrán una o más propiedades intensivas y/o extensivas propias del sistema que se estudia; si sabemos de antemano las ecuaciones que rigen los cambios de dichas propiedades intensivas (y/o extensivas), así como condiciones en la frontera de la región de interés (y/o condiciones iniciales). Para determinar las ecuaciones que rigen los cambios, de las propiedades intensivas y/o extensi-

vas, se establecen por lo general *balances* (estos pueden ser de masa, energía, momento etc.), mientras que las condiciones de frontera y/o iniciales sobre las región de interés se obtienen de las propiedades físicas existentes en tiempo de inicio del estudio del sistema. Finalmente una ecuación de balance simplemente especifica que: el cambio en el tiempo de la propiedad extensiva $E(t)$ asociada a la intensiva n , es igual al intercambio que tiene el sistema con el exterior en dicha propiedad, más lo que se genere (o desaparesca) de dicha propiedad dentro de la región de interés Ω .

● LEYES DE BALANCE.

El comportamiento de un sistema macroscópico esta determinado por ecuaciones de balance. Su forma general, para una propiedad intensiva n cuya representación es Euleriana, esta dada por:

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \varphi dx = \int_{\partial B} \underline{\tau} \cdot n dx + \int_{B(t)} g dx \quad (0.24)$$

esta relación se llama *ecuación general de balance* cuando se cumple en todo el cuerpo \mathcal{B} . A la función $\underline{\tau}$ se le llama *flujo de la propiedad φ* a través de la superficie del cuerpo \mathcal{B} y a la función g se le conoce como *suministro de la propiedad φ* . Cuando φ es un tensor g es otro del mismo rango, mientras que el rango de $\underline{\tau}$ excede al de φ en uno.

De este modo sustituyendo (0.23) en (0.24), tenemos:

$$\int_{B(t)} \{ \varphi_t + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) \} dx + \int_{\Sigma} [\varphi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\Sigma})] \cdot n dx - \int_{\partial B} \underline{\tau} \cdot n dx - \int_{B(t)} g dx = 0 \quad (0.25)$$

y aplicando la ecuación (0.22) a la anterior ecuación tenemos que:

$$\int_{B(t)} \{\varphi_t + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} - g\} dx + \int_{\Sigma} [\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\Sigma}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}] \cdot \mathbf{n} dx = 0 \quad (0.26)$$

de este modo aplicando la extensión del Lema Dubois-Reymond, tenemos lo siguiente:

$$\varphi_t + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} - g = 0 \quad \text{en } B(t) \quad (0.27a)$$

$$y \quad [\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\Sigma}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (0.27b)$$

a las ecuaciones anteriores se les llama *forma diferencial o local* de la ley de balance general (0.24-26). Observemos que (0.27a) se puede escribir en forma alternativa como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} - g = 0 \quad (0.28)$$

en representación Lagrangiana.

• LEYES DE BALANCE EN MECÁNICA.

En general son cuatro las leyes de balance en que descansa una gran parte de la mecánica de los medios continuos. Estos balances pueden ser:

- 1.: De masa
- 2.: De momento
- 3.: De momento angular
- 4.: De energía

En el resumen de las ecuaciones de balance de los sistemas

macroscópicos, no intentamos hacer un compendio exhaustivo de estas ecuaciones. Siguiendo la línea de presentación, expondremos en forma breve solo el balance de masa, y dejaremos sin revisar los tipos de balance marcados en 2-4 de la lista anterior.

◆ **BALANCE DE MASA.**

Consideremos un sistema aislado térmicamente, como el de la figura 0.4, el cual tampoco intercambia energía mecánica con su exterior. Supongamos que un cuerpo \mathcal{B} ocupa una región $B(t)$ en el espacio \mathbb{R}^3 en el tiempo t . La propiedad π asociada a la masa M del cuerpo al tiempo t es su densidad ρ , la que suponemos como una función del espacio y del tiempo $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$; la cual es una representación Euleriana.

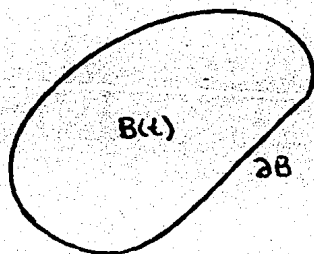


FIGURA 0.4 Región que ocupa \mathcal{B} en t .

De este modo la masa total del cuerpo \mathcal{B} al tiempo t esta dada por:

$$M(t) = \int_{B(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dx \quad (0.29)$$

en donde la integral anterior se evalúa sobre todo el espacio $B(t)$ que ocupa el cuerpo \mathcal{B} al tiempo t .

Supongamos que $\tau(\mathbf{x}, t)$ representa una función que cuantifica

el intercambio de masa por la frontera $\partial B(t)$ del cuerpo \mathcal{B} al tiempo t ; y a $g(x,t)$ como una función que representa el suministro de masa dentro de la región $B(t)$. Entonces el cambio de masa del cuerpo \mathcal{B} al tiempo t esta dada por:

$$M'(t) = - \int_{B(t)} g(x,t) dx - \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(x,t) \cdot n dx \quad (0.30)$$

en donde $\underline{\tau} \cdot n$ es el flujo de masa por la frontera $\partial B(t)$ de \mathcal{B} .

De este modo el balance global de masa en el cuerpo \mathcal{B} esta dada por:

$$\int_{B(t)} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \nabla \cdot \underline{\tau} - g) dx + \int_{\Sigma} [\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau}] \cdot n dx = 0 \quad (0.31)$$

en donde hemos identificado $\varphi \equiv \rho$ en la representación Euleriana. De este modo la forma local de la ecuación de balance anterior, usando el Lema extendido de Dubois-Reymond, es:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \nabla \cdot \underline{\tau} - g = 0 \quad \text{en } B(t) \quad (0.32a)$$

y

$$[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau}] \cdot n = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (0.32b)$$

● CONSERVACION DE LA MASA.

Son de gran interés los casos en que la masa del cuerpo \mathcal{B} se conserva. Si la masa ha de conservarse, entonces: 1) no debe haber flujo de masa a través de la frontera de \mathcal{B} y 2) no debe crearse ni destruirse masa dentro de \mathcal{B} , por lo menos durante el tiempo que dura la medición. Por lo tanto tenemos que $\underline{\tau} = 0$ y $g = 0$. De este modo las ecuaciones de balance locales estan dadas por:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{en } B(t) \quad (0.33a)$$

$$[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\Sigma)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (0.33b)$$

a la ecuación (0.33a) se le conoce como la ecuación de continuidad

● TRANSPORTE CON DIFUSION.

Para plantear la ecuación de balance de masa con difusión, que se satisface dentro de la región $B(t)$, hablaremos físicamente de la Ley de Fick.

Consideremos una sección de un sistema como el que se muestra en la figura 0.5, donde tenemos un gas disuelto en un medio (que suponemos en estado estacionario), de tal forma que hay mayor concentración en el lado izquierdo que en el derecho.

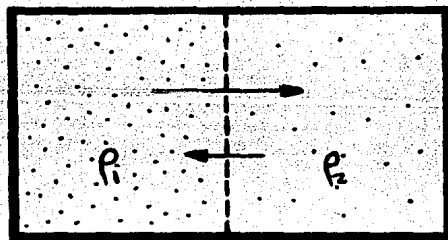


FIGURA 0.5. Hay mayor concentración de masa en el lado izquierdo ($\rho_1 > \rho_2$).

Supongamos que ambos lados están a la misma temperatura. Un resultado físico es que si se quita el pistón P las moléculas del lado izquierdo se desplazarán hacia la derecha, tendiendo a establecer un equilibrio de las densidades ρ_1 y ρ_2 . Intuitivamente podemos ver que para que se efectúe el fenómeno de difusión es necesario que la concentración de moléculas, en ambos lados de P, sea diferente (y en donde se supone que las condiciones físicas exteriores son idénticas para ambos lados). Esto se establece de

la siguiente forma:

A.: Para que tenga lugar la difusión, la distribución espacial de moléculas debe ser no homogénea.

También es natural suponer que este proceso se llevará de izquierda a derecha (para el caso presentado en la figura anterior) dado que la concentración es mayor a la izquierda. Esto lo establecemos como sigue:

B.: La difusión tiene lugar en la dirección en que la concentración de moléculas disminuye.

tendiendo a igualar en todo el espacio disponible la distribución molecular de la sustancia que se difunde. Esta tendencia es, naturalmente macroscópica (estadística), ya que puede haber fluctuaciones locales durante cortos intervalos de tiempo, los cuales producen una inversión de flujo de moléculas en ciertos lugares. En general el proceso de difusión, es el resultado de la agitación molecular, ya que esta produce choques frecuentes entre las moléculas y en consecuencia se dispersan. Es posible confirmar experimentalmente que el número efectivo de partículas que atraviesan en una unidad de tiempo un área unitaria perpendicular a la dirección de difusión (τ) es proporcional al cambio de concentración (ρ) en esa dirección. Por lo tanto podemos establecer que:

$$\tau = \underset{\sim}{\kappa} \cdot \nabla \rho \quad (0.34)$$

a esta ecuación se le conoce como Ley de Fick. Donde κ se le conoce como matriz de difusión, y puede ser determinada experimentalmente.

De este modo si queremos establecer una ecuación de balance

de masa, en donde se contemple la difusión, tendremos que usar la Ley de Fick. De este modo la ecuación de balance local queda como:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\underline{\kappa} \cdot \nabla \rho) = 0 \quad \text{en } B(t) \quad (0.35a)$$

y

$$[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\Sigma) - \underline{\kappa} \cdot \nabla \rho] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (0.35b)$$

en donde hemos supuesto que no hay fuentes ni resumideros ($g=0$) ni transformación de masa en $B(t)$.

Este sistema de ecuaciones locales, contiene a las funciones ρ y \mathbf{v} , en sus tres componentes. Por ello no es un sistema completo. Sin embargo cuando se conoce \mathbf{v} de antemano, estas ecuaciones constituyen un modelo completo para el transporte y difusión de cualquier sustancia química en donde no haya fuentes ni resumideros de tal sustancia dentro de $B(t)$, en donde ρ representa la concentración de la misma.

Si usamos índices la ecuación (0.35) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} K_{\alpha\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} - v_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (0.36)$$

para $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

que es una expresión mas conocida para la ecuación de transporte y difusión.

Para geometrias generales del dominio y condiciones de frontera no suficientemente regulares los métodos analíticos resultan ser inaplicables. Pueden existir algunas soluciones analíticas para la anterior ecuación, si reducimos la dimensión y suponemos a los coeficientes de la matriz de difusión como constantes (caso homogéneo e isotrópico, ver referencia [13]). Sin

embargo, en la mayoría de los sistemas físicos la matriz κ no es una constante, salvo que se le impongan restricciones al sistema que se estudia, lo que conduce a obtener una aproximación en el comportamiento del sistema que se estudia.

Sin embargo, los métodos numéricos como el de Colocación, Diferencias Finitas o Elemento Finito (ver ref. [12] y el libro de Zienkiewicz al que hacemos referencia al final del Capítulo), nos brindan técnicas para la solución de ecuaciones de este tipo. Sin importar la geometría del dominio de definición ni la regularidad de las condiciones a la frontera.

Finalmente si suponemos la ecuación de transporte y difusión (0.36) en estado estacionario y en una dimensión, asumiendo que el medio es homogéneo ($K=1$) con la velocidad de la frontera (de g) constante, obtenemos una ecuación de la forma:

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} - H(x) \frac{d\rho}{dx} = 0$$

que es una ecuación del tipo que resolvemos en el trabajo, con la metodología presentada por Ismael Herrera.

En general los algoritmos que implementamos resuelven ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} + H(x) \frac{d\rho}{dx} + I(x)\rho = f(x)$$

donde $\rho = \rho(x)$ y a la ecuación la sujetamos a condiciones de Dirichlet.

Formalmente el método presentado por Herrera es aplicable a ecuaciones diferenciales más complejas, la razón de presentar su aplicación a este tipo de ecuaciones, es que simplemente esto constituye un primer paso para su aplicación a ecuaciones más

complejas. De hecho, ya hemos aplicado el método para resolver ecuaciones más reales de transporte y difusión, esto es a una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + H(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} + I(x)\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde $\rho = \rho(x, t)$

y la sujetamos a condiciones de Dirichlet. En donde hemos usado un método de semidiscretización, y en donde hemos seguido la línea de investigación de Ismael Herrera, Michael Celia y Scott Kindered.

Referencias para el capítulo 0.

Alonso M., J. Finn E.; *FISICA, Campos y Ondas* ; Fondo Educativo Interamericano, S. A., 1970.

Herrera Ismael, Allen Myron; *Modelación Computacional de Sistemas en Ciencia e Ingeniería* ; Comunicaciones Técnicas IGF, UNAM, 1986.

Zienkiewicz O. C., Morgan K.; *Finite Elements and Approximations* ; John Wiley & Sons, 1983.

CAPITULO I.

CONSIDERACIONES INICIALES DE LA TEORIA ALGEBRAICA.

● INTRODUCCION.

En este capítulo se presentan las ideas fundamentales con las que se desarrolla la *Teoría Algebraica de los Métodos Numéricos*, presentada recientemente por Ismael Herrera, Gonzalo Alduncin Lucia Chargoy.

La Teoría Algebraica es una aproximación general a la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales así como también a Ordinarias (motivo principal de este trabajo). Resulta ser aplicable a cualquier operador diferencial lineal, simétrico o no simétrico; así como también a operadores diferenciales de problemas transitorios o bien independientes del tiempo. En su formulación, además de incluir a los Métodos de las Diferencias Finitas, Elemento Finito y Métodos de Frontera, da por sí mismo esquemas numéricos diferentes.

● PUNTO DE INICIO.

El punto de partida se encuentra al relacionar las conocidas *Fórmulas de Green* para operadores diferenciales con el *Método de los Residuos Pesados*, es nuestra intención bosquejar esta idea, aunque podemos encontrar una discusión formal en la referencia [4]; tenemos lo siguiente:

Consideremos el problema de valores a la frontera:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{en } \Omega \\ \partial_n u &= g & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde el operador \mathcal{L} esta definido en la región Ω (ver fig.1.1) y u es una función tantas veces diferenciable como el orden del operador \mathcal{L} , la cual tiene definición en Ω y cuyo valor en la frontera de Ω ($\partial\Omega$) es g .

Sea \mathcal{L}^* el adjunto formal de \mathcal{L} , entonces cuando u, v definidos en Ω , satisfacen condiciones apropiadas a la frontera (ver discusión al principio del siguiente capítulo), la fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L} u dx = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* v dx \quad (1.2)$$

se satisface. Donde dx se entiende como un elemento de volumen sobre Ω .

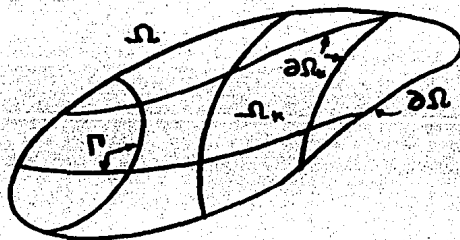


FIGURA 1.1 Se tiene lo siguiente:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k ; \Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset \text{ para } k \neq j$$

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^N \partial\Omega_k - \Gamma \text{ con } \Gamma = \bigcup_{j=1}^M \Gamma_j ; \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l = \Gamma_j \quad 1 \leq j \leq M$$

Ahora bien, dentro de la metodología de los residuos pesados (ver por ejemplo la referencia [12]), se construye una solución aproximada u' al problema (1.1) mediante una serie de dos pasos:

1o.: La solución aproximada u' se expresa como una combinación lineal de N funciones base a decir $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ las cuales son linealmente independientes y estan definidas en la región Ω .

$$u' = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \quad (1.3a)$$

donde los coeficientes a_{α} se determinan posteriormente. Es común elegir la base $\{\bar{\psi}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^N$ de tal forma que las condiciones esenciales de frontera se satisfagan. Ya que u' aproxima (1.1) entonces el valor:

$$\varepsilon = \mathcal{L}u' - f \quad (1.3b)$$

será diferente de cero. Por lo tanto se eligen los coeficientes a_{α} de tal forma que ε sea, en magnitud, del menor tamaño posible.

2o.: Se eligen N funciones de peso por decir $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ linealmente independientes definidas sobre Ω , y se pide que:

$$\int_{\Omega} \varphi_{\alpha} \varepsilon dx = \int_{\Omega} \varphi_{\alpha} (\mathcal{L}u' - f) dx = 0 \quad (1.3c)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$

finalmente combinando esta ecuación con la ecuación (1.3a) se obtiene un sistema de N ecuaciones en N incógnitas $\{a_{\alpha}\}_{\alpha=1}^N$.

Bajo estas ideas tenemos que podemos reducir (1.3b) imponiendo las condiciones variacionales (1.3c). Esta última ecuación puede tener mas de una solución, por lo que se introduce la representación (1.3a).

Ahora es claro que la solución exacta de (1.1) satisface (1.3c), esto es que:

$$\int_{\Omega} \varphi_{\alpha} (\mathcal{L}u - f) dx = 0 \quad (1.4)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$

comparándola con la ecuación (1.3c) se tiene que: -

$$\int_{\Omega} \varphi_{\alpha} \mathcal{L}u' dx = \int_{\Omega} \varphi_{\alpha} \mathcal{L}u dx \quad (1.5)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$

donde suponiendo que u satisface condiciones de frontera apropiadas, aplicamos la fórmula de Green para obtener:

$$\int_{\Omega} u' \mathcal{L}^* \varphi_{\alpha} dx = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* \varphi_{\alpha} dx \quad (1.6)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$

y bajo esta luz podemos ver que:

Una solución aproximada u' al problema (1.1) es una función cuyas proyecciones en el subespacio formado por el sistema de funciones $\{\mathcal{L}^ \varphi_1, \dots, \mathcal{L}^* \varphi_N\}$ coinciden con las de la solución exacta. Y es toda la información que tenemos de la solución exacta contenida en la solución aproximada. De este modo la representación (1.3a) puede ser interpretada como la extrapolación de de la información contenida en la solución aproximada.*

Este es el resultado que se deseaba exponer, el cual da información acerca de la naturaleza de la solución aproximada.

• OBJETIVO DE LA TEORÍA ALGEBRAICA.

La idea de la Teoría Algebraica es aplicar la noción presentada arriba de una manera sistemática. Cosa que no había

sido posible debido a que la igualdad (1.2) solamente se satisface para funciones, admisibles u , suficientemente continuas y que satisfagan condiciones apropiadas a la frontera (por ejemplo homogéneas). Sin embargo en los métodos del Elemento Finito, las condiciones de frontera no homogéneas son consideradas y las funciones admisibles pueden ser discontinuas en la frontera de un elemento típico (interfronteras). Más aún en los métodos como el de Petrov-Galerkin las funciones de peso son totalmente discontinuas.

Por lo tanto la idea de la Teoría Algebraica es extender las fórmulas de Green (1.2) a funciones discontinuas y condiciones de frontera no homogéneas, para de éste modo seguir la noción presentada en (1.6). Para lograr esto el autor ha preferido una formulación puramente algebraica. Y ésta esta dada por medio de formas bilineales $\langle Pu, v \rangle$, que pueden ser vistos como operadores $P: D \longrightarrow D^*$ los cuales se valuan en funciones y toman valores en funciones; con $u, v \in D$ el cual es el espacio lineal de funciones admisibles para el operador \mathcal{L} , y D^* es el espacio lineal de funcionales lineales definidas en D (D^* es dual algebraico de D). De éste modo enfocando la atención en la estructura algebraica se deben obtener fórmulas de Green de validez general.

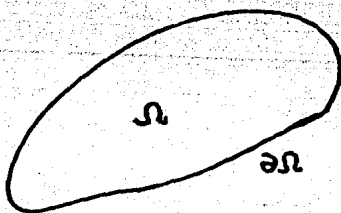


FIGURA 1.2

Para bosquejar esto; consideremos el problema de valores a la frontera 1.1, donde suponemos que $u \in D$ esta en $C^n(\Omega)$ y n es el orden del operador \mathcal{L} , mientras que el dominio Ω no esta particio-

nado (fig.1.2). En este problema prescribimos el valor de u al aplicarle \mathcal{L} como f en Ω y el valor de u al aplicarle \mathcal{B} como g sobre $\partial\Omega$.

Identificando al operador $P:D \longrightarrow D^*$ con el operador diferencial \mathcal{L} mediante:

$$\langle Pu, v \rangle = \int_{\Omega} v \mathcal{L}u \, dx = \int_{\Omega} v f \, dx \quad (1.7)$$

es posible, integrando por partes, hacer que \mathcal{L} deje de actuar sobre u , donde utilizando el Teorema de Green (ver referencia [16]):

$$\langle Pu, v \rangle = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* v \, dx + \int_{\partial\Omega} v (B - C^*) u \, dx \quad (1.8)$$

donde la segunda dx se entiende como una forma diferencial sobre $\partial\Omega$ y $B - C^*$ es un operador que actúa sobre u en la frontera. De este modo identificamos:

$$\langle Q^* u, v \rangle = \langle Qv, u \rangle = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* v \, dx \quad (1.9)$$

como al operador que actúa sobre u en el interior de Ω . De este modo tenemos:

$$\langle Pu, v \rangle - \int_{\partial\Omega} v B u \, dx = \langle Q^* u, v \rangle - \int_{\partial\Omega} v C^* u \, dx$$

o alternativamente:

$$\langle Pu, v \rangle - \langle Bu, v \rangle = \langle Q^* u, v \rangle - \langle C^* u, v \rangle \quad (1.10)$$

donde finalmente hemos identificado:

$$\langle Bu, v \rangle = \int_{\partial\Omega} v B u \, dx = \int_{\partial\Omega} v g \, dx \quad (1.11)$$

y en C como el operador de valores a la frontera complementarios, donde a la ecuación (1.10) la llamamos *Fórmula de Green Abstracta*. Y esta expresada mediante operadores valuados en funciones admisibles de un espacio D .

Como segundo bosquejo, y antes de terminar la discusión

general, consideremos el problema de valores a la frontera y de saltos prescritos en las interfronteras Γ_j (ver fig. 1.1). Aquí el dominio Ω se ha dividido en N partes y existen M interfronteras Γ_j en el interior de Ω , entonces:

$$\langle Pu, v \rangle = \int_{\Omega} v \mathcal{L}u dx = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} v \mathcal{L}u dx \quad (1.12)$$

es posible integrar por partes, para cada $1 \leq k \leq N$, y hacer que \mathcal{L} deje de actuar sobre u en Ω_k , esto es:

$$\langle Pu, v \rangle = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} u \mathcal{L}^* v dx + \sum_{l=1}^L \int_{\partial \Omega_l} v (B - C^*) u dx + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} v (J_j - K_j^*) u dx \quad (1.13)$$

donde definimos, en forma similar al primer bosquejo:

$$\langle Pu, v \rangle = \langle Q^* u, v \rangle + \langle Bu, v \rangle - \langle C^* u, v \rangle + \langle Ju, v \rangle - \langle K^* u, v \rangle \quad (1.13')$$

por lo tanto podemos establecer una *Fórmula de Green* para operadores, las cuales sean válidas en campos discontinuos (sobre elementos de la partición de Ω , ver fig.1.1), por:

$$\langle Pu, v \rangle - \langle Bu, v \rangle - \langle Ju, v \rangle = \langle Q^* u, v \rangle - \langle C^* u, v \rangle - \langle K^* u, v \rangle \quad (1.14)$$

donde el asterísco significa la forma bilineal transpuesta al operador indicado, por ejemplo $\langle Q^* u, v \rangle = \langle Qu, v \rangle$. En la ecuación (1.14) los operadores P y Q^* están definidos en términos de los operadores \mathcal{L} y \mathcal{L}^* respectivamente mediante las relaciones (1.13); de este modo Q^* es el adjunto formal de P ; mientras que los operadores B y C^* representan operadores de frontera; en donde B contiene los términos de frontera prescritos (ver ec.(1.1)) y C^* a los términos de frontera complementarios, no explícitos en (1.1). Mientras que J y K^* representan a los operadores de salto y promedio de u en la interfrontera Γ_j , respectivamente.

En forma general, en un problema de valores a la frontera se

prescribe el valor de Pu , Bu y Ju ; dentro de la Teoría Algebraica se asume que $f, g, j \in D^*$ son los valores correspondientes.

Por ejemplo si como caso particular de (1.1) tenemos a \mathcal{L} como el operador Laplaciano y condiciones de frontera de Dirichlet. En vista de (1.9) Q^*u esta caracterizado por los valores de la solución u en el interior de los elementos $\Omega_k \subset \Omega$; mientras que los valores de frontera complementarios C^*u serían las derivadas normales de u , esto es $\partial u / \partial n$. En general mientras que Pu , Bu y Ju constituyen datos prescritos los valores de Q^*u , C^*u y K^*u son datos no prescritos.

La fórmula de Green general (1.14) a la vista del problema (1.1) conduce a dos principios variacionales para cada problema de valores a la frontera, via la relación (1.3c). El primero es:

$$\langle Pu, v \rangle - \langle Bu, v \rangle - \langle Ju, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle - \langle j, v \rangle \quad \forall v \in D \quad (1.15)$$

por (1.14) el segundo es:

$$\langle Q^*u, v \rangle - \langle C^*u, v \rangle - \langle K^*u, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle - \langle j, v \rangle \quad \forall v \in D \quad (1.16)$$

A estos principios se les llama *directa* e *indirecta* formulaciones variacionales del problema de valores a la frontera original, respectivamente.

Ahora bien, de acuerdo al método de los Residuos Pesados, una solución aproximada $u' \in D$ es aquella que satisface los dos principios variacionales, para cualquier familia de funciones de peso $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset D$, (ver ec.(1.3c)). Mientras que la solución exacta $u \in D$ necesariamente los satisface, entonces es claro que:

$$\begin{aligned} \langle Q^*u', \phi_\alpha \rangle - \langle C^*u', \phi_\alpha \rangle - \langle K^*u', \phi_\alpha \rangle &= \\ &= \langle Q^*u, \phi_\alpha \rangle - \langle C^*u, \phi_\alpha \rangle - \langle K^*u, \phi_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (1.17)$$

para $\alpha = 1, \dots, N$

esta ecuación junto con la (1.10) generalizan (1.6) para operadores diferenciales definidos en campos discontinuos y continuos respectivamente. Y constituyen las ecuaciones básicas de la Teoría Algebraica.

Claramente la funcional $\langle Q^* u, \bar{\varphi}_\alpha \rangle - \langle C^* u, \bar{\varphi}_\alpha \rangle - \langle K^* u, \bar{\varphi}_\alpha \rangle$ ($\alpha = 1, \dots, N$), la cuál esta dada en función de la solución aproximada (ver la ec. anterior), es parte de la información no prescrita. Y es toda la información que podemos obtener de la solución aproximada u' . Mientras que la representación $u' = \sum \alpha_\alpha \bar{\varphi}_\alpha$ establece el procedimiento para extrapolar tal información; y la información contenida en la solución aproximada es independiente de éste proceso de extrapolación y sólo depende del sistema de funciones de peso $\{ \bar{\varphi}_\alpha \}_{\alpha=1}^N$ elegido.

Esto constituye el conjunto de ideas básicas para el desarrollo sistemático de las fórmulas de Green generales aplicables a campos discontinuos. Procedimiento que será presentado en los Capítulos II y III para campos continuos y discontinuos respectivamente.

CAPITULO II.

FORMULA DE GREEN EN CAMPOS CONTINUOS.

• INTRODUCCION.

Como ha quedado indicado en el capítulo I, la intención de este capítulo es la de exponer las ideas básicas y generales de la Teoría Algebraica de los Métodos Numéricos, para operadores diferenciales definidos en campos continuos.

El objetivo de la Teoría Algebraica es la contrucción sistemática de la fórmula de Green para el operador diferencial \mathcal{L} dado en un problema de valores a la frontera (y/o valores iniciales), a la que se le incorporan las condiciones de frontera dadas en el problema. Consideremos como caso particular a la ecuación diferencial de Poisson sujeta a condiciones de frontera de Robin:

$$\nabla^2 u = f \quad \text{en } \Omega \quad (\text{p2.1a})$$

$$u + \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{en } \partial\Omega \quad (\text{p2.1b})$$

donde Ω es una región continua y $\partial\Omega$ su frontera; ver fig. 1.2.

Bajo ciertas condiciones sobre u y la región Ω (ver ref. [13]) es posible integrar por partes al producto $v\nabla^2 u$, y obtener la conocida fórmula de Green para el operador de Laplace:

$$\int_{\Omega} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dx = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) dx \quad (\text{p2.2})$$

donde la primera dx es un elemento de volumen de Ω y la segunda un elemento de superficie de $\partial\Omega$.

Es posible separar las condiciones de frontera dadas (p2.1b) en el segundo miembro de (p2.2), esto es:

$$\int_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dx = - \int_{\partial \Omega} (u + \frac{\partial u}{\partial n}) \frac{\partial v}{\partial n} dx + \int_{\partial \Omega} (v + \frac{\partial v}{\partial n}) \frac{\partial u}{\partial n} dx \quad (p2.3)$$

finalmente si definimos:

$$\langle Pu, v \rangle = \int_{\Omega} v \nabla^2 u \quad ; \quad \langle Q^* u, v \rangle = \int_{\Omega} u \nabla^2 v dx \quad (p2.4a)$$

$$\langle Bu, v \rangle = - \int_{\partial \Omega} (u + \frac{\partial u}{\partial n}) \frac{\partial v}{\partial n} dx \quad ; \quad \langle C^* u, v \rangle = \int_{\partial \Omega} (v + \frac{\partial v}{\partial n}) \frac{\partial u}{\partial n} dx \quad (p2.4b)$$

tenemos la siguiente expresión, mediante operadores, para la anterior ecuación.

$$\langle Pu, v \rangle - \langle Bu, v \rangle = \langle Q^* u, v \rangle - \langle C^* u, v \rangle \quad (p2.5)$$

donde en P hemos agrupado al operador diferencial del problema inicial, en Q^* al adjunto formal de P, en B a los valores a la frontera dados y en C^* a los valores de frontera complementarios (esta última idea es más clara, si asumimos en vez de la ecuación (p2.1b) a la ecuación $\partial u / \partial n = g$, esto es se dan condiciones de frontera de tipo Newman, en este caso en C^* quedan, directamente de (p2.2), los valores de u en la frontera).

La sistematización para la construcción de los operadores P, Q^* , B, C^* así como el desarrollo de la teoría necesaria para tal fin, es uno de los motivos del artículo presentado por el Dr. Ismael Herrera (ref. [3]) y que presentamos aquí para el caso en que la fórmula de Green generalizada se contruye cuando el dominio Ω es continuo; el caso para cuando Ω esta particionado en 2 partes se presenta en el siguiente capítulo.

• NOCIONES PRELIMINARES Y NOTACION.

Es natural primeramente introducir las nociones de operadores lineales valuados en funciones $P: D \longrightarrow D^*$ y los transpuestos de éstos via formas bilineales (ver referencias [11],[15]), siguiendo el preludio presentado en la ec. (1.7). Así como también presentar la idea de los subespacios nulos de los operadores definidos; ya que las relaciones de Green que se derivan de la Teoría Algebraica descansan en gran parte en las propiedades de éstos subespacios.

Denotemos a \mathfrak{F} como el campo de los números reales o complejos. Sea D el espacio lineal de funciones escalares admisibles sobre \mathfrak{F} y D^* el espacio lineal de funcionales lineales definidas sobre D ; esto es D^* es el espacio dual algebraico de D .

De aquí un elemento $\alpha \in D^*$ es una función $\alpha: D \longrightarrow \mathfrak{F}$ que es lineal. Y dada $v \in D$ el valor de α en v se denota como:

$$\alpha(v) = \langle \alpha, v \rangle \in \mathfrak{F} \quad (2.1)$$

Denotaremos a $P: D \longrightarrow D^*$ como al operador valuado en funciones, los cuales serán usados muy a menudo. Dada $u \in D$, el valor de $P(u) \in D^*$ y es una funcional lineal. Por (2.1) dada $v \in D$ $\langle P(u), v \rangle \in \mathfrak{F}$ y es el valor de la funcional lineal $P(u)$ en v . Cuando P es en si mismo lineal $\langle P(u), v \rangle$ es lineal en u cuando fijamos v . Entonces escribimos:

$$\langle Pu, v \rangle = \langle P(u), v \rangle \in \mathfrak{F} \quad (2.2)$$

en el desarrollo de las ideas básicas se trata, exclusivamente, con operadores valuados en funciones los cuales son lineales.

Tomamos a $D^2 = D \oplus D$ como el espacio de los pares $\{u, v\}$ con $u, v \in D$. Consideremos las funciones $\beta: D^2 \longrightarrow \mathfrak{F}$, el valor de β en $\{u, v\}$ denotémoslo por $\beta(u, v)$. β es bilineal cuando es lineal en u cuando v es fijo e inversamente cuando es lineal en v cuando

fijamos u . Existe una correspondencia uno a uno entre las funciones bilineales y operadores valuados en funciones, los cuales son lineales. Dado el operador lineal valuado en funciones, $P: D \longrightarrow D^*$, podemos definir una función bilineal $\beta: D^2 \longrightarrow \mathfrak{F}$ por:

$$\beta(u, v) = \langle Pu, v \rangle \quad (2.3a)$$

inversamente, dada la función bilineal $\beta: D^2 \longrightarrow \mathfrak{F}$ podemos asociarla con un operador $P: D \longrightarrow D^*$ lineal. Dado $u \in D$, sea:

$$P(u) = \alpha \in D^* \quad (2.3b)$$

donde $\alpha \in D^*$ es una funcional lineal, cuyo valor en $v \in D$ es:

$$\langle \alpha, v \rangle = \beta(u, v) \quad (2.3c)$$

Dado $P: D \longrightarrow D^*$, tomamos $\beta: D^2 \longrightarrow \mathfrak{F}$ como la función bilineal (2.3a). Definimos al operador $P^*: D \longrightarrow D^*$ asociándolo a la transpuesta β^* de la función bilineal β . Entonces β^* es la transpuesta de β y a $P^*: D \longrightarrow D^*$ lo llamamos el transpuesto de P . Esto es:

$$\langle P^*u, v \rangle = \beta^*(u, v) = \beta(v, u) = \langle Pv, u \rangle \quad (2.4)$$

Por último, dado $P: D \longrightarrow D^*$, $N_P \in D$ denota al subespacio nulo de P , esto es:

$$N_P = \{ v \in D \mid Pv = 0 \} \quad (2.5)$$

● RELACIONES ENTRE SUBESPACIOS NULOS Y OPERADORES VALUADOS EN FUNCIONES.

En este apartado se intenta establecer algebraicamente al problema presentado en (p2.1) o con más generalidad en (1.1) del previo capítulo, así como también relacionar los nullos de los operadores P con el espacio D de funciones admisibles.

DEFINICION 2.1: Se dice que los operadores $P: D \longrightarrow D^*$ y $Q: D \longrightarrow D^*$ pueden ser variados independientemente, si para cada $U \in D$ y $V \in D$ existe $u \in D$ tal que:

$$Pu = PU \quad \text{y} \quad Qu = QV \quad (2.6)$$

Claramente esta definición caracteriza en forma abstracta al problema (1.1); ya que en éste se busca una función $u \in D$ tal que satisfaga, simultáneamente, la ecuación diferencial y las condiciones de frontera. De este modo en la descripción de operadores de (1.1) pedimos que P y Q distintos hagan corresponder a la función u la misma funcional que asocian a dos funciones diferentes U y V preestablecidas. Por lo tanto esta definición es equivalente a la existencia de solución al problema definido.

La idea puesta en la definición anterior puede expresarse en formas alternativas, que se exponen en el siguiente teorema (ver ref. [3],[8]).

TEOREMA 2.1: Sean $P: D \longrightarrow D^*$ y $Q: D \longrightarrow D^*$ operadores dados. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes :

i) P y Q pueden ser variados independientemente.

ii) Para cada $U \in D$, existe $u \in D$ tal que:

$$Pu = PU \quad \text{y} \quad Qu = 0 \quad (2.7)$$

iii) Para cada $V \in D$, existe $u \in D$ tal que:

$$Pu = 0 \quad \text{y} \quad Qu = QV \quad (2.8)$$

iv) $D = N_P + N_Q$ (2.9a)

esto es para cada $u \in D$ existen $u_1 \in N_P$ y $u_2 \in N_Q \ni$

$$u = u_1 + u_2 \quad (2.9b)$$

v) Para cada $u \in D$, existen $u_1 \in D$ y $u_2 \in D \ni$

$$(a) \quad u = u_1 + u_2 \quad \text{y} \quad (2.10a)$$

$$(b) \quad Pu = Pu_1 \quad \text{y} \quad Qu = Qu_2 \quad (2.10b)$$

DEMOSTRACION:

(i) \Rightarrow (ii). Tomamos como premisa (i). Sea $U \in D$ y $V \in N_0$, entonces existe $u \in D$ tal que:

(a) Si $U \in N_F \subset D$ entonces:

$$Pu = PU = 0 \quad \text{y} \quad Qu = QV = 0$$

(b) Si $U \in \{D - N_F\} \subset D$ entonces:

$$Pu = PU \quad \text{y} \quad Qu = 0$$

(ii) \Rightarrow (iii). Aceptando como premisa (ii). Para cada $U \in D$ existe $u \in D$ tal que:

$$Pu = PU \quad \text{y} \quad Qu = 0$$

ya que $u, U \in D$ entonces su suma esta en D . Sea

$$V = U - u$$

aplicando a V los operadores P y Q

$$PV = PU - Pu = 0 \quad \text{y} \quad QV = QU - Qu = QU$$

(iii) \Rightarrow (iv). Tomando como premisa a (iii) se tiene que dada $V \in D$ existe $u_1 \in D$ tal que:

$$Pu_1 = 0 \quad \text{y} \quad Qu_1 = QV$$

ya que $V, u_1 \in D$, su suma esta en D . Tomamos

$$u_2 = V - u_1$$

aplicando a esta expresion P y Q , se tiene:

$$Pu_2 = PV - Pu_1 = PV \quad \text{y} \quad Qu_2 = QV - Qu_1 = 0$$

por lo que $u_2 \in N_0$ y se tenia que $u_1 \in N_F$ y

$$V = u_1 + u_2$$

(iv) \Rightarrow (v). Aceptando (iv). Sea $u \in D$ entonces existen $u_1 \in N_F$ y $u_2 \in N_0$ tales que:

$$u = u_1 + u_2$$

con $N_F \subset D$ y $N_0 \subset D$, aplicando P y Q a u , se tiene:

$$Pu = Pu_1 + Pu_2 = Pu_1 \quad \text{y} \quad Qu = Qu_1 + Qu_2 = Qu_2$$

(v) \Rightarrow (i). Invirtiendo (v). Para cada $u_1, u_2 \in D$, existe $u \in D$ tal que:

(a) $u_1 + u_2 = u$

(b) $Pu_1 = Pu$ y $Qu_2 = Qu$

Mediante este teorema relacionamos la existencia de la solución al problema (i) con los casos particulares del problema (1.1); cuando tenemos condiciones de frontera homogéneas (ii) y ecuación diferencial homogénea (iii), así como también la relación que guardan los nulos de P y Q con el espacio de funciones admisibles. De modo que si un par de operadores satisface una de ellas, satisface las restantes.

Como ilustración consideremos, nuevamente al problema (p2.1), solo que ahora con condiciones a la frontera de Dirichlet.

$$\nabla^2 u = f \quad \text{en } \Omega \quad (\text{p2.6a})$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (\text{p2.6b})$$

donde sabemos que es posible conocer la solución general a la ecuación de Poisson si conocemos la general de Laplace más una solución particular de (p2.5a), y podemos pedir que ésta solución particular satisfaga las condiciones de frontera (p2.5b). Por lo que la solución general de (p2.5) esta dada por:

$$u = u_1 + u_2$$

con $\nabla^2 u_1 = 0$ y $u_2 = 0$. Por lo tanto, los nulos de P y B , si estos se definen por:

$$\langle Pu, v \rangle = \int_{\Omega} v \nabla^2 u dx$$

$$\langle Bu, v \rangle = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dx$$

están dados por:

$$N_P = \{ u \in D \mid \nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega \}$$

$$N_B = \{ u \in D \mid u = 0 \text{ en } \partial\Omega \}$$

y

$$D = N_P + N_B$$

por lo que P y B pueden ser variados independientemente, y satisfacen al teorema anterior.

Pasemos una proposición que será de utilidad en la siguiente sección sobre el importante concepto de la descomposición de operadores.

Si $R = P + Q$ operador, entonces $N_R \supset N_P \cap N_Q$. Ya que si $u \in N_P \cap N_Q$, entonces para toda $v \in D$ se satisface que:

$$\begin{aligned} \langle Pu, v \rangle + \langle Qu, v \rangle &= 0 \text{ pero} \\ 0 &= \langle Pu, v \rangle + \langle Qu, v \rangle = \langle (P+Q)u, v \rangle = \langle Ru, v \rangle \end{aligned}$$

por lo tanto $u \in N_R$, y $N_P \cap N_Q \subset N_R$. Ya que P, Q y el operador $\langle \rangle$ son lineales. Cuando en adición P^* y Q^* pueden ser variados independientemente se tiene que:

$$N_R = N_P \cap N_Q \quad (2.11)$$

Motivados por la noción anterior presentamos la siguiente proposición, que será de gran utilidad en la siguiente sección que corresponde a la descomposición de operadores. Esta proposición relaciona a los núcleos de los operadores P y Q con el núcleo del operador que descomponen R .

PROPOSICION 2.1: Si P^* y Q^* pueden ser variados independientemente y $R = P + Q$ entonces la ecuación (2.11) se satisface.

DEMOSTRACION: Supongamos que existe un $u \in N_R$ y que $u \notin N_Q$. Entonces se tendrá un $V \in D$ tal que $\langle Qu, V \rangle \neq 0$. Por el teorema 2.1 parte (iii), para tal V existe un $v \in D$ tal que $Q^*v = Q^*V$ mientras que $P^*v = 0$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \langle Qu, V \rangle = \langle Q^*V, u \rangle = \langle Q^*v, u \rangle + \langle P^*v, u \rangle = \\ &= \langle Qu, v \rangle + \langle Pu, v \rangle = \langle (P+Q)u, v \rangle = \langle Ru, v \rangle = 0 ! \end{aligned}$$

y la contradicción proviene al suponer que $u \notin N_Q$ por lo tanto si $u \in N_R$ entonces $u \in N_Q$. Usando un argu-

mento similar para el operador P se demuestra que si $u \in N_A$ entonces $u \in N_P$. De aquí $N_A \subset N_P \cap N_B$. De éste resultado y el argumento anterior se sigue la igualdad (2.11). ■

● **DESCOMPOSICION DE OPERADORES: UN TEOREMA DE REPRESENTACION.**

La Teoría Algebraica de los Métodos Discretos esta basada en la representación abstracta de las Fórmulas de Green, que son asumidas como casos especiales de la descomposición de operadores que se introduce en esta sección (ver ref.[3]).

DEFINICION 2.2: Sean $R : D \longrightarrow D^*$, $R_1, R_2 : D \longrightarrow D^*$ operadores dados. Se dice que los operadores R_1 y R_2 descomponen R cuando:

- (i) $R = R_1 + R_2$ (2.12)
- (ii) R_1 y R_2 pueden ser variados independientemente.
- (iii) R_1^* y R_2^* pueden ser variados independientemente.

PROPOSICION 2.2: Sean R_1 y R_2 operadores que descomponen R . Entonces

$$N_R = N_{R_1} \cap N_{R_2} \quad \text{y} \quad N_{R^*} = N_{R_1^*} \cap N_{R_2^*} \quad (2.13)$$

DEMOSTRACION: La primera parte es claramente la proposición 2.1. Ahora bien ya que si $u, v \in D$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle R^* u, v \rangle &= \langle R u, v \rangle = \langle R_1 v, u \rangle + \langle R_2 v, u \rangle = \langle R_1^* u, v \rangle + \langle R_2^* u, v \rangle = \\ &= \langle (R_1^* + R_2^*) u, v \rangle \end{aligned}$$

Así por ejemplo si tenemos al problema:

$$\nabla^2 u = f \quad \text{en } \Omega \quad (\text{p2.7a})$$

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega \quad (\text{p2.7b})$$

y si definimos a P y Q^* como en la ecuación (p2.14a) y

$$\langle Bu, v \rangle = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dx \quad (\text{p2.8a})$$

$$\langle C^* u, v \rangle = - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dx \quad (\text{p2.8a})$$

entonces a la luz de la ecuación (p2.2), es claro que:

$$R = P - Q^* = B - C^*$$

Herrera en la referencia [3] demuestra que B y C^* , B^* y C varían independientemente, además es claro que:

$$N_R = \{ u \in D \mid u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \} = N_B \cap N_{C^*}$$

$$N_{R^*} = \{ v \in D \mid v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \} = N_{B^*} \cap N_C$$

por lo que B y C^* , B^* y C satisfacen la definición y proposición anteriores.

La clase de fórmulas de Green que se usan en la Teoría Algebraica, como se apuntó anteriormente, son casos especiales del tipo de descomposiciones introducidas en la definición anterior. Para aplicaciones se obtiene gran flexibilidad caracterizando estas descomposiciones en forma abstracta. Y esta depende de las propiedades de los subespacios N_{R_1} , N_{R_2} , $N_{R_1^*}$ y $N_{R_2^*}$. Para lograr esto empezemos con la siguiente:

PROPOSICION 2.3: Supongase que R_1 y R_2 descomponen R . Entonces:

$$(i) \langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in N_{R_1} \quad y \quad v \in N_{R_2}^* \quad (2.14)$$

$$(ii) N_{R_1} \supset N_R \quad y \quad N_{R_2}^* \supset N_R^* \quad (2.15)$$

$$(iii) D = N_{R_1} + N_{R_2} = N_{R_1}^* + N_{R_2}^* \quad (2.16)$$

similarmente:

$$(i') \langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in N_{R_2} \quad y \quad v \in N_{R_1}^* \quad (2.14')$$

$$(ii') N_{R_2} \supset N_R \quad y \quad N_{R_1}^* \supset N_R^* \quad (2.15')$$

DEMOSTRACION: Para demostrar (2.14) se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle Ru, v \rangle &= \langle (R_1 + R_2)u, v \rangle = \langle R_1 u, v \rangle + \langle R_2 u, v \rangle = \\ &= \langle R_1 u, v \rangle + \langle R_2^* v, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

lo que se satisface si $u \in N_{R_1}$ y $v \in N_{R_2}^*$. En forma similar se demuestra la parte (2.14'). La demostración de (2.15) y (2.15') se sigue claramente de la proposición 2.2. Para demostrar (2.16), solo basta observar la definición 2.2 y el teorema 2.1. De este modo la proposición queda demostrada. ■

Como se mencionó al principio de la sección, para aplicaciones prácticas, es de gran ayuda la caracterización de las descomposiciones de operadores presentada en forma abstracta. Se pasará, ahora, a expresar las ideas anteriores en forma general, basándose únicamente en las propiedades de los subespacios nulos de los operadores lineales valuados en funciones.

DEFINICION 2.3: Sean $I_1 \subset D$ y $I_2 \subset D$ dos subespacios lineales. Entonces, el par $\{ I_1, I_2 \}$ es un par de subespacios conjugados para R cuando:

$$(i) \langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \quad y \quad v \in I_2 \quad (2.17)$$

el par $\{ I_1, I_2 \}$ de subespacios conjugados para el operador R , se dice que es regular cuando:

$$(ii) I_1 \supset N_R \text{ y } I_2 \supset N_R^* \quad (2.18)$$

el par de subespacios conjugados regulares para R, se dice que es completamente regular para R, si en adición satisface:

$$(iii) \langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall v \in I_2 \Rightarrow u \in I_1 \quad (2.19a)$$

$$(iv) \langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \Rightarrow v \in I_2 \quad (2.19b)$$

PROPOSICION 1.4: El par $\{ I_1, I_2 \}$ de subespacios lineales es completamente regular para el operador R si y solo si las siguientes relaciones se satisfacen.

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall v \in I_2 \Leftrightarrow u \in I_1 \quad (2.20a)$$

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \Leftrightarrow v \in I_2 \quad (2.20b)$$

DEMOSTRACION: Supongamos que $\{ I_1, I_2 \}$ es un par de subespacios completamente regulares para R, entonces por la definición 2.3 (iii), (iv) se tiene:

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall v \in I_2 \Rightarrow u \in I_1 \quad \text{y}$$

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \Rightarrow v \in I_2$$

por lo que:

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall v \in I_2 \Leftrightarrow u \in I_1 \quad \text{y}$$

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \Leftrightarrow v \in I_2$$

inversamente, supongamos que las relaciones (2.20) se satisfacen, entonces ya que:

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall v \in I_2 \Leftrightarrow u \in I_1$$

en particular

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall v \in I_2 \Rightarrow u \in I_1$$

ya que:

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \Leftrightarrow v \in I_2$$

en particular

$$\langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in I_1 \Rightarrow v \in I_2$$

y la proposición queda demostrada. ■

Por otro lado, en vista de la definición 2.3 así como ideas anteriores, es claro que $\{ N_{R_1}, N_{R_1}^* \}$ es un par de subespacios conjugados regulares para el operador R . Otro par con la misma propiedad lo es $\{ N_{R_2}, N_{R_2}^* \}$.

Una noción importante es la descomposición del espacio de funciones admisibles respecto a un operador R , via subespacios conjugados regulares para R . Idea que se formaliza en la siguiente definición, la cual será usada en la caracterización abstracta de las Fórmulas de Green.

DEFINICION 2.4: Sean $\{ I_{11}, I_{22} \}$ y $\{ I_{12}, I_{21} \}$ dos pares de subespacios conjugados regulares para R . Los pares son una *Descomposición Canónica de D Respecto a R* , si:

$$D = I_{11} + I_{22} = I_{21} + I_{12} \quad (2.21)$$

Claramente cuando R_1 y R_2 descomponen R , el par $\{ N_{R_2}, N_{R_2}^* \}$ y $\{ N_{R_1}, N_{R_1}^* \}$ forman una descomposición canónica de D respecto a R . Cuando tomamos:

$$I_{11} = N_{R_2} \quad ; \quad I_{22} = N_{R_1}^* \quad (2.22a)$$

$$I_{12} = N_{R_1} \quad ; \quad I_{21} = N_{R_2}^* \quad (2.22b)$$

y la ec. (2.19) se satisface por (2.16). En tal caso, existen elementos $v_{11}, u_{11} \in I_{11}$; $v_{12}, u_{12} \in I_{12}$; $v_{21}, u_{21} \in I_{21}$; $v_{22}, u_{22} \in I_{22}$ para $u, v \in D$ tales que:

$$u = u_{11} + u_{12} = u_{21} + u_{22} \quad (2.23a)$$

$$v = v_{11} + v_{12} = v_{21} + v_{22} \quad (2.23b)$$

y por la definición 2.2 y teorema 2.1, es claro que, con la elección tomada:

$$\langle R_1 u, v \rangle = \langle R u_{11}, v_{21} \rangle \quad (2.24a)$$

$$\langle R_2 u, v \rangle = \langle R u_{12}, v_{22} \rangle \quad (2.24b)$$

ya que:

$$\begin{aligned} \langle Ru_{11}, v_{21} \rangle &= \langle R_1 u_{11}, v_{21} \rangle = \langle R_1 (u - u_{12}), (v - v_{22}) \rangle = \\ &= \langle R_1 u, v \rangle - \langle R_1^* v_{22}, u \rangle = \langle R_1 u, v \rangle \end{aligned}$$

de igual forma para (2.22b).

En la parte restante de la sección se mostrará que las ecuaciones (2.24) dan la caracterización abstracta deseada de la descomposición del operador R.

TEOREMA 2.2: Sean $\{ I_{11}, I_{22} \}$ y $\{ I_{12}, I_{21} \}$ una descomposición canónica de D respecto a R. Entonces existe un par único de operadores $R_1, R_2: D \longrightarrow D^*$ que descomponen R y satisfacen las ecs. (2.22). Tales operadores están definidos por las ecs. (2.24), donde la representación (2.23) está tomada para $u, v \in D$.

la demostración está dada en las refs. [3] y [8].

Este teorema proporciona, finalmente, una forma abstracta y sistemática para obtener la descomposición de un operador R dado asociado a un problema de valores a la frontera (y/o valores iniciales). Esto es si tenemos un problema de valores a la frontera como el presentado en (p2.1) podemos obtener, definiendo a P, Q^* , B, C^* como en (p2.4), directamente que:

$$\langle Ru, v \rangle = \langle (P - Q^*)u, v \rangle = \langle (B - C^*)u, v \rangle$$

es una fórmula de Green, pero también podemos definir a B y C^* , su-
mando y restando $\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n}$ al miembro derecho de (p2.2), como:

$$\begin{aligned} \langle Bu, v \rangle &= - \int_{\partial \Omega} (u + \frac{\partial u}{\partial n}) \frac{\partial v}{\partial n} dx \\ \langle C^* u, v \rangle &= - \int_{\partial \Omega} (v + \frac{\partial v}{\partial n}) \frac{\partial u}{\partial n} dx \end{aligned}$$

y es claro que también:

$$\langle Ru, v \rangle = \langle (P-Q^*)u, v \rangle = \langle (B-C^*)u, v \rangle$$

sería una fórmula de Green para el problema (p2.1). Sin embargo el teorema anterior asegura que solo existe un único par de operadores B y C^* que descomponen $R=P-Q^*$, tales que sus nulos son una descomposición canónica de D respecto a R esto es $D=N_B+N_{C^*}$. De este modo siempre escogeremos a B y C^* tales que satisfagan el criterio indicado en el teorema 2.2.

PROPOSICION 2.5: Cuando $\{ I_{11}, I_{22} \}$ y $\{ I_{12}, I_{21} \}$ es una descomposición canónica de D respecto a R , se tiene:

(i) Cada par $\{ I_{11}, I_{22} \}$, $\{ I_{12}, I_{21} \}$ es completamente regular para R .

$$(ii) N_R = I_{11} \cap I_{22} \quad \text{y} \quad N_{R^*} = I_{12} \cap I_{21} \quad (2.25)$$

nuevamente su demostración esta en las refs. [3] y [8]

La ec.(2.24) implica que la representación (2.11) es única, excepto para elementos de N_R ; lo mismo ocurre para elementos en N_{R^*} .

Podemos hablar, ahora, del concepto de operadores de frontera los cuales juegan un importante papel dentro de la teoría.

● OPERADORES DE FRONTERA Y FORMULAS DE GREEN.

Las nociones de operadores de frontera, adjuntos formales, y fórmulas de Green en el sentido de la Teoría se introducen en esta sección, así como la caracterización abstracta de las fórmulas de Green.

DEFINICION 2.5: Se dice que $B: D \longrightarrow D^*$ es un operador de frontera para $P: D \longrightarrow D^*$ si:

$$\langle Pu, v \rangle = 0 \quad \forall v \in N_{B^*} \iff Pu = 0 \quad (2.26)$$

DEFINICION 2.6: Los operadores $P, Q: D \longrightarrow D^*$ se dice que son adjuntos formales cuando $R = P - Q^*$ es un operador de frontera para P , mientras que R^* es un operador de frontera para Q .

Observando la fórmula de Green para el operador de la Laplace (p2.2), se dice que el miembro derecho es un término de frontera ya que la integral que se aplica a tales operadores se efectúa sobre la frontera $(\partial\Omega)$ de Ω . Con las dos definiciones anteriores se formalizan éstos conceptos, ya que en forma natural siguen a la discusión hecha desde la proposición 2.3 hasta el teorema 2.2.

De este modo se procede a establecer la clase de Fórmulas de Green como son consideradas dentro de la Teoría.

DEFINICION 2.7: Sean $P, Q: D \longrightarrow D^*$ adjuntos formales.

La ecuación:

$$P - B = Q^* - C^* \quad (2.27)$$

es una fórmula de Green débil cuando:

- (i) C^* es un operador de frontera para B
- (ii) C es un operador de frontera para B^*
- (iii) B es un operador de frontera para C^*
- (iv) B^* es un operador de frontera para C

y la ecuación (2.27) es una Fórmula de Green en el sentido fuerte cuando en adición $B - C^*$ descompone a $R = P - Q^*$.

PROPOSICION 2.6: Cuando la ecuación (2.27) es una Fórmula de Green entonces:

- (i) $N_R = N_B \cap N_{C^*}$ y $N_{R^*} = N_{B^*} \cap N_C$
- (ii) B y C^* son operadores de frontera para P
- (iii) C y B^* son operadores de frontera para Q

DEMOSTRACION: La demostración se hace para fórmulas de Green en el sentido fuerte. Ya que $B - C^*$ descompone R y $R = P - Q^* = B - C^*$ además $R^* = P^* - Q = B - C^*$, la afirmación (i) se sigue directamente de la proposición 2.1. Nuevamente ya que $B - C^*$ descompone R y $R = P - Q^*$, entonces por la proposición 2.3 (i) se sigue directamente la afirmación (ii). En forma análoga se demuestra la afirmación (iii). Y la proposición queda demostrada. ■

Hasta ahora tenemos la representación de lo que consideramos una fórmula de Green via operadores de frontera y adjuntos formales. Procedamos ahora a una caracterización abstracta de las Fórmulas de Green.

Para esto asumiremos que P y Q son adjuntos formales y que $R = P - Q^*$. El lector debe observar que las definiciones y notaciones usadas en lo que sigue dependen del ordenamiento del par $\{ P, Q \}$ escogido. Si el orden del operador $\{ P, Q \}$ es cambiado se obtiene a $-R^*$ en vez de R .

DEFINICION 2.8: Los valores de frontera relevantes para P de $u, v \in D$ se dice que son iguales si y solo si $Ru = Rv$. Un subespacio $I \subset D$ es definido por valores relevantes para P , cuando $Nu \subset I$. En forma similar, $I \subset D$ es definido por valores relevantes para Q cuando $Nu^* \subset I$.

Cuando la ecuación (2.27) es una fórmula de Green, los valores de frontera relevantes para P estan caracterizados por el par $\{ Bu, C^*u \}$, ya que $Ru = Rv$ si y solo si $Bu = Bv$ y $C^*u = C^*v$. Asumimos que $I \subset D$ esta caracterizado por

valores de frontera relevantes y sean $u, v \in D$ con los idénticos valores de frontera (esto es $Ru = Rv$), entonces ocurre que $u, v \in I$ o ninguno de los dos lo está.

De éste modo la fórmula de Green en su caracterización abstracta queda formalizada en la siguiente definición.

DEFINICION 2.9: Una Fórmula de Green abstracta en el el sentido fuerte para $P: D \longrightarrow D^*$ es una Descomposición Canónica de D respecto a R .

Sea $\{ I_{11}, I_{22} \}$, $\{ I_{12}, I_{21} \}$ una fórmula de Green Abstracta; entonces usando la relación (2.18), se observa que I_{11} y I_{12} están definidos por valores de frontera relevantes para P , mientras que I_{21} y I_{22} los son para Q .

Finalmente pasemos a expresar un caso particular de del teorema 2.2, y que completa la caracterización abstracta hecha en la definición anterior.

TEOREMA 2.3: Hay una correspondencia uno a uno entre las Fórmulas de Green en el Sentido Estricto y las Fórmulas de Green Abstractas en el Sentido Estricto. Cuando la ecuación (2.27) es una Fórmula de Green en el Sentido Estricto, la Fórmula de Green Abstracta $\{ I_{11}, I_{22} \}$, $\{ I_{12}, I_{21} \}$ está dada por:

$$\begin{aligned} I_{11} &= Nc^* & ; & & I_{22} &= Nb^* \\ I_{12} &= Nb & ; & & I_{21} &= Nc \end{aligned}$$

inversamente, cuando la Fórmula de Green Abstracta $\{ I_{11}, I_{22} \}$, $\{ I_{12}, I_{21} \}$ está dada, entonces:

$$\langle Bu, v \rangle = \langle Ru_{11}, v_{21} \rangle & ; & \langle Cu, v \rangle = \langle Rv_{12}, u_{22} \rangle$$

DEMOSTRACION: Este resultado se sigue del teorema 2.2 ■

CAPITULO III.

FORMULAS DE GREEN EN CAMPOS DISCONTINUOS.

● INTRODUCCION.

En el análisis sistemático de los métodos discretos (esto es en: Elemento Finito, Diferencias Finitas y Métodos de Frontera) el uso de fórmulas de Green para operadores definidos en campos discontinuos es básico. Este tipo de fórmulas son las que, en esta sección, se presentan para operadores lineales arbitrarios.

● FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DEFINIDOS SOBRE LA UNION DE DOS CAMPOS ADYACENTES.

En esta parte del texto, el espacio de funciones admisibles estará dado por el producto $D = D_I \oplus D_{II}$, donde D_I y D_{II} son dos espacios lineales. En aplicaciones prácticas los elementos de D_I y de D_{II} son funciones definidas en dos regiones vecinas Ω_I y Ω_{II} (ver fig. 3.1) respectivamente. Ahora los elementos de D son los pares de la forma $u = (u_I, u_{II})$ donde $u_I \in D_I$ y $u_{II} \in D_{II}$.

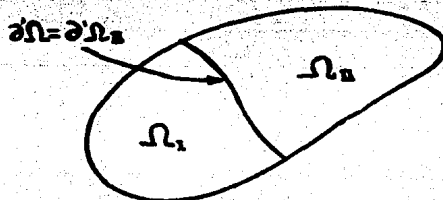


FIGURA 3.1 La región $\bar{\Omega}$ es la unión de dos regiones $\bar{\Omega}_I$ y $\bar{\Omega}_{II}$. Esto es: $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_I \cup \bar{\Omega}_{II}$.

El operador $R: D \longrightarrow D^*$ satisface la siguiente relación:

$$\langle Ru, v \rangle = \langle R_I u_I, v_I \rangle + \langle R_{II} u_{II}, v_{II} \rangle \quad (3.1)$$

donde $R_I: D_I \longrightarrow D_I^*$ y $R_{II}: D_{II} \longrightarrow D_{II}^*$ son operadores dados.

Cuando la ecuación (3.1) se satisface, entonces se tiene que:

$$u = \{u_I, u_{II}\} \in N_R \Leftrightarrow u_I \in N_{R_I} \text{ y } u_{II} \in N_{R_{II}} \quad (3.2a)$$

$$u = \{u_I, u_{II}\} \in N_{R^*} \Leftrightarrow u_I \in N_{R_I^*} \text{ y } u_{II} \in N_{R_{II}^*} \quad (3.2b)$$

aquí se tiene que N_R , N_{R_I} y $N_{R_{II}}$ son los espacios nulos de R , R_I y R_{II} respectivamente. Y la notación para los transpuestos de los operadores es similar.

En la discusión se considera al subespacio $S \subset D$. Los elementos de S serán llamados *lisos*. Cuando $u = \{u_I, u_{II}\} \in S$ (esto es cuando u es liso), con $u_I \in D_I$ y $u_{II} \in D_{II}$ se dirá que ambos son extensiones lisas una de la otra.

DEFINICION 3.1 Un subespacio lineal $S \subset D$ se dice que es una relación de lisura si cualquier $u_I \in D_I$ posee por lo menos una extensión lisa $u_{II} \in D_{II}$, e inversamente cualquier $u_{II} \in D_{II}$ posee por lo menos una extensión lisa $u_I \in D_I$.

El mapeo $\tau: D \longrightarrow D$ definido en cualquier $u = \{u_I, u_{II}\} \in D$ por:

$$\tau u = \{u_I, -u_{II}\} \quad (3.3)$$

será usado. Claramente τ es su propio inverso ya que:

$$\tau \tau u = u \text{ por lo que } \tau^2 = 1$$

además tiene las siguientes propiedades:

$$\langle Ru, v \rangle = \langle R \tau u, R \tau v \rangle \quad (3.4a)$$

$$N_R = \tau(N_R) \quad ; \quad N_{R^*} = \tau(N_{R^*}) \quad (3.4b)$$

la relación se sigue ya que:

$$\langle Ru, v \rangle = \langle R(u_I, u_{II}), (v_I, v_{II}) \rangle = \langle R_I u_I, v_I \rangle + \langle R_{II} u_{II}, v_{II} \rangle \quad \text{y}$$

$$\langle R\tau u, \tau v \rangle = \langle R(u_I, -u_{II}), (v_I, -v_{II}) \rangle = \langle R_I u_I, v_I \rangle + \langle R_{II}(-u_{II}), (-v_{II}) \rangle$$

mientras que para la (3.4b):

sea $u \in N_R$, aplicando τ a u : $\tau u = \{u_I, -u_{II}\}$ y $u_I \in N_{R_I}$ también $R(-u_{II}) = -R_{II} u_{II} = 0$, por lo que $-u_{II} \in N_{R_{II}}$ y $\tau(u) \in N_R$.

Por otro lado sea $M \subset D$ la imagen de S bajo τ ; esto es:

$$M = \tau(S) \quad (3.5)$$

y tenemos que observar que M es necesariamente una relación de lisura cuando S lo es.

Observación: Mas aún, cuando $S \subset D$ es una relación de lisura, se tiene:

$$D = M + S \quad (3.6)$$

ya que dado $u = \{u_I, u_{II}\} \in D$, tomemos $u'_I \in D_I$ y $u'_{II} \in D_{II}$ tal que $u_I = \{u'_I, u_{II}\} \in S$ y $u_{II} = \{u_I, u'_{II}\} \in S$. Definamos:

$$\dot{u} = \frac{1}{2}(u'_I + u_I, u'_{II} + u_{II}) \quad (3.7)$$

$$[u] = \{u'_I - u_I, u'_{II} - u_{II}\} \quad (3.8)$$

entonces $\dot{u} \in S$ y $[u] \in M$ ya que:

$$\dot{u} = \frac{1}{2}(u_I + u_{II}) \quad \text{con } u_I, u_{II} \in S$$

$$[u] = \tau u_I - \tau u_{II} \quad \text{con } \tau u_I, \tau u_{II} \in M$$

mientras que:

$$u = \dot{u} - \frac{1}{2}[u] \quad (3.9)$$

En el desarrollo general de la Teoría el par $\{S^l, S^r\}$ de relaciones de lisura serán consideradas. Los elementos $u \in S^l$ se dice que son lisos por la izquierda, mientras que los elementos $v \in S^r$ se dice que son lisos por la derecha. En forma similar, habrá extensiones lisas izquierda y derecha de elementos $u \in D_I$, o

alternativamente de elementos $u, v \in D_{II}$.

Para el caso de $\{S^l, S^r\}$, también tenemos que $M^l = \tau(S^l)$ y $M^r = \tau(S^r)$. Y la ec. (3.9) conduce a dos representaciones para los elementos $u \in D$, dada por:

$$u = \dot{u}^l - \frac{1}{2}[u]^l = \dot{u}^r - \frac{1}{2}[u]^r \quad (3.10)$$

donde $\dot{u}^l \in S^l$, $[u]^l \in M^l$, $\dot{u}^r \in S^r$ y $[u]^r \in M^r$.

DEFINICION 3.2: El par $\{S^l, S^r\}$ de relaciones de lisura se dice que es conjugado, regular, o completamente regular, respectivamente, cuando el par $\{S^l, S^r\}$ es conjugado, regular, o completamente regular para R , en el sentido de la definición 2.3.

PROPOSICION 3.1: Si $\{S^l, S^r\}$ conjugado regular de relaciones de lisura, entonces el par $\{M^l, M^r\}$ es también un par conjugado regular de relaciones de lisura.

DEMOSTRACION: Por hipótesis tenemos que:

$$(i) \langle Ru, v \rangle = 0 \quad \forall u \in S^l \text{ y } v \in S^r$$

$$(ii) S^l \supset N_R \text{ y } S^r \supset N_{R^*}$$

Sea $u \in S^l$ y $v \in S^r$ por (3.4a) y la hipótesis (i)

$$\langle Ru, v \rangle = \langle R\tau u, \tau v \rangle = 0 \quad \forall \tau u \in M^l \text{ y } \tau v \in M^r$$

sea $u \in N_R$ ya que M^l es la imagen de S^l bajo τ , por (ii)

$u \in S^l$ y $\tau u \in M^l$, por lo que usando (3.4b) $\tau(N_R) = N_{R^*} \subset M^l$.

Análogamente se demuestra que $\tau(N_{R^*}) = N_R \subset M^r$. Y la proposición se sigue. ■

Con las ideas expuestas, se está en condiciones para establecer la caracterización abstracta de las *Fórmulas de Green para operadores en campos discontinuos*. Esto se establece por medio del siguiente teorema:

TEOREMA 3.1: Sean $P, Q, B, C: D \longrightarrow D^*$ dados. Asumamos que:

- (a) $P-B$ y $Q-C$ son adjuntos formales
- (b) $R = P - B - (Q - C)^*$
- (c) El par $\{S^l, S^r\}$ es conjugado regular de relaciones de lisura para el operador R

Entonces:

(i) Los pares $\{S^l, S^r\}$ y $\{M^l, M^r\}$ constituyen una fórmula de Green abstracta en el sentido fuerte para el operador $P-B$

(ii) La ecuación

$$P - B - J = Q^* - C^* - K^* \quad (3.11)$$

es una fórmula de Green, en el sentido fuerte, para $P-B$, si $J, K: D \longrightarrow D^*$ están definidos por:

$$2\langle Ju, v \rangle = -\langle R[u]^l, \dot{v}^r \rangle \quad (3.12a)$$

$$2\langle K^*u, v \rangle = \langle R\dot{u}^l, [v]^r \rangle \quad (3.12b)$$

$$(iii) S^l = N_J \quad ; \quad S^r = N_K \quad (3.13a)$$

$$M^l = N_{K^*} \quad ; \quad M^r = N_J \quad (3.13b)$$

DEMOSTRACION: (i) En vista de la observación 3.1 está claro que:

$$D = S^l + M^l = S^r + M^r$$

entonces por las definiciones 2.3, 2.4 y 2.9, solamente resta por probar que el par $\{M^l, M^r\}$ es conjugado regular para R , y esto está demostrado en la proposición 3.1. Mientras que los resultados (ii) y (iii) se siguen directamente de la aplicación del teorema 2.3. Y el teorema queda demostrado. ■

El siguiente corolario es útil cuando se efectúan cálculos para determinar a los operadores J y K^* .

COROLARIO 3.1: Bajo las hipótesis del teorema 3.1, se tiene lo siguiente:

$$\langle Ju, v \rangle = -\langle Ri[u]^L, \dot{v}^r \rangle \quad (3.14a)$$

$$\langle K^*u, v \rangle = \langle Ri\dot{u}^L, [v]^r \rangle \quad (3.14b)$$

DEMOSTRACION: Ya que $[u]^L = \{[u]^L, [u]^L_I\} \in M^L$ entonces $\tau[u]^L = \{[u]^L, -[u]^L_I\} \in S^L$, tomamos $\dot{v}^r \in S^r$. De este modo aplicando R a $[u]^L$ y a \dot{v}^r , se tiene lo siguiente:

$$\langle R[u]^L, \dot{v}^r \rangle = \langle Ri[u]^L, \dot{v}^r \rangle + \langle Ri_I[u]^L, \dot{v}^r \rangle \quad (a.3.1)$$

ya que:

$$\langle R\tau[u]^L, \dot{v}^r \rangle = 0 \quad \forall \tau[u]^L \in S^L \text{ y } \dot{v}^r \in S^r \quad (b.3.1)$$

por ser $\{S^L, S^r\}$ un par de subespacios conjugados. Pero:

$$\begin{aligned} \langle R\tau[u]^L, \dot{v}^r \rangle &= \langle R\{[u]^L - [u]^L_I\}, \{\dot{v}^r, \dot{v}^r_I\} \rangle = \\ &= \langle Ri[u]^L, \dot{v}^r \rangle - \langle Ri_I[u]^L_I, \dot{v}^r_I \rangle = \\ &= \langle Ri[u]^L, \dot{v}^r \rangle - \langle Ri_I[u]^L, \dot{v}^r \rangle \quad (c.3.1) \end{aligned}$$

ya que Ri actúa solo en la parte $[u]^L$ de $[u]^L$, de igual forma para Ri_I , usando (c.3.1) y (b.3.1) obtenemos:

$$\langle Ri_I[u]^L, \dot{v}^r \rangle = \langle Ri[u]^L, \dot{v}^r \rangle$$

sustituyendo en (a.3.1)

$$\langle R[u]^L, \dot{v}^r \rangle = 2\langle Ri[u]^L, \dot{v}^r \rangle \quad (d.3.1)$$

finalmente, de la ec. (3.12a) y (d.3.1) obtenemos la relación (3.14a). En forma análoga se demuestra (3.14b).

Y el corolario queda demostrado. ■

CAPITULO IV.

FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIOS.

● INTRODUCCION.

En éste capítulo presentamos la aplicación de la metodología presentada en los capítulos II y III principalmente, a operadores P y Q definidos en un intervalo particionado en E partes, no necesariamente iguales. Y P representa al operador para ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de orden M .

La presentación se hará en forma general, pero será seguida por un ejemplo particular para el caso en que el orden del operador P es $M=2$ y su dominio está dividido en tres partes (no necesariamente iguales). En la segunda parte discutiremos como la imposición de restricciones a la información no prescrita en el problema de valores a la frontera (cap. I), conduce a algoritmos diferentes.

● FORMULAS DE GREEN PARA OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIOS.

Apliquemos la Teoría Algebraica a operadores lineales de ecuaciones diferenciales en una variable independiente. De este modo, sea Ω el dominio de definición de tal operador, y será un intervalo de la recta real; por simplicidad y sin pérdida de generalidad lo tomamos igual al segmento unitario. Así la cerradura de Ω es $[0,1]$. Mientras que al operador diferencial lo definimos por:

$$\mathcal{L}u = \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k u}{dx^k} \quad (4.1)$$

donde los coeficientes $\{a_k\}_{k=0}^N$ los suponemos suficientemente diferenciables en Ω . De manera que nos planteamos el siguiente problema:

Asumimos que el operador diferencial definido en (4.1) esta definido en $\Omega = [0, 1]$ y deseamos construir una Fórmula de Green, en el sentido de la teoría, cuando a Ω lo dividimos en E subintervalos (no necesariamente iguales). Cuyos puntos nodales interiores son un conjunto de puntos finito en $(0, 1)$; los interiores son $\{x_i\}_{i=1}^{E-1}$ y los exteriores $x_0 = 0$, $x_E = 1$ y satisfacen que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_E = 1$.

De este modo, por inducción, podemos obtener que el adjunto formal de (4.1) esta dado por:

$$\mathcal{L}^* v = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{d^k a_k v}{dx^k} \quad (4.2)$$

y definimos a los operadores P y Q^* por:

$$\langle Pu, v \rangle = \int_0^1 v \mathcal{L}u dx \quad ; \quad \langle Q^* u, v \rangle = \int_0^1 u \mathcal{L}^* v dx \quad (4.3)$$

Por lo tanto si tenemos el caso $M=2$, entonces:

$$\mathcal{L}u = a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u \quad (p4.1a)$$

y consideremos el problema de valores a la frontera de la forma:

$$u(0) = g_{\partial_0} \quad ; \quad u(1) = g_{\partial_1} \quad (\text{p4.1b})$$

donde g_{∂_0} y g_{∂_1} son números dados, donde integrando por partes se obtiene:

$$\int_0^1 v \left\{ a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u \right\} dx = \int_0^1 u \left\{ \frac{d^2 a_2 v}{dx^2} - \frac{da_1 v}{dx} + a_0 v \right\} dx + \left(a_2 v \frac{du}{dx} - u \frac{da_2 v}{dx} + a_1 uv \right) \Big|_0^1 \quad (\text{p4.2})$$

o alternativamente:

$$\int_0^1 v \sum_{k=0}^2 a_k \frac{d^k u}{dx^k} dx = \int_0^1 u \sum_{k=0}^2 (-1)^k \frac{d^k a_k v}{dx^k} dx + \sum_{j=0}^1 \left(\sum_{k=j}^1 (-1)^{k-j} \frac{d^{k-j} a_{k+1} v}{dx^{k-j}} \right) \frac{d^j u}{dx^j} \Big|_0^1 \quad (\text{p4.3})$$

Quando el orden del operador es M (ec.4.1), es claro que los operadores valuados en funciones $P, Q^* : D \longrightarrow D^*$, ver Capítulo II y la referencia [5], definidos en (4.3) son adjuntos formales. Y por inducción via (p4.3) podemos definir los términos de frontera $B, C^* : D \longrightarrow D^*$ por:

$$\langle (B-C^*)u, v \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=j}^{N-1} (-1)^{k-j} \frac{d^{k-j} a_{k+1} v}{dx^{k-j}} \right) \frac{d^j u}{dx^j} \Big|_0^1 \quad (4.3)$$

(esta representación será útil para la descomposición de $B-C^*$ en los nodos interiores, ver Cap. I), por lo tanto asumiremos que:

$$\langle (P-Q^*)u, v \rangle = \langle (B-C^*)u, v \rangle \quad (4.4)$$

(por las relaciones (4.1)-(4.3)) es una fórmula de Green en el sentido de la Teoría. Sin embargo esta relación no se satisface, Cap. III, cuando Ω se particiona en E intervalos; pero podemos presentar la relación de Green:

$$\langle (P-B-Q^*+C^*)u, v \rangle = \langle Ru, v \rangle \quad (4.5)$$

que se satisface en Ω particionado. Donde la forma bilineal R esta dada por:

$$R = \sum_{\alpha=1}^{E-1} R\alpha \quad (4.6)$$

donde a $R\alpha$ lo podemos asociar con la contribución de los nodos interiores correspondientes $\{x_i\}_{i=1}^{E-1}$, y a su vez podemos descomponerlo en parte derecha e izquierda, ver capítulo II.

$$R\alpha = R\alpha^- + R\alpha^+ \quad (4.7)$$

con $\alpha=1, \dots, E-1$

Ahora bien, siguiendo el ejemplo ilustrativo inicial, supongamos que a Ω lo dividimos en $E=3$ partes (no necesariamente iguales, ver fig. 4.1). Por lo tanto, por propiedades de la integral la ec. (p4.2) podemos escribirla como:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^3 \int_{x_{e-1}}^{x_e} v \{ a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u \} dx = \\ & = \sum_{e=1}^3 \left\{ \int_{x_{e-1}}^{x_e} u \left(\frac{d^2 a_2 v}{dx^2} - \frac{da_1 v}{dx} + a_0 v \right) dx + (a_2 v \frac{du}{dx} - u \frac{da_2 v}{dx} + a_1 uv) \Big|_{x_{e-1}}^{x_e} \right\} \quad (p4.4a) \end{aligned}$$

y la forma bilineal R esta dada por:

$$R = \sum_{\alpha=1}^2 R_{\alpha} \quad (\text{p4.4b})$$

donde en B hemos agrupado los valores de frontera prescritos (p4.1b) y en $-C^*$ a los valores de frontera complementarios, de la siguiente forma:

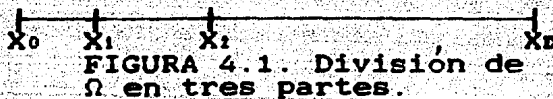
$$\langle Bu, v \rangle = (a_1 uv - u \frac{da_1 v}{dx}) \Big|_0^1 \quad (\text{p4.4c})$$

$$-\langle C^* u, v \rangle = (a_1 v \frac{du}{dx}) \Big|_0^1 \quad (\text{p4.4d})$$

por lo tanto en forma explicita la ec. (p4.4b) esta dada por:

$$R = - \sum_{e=1}^2 [a_1 v \frac{du}{dx} - u \frac{da_1 v}{dx} + a_1 uv]_{x_e} \quad (\text{p4.5})$$

donde el corchete significa el salto del operador, Cap. III, y el subindice x_e significa que ha de evaluarse en tal nodo interior.



Por ejemplo si tomamos al primer nodo x_1 ($\alpha=1$) tendremos:

$$R_{x_1} = R_{x_1^-} + R_{x_1^+} \quad (\text{p4.6a})$$

donde:

$$\langle R_{x_1^-} u, v \rangle = (a_1 v \frac{du}{dx} - u \frac{da_1 v}{dx} + a_1 uv)_{x_1^-} \quad (\text{p4.6b})$$

$$\langle Rx_i u, v \rangle = -(a_i v \frac{du}{dx} - u \frac{da_i v}{dx} + a_i uv) x_i \quad (p4.6c)$$

ahora bien estas dos últimas relaciones las podemos escribir, por sugerencia de las ecs. (p4.3) y (4.3), en la siguiente forma alternativa:

$$\langle Rx_i^- u, v \rangle = \sum_{j=0}^i q_{2-j-1}(v) x_i^- \frac{d^j u x_i^-}{dx^j} \quad (p4.6b')$$

$$\langle Rx_i^+ u, v \rangle = -\sum_{j=0}^i q_{2-j-1}(v) x_i^+ \frac{d^j u x_i^+}{dx^j} \quad (p4.6c')$$

donde:

$$q_j(v) = \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{d^k a_{2+k-j} v}{dx^k} \quad \text{para } j=0,1 \quad (p4.6d')$$

Ahora bien continuando con el caso general, facilmente podemos inducir de las relaciones (p4.6b'-d') que cuando particionamos Ω en E subintervalos y el orden del operador definido en (4.1) es M , que $R\alpha^{\pm}$ (ec. (4.7)) esta dada por:

$$\langle R\alpha^- u, v \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} q_{N-j-1}(v) \alpha^- \frac{d^j u \alpha^-}{dx^j} \quad (4.8a)$$

$$\langle R\alpha^+ u, v \rangle = -\sum_{j=0}^{N-1} q_{N-j-1}(v) \alpha^+ \frac{d^j u \alpha^+}{dx^j} \quad (4.8c)$$

y

$$q_j(v) = \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{d^k a_{N+k-j} v}{dx^k} \quad \text{para } j=0, \dots, M-1 \quad (4.8c)$$

donde $u_{\alpha^{\pm}} = u(x_{\alpha^{\pm}})$ significa la evaluación de la función u por la derecha y por la izquierda del nodo x_{α} , respectivamente; similarmente para $q_j(v)_{\alpha^{\pm}}$. Estas relaciones son útiles para la construcción de la fórmula de Green cuando $[0,1]$ lo particionamos

arbitrariamente, ya que permiten una descomposición del operador $R\alpha$ para cada $\alpha=1, \dots, E-1$.

En lo siguiente consideraremos que los coeficientes $\{a_k\}_{k=0}^M$ son de clase $C^M(X_{\alpha-1}, X_\alpha)$ (dentro de cada uno de los subintervalos $\Omega_\alpha=1, 2, \dots, E$), pero asumiremos que pueden tener saltos arbitrarios así como en sus derivadas en cada uno de los nodos interiores $\{x_k\}_{k=1}^E$. De este modo para construir una Fórmula de Green para el caso en que P y Q están definidos en campos discontinuos $(\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^E \Omega_\alpha)$, esto es $D=D_1 \oplus \dots \oplus D_E$, ver Capítulo III. Se conviene en considerar cada $R\alpha$ por separado (ecs. (4.6)-(4.8)). De éste modo de acuerdo a lo expuesto en el Cap. III definimos dos condiciones de lisura para cada uno de los nodos interiores, debe observarse que su elección depende de la aplicación específica. Por lo tanto aplicando el resultado del Corolario 3.1, cap. III, definamos:

$$\langle J\alpha u, v \rangle = -\langle R\alpha - [u]_\alpha^l, \dot{v}_\alpha^r \rangle ; \quad \langle K_\alpha^* u, v \rangle = \langle R\alpha - \dot{u}_\alpha^l, [v]_\alpha^r \rangle \quad (4.9)$$

ahora bien, presentemos las relaciones de lisura:

Para cada $\alpha=1, \dots, E-1$ fijo

- a) Sea $S_\alpha^l \subset D$ el subespacio lineal de funciones continuas con sus derivadas hasta de orden $M-1$ en el nodo X_α .
- b) Sea $S_\alpha^r \subset D$ el subespacio lineal de funciones $v \in D$ para las cuales $q_j(v)$ está dada por (4.8c) y es continua en X_α , para $j=0, \dots, M-1$.

entonces estas dos condiciones de lisura son apropiadas en aplicaciones para las cuales la información no prescrita es continua con sus derivadas de orden $M-1$, en el problema de valores a la frontera (p4.1). También es directo verificar que el par

$\{ S_\alpha^l, S_\alpha^r \}$ de relaciones de lisura, para cada $\alpha=1, \dots, E-1$, es conjugado regular para el operador $R_\alpha: D \rightarrow D^*$, en el sentido de la definición 3.2 del capítulo anterior.

Con este argumento definimos:

$$\langle J_\alpha^j u, v \rangle = -\dot{q}_{M-j-1}(v)_\alpha \left[\frac{d^j u}{dx^j} \right]_\alpha \quad (4.10a)$$

$$\langle (K_\alpha^j)^* u, v \rangle = [q_{M-j-1}(v)]_\alpha \frac{d^j \dot{u}_\alpha}{dx^j} \quad (4.10b)$$

para $j=0, \dots, M-1$ y $\alpha=1, \dots, E-1$

donde el paréntesis cuadrado y el punto representan el salto y promedio del operador, respectivamente; y el subíndice α indica que el operador se evaluará en el nodo X_α , de este modo los operadores J_α y K_α^* asociados al par $\{ S_\alpha^l, S_\alpha^r \}$, por (4.9) están dados por:

$$J_\alpha = \sum_{j=0}^{M-1} J_\alpha^j \quad ; \quad K_\alpha^* = \sum_{j=0}^{M-1} (K_\alpha^j)^* \quad (4.11)$$

definamos:

$$J^j = \sum_{\alpha=1}^{E-1} J_\alpha^j \quad ; \quad (K^j)^* = \sum_{\alpha=1}^{E-1} (K_\alpha^j)^* \quad (4.12)$$

por lo tanto, en suma, tenemos que:

$$J = \sum_{\alpha=1}^{E-1} J_\alpha = \sum_{j=0}^{M-1} J^j \quad ; \quad K^* = \sum_{\alpha=1}^{E-1} K_\alpha^* = \sum_{j=0}^{M-1} (K^j)^* \quad (4.13)$$

de este modo con la construcción realizada la relación:

$$P-B-J = Q^*-C^*-K^* \quad (4.14)$$

se satisface en $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^E \Omega_\alpha$ y es la fórmula de Green que deseábamos obtener. Esto es, se satisface cuando $D=D_1 \oplus \dots \oplus D_E$, cuyos elementos

son funciones con saltos arbitrarios en los nodos interiores
 $\{ X_{\alpha} \}_{\alpha=1}^{E-1}$.

♦ ALTERNATIVAS DE LA OBTENCIÓN DE LA INFORMACIÓN, DE LA
 FÓRMULA DE GREEN, PARA EL OPERADOR DIFERENCIAL ORDINARIO.

Consideremos el problema de valores a la frontera (donde el problema de valores iniciales es incluido como caso especial), el cual consiste en encontrar una solución $u \in D$ a la ecuación:

$$Cu = f_{\Omega} \quad \text{con } \Omega = (0,1) \quad (4.15a)$$

y

$$Bu = g_{\partial\Omega} \quad \text{en la frontera} \quad (4.15b)$$

por definición supongamos que la solución (no prescrita) al problema es continua en Ω así como en sus derivadas hasta de orden $M-1$; siendo M el orden del operador C , es posible considerar casos en los que la solución tiene saltos arbitrarios en los nodos, ver ref. [4], pero con la hipótesis puesta la primera parte de la ec. (4.10) es idénticamente cero.

Escogiendo $B, C^* : D \rightarrow D^*$ apropiadamente con $f, g \in D^*$, las ecuaciones variacionales bosquejadas en el cap. I (1.14-1.16), en particular (1.16), tomando $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} v f_{\Omega} dx$ podemos obtener:

$$\langle Q^* u', \varphi^{\alpha} \rangle - \langle C^* u', \varphi^{\alpha} \rangle - \langle K^* u', \varphi^{\alpha} \rangle = \langle f, \varphi^{\alpha} \rangle - \langle g, \varphi^{\alpha} \rangle \quad (4.16)$$

para $\alpha=1, \dots, N$

donde $\{\varphi^{\alpha}\}_{\alpha=1}^N \subset D$ son un sistema de N funciones de peso linealmente independientes. Y en donde $\langle Q^* u', \varphi^{\alpha} \rangle$, $\langle C^* u', \varphi^{\alpha} \rangle$, $\langle K^* u', \varphi^{\alpha} \rangle$ contienen la información en el interior de los nodos, las condiciones de frontera complementarias y los promedios en los nodos interiores $\{ X_{\alpha} \}_{\alpha=1}^{E-1}$ respectivamente.

Eliminar la información de la solución no prescrita en el

interior de cada uno de los subintervalos de la partición de Ω es equivalente a pedir que la condición:

$$Q\varphi^\alpha = 0 \quad \text{o bien} \quad \mathcal{L}^* \varphi^\alpha = 0 \quad (4.17)$$

se satisfaga en el interior de cada subintervalo (ver ref.[4]), esto es cuando $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(X_i)$ con $X_{\alpha-1} < X_i < X_\alpha$. Por lo que (4.16) queda como:

$$\langle C^* u', \varphi^\alpha \rangle + \langle K^* u', \varphi^\alpha \rangle = \langle g, \varphi^\alpha \rangle - \langle f, \varphi^\alpha \rangle \quad (4.16')$$

y esta eliminación conduce a un esquema de solución al problema (4.15) en *Diferencias Finitas*, ya que la información obtenible de (4.16') esta enfocada únicamente en los nodos $\{ X_e \}_{e=0}^E$ de la partición de Ω .

Ahora bien, debe observarse que los promedios $\langle K^* u, \varphi^\alpha \rangle$ de la solución exacta coincide con sus valores en los nodos cuando la solución no prescrita lo hace. Observando la segunda parte de (4.10) vemos que la información acerca de la derivada de orden j ($j=0, \dots, M-1$) en el nodo X_e esta dada por $(K_\alpha^j)^* u$. De este modo escogiendo $\{ \varphi^\alpha \}_{\alpha=1}^N$ apropiadamente podemos obtener la información deseada de la construcción hecha en la primera parte. Entre los casos principales tendremos los siguientes:

Conocer en los nodos $\{ X_e \}_{e=0}^E$:

- 1.: El valor de la función y el de sus derivadas hasta de orden k (puede suceder que $k=M-1$) con $1 \leq k \leq M-1$, que satisfaga (4.15).
- 2.: El valor de la función solamente que satisfaga (4.15).
- 3.: El valor de las derivadas de la función hasta de orden k (puede suceder que $k=M-1$) con $1 \leq k \leq M-1$, que satisfice (4.15).

4.: El valor de la función en algunos nodos y el valor de sus derivadas hasta de orden k (posiblemente $k=M-1$) con $1 \leq k \leq M-1$ en los restantes, que satisface al problema (4.15).

Observando la segunda ecuación de (4.10) y las definiciones (4.11-13) es directo obtener cuales son las restricciones que se deben imponer al término de promedios generalizados de la solución no prescrita. De este modo tenemos lo siguiente:

1'.: Para obtener el algoritmo que de la solución a la ec. (4.15) que se pide en (1) es necesario escoger $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ tal que:

$$\langle (K^j)^* u, \varphi^\alpha \rangle = \langle K^j \varphi^\alpha, u \rangle \neq 0 \quad (\text{p4.7a})$$

para $j=0, \dots, k$ con $0 \leq k \leq M-1$

y esto se garantiza si:

$$K^j \varphi^\alpha \neq 0 \quad (\text{p4.7b})$$

para $j=0, \dots, k$ con $0 \leq k \leq M-1$

y a la vista de la segunda parte de (4.10):

$$[q_\gamma(\varphi^\alpha)]_\beta \neq 0 \quad (\text{p4.7c})$$

para $\alpha=1, \dots, N$; $\beta=1, \dots, E-1$; $\gamma=0, \dots, k$ con $0 \leq k \leq M-1$.

2'.: Si deseamos conocer solamente el valor de la función en los nodos, necesitamos escoger $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ tal que $q_j(\varphi^\alpha)$ anule las derivadas de orden $j=1, \dots, M-1$ de u , esto es que:

$$\langle (K^j)^* u, \varphi^\alpha \rangle = \langle K^j \varphi^\alpha, u \rangle = 0 \quad (\text{p4.8a})$$

para $j=1, \dots, M-1$

y esto se garantiza si:

$$K^j \varphi^\alpha = 0 \quad (\text{p4.8b})$$

para $j=1, \dots, M-1$

y en vista de (4.10):

$$[q_{\gamma}(\varphi^{\alpha})]_{\beta} = 0 \quad (\text{p4.8c})$$

para $\alpha=1, \dots, N$; $\beta=1, \dots, E-1$; $\gamma=0, \dots, M-2$

3' : En este punto se desea obtener información solo del valor de las derivadas hasta de orden k con $1 \leq k \leq M-1$.

Para esto escogemos a las funciones de peso tales que:

$$\langle (K^0)^* u, \varphi^{\alpha} \rangle = \langle K^0 \varphi^{\alpha}, u \rangle = 0 \quad (\text{p4.9a})$$

$$\langle (K^j)^* u, \varphi^{\alpha} \rangle = \langle K^j \varphi^{\alpha}, u \rangle \neq 0 \quad (\text{p4.9b})$$

esto es posible si:

$$K^0 \varphi^{\alpha} = 0 \quad (\text{p4.9c})$$

$$K^j \varphi^{\alpha} \neq 0 \quad (\text{p4.9d})$$

para $j=1, \dots, k$ con $1 \leq k \leq M-1$

esto es que:

$$[q_{k-1}(\varphi^{\alpha})]_{\beta} = 0 \quad (\text{p4.9e})$$

$$[q_{\gamma}(\varphi^{\alpha})]_{\beta} \neq 0 \quad (\text{p4.9f})$$

para $\alpha=1, \dots, N$; $\beta=1, \dots, E-1$; $\gamma=0, \dots, k$ con $1 \leq k \leq M-2$

4' : En este tipo de algoritmo se desea obtener información de la función solamente en algunos nodos por decir en $\{ X_k \}_{k=1}^{E_k} \subset \{ X_{\alpha} \}_{\alpha=1}^E$, y el valor de su derivada hasta de orden k en los restantes, es necesario que el algoritmo combine las ideas de los puntos 2' y 3'. De este modo, por ejemplo, escogiendo $\{ \varphi^{\alpha} \}_{\alpha=1}^N$ tal que se satisfagan las condiciones:

$$[q_{\gamma}(\varphi^{\alpha})]_{\beta k} = 0 \quad (\text{p4.10a})$$

para $\alpha=1, \dots, N$; $\beta k=1k, \dots, Ek$; $\gamma=0, \dots, M-2$

junto con las condiciones:

$$[q_{k-1}(\varphi^{\alpha})]_{\beta} = 0 \quad (\text{p4.10b})$$

$$[q_{\gamma}(\varphi^{\alpha})]_{\beta} \neq 0 \quad (\text{p4.10c})$$

para $\alpha=1, \dots, N$; $\beta = \text{COMPLEMENTO}[\{ X_k \}_{k=1}^{E_k}]$

$\gamma=0, \dots, k$ con $1 \leq k \leq M-2$

entonces el algoritmo dara la solución de los valores de la función solamente en los nodos $\{ X_k \}_{k=1}^{E_k}$, mientras

que en los restantes el valor de su derivada hasta de orden k .

Pueden existir más variaciones de tipos de algoritmos obtenibles, sin embargo los expuestos constituyen tipos básicos de los obtenibles de la construcción que se ha hecho en la sección previa.

Es necesario mencionar, desde ahora, que los algoritmos implementados corresponden a los casos 1 y 2; para cuando el orden del operador \mathcal{C} es $M=2$ y se satisfacen, como condiciones a la frontera, el valor de la función u en $X_0=0$ y $X_1=1$.

CAPITULO V.

ALGORITMOS DE ALTA CONVERGENCIA.

● INTRODUCCION.

En este capítulo presentamos la aplicación de la discusión general hecha en el capítulo anterior al caso en que el orden del operador dado en la ec.(4.1) es $M=2$ y construimos la fórmula de Green (4.14) para éste caso, en donde $\Omega=[0,1]$ está dividido en E subintervalos. En base a la construcción que se haga seguiremos a la elaboración de los dos algoritmos de alta convergencia, los cuales son implementados en este trabajo, y en base a lo discutido al final del capítulo IV. Finalmente hablaremos del error inherente a la construcción en base a la Teoría; así como también se hará una discusión acerca del error surgido de la manipulación de números de precisión finita en computadora (en nuestro caso el sistema HP-9000).

● RESUMEN PRELIMINAR.

La construcción que se llevará a cabo está basada en dos principios variacionales aplicables a cada problema de valores a la frontera lineal (ver cap.I, y refs. [3]-[8]). El primero en términos de los Datos Prescritos:

$$\langle P_u, v \rangle - \langle B_u, v \rangle - \langle J_u, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle - \langle j, v \rangle \quad \forall v \in D \quad (5.1)$$

y el segundo en términos de los Datos no Prescritos:

$$\langle Q_u^*, v \rangle - \langle C_u^*, v \rangle - \langle K_u^*, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle - \langle j, v \rangle \quad \forall v \in D \quad (5.2)$$

donde D es el espacio de Funciones Admisibles, D^* el Algebraico Dual de D ; $f, g, j \in D^*$ son los datos prescritos, en el problema de valores a la frontera, de los operadores P_u , B_u y J_u

respectivamente. Adicionalmente $Q\bar{u}$, $C\bar{u}$, $K\bar{u}$ son los valores de la solución no prescrita, los valores a la frontera complementarios y los promedios generalizados en nodos interiores respectivamente (ver cap.I y la ref.[4]). La equivalencia entre los dos principios esta garantizada cuando:

$$P-B-J = Q^* - C^* - K^* \quad (5.3)$$

(ec. (1.14)) es una *Fórmula de Green* en el sentido de la Teoría.

Usando estas ideas, se construirán fórmulas en diferencias finitas para la ecuación diferencial lineal ordinaria de 2o. orden, cuyos coeficientes son también función de la variable independiente.

◆ **FORMULA DE GREEN PARA LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL ORDINARIA DE 2o. ORDEN.**

Tomemos la ecuación diferencial de la forma:

$$Cu = \frac{d^2 u}{dx^2} + 2a \frac{du}{dx} + (b + \frac{da}{dx})u = f_{\Omega} \quad (5.4a)$$

con $0 < x < 1$

y condiciones a la frontera:

$$u(0) = \xi_{\partial_0} \quad ; \quad u(1) = \xi_{\partial_1} \quad (5.4b)$$

donde $\Omega = [0, 1]$, ξ_{∂_0} y ξ_{∂_1} son número dados, y $a = a(x)$, $b = b(x)$ (las condiciones de frontera generales para este problema son:

$$e_1^\gamma u + e_1^\gamma \frac{du}{dx} = \begin{cases} \xi_{\partial_0} & \text{en } x=0 \\ \xi_{\partial_1} & \text{en } x=1 \end{cases} \quad \text{con } \gamma = 0, 1$$

y su discusión general esta dada en la referencia [5]).

De esta manera nos planteamos lo siguiente:

Enfocamos el problema planteado en (5.4) y construiremos una fórmula de Green para el caso en que $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^E \Omega_\alpha$.

Bajo esta delimitación, integrando por partes (5.4a) y por propiedades de la integral:

$$\sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} \{v \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^*v\} dx = \sum_{e=1}^E \left(v \frac{du}{dx} - uq \right)_{x_{e-1}}^{x_e} \quad (5.5a)$$

donde hemos tomado:

$$q = q(v) = \frac{dv}{dx} - 2av \quad (5.5b)$$

y \mathcal{L}^* , el adjunto formal de \mathcal{L} , es:

$$\mathcal{L}^*v = \frac{d^2v}{dx^2} - 2a \frac{dv}{dx} + \left(b - \frac{da}{dx} \right) v \quad (5.5c)$$

ahora bien, el miembro derecho de (5.5a) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left(v \frac{du}{dx} - uq \right)_{x_{e-1}}^{x_e} &= \left(v \frac{du}{dx} - uq \right)_0^1 + \sum_{e=1}^{E-1} \{ [uq]_{x_e} - [v \frac{du}{dx}]_{x_e} \} = \\ &= \left(v \frac{du}{dx} - uq \right)_0^1 + \sum_{e=1}^{E-1} \{ [q]_e \dot{u}_e - [v]_e \frac{d\dot{u}_e}{dx} + \dot{q}_e [u]_e - \dot{v}_e \left[\frac{du}{dx} \right]_e \} \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde hemos asumido que si a, δ operadores:

$$[a\delta]_e = \dot{a}_e [\delta]_e + [a]_e \dot{\delta}_e$$

donde los corchetes significan salto y el punto promedio del operador en el nodo en cuestión, ver cap.III; el índice e se refiere a que el salto o promedio ha de evaluarse en el nodo x_e . Sustituyendo (5.6) en (5.5a) y ordenando términos.

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v \mathcal{L} u dx + (uq)_0^1 - \sum_{e=1}^{E-1} \{ \dot{q}_e [u]_e - \dot{v}_e \left[\frac{du}{dx} \right]_e \} = \\ & = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} u \mathcal{L}^* v dx + \left(v \frac{du}{dx} \right)_0^1 + \sum_{e=1}^{E-1} \{ [q]_e \dot{u}_e - [v] \frac{d\dot{u}}{dx} \} \end{aligned} \quad (5.7)$$

esta ecuación es una fórmula de Green en el sentido de la Teoría para cuando Ω está particionado en E subintervalos y corresponde a la ec. (5.3).

Por otro lado, ya que usamos $\{ X\alpha \}_{\alpha=0}^E$ como los nodos que delimitan $\Omega \subset \Omega$, entonces vía el problema (5.4a) podemos establecer que:

$$\sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v \mathcal{L} u dx = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v f \rho dx \quad (5.8)$$

esta relación es válida aún cuando u sea discontinua en los nodos, con tal de que sea de clase \mathcal{C}^1 dentro de cada subintervalo. De manera que si u satisface (5.8) para cualquier $v \in \mathcal{C}^1(X\alpha_{-1}, X\alpha)$, pero es discontinua en los nodos, entonces la ec. (5.4a) se satisface en el interior de cada subintervalo por separado. De este modo hemos supuesto (y supondremos en lo siguiente) que el espacio lineal de funciones admisibles D , para el problema planteado (5.4), es el espacio de funciones de clase \mathcal{C}^1 dentro de cada subintervalo por separado pero que pueden tener discontinuidades en los nodos.

El autor de la *Teoría Algebraica* establece una relación variacional (ver ref. [6]) para las condiciones a la frontera (5.4b) de la forma:

$$u(1)q(v)_1 - u(0)q(v)_0 = g_{\partial_1} q(v)_1 - g_{\partial_0} q(v)_0 \quad (5.9)$$

donde $q(v)$ está dado por (5.5b). De modo que u satisface (5.4b) si y solo si la ec. (5.9) se satisface para cualquier función

admisible $v \in D$.

Supondremos, por regla general, que la solución no prescrita para el problema (5.4) con su derivada, sea continua en los nodos. No toda función admisible de D satisface ésta condición y es necesario imponerla de alguna manera. Esto es sugerido, claramente por la ec.(5.6) en donde pediremos que u y u' sean continuas en los nodos, por lo tanto:

$$\sum_{e=1}^{E-1} \{ \dot{q}_e [u]_e - \dot{v}_e \left[-\frac{du}{dx} \right]_e \} = 0 \quad (5.10)$$

ahora bien, sumando las ecs.(5.8-10) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v \kappa u dx + u(1)q(v)_1 - u(0)q(v)_0 - \sum_{e=1}^{E-1} \{ \dot{q}_e [u]_e - \dot{v}_e \left[-\frac{du}{dx} \right]_e \} = \\ = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v f \rho dx + \xi_{\partial_1} q(v)_1 - \xi_{\partial_0} q(v)_0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

y es claro que $v \in D$ satisface (5.11) si satisface (5.8-10). Por lo tanto:

Dada una función admisible u , la relación (5.11) se satisface para cada función admisible v , si y solo si, u satisface (5.4a) en cada punto interior de los subintervalos, satisface las condiciones de frontera (5.4b) y es continua con su derivada en cada uno de los nodos interiores.

Y este es el principio variacional en términos de los datos prescritos para el problema de valores a la frontera (5.4) y corresponde a la ec.(5.1).

Ahora bien, usando (5.7) es claro que (5.11) es equivalente

a:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} u \mathcal{L} \delta dx + (v \frac{du}{dx})_0^1 + \sum_{e=1}^{E-1} \{ [q]_e \dot{u}_e - [v]_e \frac{d\dot{u}_e}{dx} \} = \\ & = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v f \rho dx + g_{\partial_1} q(v)_1 - g_{\partial_0} q(v)_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

esta ecuación corresponde a la relación variacional (5.2) en términos de los datos no prescritos.

Observando las ecs. (5.11-12). Tenemos que el lado izquierdo de (5.11) contiene únicamente términos prescritos; a saber $\mathcal{L}u$, los valores a la frontera de u , y los saltos de u y su derivada en los nodos interiores (estos últimos son requeridos ser cero (5.10) cuando se desea que la solución no prescrita se quiere que sea continua con su derivada). Por otro lado, el miembro izquierdo de (5.12) solo contiene términos de frontera que no son conocidos *a priori* (no prescritos), los que podemos descomponer en tres partes: los valores de frontera complementarios (en este caso la derivadas de u en $x_0=0$ y $x_E=1$), los promedios de u y de su derivada en los nodos interiores y los valores de v en el interior de cada subintervalo de partición (primera sumatoria).

Finalmente relacionamos la construcción (5.11) y (5.12) con los operadores de la ec. (5.3) por:

$$\langle Pu, v \rangle = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v \mathcal{L} u dx \quad ; \quad \langle Q\delta, v \rangle = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} u \mathcal{L} \delta dx \quad (5.13a)$$

$$\langle Bu, v \rangle = (uq)_0^1 \quad ; \quad \langle C\delta, v \rangle = (v \frac{d\dot{u}}{dx})_0^1 \quad (5.13b)$$

$$\langle Ju, v \rangle = \sum_{e=1}^{E-1} \{ \dot{v}_e [\frac{du}{dx}]_e - \dot{q}_e [u]_e \} ;$$

$$\langle K\delta, v \rangle = \sum_{e=1}^{E-1} \{ [v]_e \frac{d\dot{u}_e}{dx} - [q]_e \dot{u}_e \} \quad (5.13c)$$

y

$$\langle f, v \rangle = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} v f \Omega dx ;$$

$$\langle g, v \rangle = g_{\partial_0} q(v)_0 - g_{\partial_1} q(v)_1 ; \quad \langle j, v \rangle = 0 \quad (5.13d)$$

recordando lo expuesto al final de la primera parte del cap.IV. tomamos:

$$J = J^0 + J^1 \quad y \quad K^* = (K^0)^* + (K^1)^* \quad (5.14a)$$

con:

$$J^0 = \sum_{e=1}^{E-1} J_e^0 ; \quad J^1 = \sum_{e=1}^{E-1} J_e^1 ; \quad (K^0)^* = \sum_{e=1}^{E-1} (K_e^0)^* ; \quad (K^1)^* = \sum_{e=1}^{E-1} (K_e^1)^* \quad (5.14b)$$

donde:

$$\langle J_e^0 u, v \rangle = -\dot{q}_e [u]_e ; \quad \langle J_e^1 u, v \rangle = \dot{v}_e \left[-\frac{du}{dx} \right]_e \quad (5.14c)$$

$$\langle K_e^0 v, u \rangle = -[q]_e \dot{u}_e ; \quad \langle K_e^1 v, u \rangle = [v]_e \frac{du_e}{dx} \quad (5.14d)$$

Habiendo realizado la construcción requerida, planteada en el problema inicial, pasemos a la construcción de dos algoritmos, en diferencias finitas, de alta convergencia.

● DERIVACION DE DOS ALGORITMOS DE ALTA CONVERGENCIA EN DIFERENCIAS FINITAS.

Para obtener un esquema en diferencias finitas, es necesario eliminar la acción del operador \mathcal{L}^* sobre la función admisible $v \in D$ en el interior de los subintervalos e partición de Ω en la ec.(5.12). Para lograr esto tomamos una familia de funciones de peso $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset D$, donde cada una de las cuales satisface la ecuación adjunta homogénea:

$$\mathcal{L}^* \varphi^\alpha = 0 \quad (5.14)$$

dentro de cada subintervalo de partición (ver refs.[4],[5], segun-

da parte del cap. anterior). De este modo toda la información obtenible esta concentrada en los nodos y (5.12) se reduce a:

$$\begin{aligned} & \left(\varphi^\alpha \frac{du}{dx} \right)'_0 + \sum_{e=1}^{E-1} \{ [q(\varphi^\alpha)]_e \dot{u}_e - [\varphi^\alpha]_e \frac{d\dot{u}_e}{dx} \} = \\ & = \sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} \varphi^\alpha f_\Omega dx + g_{\partial_1} q(\varphi^\alpha)_1 - g_{\partial_0} q(\varphi^\alpha)_0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como fue apuntado al final del capítulo IV existen varias alternativas para obtener la información contenida en la ec.(5.15) por ejemplo si escogemos φ^α tal que $q(\varphi^\alpha)$ sea continua en todos los nodos interiores, entonces obtendremos solamente el valor de la derivada de la solución u en los nodos, etc.

Ahora bien, el motivo básico de este trabajo es la implementación de dos algoritmos derivados de la construcción hecha desde el capítulo IV hasta la ec.(5.15). Y correspondiendo a lo dicho al final del capítulo anterior serán tales que den información de la solución en:

+ el valor de la función y su derivada en los nodos (ALGORITMO 1)

+ el valor de la función solamente en los nodos (ALGORITMO 2)

Donde pediremos que la solución al problema u sea continua con su derivada en los nodos. Por lo que las relaciones (5.14c) son idénticamente cero en los nodos interiores. Con esta restricción a la solución u , el promedio de u y su derivada en todo nodo son idénticos a u y a la derivada de u respectivamente ($\dot{u}_e = u_e$ y $(\dot{u}_e)' = (u_e)'$), de aquí no incluimos el punto en lo que sigue.

Naturalmente, debemos elegir $\{ \varphi^\alpha \}_{\alpha=1}^N$ adecuadamente para construir los algoritmos planteados, sin embargo la condición (5.14) solamente se satisface para ecuaciones simples por φ^α en todo el intervalo Ω_α ; en general la familia de funciones $\{ \varphi^\alpha \}$ se asumirá que satisfacen tal condición en un número finito de puntos $\{ r_k \}_{k=1}^n \subset \Omega_\alpha$, llamados *puntos de colocación*. Esta relajación de la ec.(5.14) conduce a un error inherente a la construcción que sigue de la forma:

$$\sum_{e=1}^E \int_{x_{e-1}}^{x_e} u \mathcal{L}^* \varphi^\alpha dx = 0 (h^r) \quad (5.15b)$$

donde h es la norma de la partición y $r > 0$ es un entero, que se discutirá en la siguiente sección. De este modo los algoritmos que se construyen no dan los valores exactos de la solución en los nodos, pero pueden hacerse tan precisos como se deseen, dentro de las posibilidades del sistema computacional que se use. Bajo estas ideas, pasemos a construir los algoritmos planteados.

ALGORITMO 1. Para este algoritmo elegimos a las funciones de peso $\{ \varphi^\alpha \}_{\alpha=1}^N$ totalmente discontinuas en los nodos interiores. De manera que satisfagan $[\varphi^\alpha]_e \neq 0$ y $[q(\varphi^\alpha)]_e \neq 0$ en cualquier nodo x_e (ver la ec.(5.15)). De este modo para cada subintervalo $\Omega_\alpha = (x_{\alpha-1}, x_\alpha)$ hay dos funciones de peso linealmente independientes $\{ \varphi_1^\alpha, \varphi_2^\alpha \}$ las cuales satisfacen $\mathcal{L}^* \varphi_1^\alpha = \mathcal{L}^* \varphi_2^\alpha = 0$ y se toman idénticamente cero fuera de Ω_α (ver fig. 5.1). Esto conduce a $\{ \varphi_\gamma^\alpha \}_{\alpha=1}^E$ con $\gamma=1,2$; $N=2E$ funciones de peso linealmente independientes. De este modo la ec.(5.15) y usando las definiciones (5.13-14) conduce a:

$$\langle K_{\alpha-} \varphi_\gamma^\alpha, u' \rangle + \langle K_\alpha \varphi_\gamma^\alpha, u' \rangle = -\langle f, \varphi_\gamma^\alpha \rangle + 0(h^r) \quad (5.16a)$$

con $\alpha=2, \dots, E-1$; $\gamma=1,2$

$$\langle c_0 \varphi_\gamma^I, u' \rangle + \langle K_I \varphi_\gamma^I, u' \rangle = \langle g_0, \varphi_\gamma^I \rangle - \langle f, \varphi_\gamma^I \rangle + O(h^r) \quad (5.16b)$$

con $\alpha=1$; $\gamma=1,2$

$$\langle c_1 \varphi_\gamma^E, u' \rangle + \langle K_{E-1} \varphi_\gamma^E, u' \rangle = \langle g_1, \varphi_\gamma^E \rangle - \langle f, \varphi_\gamma^E \rangle + O(h^r) \quad (5.16c)$$

con $\alpha=E$; $\gamma=1,2$

alternativamente nos conducen a:

$$K_{\alpha-1}^{0\gamma} u_{\alpha-1} + K_\alpha^{0\gamma} u_\alpha + K_{\alpha-1}^{1\gamma} \frac{du_{\alpha-1}}{dx} + K_\alpha^{1\gamma} \frac{du_\alpha}{dx} = -\langle f, \varphi_\gamma^\alpha \rangle + O(h^r) \quad (5.16a')$$

con $\alpha=2, \dots, E-1$; $\gamma=1,2$

$$c_0^\gamma u_0^c + K_1^{0\gamma} u_1 + K_1^{1\gamma} \frac{du_1}{dx} = \langle g_0, \varphi_\gamma^I \rangle - \langle f, \varphi_\gamma^I \rangle + O(h^r) \quad (5.16b')$$

con $\alpha=1$; $\gamma=1,2$

$$c_1^\gamma u_E^c + K_{E-1}^{0\gamma} u_{E-1} + K_{E-1}^{1\gamma} \frac{du_{E-1}}{dx} = \langle g_1, \varphi_\gamma^E \rangle - \langle f, \varphi_\gamma^E \rangle + O(h^r) \quad (5.16c')$$

con $\alpha=E$; $\gamma=1,2$

donde del problema (5.4), ec.(5.15) y definiciones (5.14) tenemos que:

$$K_{\alpha-1}^{0\gamma} = -[q(\varphi_\gamma^\alpha)]_{\alpha-1} ; K_\alpha^{0\gamma} = -[q(\varphi_\gamma^\alpha)]_\alpha \quad (5.17a)$$

$$K_{\alpha-1}^{1\gamma} = [\varphi_\gamma^\alpha]_{\alpha-1} ; K_\alpha^{1\gamma} = [\varphi_\gamma^\alpha]_\alpha \quad (5.17b)$$

$$c_0^\gamma = \varphi_\gamma^I(0) ; c_1^\gamma = -\varphi_\gamma^E(1) ; u_0^c = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x_0} ; u_E^c = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x_E} \quad (5.17c)$$

donde las relaciones generales para cuando se aborda el problema de valores a la frontera general esta dada en la referencia [5].

ALGORITMO 2.: Observando la ec. (5.15) y definiciones (5.13-14), tenemos que una forma alternativa de expresar la primera es:

$$\langle C\tilde{u}', \varphi^\alpha \rangle - \langle (K^0)\tilde{u}', \varphi^\alpha \rangle - \langle (K^1)\tilde{u}', \varphi^\alpha \rangle = \langle f, \varphi^\alpha \rangle - \langle g, \varphi^\alpha \rangle \quad (5.18)$$

para $\alpha=1, \dots, N$

ahora bien, la información de valores de frontera complementarios están en $C\tilde{u}'$ y los valores nodales de la derivada de la solución están contenidas en $(K^0)\tilde{u}'$. De manera que si deseamos derivar un algoritmo que de como resultado el valor de la solución en los nodos, habremos de escoger la familia de funciones de peso tal que $C\varphi^\alpha=0$ y que $K^1\varphi^\alpha=0$. Denotemos a tal familia por $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ con $N=E-1$, siendo E el número de particiones de Ω . Y pueden ser construidas de la siguiente forma: para cada $\alpha = 1, \dots, E-1$ la función φ^α será cero fuera de $(X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1})$; requerimos que sea continua también en X_α , esto es $\varphi^\alpha(X_{\bar{\alpha}}) = \varphi^\alpha(X_{\hat{\alpha}})$, ver la fig. 5.1. De este modo se reduce a:

$$\langle K^0 \varphi^\alpha, u \rangle = \langle g, \varphi^\alpha \rangle - \langle f, \varphi^\alpha \rangle \quad (5.19)$$

$\alpha = 1, \dots, E-1$

o en forma alternativa:

$$\rho_{\alpha-1} u_{\alpha-1} + \rho_{\alpha} u_{\alpha+1} + \rho_{\alpha} u_{\alpha} = \langle f, \varphi^\alpha \rangle_{X_{\alpha-1}}^{X_{\alpha+1}} + 0(h^1) \quad (5.20a)$$

con $\alpha = 2, \dots, E-2$

$$\rho_1 u_2 + \rho_1 u_1 = \langle f, \varphi^1 \rangle_{X_0}^{X_2} - g^0(\varphi^1) + 0(h^1) \quad (5.20b)$$

$$\rho_{(E-1)} u_{E-2} + \rho_{E-1} u_{E-1} = \langle f, \varphi^\alpha \rangle_{X_{E-2}}^{X_E} - g^E(\varphi^{E-1}) + 0(h^1) \quad (5.20c)$$

donde:

$$\langle f, \varphi^\alpha \rangle_{X_{\alpha-1}}^{X_{\alpha+1}} = \int_{X_{\alpha-1}}^{X_{\alpha}} \varphi^\alpha f_{\Omega} dx + \int_{X_{\alpha}}^{X_{\alpha+1}} \varphi^\alpha f_{\Omega} dx \quad (5.21a)$$

$$g^0(\varphi^1) = \left(\frac{d\varphi^1}{dx} - 2a\varphi^1 \right)_{x=0} \varepsilon_{\partial_0} ; g^E(\varphi^{E-1}) = - \left(\frac{d\varphi^{E-1}}{dx} - 2a\varphi^{E-1} \right)_{x=1} \varepsilon_{\partial_1} \dots (5.21b)$$

$$\rho_{\alpha-} = [q(\varphi^\alpha)]_{\alpha-1} ; \rho_{\alpha+} = [q(\varphi^\alpha)]_{\alpha+1} ; \rho_\alpha = [q(\varphi^\alpha)]_\alpha \quad (5.21c)$$

Estos son los dos algoritmos que deseabamos construir, los cuales conducen a errores tan pequeños como se deseen, dentro del sistema computacional que se use. Una vez establecidos, lo que se hará enseguida será determinar el orden de error r de los algoritmos, para este operador y en base a la Teoría; así como también el error surgido por redondeo de números de precisión finita.

• DISCUSION DE LOS ERRORES SURGIDOS POR TEORIA, POR REDONDEO Y ARITMETICA DE COMPUTADORA.

Empezemos por el error surgido en base a la construcción hecha. Una discusión amplia esta dada en las referencias [7] y [6].

Observemos primero que el sistema de funciones de peso usadas para el algoritmo 2 son un subespacio lineal de las usadas para el algoritmo 1. De este modo estimemos el error surgido para éste último algoritmo, en base a la teoría.

Como fue explicado anteriormente, al sistema de funciones de peso lo obtenemos por colocación. La colocación es Gaussiana de modo que:

$$\int_0^1 x^\gamma \varphi_\gamma^\alpha dx = O(h^{2n+1}) \quad \text{con } \gamma = 1, 2 \quad (5.22)$$

donde h es una norma de la partición (ver por ejemplo las

referencias [1]-[10]).

El autor explica que si (5.15b) se satisface, entonces se puede demostrar que:

$$|u'_\alpha - u_\alpha| = O(h^{r-2}) \quad \text{y} \quad \left| \frac{du'_\alpha}{dx} - \frac{du_\alpha}{dx} \right| = O(h^{r-2}) \quad (5.23)$$

(ver ref.[7]). Donde la potencia de h en (5.22) corresponde a la de (5.15b), esto es $r=2n+1$, de modo que el error estimado en base a la teoría es:

$$|u'_\alpha - u_\alpha| = O(h^{2n-1}) \quad \text{y} \quad \left| \frac{du'_\alpha}{dx} - \frac{du_\alpha}{dx} \right| = O(h^{2n-1}) \quad (5.24)$$

para valores nodales, cuando se usan n puntos de colocación Gaussiana en cada subintervalo de partición.

Pasemos ahora a la discusión del error surgido de la manipulación de números de precisión finita.

En una computadora cada operación aritmética es afectada por errores de redondeo. Esto surge debido a que el hardware de la máquina solo puede representar un subconjunto de los números reales; denotemos a este subconjunto por F.

El subconjunto F está determinado por cuatro números (ver ref. [2] y ref. [14]): β =base numérica de la computadora, t=la precisión, L=límite inferior, U=límite superior. De manera que cada elemento $f \in F$ es de la forma:

$$f = \pm d_1 d_2 \dots d_t \times \beta^e; \quad 0 \leq d_i \leq \beta, \quad d_i \neq 0, \quad L \leq e \leq U \quad (5.25a)$$

y el número cero

Observe que si $0 \neq f \in F$, entonces $m \leq |f| \leq M$ con:

$$m = \beta^{L-1} \quad (5.26a)$$

$$M = \beta^U (1 - \beta^{-t}) \quad (5.26b)$$

Para el caso del sistema HP-9000 tenemos que:

$$\beta = 10 \quad (5.26a')$$

$$t = 14 \quad (5.26b')$$

$$L = -308 \quad (5.26c')$$

$$U = 308 \quad (5.26d')$$

Ahora bien, hagamos un modelo simple de la aritmética de F en computadora. Sea G el conjunto definido por:

$$G = \{ x \in \mathbb{R} : m \leq |x| \leq M \} \cup \{ 0 \} \quad (5.27)$$

y al operador fl: G \longrightarrow F por:

$$fl(x) = \begin{cases} \text{el } c \in F \text{ más cercano a } x \\ \text{(cuando se usa aritmética de redondeo)} \end{cases} \quad (5.28a)$$

$$fl(x) = \begin{cases} \text{el } c \in F \text{ más cercano a } x \text{ con } |c| \leq |x| \\ \text{(cuando se usa aritmética de corte)} \end{cases} \quad (5.28b)$$

De aquí desprendemos que la representación en computadora de un número real no es exacta. Además de ser la representación de números reales inexacta, la aritmética que se realiza con estas representaciones es también inexacta. Para mostrar esto tenemos lo siguiente:

Sean $a, b \in F$ y denotemos por \square cualquier operación aritmética: +, -, *, /. Supongamos que $a \square b \in F$, asumiremos que la versión en computadora de $a \square b$ es $fl(a \square b)$. Entonces el operador fl satisface:

$$fl(a \square b) = a \square b (1 + \varepsilon) \quad \text{donde } |\varepsilon| \leq u \quad (5.29)$$

y a u la llamamos unidad de redondeo, y se le define por:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} \beta^{1-t} & \text{(aritmética de redondeo)} \end{cases} \quad (5.30a)$$

$$u = \begin{cases} \beta^{1-t} & \text{(para aritmética de corte)} \end{cases} \quad (5.30b)$$

Esto es cada operación aritmética \square que efectuamos con dos

números $a, b \in F$ (no exactos), le asociamos un error absoluto dado por la ecuación (5.29). De este modo la unidad de redondeo para la HP-9000 es:

$$u(\text{HP-9000}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 10^{-13} & \text{(para aritmética de redondeo)} & (5.30a') \\ 10^{-13} & \text{(para aritmética de corte)} & (5.30b') \end{cases}$$

Mencionemos que la HP-9000 maneja aritmética de redondeo.

Así por ejemplo supongamos que tenemos el siguiente algoritmo:

```
s:=0;
for k:=1 to n do
  s:=s+XkYk;
```

ALGORITMO 6.1. Un ejemplo para efectuar el seguimiento del error por redondeo.

donde calculamos el producto interior de $x, y \in R^n$. El algoritmo requiere de n pasos. Para efectuar una estimación del error por redondeo, que tendrá el resultado final para S , distinguimos el valor en computadora del producto x, y (es decir $fl(x \cdot y)$) de su valor exacto (esto es $x \cdot y$). De este modo $fl(x \cdot y)$ denota la salida, para S , del algoritmo 6.1. Y necesitamos acotar el valor $|fl(x \cdot y) - x \cdot y|$.

De este modo si:

$$S_p = fl\left[\sum_{k=1}^p x_k \cdot y_k \right] \quad y$$

$$S_1 = x_1 \cdot y_1 (1 + \delta_1) \quad \text{con} \quad |\delta_1| \leq u$$

ver ec. (5.29), entonces para $p=2, \dots, n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} S_p &= fl[S_{p-1} + fl(x_p \cdot y_p)] = \\ &= [S_{p-1} + x_p \cdot y_p (1 + \delta_p)] \cdot (1 + \epsilon_p) \quad \text{con} \quad |\delta_p|, |\epsilon_p| \leq u \end{aligned}$$

nuevamente por la ec. (5.29). Con algebra y agrupando términos:

$$fl(x \cdot y) = S_n = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k (1 + \gamma_k) \quad \text{donde}$$

$$(1 + \gamma_k) = (1 + \delta_k) \prod_{j=1}^k (1 + \epsilon_j) \quad \text{con} \quad \epsilon_1 = 0$$

de este modo ya que:

$$fl(x \cdot y) - x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k \cdot \gamma_k$$

finalmente:

$$|fl(x \cdot y) - x \cdot y| \leq \sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k| |\gamma_k| \quad (5.31)$$

Ahora bien, para obtener el fin deseado, necesitamos acotar las cantidades $|\gamma_k|$ en términos de la unidad u . Para esto usamos el siguiente lema (ver ref. [2]).

LEMA 5.1. Si $(1+\alpha) = \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k)$ donde $|\alpha_k| \leq u$ y $nu \leq 0.01$ (una hipótesis razonable), entonces:

$$|\alpha| \leq 1.01nu$$

su demostración esta en la ref. [2].

De este modo aplicando el resultado de este lema a la ec. (5.31), bajo la hipótesis razonable de que $nu \leq 0.01$, tenemos que:

$$|fl(x^T y) - x^T y| \leq 1.01nu |x| |y| \quad (5.32)$$

con $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Este algoritmo muestra como se acumulan los errores por redondeo cuando se efectúan operaciones aritméticas dentro de cualquier sistema computacional.

De este sencillo ejemplo podemos observar lo complejo que es efectuar un seguimiento del error de redondeo acumulativo, surgido de la manipulación de números representados en forma no exacta, donde además cada operación aritmética que se efectue con ellos conlleva a un error (5.29).

De aquí, nosotros no pretendemos llevar a cabo un análisis

riguroso del error de este tipo, surgido naturalmente de la representación en computadora de los algoritmos discutidos. Nos limitaremos a hacer mención de su existencia en los resultados finales que presentaremos en el capítulo VII, en donde concatenaremos los errores esperados (en base a la construcción teórica), con los resultados obtenidos al aplicar los algoritmos implementados a la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

CAPITULO VI.

FUNCIONES DE PESO Y ECUACIONES EXPLICITAS.

• INTRODUCCION.

Hasta este punto no hemos hablado de la forma explícita de la familia de funciones de peso $\{\varphi^{\alpha}\}_{\alpha=1}^N$, ni de las ecuaciones explícitas de los algoritmos derivados. Se requiere por tanto desarrollar estas ideas en forma expresa, así como hablar del tipo de colocación que se usó en los algoritmos (en el interior de cada subintervalo de partición), tal y como fueron pasados a la computadora. Finalmente hablaremos de la documentación de los algoritmos implementados. Estos son los motivos por los que escribimos este capítulo.

Antes de comenzar, recordemos que nuestro problema consiste en encontrar la solución numérica a la ecuación diferencial de la forma:

$$\mathcal{L}u = \frac{d^2 u}{dx^2} + 2a \frac{du}{dx} + (b + \frac{da}{dx})u = f_{\Omega} \quad (6.1a)$$

$$\text{con } \Omega = [0, 1]$$

y condiciones a la frontera de Dirichlet:

$$u(0) = g_{\partial_0} \quad \text{y} \quad u(1) = g_{\partial_1} \quad (6.1b)$$

donde el adjunto formal de \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L}^*v = \frac{d^2 v}{dx^2} - 2a \frac{dv}{dx} + (b - \frac{da}{dx})v \quad (6.2)$$

de este modo empezamos con el tipo de las funciones de peso usadas.

• **CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE PESO.**

Las funciones de peso fueron construidas, para ambos algoritmos, de tal forma que satisficieran la ecuación adjunta homogénea de (6.1a) en puntos específicos llamados de colocación (ver-ec.(5.14)). Tomamos n puntos de colocación en cada subintervalo. Particionamos a Ω en $\Omega_\alpha = (X_{\alpha-1}, X_\alpha)$ para el caso del primer algoritmo y $\Omega_\alpha = (X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1})$ para el segundo. Donde en el primer caso nos colocamos en n puntos, y en el segundo en n puntos por $(X_{\alpha-1}, X_\alpha)$ y en n puntos por $(X_\alpha, X_{\alpha+1})$. Estos puntos de colocación correspondieron a la k'ésima raíz (real) del n'ésimo polinomio de Legendre, los cuales fueron trasladados a Ω_α , de manera que se uso colocación Gaussiana. De este modo, para cada $\alpha=1, \dots, E$, las funciones de peso se construyeron de tal forma que satisficieran:

$$L^* \varphi^\alpha(X_{\alpha k}) = 0 \quad \text{en} \quad \{ X_{\alpha k} \}_{k=1}^n \subset \Omega_\alpha \quad (6.3)$$

• **ECUACIONES EXPLICITAS PARA LOS ALGORITMOS.**

Comenzemos por la exposición de las ecuaciones explícitas para el caso del algoritmo 1.

ALGORITMO 1.: Para cada $\alpha=1, \dots, E$ asociamos dos funciones de peso linealmente independientes $\{ \varphi_1^\alpha, \varphi_2^\alpha \}$, las cuales debemos construir (ver fig.6.1). Estas satisfacen la ec. (6.3) en n puntos de colocación y son cero fuera de $\Omega_\alpha = (X_{\alpha-1}, X_\alpha)$, además de satisfacer de que su salto $[\varphi^\alpha]$ y el salto $[q(\varphi^\alpha)]$ (ver ec.5.5b) sea diferente de cero en los extremos de Ω_α (de acuerdo a lo discutido en el capítulo anterior). Esto se logra expresando a φ_γ^α ($\gamma=1,2$) como un polinomio de grado $G=n+1$, como se

vera en seguida:

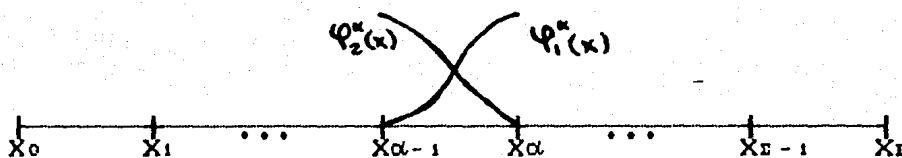


FIGURA 6.1 Las funciones de peso $\{ \varphi_\gamma^\alpha \}$, $\gamma=1,2$.

entonces suponiendo que:

$$\varphi_1^\alpha(x) = \sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^1 (x-x_\alpha)^j + 1 \quad (6.4a)$$

$$\varphi_2^\alpha(x) = \sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^2 (x-x_{\alpha-1})^j + 1 \quad (6.4b)$$

con $G=n+1$

observese que el limite por la derecha de φ_1^α en $X_{\alpha-1}$ es 1, similarmente para φ_2^α . Pedimos que $\varphi_\gamma^\alpha(x)$ satisfaga:

$$C^* \varphi_\gamma^\alpha(X_{\alpha k}) = 0 \quad \text{en} \quad \{ X_{\alpha k} \}_{k=1}^n \quad (6.5a)$$

de manera que si hablamos de colocación Gaussiana la forma explícita de $X_{\alpha k}$ es la siguiente:

$$X_{\alpha k} = X_{\alpha-1} + \left(\frac{1+r_k}{2} \right) (X_\alpha - X_{\alpha-1}) \quad (6.5b)$$

con $1 \leq k \leq n$

donde r_k es la raíz k 'ésima del n 'ésimo polinomio de Legendre.

Ahora bien, pedimos que:

$$\varphi_1^\alpha(X_{\alpha-1}) = \varphi_2^\alpha(X_\alpha) = 0 \quad (6.6)$$

esto es que las funciones de peso sean cero en el com-

plemento de $\Omega\alpha = (X\alpha_{-1}, X\alpha)$.

De este modo las ecs. (6.4-6.6) junto con la (6.2) conducen al siguiente sistema de ecuaciones:

PARA φ_1^α :

$$\sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^1 (X\alpha_{-1} - X\alpha)^j = -1 \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^G \{ j(j-1) + jc(X\alpha_k)((k-1)(X\alpha - X\alpha_{-1})) + \\ & + d(X\alpha_k)((k-1)(X\alpha - X\alpha_{-1}))^2 \} \cdot \\ & \cdot P_{\alpha j}^1 ((k-1)(X\alpha - X\alpha_{-1}))^{j-2} = -d(X\alpha_k) \end{aligned} \quad (6.7b)$$

PARA φ_2^α :

$$\sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^2 (X\alpha - X\alpha_{-1})^j = -1 \quad (6.8a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^G \{ j(j-1) + jc(X\alpha_k)(k(X\alpha - X\alpha_{-1})) + \\ & + d(X\alpha_k)(k(X\alpha - X\alpha_{-1}))^2 \} \cdot \\ & \cdot P_{\alpha j}^2 (k(X\alpha - X\alpha_{-1}))^{j-2} = -d(X\alpha_k) \end{aligned} \quad (6.8b)$$

donde hemos tomado:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1 + r_k}{2} ; \quad c(x) = -2a(x) \\ d(x) &= b(x) - \frac{da(x)}{dx} \\ & \text{y } k=1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.9)$$

Mediante la solución del sistema de ecuaciones (6.7-6.8) podemos expandir explícitamente a $\varphi_\gamma^\alpha(x)$, y son

susceptibles a pasarse a computadora. Donde se necesita resolver dos sistemas de $(n+1) \times (n+1)$ en $(n+1)$ incógnitas $P_{\alpha j}^{\gamma}$.

A partir de la expansión de $\varphi_{\gamma}^{\alpha}(x)$ podemos obtener a $K_{\alpha-,\alpha}^{0\gamma}$, $K_{\alpha-,\alpha}^{1\gamma}$, $c_{0,1}^{\gamma}$, con $\gamma=1,2$, por medio de las ecs. (5.17). De este modo:

$$K_{\alpha-}^{01} = -\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^1 (X\alpha-1 - X\alpha)^{j-1} ; K_{\alpha-}^{02} = 2a(X\alpha-1) - P_{\alpha 1}^2 \quad (6.10a)$$

$$K_{\alpha}^{01} = -2a(X\alpha) + P_{\alpha 1}^1 ; K_{\alpha}^{02} = \sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^2 (X\alpha - X\alpha-1) \quad (6.10b)$$

$$K_{\alpha-}^{11} = 0 ; K_{\alpha-}^{12} = 1 \quad (6.10c)$$

$$K_{\alpha}^{11} = -1 ; K_{\alpha}^{12} = 0 \quad (6.10d)$$

$$c_0^1 = 0 ; c_0^2 = 1 ; c_1^1 = -1 ; c_1^2 = 0 \quad (6.10e)$$

$$\langle g_0, \varphi_1^1 \rangle = \left(\frac{d\varphi_1^1}{dx} - 2a\varphi_1^1 \right)_0 g_{\partial 0} = \left(\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^1 (-X_1)^{j-1} \right) g_{\partial 0} \quad (6.10f)$$

$$\langle g_0, \varphi_2^1 \rangle = \left(\frac{d\varphi_2^1}{dx} - 2a\varphi_2^1 \right)_0 g_{\partial 0} = (P_{\alpha 1}^2 - 2a(0)) g_{\partial 0} \quad (6.10f')$$

$$\langle g_1, \varphi_1^E \rangle = -\left(\frac{d\varphi_1^E}{dx} - 2a\varphi_1^E \right)_1 g_{\partial 1} = -(P_{\alpha 1}^1 - 2a(1)) g_{\partial 1} \quad (6.10g)$$

$$\langle g_1, \varphi_2^E \rangle = -\left(\frac{d\varphi_2^E}{dx} - 2a\varphi_2^E \right)_1 g_{\partial 1} = -\left(\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^2 (1 - X_1-1)^{j-1} \right) g_{\partial 1} \quad (6.10g')$$

De este modo podemos expresar las ecs. (5.16a'-c') en forma explícita y en función de las $\varphi_{\gamma}^{\alpha}(x)$, tal y como pasan al sistema computacional. Hemos de señalar que los términos que contienen expresiones de la forma $\langle f, \varphi_{\gamma}^{\alpha} \rangle$ las dejaremos indicadas, al final de esta sección las desarrollaremos en forma explícita (usamos

integración por *Cuadratura Gaussiana*), de este modo las ecuaciones mencionadas quedan como:

$$K_{\alpha-1}^0 \gamma u_{\alpha-1} + K_{\alpha}^0 \gamma u_{\alpha} + K_{\alpha-1}^1 \gamma \frac{du_{\alpha-1}}{dx} + K_{\alpha}^1 \gamma \frac{du_{\alpha}}{dx} = -\langle f, \varphi_{\alpha}^{\alpha} \rangle + O(h^r) \quad (6.11a)$$

$\alpha=2, \dots, E-1; \quad \gamma=1, 2$

$$C_0^{\gamma} u_0^c + K_1^0 \gamma u_1 + K_1^1 \gamma \frac{du_1}{dx} = \langle g_0, \varphi_{\gamma}^1 \rangle - \langle f, \varphi_{\gamma}^1 \rangle + O(h^r) \quad (6.11b)$$

para $\alpha=1; \quad \gamma=1, 2$

$$C_1^{\gamma} u_E^c + K_{E-1}^0 \gamma u_{E-1} + K_{E-1}^1 \gamma \frac{du_{E-1}}{dx} = \langle g_1, \varphi_{\gamma}^E \rangle - \langle f, \varphi_{\gamma}^E \rangle + O(h^r) \quad (6.11c)$$

para $\alpha=E; \quad \gamma=1, 2$

más explícitamente, e intercambiando columnas:

$$\left(-\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^1 (X_{\alpha-1} - X_{\alpha})^{j-1} \right) u_{\alpha-1} + (P_{\alpha 1}^1 - 2\alpha(X_{\alpha})) u_{\alpha} - \frac{du_{\alpha}}{dx} = \langle f, \varphi_{\alpha}^{\alpha} \rangle + O(h^r) \quad (6.11a')$$

$$(2\alpha(X_{\alpha}) - P_{\alpha 1}^2) u_{\alpha-1} + \frac{du_{\alpha-1}}{dx} + \left(\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^2 (X_{\alpha} - X_{\alpha-1})^{j-1} \right) u_{\alpha} = \langle f, \varphi_{\alpha}^{\alpha} \rangle + O(h^r)$$

..... (6.11a'')

$$(P_{11}^1 - 2\alpha(X_1)) u_1 - \frac{du_1}{dx} = \left(\sum_{j=1}^G j P_{1j}^2 (-X_1)^{j-1} \right) g_{\partial_0} - \langle f, \varphi_1^1 \rangle + O(h^r)$$

..... (6.11b')

$$\frac{du_0}{dx} + \left(\sum_{j=1}^G j P_{1j}^2 (X_1 - X_0)^{j-1} \right) u_1 = (P_{11}^2 - 2\alpha(0)) g_{\partial_0} - \langle f, \varphi_1^1 \rangle + O(h^r)$$

..... (6.11b'')

$$\frac{du_E}{dx} + \left(-\sum_{j=1}^G j P_{Ej}^1 (X_{E-1} - X_E)^{j-1} \right) u_{E-1} = (2\alpha(1) - P_{E1}^1) g_{\partial_1} - \langle f, \varphi_1^E \rangle + O(h^r)$$

..... (6.11c')

$$(2\alpha(X_{E-1}) - P_{E,1}^2) u_{E-1} + \frac{du_{E-1}}{dx} = \left(-\sum_{j=1}^G j P_{E,j}^2 (1 - X_{E-1})^{j-1} \right) g_{\beta_1} - \langle f, \varphi_1^1 \rangle + O(h^r)$$

..... (6.11c'')

De este modo hemos desarrollado en forma explícita las ecuaciones que son usadas para la implementación del algoritmo 1, a excepción de los términos de la forma $\langle f, \varphi_\gamma^\alpha \rangle$.

Faemos ahora a la exposición de las ecuaciones que se usaron en la implementación del algoritmo 2.

ALGORITMO 2.: De acuerdo a lo indicado en el capítulo anterior, para este algoritmo, requerimos que las funciones de peso $\{ \varphi_\gamma^\alpha \}_{\alpha=1}^N$ sean continuas en $\Omega_\alpha = (X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1}) \subset D$ y que φ_γ^α se anule fuera de Ω_α ; además debe satisfacer la ec. (6.3) en n puntos de colocación. De modo que logramos las condiciones construyendo un polinomio de grado $G=n+1$, (ver fig. 6.2).

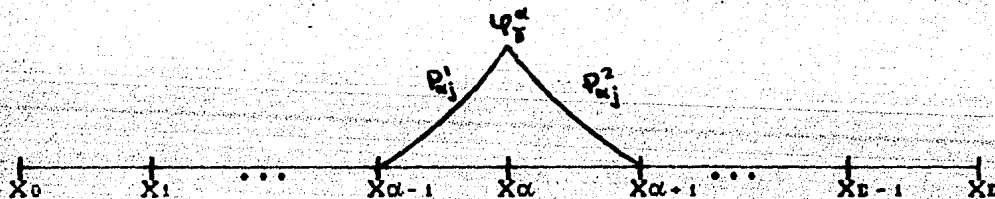


FIGURA 6.2 Funciones de peso para el algoritmo 2 ($\{ \varphi_\gamma^\alpha \}$).

De esta manera suponemos a las funciones de peso de la forma:

$$\varphi_\gamma^\alpha(x) = \sum_{j=1}^G P_{\alpha,j}^\gamma (X - X_\alpha)^j + 1 \quad (6.12)$$

y le pedimos que satisfaga (6.3) en:

$$X_{\alpha k}^1 = X_{\alpha} + \left(\frac{1 + r_k}{2} \right) (X_{\alpha} - X_{\alpha-1}) \quad (6.13a)$$

$$X_{\alpha k}^2 = X_{\alpha} + \left(\frac{1 + r_k}{2} \right) (X_{\alpha+1} - X_{\alpha}) \quad (6.13b)$$

donde r_k es la k 'ésima raíz del n 'ésimo polinomio de Legendre, esto es $1 \leq k \leq n$, estas relaciones dan, naturalmente n puntos de colocación en $(X_{\alpha-1}, X_{\alpha})$ y n puntos de colocación en $(X_{\alpha}, X_{\alpha+1})$. De esta manera la función $\varphi_{\gamma}^{\alpha}$ es continua en $X=X_{\alpha}$. Y la hacemos cero fuera de Ω_{α} si

$$\varphi_1^{\alpha}(X_{\alpha-1}) = \varphi_2^{\alpha}(X_{\alpha+1}) = 0 \quad (6.14)$$

de modo que tenemos $n+1$ condiciones (6.13-14) en $n+1$ incógnitas (6.12), lo que permite expandir a la función de peso $\varphi_{\gamma}^{\alpha}$ en Ω_{α} . Entonces podemos escribir, por (6.14):

$$\sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^2 (X_{\alpha+1} - X_{\alpha})^j = \sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^1 (X_{\alpha-1} - X_{\alpha})^j = -1 \quad (6.15a)$$

y por (6.13):

$$\sum_{j=1}^G \{ j(j-1) + jc(X_{\alpha k}^{\gamma})(X_{\alpha k}^{\gamma} - X_{\alpha}) + d((X_{\alpha k}^{\gamma})(X_{\alpha k}^{\gamma} - X_{\alpha})^2) \} \cdot P_{\alpha j}^{\gamma}(X_{\alpha k}^{\gamma} - X_{\alpha})^{j-1} = -d(X_{\alpha k}^{\gamma}) \quad (6.15b)$$

$$\text{con } c(x) = -2a(x) \quad ; \quad d(x) = b(x) - \frac{da}{dx}$$

y $k=1, \dots, n$ (puntos de colocación) ; con $\gamma=1, 2$

una vez determinadas $\varphi_{\gamma}^{\alpha}$, podemos expresar en forma explícita las ecs. (5.20), para lograr esto tenemos que:

$$\rho_{\alpha-} = [q(\varphi_{\gamma}^{\alpha})]_{\alpha-1} = \sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^1 (X_{\alpha-1} - X_{\alpha})^{j-1} \quad (6.16a)$$

$$\rho_{\alpha+} = [q(\varphi_{\gamma}^{\alpha})]_{\alpha+1} = -\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^2 (X_{\alpha+1} - X_{\alpha})^{j-1} \quad (6.16b)$$

$$\rho_{\alpha} = [q(\varphi_{\gamma}^{\alpha})]_{\alpha} = P_{\alpha 1}^2 - P_{\alpha 1}^1 \quad (6.16c)$$

$$\mathbf{g}^0(\varphi_{\gamma}^1) = \left(\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^1 (-X_1)^{j-1} \right) \mathbf{g}_{\partial 0} \quad (6.16d)$$

$$\mathbf{g}^E(\varphi_{\gamma}^{E-1}) = -\left(\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^2 (1-X_{E-1})^{j-1} \right) \mathbf{g}_{\partial 1} \quad (6.16e)$$

de modo que:

$$\left(\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^1 (X_{\alpha-1} - X_{\alpha})^{j-1} \right) u_{\alpha-1} + \left(-\sum_{j=1}^G j P_{\alpha j}^2 (X_{\alpha+1} - X_{\alpha})^{j-1} \right) u_{\alpha+1} +$$

$$(P_{\alpha 1}^2 - P_{\alpha 1}^1) u_{\alpha} = \langle f, \varphi_{\gamma}^{\alpha} \rangle_{X_{\alpha-1}^{\alpha+1}} + O(h^r) \quad (6.17a)$$

para $\alpha=2, \dots, E-2$

$$\left(\sum_{j=1}^G j P_{1 j}^2 (X_2 - X_1)^{j-1} \right) u_2 + (P_{1 1}^2 - P_{1 1}^1) u_1 = \langle f, \varphi_{\gamma}^{\alpha} \rangle_{X_0^{X_1}} -$$

$$- \left(\sum_{j=1}^G j P_{1 j}^1 (-X_1)^{j-1} \right) \mathbf{g}_{\partial 0} + O(h^r) \quad (6.17b)$$

para $\alpha=1$

$$\left(\sum_{j=1}^G j P_{(E-1) j}^1 (X_{E-2} - X_{E-1})^{j-1} \right) u_{E-2} + (P_{(E-1) 1}^2 - P_{(E-1) 1}^1) u_{(E-1)} =$$

$$\langle f, \varphi_{\gamma}^{\alpha} \rangle_{X_{E-2}^{X_E}} + \left(\sum_{j=1}^G j P_{(E-1) j}^2 (1-X_{(E-1)})^{j-1} \right) \mathbf{g}_{\partial 1} + O(h^r) \quad (6.17c)$$

para $\alpha=E-1$

Esta es la forma explícita en que se implementó, computacionalmente, el algoritmo 2.

Una vez expuestos, en forma explícita, los algoritmos implementados, pasaremos a hablar como se implementaron las expresiones de la forma $\langle f, \varphi_{\gamma}^{\alpha} \rangle_{X^{\alpha-1}}$. Para evaluar estos términos se uso *Cuadratura Gaussiana*, (ver refs. [1] o [14]).

La cuadratura Gaussiana de orden k de una función f con soporte en $[-1,1]$ esta dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^k \omega_i f(x_i) \quad (6.18)$$

donde k es el orden de cuadratura
 ω_i es el coeficiente de peso
 x_i i 'ésima raíz del k 'ésimo polinomio de Legendre ($1 \leq i \leq k$)

Si $F(x)$ tiene soporte en $[a, \delta]$, tenemos que la función:

$$t: [a, \delta] \longrightarrow [-1, 1]$$

mapea univocamente $[a, \delta]$ en $[-1, 1]$ si

$$a \leq x \leq \delta$$

y se define como:

$$t = \frac{1}{\delta - a} (2x - a - \delta) \quad (6.19)$$

ahora bien, usando (6.18) y (6.19) tenemos:

$$\int_a^{\delta} F(x) dx = \frac{\delta - a}{2} \int_{-1}^1 F\left(\frac{(\delta - a)t + a + \delta}{2}\right) dt \cong \frac{\delta - a}{2} \sum_{i=1}^k \omega_i F\left(\frac{(\delta - a)t_i + a + \delta}{2}\right) \quad (6.20)$$

donde t_i toma los valores de las raíces del k 'ésimo polinomio de Legendre.

Derivemos las ecuaciones explícitas para el caso del algoritmo 1, para el caso del algoritmo 2, se pueden obtener en forma similar.

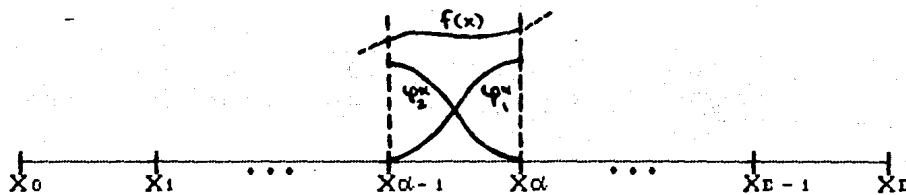


FIGURA 6.3 Construcción de la Cuadratura Gaussiana.

en este caso (ver fig.6.3) tenemos:

$$X_{\alpha-1} \leq x \leq X_{\alpha}$$

y tomamos:

$$F_{\gamma}(x) = f(x)\varphi_{\gamma}^{\alpha}(x) = \begin{cases} f(x)\varphi_1^{\alpha}(x) & \text{para } \gamma=1 \\ f(x)\varphi_2^{\alpha}(x) & \text{para } \gamma=2 \end{cases}$$

donde:

$f(x)$ es la fn. que hace la igualdad en (6.1a)

entonces:

$$\int_{X_{\alpha-1}}^{X_{\alpha}} F_{\gamma}(x) dx = \frac{X_{\alpha}-X_{\alpha-1}}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(X_{\alpha}-X_{\alpha-1})t+X_{\alpha}+X_{\alpha-1}}{2}\right) \varphi_{\gamma}^{\alpha}\left(\frac{(X_{\alpha}-X_{\alpha-1})t+X_{\alpha}+X_{\alpha-1}}{2}\right) dt \cong$$

$$\cong \frac{X_{\alpha}-X_{\alpha-1}}{2} \sum_{i=1}^k \omega_i f\left(\frac{(X_{\alpha}-X_{\alpha-1})t_i+X_{\alpha}+X_{\alpha-1}}{2}\right) \varphi_{\gamma}^{\alpha}\left(\frac{(X_{\alpha}-X_{\alpha-1})t_i+X_{\alpha}+X_{\alpha-1}}{2}\right) \quad (6.21)$$

con $\gamma=1, 2$

donde $\varphi_{\gamma}^{\alpha}$ están dadas por las ecuaciones (6.4), de modo que en forma explícita la ecuación anterior queda como:

$$\int_{-1}^1 F_1(x) dx \cong \frac{X\alpha - X\alpha - 1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ \omega_i f\left(\frac{(X\alpha - X\alpha - 1)t_i + X\alpha + X\alpha - 1}{2}\right) \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^1 \left(\frac{(X\alpha - X\alpha - 1)(t_i - 1)}{2}\right)^j\right) \right\} \quad (6.22a)$$

$$\int_{-1}^1 F_2(x) dx \cong \frac{X\alpha - X\alpha - 1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ \omega_i f\left(\frac{(X\alpha - X\alpha - 1)t_i + X\alpha + X\alpha - 1}{2}\right) \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^G P_{\alpha j}^2 \left(\frac{(X\alpha - X\alpha - 1)(t_i + 1)}{2}\right)^j\right) \right\} \quad (6.22b)$$

donde las constantes ω_i y t_i son los pesos y raíces que ya aparecen en la ecuación (20).

Finalmente, es posible demostrar, que el orden en el error, para la cuadratura Gaussiana es del tipo:

$$e = O(h^{2k-1}) \quad (6.23)$$

Pasemos a hablar, brevemente, de la implementación de los dos algoritmos.

• ALGORITMOS IMPLEMENTADOS.

En el apéndice A presentamos el listado del algoritmo 1, en el B el del algoritmo 2. Estos se presentan en forma totalmente documentada, y están realizados en *Lenguaje Fortran 77* en el sistema HP-9000.

Hemos incluido un apéndice C donde hemos sustituido al Programa Principal por otro de tal forma que, la nueva sustitución permite la obtención iterada del error obtenido (como puede verificarse inmediatamente), el cual será presentado en el siguiente capítulo.

Finalmente mencionaremos que hay una diferencia entre el algoritmo 1 y el 2 en lo que respecta a la obtención de raíces del n 'ésimo polinomio de Legendre. Ya que el primero utiliza las raíces y pesos almacenados en el archivo *DATOS*, mientras que el segundo calcula las raíces mediante la rutina *LEGENDREC*). Finalmente, el algoritmo 1 resuelve la ecuación (6.1a) con condiciones de frontera (6.1b); mientras que el algoritmo 2 resuelve la homogénea de (6.1a) y condiciones de frontera (6.1b).

CAPITULO VII.

EXPERIMENTACION NUMERICA.

● INTRODUCCION.

En este capítulo aplicamos los dos algoritmos implementados (los cuales estan listados en los apéndices A y B), a la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2^{do}. orden. Para estas soluciones efectuamos un análisis de error, mediante la presentación de una serie de gráficas de $\ln(\text{error})$ vs. $\ln(\text{partición})$ ó $\ln(\text{error})$ vs. $\ln(\text{colocación})$ según sea el caso. Para de este modo efectuar una comparación entre la solución aproximada y la solución analítica de la ecuación diferencial.

Comenzemos entonces exponiendo las ecuaciones diferenciales que se resolvieron numéricamente, y seguiremos con el tipo de análisis del error que se efectuó, finalmente expondremos los resultados mediante una serie de gráficas.

● ECUACIONES QUE SE RESOLVIERON.

Fueron cuatro las ecuaciones que se resolvieron numéricamente mediante los algoritmos implementados. Para las cuales se siguieron criterios distintos de análisis de error entre la solución aproximada y solución analítica de la ecuación diferencial, los cuales expondremos en la siguiente sección.

Las primeras tres ecuaciones que se resolvieron son pivotes, donde llevamos una exposición *estricta* de gráficas del error esperado (teóricamente) y el obtenido. Ya que en éstas conocemos la solución por medios analíticos. Mientras que en la tercera no es posible conocer la solución analíticamente. A las tres primeras ecuaciones les aplicamos dos criterios de error diferentes, y a la

tercera solo es posible (técnicamente) aplicarle uno de los criterios de error.

La primera ecuación que se resolvió numéricamente fue la siguiente ecuación homogénea:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2x}{1+x^2} \frac{du}{dx} + \frac{2}{1+x^2} u = 0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7.1a)$$

y condiciones de frontera:

$$u(0) = 1 \quad ; \quad u(1) = 0 \quad (7.1b)$$

donde la solución a la ecuación diferencial con condiciones a la frontera (7.1b) es:

$$u(x) = 1 - x^2 \quad (7.2)$$

Esta ecuación es suficientemente sencilla y servirá para probar al algoritmo 2 (ya que este sólo resuelve la homogénea), y al algoritmo 1 para cuando f_{Ω} es cero, ver ec. (6.1a). A esta ecuación le aplicaremos los dos criterios de error (de los que hablaremos en la siguiente sección).

La segunda ecuación que resolveremos será:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} + qu = \alpha \text{Sen}(bx) + \beta \text{Cos}(bx) \quad \text{en} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7.3a)$$

con:

$$b = 50 \quad ; \quad \alpha = 100 \quad ; \quad \beta = -100 \quad ; \quad p = -2 \quad ; \quad q = 1$$

y condiciones a la frontera:

$$u(0) = 1 \quad ; \quad u(1) = 1 \quad (7.3b)$$

con los valores que hemos elegido para b, α, β en la anterior ecuación, obtenemos una ecuación que oscila suficientemente en $[0, 1]$, y con esta podemos probar la bondad del algoritmo 1. Podemos tener la solución analítica de la anterior ecuación:

$$u(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + A \text{Sen}(bx) + B \text{Cos}(bx) \quad (7.4)$$

con:

$$C_1 = 1 - B \quad ; \quad C_2 = [1 - A \text{Sen} b - B \text{Cos} b - C_1 e^1] / e^1$$

y:

$$A = \frac{\alpha + Bbp}{q - b^2} \quad ; \quad B = \frac{\beta(q-b^2) - \alpha bp}{b^2 p^2 + (q-b^2)^2}$$

La tercera ecuación que se resolvió es la homogénea:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 40\pi^2 u = 0 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1 \quad (7.5a)$$

y condiciones a la frontera:

$$u(0) = 0 \quad ; \quad u(1) = \text{Sen}([40]^{1/2} \pi) \quad (7.5b)$$

donde la solución, dadas las condiciones a la frontera es:

$$u(x) = \text{Sen}([40]^{1/2} \pi x) \quad (7.6)$$

Finalmente la cuarta ecuación que se resolvió es la que aparece en problemas de transporte y difusión cuando el transporte es dominante. Naturalmente, la sujetamos a una dimensión y en estado estacionario; de este modo tuvimos como tercera ecuación a resolver a:

$$\frac{du}{dx} - e^{-4x} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1 \quad (7.7a)$$

$$\text{con: } u(0)=1 \quad ; \quad u(1)=0 \quad (7.7b)$$

o en forma alternativa:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - e^{4x} \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1 \quad (7.7a')$$

Esta ecuación no tiene solución analítica, y solo puede ser resuelta por métodos numéricos. Una forma de resolverla es, por su puesto, por los algoritmos implementados; hemos usado otro método, de cuyos resultados efectuamos las comparaciones con los resultados de los algoritmos implementados, éste segundo método elegido fué el de *Cuadratura Gaussiana* (que sabemos tiene un orden de precisión de $O(h^{2k+1})$).

De este modo tenemos lo siguiente, por reducción del orden en (7.1a'):

$$u(x) = K_1 \int_0^x \exp\left(\frac{1}{4} e^{4x}\right) dx + K_2 \quad \text{y} \quad (7.8a)$$

$$\frac{du}{dx} = -K_1 \exp\left(\frac{1}{4} e^{4x}\right) \quad (7.8b)$$

con:

$$K_1 = - \left[\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{4} e^{4x}\right) dx \right]^{-1} ; \quad K_2 = 1$$

A las ecuaciones (7.6) las podemos resolver por cuadratura Gaussiana. Observemos lo siguiente: resolveremos *analíticamente* a la ecuación (7.5) por cuadratura Gaussiana, y a con este resultado compararemos la *solución aproximada* que surge al aplicar los algoritmos implementados.

Hablemos ahora de los dos criterios de error que se usaron.

● CRITERIOS DE ERROR UTILIZADOS.

Hemos usado dos criterios de error distintos, para presentar las comparaciones entre la *solución analítica* de las ecuaciones y la *solución aproximada* que surge al aplicar el método.

Antes de su exposición veamos la línea que seguimos para realizar el análisis de error.

De acuerdo a lo discutido en el capítulo V (ver ec.(5.24)), el error surgido de la construcción en base a la teoría está dado por:

$$\epsilon = O(h^{2n-1}) \quad \text{con} \quad h = \frac{1}{e} \quad (7.9)$$

donde tomamos:

ϵ = el error.

e = número de intervalos de partición de $[0,1]$.

h = norma de la partición de $[0,1]$, en este caso $\frac{1}{e}$.

n = orden de colocación Gaussiana en cada intervalo de partición.

De este modo tomando logaritmo natural de ambos miembros de

la anterior ecuación tenemos lo siguiente:

$$|\log(\epsilon)| = (2n - 1)|\log(h)| = (2n - 1)\log(\epsilon) + M \quad (7.10)$$

por lo que si tomamos:

$e = \text{constante}$

$n = \text{variando } \{2, 3, \dots\}$

tendríamos una gráfica de la forma:

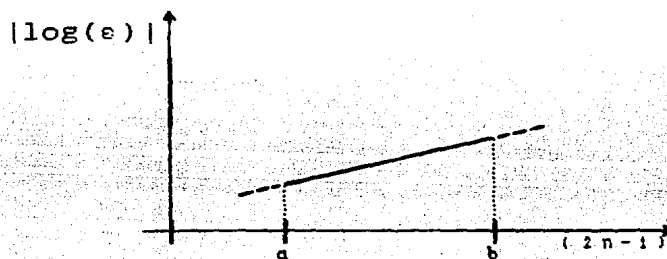


FIGURA 7.1a.

en donde los errores pequeños andan por abscisa a y los grandes por b , y la pendiente de la recta es $\log(\epsilon)$. Alternativamente si tomamos:

$n = \text{constante}$

$e = \text{variando } \{4, 8, \dots\}$

obtendríamos una gráfica de la forma:

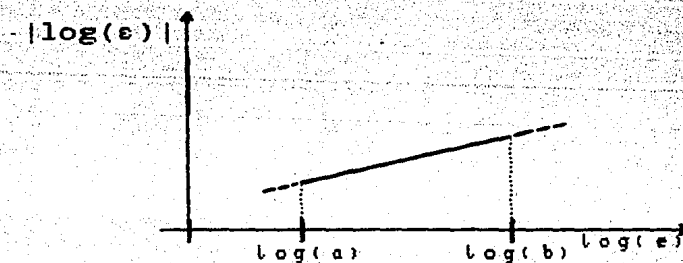


FIGURA 7.1b.

y esperaríamos que tuviera pendiente $2n-1$.

Naturalmente debemos acotar el conjunto de valores posibles

para la partici3n e y colocaci3n n, ya que estamos dentro de un sistema de c3mputo real. Los hemos elegido como sigue:

$$e = \{4, 8, \dots, 48\} \quad (7.11a)$$

$$n = \{2, 3, \dots, 10\} \quad (7.11b)$$

De este modo si tomamos e=cte y variamos n (dentro de los valores posibles) entonces esperamos obtener gr3ficas del error de la forma de la figura 7.3a. Similarmente si tomamos n=cte y variamos sobre e.

Para lograr lo anteriormente dicho hemos sustituido el Programa Principal de los algoritmos, por otro que permite la obtenci3n iterada del error, como fue mencionado en el cap3tulo anterior.

Finalmente los dos criterios de error que seguimos, en las comparaciones de la soluci3n anal3tica con la aproximada, fueron los siguientes:

A las cuatro ecuaciones les aplicamos el siguiente criterio:

CRITERIO 1.

Dada una partici3n y una colocaci3n en $[0, 1]$, el error de la soluci3n aproximada con respecto a la anal3tica, se da por el valor absoluto de la diferencia de la soluci3n anal3tica con la aproximada en un punto arbitrario de $[0, 1]$.

Hemos escogido al punto $X=1/4$ por razones t3cnicas, ya que este valor permite particionar a $[0, 1]$ en m3ltiplos de 4, de este modo podemos efectuar suficientes comparaciones.

Con lo que respecta a las primeras tres ecuaciones, para las cuales conocemos la soluci3n anal3tica, seguimos adem3s el siguiente criterio:

CRITERIO 2.

Dada una partici3n y una colocaci3n en $[0,1]$, el error de la soluci3n aproximada con respecto a la anal3tica, se da por el m3ximo valor absoluto de la diferencia de la soluci3n anal3tica con la aproximada en los puntos de partici3n de $[0,1]$.

Este criterio parece ser m3s natural y es diferente al anterior. Es especialmente id3neo cuando conocemos la soluci3n anal3tica de la ecuaci3n diferencial.

Pasemos, ahora a los resultados obtenidos.

• RESULTADOS OBTENIDOS.

Atrav3s de las gr3ficas 7.1 hasta la 7.30, damos los resultados obtenidos en lo que respecta al valor absoluto de la diferencia de la soluci3n aproximada respecto a la anal3tica. Mientras que de la figura 7.2 a la 7.7, vemos como se acerca la soluci3n aproximada a la anal3tica y su derivada seg3n sea el caso de las ecuaciones 7.2, 7.4, 7.6 y 7.8. Todas estas gr3ficas las anexamos al final del cap3tulo.

En el primer grupo de gr3ficas, exponemos al $|\log(\text{error})| = |\log(e)|$ vs. $|\log(\text{partici3n})| = |\log(e)|$ o (n3mero de colocaci3n) = $(2*n-1)$ seg3n sea el caso.

Para el caso en que graficamos $|\log(e)|$ vs. $|\log(e)|$, hemos usado los s3mbolos que aparecen en la siguiente tabla:

símbolo	caso
+	n=2
*	n=3
0	n=4
X	n=5
Δ	n=6
□	n=7
◇	n=8
■	n=9
10	n=10

TABLA 7.1 Símbolos utilizados cuando se grafica $|\log(e)|$ vs $|\log(e)|$.

Mientras que cuando graficamos $|\log(e)|$ vs. $(2*n-1)$, tomamos los siguientes símbolos:

símbolo	caso
+	e=4
*	e=8
0	e=12
X	e=16
Δ	e=20
□	e=24
◇	e=28
■	e=32
10	e=36

TABLA 7.2 Símbolos utilizados cuando se grafica $|\log(e)|$ vs $(2*n - 1)$.

Y para el caso de las figuras 7.2-7.7, hemos corrido el programa en cuestión para las cuatro ecuaciones indicadas anteriormente, en donde tomamos $n=2$, $e=4$ y $n=4$, $e=20$. En estas figuras aparecen la solución analítica y las salidas de las corridas del programa en cuestión para los dos casos de colocación (n) y partición (e) indicadas, hemos usado los siguientes símbolos:

símbolo	caso
línea continua	solución analítica
■	n=2 y e=4
□	n=4 y e=20

TABLA 7.2 Símbolos utilizados cuando en las figuras 7.2-7.7.

De este modo tenemos las siguientes tablas, que nos indican qué representan las gráficas (de la 7.1 a la 7.30) y las figuras (de la 7.2 a la 7.7).

Para el caso de las gráficas tenemos lo siguiente:

ecuación	n ó e constante	criterio de error	GRAFICA	
			error en el valor de la función	error en el valor de la deri. de la fun.
7.1	n	2	7.1	7.2
		1	7.3	7.4
	e	2	7.5	7.6
		1	7.7	7.8
7.3	n	2	7.13	7.14
		1	7.15	7.16
	e	2	7.17	7.18
		1	7.19	7.20
7.7	n	1	7.25	7.26
	e	1	7.27	7.28

TABLA 7.4. Ecuaciones que se resolvieron con el algoritmo 1. Relación de la presentación de los resultados obtenidos en los errores.

Donde para tales gráficas hemos utilizado los símbolos enlistados en las tablas 7.1 y 7.2 según sea el caso de n ó e constante. Para el caso de las ecuaciones analizadas con el algoritmo 2 tenemos la siguiente tabla:

ecuación	n ó e constante	criterio de error	GRAFICA
			error en el valor de la función
7.1	n	2	7.9
		1	7.10
	e	2	7.11
		1	7.12
7.5	n	2	7.21
		1	7.22
	e	2	7.23
		1	7.24
7.7	n	1	7.29
	e	1	7.30

TABLA 7.5. Ecuaciones que se resolvieron con el algoritmo 2. Relación de la presentación de los resultados obtenidos en los errores.

Nuevamente los símbolos utilizados para las gráficas de la tabla anterior están listados en las tablas 7.1 y 7.2 según sea el caso.

Mientras que para las figuras tenemos las siguientes tablas:

ecuación	FIGURA	
	error en el valor de la solución (cuad=10, no homog.)	error en el valor de la deri. de la solu. (cuad=10, no homog.)
7.1	7.2a	7.2b
7.3	7.4a (no homog.)	7.4b (no homog.)
7.7	7.6a	7.6b

TABLA 7.6 Resultados gráficos de las ecuaciones analizadas con el algoritmo 1, para los dos tipos de colocación y partición (n=2, e=4 y n=4, e=20).

En estas figuras hemos utilizado los símbolos listados en la

tabla 7.3 según sea el caso. Y tenemos la siguiente tabla, para cuando usamos el algoritmo 2.

FIGURA	
ecuación	error en el valor de la solución
7.1	7.3
7.5	7.5
7.7	7.7

TABLA 7.7 Relación de resultados gráficos analizadas con el algoritmo 2 para los dos tipos de colocación y partición ($n=2, e=4$ y $n=4, e=20$).

Nuevamente hemos utilizado, para estas figuras, los símbolos de la tabla 7.3.

Pasemos ahora a la cuestión de la obtención de las pendientes de las gráficas.

Para obtener las pendientes en las gráficas (7.1-7.30) hemos asumido lo siguiente:

Dada la gráfica en cuestión, la pendiente se obtuvo ajustando la mejor recta por mínimos cuadrados a la sección de puntos que más caen, visiblemente, dentro de una recta. Los puntos restantes los hemos tomado como ruido, debido al redondeo de números que se realiza en la computadora.

Como hemos dicho en la sección anterior a las primeras tres ecuaciones diferenciales les hemos aplicado el CRITERIO 1 y el CRITERIO 2 de error, mientras que a la cuarta solo el CRITERIO 1 de error.

De este modo las pendientes obtenidas y esperadas teóricamente (ver ec. 5.24) en las gráficas que presentamos al final del capítulo son las siguientes:

PARA ECUACIONES ANALIZADAS CON EL ALGORITMO 1:

ec.	gráf.	criterio	n ^o de cte.	PENDIENTES en el valor de la fn.		PENDIENTES en el val. der. de fn.	
				obtenida	esperada (teori.)	obtenida	esperada (teori.)
7.1	7.1	2	2	4.0407	3.0000		
			3	6.0327	5.0000		
			4	8.0044	7.0000		
			5	10.6479	9.0000		
	7.2	2	2			4.0289	3.0000
			3			6.0644	5.0000
			4			7.9154	7.0000
			5			9.2318	9.0000
7.3	1	1	2	4.1090	3.0000		
			3	6.0925	5.0000		
		4	8.2719	7.0000			
		5	9.1708	9.0000			
7.4	1	1	2			4.0289	3.0000
			3			6.0567	5.0000
		4			8.1381	7.0000	
		5			11.3189	9.0000	
7.5	2	2	4	2.5422	1.3863		
			8	3.2008	2.0795		
			12	3.6630	2.4849		
			16	3.8451	2.7726		
			20	4.0061	2.9957		
			24	4.2171	3.1781		
7.6	2	2	4			2.5850	1.3863
			8			3.3369	2.0795
			12			3.5322	2.4849
			16			4.0527	2.7726
			20			4.2053	2.9957
7.7	1	1	4	2.4768	1.3863		
			8	3.0605	2.0795		
			12	3.2789	2.4849		
			16	3.5388	2.7726		
			20	3.8238	2.9957		
7.8	1	1	4			2.8118	1.3863
			8			3.4839	2.0795
			12			4.1279	2.4849
			16			4.1221	2.7726
			20			4.9607	2.9957
		24			4.1827	3.1781	
		28			4.2913	3.3322	

TABLA 7.8 Pendientes obtenidas y esperadas para las ecuaciones analizadas con el algoritmo 1.

ec.	gráf.	criterio	n ^o e cte.	PENDIENTES en el valor de la fn.		PENDIENTES en el val. der. de fn.	
				obtenida	esperada (teori.)	obtenida	esperada (teori.)
7.3	7.13	2	n 2 3	3.2516 3.9178	3.0000 5.0000		
	7.14	2	n 2 3			6.8409 3.1633	3.0000 5.0000
	7.15	1	n 2 3	4.0907 7.9338	3.0000 5.0000		
	7.16	1	n 2 3			8.1101 2.6799	3.0000 5.0000
	7.17	2	e 4 8	1.2779 3.2232	1.3863 2.0795		
	7.18	2	e 4 8			1.1891 1.7885	1.3863 2.0795
	7.19	1	e 4 8	1.2672 3.6799	1.3863 2.0795		
	7.20	1	e 4 8			1.2953 1.6499	1.3863 2.0795
7.7	7.25	1	n 2 3 4	5.6394 5.6014 6.5675	3.0000 5.0000 7.0000		
	7.26	1	n 2 3 4 5 6 7			4.8581 6.0247 7.0515 10.0829 10.9652 11.8089	3.0000 5.0000 7.0000 9.0000 11.0000 13.0000
	7.27	1	e 4 8 12 16 20 24	1.1141 1.6585 1.4073 2.0189 1.3604 1.0561	1.3863 2.0795 2.4849 2.7726 2.9957 3.1781		
	7.28	1	e 4 8 12 16 20 24 28			1.1622 1.7042 1.9309 2.1281 2.1605 2.2590 2.3578	1.3863 2.0795 2.4849 2.7726 2.9957 3.1781 3.3322

TABLA 7.8 Continuación.

PARA ECUACIONES ANALIZADAS CON EL ALGORITMO 2.

ec.	gráf.	criterio	n ó e cte.	PENDIENTES en el valor de la fn.		
				obtenida	esperada (teori.)	
7.1	7.9	2	n 2	4.0408	3.0000	
			3	5.6004	5.0000	
			4	7.2304	7.0000	
			5	5.6856	9.0000	
	7.10	1		n 2	4.0807	3.0000
				3	5.4757	5.0000
				4	7.4487	7.0000
				5	6.5049	9.0000
	7.11	2		e 4	2.4313	1.3863
				8	2.8964	2.0795
				12	3.5124	2.4849
				16	3.7172	2.7726
20				3.8123	2.9957	
24				3.8979	3.1781	
28				4.0018	3.3322	
32				3.5443	3.4657	
7.12	1		e 4	2.1375	1.3863	
			8	2.8699	2.0795	
			12	3.0414	2.4849	
			16	3.5574	2.7726	
			20	3.6869	2.9957	
			24	3.7677	3.1781	
			28	3.8740	3.3322	
			32	3.3814	3.4657	
7.5	7.21	2	n 2	3.5635	3.0000	
			3	4.3857	5.0000	
			4	6.6217	7.0000	
	7.22	1		n 2	3.6322	3.0000
				3	4.4972	5.0000
				4	7.4754	7.0000
	7.23	2		e 4	1.1790	1.3863
				8	1.0097	2.0795
				12	1.8418	2.4849
				16	2.3479	2.7726
	7.24	1		e 4	1.2852	1.3863
				8	1.9424	2.0795
12				1.8503	2.4849	
16				2.6744	2.7726	
20				2.2244	2.9957	

TABLA 7.9 Pendientes obtenidas y esperadas teóricamente para las ecuaciones analizadas con el algoritmo 2.

ec.	gráf.	criterio	n ó e	PENDIENTES en el valor de la fn.	
				obtenida	esperada (teori.)
7.7	7.29	1	2	5.5773	3.0000
			3	5.7315	5.0000
			4	6.5676	7.0000
	7.30	1	4	1.1141	1.3863
			8	1.6585	2.0795
			12	1.4073	2.4849
			16	2.0190	2.7726
		20	1.3604	2.9957	
		24	1.0561	3.1781	

TABLA 7.9 Continuación.

●CONCLUSIONES.

A través de las gráficas 7.1 a 7.30 y figuras 7.2 a 7.7 y tablas 7.8 y 7.9, exponemos todos los resultados obtenidos de las corridas numéricas hechas a las ecuaciones 7.1, 7.3, 7.5 y 7.7 con los algoritmos 1 y 2.

Mesinemos que no hemos graficado el total de puntos obtenidos para $n=2,3,\dots,10$ y $e=4,8,\dots,48$, como ha sido indicado en las ecuaciones (7.11), ya que para valores más grandes de n y e (y que estan dentro del rango de las ecuaciones 7.11), dan líneas constantes, que más adelante serán discutidas.

Recordemos que, al efectuar cada cálculo con números en computadora conlleva a un error que llamamos de redondeo, como fue indicado en el capítulo V. Este error de redondeo, para cada operación aritmética que se efectue, es menor o igual que cierta unidad que hemos llamado u , y que esta dada por las ecuaciones (5.30') para el caso de la HP-9000. De este modo, las gráficas para el error (7.1-30), expresan un error real dado de la siguiente forma:

$$\text{error}_{\text{real}} = \text{error}_{\text{teórico}} \oplus \text{error}_{\text{redondeo}} \quad (7.12)$$

donde $\text{error}_{\text{teórico}}$ es el que se propone en base a la construcción teórica y esta dado en la ecuación (5.24); mientras que $\text{error}_{\text{redondeo}}$ esta dado por la acumulación de errores de redondeo y en donde, ambos errores se *adicionan* para dar el error observado o real.

Las conclusiones que podemos obtener estan dadas en las gráficas 7.1-30 y figuras 7.2-7 así como en las tablas 7.8 y 7.9.

De las figuras 7.2 a la 7.7 podemos ver que la solución aproximada se aproxima bien a la exacta. Y eso es todo lo que podemos concluir de tales figuras.

Sin embargo: Que tan bien se aproxima la solución aproximada a la exacta ?.

Una respuesta tentativa esta dada através de las gráficas 7.1 a la 7.30 y que precisamente hemos desarrollado para dar, dentro de lo que podemos, una respuesta a la pregunta anterior y que a su vez corrobora la precisión dada teóricamente. Y esto, por supuesto esta relacionado con la eficacia del los algoritmos.

Observemos entonces las características, que en general, tienen nuestras gráficas:

- 1.: Las pendientes obtenidas, en su mayoría, son mayores que las predichas teóricamente.
- 2.: Cuando n y e son pequeños ($n=2,3$, $e=4$) se obtienen rectas bien definidas.
- 3.: Todas las líneas, en una gráfica dada, tienden a estacionarse en un punto particular del eje $|\log(e)|$.

El primer punto implica dos cosas solamente: que el error predicho teóricamente (ver ecuación 5.24) es conservador, y la segunda implicación que tiene es simplemente que el error de redondeo aumenta conforme la colocación (n) y la partición (e) lo hacen (esto está íntimamente ligado a los puntos 2 y 3).

Naturalmente cuando n y e son pequeños el error de redondeo es casi despreciable en comparación con los valores absolutos de las diferencias que estamos graficando y esto explica el punto 2.

Finalmente el punto 3 conduce a dos respuestas alternativas

3.1.: $| \text{solución_exacta} - \text{solución_aproximada} | < \text{error}_{\text{redondeo}}$
($| u_{ei} - \hat{u}_{ei} | < \text{error}_{\text{redondeo}}$).

3.2.: El algoritmo se estaciona a partir de algún valor para n y para e (o alguna adición de ellos).

La respuesta es, naturalmente la 3.1, esto es las diferencias que estamos midiendo entre la solución analítica (exacta) y la aproximada en los nodos de partición X_{ei} , según se use el criterio 1 o el 2, son menores que el error por redondeo. Ya que de no ser así todas las gráficas deberían estacionarse en aproximadamente el mismo punto del eje $|\log(e)|$. Sin embargo esto no ocurre, ya que unas se estacionan en aproximadamente $e^{-14} \cong 8.32 \times 10^{-7}$ (como es el caso de las gráficas 7.21, 7.22 y 7.23), mientras que otras se estacionan en aproximadamente $e^{-34} \cong 1.71 \times 10^{-15}$ (como en las gráficas 7.5 y 7.7). En donde estas últimas están por el límite de la unidad de redondeo para el sistema HP-9000 que es de $u \cong 5 \times 10^{-14}$ y que está dado en la ecuación (5.30a').

Señalemos que el error de redondeo ($\text{error}_{\text{redondeo}}$), está en función de los siguientes términos:

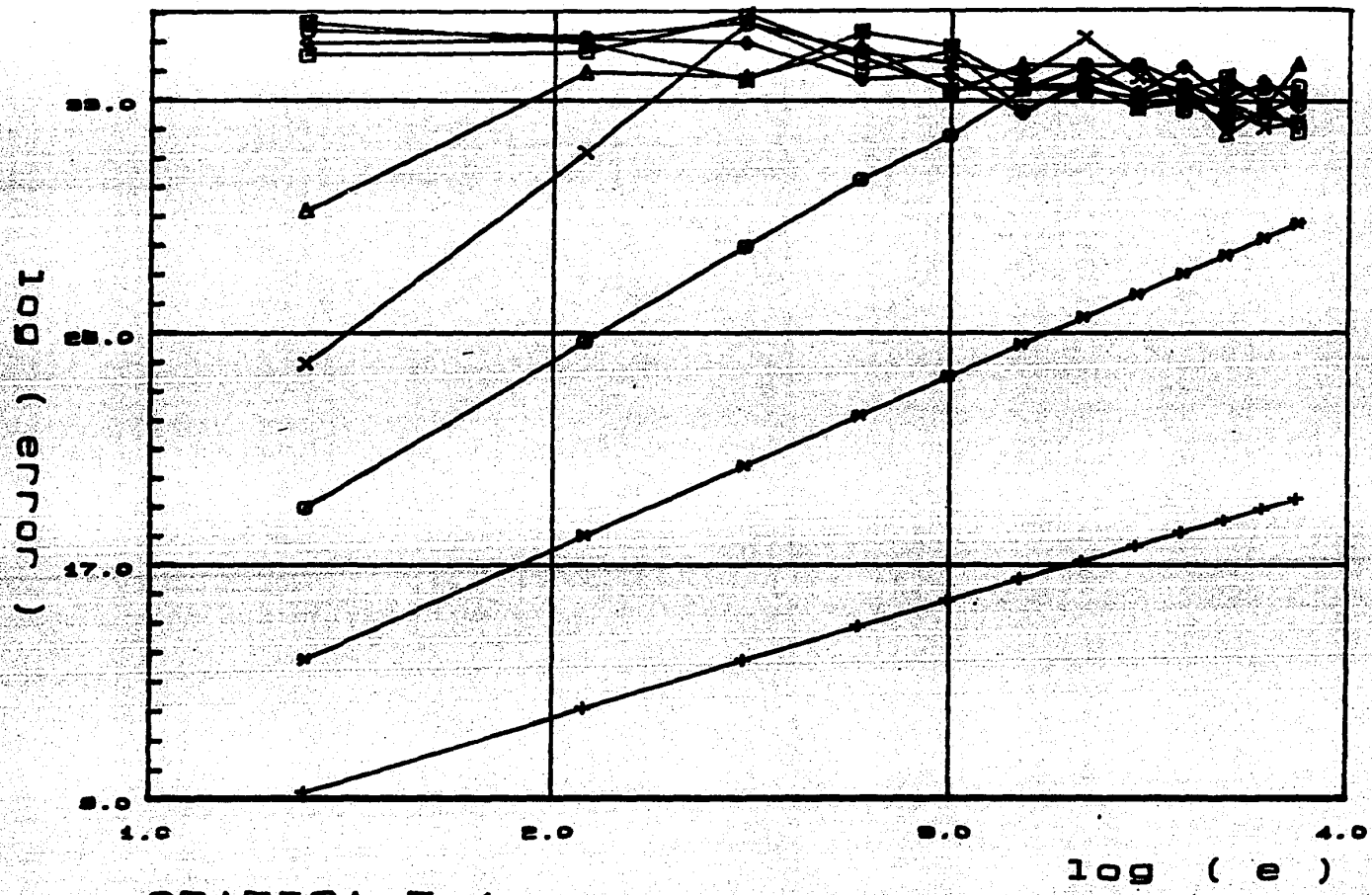
a.: De las funciones $a(x)$ y $b(x)$ de la ecuación diferencial original a resolver (ver por ejemplo la ecuación 6.1).

b.: De la colocación (n) y partición (e) elegidos.

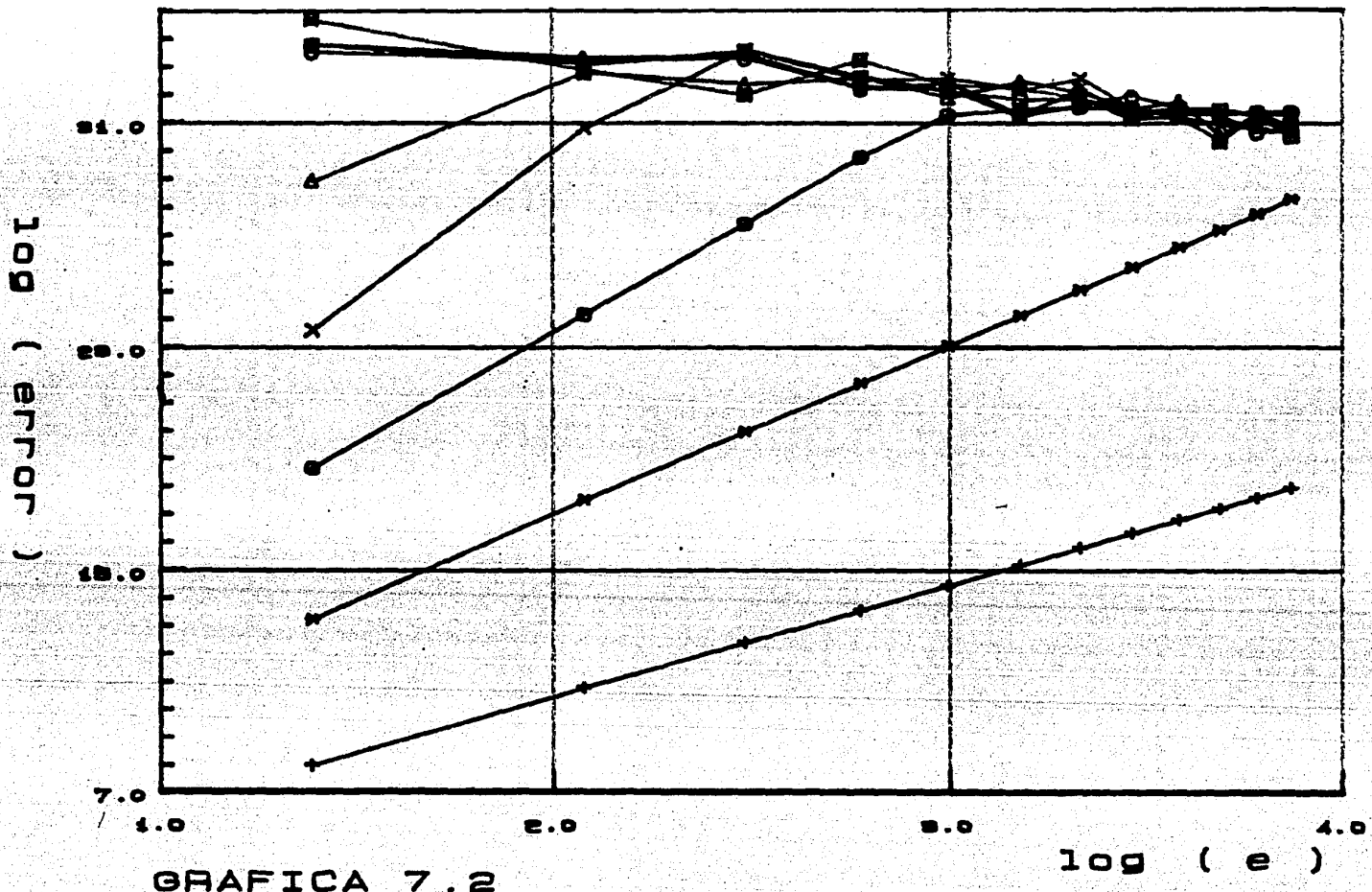
c.: De qué operaciones aritméticas efectúa el algoritmo en cuestión en la corrida.

Finalmente de los tres puntos indicados anteriormente podemos concluir los siguiente:

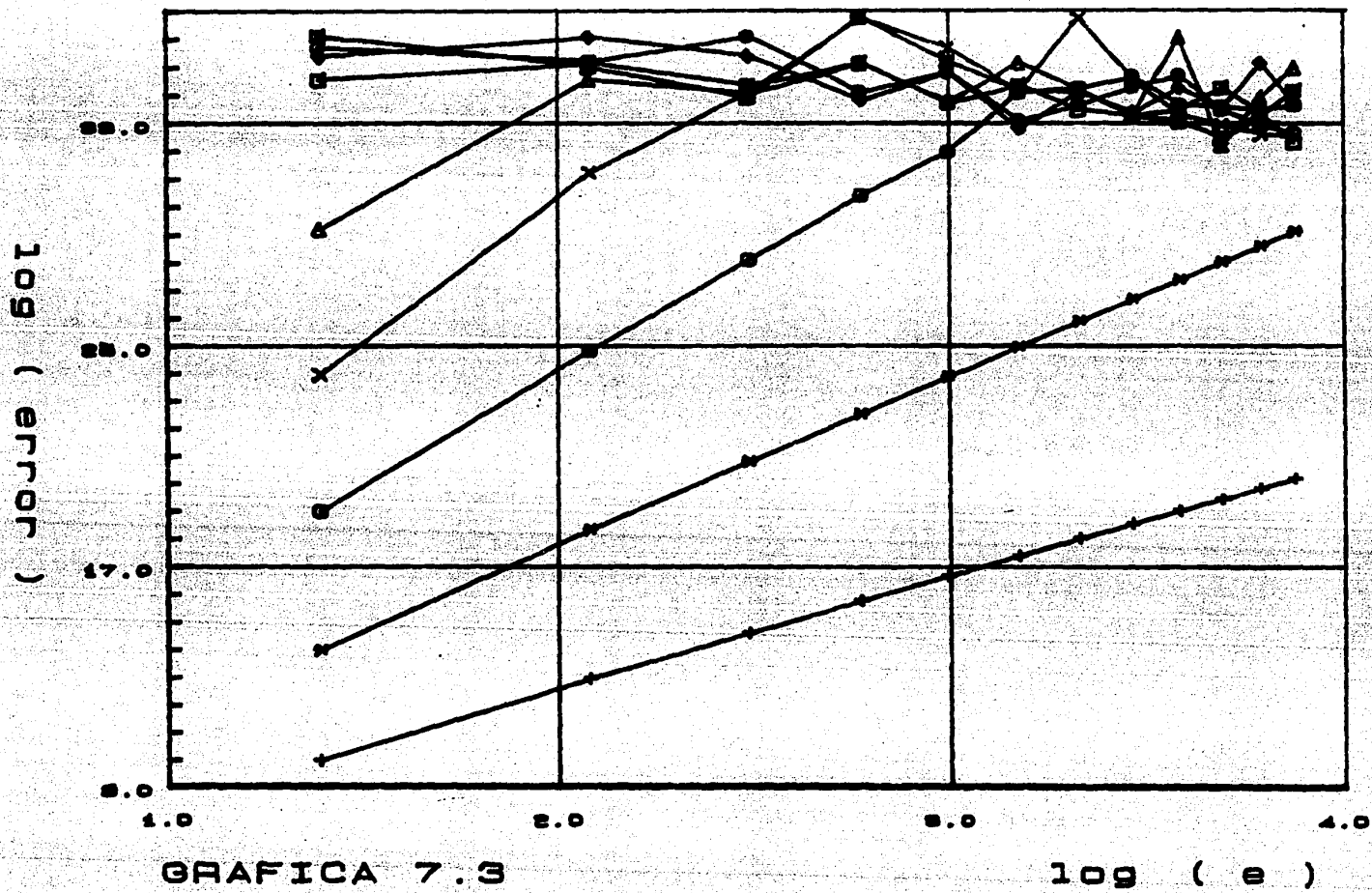
La predicción teórica de convergencia es conservadora dentro de los límites en que nos permite analizar el error de redondeo.

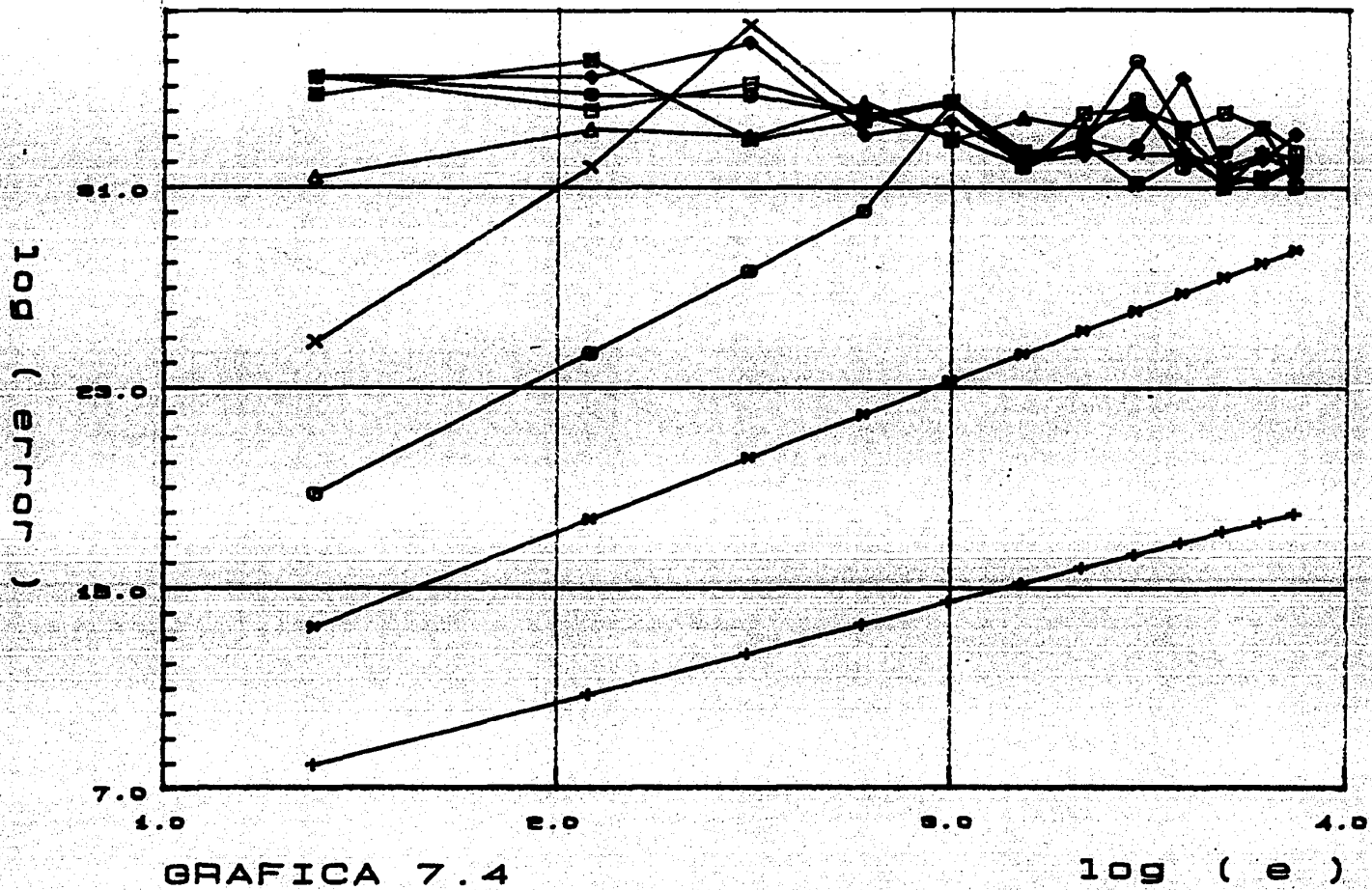


GRAFICA 7.1



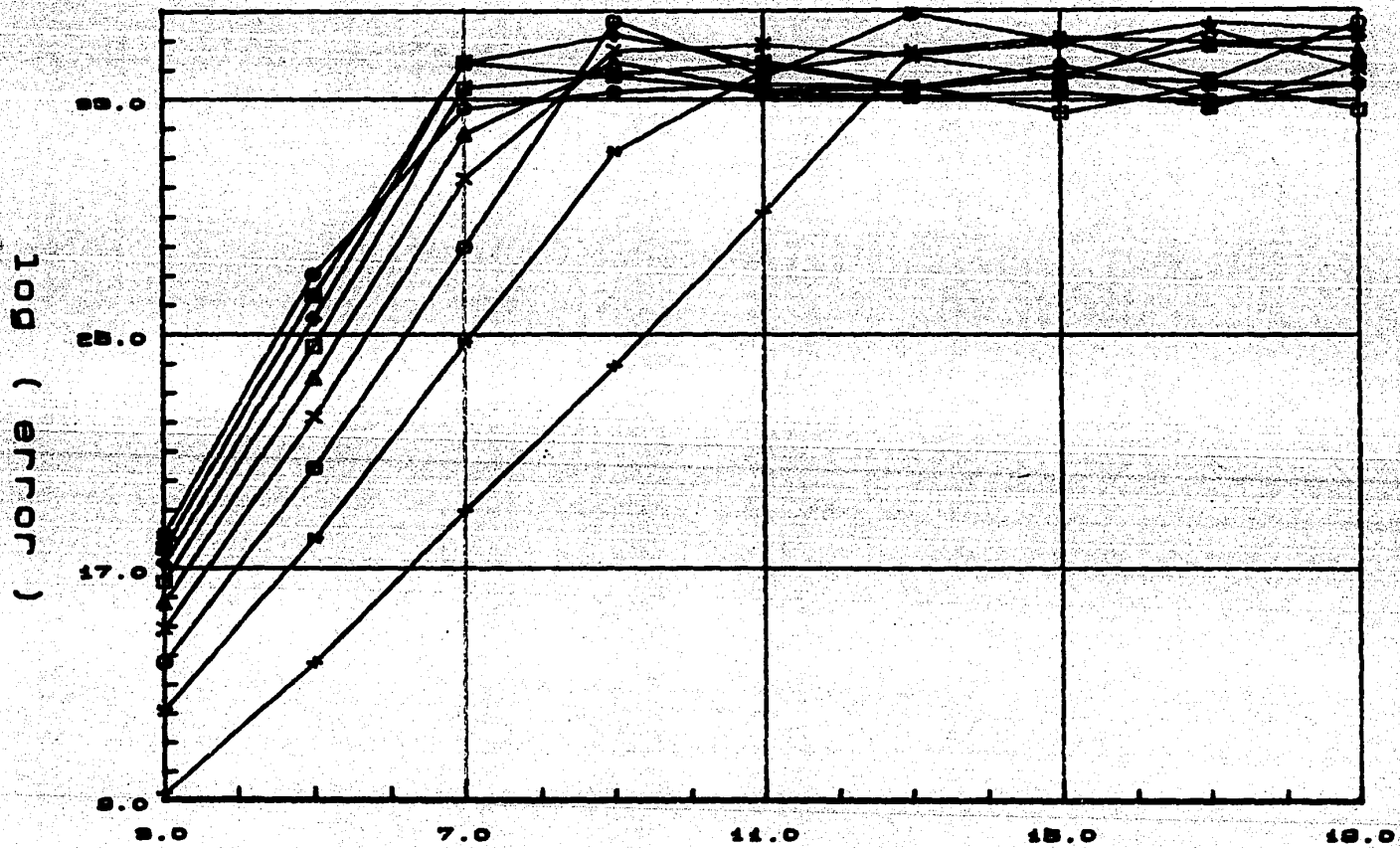
GRAFICA 7.2





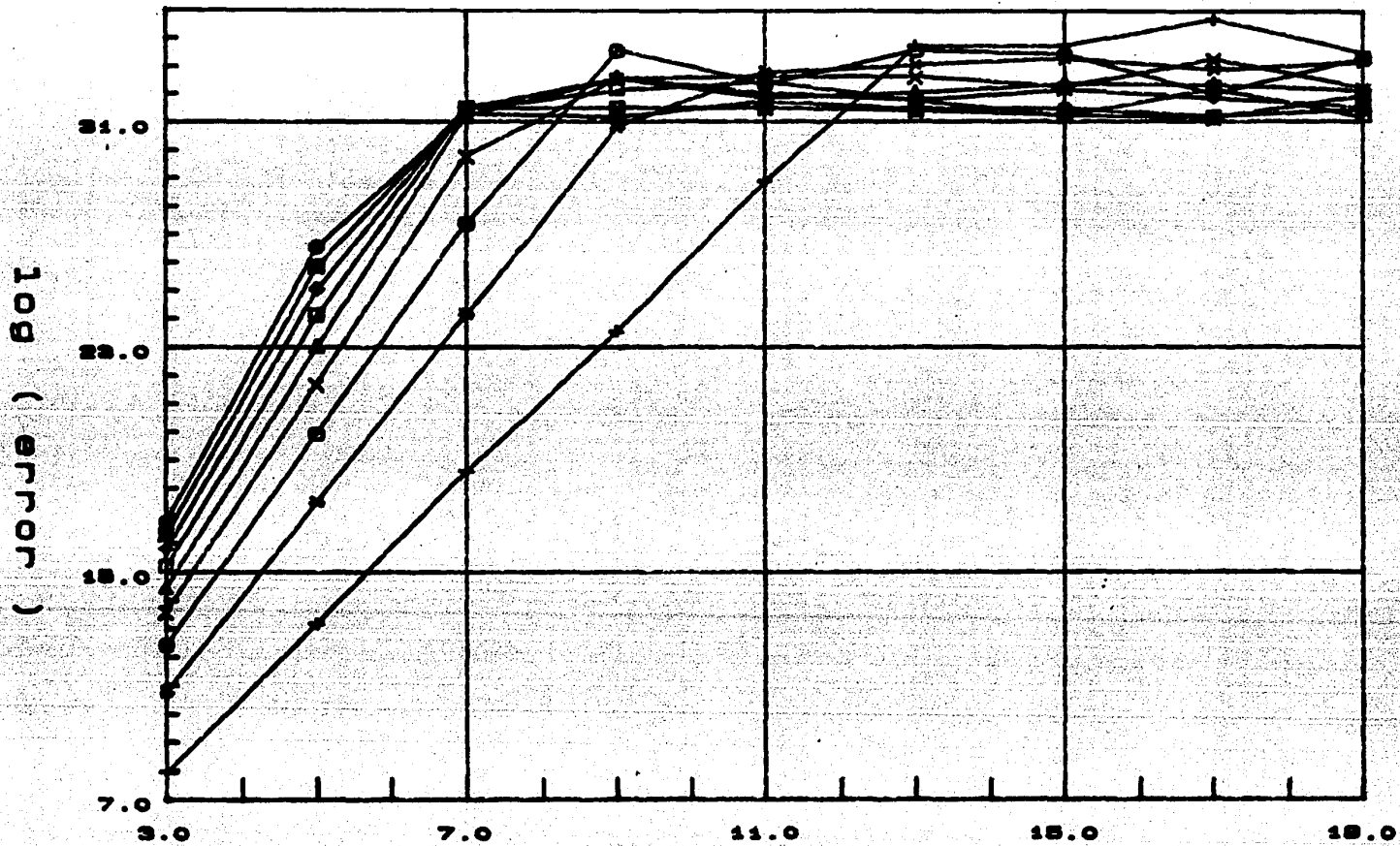
GRAFICA 7.4

$\log(e)$



GRAFICA 7.5

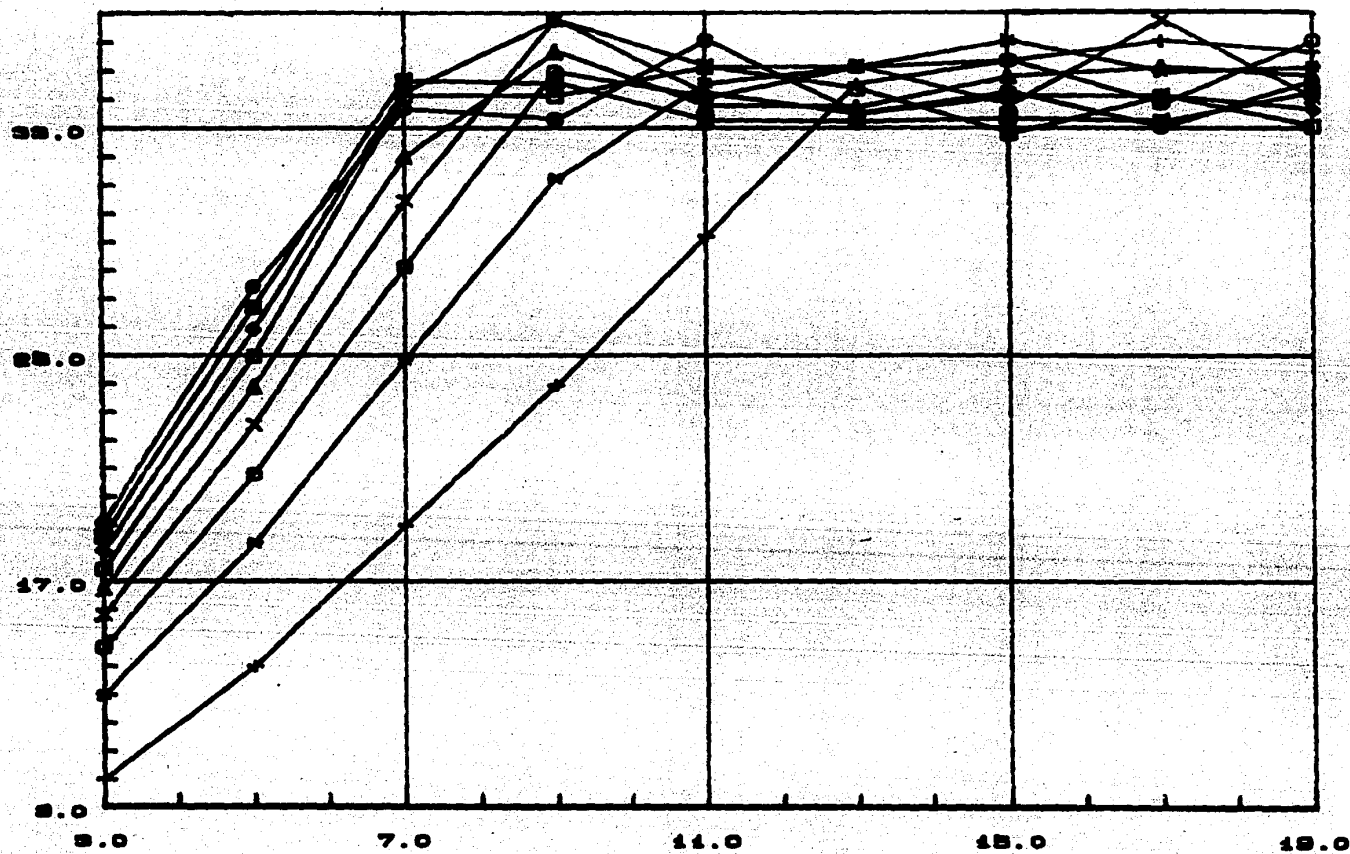
$(2*n-1)$



GRAFICA 7.6

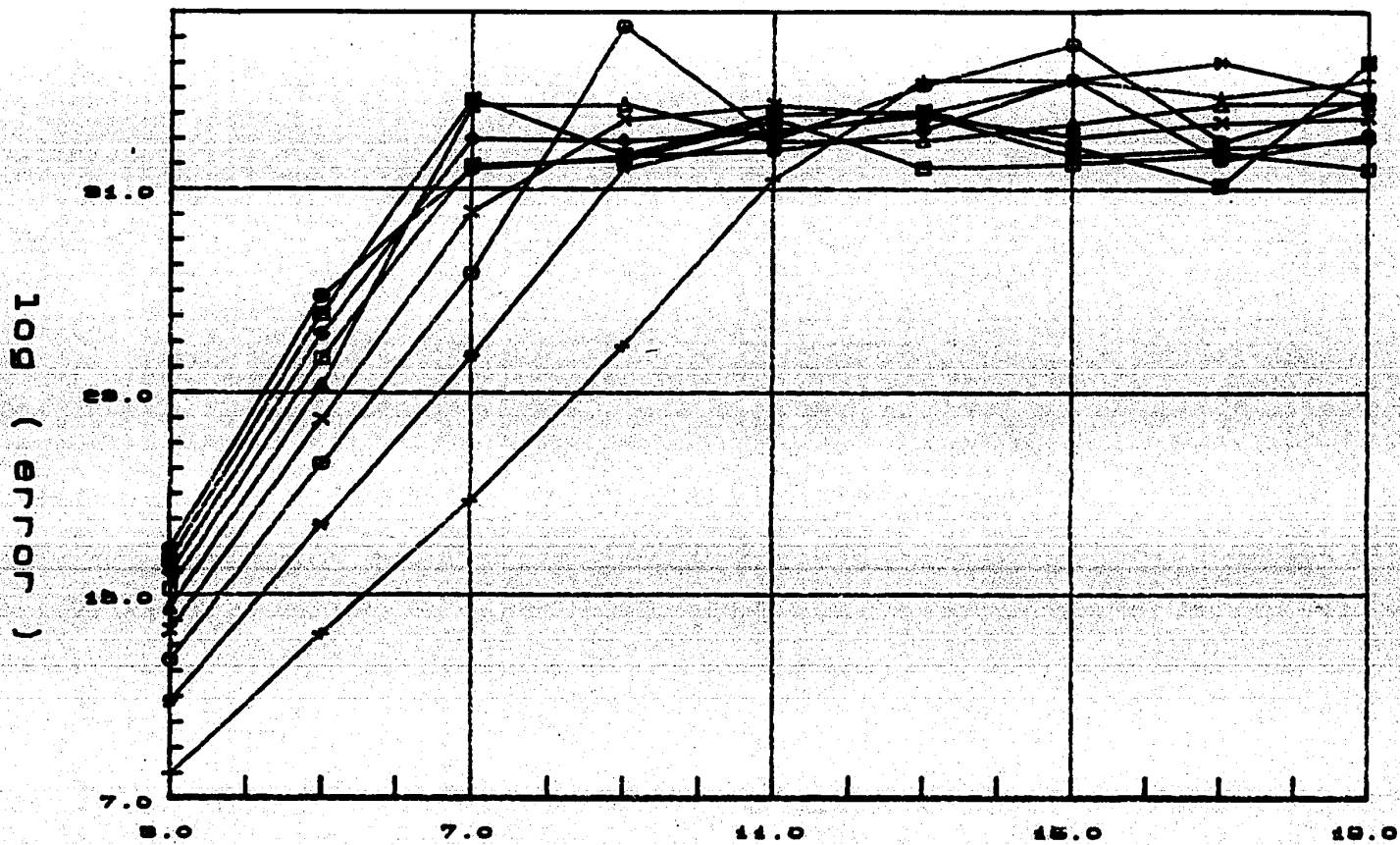
($2*n-1$)

log (error)



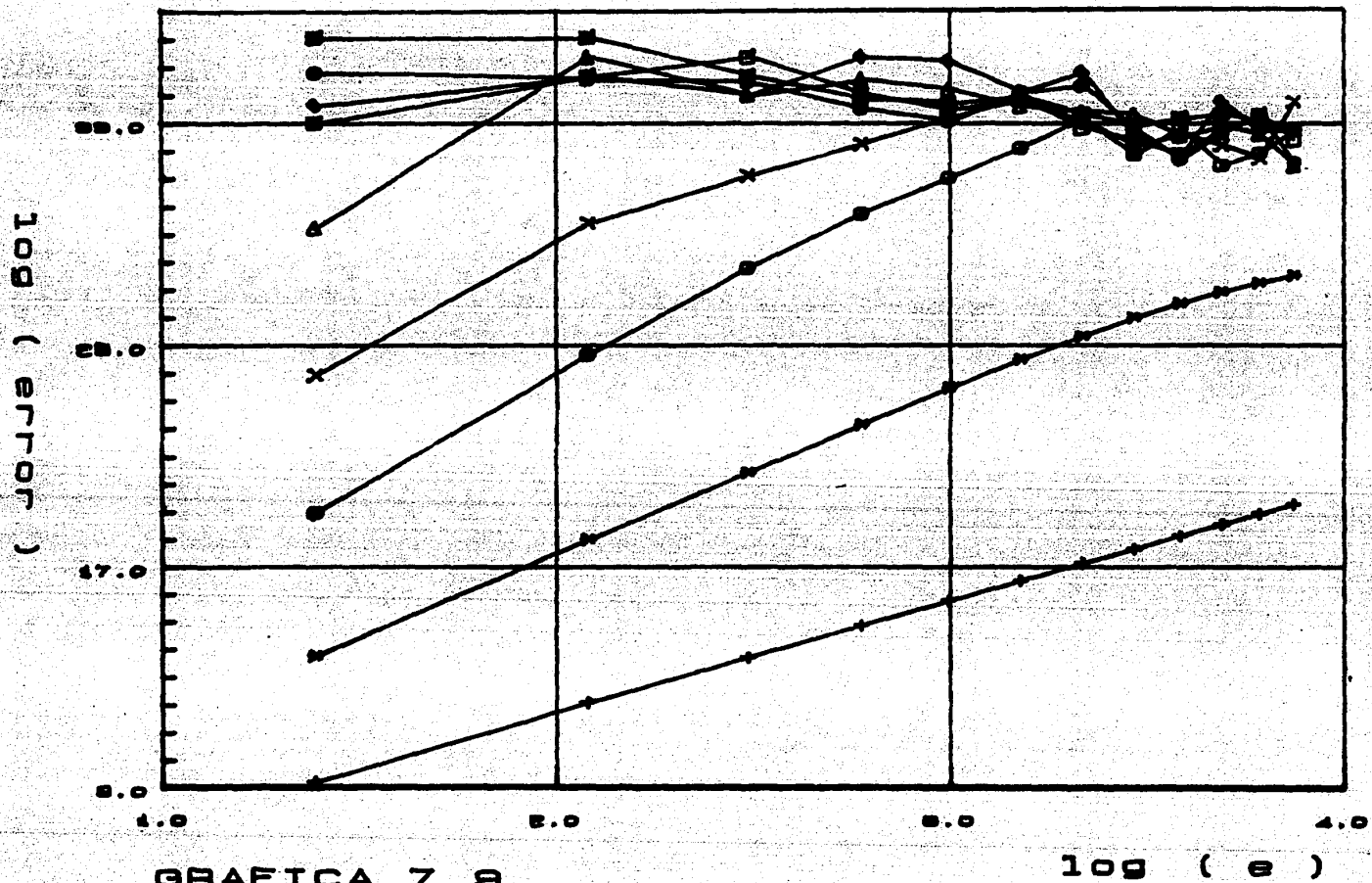
GRAFICA 7.7

(2 * n - 1)

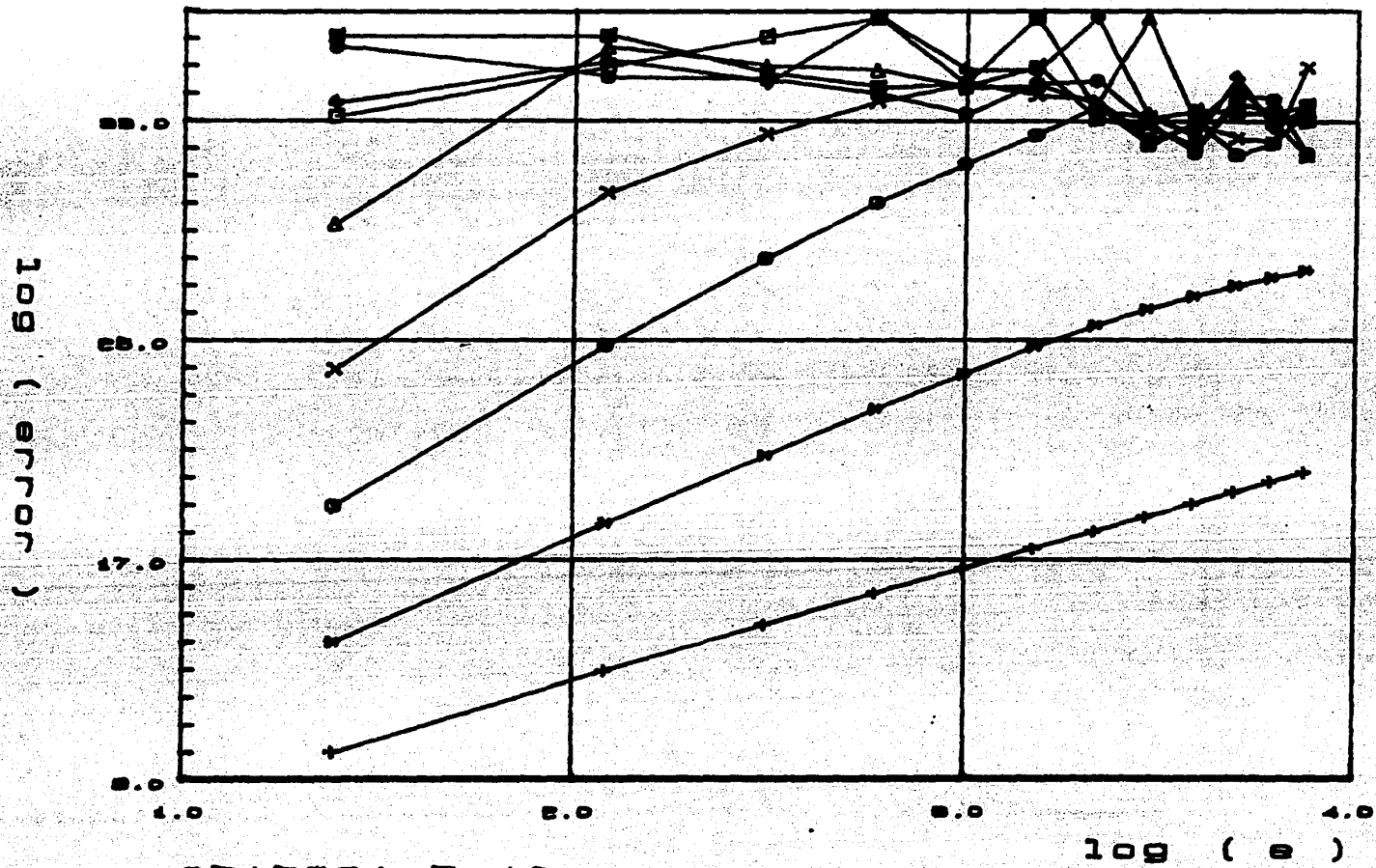


GRAFICA 7.8

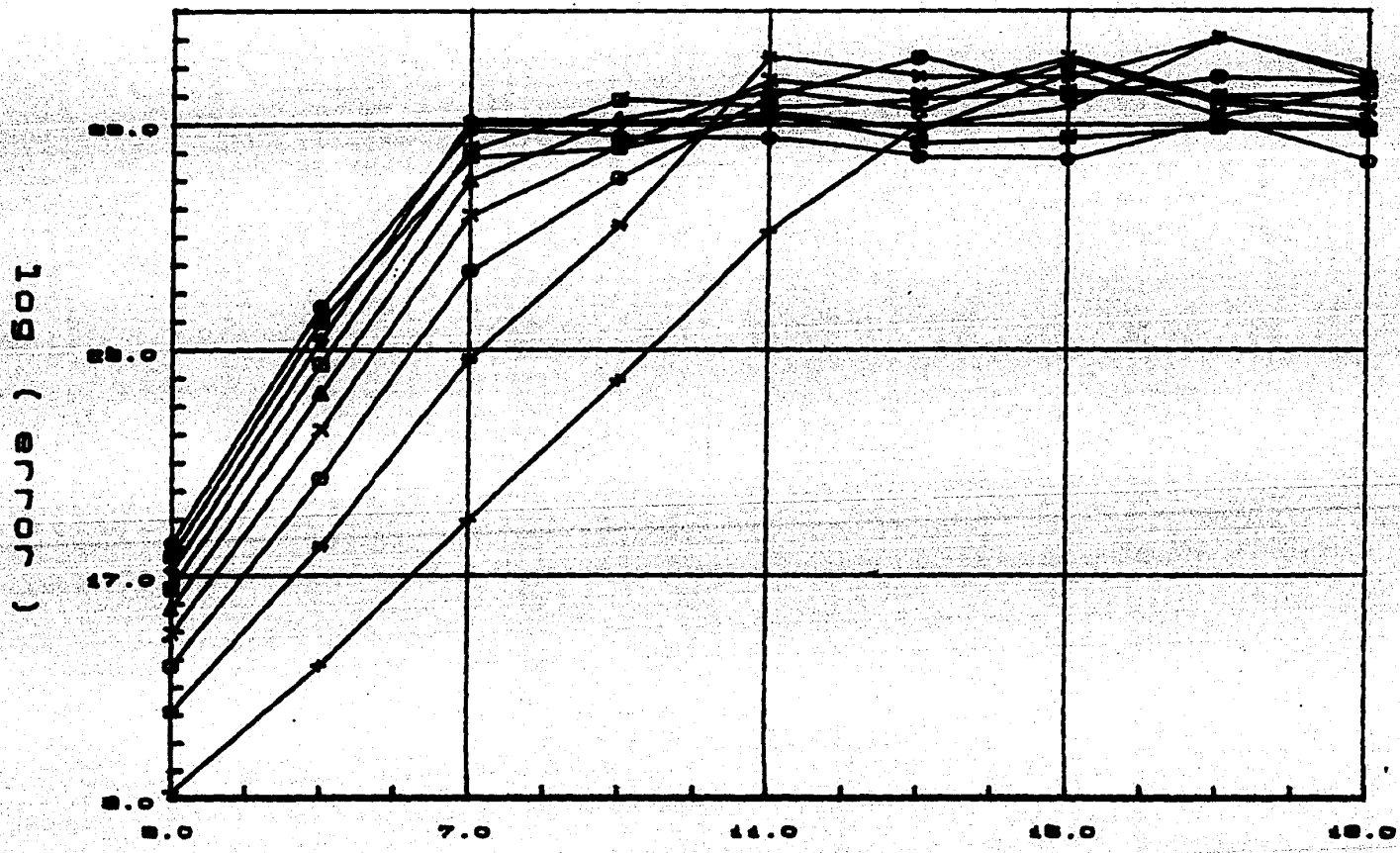
(2 * n - 1)



GRAFICA 7.9

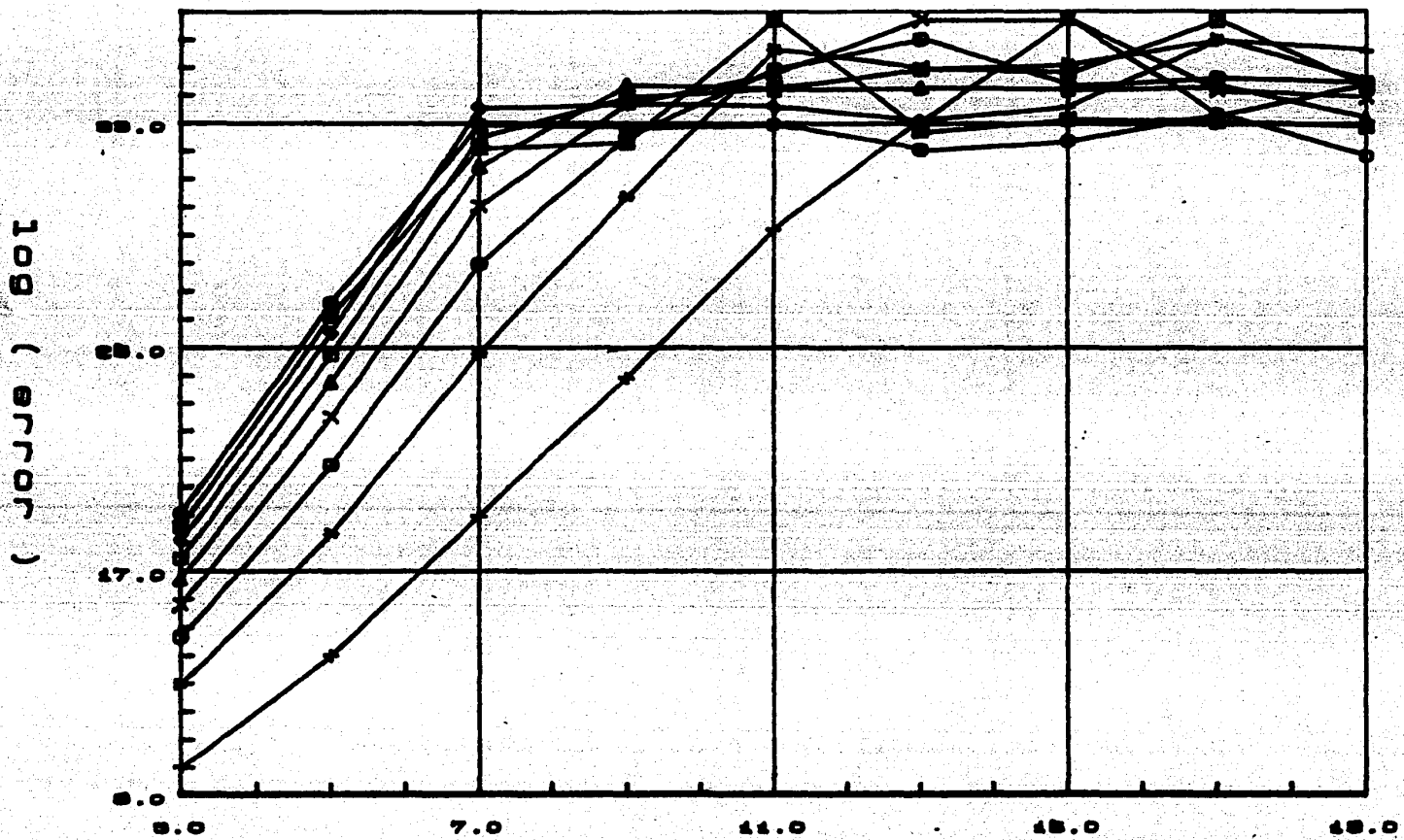


GRAFICA 7.10



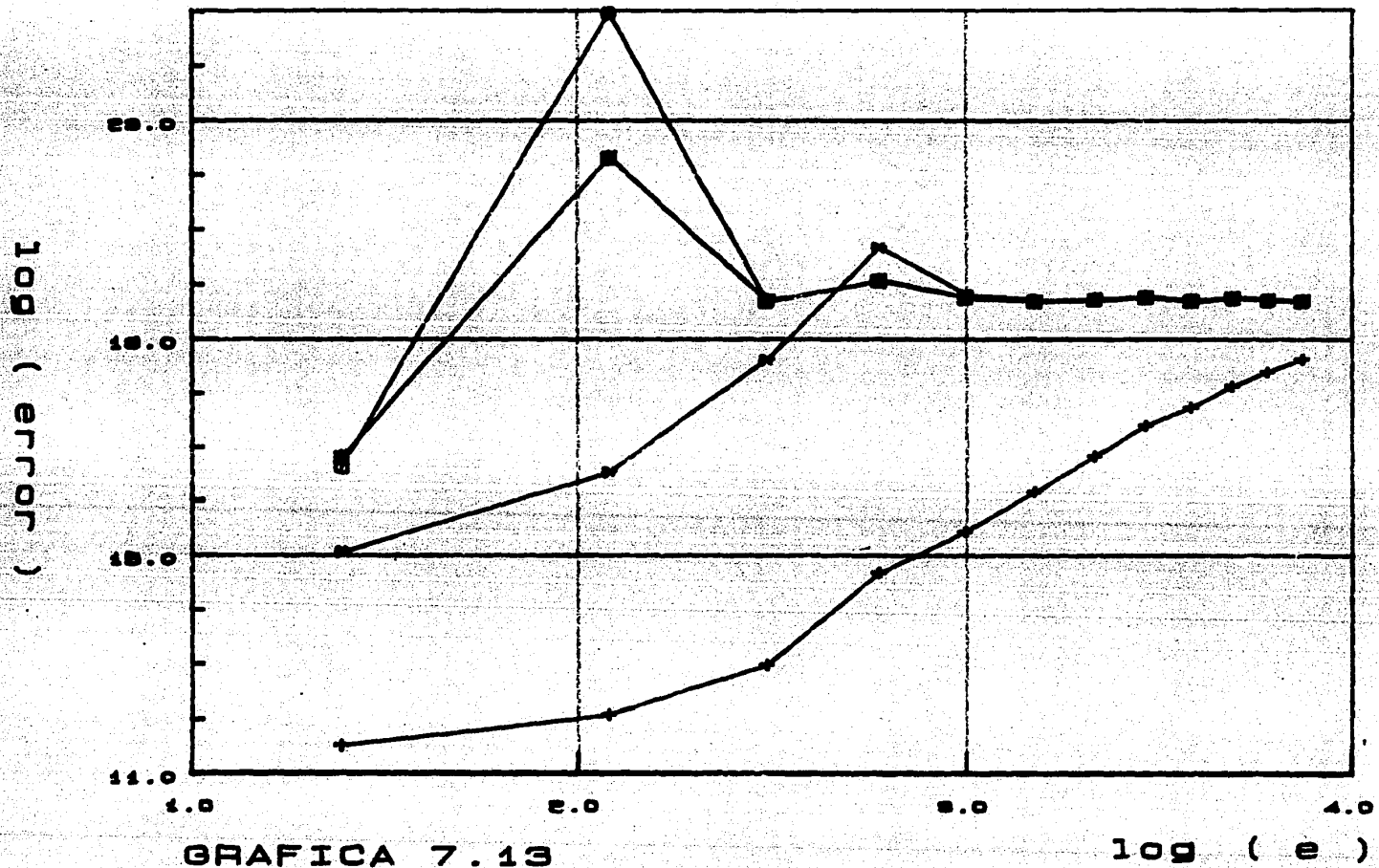
GRAFICA 7.11

($2 \times n - 1$)



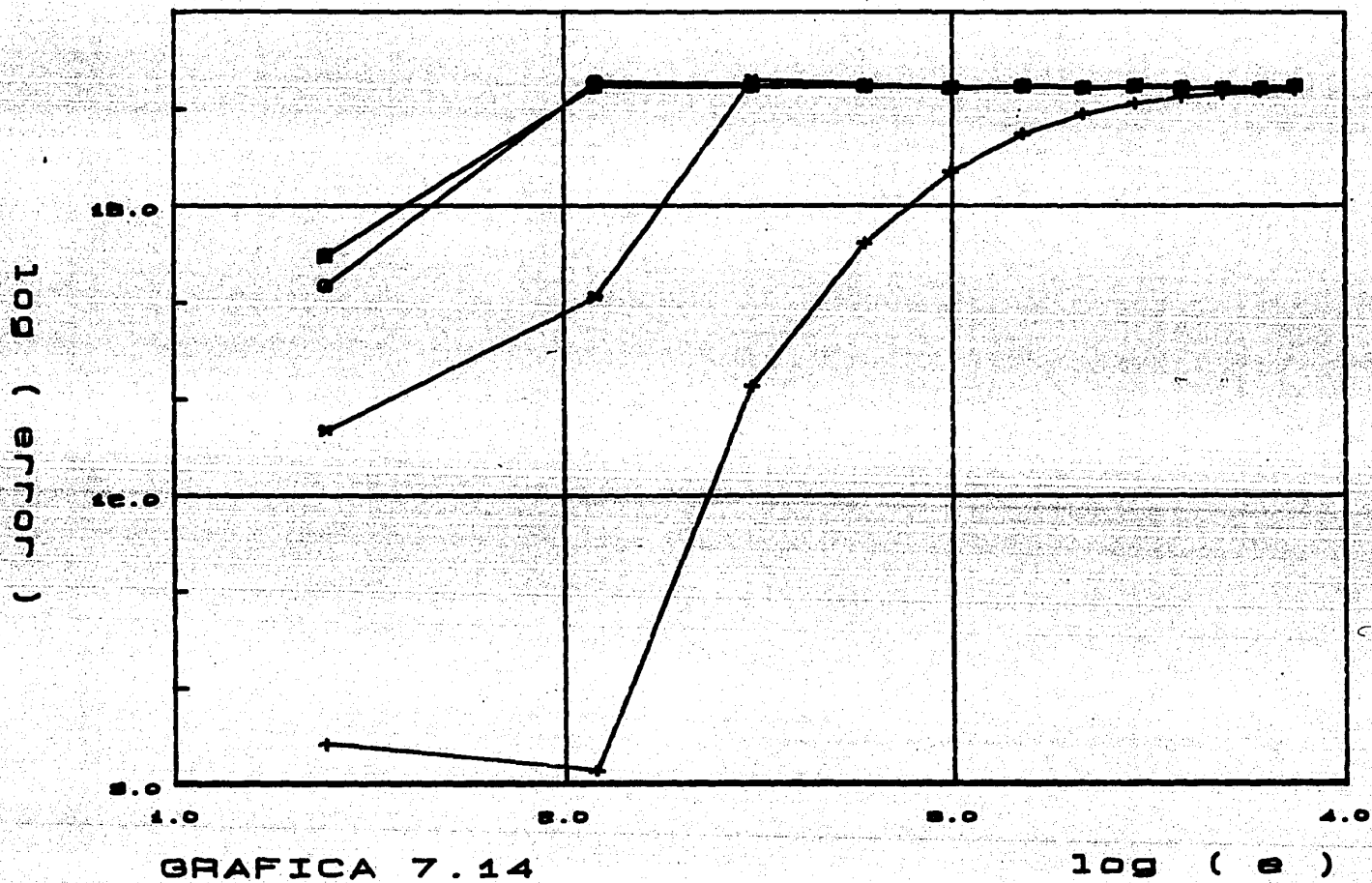
GRAFICA 7.12

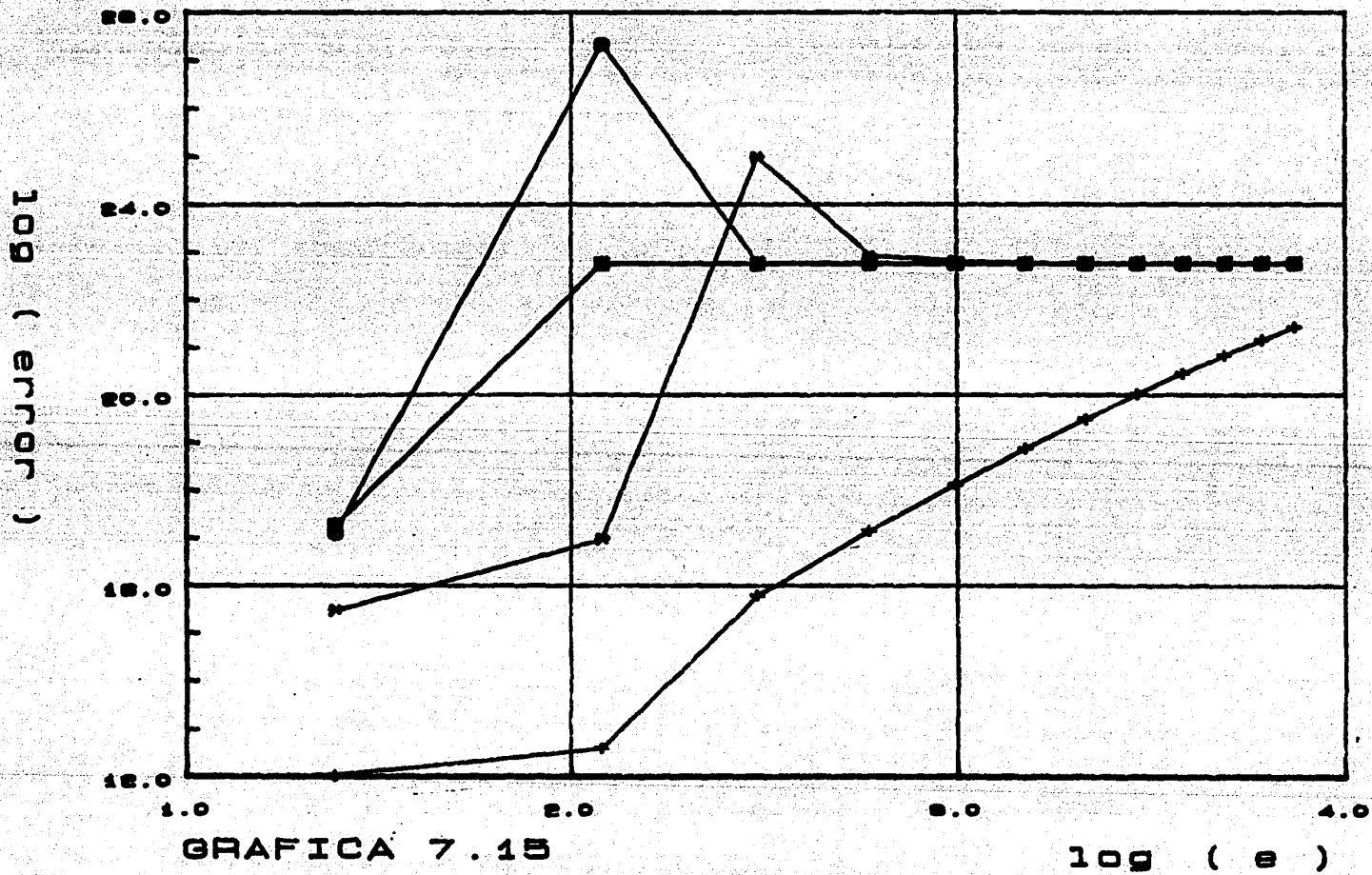
(2*n-1)

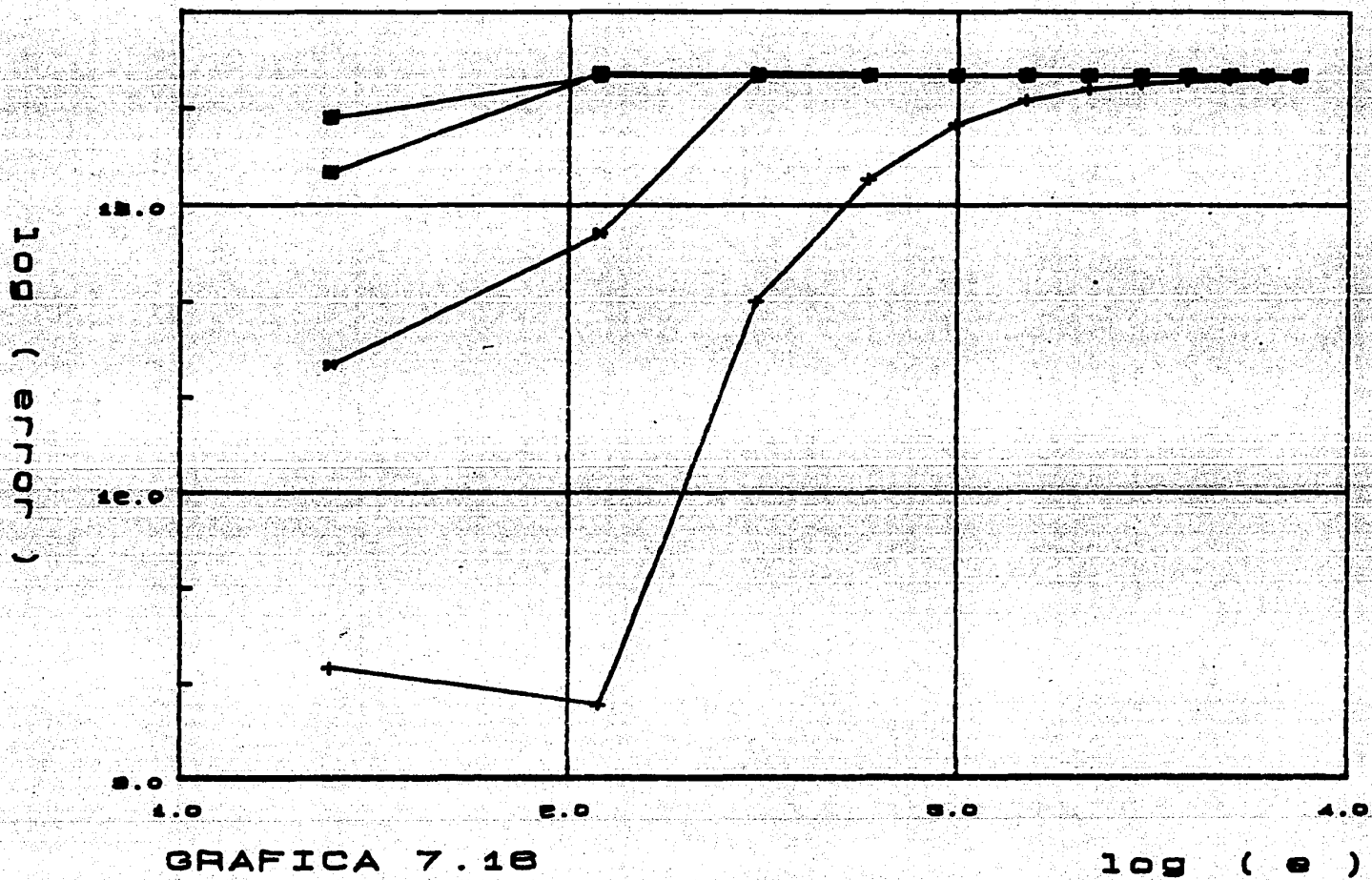


GRAFICA 7.13

$\log(e)$

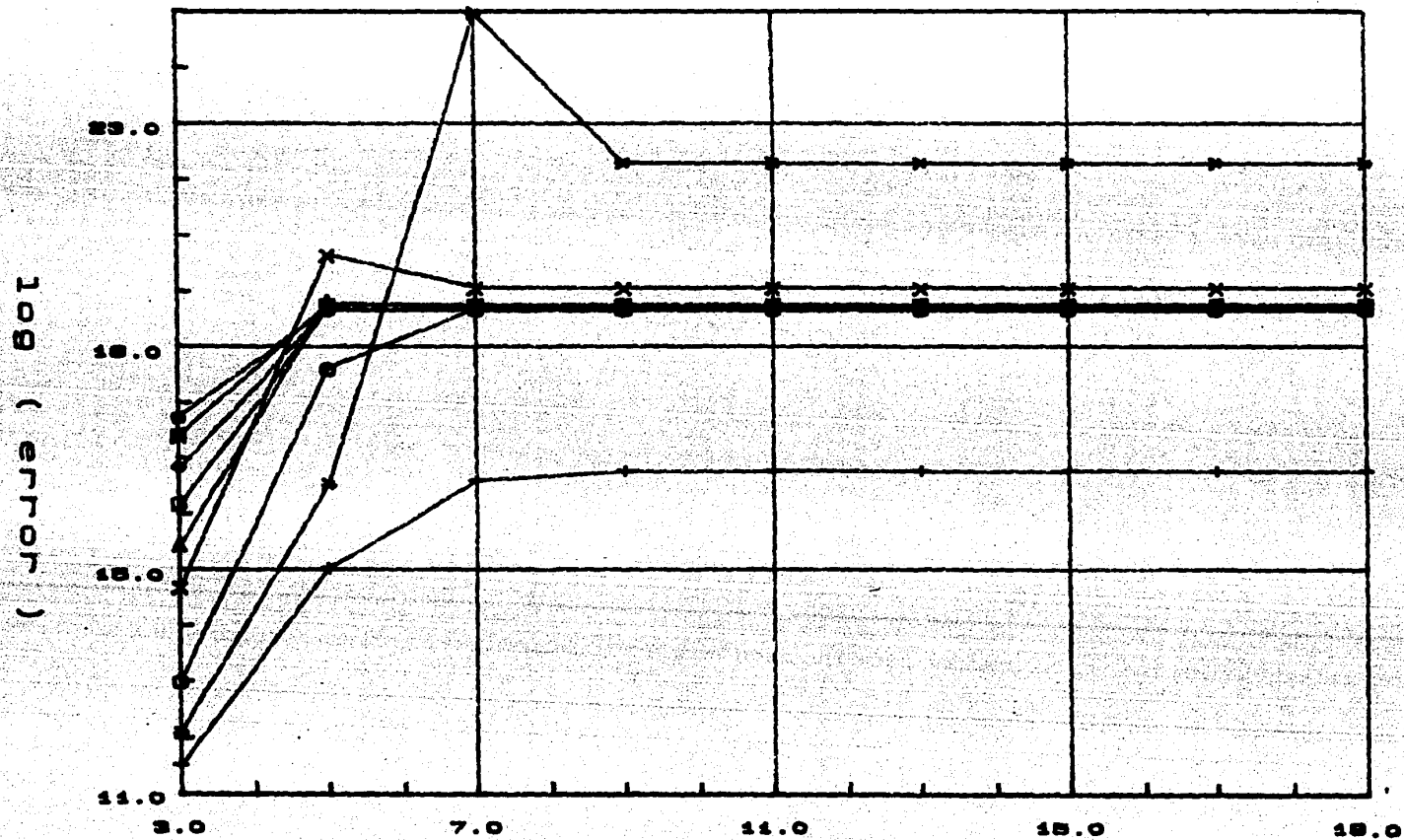






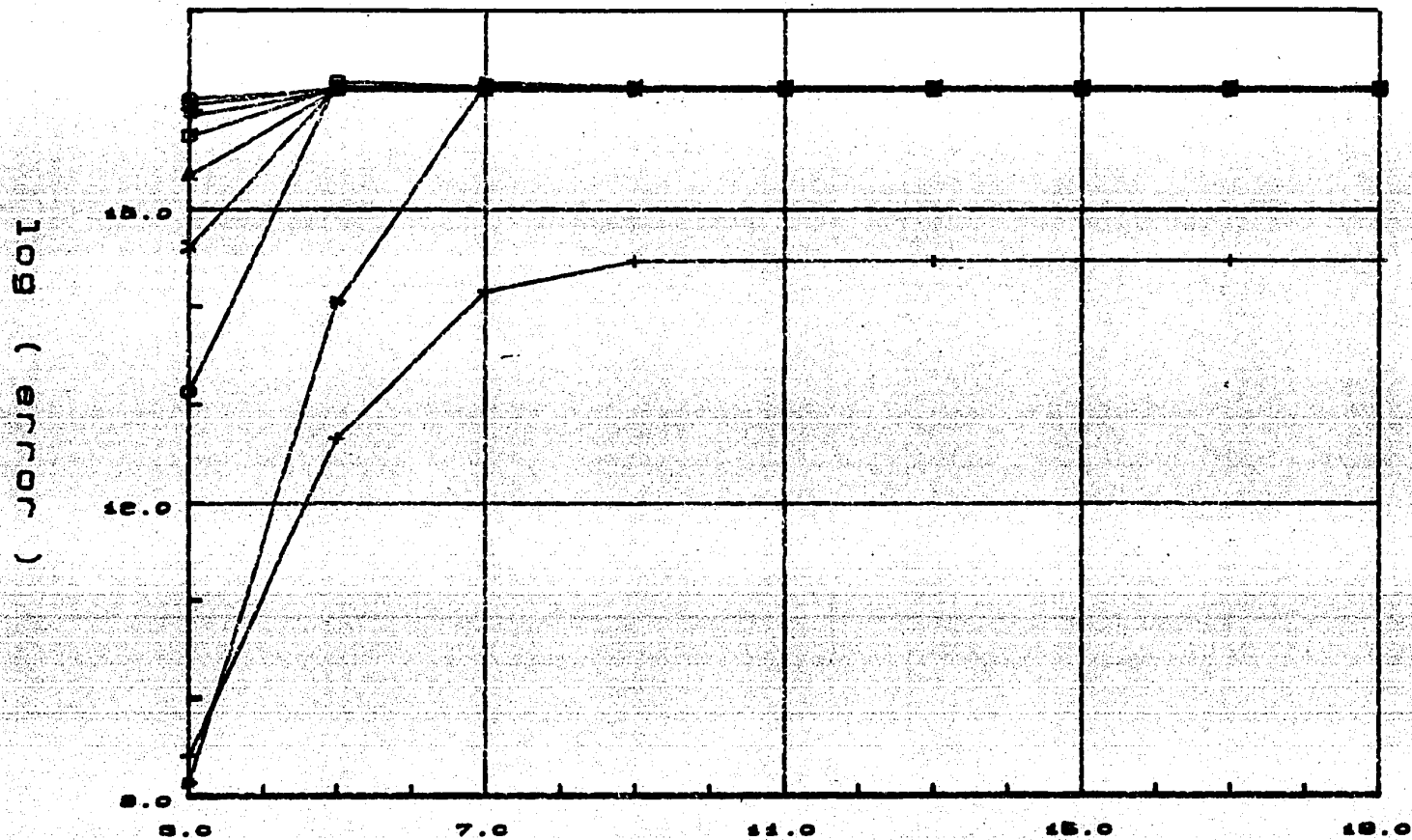
GRAFICA 7.18

log (e)



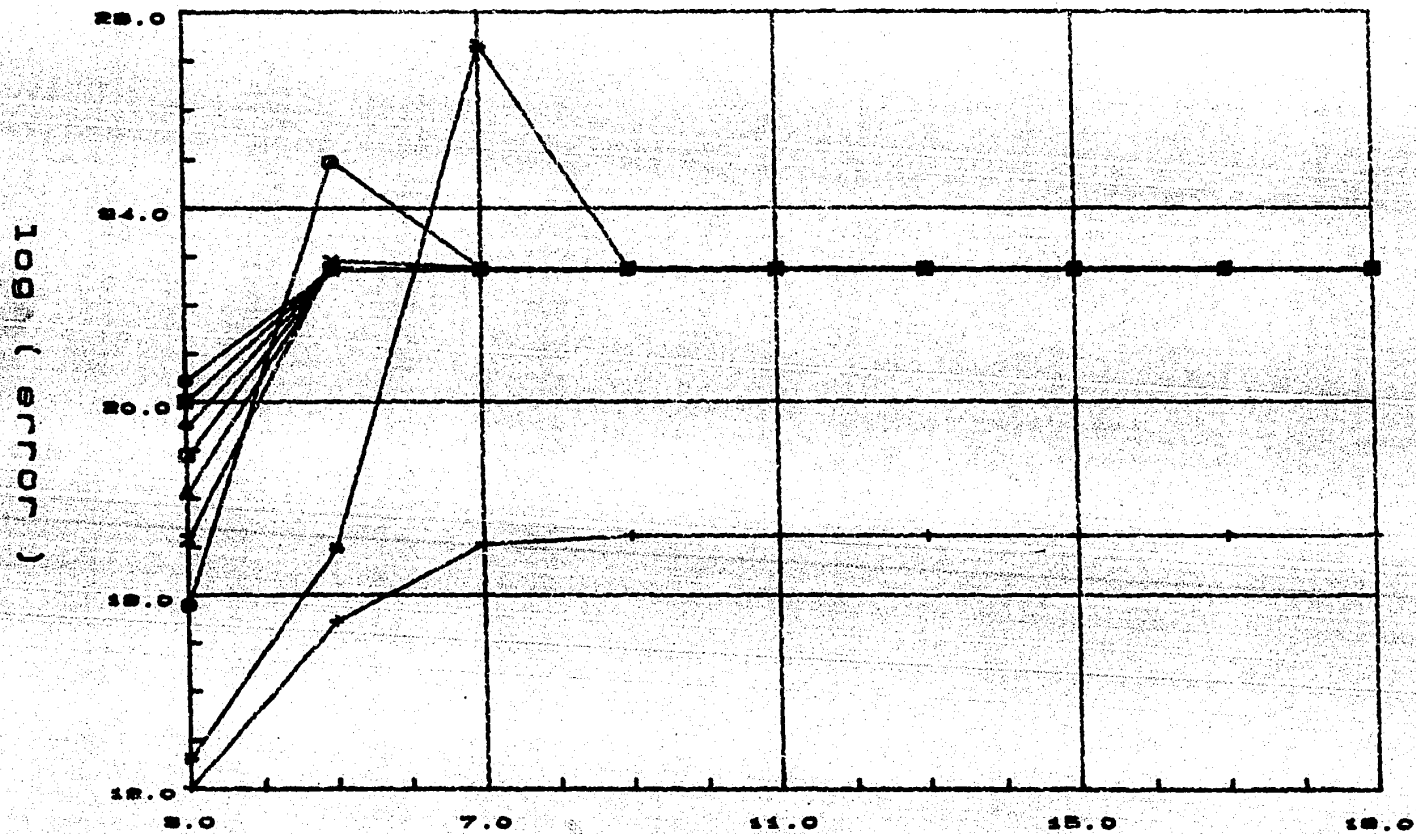
GRAFICA 7.17

($2 \times n - 1$)



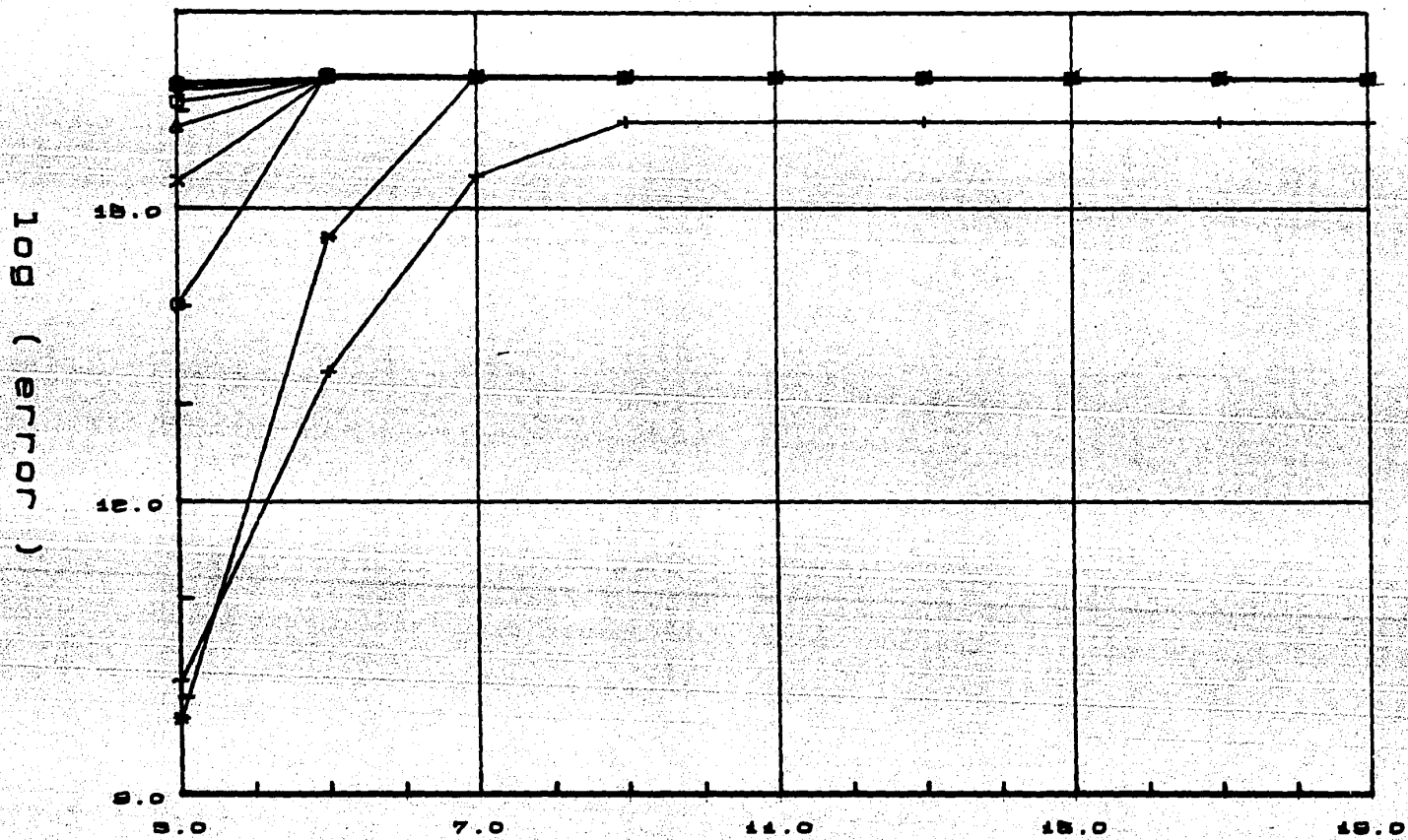
GRAFICA 7.18

(2*n-1)



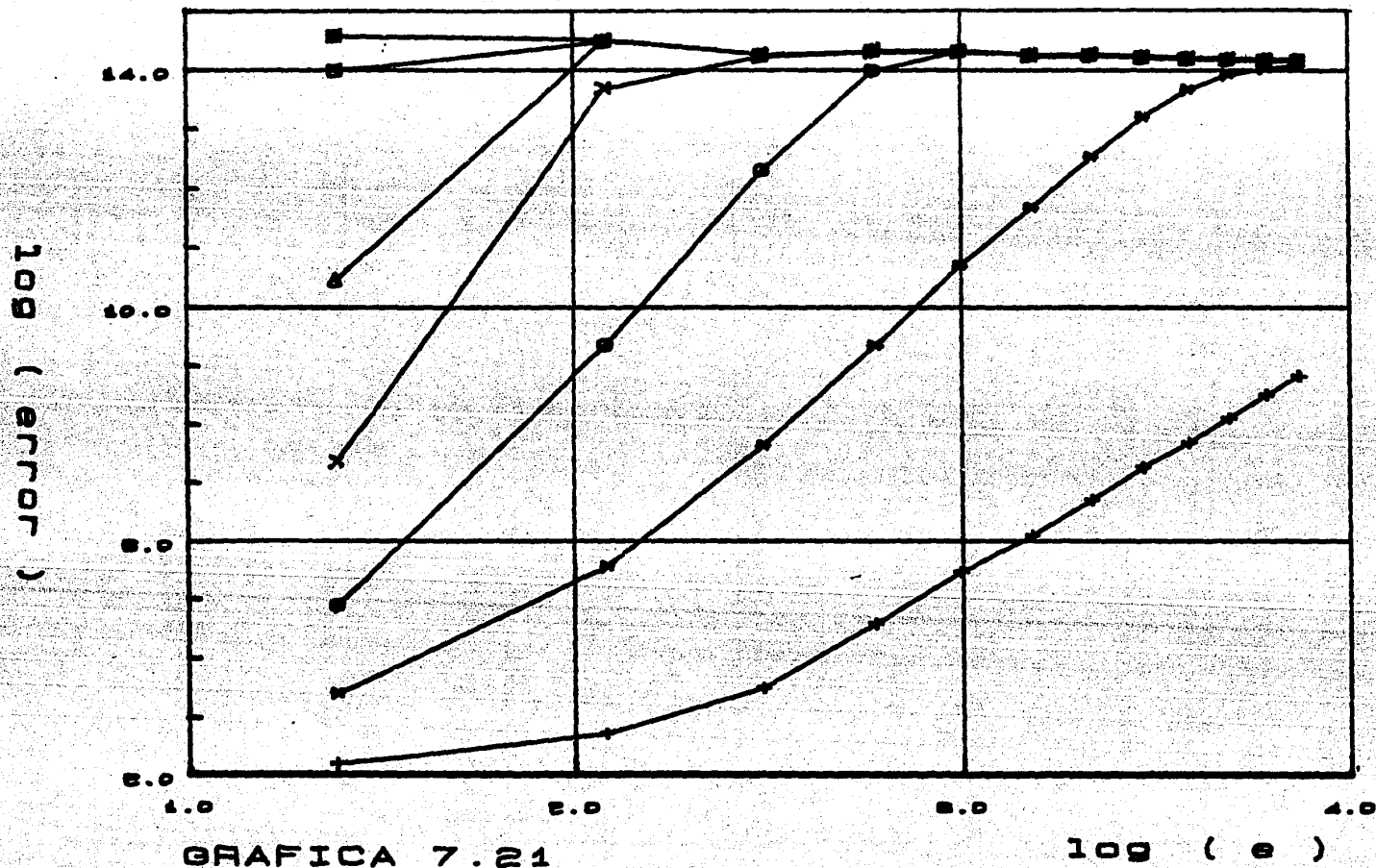
GRAFICA 7.19

($2n-1$)



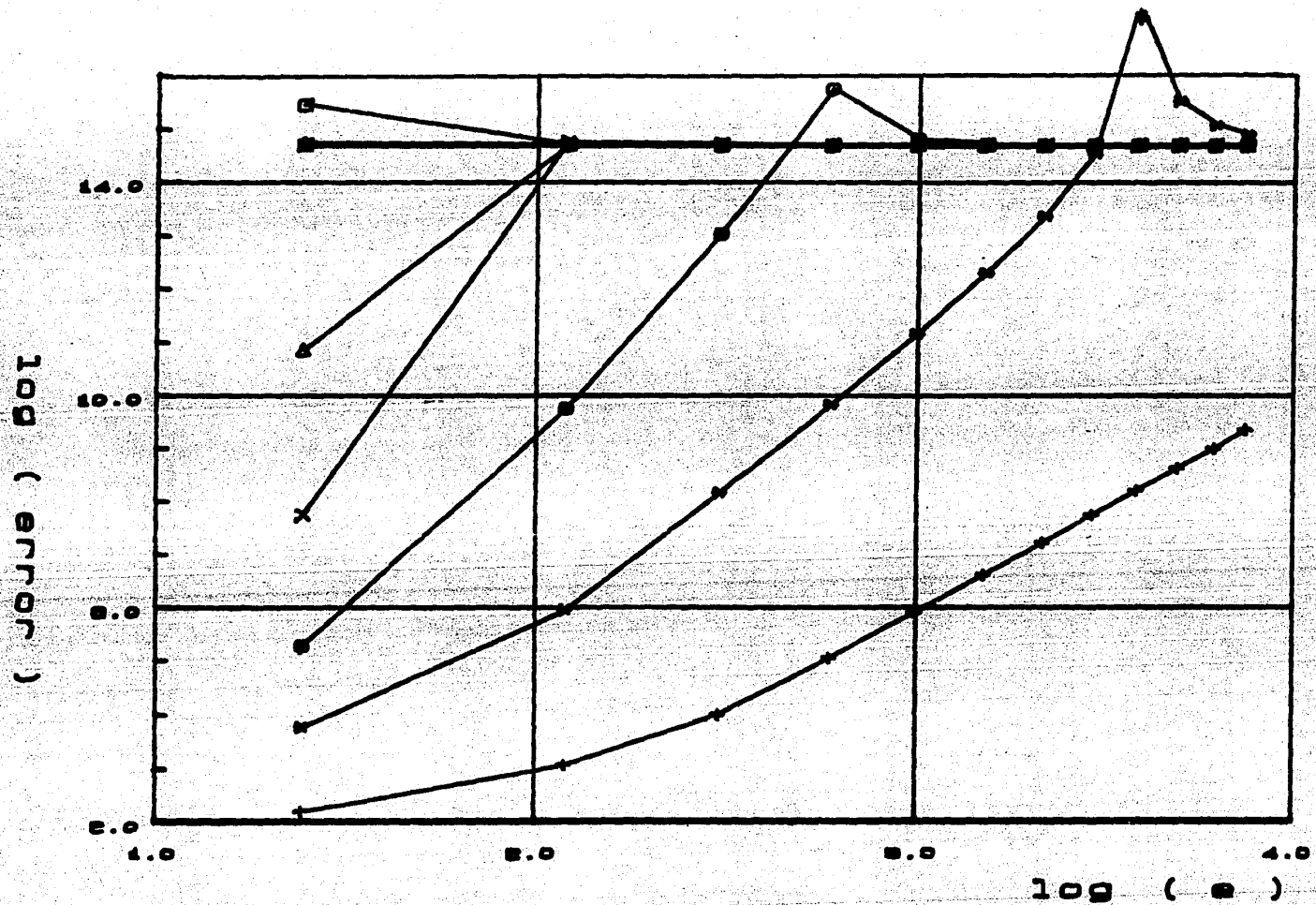
GRAFICA 7.20

(2*n-1)

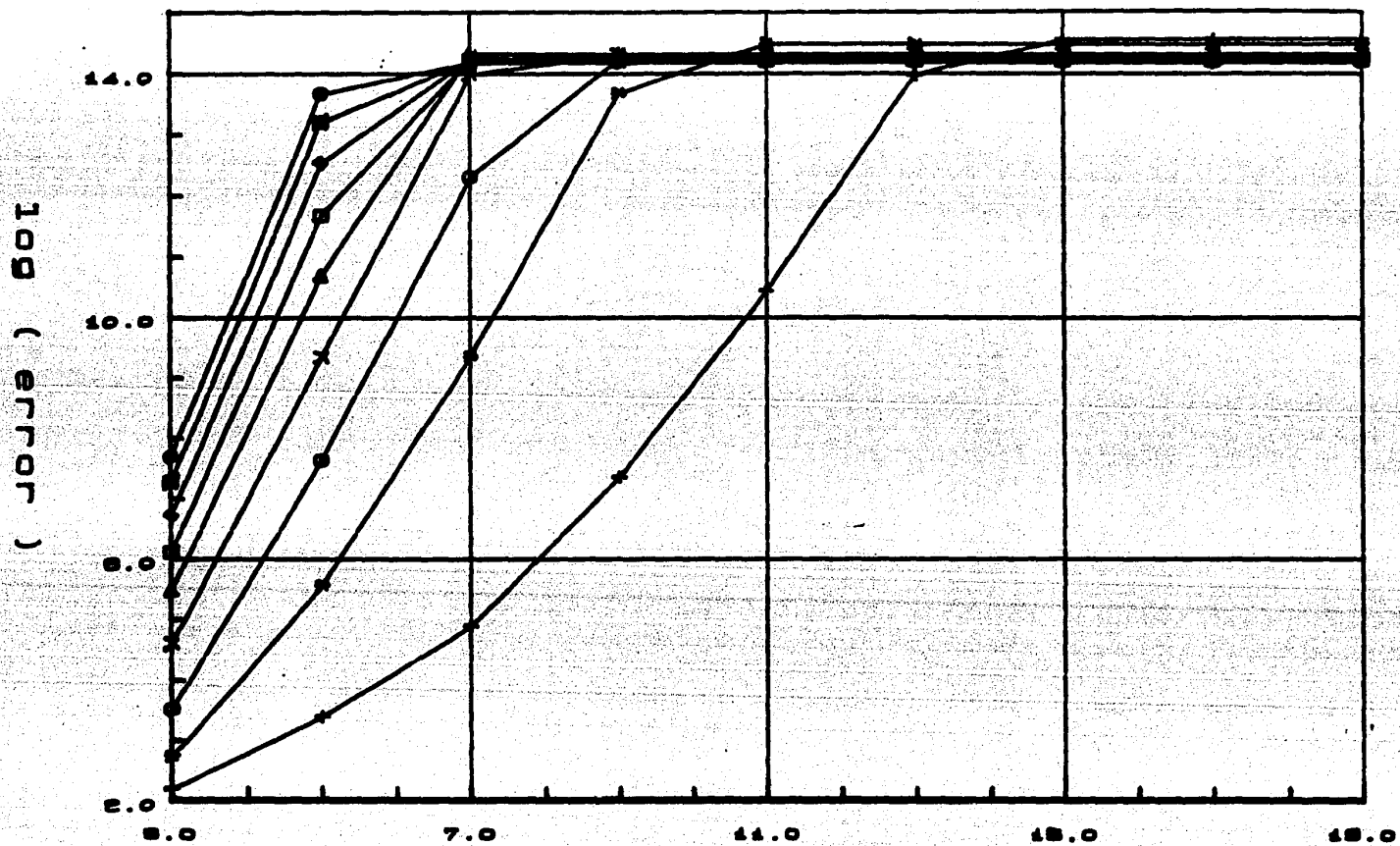


GRAFICA 7.21

$\log(e)$

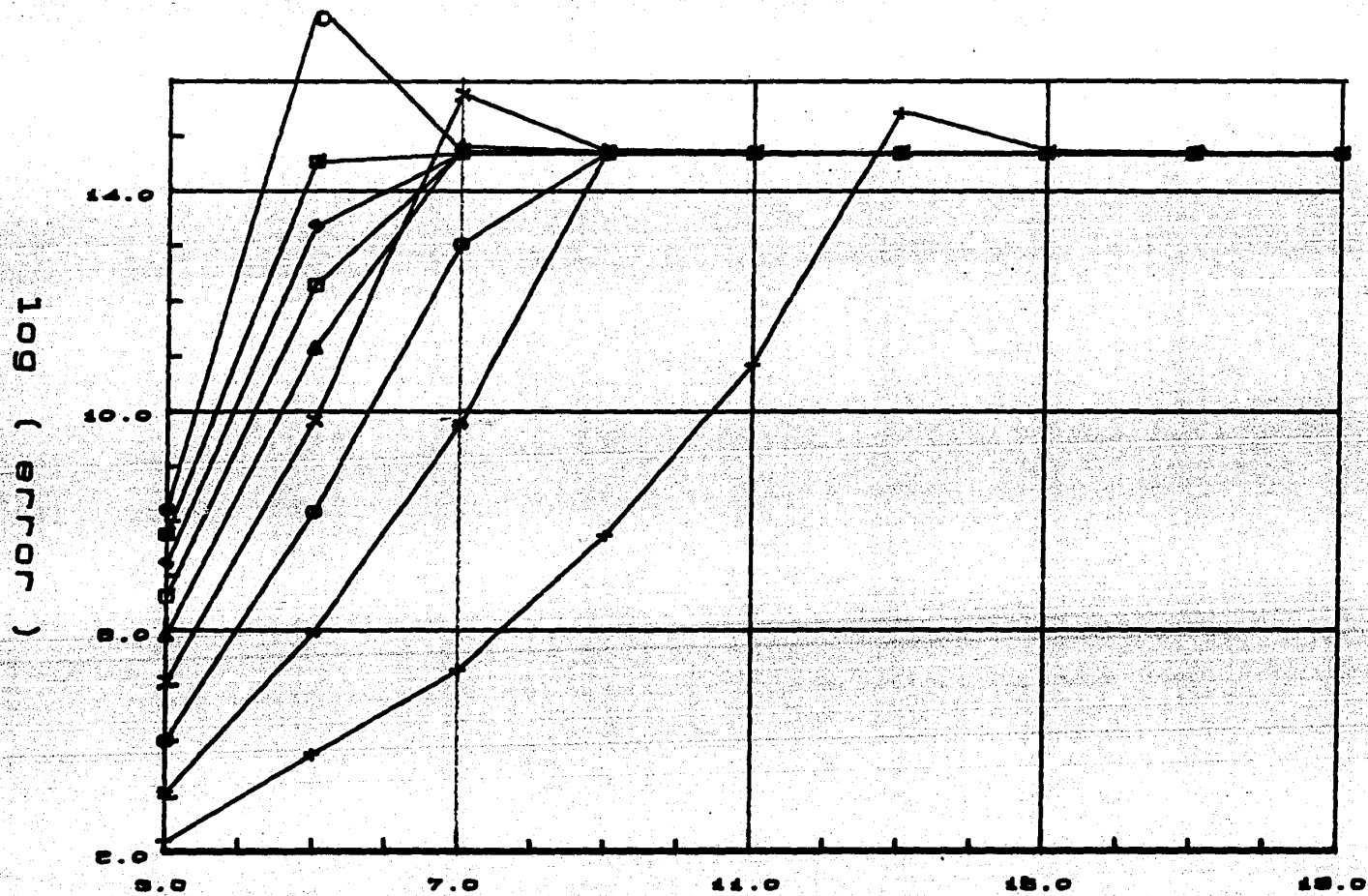


GRAFICA 7.22



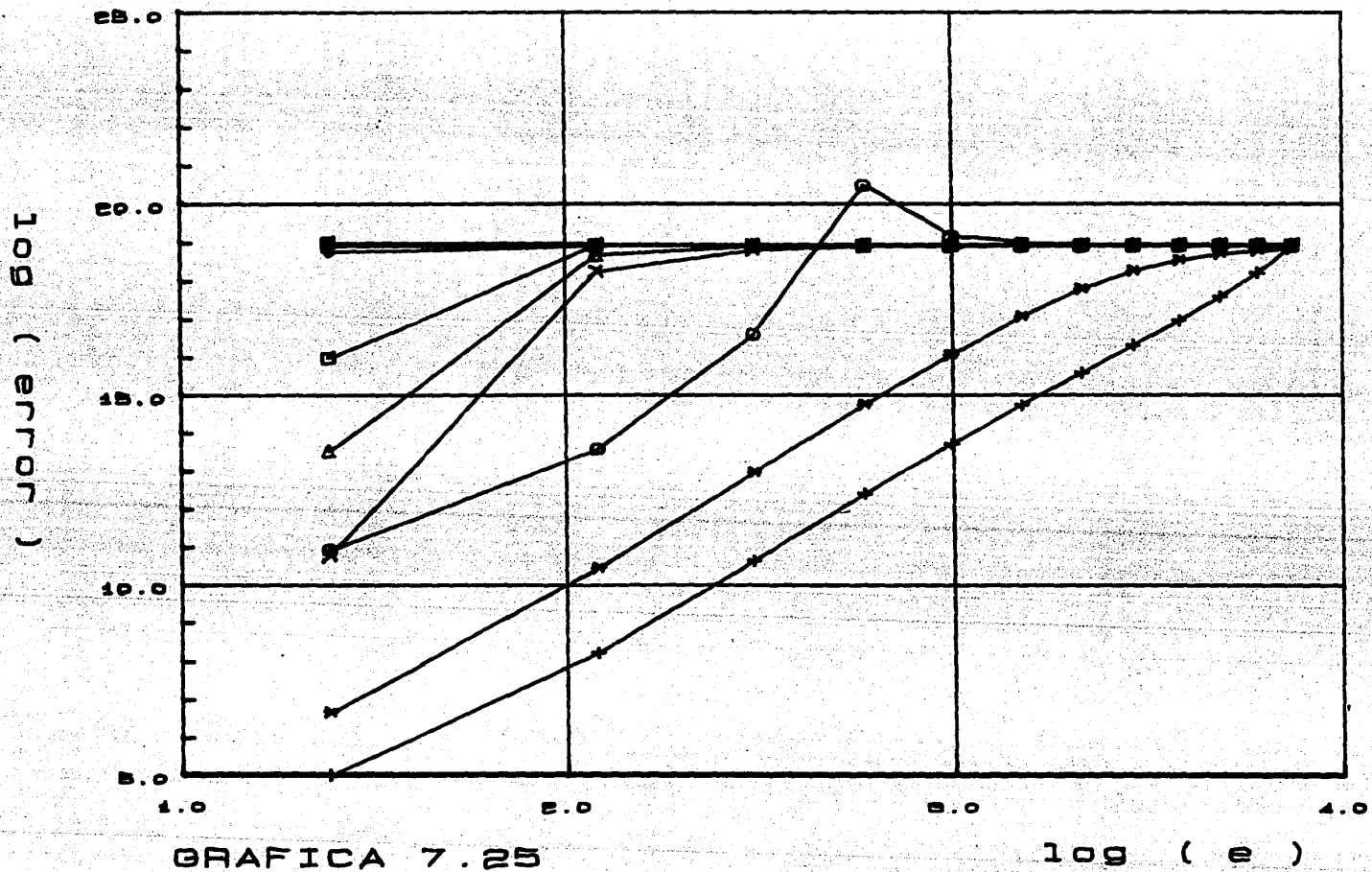
GRAFICA 7.23

($2 \times n - 1$)



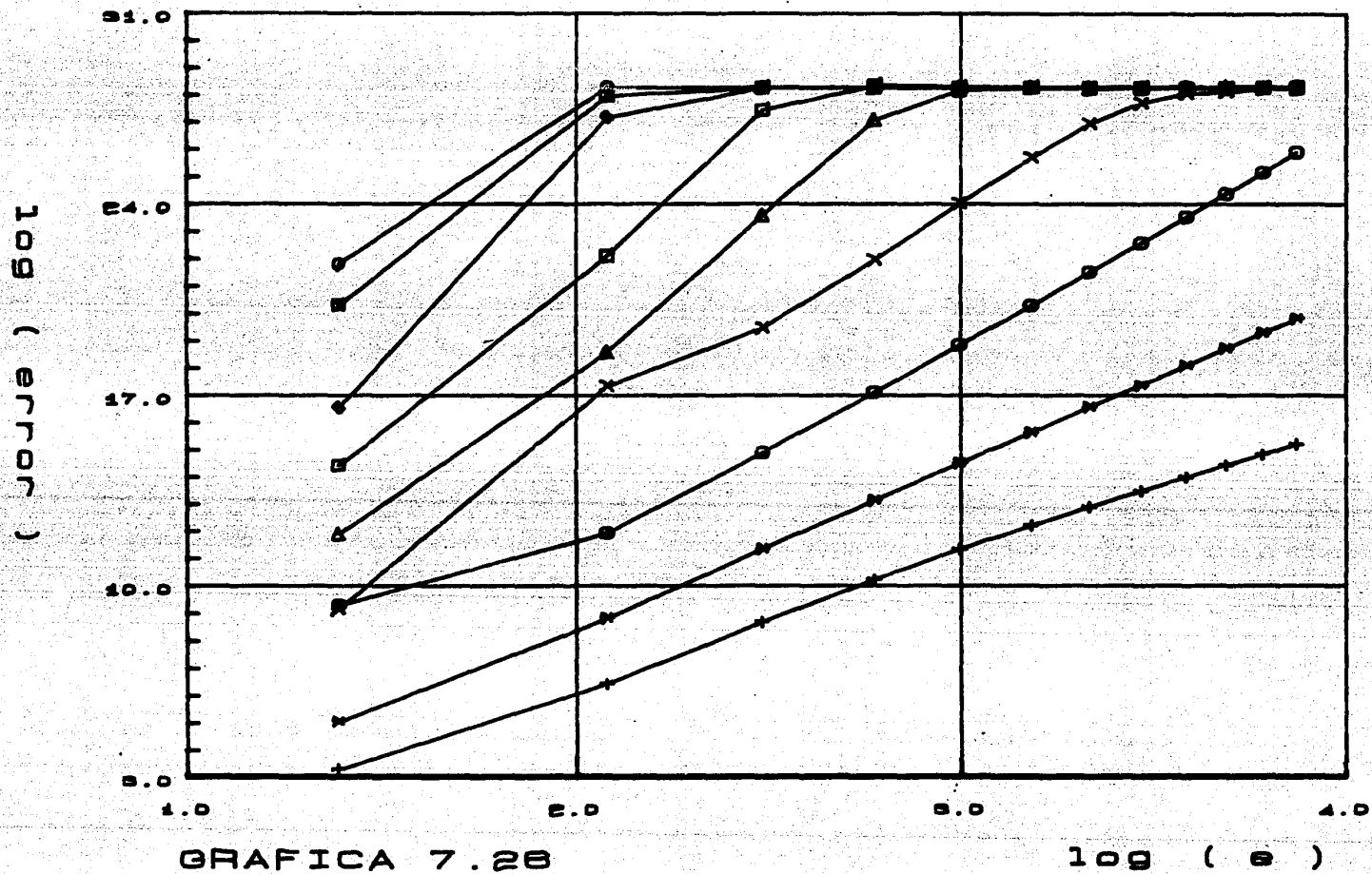
GRAFICA 7.24

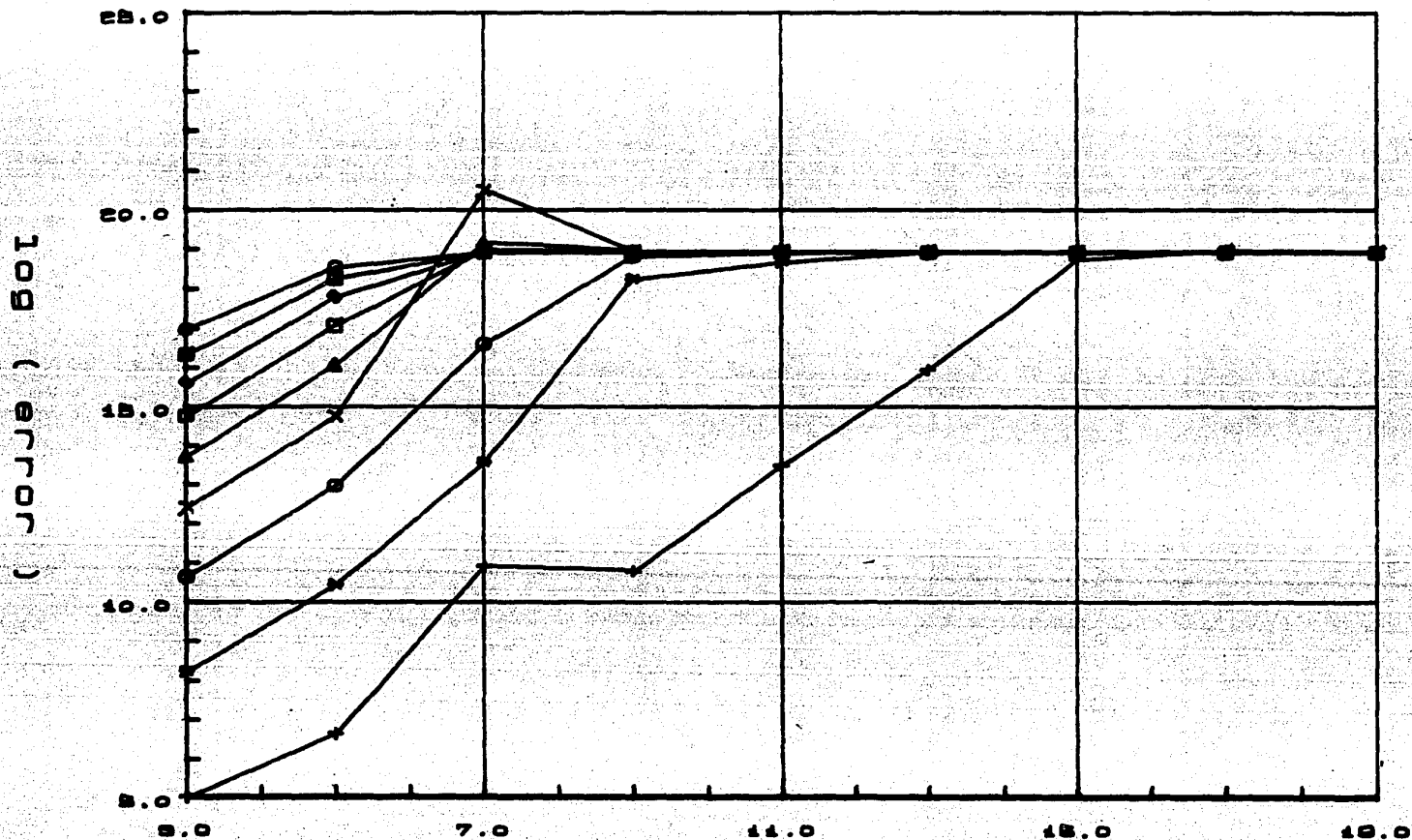
(2*n-1)



GRAFICA 7.25

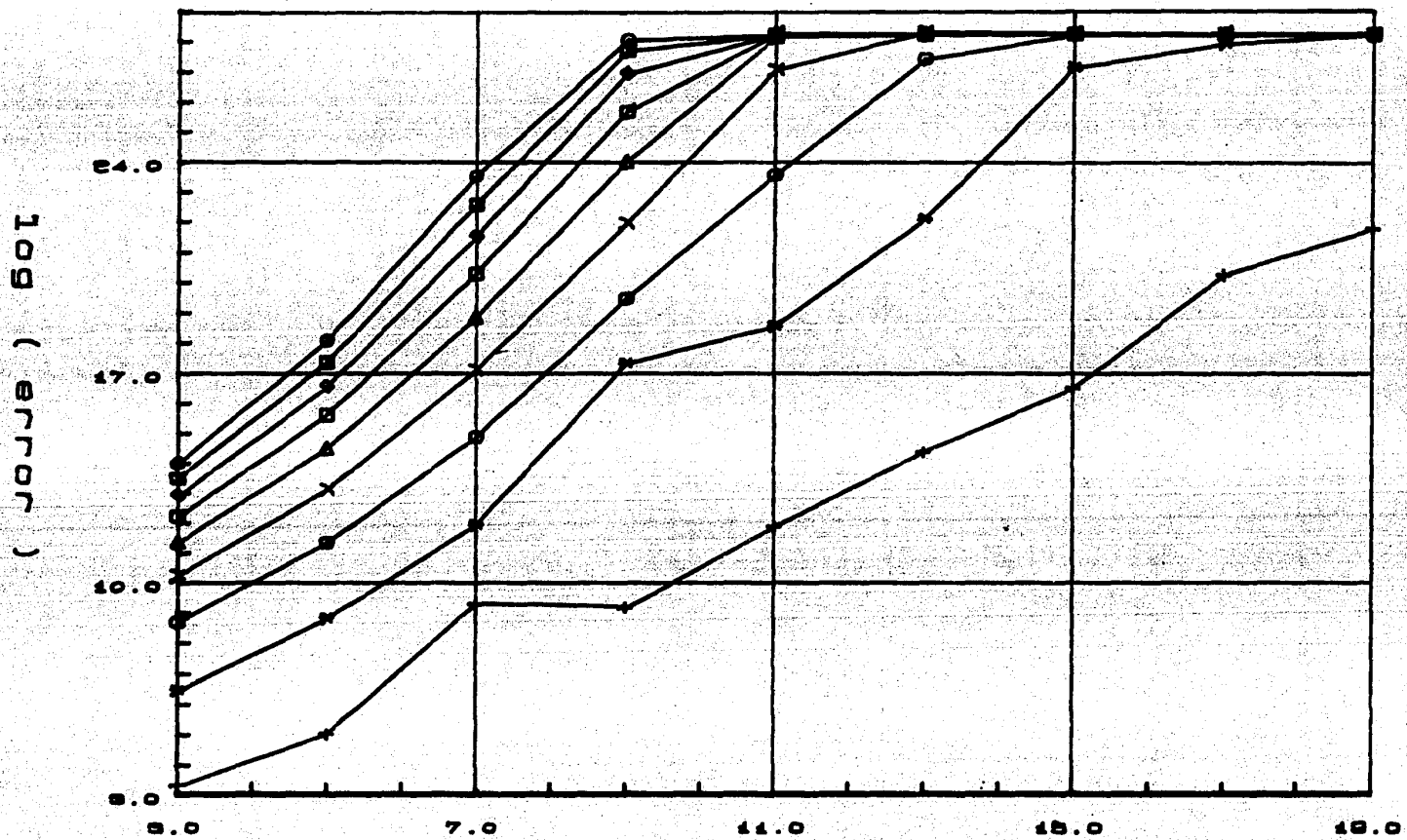
$\log(h)$





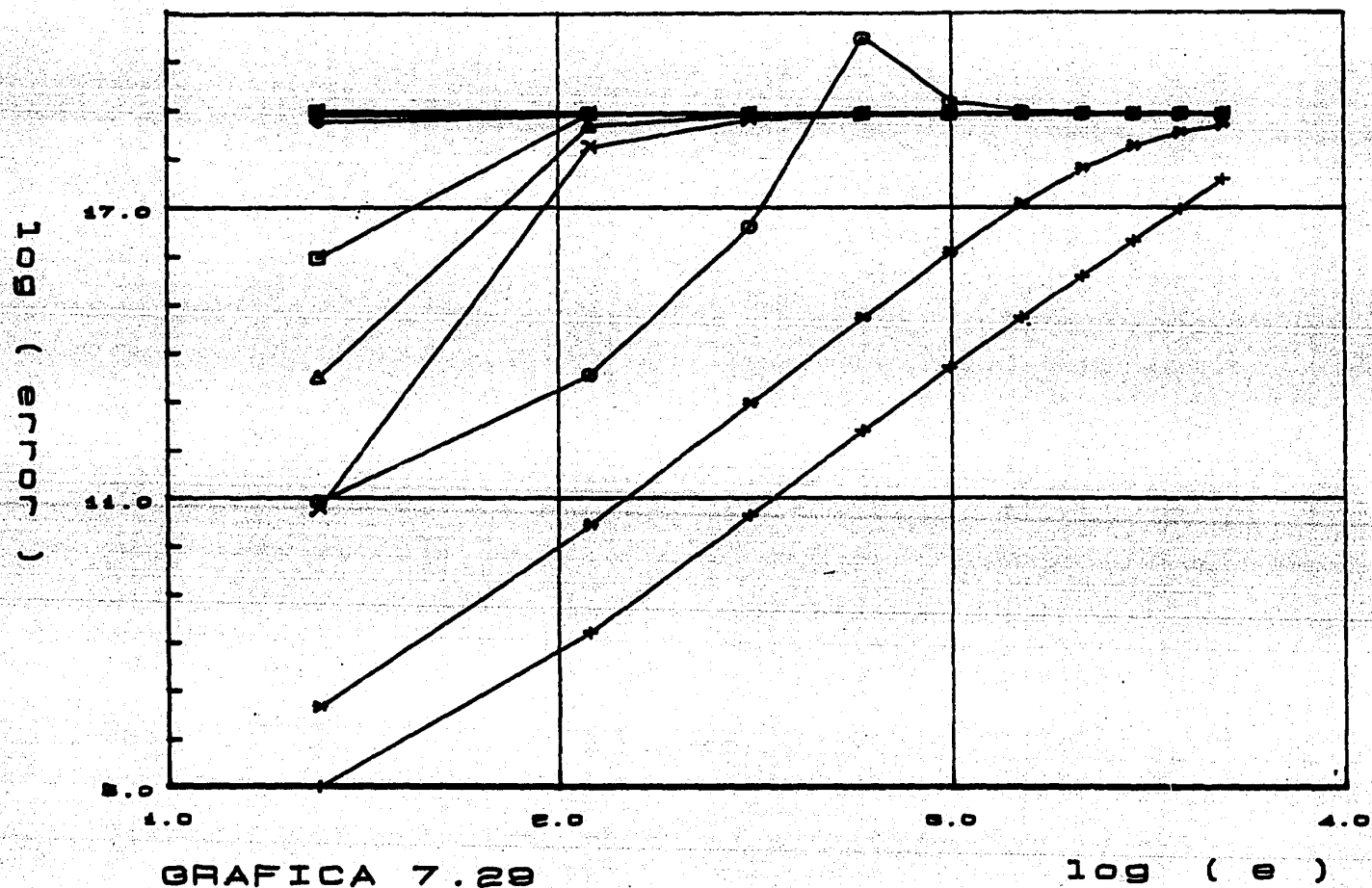
GRAFICA 7.27

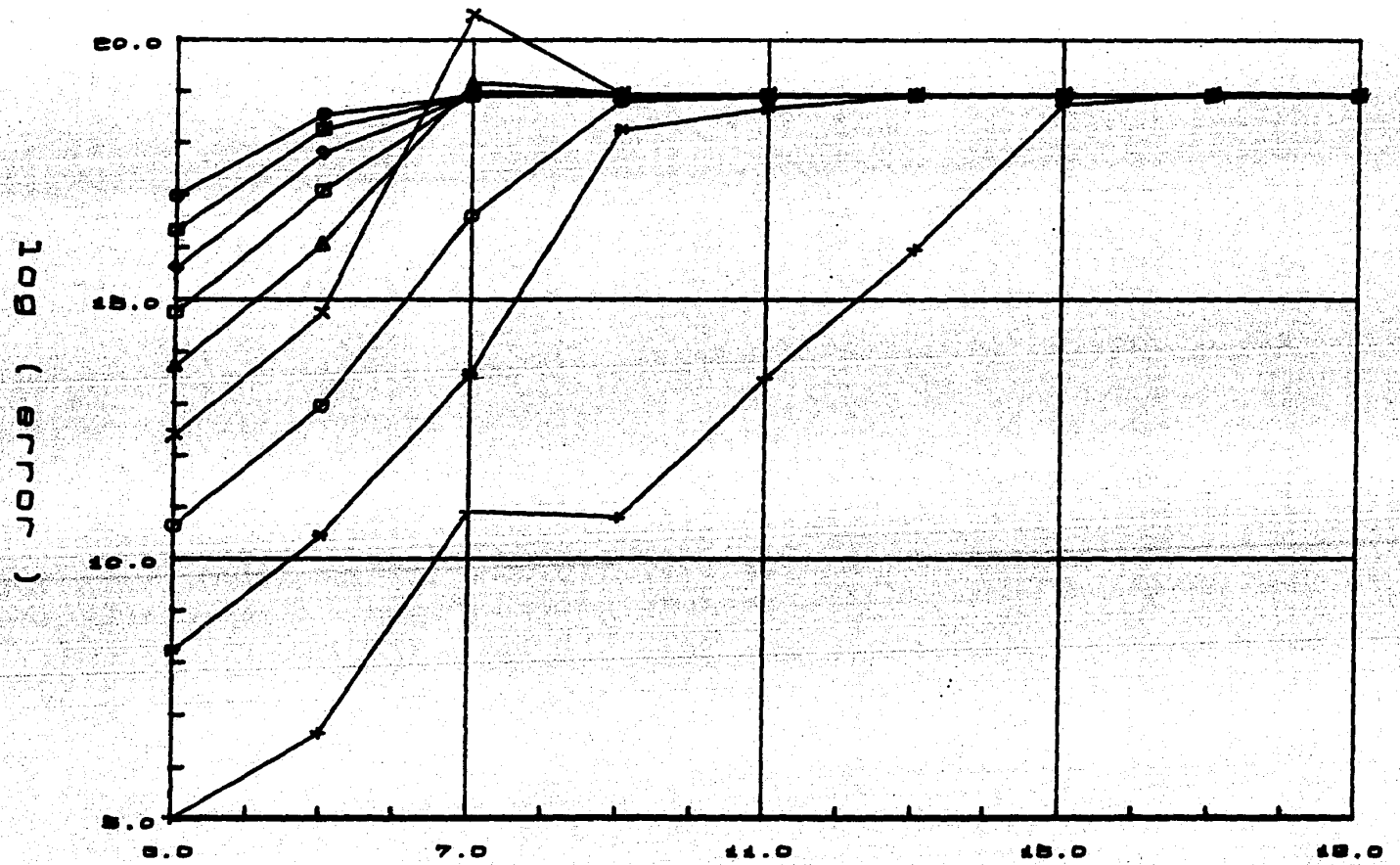
($2 \times n - 1$)



GRAFICA 7.28

($2 * n - 1$)





GRAFICA 7.30

($2 \times n - 1$)

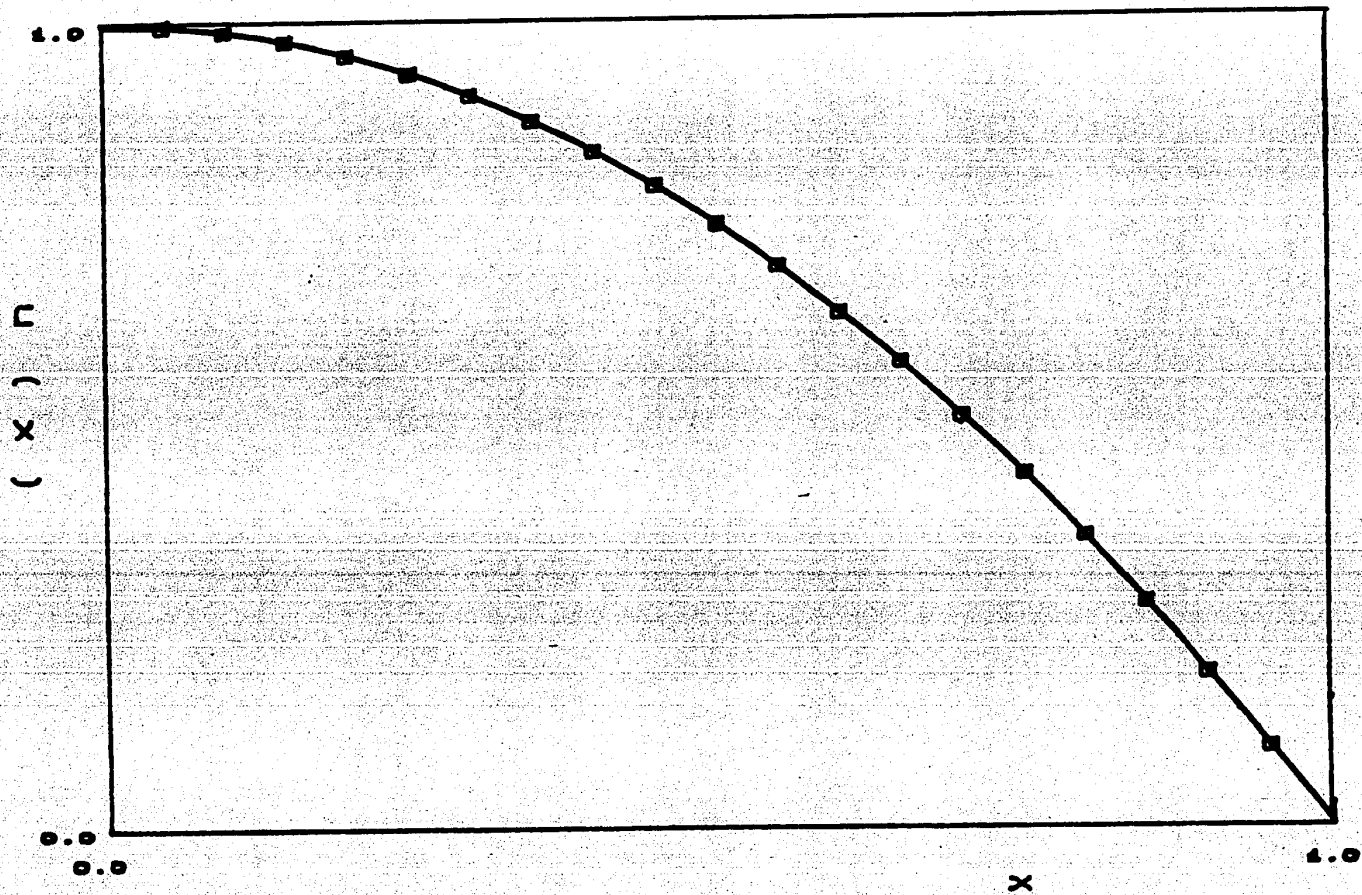


FIGURA 7.2a

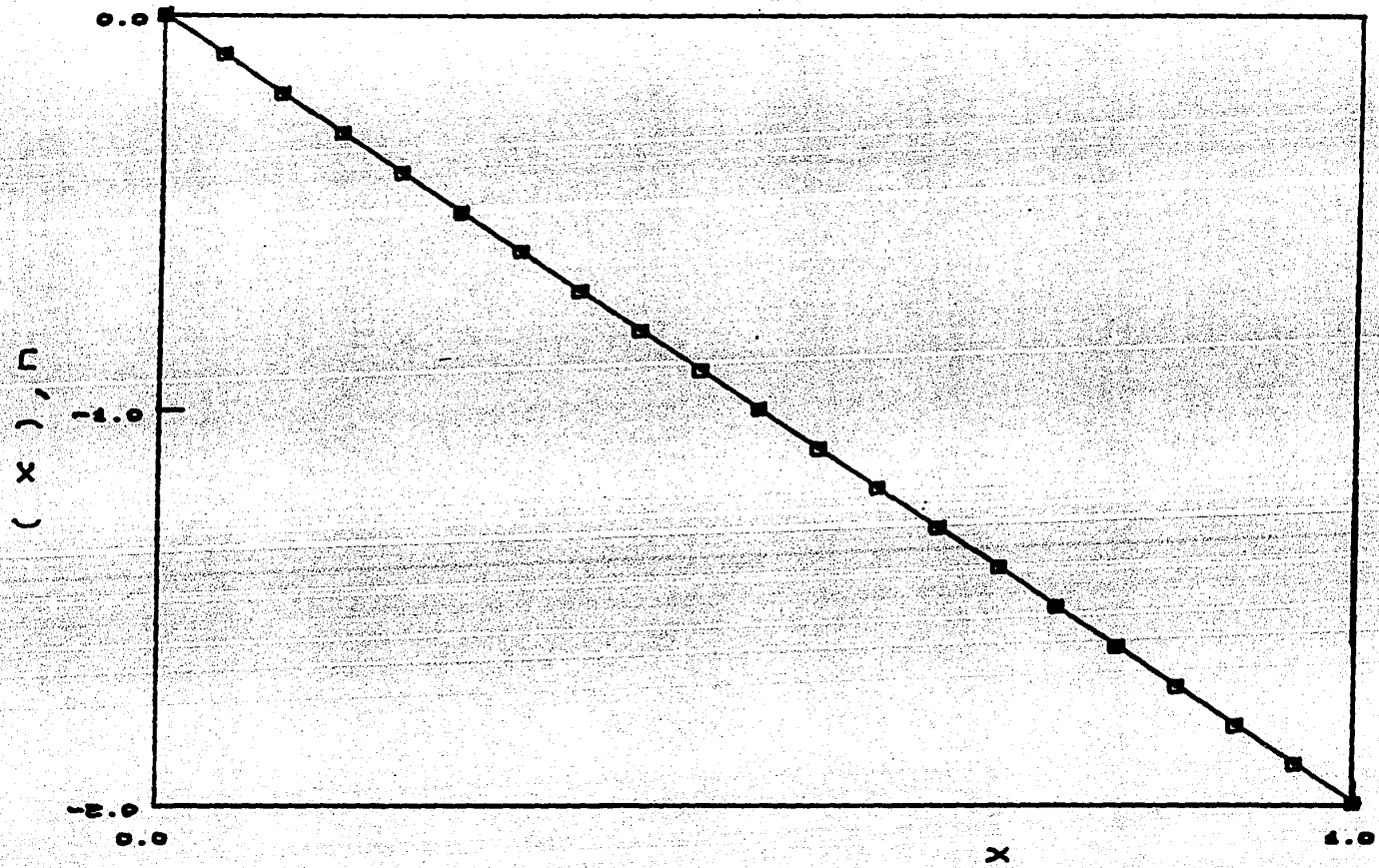


FIGURA 7.2b

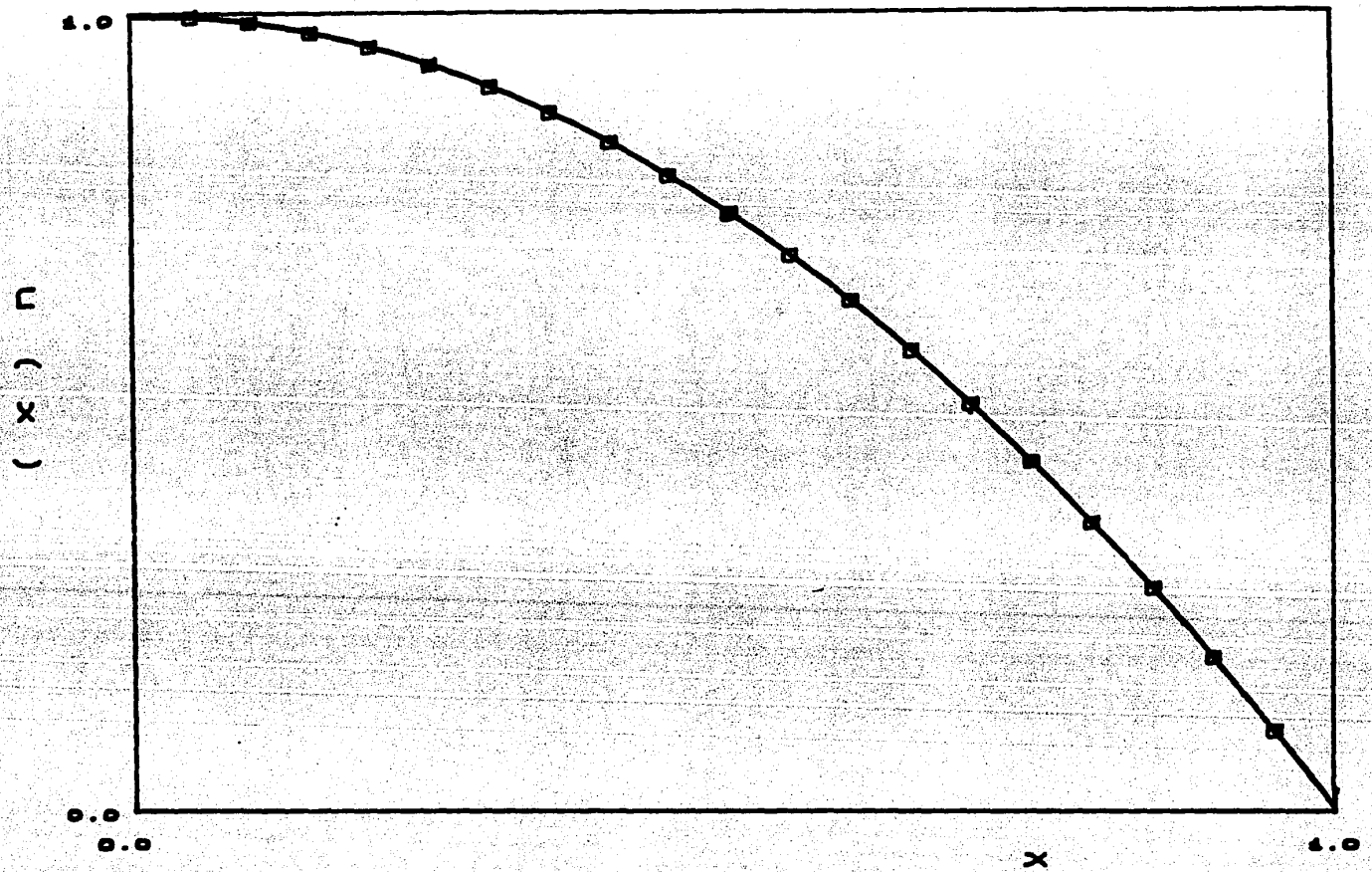


FIGURA 7.3

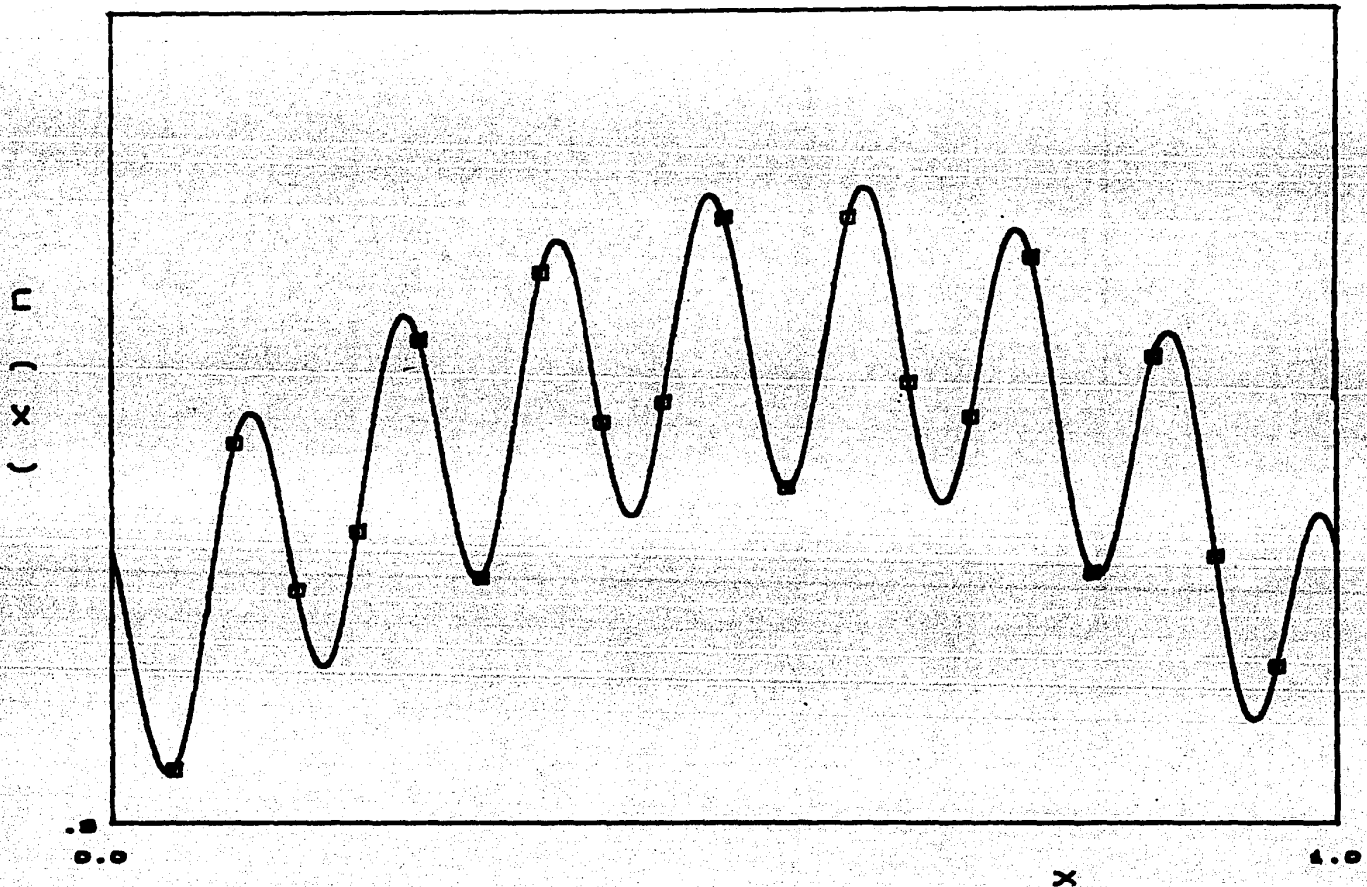


FIGURA 7.4a

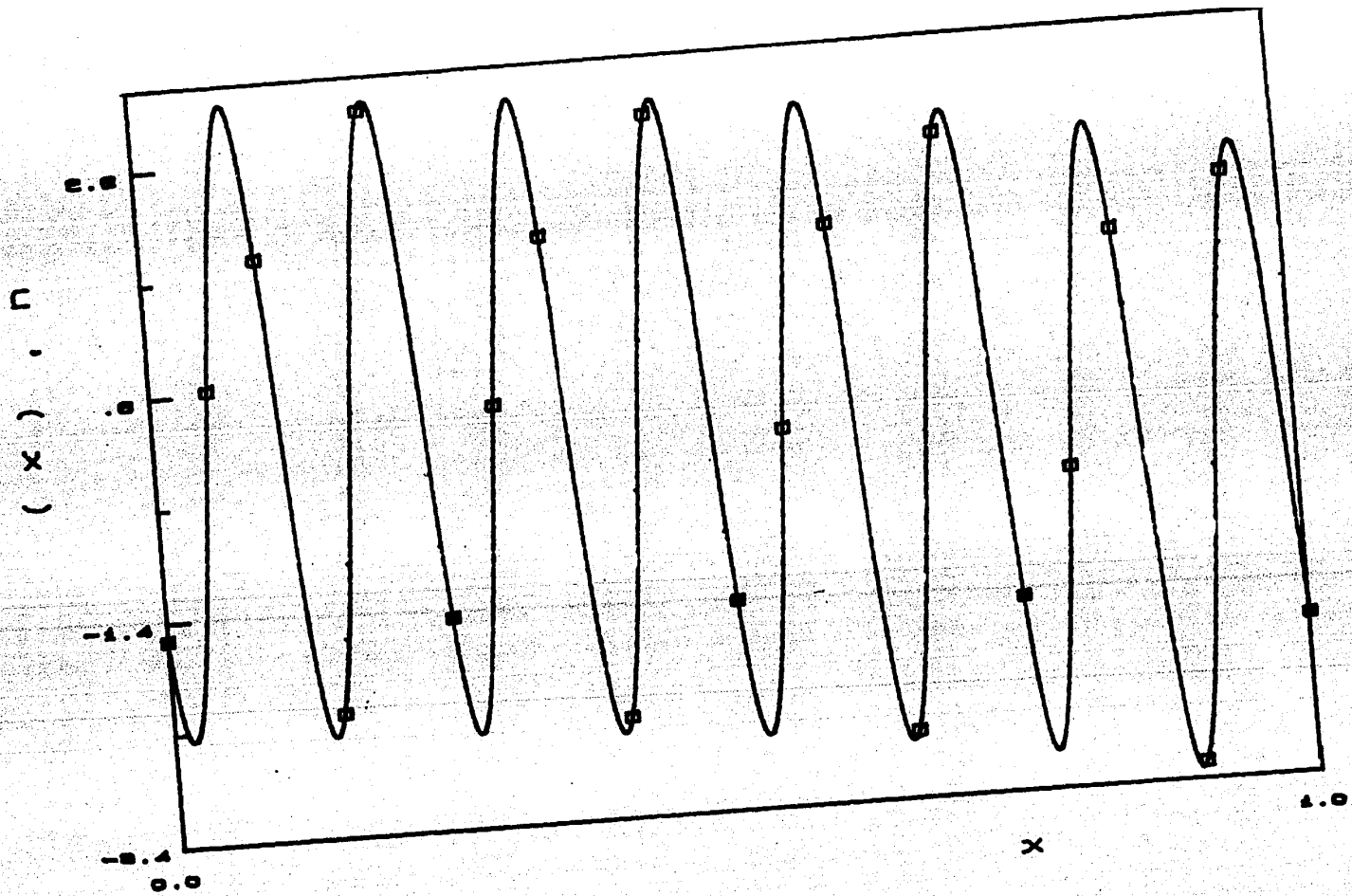


FIGURA 7.4b

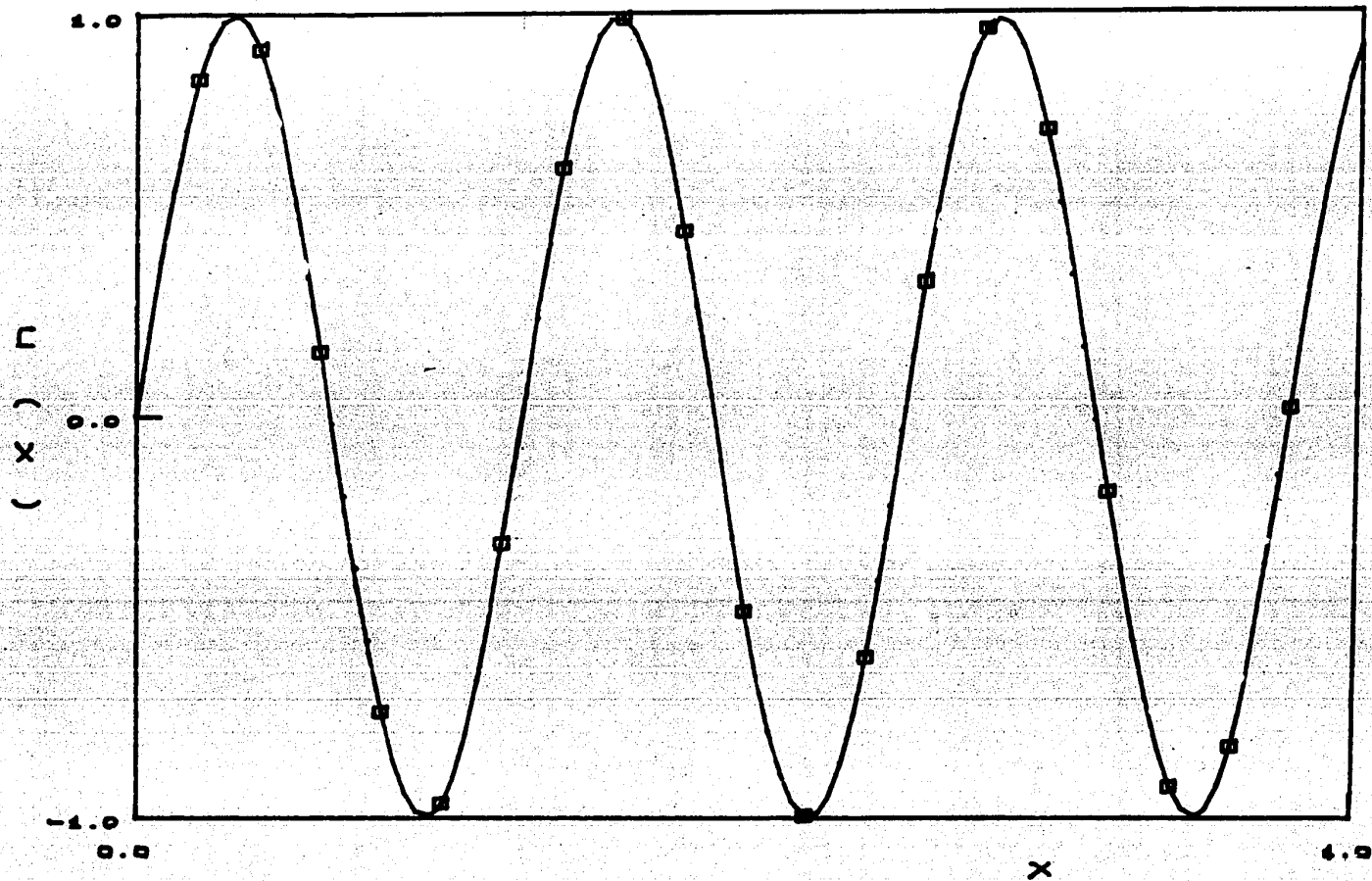


FIGURA 7.5

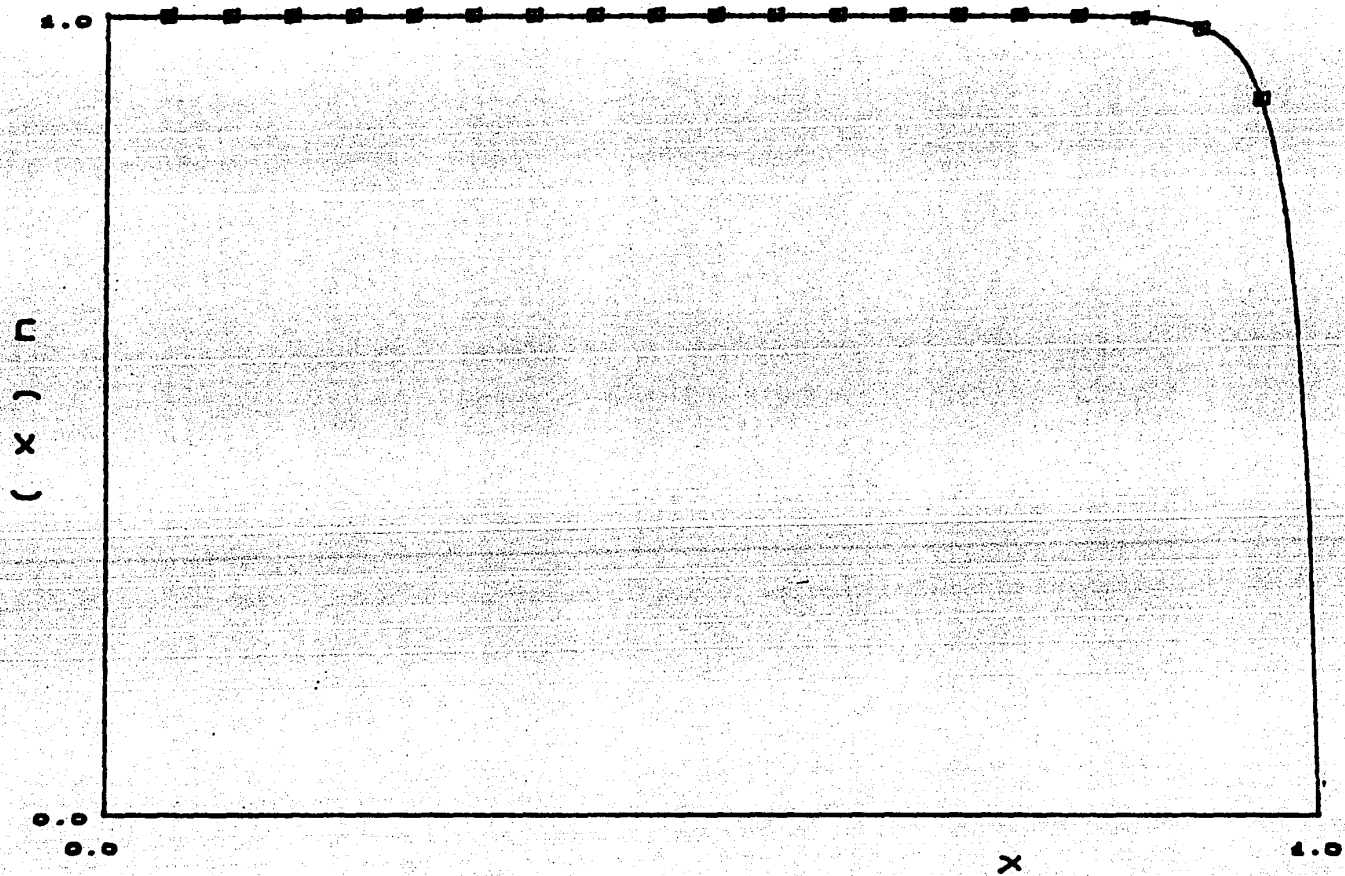


FIGURA 7.6a

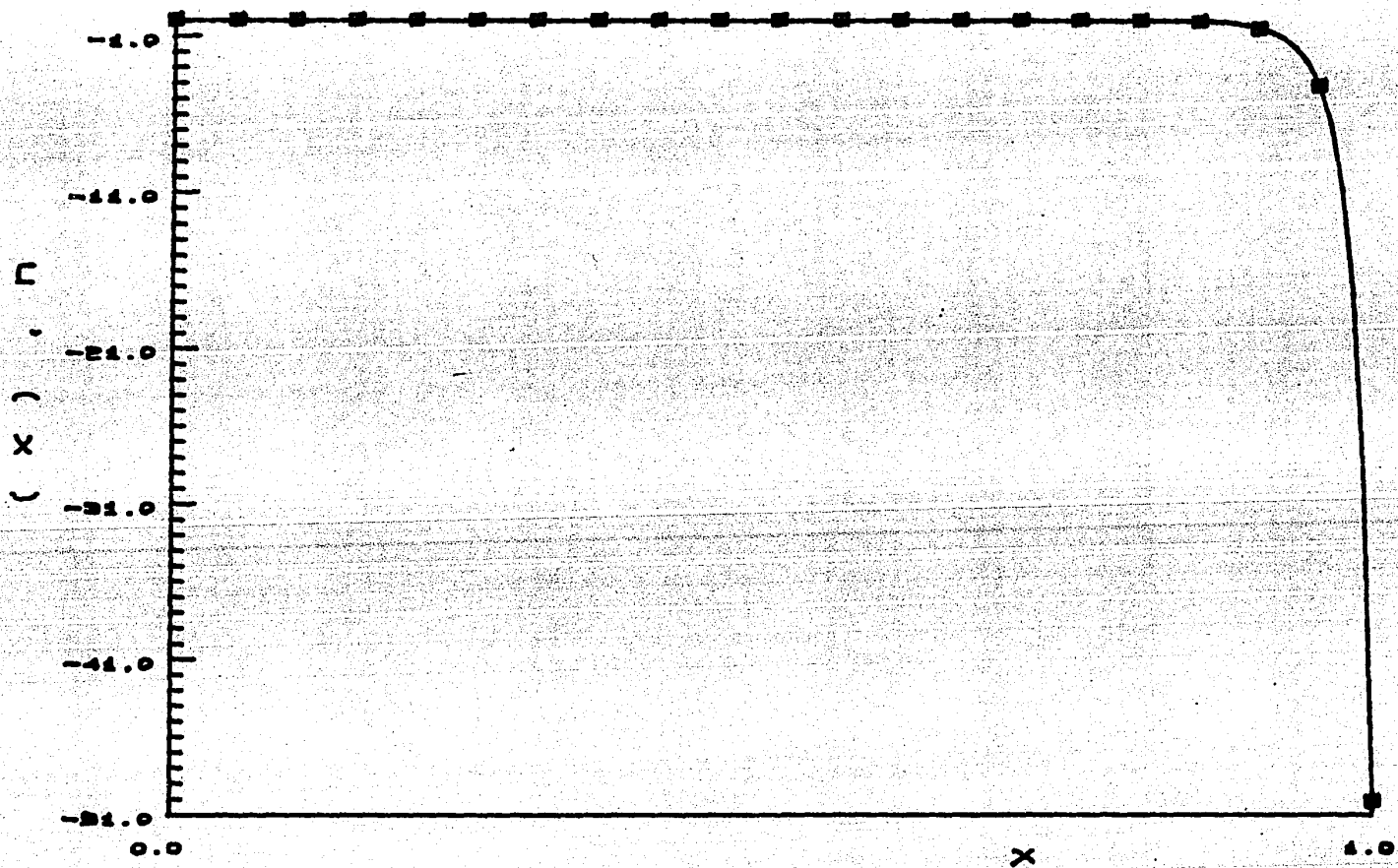


FIGURA 7.8b

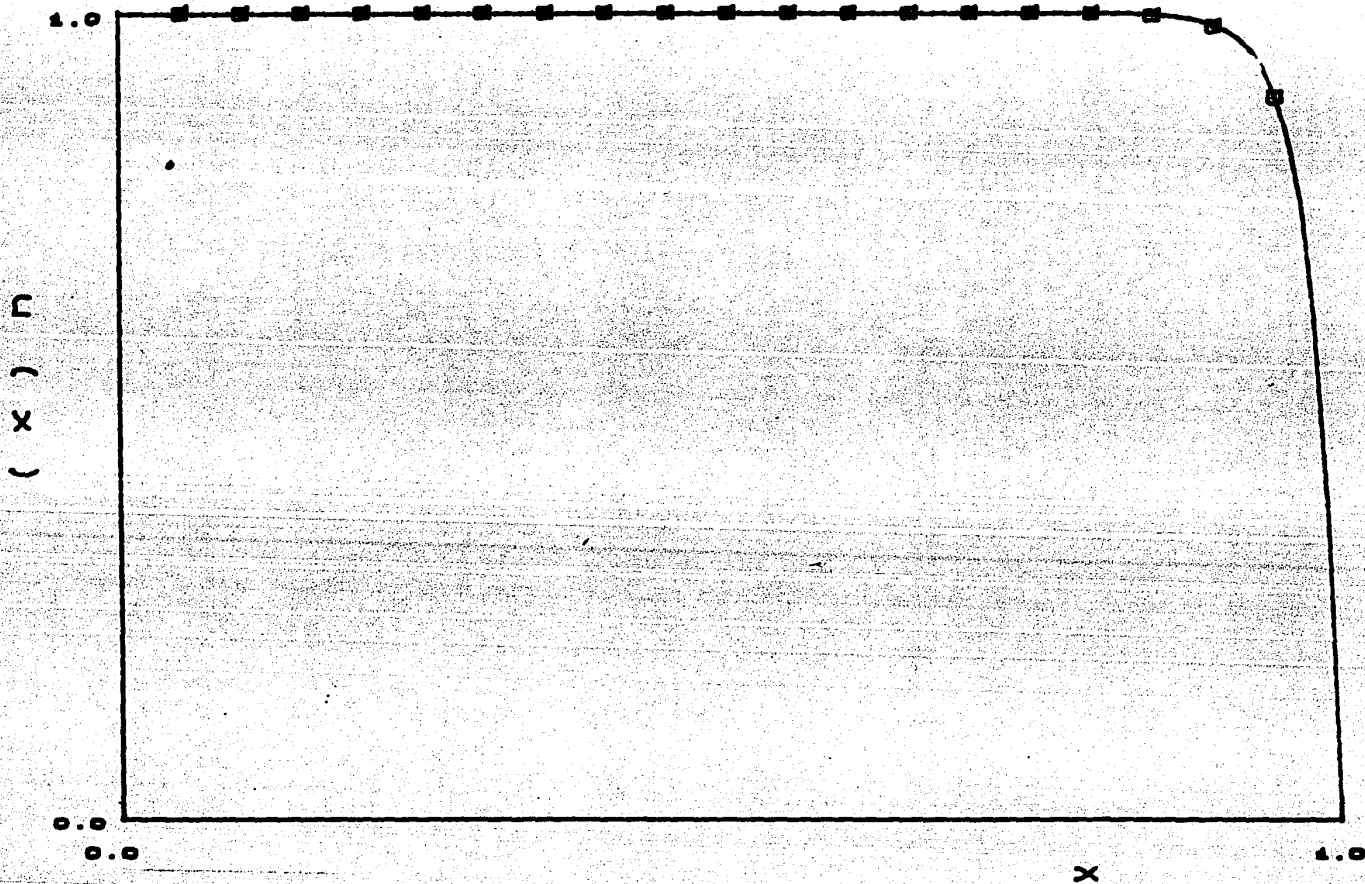
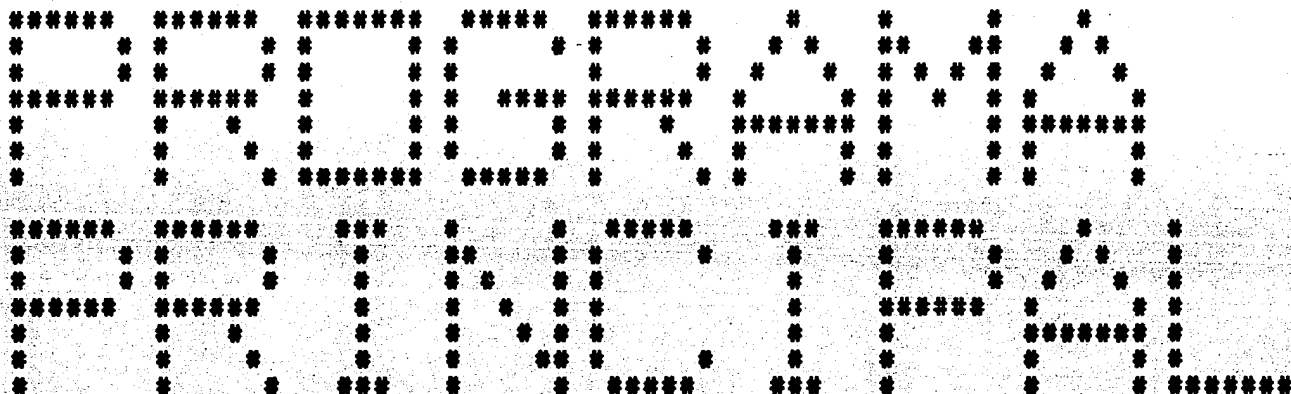


FIGURA 7.7

A P E N D I C E A



PROGRAMA PRINCIPAL
ALGORITMO 1

EL OBJETIVO DEL PROGRAMA ES CALCULAR EL VALOR DE LA FUNCION U(X) EN LOS NODOS: $1/E, 2/E, \dots, E-1/E$; ASI COMO EL VALOR DE SUS DERIVADAS EN LOS NODOS: $0, 1/E, \dots, E-1/E, 1$. LA CUAL SATISFACE LA ECUACION DIFERENCIAL:

$$LU=U''+2AU'+(B+A')U=F \quad \text{EN } [0,1]$$

CON: $U(0)=K1, U(1)=K2$ (VALORES A LA FRONTERA)

LA SOLUCION SE OBTIENE POR UN PROCEDIMIENTO DERIVADO DEL LA FORMULACION ALGEBRAICA DE LOS METODOS DISCRETOS (ALGORITMO 1).

LAS VARIABLES DE ENTRADA SON:

- 1.: LECTURA DEL ARCHIVO "DATOS" EL CUAL CONTIENE LOS VALORES DE LAS RAICES Y PESOS DEL POLINOMIO DE LEGENDRE HASTA DE GRADO $N=10$ (PARA SU USO POSTERIOR EN LA COLOCACION Y CUADRATURA GAUSSISNA). ALMACENANDOSE EN LAS VARIABLES "AL_RAIZ" Y "AL_PESO".
- 2.: E(=NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO $[0,1]$).
- 3.: N (=ORDEN DE COLOCACION).
- 4.: SI ES NO HOMOGENEA LA ECUACION A RESOLVER, SE PIDE EL ORDEN DE CUADRATURA GAUSSIANA IORD_CUAD, (EN EL TEXTO K, VER EC. (6.18)).
- 5.: FINALMENTE SE PIDE EL VALOR DE U EN LA FRONTERA ($U(0)$ Y $U(1)$). ALMACENANDOSE EN LA VARIABLE "COND".

LAS VARIABLES DE SALIDA SON:

1. : LA MATRIZ "GMAT" LA CUAL ES COEFICIENTE PARA LAS INCOGNITAS U Y U' (EN LOS NODOS VER ECS. 6.11A'-F').
2. : EL VECTOR "RINDEP" EL CUAL HACE LA IGUALDAD CON EL PRODUCTO "GMAT*(U,U')", (VER ECS. 6.11A'-F').
3. : FINALMENTE LA SOLUCION "SOLGEN", EL VALOR U Y U' (EN LOS NODOS).
4. : Y SE ESCRIBEN EN LOS ARCHIVOS "SALVAL" LOS VALORES DE LA FUNCION SOLUCION, Y EN "SALDERI" LOS VALORES DE LA DERIVADA DE LA FUNCION SOLUCION EN LOS NODOS.

$$(GMAT)*(U,U') = (RINDEP)$$

(1)

DESCRIPCION DE LAS VARIABLES GLOBALES:

- GMAT. MATRIZ COEFICIENTE PARA LA SOLUCION U Y U' (EN LOS NODOS). SUS FINALES VALORES SON INTRODUCIDOS EN LA RUTINA ROO(), (EN EL TEXTO SON LOS MIEMBROS IZQUIERDOS DE LAS ECS. 6.11A'-F').
- RINDEP. VECTOR QUE IGUALA AL PRODUCTO (GMAT)*(U,U'), EN EL TEXTO SON LOS MIEMBROS DERECHOS DE LAS ECS. 6.11A'-F'.
- SOLGEN. REPRESENTA AL VECTOR INCOGNITA U Y U' (EN LOS NODOS), VER EC. (1).
- PD. MATRIZ COEFICIENTE DERECHO PARA LAS P'S, (VER EN TEXTO EC. 6.4A).
- PI. MATRIZ COEFICIENTE IZQUIERDO PARA LAS P'S, (EC. 6.4B DEL TEXTO).
- VECD. ES EL VECTOR QUE IGUALA AL PRODUCTO PD*SOLDER.
- VECI. ES EL VECTOR QUE IGUALA AL PRODUCTO PD*SOLIZO.
- SOLDER. REPRESENTA A LAS INCOGNITAS P'S, LAS CUALES EXPANDEN A LAS FUNCIONES DE PESO PI_ALFA EN EL INTERVALO TIPICO ALFA, (VER EC. 6.4A).
- SOLIZO. REPRESENTA A LAS INCOGNITAS P'S, LAS CUALES EXPANDEN A LAS FUNCIONES DE PESO PI_ALFA EN EL INTERVALO TIPICO ALFA, (VER EC. 6.4B).
- AL_RAIZ. SE VACIAN LAS LECTURAS HECHAS EN EL ARCHIVO "DATOS" QUE CORRESPONDEN A LAS RAICES DEL POLINOMIO DE LEGENDRE HASTA DE ORDEN N=10.
- AL_PESO. SE VACIAN LAS LECTURAS HECHAS EN EL ARCHIVO "DATOS" QUE CORRESPONDEN A LOS PESOS DEL POLINOMIO DE LEGENDRE HASTA DE ORDEN N=10.
- COND. EN ESTE VECTOR SE ALMACENAN LOS VALORES DE U EN LOS EXTREMOS, U(0) Y U(1).
- N. GRADO DEL POLINOMIO DE LEGENDRE A USAR COMO COLOCACION.
- RAIZ. EN EL VECTOR RAIZ SE ALMACENAN LAS N RAICES DEL N'ESIMO POLINOMIO DE LEGENDRE, QUE YA FUERON LEIDAS EN EL ARREGLO "AL_RAIZ", SE TRANSLADAN PARA CAER EN EL INTERVALO [X_ALFA-1,X_ALFA].
- TNRAIZ. EN EL VECTOR TNRAIZ SE ALMACENAN LAS N RAICES DEL N'ESIMO POLINOMIO DE LEGENDRE, QUE YA FUERON LEIDAS EN EL ARREGLO "AL_RAIZ", NO TRANSLADADAS.
- E. NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1].

G. NUMERO DE RAICES MAS UNO, (G=N+1).

EL PROGRAMA PRINCIPAL SIGUE LOS SIGUIENTES PASOS EN GENERAL:

EN EL PRIMERO SE LEEN LAS RAICES Y PESOS DEL POLINOMIO DE LEGENDRE DE GRADO N DONDE: $2 \leq N \leq 10$, DEL ARCHIVO "DATOS". EN LA SEGUNDA PARTE SE CALCULAN LAS ENTRADAS (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2E-1,2E-2), (2E-1,2E-1), (2E-1,2E), (2E,-2E-2), (2E,2E-1), (2E,2E), Y (1), (2), (2E-1), (2E) DE LA MATRIZ "GMAT" Y "RINDEP" RESPECTIVAMENTE MEDIANTE LA RUTINA "CA-SOEXTREMO()".

EN LA TERCERA SE CALCULAN LOS COEFICIENTES (3,2), (3,3), (3,4), ... DE LA MATRIZ "GMAT" MEDIANTE LAS RUTINAS "MATRIZP()", "SOLPCORR()" Y "ROO()"; LA PRIMERA SE ENCARGA DE OBTENER A: "PD", "PI", "VECD", "VECI"; LA SEGUNDA RUTINA OBTIENE A: "SOLDER" Y "SOLIZQ"; FINALMENTE SE ACOMODAN LOS VALORES OBTENIDOS EN "GMAT" EN LOS LUGARES PERTINENTES MEDIANTE LA RUTINA "ROO()". TAMBIEN EN ESTA PARTE SE RESUELVE PARA "SOLGEN".

LA ULTIMA PARTE SE ENCARGA DE LA ESCRITURA DE LOS RESULTADOS SE ESCRIBE A: "GMAT", "RINDEP" Y A "SOLGEN" A PANTALLA; TAMBIEN SE ABREN DOS ARCHIVOS PARA ESCRIBIR EL VALOR DE LA FUNCION Y EL VALOR DE LA DERIVADA DE LA FUNCION SOLUCION (DENTRO DE (0,1)), EN LOS ARCHIVOS "SALVAL" Y "SALDER" RESPECTIVAMENTE.

EL LO QUE SE REFIERE A LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS HEMOS USADO LA RUTINA "LEOTLB", PARA SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES EN BANDAS (ECONOMIZADOR EN EL ALMACENAMIENTO, VER REFERENCIA [13]).

```
PROGRAM PRINCIPAL
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION COND(2)
INTEGER E,G
COMMON /SYSTEM/GMAT(100,100),RINDEP(100),SOLGEN(100)
COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)
COMMON /PUN/RAIZ(11),TNRAIZ(11),PESO(11)
COMMON /ALMACEN/AL_RAIZ(55),AL_PESO(55)
COMMON /INTEGRALES/ITIPO_EC,CUADDER,CUADIZQ

OPEN(2,FILE='DATOS')
DO I=1,55
  READ(2,*)AL_RAIZ(I)
ENDDO
DO I=1,55
  READ(2,*)AL_PESO(I)
ENDDO
CLOSE(2)

WRITE(6,*)" DAME EL NUMERO DE DIVISIONES ENTRE 0-1"
READ(5,*)E
WRITE(6,*)" DAME LOS VALORES A LA FRONTERA "
READ(5,*)(COND(I),I=1,2)
WRITE(6,*)" DAME EL GRADO DEL POLINOMIO DE LEGENDRE A USAR"
```

```

WRITE(6,*)"          COMO PUNTOS DE COLOCACION "
WRITE(6,*)"          (2,...,10)"
READ(5,*)N
WRITE(6,*)" TIPO DE ECUACION:"
WRITE(6,*)"          1. HOMOGENEA"
WRITE(6,*)"          2. NO HOMOGENEA"
READ(5,*)ITIPO_EC
IF (ITIPO_EC .EQ. 2) THEN
  WRITE(6,*)" DE QUE ORDEN SERA LA CUADRATURA GAUSSIANA:"
  READ(5,*)IORD_CUAD
ENDIF

```

```

G=N+1
CALL LLENARAIZ(N,IORD_CUAD)
CALL CASOEXTREMO(G,IORD_CUAD,E,COND)
DO I=2,E-1
  XA=DBLE(I)/DBLE(E)
  XAI=DBLE(I-1)/DBLE(E)
  CALL MATRIZP(G,XAI,XA)
  CALL SOLPCORR(G)
  CALL ROO(G,IORD_CUAD,E,I,XAI,XA)
ENDDO
CALL SOLGCROR(2*E)

```

SE ESCRIBE "GMAT" A PANTALLA.

```

WRITE(6,*)"GMAT"
DO I=1,2*E
  WRITE(6,*)(GMAT(I,J),J=1,2*E)
ENDDO

```

SE ESCRIBE "RINDEP" A PANTALLA.

```

WRITE(6,*)"RINDEP"
WRITE(6,*)(RINDEP(I),I=1,2*E)
WRITE(6,*)
WRITE(6,*)

```

SE ESCRIBE EN 'SALVAL' SOLO LOS VALORES DE LA FUNCION SOLUCION.

```

OPEN(2,FILE='SALVAL')
J=1
DO I=2,2*E-2,2
  WRITE(2,*)FLOAT(J)/FLOAT(E),SOLGEN(I)
  J=J+1
ENDDO
CLOSE(2)

```

SE ESCRIBE EN 'SALDERI' SOLO LAS DERIVADAS DE LA FUNCION SOLUCION.

```

OPEN(2, FILE='SALDERI')
J=0
DO I=1, 2*E-1, 2
  WRITE(2, *)FLOAT(J)/FLOAT(E), SOLGEN(I)
  J=J+1
ENDDO
WRITE(2, *)FLOAT(J)/FLOAT(E), SOLGEN(2*E)
CLOSE(2)

STOP
END

```

```

##### * * ##### * * * * * #####
* * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * *
##### * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * *

```

.....
 RUTINA VALORES EN LOS EXTREMOS

MEDIANTE ESTA RUTINA SE OBTIENEN LOS SIGUIENTES COEFICIENTES DE LA MATRIZ "GMAT": GMAT(1,1), GMAT(1,2), GMAT(1,3), GMAT(2,1), GMAT(2,2), GMAT(2,3), GMAT(2E-1, 2E-2), GMAT(2E-1, 2E-1), GMAT(2E-1, 2E), GMAT(2E, 2E-2), GMAT(2E, 2E-1), GMAT(2E, 2E); Y LOS SIGUIENTES COEFICIENTES DE LA MATRIZ "RINDEP": RINDEP(1), RINDEP(2), RINDEP(2E-1) Y RINDEP(2E), DE ACUERDO A LAS ECUACIONES (6.11C'-D') Y (6.11E'-F') MIEMBROS IZQUIERDO Y DERECHO, RESPECTIVAMENTE.

LOS PARAMETROS DE ENTRADA SON: G (=NUMERO DE PUNTOS DE COLOCACION MAS UNO), IORD_CUAD (=ORDEN DE CUADRATURA CUANDO SE TIENE EL CASO DE UNA ECUACION INHOMOGENEA), E (=NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1]) Y EL ARREGLO "COND" EL CUAL CONTIENE EL VALOR DE U(X) EN LOS EXTREMOS.

LA SALIDA SON LAS COMPONENTES INDICADAS DE LAS MATRICES "GMAT" Y "RINDEP".

LA RUTINA SE DIVIDE EN DOS PARTES: EN LA PRIMERA SE TOMAN LOS PUNTOS 0, 1/E Y ESTOS PUNTOS SON ENVIADOS A LA RUTINA "MATRIZP()" LA CUAL OBTIENE LOS COEFICIENTES PARA LAS INCOGNITAS DE LAS P'S LAS CUALES SON LOS COEFICIENTES DE LAS FUNCIONES DE PESO EN EL INTERVALO (0, 1/E), EN SEGUIDA LAS INCOGNITAS P'S SON RESUELTAS POR LA RUTINA "SOLP()". A PARTIR DE LA SOLUCION PARA LAS P'S PODEMOS OBTENER LOS VALORES NUMERICOS DE LAS ROO'S COMO SE EXPRESA EN LA ECUACIONES (6.4), QUE SON INTRODUCIDOS EN LOS LUGARES CORRESPONDIENTES DE "GMAT", Y EN LOS DEL ARREGLO "RINDEP". DESPUES LLAMA A LA RUTINA INTEGRA PARA EFECTUAR LA CUADRATURA GAUSSIANA CORRESPONDIENTE, EL PROCESO SE

REALIZA EN FORMA SIMILAR PARA LA SEGUNDA PARTE SOLO QUE AHORA SE TOMAN LOS PUNTOS E-1/E Y 1.

```
SUBROUTINE CASOEXTREMO(G, IORD_CUAD, E, COND)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER E, G, IORD_CUAD
DIMENSION COND(2)
COMMON /SISTEM/GMAT(100,100), RINDEP(100), SOLGEN(100)
COMMON /MAT/PD(11,11), PI(11,11), VECI(11), VECD(11), SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)
COMMON /INTEGRALES/ITIPO_EC, CUADDER, CUADIZQ
```

```
XA=1.0D0/DBLE(E)
XAI=0.0D0
CALL MATRIZP(G,XAI,XA)
CALL SOLPCORR(G)
ROMAS=0.0D0
ROMEN=0.0D0
DO I=1,G
    ROMAS=ROMAS+DBLE(I)*SOLDER(I)*(XAI-XA)**(I-1)
    ROMEN=ROMEN+DBLE(I)*SOLIZQ(I)*(XA-XAI)**(I-1)
```

```
ENDDO
GMAT(1,1)=0.0D0
GMAT(1,2)=C(XA)+SOLDER(1)
GMAT(1,3)=-1.0D0
GMAT(2,1)=1.0D0
GMAT(2,2)=ROMEN
GMAT(2,3)=0.0D0
CALL INTEGRA(G, IORD_CUAD, XAI, XA)
RINDEP(1)=ROMAS*COND(1)-CUADDER
RINDEP(2)=(SOLIZQ(1)+C(0.0D0))*COND(1)-CUADIZQ
```

```
XA=DBLE(E)/DBLE(E)
XAI=DBLE(E-1)/DBLE(E)
CALL MATRIZP(G,XAI,XA)
CALL SOLPCORR(G)
ROMAS=0.0D0
ROMEN=0.0D0
DO I=1,G
    ROMAS=ROMAS-DBLE(I)*SOLDER(I)*(XAI-XA)**(I-1)
    ROMEN=ROMEN-DBLE(I)*SOLIZQ(I)*(XA-XAI)**(I-1)
```

```
ENDDO
IND=2*E-1
GMAT(IND,IND)=0.0D0
GMAT(IND,IND-1)=ROMAS
GMAT(IND,IND+1)=-1.0D0
GMAT(IND+1,IND)=1.0D0
GMAT(IND+1,IND-1)=-C(XAI)-SOLIZQ(1)
GMAT(IND+1,IND+1)=0.0D0
CALL INTEGRA(G, IORD_CUAD, XAI, XA)
RINDEP(IND)=- (SOLDER(1)+C(1.0D0))*COND(2)-CUADDER
RINDEP(IND+1)=ROMEN*COND(2)-CUADIZQ
```

RETURN

END

.....
..... FUNCION C
.....

LA FUNCION C- SE TOMA DE LA FORMA:
C(X)=-2A(X)
SE CALCULA A C(X) EN EL PUNTO EN CUESTION.

REAL*8 FUNCTION C(X)
REAL*8 X
C=C(X)
RETURN
END

.....
..... FUNCION D
.....

LA FUNCION C SE TOMA DE LA FORMA:
D(X)=B(X)-A'(X)
SE CALCULA A D(X) EN EL PUNTO EN CUESTION.

REAL*8 FUNCTION D(X)
REAL*8 X
D=D(X)
RETURN
END

.....
..... FUNCION F
.....

LA FUNCION F HACE LA ECUACION DIFERENCIAL NO HOMOGENEA

REAL*8 FUNCTION F(X)
REAL*8 X

F=F(X)

RETURN
END

.....
..... RUTINA QUE EFECTUA LA CUADRATURA
.....

MEDIATE LA SUBRRUTINA "INTEGRA" SE EFECTUA LA CUADRATURA GAUSSIANA DE LA FUNCION DE PESO FI_ALFA POR LA FUNCION F (LA FUNCION QUE HACE LA IGUALDAD EN LA ECUACION DIFERENCIAL ORIGINAL), DE ACUERDO A LAS ECUACIONES (5.22) DEL TEXTO EN EL INTERVALO TIPICO (XAI, XA).

```

SUBROUTINE INTEGRA(G, IORD_CUAD, XAI, XA)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
INTEGER G, IORD_CUAD
REAL*8 XAI, XA
COMMON /MAT/PD(11, 11), PI(11, 11), VECI(11), VECD(11), SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)
COMMON /PUN/RAIZ(11), TNRAIZ(11), PESO(11)
COMMON /INTEGRALES/ITIPO_EC, CUADDER, CUADIZQ

```

```

K=IORD_CUAD
DIFF=XA-XAI
CUADDER=0.D0
CUADIZQ=0.D0
DO I=1, K
  AUXDER=0.D0
  AUXIZQ=0.D0
  DO J=1, G
    AUXDER=AUXDER+SOLDER(J)*((DIFF*(TNRAIZ(I)-1.D0)/2.D0)**J)
    AUXIZQ=AUXIZQ+SOLIZQ(J)*((DIFF*(TNRAIZ(I)+1.D0)/2.D0)**J)
  ENDDO
  AUXDER=AUXDER+1.D0
  AUXIZQ=AUXIZQ+1.D0
  VALX=(DIFF+TNRAIZ(I)+XA+XAI)/2.D0
  CUADDER=CUADDER+PESO(I)*F(VALX)*AUXDER
  CUADIZQ=CUADIZQ+PESO(I)*F(VALX)*AUXIZQ
ENDDO
CUADDER=DIFF*CUADDER/2.D0
CUADIZQ=DIFF*CUADIZQ/2.D0

RETURN
END

```

.....
 RUTINA LLENARAIZ

LA SUBRRUTINA "LLENARAIZ" PASA A "RAIZ", "TNRAIZ" Y "PESO" LOS VALORES PERTINENTES. EN "RAIZ" PASA LOS VALORES DE LAS RAICES TRANSLADADOS, EN "TNRAIZ" LAS NO TRANSLADADOS Y EN "PESO" LOS PESOS DE LAS RAICES CORRESPONDIENTES PARA SU USO EN LA CUADRATURA GAUSSIANA.

```

SUBROUTINE LLENARAIZ(N, IORD_CUAD)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
INTEGER N, IORD_CUAD
COMMON /PUN/RAIZ(11), TNRAIZ(11), PESO(11)
COMMON /ALMACEN/AL_RAIZ(55), AL_PESO(55)

```

```

IPOSN=1
DO I=1,N-1
  IPOSN=IPOSN+I
ENDDO
DO I=1,N
  RAIZ(I)=(1.0D0+AL_RAIZ(IPOSN))/2.0D0
  IPOSN=IPOSN+1
ENDDO
IPOSN=1
DO I=1,IORD_CUAD-1
  IPOSN=IPOSN+I
ENDDO
DO I=1,IORD_CUAD
  TNRAIZ(I)=AL_RAIZ(IPOSN)
  PESO(I)=AL_PESO(IPOSN)
  IPOSN=IPOSN+1
ENDDO

RETURN
END

```

```

C
C
C .....
C .....  Rutina que genera la matriz de las P's .....
C .....
C

```

```

C
C EN ESTA RUTINA SE CALCULAN LAS MATRICES "PD", "PI" Y LOS
C VECTORES "VECD" Y "VECI", QUE FORMAN LAS ECUACIONES SIMULTANEAS
C A RESOLVER PARA LOS VECTORES "SOLDER" Y "SOLIZQ", LOS CUALES
C SON LOS COEFICIENTES P'S QUE EXPANDEN A LA FUNCION DE PESO FI_
C ALFA EN EL INTERVALO TIPICO (X_ALFA-1,X_ALFA), VER ECUACIONES
C (6.7-6.8) DEL TEXTO.

```

```

C
C LAS VARIABLES DE ENTRADA SON: G (=N+1), XA (=X_ALFA), XAI (=X_
C ALFA-1).
C LAS VARIABLES DE SALIDA SON: LAS MATRICES "PD", "PI" Y LOS
C VECTORES "VECD" Y "VECI".
C

```

```

SUBROUTINE MATRIZP(G,XAI,XA)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  INTEGER G
  COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)
  COMMON /PUN/RAIZ(11)

  DIFF=XA - XAI
  DO I=1,G
    PD(I,I)=(-DIFF)**I
    PI(I,I)=(DIFF)**I
  ENDDO
  VECD(1)=-1.0D0
  VECI(1)=-1.0D0
  DO I=2,G
    XAJ=XAI + RAIZ(I-1)*DIFF
  ENDDO

```



```

XI1=XAJ - XA
XI2=XAJ - XAI
VECD(I)=-D(XAJ)
VECI(I)=-D(XAJ)
DO J=1,G
  RJ=DBLE(J)
  RJ1=DBLE(J-1)
  PD(I,J)=(RJ*RJ1+RJ+C(XAJ)*(XI1)+D(XAJ)*(XI1)**2)*(XI1)**(J-2)
  PI(I,J)=(RJ*RJ1+RJ+C(XAJ)*(XI2)+D(XAJ)*(XI2)**2)*(XI2)**(J-2)
ENDDO
ENDDO

RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

.....
..... RUTINA QUE GENERA LA MATRIZ DE ROO .....
.....

```

LA RUTINA CALCULA LOS COEFICIENTES FINALES DE "GMAT" DE ACUERDO A LAS ECUACIONES QUE SE EXPONEN EN EL CAPITULO VI, VER ECUACIONES (6.11). EN SEGUIDA LAS ACOMODA EN LAS POSICIONES ADECUADAAS.

LAS VARIABLES DE ENTRADA SON: G (=N+1), IORD_CUAD (=ORDEN PARA LA CUADRATURA), E (=NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1]), XA (=X_ALFA, EL VALOR CENTRAL DEL INTERVALO TIPICO), XAI (=X_ALFA-1).

SE CALCULAN PRIMERO A LOS COEFICIENTES, EN SEGUIDA SE PASAN LOS VALORES A LOS LUGARES CORRESPONDIENTES DE "GMAT".

```

SUBROUTINE ROO(G,IORD_CUAD,E,I,XAI,XA)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER E,G,IORD_CUAD

COMMON /SISTEM/GMAT(100,100),RINDEP(100),SOLGEN(100)
COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)
COMMON /INTEGRALES/ITIPO_EC,CUADDER,CUADIZQ

```

```

ROMAS=0.D0
ROMEN=0.D0
DO J=1,G
  ROMAS=ROMAS-DBLE(J)*SOLDER(J)*(XAI - XA)**(J-1)
  ROMEN=ROMEN+DBLE(J)*SOLIZQ(J)*(XA - XAI)**(J-1)
ENDDO
IND=2*I-1
GMAT(IND,IND)=0.0D0
GMAT(IND,IND-1)=ROMAS
GMAT(IND,IND+1)=C(XA)+SOLDER(1)
GMAT(IND,IND+2)=-1.0D0
GMAT(IND+1,IND)=1.0D0
GMAT(IND+1,IND-1)=-C(XAI)-SOLIZQ(1)

```


GMAT(IND+1,IND+1)=ROMEN
GMAT(IND+1,IND+2)=0.0D0

CALL INTEGRA(G,IORD_CUAD,XAI,XA)
RINDEP(IND)=-CUADDER
RINDEP(IND+1)=-CUADIZQ

RETURN
END

.....
..... SUBROUTINA RESUELVE EL SISTEMA
.....

LA SUBRRUTNA "SISTEMA" RECIBE AL SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES PARA SU POSTERIOR SOLUCION, MEDIANTE EL LLAMADO AL LA SUBRRUTINA DEL LA LIBRERIA STANDAR IMSL, "LEDIF". DONDE SE RESUELVE EL SISTEMA EN CUESTION POR ELEIMINACION GAUSSIANA Y SUSTITUCION HACIA ATRAS, VER REFERENCIA [13].

SUBROUTINE SISTEMA(A,B,SOLUCION,N)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DIMENSION A(N,N),B(N)
DIMENSION SOLUCION(N)
DIMENSION WK(210)

DO I=1,N
SOLUCION(I)=B(I)
ENDDO

MA=1
IB=N
IA=N
IJOB=0
M=1

CALL LEOTLB(A,IA,N,MA,SOLUCION,IB,M,IJOB,WK,IER)

RETURN
END

.....
..... CORRIMIENTOS DE GMAT PARA SU POSTERIOR SOLUCION
.....

LA RUTINA "SOLGCORR()" EFECTUA CORRIMIENTOS EN LA MATRIZ GENERAL "GMAT".

LA VARIABLE DE ENTRADA ES EL TAMAÑO DE "GMAT".
LA VARIABLE DE SALIDA ES "GMAT" CON CORRIMIENTOS.

"SOLG CORR()" PRIMERO PREPARA A "GMAT" MEDIANTE CORRIMIENTOS PROPIOS DEL SISTEMA HP-9000; EN SEGUIDA ENTREGA A "GMAT" CON CORRIMIENTOS A LA RUTINA "SISTEMA()" (VER EXPLICACION DE LA RUTINA) PARA LA SOLUCION DE LA MATRIZ EN CUESTION. (DONDE FINALMENTE SE RESUELVE MEDIANTE LA RUTINA "LEQIF" DE LA LIBRERIA STANDAR IMSL VER REFERENCIA [13]).

```
SUBROUTINE SOLG CORR(IE)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION BASGMAT(100,100)
COMMON /SISTEM/GMAT(100,100),RINDEP(100),SOLGEN(100)
```

```
INDI=1
INDD=1
DO J=1,IE
  DO K=1,IE
    BASGMAT(INDI,INDD)=GMAT(K,J)
    IF( INDI .EQ. 100) THEN
      INDD=INDD+1
      INDI=1
    ELSE
      INDI=INDI+1
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
```

```
CALL SISTEMA(BASGMAT,RINDEP,SOLGEN,IE)
```

```
RETURN
END
```

.....
CORRIMIENTOS DE PD Y PI PARA SU POSTERIOR SOLUCION
.....

LA RUTINA "SOLPCORR()" ES ANALOGA A LA RUTINA "SOLG CORR()". EFECTUA CORRIMIENTOS EN LAS MATRICES "PD" Y "PI" (DEL INTERVALO TIPICO (X_ALFA-1,X_ALFA), PARA SU POSTERIOR SOLUCION MEDIANTE LA RUTINA "SISTEMA()".

LA VARIABLE DE ENTRADA ES EL TAMAÑO DE "PD" Y "PI" (GXG). LA SALIDA SON "PD" Y "PI" CORRIDOS.

LAS MATRICES "PD" Y "PI" SON ENTREGADAS A LA RUTINA "SISTEMA()" LA CUAL ENVIA SUS VALORES A LA RUTINA DE LA LIBRERIA ESTANDAR IMSL "LEQIF()" PARA SU SOLUCION.

```
SUBROUTINE SOLPCORR(G)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER G
DIMENSION RMATIZO(11,11),RMATDER(11,11)
```

* COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
SOLIZQ(11)

```
INDI=1
INDD=1
DO J=1,G
  DO K=1,G
    RMATIZQ(INDI,INDD)=PI(K,J)
    RMATDER(INDI,INDD)=PD(K,J)
    IF( INDI .EQ. 11) THEN
      INDD=INDD+1
      INDI=1
    ELSE
      INDI=INDI+1
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
CALL SISTEMA(RMATIZQ,VECI,SOLIZQ,G)
CALL SISTEMA(RMATDER,VECD,SOLDER,G)

RETURN
END
```

A P E N D I C E B

```

*****      *****      *****      *****      *****      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*****      *****      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*****      *****      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*****      *****      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *      *
*****      *****      *      *      *      *      *      *      *      *      *

```

PROGRAMA PRINCIPAL
ALGORITMO 2

EL OBJETIVO DEL PROGRAMA ES CALCULAR EL VALOR DE LA FUNCION U(X) EN LOS NODOS: 1/E, 2/E, ..., E-1/E; QUE SATISFACE LA ECUACION DIFERENCIAL:

$$LU=U''+2AU'+(B+A')U=0 \quad \text{EN } [0,1]$$

CON: U(0)=K1, U(1)=K2 (VALORES A LA FRONTERA)

POR UN PROCEDIMIENTO DERIVADO DEL LA FORMULACION ALGEBRAICA DE LOS METODOS DISCRETOS (ALGORITMO 2).

LAS VARIABLES DE ENTRADA SON:

- 1.: E (=NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1]).
- 2.: N (=NUMERO DE PUNTOS DE COLOCACION, O BIEN EL GRADO DEL N'ESIMO POLINOMIO DE LEGENDRE). A USAR COMO COLOCACION.
- 3.: EL VALOR DE U EN LA FRONTERA (U(0) Y U(1)).

LAS VARIABLES DE SALIDA SON:

- 1.: LA MATRIZ "GMAT" LA CUAL ES COEFICIENTE PARA LAS INCOGNITAS U(EN LOS NODOS).
- 2.: EL VECTOR "RINDEP" EL CUAL HACE LA IGUALDAD CON EL PRODUCTO "GMAT*U" Y FINALMENTE.

$$(GMAT)*(U) = (RINDEP) \quad (1)$$

- 3.: LA SOLUCION "SOLGEN", EL VALOR U(EN LOS NODOS).

DESCRIPCION DE LAS VARIABLES GLOBALES:

GMAT. MATRIZ COEFICIENTE PARA LA SOLUCION U (EN LOS NODOS)
CONTIENE LOS VALORES DE LAS ROO'S.
RINDEP. VECTOR QUE IGUALA AL PRODUCTO GMAT*U, CONTIENE LAS
CONDICIONES INICIALES POR LA DERIVADA DE FI_ALFA.
SOLGEN. REPRESENTA AL VECTOR INCOGNITA U (EN LOS NODOS).
PD. MATRIZ COEFICIENTE DERECHO PARA LAS P'S.
PI. MATRIZ COEFICIENTE IZQUIERDO PARA LAS P'S.
VECD. ES EL VECTOR QUE IGUALA AL PRODUCTO PD*SOLDER.
VECI. ES EL VECTOR QUE IGUALA AL PRODUCTO PD*SOLIZQ.
SOLDER. REPRESENTA A LAS INCOGNITAS P'S, LAS CUALES EX-
PANDEN A LAS FUNCIONES DE PESO FI_ALFA EN EL IN-
TERVALO TIPICO ALFA.
SOLIZQ. REPRESENTA A LAS INCOGNITAS P'S, LAS CUALES EX-
PANDEN A LAS FUNCIONES DE PESO FI_ALFA EN EL IN-
TERVALO TIPICO ALFA.
COND. EN ESTE VECTOR SE ALMACENAN LOS VALORES DE U EN LOS
EXTREMOS.
N. NUMERO DE RAICES.
RAIZ. EL VECTOR RAIZ SE ALMACENAN LAS N RAICES DEL N'E-
SIMO POLINOMIO DE LEGENDRE.
E. NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1].
G. NUMERO DE RAICES MAS UNO.

EL PROGRAMA PRINCIPAL TIENE, EN GENERAL, CUATRO COMPONENTES
ESTAS SON LAS SIGUIENTES:

EN LA PRIMERA SE CALCULAN LAS RAICES DEL POLINOMIO DE LEGEN-
DRE DE GRADO N DONDE: $2 < N < 10$; MEDIANTE LA RUTINA "LEGEN-
DRE()"

EN LA SEGUNDA PARTE SE CALCULAN LAS ENTRADAS (1,1), (1,2),
(E-1,E-2), (E-1,E-1) Y (1),(E-1) DE LA MATRIZ "GMAT" Y "RINDEP"
RESPECTIVAMENTE MEDIANTE LA RUTINA "CASOEXTREMO()"

EN LA TERCERA SE CALCULAN LOS COEFICIENTES (2,1), (2,2), (2,
3), ..., (E-2,E-3), (E-2,E-2), (E-2,E-1) DE LA MATRIZ "GMAT" ME-
DIANTE LAS RUTINAS "MATRIZP()", "SOLPCORR()" Y "ROO()"; LA
PRIMERA SE ENCARGA DE OBTENER A: "PD", "PI", "VECD", "VECI";
LA SEGUNDA RUTINA OBTIENE A: "SOLDER" Y "SOLIZQ"; FINAL-
MENTE LA ULTIMA ACOMODA LOS VALORES DE LAS ROO'S EN "GMAT" EN
LOS LUGARES PERTINENTES. TAMBIEN EN ESTA PARTE SE RESUELVE PARA
"SOLGEN".

LA ULTIMA PARTE SE ENCARGA DE LA ESCRITURA DE LOS RESULTADOS
SE ESCRIBE A: "GMAT", "RINDEP" Y A "SOLGEN" A PANTALLA; TAMBIEN
SE ABRE UN ARCHIVO PARA ESCRIBIR EL NODO (DENTRO DE (0,1))
JUNTO CON EL VALOR DE U QUE HA SIDO CALCULADO.

```
PROGRAM PRINCIPAL
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /SISTEM/GMAT(100,100),RINDEP(100),SOLGEN(100)
```

```

COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
      SOLIZQ(11)
COMMON /PUN/RAIZ(11)
DIMENSION COND(2)
INTEGER E,G

```

```

WRITE(6,*)" DAME EL NUMERO DE DIVISIONES DE 0-1"
READ(5,*)E
WRITE(6,*)" DAME EL GRADO DEL POLINOMIO DE LEGENDRE A USAR"
WRITE(6,*)"      COMO PUNTOS DE COLOCACION "
READ(5,*)N
WRITE(6,*)" DAME LOS VALORES A LA FRONTERA "
READ(5,*)(COND(I),I=1,2)

```

```

G=N+1
CALL LEGENDRE(N)
CALL CASOEXTREMO(G,E,COND)

```

```

DO I=2,E-2
  XA=DBLE(I)/DBLE(E)
  XAD=DBLE(I+1)/DBLE(E)
  XAI=DBLE(I-1)/DBLE(E)
  CALL MATRIZP(G,XA,XAD,XAI)
  CALL SOLPCORR(G)
  CALL ROO(G,E,I,XA,XAD,XAI)
ENDDO
CALL SOLGCROR(E-1)

```

ESCRITURA LA MATRIZ GENERAL: "GMAT" A PANTALLA.

```

WRITE(6,*)"ESCRITURA LA MATRIZ GENERAL:  GMAT"
DO I=1,E-1
  WRITE(6,*)(GMAT(I,J),J=1,E-1)
ENDDO
WRITE(6,*)
WRITE(6,*)

```

ESCRITURA DEL VECTOR GENERAL: "RINDEP" A PANTALLA.

```

WRITE(6,*)"ESCRITURA DEL VECTOR GENERAL:  RINDEP"
WRITE(6,*)(RINDEP(J),J=1,E-1)
WRITE(6,*)
WRITE(6,*)

```

SOLUCION: VALORES DE LA FUNCION SOLUCION.

```

WRITE(6,*)"SOLUCION: VALORES DE LA FUNCION"
WRITE(6,*)(SOLGEN(J),J=1,E-1)
WRITE(6,*)

```

SOLUCION: VALORES DE LA FUNCION SOLUCION,
SE ESCRIBE LA SOLUCION EN EL ARCHIVO "SALVAL"

```

OPEN(2,FILE='SALVAL')
DO I=1,E-1

```

```

WRITE(2,*)FLOAT(1)/FLOAT(E),SOLGEN(1)
ENDDO
CLOSE(2)

```

```

STOP
END

```

```

##### * * ##### *** * * * #####
* * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * *
##### * * * * * * * * * * #####
* * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * *

```

```

.....
: : : RUTINA QUE CALCULA LAS RAICES DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE : : :
.....

```

EN ESTA RUTINA SE CALCULAN LAS N RAICES DEL N'ESIMO POLINOMIO DE LEGENDRE.

EL PARAMETRO DE ENTRADA ES N (=GRADO DEL POLINOMIO DE LEGENDRE)

LA SALIDA SON LAS N RAICES DEL POLINOMIO EN EL ARREGLO "RAIZ", LAS CUALES SON FORZADAS A CAER EN [0,1].

SE CALCULA EN EL ARREGLO "POL" LOS COEFICIENTES DEL N'ESIMO POLINOMIO DE LEGENDRE, Y SE PASAN AL ARREGLO "COEF" EN FORMA ORDENADA.

EN SEGUIDA EL ARREGLO "COEF" PASA A UNA RUTINA DE LA LIBRERIA MATEMATICA IMSL, LLAMADA "POLR" LA CUAL HA SIDO MODIFICADA PARA QUE MANEJE VARIABLES DE TIPO REAL*8. LA RUTINA "POLR" CALCULA LAS RAICES DEL POLINOMIO DE GRADO N DE COEFICIENTES "COEF", LAS RAICES SON VACIADAS EN EL ARREGLO DE DE COMPLEJOS "RAICES", MIENTRAS QUE POR "IER" SE DA SALIDA A LOS POSIBLES ERRORES.

ENSEGUIDA "RAICES" ES PASADA A "RAIZ", TRASLADADAS PARA SER FORZADAS A CAER SOBRE EL INTERVALO [0,1]. FINALMENTE "RAIZ" ES ORDENADA EN FORMA ASCENDENTE POR EL METODO DE LA BURBUJA.

```

SUBROUTINE LEGENDRE(N)
REAL*8 RAIZ,AUX
COMMON /PUN/RAIZ(11)
DIMENSION POL(-1:10,-2:11)
DIMENSION COEF(10)
COMPLEX RAICES(10)

```

```

POL(0,0)=1

```



```

POL(1,1)=1
IF ( N.LT.2 ) GO TO 20
DO I=2,N
  DO J=0,N
    POL(I,J)=((2*I -1)*POL(I-1,J-1)-(I-1)*POL(I-2,J))/FLOAT(I)
  ENDDO
ENDDO

DO I=0,N
  COEF(1+I)=POL(N,N-I)
ENDDO

CALL POLR(COEF,N,RAICES,IER)

DO I=1,N
  RAIZ(I)=DBLE((1.0+ REAL(RAICES(I)))/2.0)
ENDDO

DO I=2,N
  DO J=N,I,-1
    IF (RAIZ(J-1) .GT. RAIZ(J)) THEN
      AUX=RAIZ(J-1)
      RAIZ(J-1)=RAIZ(J)
      RAIZ(J)=AUX
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO

20 RETURN
END

```

.....
 RUTINA VALORES EN LOS EXTREMOS

MEDIANTE ESTA RUTINA SE OBTIENEN LOS SIGUIENTES COEFICIENTES DE LA MATRIZ "GMAT": GMAT(1,1), GMAT(1,2), GMAT(XE-1,XE-2) Y GMAT(XE-1,XE-1); Y LOS SIGUIENTES COEFICIENTES DE LA MATRIZ "RINDEP": RINDEP(1) Y RINDEP(XE-1).

LOS PARAMETROS DE ENTRADA SON: G (=NUMERO DE PUNTOS DE COLOCACION MAS UNO), E (=NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1]) Y EL ARREGLO "COND" EL CUAL CONTIENE EL VALOR DE U(X) EN LOS EXTREMOS.

LA SALIDA SON LAS COMPONENTES INDICADAS DE LAS MATRICES "GMAT" Y "RINDEP".

LA RUTINA SE DIVIDE EN DOS PARTES: EN LA PRIMERA SE TOMAN LOS PUNTOS 0, 1/E Y 2/E ESTOS PUNTOS SON ENVIADOS A LA RUTINA "MATRIZP()" LA CUAL OBTIENE LOS COEFICIENTES PARA LAS INCOGNITAS DE LAS P'S LAS CUALES SON LOS COEFICIENTES DE LAS FUNCIONES DE PESO EN EL INTERVALO (0,2/E), EN SEGUIDA LAS INCOGNITAS P'S SON RESUELTAS POR LA RUTINA "SOLP()". A PARTIR DE LA SOLUCION PARA LAS P'S PODEMOS OBTENER LOS VALORES NUMERICOS DE LAS ROO'S COMO SE EXPRESA EN LA ECUACIONES (8.0), QUE SON IN-

TRODUCIDOS EN LOS LUGARES CORRESPONDIENTES DE "GMAT", Y EN LOS DEL DEL ARREGLO "RINDEP". EL PROCESO SE REALIZA EN FORMA SIMILAR PARA LA SEGUNDA PARTE SOLO QUE AHORA SE TOMAN LOS PUNTOS E-2/E, E-1/E Y 1.

```

SUBROUTINE CASOEXTREMO(G, E, COND)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
INTEGER E, G
DIMENSION COND(2)
COMMON /SISTEM/GMAT(100, 100), RINDEP(100), SOLGEN(100)
COMMON /MAT/PD(11, 11), PI(11, 11), VECI(11), VECD(11), SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)
COMMON /PUN/RAIZ(11)

```

```

XA=1.0D0/DBLE(E)
XAI=0.0D0
XAD=2.0D0/DBLE(E)
CALL MATRIZP(G, XA, XAD, XAI)
CALL SOLP(G)
ROMAS=0.0D0
GMAT(1, 1)=SOLDER(1)-SOLIZQ(1)
DO I=1, G
  ROMAS=ROMAS-DBLE(I)*SOLDER(I)*(XAD-XA)**(I-1)
ENDDO
GMAT(1, 2)=ROMAS
ROMEN=0.0D0
DO I=1, G
  ROMEN=ROMEN+DBLE(I)*SOLIZQ(I)*(XAI-XA)**(I-1)
ENDDO
RINDEP(1)=-ROMEN*COND(1)

```

```

XA=DBLE(E-1)/DBLE(E)
XAI=DBLE(E-2)/DBLE(E)
XAD=1.0D0
CALL MATRIZP(G, XA, XAD, XAI)
CALL SOLP(G)
GMAT(E-1, E-1)=SOLDER(1)-SOLIZQ(1)
ROMEN=0.0D0
DO I=1, G
  ROMEN=ROMEN+DBLE(I)*SOLIZQ(I)*(XAI-XA)**(I-1)
ENDDO
GMAT(E-1, E-2)=ROMEN
ROMAS=0.0D0
DO I=1, G
  ROMAS=ROMAS-DBLE(I)*SOLDER(I)*(XAD-XA)**(I-1)
ENDDO
RINDEP(E-1)=-ROMAS*COND(2)

```

```

RETURN
END

```

.....
 RUTINA QUE GENERA LA MATRIZ DE LAS P'S

EN ESTA RUTINA SE CALCULAN LAS MATRICES "PD", "PI" Y LOS VECTORES "VECD" Y "VECI"; QUE FORMAN LAS ECUACIONES SIMULTANEAS A RESOLVER PARA LOS VECTORES "SOLDER" Y "SOLIZQ", LOS CUALES SON LOS COEFICIENTES P'S QUE EXPANDEN A LA FUNCION DE PESO FI_ALFA EN EL INTERVALO TIPICO (X_ALFA-1, X_ALFA+1).

LAS VARIABLES DE ENTRADA SON: G (=N+1), XA (=X_ALFA), XAD (=X_ALFA+1), XAI (=X_ALFA-1).

LAS VARIABLES DE SALIDA SON: LAS MATRICES "PD", "PI" Y LOS VECTORES "VECD" Y "VECI".

LA RUTINA EFECTUA LOS CALCULOS DE ACUERDO A LAS ECUACIONES (6) QUE SE EXPONEN EN LA PRIMERA PARTE DEL TEXTO.

```

SUBROUTINE MATRIZP(G, XA, XAD, XAI)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
INTEGER G
COMMON /MAT/PD(11, 11), PI(11, 11), VECI(11), VECD(11), SOLDER(11),
      SOLIZQ(11)
* COMMON /PUN/RAIZ(11)

XDER=XAD - XA
XIZQ=XAI - XA

DO I=1, G
  PD(1, I)=(XDER)**I
  PI(1, I)=(XIZQ)**I
ENDDO
VECD(1)=-1. D0
VECI(1)=-1. D0

DO I=2, G
  Y=RAIZ(I-1)*XDER
  X=RAIZ(I-1)*XIZQ
  XIMA=XA+Y
  XIME=XA+X
  VECD(I)=-D(XIMA)
  VECI(I)=-D(XIME)

DO J=1, G
  RJ=DBLE(J)
  RJ1=DBLE(J-1)
  PD(I, J) = (RJ*RJ1+RJ*C(XIMA)*Y+D(XIMA)*Y**2)*Y**(J-2)
  PI(I, J) = (RJ*RJ1+RJ*C(XIME)*X+D(XIME)*X**2)*X**(J-2)
ENDDO
ENDDO

RETURN
END

```

..... RUTINA QUE GENERA LA MATRIZ DE ROO

LA RUTINA CALCULA LAS ROO'S DE ACUERDO A LAS ECUACIONES (8.1A-C). EN SEGUIDA LAS ACOMODA EN LA MATRIZ "GMAT" EN LAS POSICIONES ADECUADAAS.

LAS VARIABLES DE ENTRADA SON: G (=N+1), E (=NUMERO DE DIVISIONES DEL INTERVALO [0,1]), XA (=X_ALFA, EL VALOR CENTRAL DEL INTERVALO TIPICO), XAD (=X_ALFA+1), XAI (=X_ALFA-1).

LAS VARIABLES DE SALIDA SON: GMAT(X_ALFA,X_ALFA-1), GMAT(X_ALFA,X_ALFA), GMAT(X_ALFA,X_ALFA+1).

SE CALCULAN PRIMERO A LAS ROO'S, EN SEGUIDA SE PASAN LOS VALORES A LOS LUGARES CORRESPONDIENTES.

SUBROUTINE ROO(G,E,I,XA,XAD,XAI)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

INTEGER E,G

COMMON /SYSTEM/GMAT(100,100),RINDEP(100),SOLGEN(100)

COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)

ROMAS=0.D0

ROMEN=0.D0

DO J=1,G

ROMAS=ROMAS-DBLE(J)*SOLDER(J)*(XAD - XA)**(J-1)

ROMEN=ROMEN+DBLE(J)*SOLIZQ(J)*(XAI - XA)**(J-1)

ENDDO

GMAT(I,I)=SOLDER(1)-SOLIZQ(1)

GMAT(I,I+1)=ROMAS

GMAT(I,I-1)=ROMEN

RETURN

END

..... CORRIMIENTOS DE GMAT PARA SU POSTERIOR SOLUCION

LA RUTINA "SOLG CORR()" EFECTUA CORRIMIENTOS EN LA MATRIZ GENERAL "GMAT".

LA VARIABLE DE ENTRADA ES EL TAMAÑO DE "GMAT".
LA VARIABLE DE SALIDA ES "GMAT" CON CORRIMIENTOS.

"SOLG CORR()" PRIMERO PREPARA A "GMAT" MEDIANTE CORRIMIENTOS PROPIOS DEL SISTEMA HP-9000; EN SEGUIDA ENTREGA A "GMAT" CON CORRIMIENTOS A LA RUTINA "SISTEMA()" (VER EXPLICACION DE LA RUTINA) PARA LA SOLUCION DE LA MATRIZ EN CUESTION.

```

SUBROUTINE SOLGCROR(IE)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION BASGMAT(100,100)
COMMON /SISTEM/GMAT(100,100),RINDEP(100),SOLGEN(100)

```

```

INDI=1
INDD=1
DO J=1,IE
  DO K=1,IE
    BASGMAT(INDI,INDD)=GMAT(K,J)
    IF( INDI .EQ. 100) THEN
      INDD=INDD+1
      INDI=1
    ELSE
      INDI=INDI+1
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO

CALL SISTEMA(BASGMAT,RINDEP,SOLGEN,IE)

RETURN
END

```

.....
 CORRIMIENTOS DE PD Y PI PARA SU POSTERIOR SOLUCION

LA RUTINA "SOLPCORR()" ES ANALOGA A LA RUTINA "SOLGCROR()". EFECTUA CORRIMIENTOS EN LAS MATRICES "PD" Y "PI" (DEL INTERVALO TIPICO (X_ALFA-1,X_ALFA+1)), PARA SU POSTERIOR SOLUCION MEDIANTE LA RUTINA "SISTEMA()".

LA VARIABLE DE ENTRADA ES EL TAMAO DE "PD" Y "PI" (GXG). LA SALIDA SON "PD" Y "PI" CORRIDOS.

LAS MATRICES "PD" Y "PI" SON ENTREGADAS A LA RUTINA "SISTEMA()" LA CUAL ENVIA SUS VALORES A LA RUTINA DE LA LIBRERIA ESTANDAR IMSL "ZLEQIF()" PARA SU SOLUCION.

```

SUBROUTINE SOLPCORR(G)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER G
DIMENSION RMATIZQ(11,11),RMATDER(11,11)
COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),
* SOLIZQ(11)

```

```

INDI=1
INDD=1
DO J=1,G
  DO K=1,G

```

```
RMATIZQ(INDI, INDD)=PI(K, J)
RMATDER(INDI, INDD)=PD(K, J)
IF ( INDI .EQ. 11) THEN
  INDD=INDD+1
  INDI=1
ELSE
  INDI=INDI+1
ENDIF
```

```
ENDDO
```

```
CALL SISTEMA(RMATIZQ, VECI, SOLIZQ, G)
CALL SISTEMA(RMATDER, VECD, SOLDER, G)
```

```
RETURN
END
```

FUNION C

LA FUNCION C SE TOMA DE LA FORMA:
 $C(X) = -2A(X)$
DE LA ECUACION (1A) DEL TEXTO.
SE CALCULA A $C(X)$ EN EL PUNTO EN CUESTION.

```
REAL*8 FUNCTION C(X)
REAL*8 X
```

```
C=C(X)
```

```
RETURN
END
```

FUNION D

LA FUNCION C SE TOMA DE LA FORMA:
 $D(X) = B(X) - A'(X)$
DE LA ECUACION (1A).
SE CALCULA A $D(X)$ EN EL PUNTO EN CUESTION.

```
REAL*8 FUNCTION D(X)
REAL*8 X
```

```
D=D(X)
```

```
RETURN
END
```

A P E N D I C E C

SUSTITUCION A

SUSTITUCION PARA EL PROGRAMA PRINCIPAL
ALGORITMO 1

CON ESTE PROGRAMA SUSTITUIMOS AL PROGRAMA PRINCIPAL, QUE HEMOS PRESENTADO EN EL APENDICE A.

ABRIMOS TRES ARCHIVOS DE ESCRITURA: "REPORTE", "CRIT_VAL" Y "CRIT_DERI". EN LOS CUALES ESCRIBIMOS LOS RESULTADOS, DE LOS ANALISIS DEL ERROR, LOS CUALES OBTENEMOS RECURSIVAMENTE.

EN ESTE CASO TENEMOS EL LISTADO EXPLICITO PARA CUANDO ANALIZAMOS LA ECUACION 7.7 DEL TEXTO. Y MANTENEMOS A N (COLOCACION) CONSTANTE.

PROGRAM PRINCIPAL

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DIMENSION COND(2)

INTEGER E, G

COMMON /SISTEM/GMAT(150,150),RINDEP(150),SOLGEN(150)

COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),

SOLIZQ(11)

COMMON /PUN/RAIZ(11),TNRAIZ(11),PESO(11)

COMMON /ALMACEN/AL_RAIZ(55),AL_PESO(55)

COMMON /INTEGRALES/ITIPO_EC,CUADDER,CUADIZQ

OPEN(2,FILE='DATOS')

DO I=1,55

READ(2,*)AL_RAIZ(I)

ENDDO

DO I=1,55

READ(2,*)AL_PESO(I)

ENDDO

CLOSE(2)

OPEN(12,FILE='REPORTE')

OPEN(13,FILE='CRIT_VAL')

OPEN(14,FILE='CRIT_DERI')

COND(1)=1.0D0

COND(2)=0.0D0

IORD_CUAD=0

```

DO JUN=2,10
  N=JUN
  DO IJ=1,18
    E=4*IJ
    DO J=1,150
      DO K=1,150
        GMAT(J,K)=0.DO
      ENDDO
      RINDEP(J)=0.DO
      SOLGEN(J)=0.DO
    ENDDO
    DO J=1,11
      DO K=1,11
        PD(J,K)=0.DO
        PI(J,K)=0.DO
      ENDDO
      VECI(J)=0.DO
      VECD(J)=0.DO
      SOLDER(J)=0.DO
      SOLIZQ(J)=0.DO
    ENDDO

    G=N+1
    CALL LLENARAIZ(N, IORD_CUAD)
    CALL CASOEXTREMO(G, IORD_CUAD, E, COND)
    DO I=2, E-1
      XA=DBLE(I)/DBLE(E)
      XAI=DBLE(I-1)/DBLE(E)
      CALL MATRIZP(G, XAI, XA)
      CALL SOLP(G)
      CALL ROO(G, IORD_CUAD, E, I, XAI, XA)
    ENDDO
    CALL RESGMAT(2*E)
    CALL COMPARA(E, N, IJ)
  ENDDO

  DO IJK=1,2
    WRITE(12,*)
    WRITE(13,*)
    WRITE(14,*)
  ENDDO

ENDDO

CLOSE(12)
CLOSE(13)
CLOSE(14)

STOP
END

```

C
C
C

.....
 C:..... SUBROUTINA PARA EFECTUAR LAS COMPARACIONES EN EL
 C:..... ANALISIS DE ERROR.

.....
SUBROUTINE COMPARA(E,N,IJ)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER E,N,IJ

COMMON /SISTEM/GMAT(150,150),RINDEP(150),SOLGEN(150)

INTEGRAL GAUSSIANA CON: NO. DE DIVISIONES=100
(RUTINA "INT.FT") ORDEN DE CUADRATURA=5
(RUTINA "INTDERI.FT") EN EL PUNTO X=0.250

ASI COMO VALOR DE LA DERIVADA EN X=0.250

XERR14VAL=0.999977058318645
XERR14DER=-1.16931708171605E-4

IAUX=2*IJ

XERRVAL=DABS(SOLGEN(IAUX)-XERR14VAL)
XERRDER=DABS(SOLGEN(IAUX+1)-XERR14DER)

A=DBLE(E)
WRITE(13,*)LOG(A),DABS(LOG(XERRVAL))
WRITE(14,*)LOG(A),DABS(LOG(XERRDER))

WRITE(12,*)"E=",E," N=",N," ERROR EN EL VALOR=",XERRVAL
WRITE(12,*)" ERROR EN LA DERIVADA=",XERRDER
WRITE(6,*)"E=",E," N=",N," ERROR EN EL VALOR=",XERRVAL
WRITE(6,*)" ERROR EN LA DERIVADA=",XERRDER

RETURN
END

SUSTITUCION B

.....
SUSTITUCION PARA EL PROGRAMA PRINCIPAL
ALGORITMO 2
.....

SUSTITUCION EN EL ALGORITMO 2 PARA LA OBTENCION ITERADA DEL ERROR.

EN ESTE CASO SE PRESENTA LA SUSTITUCION USADA PARA ANALIZAR LA ECUACION 7.1, EN DONDE TOMAMOS E (PARTICION) CONSTANTE.

PROGRAM PRINCIPAL

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

COMMON /SISTEM/GMAT(50,50),RINDEP(50),SOLGEN(50)

COMMON /MAT/PD(11,11),PI(11,11),VECI(11),VECD(11),SOLDER(11),

SOLIZQ(11)

COMMON /PUN/RAIZ(11)

DIMENSION COND(2)

INTEGER E,G

OPEN(12,FILE='REPORTE')

OPEN(13,FILE='GRA_CRI1')

OPEN(14,FILE='GRA_CRI2')

COND(1)=1.0D0

COND(2)=0.0D0

DO IJ=1,12

E=4*IJ

DO JUN=2,10

DO J=1,50

DO K=1,50

GMAT(J,K)=0.D0

ENDDO

RINDEP(J)=0.D0

SOLGEN(J)=0.D0

ENDDO

DO J=1,11

DO K=1,11

PD(J,K)=0.D0

PI(J,K)=0.D0

ENDDO

VECI(J)=0.D0

VECD(J)=0.D0

SOLDER(J)=0.D0

SOLIZQ(J)=0.D0

ENDDO

N=JUN

G=N+1

CALL LEGENDRE(N)

CALL CASOEXTREMO(G,E,COND)

DO I=2,E-2

XA=DBLE(I)/DBLE(E)

XAD=DBLE(I+1)/DBLE(E)

XAI=DBLE(I-1)/DBLE(E)

CALL MATRIZP(G,XA,XAD,XAI)

CALL SOLP(G)

CALL ROO(N,E,I,XA,XAD,XAI)

ENDDO

```

CALL RESGMAT(E-1)
CALL COMPARA(E,N,IJ)
ENDDO
WRITE(13,*)
WRITE(13,*)
WRITE(14,*)
WRITE(14,*)
ENDDO

CLOSE(12)
CLOSE(13)
CLOSE(14)

STOP
END

```

C
C
C
C
C
C
C
C

.....
SUBRRUTINA QUE EFECTUA LAS COMPARACIONES DEL ANALISIS DEL
ERROR.

```

SUBROUTINE COMPARA(E,N,IJ)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER E,N,IJ
COMMON /SISTEM/GMAT(50,50),RINDEP(50),SOLGEN(50)
ERRMAXIMO=0.0D0
X=0.0D0
Y=0.250D0
SERROR=0.0D0
WRITE(12,*)"E(DIVISION DE (0,1))=",E,
" N(PUNTOS DE COLOCACION)=",N
WRITE(12,*)"SOLUCION ANALITICA SOLUCION APROXIMADA"
DO I=1,E-1
X=X+1.0D0/DBLE(E)
ERROR=DABS(SOLGEN(I) - ERR(X) )
WRITE(12,*)ERR(X)," ",SOLGEN(I)
SERROR=SERROR+ERROR
IF( ERRMAXIMO .LT. ERROR) ERRMAXIMO=ERROR
ENDDO
CERROR=DABS(SOLGEN(IJ)-ERR(Y))
WRITE(13,*)2*N-1,DABS(DLOG(ERRMAXIMO))
WRITE(14,*)2*N-1,DABS(DLOG(CERROR))
WRITE(12,*)"CRITERIO1: MAX|SOL_AP-SOL_ANA|=",ERRMAXIMO
WRITE(12,*)"CRITERIO2: |SOL_AP(1/4)-SOL_ANA(1/4)|=",CERROR
WRITE(12,*)"SUMA < |SOL_AP-SOL_ANA| >=",SERROR
WRITE(12,*)
WRITE(12,*)
WRITE(6,*)" E= ",E," N=",N
WRITE(6,*)" EL ERROR MAXIMO ES ",ERRMAXIMO

RETURN
END

```

.....
.....
FUNCION AUXILIAR PARA LA RUTINA "COMPARA:.

```
REAL*8 FUNCTION ERR(X)
REAL*8 X
ERR=1.D0-X**2
RETURN
END
```

REFERENCIAS:

- [1].:B. Carnahan, H.A. Luther, J.O. Wilkes, "Applied numerical methods". John Wiley & Sons, 1969.
- [2].:Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, "Matrix computations" Johns Hopkins, 1983.
- [3].:Ismael Herrera, "Unified approach to numerical methods part 1. Green's formulas for operators in discontinuous fields", Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1985.
- [4].:Ismael Herrera, "Unified approach to numerical methods part 2. Finite elements, boundary methods, and its coupling", Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1985.
- [5].:Ismael Herrera, Lucia Chargoy, G. Alduncin, "Unified approach to numerical methods, part 3. Finite differences and ordinary differential equations", Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1985.
- [6].:Ismael Herrera, "The algebraic theory approach for ordinary differential equations: highly accurate finite differences" Comunicaciones Técnicas Instituto de Geofísica UNAM, 1987.
- [7].:Ismael Herrera, "Ordinary differential equations: error estimates and theoretical foundations of the algebraic theory approach", Comunicaciones Técnicas Instituto de Geofísica UNAM, 1987.
- [8].:Ismael Herrera, "Boundary methods: an algebraic theory" Pitman Advanced Publishing Program, Applicable Mathematics Series 1984.
- [9].:IMSL, LIBRARY, "Problem-solving software system for mathematical and statistical fortran programming", IMSL Inc., 1982.

[10].: J. Legras, "Précis d'analyse numérique", DUNOD Paris 1963.

[11].: M. Zemansky, "Linear algebra and analysis", Van Nostrand, Co. Amsterdam, 1969.

[12].: P.S. Huyakorn y G.F. Pinder, "Computatinal methods in subsurface flow", Academic Press, 1983.

[13].: R. Courant, D. Hilbert, "Methods of mathematical physics", John Wiley & Sons, 1962.

[14].: R.L. Burden, J.D. Faires, "Numerical Analysis", Wadsworth Inc., 1985.

[15].: S. Lang, "Algebra lineal", Fondo Educativo Interamericana no S.A., 1976.

[16].: T.M. Apostol, "Calculus", vol. II, Blaisdell Publishing Co., 1965.