

2458



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

AUSENCIA DE EIGENVALORES POSITIVOS  
PARA EL PROPAGADOR ACUSTICO

## Tesis Profesional

Que para obtener el Título de:

F I S I C O

p r e s e n t a

VILLEGAS BLAS CARLOS



México, D. F.

1987



Universidad Nacional  
Autónoma de México

UNAM



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

Prefacio	
Introducción.....	1
Capitulo I	
I.1.1 Operadores acotados .....	8
I.1.2 Operadores densamente definidos .....	8
I.1.3 Proyectores .....	10
I.1.4 Operadores Compactos .....	11
I.2.1 Funciones de variación acotada .....	13
I.2.2 Integral de Radon Stieltjes .....	14
I.3.1 Análisis espectral .....	24
I.3.2 Familias espectrales .....	25
I.3.3 Teorema espectral .....	27
I.3.4 Cálculo funcional .....	31
I.3.5 Proyectores ortogonales en los subespacios continuo y puramente puntual .....	32
Capitulo II	
II.1.1 Introducción .....	34
II.1.2 Potencial de Wigner-Von Neumann .....	34
II.1.3 Construcción de potenciales con eigenvalores positivos .....	35
II.2.1 Un tipo de propagador acústico con un eigenvalor positivo .....	38
Capitulo III .....	40
Capitulo IV .....	47
Observaciones .....	61
Apéndices del capítulo III .....	63
Apéndices del capítulo IV .....	68
Bibliografía .....	76

## Prefacio

El objetivo de este trabajo es expresado en la introducción donde además se señala el contenido de cada capítulo y de los apéndices.

Quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación que me ha dado desde mi bachillerato. Así también al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas por todas las facilidades que me ha dado desde que soy becario de esta institución.

Este trabajo de tesis lo dedico con todo mi cariño a mis padres de quienes he recibido ejemplos muy valiosos así como de su comprensión a mis elecciones.

También se lo dedico a mis hermanos, a todos mis maestros que he tenido así como a mis compañeros de escuela como el espacio de la Facultad de Ciencias.

Quiero mencionar un reconocimiento a José Alejandro Domínguez Torres por todas las ocasiones en que me ayudó para hacer este trabajo lo mejor posible. También a todos los miembros del grupo de Física Matemática del IIMAS por todos los consejos que han dado y la revisión de esta tesis.

Por último quisiera señalar el agradecimiento profundo con el Doctor Ricardo Weder por la dirección de esta tesis y toda la ayuda que me ha dado. Llevaré entre los recuerdos mas grandes de mi vida todas las enseñanzas de mi maestro Weder.

## INTRODUCCION

-----

El presente trabajo está centrado en la exposición detallada de la demostración de dos teoremas acerca de la ausencia de eigenvalores positivos para el propagador acústico. Las hipótesis de los dos teoremas son considerablemente distintas; lo que en este caso implica técnicas de demostración diferentes. Estos teoremas se deben a Ricardo Weder y se encuentran en [W1] y [W2].

En esta introducción se muestra la deducción de las ecuaciones de onda que se satisfacen en un fluido (bajo ciertas hipótesis) debido a perturbaciones acústicas. En base a la expresión de estas ecuaciones se define el propagador acústico. A manera de motivación se dan comentarios acerca de la importancia de su estudio.

Posteriormente se señala la organización de esta tesis así como el objetivo de cada capítulo y algunos rasgos generales acerca del contenido y técnicas que se emplean en estos.

Tomemos un fluido compresible, no viscoso y conductor de calor. Entonces las ecuaciones básicas que describen su desarrollo en el tiempo y el espacio son:

$$\text{Conservación de masa: } D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad 1.1$$

$$\text{Balance de momento: } \rho D\vec{v}/Dt + \nabla P = \rho \vec{G} \quad 1.2$$

$$\rho Ds/Dt - \frac{1}{T} \nabla \cdot (K \nabla T) = 0 \quad 1.3$$

$$f(\rho, \rho, T) = 0, \quad \phi(\rho, \rho, s) = 0 \quad 1.4$$

En estas ecuaciones  $D/Dt = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$  es conocida como la derivada material. Todas las funciones dependen de  $x$  y  $t$  con  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

$\rho(x, t)$  es la densidad de masa del fluido.

$\vec{v}(x, t)$  es el campo de velocidades.

$P(x, t)$  es la presión del fluido.

$\vec{G}(x, t)$  es la fuerza externa que actúa sobre el fluido por unidad de masa.

$S(x, t)$  es la entropía por unidad de masa.

$T(x, t)$  es la temperatura.

$K(x, t)$  es la conductividad térmica.

Cualquiera de las ecuaciones en 1.4 es la ecuación de estado del fluido.

Nos interesa tener descripciones del fluido cuando en este se tienen perturbaciones pequeñas con respecto a su situación estática. Lo que haremos entonces es establecer ciertos hechos válidos

en el caso estático y de aquí describir el caso perturbado con la ayuda de las ecuaciones básicas.

El caso estático lo describimos^ diciendo:

$$\vec{V}_0 = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \quad \vec{G}_0 = 0.$$

Por lo tanto  $T_0 = T_0(x)$ ,  $S_0 = S_0(x)$ . De la ecuación 1.1 tenemos:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho_0 = \rho_0(x).$$

De 1.2 deducimos que:  $\nabla P = 0 \Rightarrow P_0 = P_0(t)$ .

Por otro lado de la ecuación de estado nos queda:

$$F(P_0(t), \rho_0(x), T_0(x)) = 0; \text{ por lo tanto } P_0 \text{ debe ser una constante.}$$

Ahora describiremos el estado perturbado de la siguiente manera:

$$\vec{G} = \epsilon \vec{G}_1 \tag{1.5}$$

$$P = P_0 + \epsilon P_1 \tag{1.6}$$

$$T = T_0 + \epsilon T_1 \tag{1.7}$$

$$\vec{V} = \epsilon \vec{V}_1 \tag{1.8}$$

$$T = T_0 + \epsilon T_1 \tag{1.9}$$

$$S = S_0 + \epsilon S_1 \tag{1.10}$$

donde los términos que son de la forma  $\epsilon$  por alguna variable con subíndice uno cuantifica la perturbación. La intención de las anteriores ecuaciones es utilizar las propiedades del caso estático y linealizar las ecuaciones básicas. Además se hará la suposición de que el flujo de calor es lo suficientemente pequeño para que podamos tomar el término  $\nabla \cdot (k \nabla T)$  como cero. Entonces debido a 1.3 tenemos

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \tag{1.11}$$

De la ecuación de estado 1.4 obtenemos:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{DS}{Dt}$$

^ En el caso estático las variables llevarán el subíndice cero.

Utilizando 1.11 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0 \quad 1.12$$

De las ecuaciones 1.6 a 1.8 tenemos (considerando solo términos en  $\epsilon$ ) que la ecuación 1.12 toma la forma:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0 \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{v}_1 \right] = 0 \quad 1.13$$

donde  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0 |_{(\rho_0, \rho_0(x), s_0(x))}$  y análogamente para  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0$ .

Entonces de 1.13 deducimos que:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -c^2(x) \left[ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{v}_1 \right] \quad 1.14$$

donde  $c^2(x) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0 / \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0$  es el cuadrado de la magnitud de la

velocidad de la perturbación acústica en el punto x. Utilizando las ecuaciones 1.5 hasta 1.10 tenemos que 1.1 y 1.2 toman la forma (considerando solo términos en  $\epsilon$  y despreciando los de mayor orden) :

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \quad 1.15$$

y

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = \rho_0 \vec{G}_1 \quad 1.16$$

Despejando  $\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$  de 1.15 y utilizando 1.14 :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad 1.17$$

Si se tiene  $\rho_0 \vec{G}_1 = \nabla V$  para alguna  $V(x, t)$ , entonces definimos el potencial acústico  $U(x, t)$  de tal modo que satisfaga:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{c} \nabla U \quad 1.18$$

y

$$p_1 = -\frac{\partial U}{\partial t} + V \quad 1.19$$

La ecuación 1.17 implica que U debe cumplir:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla U\right) = \frac{\partial V}{\partial t} \quad 1.20$$

Podemos obtener otra ecuación como la anterior tomando la derivada parcial con respecto a t en 1.17 y utilizar 1.16 para obtener que  $p_1$  debe satisfacer la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1\right) = -c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{G}_1 \quad 1.21$$

Por lo tanto las ecuaciones 1.20 y 1.21 nos indican que en el fluido hay un fenómeno de propagación de ondas que llamaremos acústicas. Notemos que en ambas ecuaciones aparece el operador :

$$A\psi = -c^2(x) \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \psi\right)$$

y por lo tanto un estudio de este es de gran importancia para describir el fenómeno acústico que tenemos. Dicho operador recibe el nombre de propagador acústico y es definido (restringiéndonos a la parte espacial):

$$D(A) = L^2(\mathbb{R}^3) \cap \{ v \in L^2(\mathbb{R}^3) / \nabla \cdot (\frac{1}{\rho} \nabla v) \in L^2(\mathbb{R}^3) \}$$

donde

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \{ v : \text{las componentes de } \nabla v \text{ están en } L^2(\mathbb{R}^3) \}$$

En estas definiciones todas las derivadas se toman en el sentido de distribuciones. Con este dominio  $A$  resulta ser autoadjunto.

Pero la importancia del estudio del operador  $A$  va mucho mas lejos como lo muestra el siguiente ejemplo que aparece en una gran cantidad de aplicaciones:

Tomemos el problema :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A v(x, t) &= 0 \quad \text{para } t \geq 0 \\ \text{con condiciones en } t=0: \\ v(x, 0) &= f(x) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{aligned} \right\} \quad 1.22$$

Veamos primero un caso sencillo:  $f_0(x) = f_0$  y  $c^2(x) = c_0^2$  con  $c_0$  y  $f_0$  constantes. Entonces  $A = -\Delta$ . Como  $A \geq 0$  podemos definir por cálculo funcional al operador  $B_0 = \sqrt{A}$ . Sea  $\overline{D(B_0)}$  la clausura de  $D(B_0)$  con respecto a la norma  $\|u\|_{B_0} = \|B_0 u\|_2$  con  $u \in D(B_0)$ . Nótese que es posible esta definición pues al no tener  $A$  eigenvalores es invertivo y por cálculo funcional también el operador  $B_0$ .

Sea  $\mathcal{X}_0$  el espacio de Hilbert definido por:

$$\mathcal{X}_0 = \overline{D(B_0)} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$$

con la norma :

$$\| \langle u, v \rangle \| = \| B_0 u \|_2^2 + \| v \|_2^2$$

Sea

$$A_0 = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } D(A_0) = D(B_0^2) \oplus D(0)$$

donde

$$D(B_0^2) = \{ u \in \overline{D(B_0)} / B_0 u \in D(B_0) \} \quad \text{con } \overline{B_0} \text{ la}$$

extensión de  $B_0$  a  $\overline{D(B_0)}$ . Con esta definición  $A_0$  es autoadjunto.

Entonces las ecuaciones 1.22 pueden ser puestas en la forma:

-----  
 Este problema se puede presentar en acústica si la fuerza externa solo actúa durante un intervalo de tiempo finito y comenzamos a tomar el tiempo ( $t=0$ ) cuando deja de actuar tal fuerza.

$$\left. \begin{aligned} \text{definiendo } \Psi(x,t) &= \langle U(x,t), U_t(x,t) \rangle \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -iA_0 \Psi \\ \Psi(x,0) &= \langle f(x), g(x) \rangle \end{aligned} \right\} \quad 1.23$$

La solución de 1.23 está dada por:

$$\Psi(x,t) = W_0(t) \Psi(x,0) \quad 1.24$$

donde

$$W_0(t) = e^{-iA_0 t} = \begin{pmatrix} \cos B_0 t & -B_0^{-1} \sin B_0 t \\ B_0 \sin B_0 t & \cos B_0 t \end{pmatrix}$$

y las entradas de  $W_0(t)$  están definidas por cálculo funcional.

Tomando la primera componente de 1.23 tenemos que la solución de 1.22 es:

$$U(x,t) = (\cos B_0 t) f + (B_0^{-1} \sin B_0 t) g \quad 1.25$$

En un caso más general que el anterior supongamos que  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones medibles y cumplen con:

$$\left. \begin{aligned} 0 < p_1 \leq f(x) \leq p_2 < \infty \\ 0 < c_1 \leq g(x) \leq c_2 < \infty \end{aligned} \right\} \quad 1.26$$

Utilizando ideas parecidas al caso anterior ^ la solución al problema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + AU &= 0 \\ U(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right\} \quad 1.27$$

está dada por:

$$U(x,t) = (\cos B_0 t) f + B_0^{-1} (\sin B_0 t) g \quad 1.28$$

donde  $B_0 = \sqrt{H}$  y  $H$  es a su vez el operador autoadjunto asociado a la clausura de la forma cuadrática:

$$\mathfrak{f}(f,g) = (f, Ag)_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^1} f \overline{Ag} \, c^{-1} \bar{r}^{-1} dx \quad \text{con } f \text{ y } g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1).$$

El ejemplo expuesto muestra como las soluciones a un problema tan importante quedan en términos de operadores que están

^ En el ejemplo dado por 1.26 debe definirse un producto escalar en  $L_2(\mathbb{R}^1)$  dado por:  $(f,g)_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^1} f \bar{g} \, c^{-1} \bar{r}^{-1} dx$  con lo que se

garantiza la hermiticidad de  $A$ . La norma  $\|f\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{(f,f)_{\mathcal{L}^2}}$  es equivalente a la tradicional en  $L^2(\mathbb{R}^1)$  en vista de 1.26

estrechamente ligados al operador A (propagador acústico) por medio de cálculo funcional. Entonces es de esperarse que el estudio espectral de este operador nos llevará a conocer propiedades de las soluciones.

Este trabajo está centrado en el estudio de la ausencia de los eigenvalores positivos del propagador acústico en el caso de una guía de ondas deformada donde se tiene densidad de masa constante y por lo cual  $A = -c^2(x,y)\Delta$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $n=2$  es el caso físico) y la coordenada "y" está sobre el eje de la guía de ondas. Se dan condiciones sobre la velocidad de propagación  $c(x,y)$  con respecto a la velocidad de propagación  $c(y)$  en una guía de ondas perfecta para que el propagador acústico no tenga eigenvalores positivos.

Esto se hace a través de los teoremas principales A y B que se presentan en los capítulos III y IV respectivamente. En cada uno de estos teoremas se dan condiciones considerablemente distintas sobre  $c(x,y)$  y  $c(y)$ , lo que lleva a técnicas diferentes.

Con el fin de que este trabajo sea lo más autocontenido posible, en el capítulo I se hace la exposición sobre los elementos del Análisis Funcional utilizados en los capítulos II, III y IV. Se dan definiciones y propiedades importantes de operadores acotados y no acotados así como de los adjuntos de estos; propiedades de los proyectores ortogonales en un espacio de Hilbert; operadores compactos; se expone en detalle la construcción de la medida compleja asociada a una función a valores complejos de variación acotada con el fin de darle un contexto adecuado al teorema espectral que también se presenta aquí así como parte de su demostración y algunos teoremas sobre propiedades espectrales de operadores autoadjuntos basados en este teorema. Después se presenta un teorema que nos proporciona un entendimiento adecuado del cálculo funcional y por último la definición y propiedades de los proyectores ortogonales  $P_1$  y  $P_2$  asociados a un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert. Algunas propiedades de los temas mencionados son demostradas y para otras más elaboradas se menciona la referencia donde se puede encontrar la demostración.

En el capítulo II se obtiene el potencial de Wigner-Von Neumann, el cual nos demuestra que es posible tener un operador hamiltoniano en mecánica cuántica donde el potencial tiende a cero en  $\infty$  y tal que tenga un eigenvalor positivo asociado a una eigenfunción en  $L^2(\mathbb{R}^1)$ . Se presenta una discusión de la interpretación física de este hecho. A partir de este potencial se construye un ejemplo para el caso acústico de un propagador que tenga un eigenvalor positivo. También se presentan varias técnicas generales de como construir operadores tipo Schrodinger que tengan eigenvalores positivos. Esto último es tomado de [E].

El capítulo III está totalmente dedicado a la demostración del teorema principal A. La técnica de esta demostración está centrada en utilizar el principio del límite absorbente expuesto en el lema del capítulo III. Para plantear el problema en el contexto deseado se utiliza transformada de Fourier así como el teorema espectral. En la parte final de la demostración se utiliza un teorema de continuación única que se tiene en uno de los apéndices del capítulo.

En el capítulo IV se demuestra el teorema principal B. En este caso la técnica está diseñada para utilizar el teorema del virial

y con esto obtener la estimación de Mourre para un operador adecuadamente definido. Para esto se utilizan los proyectores  $P_+$  y  $P_-$  asociados a un operador que se obtiene en el capítulo. Se utilizan propiedades de los proyectores ortogonales, el teorema espectral, cálculo funcional, propiedades de operadores compactos y el teorema de Rellich. Al obtener la estimación de Mourre se utiliza el trabajo de extensión única citado en el capítulo III.

La finalidad para la cual se presentan los apéndices a los capítulos III y IV es para demostrar algunas propiedades que se presentan en estos capítulos que por su longitud no sería adecuado presentarlas dentro de estos. También se presentan en los apéndices algunos de los teoremas que se utilizan y que son conocidos en la literatura.

Posteriormente se presentan algunas observaciones a manera de conclusión.

CAPITULO I  
=====

I.1 Operadores  
I.1.1 Operadores acotados

Def D-1 Sean X y Y dos espacios normados. Una transformación lineal  $T: X \rightarrow Y$  es acotada si y solo si  $\exists c \in \mathbb{R} \ni$

$$\|Tx\|_y \leq c \|x\|_x \quad \forall x \in X \quad I.1$$

Si Y es de dimensión finita entonces todo operador lineal es acotado. La linealidad de T implica el siguiente teorema:

Teo. I.1 Sean T, X y Y como en la anterior definición, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) T es acotado
- (b) T es continuo en el cero
- (c) T es continuo en todo elemento de X

El conjunto de operadores acotados de X en Y será denotado por  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Este conjunto es un espacio normado con la norma definida como el infimo de los números que cumplen con I.1

Además del teorema I.1 existe una forma de caracterizar a los operadores acotados cuando X y Y son espacios de Banach. Para ello introduciremos la siguiente definición.

Def D-2 Al subconjunto de  $X \times Y$  dado por  $\Gamma(T) = \{ \langle x, y \rangle / y = Tx \}$  lo llamaremos la gráfica de T.

$\Gamma(T)$  es un subespacio de  $X \times Y$  donde en este se definen las operaciones: (a)  $\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$   
(b)  $\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, \alpha y \rangle$ .

De hecho, si en X y Y tenemos definidos productos escalares podemos definir otro en  $X \times Y$  dado por:

$$\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$$

$X \times Y$  será un espacio normado con  $\| \langle x, y \rangle \| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ .

I.1.2 Operadores densamente definidos.

Def D-3 Un operador lineal  $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$  con  $\overline{D(T)} = X$ ; con tanto X como Y normados, se dice que es cerrado  $\Leftrightarrow \Gamma(T)$  es cerrado en la topología inducida por la norma en  $X \times Y$ .

Nótese que T es cerrado  $\Leftrightarrow$  (al tener  $\begin{matrix} x_n \rightarrow x \\ Tx_n \rightarrow y \end{matrix}$  entonces  $x \in D(T)$  y  $y = Tx$ ) Como una consecuencia del teorema del mapeo abierto ( Ver [R1] ) tenemos:

Teo. I.2 (teorema de la gráfica cerrada). Si X y Y son dos espacios de Banach,  $T: X \rightarrow Y$  lineal, entonces T es acotado  $\Leftrightarrow T$  es cerrado.

En muchas aplicaciones en física tanto X como Y es necesario que sean tomados como espacios de Hilbert (la letra X con posibles subíndices será reservada para tales espacios). Un

hecho relevante radica en que existen operadores en una gran cantidad de aplicaciones que no pueden ser definidos en todo el espacio y que no son acotados en su dominio de definición. Por ejemplo si tomamos  $X=Y=L^2(\mathbb{R})$  y a  $T$  como el hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional se tiene  $T = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2$ . Este operador no puede ser definido en todo  $L^2(\mathbb{R})$  y además no es acotado, pues como es conocido, las funciones de Hermite  $\psi_n$  (que están en  $L^2(\mathbb{R})$ ) son eigenfunciones de  $T$  y se tiene  $T\psi_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\psi_n$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces  $\|T\psi_n\|/\|\psi_n\| = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  lo cual no es acotado. Por tal razón consideraremos operadores definidos en subconjuntos de  $X$ , los cuales en general se toman densos. En el ejemplo expuesto se puede tomar  $D(T) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ , aunque esta no es la única elección.

Además el teorema de Hollinger-Toeplitz (ver [R1]) nos indica que no siempre es posible conciliar el que  $T$  sea definido en todo  $X$  y que sea acotado.

Teo. I-3 Sea  $T: X \rightarrow X$  lineal, si  $T$  cumple con  $(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in D(T)$  (i.e.  $T$  es hermitiano) I-2 entonces  $T$  es acotado.

En lo siguiente  $X$  y  $Y$  denotarán espacios con producto interno. Def D-4 Sea  $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$  (no necesariamente lineal) con  $D(T) = X$ . Definamos un operador  $T: D(T) \subset Y \rightarrow X$  donde  $y \in D(T) \iff \exists \{x \in X\}$   $(Tx, y) = (x, T y) \quad \forall x \in D(T)$ . En tal caso  $\{y \in Y\}$  es llamado el adjunto de  $T$ .

Nótese que  $D(T)$  es un espacio vectorial y  $T$  es univaluado (por ser  $D(T)$  denso en  $X$ ) y además lineal (aunque  $T$  no lo sea). También por la continuidad del producto escalar  $T$  es cerrado.

$T$  tiene las siguientes propiedades (ver [B]). Teo. I-4. Sea  $T$  como en la anterior definición y supongamos que  $T$  existe y es densamente definido, entonces:

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$$

En todo lo siguiente de este trabajo supondremos que los operadores son lineales

Def D-5 Tomemos  $T_1$  y  $T_2$  operadores densamente definidos de  $X$  en  $Y$ , entonces decimos que  $T_1$  extiende a  $T_2$ , lo que denotamos por  $T_1 \subset T_2 \iff D(T_1) \subset D(T_2)$  y  $T_1 x = T_2 x \quad \forall x \in D(T_1)$ . Esto es equivalente a decir que  $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$ .

Proposición P-1. Tomemos  $T_1$  y  $T_2$  densamente definidos de  $X$  en  $Y$ , entonces:

$$(a) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

$$(b) \quad \text{Si } T_1 \subset T_2 \Rightarrow T_1^* \subset T_2^*$$

$$(c) \quad T_1^* + T_2^* \subset (T_1 + T_2)^* \quad \text{con} \quad D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$$

$$(d) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (T + \alpha)^* = T^* + \alpha$$

Proposición P-2. Si  $T: D(T) \subset X_1 \rightarrow X_2$  densamente definido y  $T$  admite una cerradura  $\hat{T}$ , entonces:

-----  
 $\hat{T}$  Decimos que  $T$  es cerrable o admite una cerradura cuando  $\exists A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  cerrado  $\ni T \subset A$ . La cerradura de  $T$  se define como el operador lineal que  $\hat{T}$  que cumple con  $\Gamma(\hat{T}) = \overline{\Gamma(T)}$ .  $\hat{T}$  existe si  $T$  es cerrable.

$$(a) \quad (\bar{T})' = T'$$

$$(b) \quad \bar{T} = (T')'$$

Si T es cerrado entonces  $T = \bar{T} = T''$

Proposición P-3 Si  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  entonces  $D(A') = Y$ .  $A' \in \mathcal{B}(Y, X)$  y  $\|A'\| = \|A\|$ .

Def D-6  $T: D(T) \subset X \rightarrow X$  densamente definido es autoadjunto  $\Leftrightarrow T = T'$   
 Nótese que T es autoadjunto  $\Leftrightarrow T$  es hermitiano y  $D(T') \subset D(T)$ .

Un criterio básico para saber cuando un operador es autoadjunto nos lo proporciona el siguiente teorema:

Teo. I-5 Sea  $T: D(T) \subset X \rightarrow X$  un operador simétrico con  $\overline{D(T)} = X$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es autoadjunto

(b) T es cerrado y  $\text{Ker}(T \mp i) = \{0\}$

(c)  $\text{Ran}(T \mp i) = X$

La importancia de trabajar con operadores autoadjuntos radica en su aparición en física y en sus propiedades matemáticas entre las cuales resultará de gran importancia para nosotros el teorema espectral válido para tales operadores.

Posteriormente necesitaremos de la siguiente definición y de sus propiedades:

Def D-7 Sea  $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ . T es positivo (denotado por  $T \geq 0$ ) si  $\forall x \in D(T)$   $(Tx, x) \geq 0$ . Si  $(Tx, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  se dice que T es positivo definido. Si  $T_1, T_2$  son dos operadores densamente definidos en X,  $T_1 \geq T_2 \Leftrightarrow T_1 - T_2 \geq 0$ .

Si T es positivo también es hermitiano, siendo esto una consecuencia de que  $(T(x+y), x+y)$  y  $(T(x+iy), x+iy)$  son reales positivos.

Como todo operador autoadjunto es cerrado (T siempre es cerrado si T es densamente definido) entonces por el teorema de la gráfica cerrada y la proposición: todo operador positivo cuyo dominio es X, es acotado.

Teo. I-6 Si  $T_1, T_2: X \rightarrow X$  son dos operadores positivos que conmutan, entonces  $T_1 T_2$  es positivo.

### I.1.3 Proyectores

Un hecho relevante en la teoría de espacios de Hilbert radica en la descomposición de este dada por el siguiente teorema.

Teo I.7 Sea M un subespacio cerrado de X, entonces dada  $x \in X \exists m \in M, m' \in M'$  únicos  $x = m + m'$ .

M se dice que es la suma directa de M y M' denotado como  $X = M \oplus M'$

Nótese que si M es cualquier subespacio de X se tiene  $X = M \oplus M'$  pues  $M' = M^\perp$ .

El teorema I-7 nos permite hacer la siguiente definición:

Def D-8 Tomemos M un subespacio cerrado de X. El proyector ortogonal sobre M es definido por  $P: X \rightarrow M$  con  $Px = m$  si  $x = m + m'$ . P es lineal, acotado y de norma uno si  $M \neq \{0\}$ ,  $\text{Ran} P = M$  y además P es idempotente ( $P^2 = PP = P$ ).

Como  $\forall x \in X, (Px, x) = (Px, Px) \geq 0$  entonces todos los proyectores ortogonales son positivos y por lo tanto autoadjuntos.

Proposición P<sub>1</sub>-4 Dado  $T: X \rightarrow X, T$  es proyector  $\Leftrightarrow T$  es idempotente y autoadjunto.

Def D-9 Tomemos dos proyectores ortogonales  $P_1$  y  $P_2$  sobre los subespacios  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente. Diremos que  $P_1$  es ortogonal a  $P_2$  denotado por  $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow M_1 \perp M_2$  (i.e.  $(m_1, m_2) = 0 \forall m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ ).

Utilizando las propiedades de los proyectores tenemos el siguiente teorema:

Teo. I-8 Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos proyectores ortogonales sobre  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente. entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $M_1 \perp M_2$
- (b)  $P_1 P_2 = 0$
- (c)  $P_2 P_1 = 0$
- (d)  $P_1(M_2) = \{y / y = P_1 x, x \in M_2\} = \{0\}$
- (e)  $P_2(M_1) = \{0\}$

Es interesante conocer cuando la composición, suma y resta de proyectores es también un proyector. Esta información la tenemos de las siguientes propiedades:

Teo. I-9 Sean  $P_1$  y  $P_2$  como en el teorema I-8, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $P_1 = P_2$
- (b)  $\|P_1 x\| \leq \|P_2 x\| \forall x \in X$
- (c)  $M_1 \subset M_2$
- (d)  $P_1 P_2 = P_1$
- (e)  $P_1 P_2 = P_2$

Teo. I-10 Si  $P_1$  y  $P_2$  son dos proyectores como en I-8:

(a)  $P_1 P_2$  es un proyector ortogonal  $\Leftrightarrow P_1$  y  $P_2$  conmutan. En tal caso  $P_1 P_2$  es el proyector ortogonal sobre el subespacio  $M_1 \cap M_2$ .

(b)  $P_1 - P_2$  es un proyector ortogonal  $\Leftrightarrow P_1 \geq P_2$ . En tal caso  $P_1 - P_2$  es un proyector ortogonal en  $M_1 \cap M_2$ .

(c)  $P_1 + P_2$  es un proyector ortogonal  $\Leftrightarrow P_1 \perp P_2$ . En tal caso  $P_1 + P_2$  es un proyector ortogonal sobre  $M_1 + M_2 = \overline{\langle M_1 \cup M_2 \rangle}$ , donde  $M_1 + M_2 = \{x / x = m_1 + m_2, m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$  y  $\langle M_1 \cup M_2 \rangle$  es el mínimo subespacio cerrado que contiene a  $M_1 \cup M_2$ ; este subespacio coincide con la cerradura topológica de  $\langle M_1 \cup M_2 \rangle$ .

Este teorema se puede probar con la ayuda de P<sub>1</sub>-4 y el teorema I-9.

#### I.1.4 Operadores compactos.

Tomemos  $X$  y  $Y$  como dos espacios de Banach.

Def D-10. Sea  $T: X \rightarrow Y$ .  $T$  se dice que es compacto  $\Leftrightarrow T$  mapea subconjuntos acotados de  $X$  en conjuntos relativamente

compactos de  $Y$ . O sea  $\overline{T(A)}$  es compacto con  $A \subset X$  acotado

Se puede establecer que  $T$  es compacto  $\Leftrightarrow$  para toda sucesión acotada  $\{x_n\} \subset X$ ,  $\{Tx_n\}$  tiene una subsucesión convergente.

Como una consecuencia de que un operador definido en  $X$  es acotado si y solo si mapea conjuntos acotados de  $X$  en acotados de  $Y$  tenemos que si  $T$  es compacto entonces es continuo. La implicación inversa es cierta si el rango de  $T$  es finito dimensional (pues en cada espacio de dimensión finita un conjunto es compacto  $\Leftrightarrow$  es cerrado y acotado).

Entonces si  $X$  y  $Y$  son de dimensión finita todos los operadores son compactos.

Si  $T_1$  y  $T_2$  son compactos entonces  $\alpha T_1 + \beta T_2$  es compacto  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si  $T$  es compacto y  $B$  acotado entonces  $TB$  y  $BT$  son compactos. Mas aún, si  $T = \lim T_n$  (en la topología inducida por la norma de  $\mathcal{B}(X, Y)$ , la cual llamaremos uniforme) y los  $T_n$  son compactos, entonces  $T$  también lo es.

Algo que utilizaremos mas adelante es el siguiente :

Teo. I-11 Sea  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  compacto, entonces :

(a) Existen operadores  $T_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  con  $\text{Ran } T_n$  de dimensión finita para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T = \lim T_n$  (en la topología uniforme).

(b) Existen dos conjuntos ortonormales (no necesariamente completos) de  $\mathcal{H}$ ,  $\{\psi_n\}$ ,  $\{\phi_n\}$  y números reales positivos  $\{\lambda_n\} \ni Tx = \sum \lambda_n (\psi_n, x) \phi_n$  (en la topología uniforme).

## I.2 Integral de Radon-Stieltjes

### I.2.1 Funciones de variación acotada

Para construir este tipo de integral necesitamos el conocimiento de las funciones de variación acotada.

Denotemos como  $I$  a cualquier intervalo de la forma  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$  donde  $-\infty \leq \alpha, \beta \leq \infty$ . Tanto  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser  $\pm\infty$  para tener posteriormente una notación uniforme. En lo siguiente  $D$  denotará cualquier colección finita de intervalos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ; los cuales son de la forma  $\Delta_j = [\alpha_j, \beta_j]$   $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  y además no tienen puntos en común.

Tomemos cualquier función  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ . Resultará importante fijarnos en las cantidades  $V_D(f, I) = \sum_{\Delta \in D} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|$  donde  $D$  es una colección de intervalos ya descrita.

Si la cantidad  $V(f, I) = \sup\{V_D(f, I) / D \text{ es cualquier colección finita de intervalos } \Delta_n\} < \infty$ , esta es llamada la variación de  $f$  en el intervalo  $I$  y  $f$  es una función de variación acotada. Si  $I = \mathbb{R}$ ,  $V(f, \mathbb{R})$  será denotada por  $V(f)$ .

Si  $I$  no es acotada existe otra manera de calcular la variación de una función de variación acotada que es la siguiente:

$D'$  denotará la colección de intervalos contenidos en  $I$  de la forma  $\Delta'_n = [\alpha_n, \beta_n]$  donde  $-\infty \leq \alpha_n, \beta_n \leq \infty$  que no tienen puntos interiores en común; y definiremos  $V_{D'}(f, I) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(\beta_n) - f(\alpha_n)|$  con  $\Delta'_n = [\alpha_n, \beta_n]$

Proposición P-5  $V(f, I) = \sup\{V_{D'}(f, I) / D' \text{ es una colección ya descrita}\}$ .

Prueba:

(a) Si  $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots\}$  es una colección del tipo  $D'$  con los intervalos finitos, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \leq V(f, I)$  con  $\Delta_k = [\alpha_k, \beta_k]$  de longitud finita.

(b) Tomemos  $\{\Delta'_1, \Delta'_2, \dots\}$  cualquier colección del tipo  $D'$ . Ahora, cualquier intervalo  $\Delta'_n$  puede ser visto como la unión numerable de intervalos cerrados finitos sin puntos interiores en común:

$\Delta'_n = \cup \Delta_{nk}$  con  $\Delta_{nk}$  finitos. Entonces si  $\Delta'_n = [\alpha'_n, \beta'_n]$

y  $\Delta_{nk} = [\alpha_{nk}, \beta_{nk}]$  tenemos  $f(\beta'_n) - f(\alpha'_n) = \sum_{k=1}^{\infty} [f(\beta_{nk}) - f(\alpha_{nk})]$

$$\Rightarrow |f(\beta'_n) - f(\alpha'_n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_{nk}) - f(\alpha_{nk})|$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f(\beta'_n) - f(\alpha'_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_{nk}) - f(\alpha_{nk})|$$

donde esta última suma es del tipo descrito en (a) y por lo tanto menor o igual a  $V(f, I)$ .///

Proposición P-6 Si  $f, g, f$  son funciones arbitrarias de  $I$  en  $\mathbb{C}$ , tenemos:

$$(a) \quad V(\operatorname{Re} f, I) \leq V(f, I) \quad (b) \quad V(\operatorname{Im} f, I) \leq V(f, I)$$

$$(c) V(\alpha f, I) = |\alpha| V(f, I) \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (d) V(f_1 + f_2, I) \leq V(f_1, I) + V(f_2, I)$$

$$(e) \text{ si } I \subset I' \Rightarrow V(f, I) \leq V(f, I')$$

Una consecuencia interesante de esta proposición es que el conjunto de funciones  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  de variación acotada denotado por  $\mathcal{B}(I)$  es un espacio vectorial normado donde la norma de una función es justamente su variación.

Teo. I-12 Si  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  entonces  $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$  donde cada  $f_i$  es una función monótona no decreciente de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Prueba:

Es suficiente probarlo para  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $\gamma_1 = V(\gamma, I)$  donde  $I_x = (-\infty, x]$ .  $\gamma_1$  es también de variación acotada y utilizando la proposición P-6 tenemos que  $\gamma_2 = \gamma_1 - \gamma$  también lo es. ///

Este teorema da lugar a la siguiente proposición:

Proposición P-7 Si  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  los siguientes límites existen:

$$(a) f(x \downarrow 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon)$$

$$(b) f(x \uparrow \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Esto indica que todos los saltos de una  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  son finitos (además solo existe una cantidad numerable de saltos pues esto sucede para cualquier función monótona no decreciente).

Mas adelante utilizaremos el siguiente espacio:

$$\mathcal{B}^0 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / f \text{ es continua por la derecha y } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

Nótese que si  $f \in \mathcal{B}^0$  y  $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ , entonces  $f_i \in \mathcal{B}^0$ ,  $i=1,2,3,4$  si estas son construidas como en la prueba del teorema I-12. A esta descomposición la llamaremos la resolución canónica de  $f$ .

## I.2.2 Integral de Radon-Stieltjes.

En lo siguiente tomaremos una función  $f \in \mathcal{B}^0$  y construiremos una medida en  $\mathbb{R}$  con su  $\sigma$ -álgebra respectiva, en la cual hablaremos de funciones medibles e integrables en el sentido usual de teoría de la medida. La importancia que tendrá para nosotros este tipo de integral radica en que nos proporciona un contexto adecuado para el cálculo operacional que utilizaremos mas adelante.

Denotemos por  $\Delta = (\alpha, \beta]$  donde  $\alpha, \beta \in \{-\infty, \infty\} \cup \mathbb{R}$  - - - - - (A)

Sea  $S$  el conjunto de todas las uniones numerables posibles de intervalos de la forma (A). La letra  $B$  con posibles subíndices será reservada para algún elemento de  $S$ .

Aseveración A-1. Los siguientes hechos son válidos:

$$(a) \text{ Si } B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \Rightarrow B^c = \mathbb{R} - B \in S$$

$$(b) \quad S: \{ B_i : i \in \mathbb{N} \} \subset S \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in S$$

$$(c) \quad S: B_1, B_2, \dots, B_n \in S \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n B_i \in S$$

Prueba:

Notemos que si  $\Delta$  es de la forma (A), su complemento es la unión de dos intervalos de esta forma, por lo tanto  $(\Delta)^c \in S$ . Además la intersección finita de intervalos de la forma (A) también es de esta forma, lo cual puede verse así:

Supongamos  $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i]$   $i=1, 2, \dots, n$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  el máximo y mínimo respectivamente de los conjuntos  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  y  $\{\beta_i\}_{i=1}^n$  entonces

$$\bigcap_{i=1}^n \Delta_i = (\alpha, \beta]$$

En base a lo anterior, como  $B^c = \bigcap_{i=1}^n (\Delta_i)^c$  y  $(\Delta_i)^c = \Delta_{i_1} \cup \Delta_{i_2}$  entonces  $B^c = \bigcup_{j=1}^2 \Delta_j$  donde los  $\Delta_j$  son intersecciones finitas de intervalos  $\Delta_{i_1}$  y  $\Delta_{i_2}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) y con esto  $B^c \in S$ .

(b) Tomemos  $\{ B_i : i \in \mathbb{N} \} \subset S$  y supongamos  $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij}$  entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij}$  y esta es una unión numerable de intervalos de la forma (A)  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in S$ .

(c) Sean  $B_1, B_2, \dots, B_n \in S$  con  $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij}$   $i=1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ij} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$  donde los  $\Delta_k$  son intersecciones finitas de intervalos  $\Delta_{ij}$  y por lo tanto  $\bigcap_{i=1}^n B_i \in S$  //

Nótese que (a) no necesariamente es válido si se toman uniones infinitas numerables, como lo muestra el ejemplo:

si  $\Delta_i = (-\infty, \frac{1}{i}] \Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i = (-\infty, 0) \Rightarrow B^c = [0, \infty)$ , el cual no está en  $S$ .

También (c) no es válido si  $\{ B_i \}$  es infinita numerable como lo señala el ejemplo:

$$B_i = (-\frac{1}{i}, \infty] \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = [0, \infty) \notin S$$

Denotemos por  $\bar{S}$  al conjunto de todos los complementos de elementos de  $S$ .

Aseveración A-2. Todos los abiertos de  $\mathbb{R}$  están en  $S$ .

Prueba:

Como todo abierto de  $\mathbb{R}$  es unión numerable de intervalos abiertos y estos son de la forma (A) se tiene el resultado. //

Notese que  $\emptyset \notin S$  (pues  $\emptyset = (\alpha, \alpha]$   $\alpha \in \mathbb{R}$ ) entonces  $S$  no puede ser una  $\sigma$ -álgebra solo porque no es cerrada bajo complementos.

En lo siguiente detallaremos una  $\sigma$ -álgebra para cada  $f \in \mathcal{B}^+$ , que contiene a  $S$  y  $\bar{S}$  junto con todos los borelianos de  $\mathcal{R}$ .

Sea  $f \in \mathcal{B}^+$ , definamos  $m(\Delta) = f(\beta) - f(\alpha)$  con  $\Delta = (\alpha, \beta]$   $-\infty \leq \alpha, \beta < \infty$ . Tomemos  $B \in \mathcal{S}$  y cualquier representación de  $B$  con intervalos de

la forma (A) donde los  $\Delta_i$  son disjuntos:  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$  y

definamos  $m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\Delta_i)$ . Notese que  $m(B)$  es finita pues esta serie converge independientemente de la representación de  $B$ , absolutamente al ser  $f$  de variación acotada en  $\mathcal{R}$ . Además  $m(B)$  no depende de la representación de  $B$ .

Prueba:

Tomemos  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ ,  $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$  dos posibles representaciones de  $B$ . Como

$B = B \cap B = \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j \right) \cap \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \right) = \bigcup_{j,k} (\Delta_j \cap \Delta_k)$  pero los conjuntos  $\Delta_j \cap \Delta_k$  son de la forma (A) y además disjuntos entre sí. Así pues si definimos  $\Delta_{jk} = \Delta_j \cap \Delta_k \Rightarrow B = \bigcup_{j,k} \Delta_{jk}$

Denotemos como  $m(B) = \sum_{j=1}^{\infty} m(\Delta_j)$ ,  $m'(B) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta_k)$

$$y \quad m''(B) = \sum_j \sum_k m(\Delta_{jk}) = \sum_k \sum_j m(\Delta_{jk})$$

pues se tiene convergencia absoluta.

Probaremos que  $m(B) = m'(B)$ .

$$\text{Como } \Delta_j = \Delta_j \cap B = \Delta_j \cap \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_j \cap \Delta_k =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{jk} \quad \text{--- ( * )}$$

esto sugiere probar que:

$$m(\Delta_j) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta_{jk})$$

o esa

$$f(\rho_j) - f(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{\infty} [f(\rho_{jk}) - f(\alpha_{jk})] \quad \text{--- ( ** )}$$

con  $\Delta_j = (\alpha_j, \rho_j]$  y  $\Delta_{jk} = (\alpha_{jk}, \rho_{jk}]$

En efecto, pues al tener una unión disjunta en ( \* ) entonces para la suma en ( \*\* ) cada vez que se tenga  $f(\rho_{jk})$  se tendrá  $f(\alpha_{jk})$  donde  $\rho_{jk} = \alpha_j$  tal que se anulen a excepción de cuando  $\rho_{jk} = \rho_j$  para alguna  $k$ . Como tal suma es absolutamente convergente podemos

$$\text{rearrugarla y tener } \sum_{k=1}^{\infty} [f(\rho_{jk}) - f(\alpha_{jk})] = f(\rho_j) - \lim_{x \rightarrow \alpha_j^+} f(x)$$

como  $f \in \mathcal{B}^+$  tal límite es igual a  $f(\alpha_j)$  comprobando esto a ( \*\* ) por lo tanto  $m(B) = m'(B)$ .

Análogamente se prueba  $m(B) = m''(B)$  y con esto  $m(B) = m''(B)$ . ///

A  $m(B)$  la llamaremos la  $f$ -medida de  $B$ .

Definamos ahora la cantidad  $b(B) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |m \Delta_n| / B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \right\}$

Nótese que  $m(B)$  y  $b(B)$  son funciones  $\sigma$ -aditivas en  $S$  (o sea si

$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i)$ ). Además si  $f$  es real monótona no decreciente  $m(B) = b(B)$ .

Como es de esperarse, al estar  $f \in \beta^+$ , se tiene que  $b(\Delta) = V(f, \Delta)$  donde  $\Delta = (\alpha, \beta)$  y  $\bar{\Delta} = [\alpha, \beta]$ . Esto sugiere llamar a  $b(B)$  la variación de  $f$  en  $B$  (notemos que esto extiende el término de "variación").

Definamos ahora la variación exterior de  $f$  sobre cualquier subconjunto  $E \subset \mathbb{R}$  como:

$$b^*(E) = \inf \{ b(B) / E \subset B \text{ y } B \in S \}$$

Y la variación interior de  $f$  sobre  $E$  como:

$$b_*(E) = \sup \{ b^*(\bar{B}) / \bar{B} \subset E, \bar{B} \in S \}$$

Estas dos funciones tienen las siguientes propiedades:  
Aseveración A-2. Las siguientes igualdades se cumplen:

$$(1a) \quad b^*(B) = b_*(B) \quad \forall B \in S$$

$$(2a) \quad b^*(E_1) \leq b^*(E_2) \quad \text{si } E_1 \subset E_2$$

$$(3a) \quad b^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} b^*(E_i)$$

$$(1b) \quad b_*(\bar{B}) = b^*(B)$$

$$(2b) \quad b_*(E) \leq b^*(E)$$

$$(3b) \quad b_*(E_1) \leq b_*(E_2) \quad \text{si } E_1 \subset E_2$$

$$(4b) \quad b_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} b_*(E_i)$$

prueba:

Solo probaremos (3a) y (3b) pues el resto son inmediatos. Tanto  $b_*$  como  $b^*$  son finitas pues  $b^*(\mathbb{R}) = b(\mathbb{R}) < \infty$  al ser  $f$  de variación acotada.

(3a) Utilizaremos el hecho: Si  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow b(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} b(B_i)$

Sea  $\epsilon > 0$  y definamos  $\delta_n = (\frac{1}{2})^n \epsilon$ . Entonces para cada  $n$ , dada la

$\delta_n \exists B_n$  con  $E_n \subset B_n \Rightarrow b(B_n) \leq b^*(E_n) + \delta_n$  entonces

tenemos  $\sum_{n=1}^{\infty} b(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} b^*(E_n) + \epsilon$

si hacemos

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow b(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b^*(E_n) + \epsilon$$

como  $E_n \subset B, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset B \Rightarrow b^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq b(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b^*(E_n) + \epsilon$   
 y como esto ocurre para toda  $\epsilon$  se tiene el resultado.

(3b) Utilizaremos el hecho:

Si  $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_r(\bar{B}_n) \leq b_*(A)$

Sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta_n = (\frac{1}{2})^n \epsilon$ , entonces  $\exists \bar{B}_n \supset \bar{B}_n \subset E_n$  y

$$b_*(E_n) - \delta_n \leq b^*(\bar{B}_n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_*(E_n) - \sum \delta_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_r(\bar{B}_n) \quad (b^*(\bar{B}_n) = b_*(\bar{B}_n))$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_*(E_n) - \epsilon \leq b_*(\cup_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_n) \leq b_*(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n)$$

pues  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_n \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$

y como esto ocurre  $\forall \epsilon > 0$  se concluye. ///

Definamos  $\mathcal{M}_f = \{E \subset \mathbb{R} / b^*(E) = b_r(E)\}$

Notese que  $\bar{S} \subset \mathcal{M}_f$  de la definición de medida interior. Además como para todos los intervalos de la forma (A) su complemento es la unión de dos intervalos de tal forma y  $\bar{S}$  es cerrado bajo uniones finitas (Aseveración A-1) entonces dichos intervalos están en  $\mathcal{M}_f$ . Por consecuencia todo elemento de  $S$  está en  $\mathcal{M}_f$ . Esto último se ve de la siguiente manera:

Sea  $B \in S$  y tomemos cualquier representación de  $B: B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$

$$\begin{aligned} \text{por (4b) de A-2: } b_r(B) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} b_r(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b^*(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b(\Delta_i) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} |m(\Delta_i)| \end{aligned}$$

entonces como  $b^*(B) = b(B) = \sup \{ \sum_{i=1}^{\infty} |m(\Delta_i)| / B = \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \}$

tenemos  $b_*(B) \geq b^*(B)$  y por (2b) de A-2 se concluye que  $b_*(B) = b^*(B)$ . ///

Quando  $E \in \mathcal{M}_f$  denotaremos  $b^*(E) = b_*(E) = b(E)$ , la cual llamaremos la variación de  $f$  sobre  $E$  (nótese que este nombre está de acuerdo con la anterior forma de llamar a  $b(B)$  pues  $S \subset \mathcal{M}_f$ ).

Ahora,  $\mathcal{M}_f$  tiene la propiedad de que si  $\{E_n\} \subset \mathcal{M}_f$  es una colección disjunta contenida entonces:

$$b_*(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} b_*(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b^*(E_n) \geq b^*(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n)$$

y por (2b) tenemos:

$$b_*(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = b^*(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_f$$

$$\nu \quad b(\cup E_n) = \sum b(E_n)$$

O sea  $M_f$  es cerrada bajo uniones numerables de conjuntos disjuntos y  $b$  es  $\sigma$ -aditiva.

Aseveración A<sub>f</sub>-3.  $M_f$  es una  $\sigma$ -álgebra.

Para probar esta aseveración se utiliza el siguiente criterio:

$$(1) \quad E \in M_f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B_1 \text{ y } B_2 \text{ con } \bar{B}_2 \subset E \subset B_1 \Rightarrow b(B_1 - \bar{B}_2) < \epsilon$$

Prueba del criterio (1):

$$\Rightarrow) \quad E \in M_f \Rightarrow b(E) = h(E) \text{ entonces dada } \epsilon \exists \bar{B}_2 \subset E \subset B_1 \Rightarrow$$

$$b^*(E) + \epsilon/2 > b(B_1) \quad \text{y} \quad b_*(E) - \epsilon/2 < b^*(\bar{B}_2)$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon > b(B_1) - b^*(\bar{B}_2) = b(B_1) - b(\bar{B}_1)$$

Pero como

$$B_1 = (B_1 \cap B_2) \cup \bar{B}_2 \Rightarrow b(B_1) = b(B_1 \cap B_2) + b(\bar{B}_2)$$

entonces

$$b(B_1 - \bar{B}_2) = b(B_1 \cap B_2) = b(B_1) - b(\bar{B}_2) < \epsilon$$

$$\Leftarrow) \quad \text{Tenemos que dada } \epsilon > 0 \exists \bar{B}_2 \subset E \subset B_1 \Rightarrow$$

$$b(B_1 - \bar{B}_2) < \epsilon$$

$$b_*(\bar{B}_2) \leq b_*(E) \leq b_*(B_1)$$

$$b_*(\bar{B}_2) \leq b^*(E) \leq b^*(B_1)$$

$$\Rightarrow \quad b_*(B_1) - b^*(B_1) \leq b_*(E) - b^*(E) \leq b_*(B_2) - b^*(\bar{B}_2)$$

$$\Rightarrow \quad b(\bar{B}_2) - b(B_1) \leq b_*(E) - b^*(E) \leq b(B_1) - b(\bar{B}_2)$$

$$\Rightarrow |b_*(E) - b^*(E)| \leq b(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) < \varepsilon \Rightarrow b_*(E) = b^*(E) \quad \text{///}$$

Probaremos ahora la aseveración A-3

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{M}_f$  es inmediato pues  $\emptyset \in S$   
 (2)  $\mathcal{M}_f$  es cerrada bajo complementos:

$$\text{Sup } E \in \mathcal{M}_f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$$

$$\bar{B}_1 \subset E \subset B_1 \quad \exists \quad b(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) < \varepsilon \quad , \text{ entonces}$$

$$\bar{B}_1 \subset E^c \subset B_2 \quad \text{y como } B_1 - \bar{B}_2 = B_2 - \bar{B}_1 = B_1 \cap B_2$$

$$\Rightarrow b(B_2 - \bar{B}_1) < \varepsilon \rightarrow E^c \in \mathcal{M}_f$$

$$(3) \text{ Supongamos } E_1, E_2 \in \mathcal{M}_f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$$

$$\bar{B}_{11} \subset E_1 \subset B_{11} \quad , \quad \bar{B}_{21} \subset E_2 \subset B_{21} \quad \Rightarrow \quad b(B_{21} - \bar{B}_{11}) < \varepsilon/2$$

$$\text{y } b(B_{11} - \bar{B}_{21}) < \varepsilon \quad , \text{ entonces como}$$

$$\overline{B_{11} \cap B_{21}} = \bar{B}_{12} \cup \bar{B}_{22} \subset E_1 \cup E_2 \subset B_{11} \cup B_{21} \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} H_{\overline{A}} &= (B_{11} \cup B_{21}) - (\overline{B_{12} \cap B_{22}}) = (B_{11} \cup B_{21}) \cap (B_{12} \cap B_{22}) \\ &= B_{21} \cap (B_{11} \cap B_{12}) \cup (B_{11} \cap B_{21}) \cap B_{22} \\ &\subset (B_{11} \cap B_{12}) \cup (B_{21} \cap B_{22}) \end{aligned}$$

$$\text{entonces } b(H) \leq b(B_{11} \cap B_{12}) + b(B_{21} \cap B_{22}) < \varepsilon \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}_f$$

O sea que  $\mathcal{M}_f$  es cerrada bajo uniones finitas y debido a (2) también bajo intersecciones finitas pues  $E_1 \cap E_2 = (E_1 \cup E_2)^c$ , por lo tanto es cerrada bajo diferencias.

Tomemos  $\{E_n\} \subset \mathcal{M}_f$ , entonces si  $E = \cup E_n$ , E también puede ser visto como  $E = \cup F_n$  donde los  $F_n$  pueden ser construidos a partir de los  $E_n$  por uniones y diferencias, entonces  $\{F_n\} \subset \mathcal{M}_f$  y como  $\mathcal{M}_f$  es cerrada bajo uniones numerables de conjuntos disjuntos tenemos  $E \in \mathcal{M}_f$ . ///

Al ser  $\mathcal{M}_f$  una  $\sigma$ -álgebra y contener a los abiertos de  $\mathbb{R}$  entonces contiene a todos los borelianos.

Un hecho inmediato del análisis anterior es dado por:

Aseveración A-4  $b$  es una medida real y finita sobre  $\mathcal{M}_f$ .

Existen otros criterios para saber cuando un conjunto está en  $\mathcal{M}_f$ :

(2)

$$E \in \mathcal{M}_f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \ni \bar{B} \subset E \text{ y } b^*(E - \bar{B}) < \varepsilon$$

(3)

$$E \in \mathcal{M}_f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists E_1 \text{ abierto y } E_2 \text{ cerrado } \ni$$

$$E_2 \subset E \subset E_1 \text{ y } b(E_1 - E_2) < \varepsilon$$

(4)

$$E \in \mathcal{M}_f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists E_1 \text{ con } E_2 \text{ cerrado } \ni E_1 \subset E \text{ y } b^*(E - E_1) < \varepsilon$$

(5)

$$E \in \mathcal{M}_f \Leftrightarrow \exists E_1 \text{ y } E_2 \text{ borelianos } \ni E_1 \subset E \subset E_2 \text{ y}$$

$$b(E_1) = b(E_2)$$

Definiremos ahora una medida compleja para  $f \in \beta^c$ .  
Tomemos  $f \in \rho^c$  y su resolución canónica:

$$f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4).$$

Una propiedad que nos resultará útil es la siguiente:  
Si  $b_i(B)$  denota la variación de cada  $f_i$  sobre  $B$  tenemos:

$$\frac{1}{2} (b_1(A) + b_2(A) + b_3(A) + b_4(A)) \leq b(A) \leq$$

$$\leq b_1(A) + b_2(A) + b_3(A) + b_4(A)$$

lo cual indica que  $b(B)$  es pequeño  $\Leftrightarrow b(B)$  también es pequeño para cada  $i = 1, 2, 3, 4$ . Usando el criterio (1) lo anterior da lugar al siguiente hecho:

Aseveración A-5 
$$M_f = \prod_{i=1}^4 M_{f_i}$$

Esto nos permite hacer la siguiente e importante definición:

Def D<sub>1</sub>-11 Sea  $E \in \mathcal{M}_f$ . definamos la  $f$ - medida de  $E$  como

$$m(E) = [ b_1(E) + b_2(E) ] + i [ b_3(E) + b_4(E) ]$$

Si  $f$  es a valores reales y monótona creciente tenemos que si  $\{p\}$  es un singulete :

$$\begin{aligned} m(\{p\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m( (p-1/n, p] ) = \lim_{n \rightarrow \infty} b( (p-1/n, p] ) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ( f(p) - f(p-1/n) ) = f(p) - f(p-0) = \text{salto de } f \text{ en } p = \\ &= \sigma(p). \end{aligned}$$

Si  $f$  es cualquier función en  $\mathcal{D}^c$  tenemos que :

$$\begin{aligned} m(\{p\}) &= [ \sigma_1(p) + \sigma_2(p) ] + i [ \sigma_3(p) - \sigma_4(p) ] = \sigma(p) = \\ &= \text{salto de } f \text{ en } p \end{aligned}$$

Como en la teoría general de integración, una vez que tenemos la medida podemos hablar de funciones medibles y de la integral de Lebesgue de estas funciones.

Tomemos  $F(\lambda)$  medible y acotada casi dondequiera, esto es:

$$\exists M > 0 \Rightarrow | \operatorname{Re}(F) | \leq M \quad \text{y} \quad | \operatorname{Im}(F) | \leq M \quad \text{a.e.}$$

definamos  $C_k^{(n)} = M(2k-n)/n$  con  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\text{y} \quad C_j^{(n)} = C_j^{(n)} + i C_k^{(n)} \quad \text{con } j, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Sea  $E_{j,k}^{(n)} = \{ \lambda \in \mathbb{R} / C_j^{(n)} \leq \operatorname{Re}(F) \leq C_{j+1}^{(n)}, C_k^{(n)} \leq \operatorname{Im}(F) \leq C_{k+1}^{(n)} \}$

Como el límite de  $\sum_{j,k=0}^{n-1} C_{j,k}^{(n)} m(E_{j,k}^{(n)})$  cuando  $n \rightarrow \infty$  siempre existe, podemos definir la integral de Radon Stieltjes de  $F$  sobre  $\mathbb{R}$  como :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} C_{j,k}^{(n)} m(E_{j,k}^{(n)})$$

También es útil definir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d |f(\lambda)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} C_{j,k}^{(n)} b(E_{j,k}^{(n)})$$

De hecho este límite coincide con la integral de Radon-Stieltjes de  $F(\lambda)$  con respecto a  $\sigma(\lambda)$  donde esta función es definida como la variación de  $f(\lambda)$  en el intervalo  $(-\infty, \lambda)$ .

Si  $F(\lambda)$  es cualquier función medible definimos  $F_M = F \chi_M$ , donde

$$\chi_M = \{ \lambda \in \mathbb{R} / |\operatorname{Re}(F)| \leq M \text{ y } |\operatorname{Im}(F)| \leq M \},$$

entonces  $\int_{-\infty}^{\infty} F_M(\lambda) d|f(\lambda)|$  existe para toda  $M$ . Si el conjunto

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\lambda) d|f(\lambda)| / n \in \mathbb{R} \right\}$$

es acotado, entonces las cantidades  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_M(\lambda) d|f(\lambda)|$  y

$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_M(\lambda) d|f(\lambda)|$  siempre existen y son definidas

como  $\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d|f(\lambda)|$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d|f(\lambda)|$

respectivamente.

Si  $E \in \mathcal{M}_f$  definimos  $\int_E F d|f(\lambda)| = \int_E F \chi_E d|f(\lambda)|$  si la cantidad de la derecha está bien definida.

Lema L-1 La integral de Radon-Stieltjes tiene las siguientes propiedades:

(1)  $\left| \int_E F(\lambda) d|f(\lambda)| \right| \leq \int_E |F(\lambda)| d|f(\lambda)|$

(2) si  $|F(\lambda)| \leq M \Rightarrow \int_E |F(\lambda)| d|f(\lambda)| \leq M b(E)$

(3) si  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \int_E F(\lambda) d|f(\lambda)| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} F(\lambda) d|f(\lambda)|$

(4)  $\int_E F(\lambda) d|f(\lambda)| + \int_E G(\lambda) d|f(\lambda)| = \int_E [F(\lambda) + G(\lambda)] d|f(\lambda)|$

donde la existencia de las integrales en el miembro izquierdo implica la existencia de la integral de la derecha.

(5)  $\alpha \int_E F(\lambda) d|f(\lambda)| = \int_E \alpha F(\lambda) d|f(\lambda)|$  la existencia en la izquierda implica la de la derecha.

(6) Teorema de convergencia dominada: Si  $\{F_n(\lambda)\}_n$  es una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\lambda) = F(\lambda)$ ,  $|F_n(\lambda)| \leq g(\lambda)$  casi

dondequiera con respecto a la medida asociada a la función  $f \in \mathcal{B}^*$  y  $\phi(\lambda)$  es  $f$ -integrable, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(\lambda) dF(\lambda) = \int_E F(\lambda) dF(\lambda)$$

(7) Si  $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$  (funciones en  $\mathcal{B}^*$ ), entonces

$$\int_E F(\lambda) dF_1(\lambda) + \int_E F(\lambda) dF_2(\lambda) = \int_E F(\lambda) dF(\lambda)$$

donde la existencia de las integrales en la izquierda implica la de la derecha.

(8) Si  $f_2(\lambda) = \alpha f_1(\lambda)$  (funciones en  $\mathcal{B}^*$ ) entonces,

$$\alpha \int_E F(\lambda) dF_1(\lambda) = \int_E F(\lambda) dF_2(\lambda)$$

la existencia en la izquierda implica la de la derecha.

(9) Si  $f = [f_1 - f_2] + i[f_3 - f_4]$  es la resolución canónica de  $f \in \mathcal{B}^*$  entonces:

$$\int_E F(\lambda) dF(\lambda) = \left[ \int_E F(\lambda) dF_1(\lambda) - \int_E F(\lambda) dF_2(\lambda) \right] + i \left[ \int_E F(\lambda) dF_3(\lambda) - \int_E F(\lambda) dF_4(\lambda) \right]$$

donde la existencia de las integrales en la derecha implica la de la izquierda y viceversa.

## I.3 Análisis Espectral

### I.3.1 Definiciones

En lo siguiente todos los operadores se tomarán cerrados y densamente definidos.

Sea  $T: D(T) \subset X \rightarrow X$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Denotemos a  $T - \lambda I$  como  $T - \lambda$ . Diremos que  $(T - \lambda)^{-1}$  existe si  $(T - \lambda)$  es inyectivo y por consiguiente  $D((T - \lambda)^{-1}) = \text{Ran}(T - \lambda)$ . Clasifiquemos a  $\lambda$  en alguno de los siguientes conjuntos:

- (1) Si  $(T - \lambda)^{-1}$  existe, es densamente definido y acotado entonces  $\lambda$  está en la resolvente de  $T$  denotada por  $\rho(T)$ .
- (2) Si no ocurre lo anterior entonces se dice que  $\lambda$  está en el espectro de  $T$  denotado por  $\sigma(T)$ .

- (2a) Si  $(T-\lambda)^{-1}$  existe, es densamente definido y no acotado entonces  $\lambda \in \sigma_c(T)$ . llamado el espectro continuo de T.
- (2b) Si  $(T-\lambda)^{-1}$  existe pero no es densamente definido entonces  $\lambda \in \sigma_r(T)$ , llamado el espectro residual de T.
- (2c) Si  $(T-\lambda)^{-1}$  no existe  $\lambda \in \sigma_p(T)$  llamado el espectro puntual de T. De hecho  $\lambda \in \sigma_p(T) \iff$  es un eigenvalor de T.

Nótese que  $\mathcal{C}$  es la unión disjunta de  $\rho(T)$  y  $\sigma(T)$ , y que a su vez  $\sigma(T)$  lo es de  $\sigma_p(T)$ ,  $\sigma_c(T)$ ,  $\sigma_r(T)$ . Además si  $\mathcal{H}$  es separable  $\sigma_p(T)$  es a lo sumo numerable pues todo subconjunto ortonormal de  $\mathcal{H}$  tiene esta característica.

Si  $\lambda \in \rho(T)$ , denotaremos  $R(\lambda) = R(\lambda, T) = (T-\lambda)^{-1}$ .

Teo. I-13 Sea  $H: D(H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  autoadjunto, entonces :

(a) Si  $u, v$  son eigenvalores de  $H$  asociados a distintas eigenvalores entonces son ortogonales.

(b)  $\sigma_p(H)$  es vacío.

(c)  $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$

(d)  $R(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  (o sea  $D(R(\lambda)) = \mathcal{H} \forall \lambda \in \rho(T)$ )

(e) Si  $\lambda, \mu \in \rho(T)$  entonces  $R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu)$

(f)  $\rho(T)$  es abierto.

(g)  $R(\lambda)$  es analítica en cada subconjunto conexo de  $\rho(T)$

(h)  $\sigma(T)$  es no vacío.

Para la demostración de este teorema ver [R1].

### I.3.2 Familias Espectrales

Tomemos un conjunto de subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , denotados por  $\{M(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{C}}$  tal que :

(a) es no decreciente i.e.  $M(\lambda') \subset M(\lambda)$  si  $\lambda' \leq \lambda$

-----  
 ^ Aquí  $R(\lambda)$  se ve como una función de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .  $R(\lambda)$  se dice que es analítica en un conjunto conexo abierto  $D$  si  $\forall \lambda_0 \in D$  se tiene que el  $\lim_{|h| \rightarrow 0} [R(\lambda_0+h) - R(\lambda_0)]/h$  existe en la topología uniforme de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  el cual es denotado por  $R'(\lambda_0)$ . Se puede demostrar que  $R(\lambda)$  es analítica en  $\lambda_0 \iff$  tiene asociada una serie de Taylor en alguna vecindad alrededor de  $\lambda_0$ , o sea

$$R(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{R^{(k)}(\lambda_0) (\lambda - \lambda_0)^k}{k!}$$
 en la topología uniforme.

$$(b) \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} M(\lambda) = \{0\}$$

$$(c) \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} M(\lambda)} = X$$

Denotemos como  $M(\lambda+0) = \bigcap_{\mu > \lambda} M(\mu)$  y  $M(\lambda-0) = \overline{\bigcup_{\mu < \lambda} M(\mu)}$

Diremos que  $\{M(\lambda)\}$  es continua por la derecha (izquierda) si  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$   $M(\lambda+0) = M(\lambda)$  ( $M(\lambda-0) = M(\lambda)$ ). Un hecho interesante es que  $\{M(\lambda+0)\}$  tiene las propiedades (a), (b) y (c) y es continua por la derecha independientemente de que  $\{M(\lambda)\}$  lo sea.

Las propiedades sobre  $\{M(\lambda)\}$  se traducen en propiedades de los proyectores ortogonales sobre estos subespacios.  $E(\lambda)$  denotará al proyector ortogonal sobre  $M(\lambda)$ . Por el teorema I-9 tenemos de (a) que:

$$(1) E(\lambda') \leq E(\lambda'') \text{ si } \lambda' \leq \lambda'' \text{ o } E(\lambda')E(\lambda'') = E(\lambda'')E(\lambda') = E(\min(\lambda', \lambda''))$$

de (b) y (c) tenemos:

$$(2) \text{s-lim}_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda) = 0 \quad \text{y} \quad \text{s-lim}_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda) = I$$

Nótese que (1) y (2) son equivalentes a (a), (b) y (c).

Una familia de proyectores ortogonales que satisfice (1) y (2) es llamada una resolución de la identidad o familia espectral.

Debido a que el proyector ortogonal sobre  $M(\lambda \neq 0)$ , denotado por  $E(\lambda \neq 0)$  está dado por:  $E(\lambda \neq 0) = \text{s-lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} E(\lambda \pm \epsilon)$  entonces  $\{M(\lambda)\}$  es

continua por la derecha (izquierda) si y solo si  $\{E(\lambda)\}$  es continua por la derecha (izquierda).

Se conviene en tomar  $\{E(\lambda)\}$  continua por la derecha. Nótese que  $\{E(\lambda \neq 0)\}$  siempre es continua por la derecha pues  $\{M(\lambda \neq 0)\}$  lo es.

La familia  $\{E(\lambda)\}$  es acotada por abajo si  $\exists \mu \neq 0$   $E(\mu) = 0$  (y por lo tanto  $E(\lambda) = 0 \forall \lambda < \mu$  por (1)). Definimos en tal caso como la cota inferior de  $\{E(\lambda)\}$  al  $\sup\{\mu \in \mathbb{R} / E(\mu) = 0\}$ . Correspondientemente la cota superior de  $\{E(\lambda)\}$  (si es acotada por arriba) es el  $\inf\{\mu \in \mathbb{R} / E(\mu) = I\}$ . Como  $\{E(\lambda)\}$  es continua por la derecha  $E(\sigma) = I$  si  $\sigma$  es la cota superior de la familia.

Si un punto  $\alpha$  es tal que  $E(\alpha + \epsilon) = E(\alpha - \epsilon)$  para alguna  $\epsilon > 0$ , diremos que  $\alpha$  es un punto de constancia de  $\{E(\lambda)\}$ . El conjunto de números que no son puntos de constancia lo llamaremos el soporte de  $\{E(\lambda)\}$  denotado por  $\Sigma$ . Entonces  $\{E(\lambda)\}$  es acotado por arriba o abajo si  $\Sigma$  lo es (correspondientemente) como una consecuencia de (2).

Un hecho relevante es el siguiente:  $\forall u \in X$  la función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$  dada por  $f(\lambda) = (E(\lambda)u, u)$  es monótona no decreciente y por el teorema I-9 y la continuidad del producto escalar tenemos por (2) que:  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = 0$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = (u, u)$  con  $f$  continua por la derecha. esto es  $f(\lambda) \in \mathcal{P}$ . Mas aún, dadas  $u, v \in X$  según la fórmula de polarización:

$$(E(\lambda)u, v) = (E(\lambda)u, E(\lambda)v) = (E(\lambda)(u+v), u+v)/4 - (E(\lambda)(u-v), u-v)/4 +$$

$$+ i (E(\lambda)(u+iv), (u+iv))/4 - i (E(\lambda)(u-iv), u-iv)/4$$

entonces  $(E(\lambda)u, v)$  es también una función en  $\beta^*$ .

### I.3.3 Teorema Espectral

Una vez definida la familia espectral podemos enunciar un teorema realmente central:

**Teorema espectral** Cada familia espectral  $\{E(\lambda)\}$  determina un operador autoadjunto  $H: D(H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , donde

$$(1a) \quad D(H) = \{ u \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)u, u) < \infty \}$$

(2a)  $Hu$ , con  $u \in D(H)$ , está unívocamente determinado por:

$$(Hu, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, v)$$

donde las integrales son en el sentido de Radon-Stieltjes.

Y también todo operador autoadjunto determina una única familia espectral cumpliéndose (1) y (2).

Prueba:

$\Rightarrow$ )  $D(H)$  es un espacio vectorial. Por otro lado, el funcional  $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definido por:

$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)v, v)$  es lineal y acotado; por lo tanto, utilizando el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento en  $\mathcal{H}$  que denotaremos por  $Hu$  tal que

$$(Hu, v) = F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

De hecho, en base a esta última ecuación podemos calcular

$$\begin{aligned} \|Hu\|^2 &= (Hu, Hu) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_{\lambda} (E(\lambda)u, Hu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \mu d_{\mu} (E(\mu)E(\lambda)u, u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \mu d_{\mu} (E(\mu)E(\lambda)u, u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_{\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} \mu d_{\mu} (E(\mu)u, u) \end{aligned}$$

teorema I-19 7

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_{\mu}) u, u)$$

Por lo tanto hemos definido un operador  $H$  que es lineal y Hermitiano pues si  $u, v \in D(H)$ :

$$\begin{aligned} (v, Hu) &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}) u, v)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}) u, v) = \\ &= (Hu, v) \end{aligned}$$

Para demostrar que  $H$  es autoadjunto utilizaremos lo siguiente: Tomemos  $\phi(\lambda)$  cualquier función a valores complejos que es acotada en el soporte de  $\{E(\lambda)\}$ , entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\lambda)|^2 d(E_{\lambda}) u, v) \text{ es finita } \forall u \in \mathcal{H} \quad (1b)$$

y por lo tanto podemos definir un operador  $\phi(H)$  que está determinado como en el caso de  $H$ , por:

$$(\phi(H)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) d(E_{\lambda}) u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (2b)$$

De hecho,  $\phi(H)$  es un operador acotado pues de (2b) tenemos

$$\begin{aligned} (\phi(H)u, \phi(H)u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) d_{\lambda} (E_{\lambda}) u, \phi(H)u) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) d_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(\mu) d_{\mu} (E_{\lambda}) u, E_{\mu}) u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) d_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(\mu) d (E_{\lambda}) E_{\mu}) u, u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) d_{\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} \bar{\phi}(\mu) d (E_{\mu}) u, u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\lambda)|^2 d (E_{\lambda}) u, u) \leq \\ &\leq \left( \sup_{\lambda \in \Sigma} |\phi(\lambda)|^2 \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} d (E_{\lambda}) u, u) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left( \sum_{\lambda \in \Sigma} |\phi(\lambda)|^2 \right) \|u\|^2$$

Tomemos en particular  $\phi(\lambda) = 1/(\lambda - i)$  con  $i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .  $\phi(\lambda)$  es acotado en todo  $\mathbb{R}$  y por lo tanto  $\phi(H)$  es un operador lineal acotado definido en todo el espacio. Demostraremos que entonces  $\phi(H) = (H - i)^{-1}$  y por lo tanto que, en particular, si  $i = \pm i$  entonces  $\text{Ran}(H \mp i) = D(\phi(H)) = \mathcal{H}$

Como  $H$  es hermitiano tenemos, por el teorema I-5, que  $H$  es autoadjunto.

Un cálculo similar a los anteriores nos lleva a que dado  $u$  en  $D(H - i) = D(H)$

$$(\phi(H)(H - i)u, v) = (u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

entonces

$$\phi(H)(H - i)u = u \quad \forall u \in D(H - i)$$

Tomemos ahora cualquier  $k \in \mathcal{H}$ , entonces  $\phi(H)k \in D(H)$ , es decir se cumple con (1a) (esto es consecuencia de que  $1/(\lambda - i)$  es acotada) y también se tendrá que  $(H - i)\phi(H)k = k \quad \forall k \in \mathcal{H}$ . Por lo tanto  $\phi(H) = (H - i)^{-1}$ .

La demostración que nos da la otra parte del teorema espectral será omitida en este trabajo pues utiliza algunos conceptos y propiedades cuya mención lo haría más extenso. ///

$$\begin{aligned} \text{Denotaremos } H &= \int \lambda dE(\lambda) \quad \text{y} \quad \phi(H) = (H - i)^{-1} = \int \phi(\lambda) dE(\lambda) = \\ &= \int \frac{1}{\lambda - i} dE(\lambda) \quad i \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \end{aligned}$$

La última igualdad no solo se cumple para  $i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ; sino también para  $i \in \mathbb{R} - \Sigma$ , pues en tal caso  $1/(\lambda - i)$  sigue siendo acotada en el soporte de  $\{E(\lambda)\}$ . Lo anterior nos muestra que  $\Sigma^c \subset \rho(H)$  y por lo tanto  $\Sigma \supset \sigma(H)$ . Un hecho muy motivante es que  $\Sigma = \sigma(H)$ . Para demostrarlo notemos que  $\forall \mu \in \mathbb{C}$

$$\|(H - \mu)u\|^2 = \int (\lambda - \mu)^2 d(E(\lambda)u, u) \quad (1c)$$

(esto es consecuencia de que  $((H - \mu)u, u) = \int (\lambda - \mu) d(E(\lambda)u, u)$  y un cálculo similar a los anteriores).

Tomemos  $\mu \in \Sigma$ , entonces como  $\mu$  no es punto de constancia dada  $\varepsilon > 0$ , el proyector  $E' = E(\mu + \varepsilon) - E(\mu - \varepsilon) \neq 0$  entonces  $\exists u_\varepsilon \neq 0 \in \mathcal{H} \ni E u_\varepsilon = u_\varepsilon \Rightarrow E(\mu + \varepsilon)u_\varepsilon = u_\varepsilon$  y  $E(\mu - \varepsilon)u_\varepsilon = 0$  (pues  $E(\mu - \varepsilon) \leq E(\mu + \varepsilon)$ ), entonces de (1c) tenemos

$$\|(H - \mu)u_\varepsilon\|^2 = \int_{[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]} (\lambda - \mu)^2 d(E(\lambda)u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|^2 \quad (2c)$$

(i) Si  $(H - \mu)$  no es invertible  $\Rightarrow \mu$  es eigenvalor  $\Rightarrow \mu \in \sigma_p(H)$

^ Ver [K] § 5.3 capítulo seis.

(ii) Si  $(H-\mu)$  es invertible, entonces por (2c) no puede ser acotado  $\Rightarrow \mu \in \sigma_c(H)$  ( $H$  es autoadjunto y por lo tanto  $\sigma(H) = \sigma'$ ) entonces de (i) y (ii) concluimos que  $\sigma_c(H) \Rightarrow \Sigma = \sigma(H)$ .

Lo anterior nos seala que al ser  $\Sigma$  cerrado también  $\sigma(H)$  lo es. Pero la relación entre  $\{E(\lambda)\}$  y  $H$  va mucho mas lejos como lo muestran los siguientes teoremas:

Teo. I-13 Supongamos  $H: X \rightarrow X$  autoadjunto, entonces:

- (a)  $H \geq \lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(H)$  se tiene  $\lambda \geq \lambda$ .
- (b)  $H \leq \lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(H)$  se tiene  $\lambda \leq \lambda$ .
- (c)  $H$  es acotado i.e.  $\|H\| \leq k \Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(H)$  se tiene  $-k \leq \lambda \leq k$

Prueba:

Solo probaremos (1) (la prueba de (2) y (3) es análoga).

$\Rightarrow$   $H \geq \lambda \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \sigma) d(E(\lambda)u, u) \geq 0 \quad \forall u \in X$ . Demostrar que  $\lambda \geq \sigma \quad \forall \lambda \in \sigma(H)$  es lo mismo que demostrar, en virtud de que  $\sigma(H) = \Sigma$  que  $E(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma < \lambda$ .

Supongamos  $\exists \sigma < \lambda \quad E(\sigma) \neq 0 \Rightarrow \exists u' \in X \quad E(\sigma)u' = u'$ . Dadas las propiedades de  $\{E(\lambda)\}$  tenemos entonces  $E(\lambda)u' = u' \quad \forall \lambda \geq \sigma$ , por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \sigma) d(E(\lambda)u', u') = \int_{(-\infty, \sigma]} (\lambda - \sigma) d(E(\lambda)u', u') + \int_{(\sigma, \infty)} (\lambda - \sigma) d(E(\lambda)u', u') = \int_{(\sigma, \infty)} (\lambda - \sigma) d(E(\lambda)u', u')$$

la cual es negativa, pues  $\lambda - \sigma < 0$  en el intervalo de integración y  $(E(\lambda)u', u')$  es monótona no decreciente. lo que nos lleva a una contradicción.

$\Leftarrow$   $\lambda \geq \sigma \quad \forall \lambda \in \sigma(H) \Rightarrow E(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma < \lambda$ , entonces:

$$\begin{aligned} (Hu, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, u) = \int_{[\lambda, \infty)} \lambda d(E(\lambda)u, u) \geq \lambda \int_{[\lambda, \infty)} d(E(\lambda)u, u) \\ &\geq \lambda \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda)u, u) = \lambda (u, u) \quad \forall u \in X \end{aligned}$$

entonces  $H \geq \lambda$  .///

Teorema I-14 Sea  $H: X \rightarrow X$  autoadjunto y  $\{E(\lambda)\}$  su correspondiente familia espectral. Sea  $\mu \in \mathbb{R}$ , entonces:

- (1)  $\mu \in \sigma_c(H) \Leftrightarrow \mu$  es un punto de constancia.
- (2)  $\mu \in \sigma_p(H) \Leftrightarrow P_{\mu} \equiv E(\mu) - E(\mu-0) \neq 0$  (i.e.  $\mu$  es un punto de discontinuidad de  $\{E(\lambda)\}$ ).
- (3)  $\mu \in \sigma_r(H) \Leftrightarrow \mu$  no es un punto de constancia de  $\{E(\lambda)\}$  y esta

es continua en  $\mu$ . O sea  $E(\mu-0)u = E(\mu)u \quad \forall u \in \mathcal{H}$ .

(4) Si  $\mu \in \mathcal{C}(H)$  entonces  $(H-\mu)^{-1}$  existe con dominio de todos  $u \in \mathcal{H}$  que cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda-\mu|^2} d(E(\lambda)u, u) < \infty$$

y está de-

terminado por:

$$((H-\mu)^{-1}u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu} d(E(\lambda)u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

Prueba de (21):

Nos ayudaremos de la igualdad

$$\|(H-\mu)u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)^2 d(E(\lambda)u, u) \quad \forall u \in D(H) \text{ y } \mu \in \mathcal{C}$$

) Si  $\mu$  es un eigenvalor  $\Rightarrow \exists u \neq 0 \Rightarrow Hu = \mu u \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)^2 d(E(\lambda)u, u) = 0$   
 $\Rightarrow E(\sigma)u = 0 \quad \forall \sigma < \mu$  y  $E(\sigma)u = u \quad \forall \sigma \geq \mu \Rightarrow Pu = u \Rightarrow P \neq 0$

↳ Si  $P = 0 \Rightarrow \exists u \neq 0 \Rightarrow Pu = u \Rightarrow E(\sigma)u = u \quad \forall \sigma \geq \mu$  y  
 $E(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma < \mu \Rightarrow \|(H-\mu)u\| = 0 \Rightarrow Hu = \mu u \Rightarrow \mu \in \mathcal{C}(H) \quad \text{///}$

Además  $u \in \mathcal{H}$  es un eigenvector de  $H \Leftrightarrow Pu = u$  o sea  $P_\mu$  es el proyector ortogonal sobre el eigenspacio asociado a  $\mu$ ; el cual es definido como el espacio generado por todos los eigenvectores de  $H$  con eigenvalor  $\mu$ . Además  $P_\mu P_{\mu'} = 0$  si  $\mu \neq \mu'$  pues dos eigenvectores de un operador autoadjunto son ortogonales si son asociados a distintos eigenvalores.

### I.3.4 Cálculo Funcional

En la parte que se demostró en el teorema espectral se utilizaron algunas ideas del cálculo funcional, el cual está fundamentado sobre el siguiente:

Teo. I-15 Tomemos  $H$  un operador autoadjunto y  $\{E(\lambda)\}$  su correspondiente familia espectral. Sea  $F(\lambda)$  cualquier función a valores complejos. Entonces el conjunto:

$$D(F(H)) = \left\{ u \in \mathcal{H} / \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d(E(\lambda)u, u) < \infty \right\}$$

es un espacio

vectorial y existe un operador lineal, denotado por  $F(H)$ , (con dominio  $D(F(H))$ ) determinado por:

$$(F(H)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d(E(\lambda)u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

En la dependencia de  $F(\lambda)$  se tienen las siguientes propiedades:

(1) Si  $G(\lambda) = \alpha F(\lambda) \quad \alpha \in \mathcal{C} \Rightarrow G(H) = \alpha F(H)$

(2) Si  $G(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$   $G(H) = F_1(H) + F_2(H)$  en  $D(F_1(H)) \cap D(F_2(H)) \subseteq D(G(H))$

(3)  $F(H)$  Y  $\bar{F}(H)$  son uno adjunto del otro.

(4) Si  $u \in D(F(H)) \Rightarrow E(\lambda)u \in D(F(H)) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  y  $F(H)E(\lambda)u = E(\lambda)F(H)u$ .

(5) Si  $Hu = \lambda u$  entonces  $F(H)u = F(\lambda)u$ .

(6) Si  $u_1$  y  $u_2$  son elementos de  $D(F_1(H))$  y  $D(F_2(H))$  respectivamente, entonces:

$$(F_1(H)u_1, F_2(H)u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) \overline{F_2(\lambda)} d(E(\lambda)u_1, u_2)$$

(7) Si  $u \in D(F(H))$  entonces  $F_1(H)u \in D(F_2(H)) \Leftrightarrow u \in D((F_1 \cdot F_2)H)$ .  
 Cuando esta condición se cumple entonces se tiene  $F_2(H)F_1(H)u = (F_1 \cdot F_2)(H)u$ .

(8) Si  $u \in \mathcal{X} \ni G(H)F(H)u$  y  $G(H)u$  existen entonces  $F(H)G(H)u$  existe.  $F(H)$  y  $G(H)$  "conmutan" en el sentido  $F(H)G(H)u = G(H)F(H)u = (F \cdot G)(H)u$ .

Para la demostración de este teorema ver [S].

### I.3.5 Proyectores ortogonales en los subespacios continuo y puramente puntual.

Ahora daremos algunas definiciones y propiedades de estas que se utilizarán en el capítulo IV.

Def. D-12 Tomemos un operador  $H: D(H) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  autoadjunto. Definiremos como  $\mathcal{X}_p$  al subespacio cerrado de  $\mathcal{X}$  generado por los eigenvectores de  $H$  (a tal subespacio lo llamaremos puramente puntual). La restricción de  $H$  en  $\mathcal{X}_p$  la denotaremos por  $H_p$ . También definiremos  $\mathcal{X}_c = \mathcal{X}_p^\perp$  y  $H_c$  como la restricción de  $H$  en  $\mathcal{X}_c$ .  $P_p$  y  $P_c$  son definidos como los proyectores ortogonales en  $\mathcal{X}_p$  y  $\mathcal{X}_c$ .

Teo. I-16 Tomemos  $H$  como en la definición D-11. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Si designamos por  $P_\mu$  al proyector ortogonal sobre el eigensubespacio asociado al eigenvalor  $\mu$  tenemos:

(1)  $P = \sum_{\mu \in \sigma_p(H)} P_\mu$  en la convergencia fuerte

(2)  $P_\mu H \subset H P_\mu$ ,  $P_\mu H \subset H P_\mu$

(3)  $f(H)P_\mu = P_\mu f(H)$ ,  $f(H)P_\mu = P_\mu f(H)$  si  $f$  es acotado en el espectro de  $H$ .

-----  
 $F_1 \cdot F_2$  denota la función que es multiplicación de  $F_1(\lambda)$  y  $F_2(\lambda)$

$$(4) \quad P_{\mu} f(H) \subset f(H) P_{\mu} \quad , \quad P_{\mu} f(H) \subset f(H) P_{\mu} .$$

La propiedad (1) es justamente el lema 2.3 del subcapitulo dos del capitulo V de [K1].

## CAPITULO II

---

### II.1.1 Introducción.

Consideremos el movimiento de una partícula en una dimensión. Desde el punto de vista clásico: no es difícil pensar en un potencial  $V(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $V(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  donde se tenga a una partícula con energía positiva en un estado acotado. Este hecho señalado es consecuencia del principio de conservación de energía.

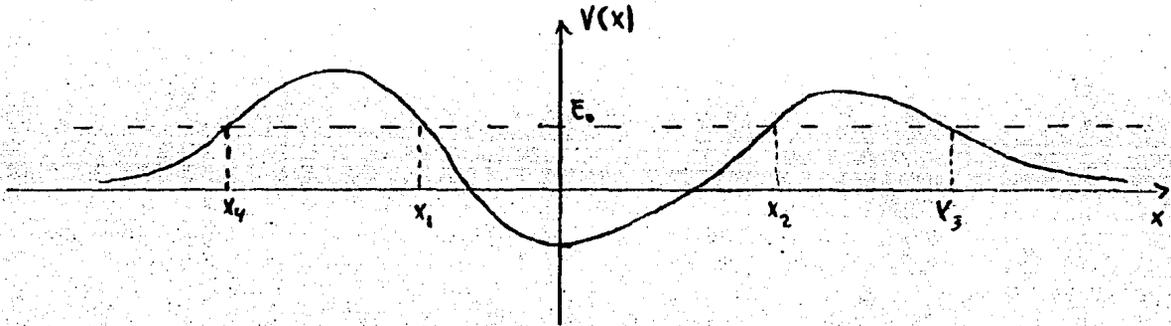


Figura II-1

Si la partícula está en algún momento entre las posiciones  $x_1$  y  $x_2$ , entonces no puede ocupar posiciones fuera del intervalo  $[x_1, x_2]$ . Pero desde el punto de vista cuántico sabemos que existe el llamado efecto túnel el cual nos indica que la partícula puede ir más allá de las posiciones  $x_2$  o  $x_1$  aún cuando hubiese estado en el intervalo  $[x_1, x_2]$  inicialmente.

Lo anteriormente expuesto nos podría llevar a pensar, si pensamos a la ligera, que para cualquier potencial que tiende a cero en  $\pm\infty$  no hay posibilidad de tener estados acotados con energía positiva, en contraste con lo dicho clásicamente. Un hecho relevante es que esta conclusión es falsa, como lo muestra el siguiente ejemplo dado por el potencial construido por Wigner y Von Neumann que aquí presentamos:

### II.1.2 Potencial de Wigner-Von Neumann

---

Se encontrará un potencial  $V(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$  con la propiedad de que existe una función  $\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  que no está en la clase de la función cero tal que  $(-\Delta + V(x))\Psi = \lambda\Psi$  donde  $\lambda = 1 > 0$ .

Queremos entonces  $(-\Delta + V)\Psi = \Psi$ . Supongamos un caso sencillo donde  $V$  y  $\Psi$  son esféricamente simétricas; esto es, dependen solo de la distancia al origen  $r$ , y además  $\Psi(r) = U(r)/r$ . Utilizando el laplaciano en coordenadas esféricas tenemos:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-U + rU') = U''/r$$

entonces deberá cumplirse:  $-U''/r + VU/r = U/r$

con lo que

$$V = 1 + U^* U^{-1}$$

II-1

como queremos  $V(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$  entonces  $U \rightarrow -1$ , o sea  $U$  debe ser del tipo  $\text{Sen}(r)$  en infinito. Esto sugiere pensar a  $U$  como  $U(r) = W(r) \text{Sen}(r)$ . entonces en II-1 tenemos:

$$V = 1 + [ \text{Sen} r W''(r) + 2 \text{Cos} r W' - \text{Sen} r W ] / \text{Sen} r W(r)$$

$$\Rightarrow V = W''/W + 2 W' \text{Cot} r / W$$

II-2

Para que  $V(r)$  no sea singular en los valores donde  $\text{Sen}(r) = 0$   $W(r)$  debe ser como de la forma:  $g(r) = 4 \text{Sen}(r)$  de tal modo que  $g(r) = 2r - \text{Sen}(2r) = 4 \int \text{Sen}(x) dx$  (nótese que esta función solo vale cero en el origen) y con esto  $V(r)$  solo tendría una singularidad en el origen. Pero  $U(r)$  quedaría como  $(2r - \text{Sen}(2r)) \text{Sen}(r)$  lo cual no es de cuadrado integrable ( $\int |U(r)|^2 dr = \int |U| dr$ ).

Si tomamos a  $W(r) = 1/(1+g(r)^2)$ , entonces:

$U(r) = \text{Sen}(r) / (1+(2r - \text{Sen}(2r))^2)$  que si es de cuadrado integrable.

Por lo tanto  $\Psi(r)$  y  $V(r)$  nos quedan según II-2:

$$V(r) = [ 1 + g'(r) ]^2 [ -32 \text{Sen} r ] [ g'(r) \text{Cos} r - 3 g'(r) \text{Sen}^2 r + g(r) \text{Cos} r + \text{Sen}^2 r ]$$

II-3

y

$$\Psi(r) = \text{Sen} r / r (1 + g(r))^2$$

II-4

con

$$g(r) = 2r - \text{Sen} 2r$$

II-5

donde  $\Psi(r) \in L^2(\mathbb{R})$  y  $V(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

De hecho cuando  $r$  es grande  $V(r) = -8 \text{Sen}(2r) / r + O(r^{-2})$ . La gráfica de  $V(r)$  se encuentra en la figura II-2. Una cualidad muy importante de este potencial es que oscila lo suficientemente para que las reflexiones que se dan cada vez que se tiene efecto túnel logren dominar a las transmisiones y con esto la partícula tenga un movimiento acotado.

A la función  $V(r)$  la llamaremos el potencial de Wigner-Von Neumann con eigenvalor uno (WVN1).

Nótese que por la ecuación II-1 y al cumplirse que  $\int |U|^2 dr < \infty$ , el potencial WVN1 nos proporciona también un hamiltoniano en el intervalo  $[0, \infty)$  que tiene como eigenvalor a uno y como eigenfunción a  $\text{Sen}(r) / (1 + [2r - \text{Sen}(2r)]^2)$ .

De hecho, dado cualquier número positivo se puede construir un potencial de WVN que tenga a dicho número como eigenvalor.

### II.1.3 Construcción de potenciales con eigenvalores positivos.

Ahora mostraremos algunas ideas para obtener potenciales de tal modo que se cumpla la ecuación:

$$-\Delta U + q(x)U = \lambda U \quad \text{con } x \in [0, \infty), \quad U \in L^2([0, \infty)) \quad \text{II-6}$$

Esto es consecuencia de la desigualdad  $1 + (2r - \text{Sen}(2r))^2 \geq 4r$  para  $r$  mayor que una constante positiva.

Potencial de  
Wigner y Von Neumann

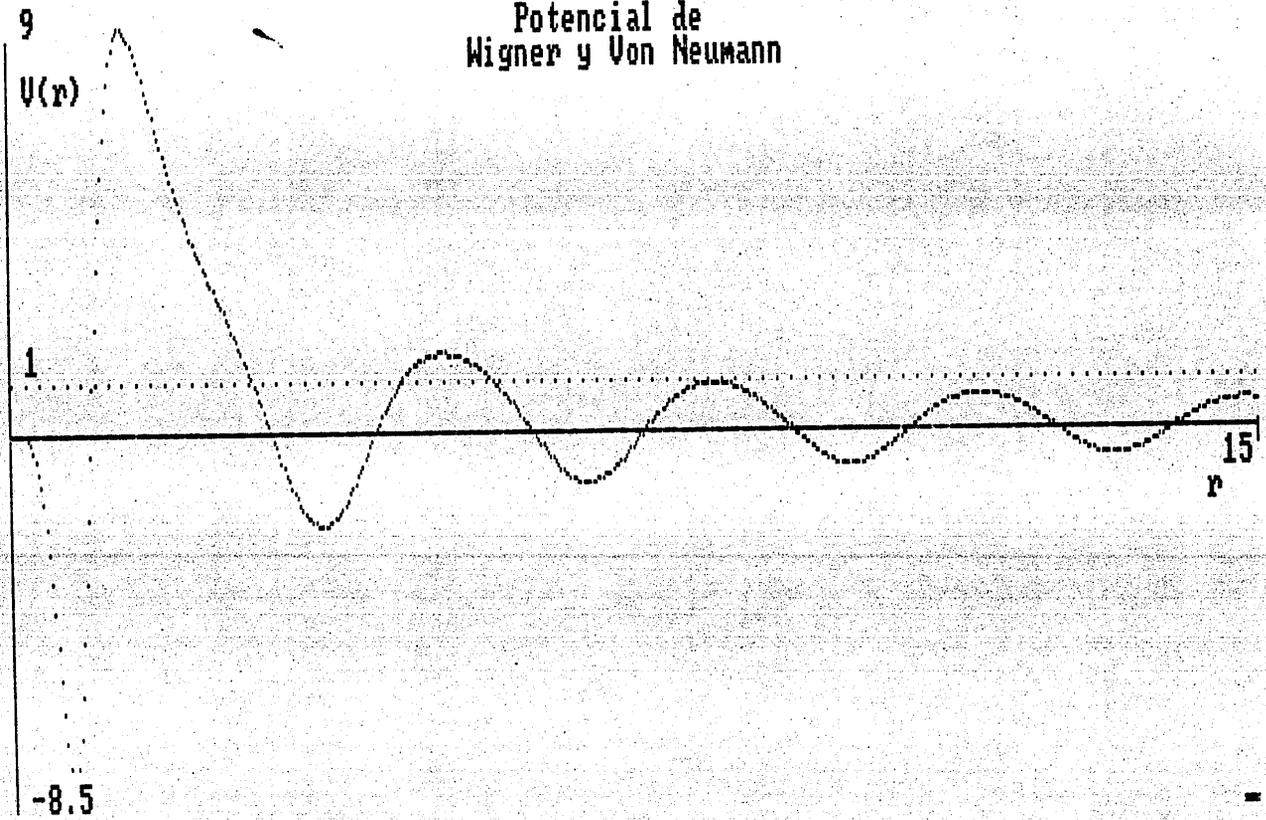


Fig. II-2

para algún  $\lambda$  positivo.

La primera técnica que mostraremos nos proporciona como un caso particular al potencial WVN1.

Supongamos que tenemos una función  $h(x)$  que satisface la ecuación:

$$\Delta h + [\mu - q_0(x)] h = 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{II-7}$$

para alguna función medible  $q_0(x)$ .

Definamos  $\Psi(x) = h(x)/G(x)$  II-8  
donde  $G(x)$  se determinará posteriormente. Entonces  $\Psi(x)$  satisface la ecuación:

$$\Delta \Psi + [\mu - q(x)] \Psi = 0 \quad \text{II-9}$$

donde

$$q(x) = q_0(x) - G''(x)/G(x) + 2 G'(x)^2/G(x)^2 - 2 G'(x) h'(x)/(G(x) h(x)) \quad \text{II-10}$$

Ahora para tratar de que  $q(x)$  no tenga singularidades cuando  $h(x)$  se anula, entonces escogemos  $G(x)$  de tal modo que su expresión contenga a  $h(x)$  como factor multiplicativo. Existen muchas opciones para tal fin pero nos fijaremos en dos de estas que arrojan resultados interesantes:

$$(a) \quad G(x) = a + \left( b \int_0^x h^2(t) dt \right)^2 \quad \text{con } a, b > 0 \quad \text{II-11}$$

$$(b) \quad G(x) = \exp \left( \int_0^x g(t) h(t) dt \right) \quad \text{II-12}$$

donde en la opción (b) se escoge  $g(t)$  de tal modo que  $\Psi(x)$  pertenezca a  $L^2([0, \infty))$  y  $q(x)$  tenga ciertas cualidades determinadas.

Comentarios para el caso (a):

Tomemos el caso sencillo  $q_0(x) = 0$ . Entonces  $h(x)$  puede ser tomada como  $\text{Sen}(\sqrt{\mu} x)$  con  $\mu$  positivo. Por lo tanto (tomando  $a=4$  y  $b=1/\mu$ ) tenemos

$$G(x) = \left( 1 + [2x\sqrt{\mu} - \text{Sen}(2\sqrt{\mu}x)]^2 \right) / \mu \quad \text{II-13}$$

y con esto II-8 y II-9 quedan (haciendo  $g(x) = 2x\sqrt{\mu} - \text{Sen}(2\sqrt{\mu}x)$ ):

$$\Psi_\mu(x) = \mu \text{Sen}(\sqrt{\mu}x) / [1 + (2x\sqrt{\mu} - \text{Sen}(2\sqrt{\mu}x))^2] \quad \text{II-14}$$

$$f_\mu(x) = \frac{\mu}{[1 + g^2(x)]^2} [-32 \text{Sen}(\sqrt{\mu}x)] [g^3(x) \text{Cos}(\sqrt{\mu}x) + g(x) \text{Cos}(\sqrt{\mu}x) + \text{Sen}^2 x - 3 g^2(x) \text{Sen}^2 \sqrt{\mu}x] \quad \text{II-15}$$

cuando  $\mu=1$  obtenemos el potencial WVN1. Llamaremos al potencial dado en II-14 como el potencial de Wigner-Von Neumann con eigenvalor  $\mu$  (WVN $\mu$ ). Este potencial lo pudimos haber obtenido de una manera mas inmediata a partir del potencial WVN1 que tenemos en la ecuación II-3 definiendo una función  $T(r) = U(\sqrt{\mu}r)$  donde  $U(r) = r\Psi(r)$  y  $\Psi(r)$  es dada por II-4.

Con respecto a este caso (a) T.Kato escogió, en un trabajo

mencionado en la referencia [K2] a la función :

$$\zeta(x) = X^{1/a} - \frac{1}{2} a \int_0^x (t^{1/a-1} \cos \sqrt{\mu} t) dt$$

II-16

con  $a > 1$  para que  $\psi \in L^2(0, \infty)$ .

Comentarios para el caso (b):

Tomemos  $q(x)=0$  y con esto  $h(x) = \cos(\sqrt{\mu}x)$  con  $\mu > 0$  como solución de II-7. Entonces tanto  $\psi(x)$  y  $q(x)$  quedan según II-8 y II-10 como:

$$\psi(x) = \left[ \exp \left( - \int_0^x g(t) \cos(\sqrt{\mu} t) dt \right) \right] \cos(\sqrt{\mu} x)$$

II-17

$$\zeta(x) = 3 \sqrt{\mu} g(x) \int_0^x \sqrt{\mu} x - g(x) \cos \sqrt{\mu} x + g^2(x) \cos^2 \sqrt{\mu} x$$

II-18

Tomando por ejemplo  $g(x) = ax \cos(\sqrt{\mu}x)$  en II-18 con  $a > 0$ ,  $0 < \rho < 1$  y  $x \geq 1$ , entonces se puede probar que  $\psi \in L^2(0, \infty)$

Por otro lado se puede tomar por ejemplo  $q(x) = x^k$  con  $k > 0$  y una  $g$  adecuada para que  $\psi \in L^2(0, \infty)$ .

Existen otras elecciones posibles para obtener  $q(x)$  y  $\psi \in L^2(0, \infty)$  que satisfagan II-6 para algún  $\lambda > 0$ . Para detalles ver el capítulo IV de [E] donde además se expone una manera de como obtener una cantidad finita de eigenvalores positivos.

### II.2.1 Un tipo de propagador acústico con un eigenvalor positivo.

Por último señalaremos una manera de obtener un propagador acústico que tenga un eigenvalor positivo en base al potencial  $WVN\mu$ .

Queremos que se cumpla :

$$-c^2(x) \Delta U = w^2 U$$

II-19

donde  $w$  es cualquier número real positivo y  $U \in L^2(0, \infty)$ . Pero esta ecuación se cumple si

$$-\Delta U + \left( \frac{1}{c^2} - \frac{w^2}{c^2} \right) U = \frac{1}{c^2} U$$

II-20

para algún  $c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$

Notemos por otro lado que el potencial  $WVN\mu$  dividido por  $\mu$  esta acotado por una función que tiende a cero monótonamente para  $x$  mayor que una cantidad  $M$  positiva. Esto es consecuencia de que para la función  $\tilde{g}(z) = 2z - \text{Sen}(2z) = 4 \int_0^z \text{Sen}(t) dt$  se tiene la estimación:

$\tilde{g}'(z) / [1 + \tilde{g}(z)]^2 \leq 1/\tilde{g}(z)$  para  $z \geq R$ . nótese que  $\tilde{g}(z)$  es monótona creciente.

Entonces de II-15 tenemos :  $|g_\lambda(x)/\mu| \leq k/\tilde{g}(\sqrt{\mu}x)$  para  $x \geq R$  II-21

Dado  $c_1$  hagamos  $\mu = 1/c_1^2$  y tomemos  $R$  de tal modo que en II-21 nos quede  $|g_\lambda| \leq 1-\varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$ . Entonces para  $x \geq R$  tomemos en II-20 :

$g_\lambda(x) = \frac{1}{c_1^2} - w^2/c^2(x)$  con lo que  $c(x)$  nos queda definida por :

$$c^2(x) = c^2 w^2 / [1 - \frac{2\mu}{x}]$$

II-22

de tal modo que  $c^2(x)$  queda acotada por

$$c^2 w^2 / (2-\epsilon) \leq c^2(x) \leq c^2 w^2 / \epsilon \quad \text{para } x \geq R$$

II-23

En el intervalo  $[R, \infty]$  tenemos entonces que II-20 se cumple con  $c^2(x)$  definida por I-22 y  $U = \psi_\mu$  con  $\psi_\mu$  definida por II-14.

Ahora para el intervalo  $[0, R]$  definamos  $c(x)$  como cualquier función acotada por arriba y abajo por cantidades estrictamente positivas y que sea lo suficientemente regular para que utilizemos el teorema de existencia y unicidad para el problema :

$$-\Delta U = \frac{w^2 U}{c^2(x)} \quad \text{en } [0, R]$$

II-24

$$U(R) = \psi_\mu(R), \quad \psi'(R) = \psi'_\mu(R)$$

Entonces  $U$  queda determinada en  $[0, R]$  como la solución al problema II-24 que siempre existe si tomamos  $c(x)$  como cualquier función continua arbitraria. Con esto  $U \in L^2 [0, \infty)$  y se cumple II-14 para  $w > 0$ .

Nótese que el problema analizado en un a dimensión ( $[0, \infty)$ ) nos lleva a un problema en tres dimensiones si utilizamos el hecho que podemos definir  $\psi(r) = U(r)/r$  con  $r$  la coordenada radial y tanto  $U(r)$  como  $c(r)$  las funciones construidas. El problema acústico será entonces esféricamente simétrico.

### CAPITULO III

En este capitulo se definirá el propagador acústico en una guía de ondas deformada y se darán condiciones sobre la velocidad de propagación para que no existan eigenvalores positivos de dicho propagador.

Las ondas en una guía de ondas deformada, según se estudió en la introducción de este trabajo, satisfacen la ecuación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y, t) = c^2(x, y) \Delta U(x, y, t)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta$  es el laplaciano en  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$C(x, y)$  es la magnitud de la velocidad de propagación de la onda: esta función se supone medible y además que cumple con la desigualdad

$$0 < c_1 \leq C(x, y) \leq c_2 \quad c_1, c_2 \text{ constantes} \quad \text{III-1}$$

La coordenada  $y$  siempre estará sobre el eje de la guía de ondas.

Tomemos el propagador acústico:  $A = -C(x, y)\Delta$  cuyo dominio definimos de la siguiente manera:

Tomemos el espacio de las funciones de cuadrado integrable en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con el producto escalar:

$$(f, g)_H = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x, y) \bar{g}(x, y) C(x, y) dx dy.$$

Este espacio, que llamaremos  $H$ , es un espacio de Hilbert pues la norma  $\|f\|_H = \sqrt{(f, f)}$  es equivalente a la norma tradicional en  $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ . (esto es consecuencia de que  $C(x, y)$  satisface (1)).

Entonces  $A$  queda definido como:  $A: D(A) \subset H \rightarrow H$  con  $D(A) = \{f \in H / \Delta f \in H\}$ , donde el laplaciano es en el sentido de distribuciones.

Como el operador  $-\Delta$  es autoadjunto en  $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$  con el mismo dominio que el operador  $A$ , entonces al ser  $C(x, y)$  a valores reales es inmediato que  $A$  es autoadjunto.

Las propiedades de  $C(x, y)$  son referidas respecto a la función  $C_0(y)$  que nos indica la magnitud de la velocidad de propagación de las ondas en una guía de ondas perfecta.  $C_0(y)$  se supone medible y también satisface III-1.

En lo siguiente señalaremos condiciones sobre  $C(x, y)$  y  $C_0(y)$  que nos indican que tanto puede diferir  $C(x, y)$  de  $C_0(y)$  para que no tengamos eigenvalores positivos de  $A$ .

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio exterior conexo, o sea un conexo que es complemento de un compacto.

Teorema principal A. Supongamos  $c_+, c_-, c \in \mathbb{R}, h_+, h_-$  constantes tal que se cumple lo siguiente en  $\Omega$ :

$$C_0(y) = c_+ \quad \text{si } y \geq h_+ \quad \text{III-2}$$

$$|C_0(y) - c_-| \leq c(1+y)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{si } y \leq h_- \quad \text{III-3}$$

$$C(x, y) - C_0(y) = 0 \quad \forall y > y_0 \quad \text{y algùn } y_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{III-4}$$

$$|C(x, y) - C_0(y)| \leq M \exp(-\alpha |x|) \quad \text{para } M \text{ y } \alpha \text{ constantes III-5}$$

positivas.  $|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad x = (x_1, \dots, x_n)$

Sea  $U(x, y) \in L^2(\Omega)$  que satisface en sentido de distribuciones la ecuación:

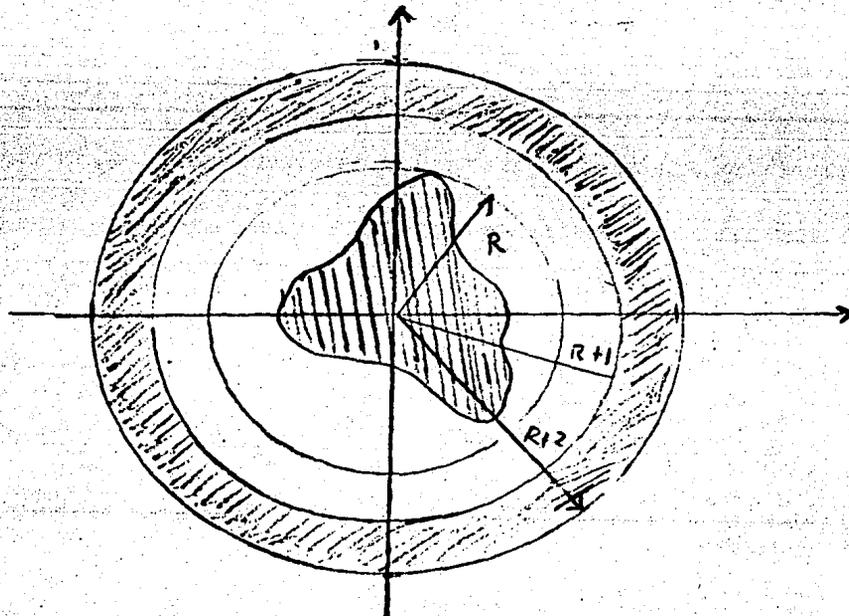
$$-\Delta U = \lambda U \quad \text{con } \lambda > 0$$

entonces  $U(x, y) = 0$  en  $L^2(\Omega)$ .

Las primeras dos condiciones nos dicen que la velocidad de propagación  $C_0(y)$  en la guía de ondas perfecta es una constante para  $y \geq h_+$  y tiende a la constante  $c_-$  cuando  $y \leq h_-$ . Las dos últimas condiciones nos indican características de la guía de ondas deformada con respecto a la perfecta.

Prueba:

Como  $\Omega$  es un compacto, podemos tomar una bola de radio  $R$  que lo contenga. Tomemos una función  $\phi(x, y)$  en  $C(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\phi = 0$  en la bola de radio  $R+1$ ,  $\phi = 1$  fuera de la bola de radio  $R+2$  y  $0 \leq \phi \leq 1$  entre las dos bolas mencionadas.



^  $\forall$  significa: para casi todo

La intension de la introducción de  $\phi$  es llevar el problema que tenemos planteado en  $\Omega$  a uno en todo  $\mathbb{R}^{n+1}$  donde será mas manejable.

Extendemos a  $U(x,y)$  y  $\Delta U(x,y)$  (definidos en  $\Omega$ ) como cero a  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $V = \phi U$  entonces  $V$  y  $\Delta V \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$  ( $\Delta V$  tomado en el sentido de distribuciones) y además  $\Delta V = \phi \Delta U + U \Delta \phi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla U$

$$\Delta V = \phi \Delta U + U \Delta \phi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla U$$

y como  $\Delta U = -\lambda c^2(x,y)U$  en  $\Omega$  tenemos:

$$\Delta V = -\phi \lambda U c^2(x,y) + U \Delta \phi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla U$$

entonces

$$-\Delta V - \frac{\Delta V}{c^2(x,y)} = -U \Delta \phi - 2 \nabla \phi \cdot \nabla U + \lambda V \left( \frac{1}{c^2(x,y)} - \frac{1}{c^2(y)} \right) \quad \text{III-6}$$

por lo tanto en sentido de distribuciones:

$$-\Delta V - \frac{\Delta V}{c^2(x,y)} = f(x,y) \quad \text{III-7}$$

donde  $f(x,y)$  queda definido como el miembro derecho de III-6

Ademas  $f(x,y) = 0 \quad \forall y > M$  con  $M = \max\{R+2, y_0, h_1\}$  III-8  
 pues si  $y > R+2 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \quad \forall \nabla \phi = 0$  : y si  $y > y_0$  entonces debido a III-4:

$$\lambda V \left( \frac{1}{c^2(x,y)} - \frac{1}{c^2(y)} \right) = \frac{\Delta V}{c^2} (c_0 + c) (c_0 - c) = 0$$

Tomemos transformada de Fourier con respecto a  $x$  en la ecuación III-7, entonces tenemos que para casi toda  $k \in \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$-\frac{\partial^2 \hat{V}(k,y)}{\partial y^2} + \left[ k^2 - \frac{\lambda}{c^2(y)} \right] \hat{V}(k,y) = \hat{f}(k,y) \quad \text{III-9}$$

en sentido distribucional: donde  $\hat{V}(k,y)$  y  $\hat{f}(k,y)$  son las transformadas de Fourier de  $V(x,y)$  y de  $f(x,y)$  respectivamente.

Con la ayuda de III-9 probaremos que  $\hat{V}(k,y) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^n, y > M$  en dos pasos:

(a)  $\hat{V}(k,y) = 0 \quad \forall k^2 < \lambda/c^2, y > M$

(b) Utilizando (a) y del lema 1 (mas adelante expuesto) se tendrá  $\hat{V}(k,y) = 0 \quad \forall k \geq \lambda/c^2, y > M$ .

-----  
 ^ Nótese que la extensión de  $U$  como cero en  $\mathbb{R}^n$  no trae problemas de que en su derivadas pudiesen aparecer deltas de dirac pues por tal razón es que se pide que se anule  $\phi$  dentro de la bola de radio  $R+1$ .

Prueba de (a):

Si  $y > M$  entonces por III-2 la ecuación III-9 toma la forma:

$$-\frac{d^2 \hat{v}(k,y)}{dy^2} + [k^2 - \lambda/c^2] \hat{v}(k,y) = \hat{f}(k,y) \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \text{III-10}$$

entonces si  $k^2 < \lambda/c^2$  dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a III-10 son  $\exp(\pm \sqrt{\lambda/c^2 - k^2} y)$

Por otro lado tomemos  $f_1(k,y)$ ,  $f_2(k,y)$  dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea en III-9. Utilizando el método de variación de parámetros podemos encontrar una solución de III-9 dada por:

$$\Psi(k,y) = U_1(k,y) f_1(k,y) + U_2(k,y) f_2(k,y)$$

con

$$\frac{dU_1(k,y)}{dy} = -\frac{\hat{f}(k,y) f_2(k,y)}{W(f_1, f_2)} \quad ; \quad \frac{dU_2(k,y)}{dy} = -\frac{\hat{f}(k,y) f_1(k,y)}{W(f_1, f_2)}$$

y  $W(f_1, f_2) =$  wronskiano de  $f_1, f_2$ .

Cuando estamos en la región donde  $y > M \Rightarrow \hat{f}(k,y)$ , entonces  $U_1(k,y)$  y  $U_2(k,y)$  las podemos tomar como cero.

Por lo tanto  $\Psi(k,y) = 0$  si  $y > M$  III-11

Pero  $\hat{v}(k,y)$  es también una solución de III-9. por lo tanto  $\hat{v}(k,y) - \Psi(k,y)$  es solución de la ecuación homogénea asociada a III-9. Entonces cuando  $y > M$ ,  $\hat{v}(k,y) - \Psi(k,y) = 0$  debe ser combinación lineal de las funciones  $\exp(\pm \sqrt{\lambda/c^2 - k^2} y)$  para casi todo  $k^2 < \lambda/c^2$ . Pero  $\hat{v}(k,y) - \Psi(k,y)$  está en  $L^2(\mathbb{R}^+)$  y con esto en  $L^2([M, \infty))$ , entonces

$$\hat{v}(k,y) - \Psi(k,y) = 0 \quad \forall k^2 < \lambda/c^2, \quad y > M \quad \text{III-12}$$

Por III-11 y III-12 concluimos que:

$$\hat{v}(k,y) = 0 \quad \forall k^2 < \lambda/c^2, \quad y > M \quad \text{III-13}$$

Prueba de (b):

Para demostrar este inciso utilizaremos el principio del límite absorbente (PLA) para el operador  $h: D \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$   $a = \min\{c_1, c_2\}$   $h = -\frac{d^2}{dy^2} - \lambda/c^2(y) + \sqrt{a^2}$ , cuyo dominio es el espacio de Sobolev  $H^1(\mathbb{R})$  y por lo tanto es autoadjunto.

Antes de plantear el (PLA) para  $h$  necesitamos las siguientes definiciones:

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces definimos

$$L^2_\alpha(\mathbb{R}) = \{f \text{ medible en } \mathbb{R} / f(y)(1+y)^\alpha \in L^2(\mathbb{R})\}$$

con la norma:  $\|f\|_{L^2_\alpha} = \|f(y)(1+y)^\alpha\|_{L^2(\mathbb{R})}$   
Análogamente definimos:

$H_{2,\alpha}(\mathbb{R}) = \left\{ f \text{ medible en } \mathbb{R} / f \in L^2_\alpha, \frac{df}{dx} \in L^2_\alpha, \frac{d^2f}{dx^2} \in L^2_\alpha \right\}$   
 con las derivadas tomadas en el sentido distribucional. La norma en  $H_{2,\alpha}(\mathbb{R})$  es definida por:

$$\|f\|_{H_{2,\alpha}}^2 = \|f\|_{L^2_\alpha}^2 + \left\| \frac{df}{dx} \right\|_{L^2_\alpha}^2 + \left\| \frac{d^2f}{dx^2} \right\|_{L^2_\alpha}^2$$

Lema 1 (PLA para h):

El espectro esencial de h es  $[0, \infty)$ . h no tiene eigenvalores positivos y

$\forall \mu \in \mathbb{R}^+ - \{ |1/c_1 - 1/c_2| \}$  los siguientes limites existen en la topologia uniforme de  $\mathcal{B}(L^2_\alpha; H_{2,\alpha})$  (con  $\alpha > 0$ )

$$R(\mu \mp i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (h - \mu \pm i\epsilon)^{-1}$$

Las siguientes dos funciones:

$$R^\pm(z) = \begin{cases} v(z) & \text{si } \text{Im} z \neq 0 \\ v(z \pm i0) & \text{si } \text{Im} z = 0 \end{cases}$$

definidos en

$$D^\pm = \mathbb{C}^\pm \cup \mathbb{R}^+ \setminus \{0, |1/c_1 - 1/c_2|\}$$

y

$$C^\pm = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im} z \geq 0\}$$

son analíticas si  $\text{Im} z \neq 0$  en sus dominios de definición y son Hölder continuas con exponente  $\nu \leq 1$ ,  $\nu < \alpha - 1/2$  para

$$z \in \mathbb{R}^+ - \{ |1/c_1 - 1/c_2| \}$$

Como  $\mathbb{R} - \sqrt{\mu}$  está contenido en la resolvente de h,  $R^\pm$  entonces se pueden definir en estos puntos como el valor de la resolvente y con esto  $R^\pm$  resultan analíticas en esos puntos.

Notemos que para  $\alpha > 0$ ,  $L^2_\alpha(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  y  $H_{2,\alpha}(\mathbb{R}) \subset H_2(\mathbb{R})$ , entonces como  $R(z) : L^2_\alpha(\mathbb{R}) \rightarrow H_{2,\alpha}(\mathbb{R}) \forall z$  en la resolvente de h, tiene sentido pensar a  $R(\mu \mp i\epsilon)$  como operadores de  $L^2_\alpha$  en  $H_{2,\alpha}$ . Ahora, pensar en el limite de  $R(\mu \mp i\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  (con  $\mu > 0$ ) en la topologia uniforme de  $\mathcal{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}), H_{2,\alpha}(\mathbb{R}))$  no tiene sentido pues todos los puntos en  $[0, \infty)$ , pertenecen al espectro de h y por lo tanto ahí el operador  $(h - \mu)^{-1}$  no está en  $\mathcal{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}), H_{2,\alpha}(\mathbb{R}))$ . Lo que se está haciendo es tomar un dominio mas pequeño para los operadores  $R(\mu \mp i\epsilon)$  y un rango mas grande cambiándole la topologia a estos dos conjuntos lográndose con esto la existencia del limite en la topologia uniforme de  $\mathcal{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}), H_{2,\alpha}(\mathbb{R}))$ . La importancia de este logro para nosotros radica en que podemos establecer la proposición P<sub>2</sub>-1 y, al extender analíticamente  $\mathcal{D}(k, y)$  de una manera que se mostrará posteriormente, podremos completar la prueba de (b) utilizando (a).

El que  $R(\mu \mp i\epsilon)$  sean operadores en  $\mathcal{B}(L^2_\alpha(\mathbb{R}), H_{2,\alpha}(\mathbb{R}))$  se prueba en el apéndice III(A). Para la demostración del lema ver [W1].

Como  $\hat{f}(k,y) \in L^2(\mathbb{R})$   $\forall k \in \mathbb{R}^n$ , con la ayuda del lema tenemos la siguiente proposición:

Proposición B-1  $\hat{V}(k,y) = R(\lambda/a^2 - k^2) \hat{f}(k,y)$   $\forall k \in \mathbb{R}^n$   
 que cumplen con  $\lambda/a^2 - k^2 \in \mathbb{R} - (\{0\} \cup \{\lambda/c_1^2 - \lambda/c_2^2\} \cup \sigma_p(h))$

Prueba:

Por el lema 1 tenemos que en la norma de  $H^2(\mathbb{R}^n)$ :

$$R^\pm(\lambda/a^2 - k^2) \hat{f}(k,y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(\lambda/a^2 - k^2 \pm i\epsilon) \hat{f}(k,y) \quad \text{III-14}$$

si  $\lambda/a^2 - k^2 \in \mathbb{R} - (\{0\} \cup \{\lambda/c_1^2 - \lambda/c_2^2\} \cup \sigma_p(h))$

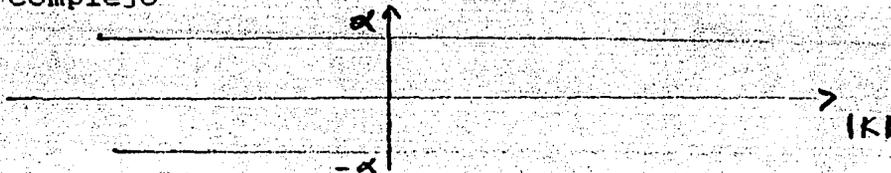
utilizando III-9 en III-14 tenemos:

$$\begin{aligned} R^\pm(\lambda/a^2 - k^2) \hat{f}(k,y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(\lambda/a^2 - k^2 \pm i\epsilon) (h - [\lambda/a^2 - k^2 \pm i\epsilon] \pm i\epsilon) \hat{V}(k,y) \\ &= \hat{V}(k,y) \pm \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon R(\lambda/a^2 - k^2 \pm i\epsilon) \hat{V}(k,y) \end{aligned}$$

y, como se prueba en el apéndice III(B), este último límite es cero:

$$\therefore \hat{V}(k,y) = R^\pm(\lambda/a^2 - k^2) \hat{f}(k,y) \quad \text{III-15}$$

Por otro lado,  $\hat{f}(k,y)$  para cada  $y$  la podemos ver como una función de  $|k|$  con  $k = |k|w$   $w \in \mathbb{R}^n$  fijo y  $|w| = 1$ . Pero esta función de  $|k|$  definida en  $\mathbb{R}$  la podemos extender a una banda en el plano complejo



donde resulta ser analítica (la  $\alpha$  en este caso es la misma que se tiene en III-5). La demostración de este hecho se tiene en el apéndice III(C). Entonces utilizando este hecho y el lema tenemos que  $\hat{V}(k,y)$  puede ser extendida analíticamente a las bandas  $0 < \text{Im}|k| < \alpha$  y  $-\alpha < \text{Im}|k| < 0$  y de hecho es Hölder continua como función de  $|k|$  siempre y cuando  $k$  cumpla la condición que se señala para la proposición B-1. Por la proposición B-1 las extensiones de  $\hat{V}(k,y)$  coinciden analíticamente. Entonces por (a) la extensión de  $\hat{V}(k,y)$  debe ser cero; en particular  $\hat{V}(k,y) = 0$  para  $k^2 > \lambda/a^2$  y  $y > M$ .///

En vista del resultado obtenido tenemos que  $V(x,y)$  debe ser cero para  $y > M$  y con esto  $U(x,y)$  debe ser cero para  $y > M$ . Entonces  $U$  se anula en un subconjunto de  $\Omega$  y cumple con las

hipótesis del teorema de continuación única (ver apéndice III(D))  
concluimos que  $U=0$  en  $\mathcal{A}$ .

## CAPITULO IV

En este capítulo seguiremos trabajando con el mismo propagador acústico definido anteriormente. Se mostrará la prueba de un teorema sobre dicho propagador acerca de eigenvalores positivos análogo al teorema del capítulo anterior, pero en esta ocasión se darán condiciones distintas sobre la velocidad de propagación en la guía de ondas tanto en la perfecta como en la deformada. El teorema es demostrado con la ayuda del teorema del virial para obtener la estimación de Mourre de un operador convenientemente definido siguiéndose la prueba con ideas de [F] y de un teorema de extensión única (apéndice III(D)). Esto hace la técnica de demostración bastante distinta a la utilizada en el capítulo III.

En lo siguiente  $\Omega$  denotará un dominio exterior.

**Teorema principal B.** Tomemos  $c_0(y)$  y  $C(x,y)$  funciones medibles a valores reales que satisfacen

$$0 < c_0 \leq c_0(y), \quad C(x,y) \leq c_1 \quad \text{IV-1}$$

Supongamos además que esas funciones cumplen con :

$$|c_0(y) - c_1| \leq C (1+y)^{-1-\delta} \quad y > 0 \quad \text{IV-2}$$

$$|c_0(y) - c_0| \leq C (1+|y|)^{-1-\delta} \quad y < 0 \quad \text{IV-3}$$

con  $c, \delta, c_1, c_0$  constantes positivas y  $c_1 \leq c_0$ .

$$|C(x,y) - c_0(y)| \leq C (1+|x|^2 + |y|^2)^{-\frac{1-\delta}{2}} \quad C, \delta > 0 \quad \text{IV-4}$$

Supongamos además que existe  $\psi \in L^2(\Omega)$  que satisface

$$-\Delta C(x,y) \psi = \lambda \psi$$

es el sentido distribucional en  $\Omega$  para alguna  $\lambda > 0$  ; entonces  $\psi = 0$  a.e. en  $\Omega$ .

**Prueba :**

Tomemos la bola de radio  $R$  que contiene a  $\mathbb{R}^{n-1} \cap \Omega$ . Sea  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  que satisface  $\phi = 0$  en la bola de radio  $R+1$  y  $\phi = 1$  fuera de la bola de radio  $R+2$ . Sea  $V = \phi \psi$ , entonces  $V \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$  y además cumple con:

$$(-\Delta + q_1(y) + q_2(x,y) - \lambda/c_0^2) V = g \quad \text{IV-5}$$

donde  $q_1(y) = -\lambda/c_0^2(y) + \lambda/c_1^2$  IV-6

También se puede suponer  $c_1 \leq c_0$ . Solo en una ocasión se utiliza esta relación y es a través de la definición de una constante.

$$g_2(x,y) = 1/c^2(y) - 1/c^2(x,y)$$

IV-7

$$g(x,y) = (\Delta \phi) \psi - 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

IV-8

con 
$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$$

Sea  $B: H_0^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$  dado por  $B = -\Delta + q(y) + q(x,y)$   
 Tomemos  $D$  el generador de dilataciones dado por  $D = D_x + D_y$  con

$$D_x = -\frac{i}{4} \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} x_j x_j$$

$$D_y = -\frac{i}{4} \left( y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} y \right)$$

donde  $D_x$  y  $D_y$  son definidos en sus máximos dominios (las derivadas son en el sentido distribucional)

El siguiente lema establece la estimación de Mourre para  $B$ .

Lema 1. Para cualquier  $\mu > q = 1/c^2 - 1/c^2$  positivo existen un intervalo abierto  $\Delta$  que contiene a  $\mu$ , una constante positiva  $\gamma$  y un operador compacto  $K$  tal que

$$E(\Delta) i [B, D] E(\Delta) \geq \gamma E(\Delta) + K \quad \text{IV-9}$$

donde  $E(\Delta)$  designa el operador espectral de  $B$  asociado a  $\Delta$ . El conmutador  $i[B, D]$  se define como una forma cuadrática de la siguiente manera: Para  $\phi, \psi \in D(B) \cap D(D)$

$$( \phi, i [B, D] \psi ) = i \{ (B\phi, D\psi) - (D\phi, B\psi) \} \quad \text{IV-10}$$

Notese que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$  está contenido en el dominio de  $D$  por lo que  $D(B) \cap D(D)$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Prueba del lema:

Sea  $f$  una función en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$  tal que  $f(y)=1$  en una pequeña vecindad de  $\mu$  (mas adelante se tendrá una estimación de que tan pequeño debe ser el soporte de  $f$  y con esto que tan pequeña debe ser esta vecindad).

Sea  $C = f(B_0) i [B_0, D] f(B_0)$  donde  $B_0: H_0^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$  es dado por  $B_0 = -\Delta + q(y)$  y  $i [B_0, D]$  se define como forma cuadrática, entonces  $C$  queda definido (como forma cuadrática) por:

$$( \phi, C \psi ) = ( f(B_0) \phi, i [B_0, D] f(B_0) \psi ) \quad \forall \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \quad \text{IV-11}$$

utilizando la forma explicita de  $D$  tenemos (ver apéndice IV(A))

$$( \phi, C \psi ) = ( \phi, f(B_0) \{ -\Delta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - y \right) f(B_0) \psi ) \quad \forall \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \quad \text{IV-12}$$

esta propiedad nos permite demostrar que  $C$  coincide con la forma cuadrática asociada a un operador acotado que denotaremos también por  $C$ .

Sea  $F$  el operador de transformada de Fourier en la variable  $x$ . Definamos  $\hat{C} = FCF^{-1}$ , entonces  $\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$  (ver apéndice IV(B))

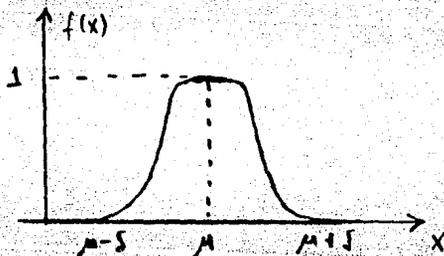
con  $\hat{C}_1 = k^2 f(k^2+h)$  IV-13

$\hat{C}_2 = f(k^2+h) i [h, D_y] f(k^2+h)$  IV-14

con  $h = -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} + f_1(y)$  y  $D(h) = H_2(\mathbb{R})$  IV-15

donde  $h$  tiene la importante propiedad de que su espectro esencial es  $[0, \infty)$  y no tiene eigenvalores positivos (ver apéndice IV(C))

Como  $h$  es acotado por abajo (pues  $\frac{1}{2y^2} \geq 0$  y  $q(y)$  es acotada) entonces por el teorema I-13 el espectro de  $h+k$  está contenido en  $[-c+k^2, \infty)$  con  $c = \text{constante} \geq 0$



Entonces si  $k$  es tal que  $k^2 - c > \mu + \delta$ , la resolución de la identidad asociada a  $h+k$  es tal que  $E(\lambda) = 0$  si  $\lambda \leq \mu + \delta$ . Como

$f(k^2 + h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k^2 + h) dE(\lambda)$  entonces  $f(k^2 + h) = 0$ . Por lo tanto  $\hat{C}$  es distinto de cero solo cuando  $k^2 \leq \mu + \delta + c$  (o sea cuando  $k$  está en un compacto  $K \in \mathbb{R}^n$ ).

**Proposición P-1** Podemos tomar el soporte de  $f$  lo suficientemente pequeño para que  $\hat{C} \geq \epsilon f(k^2 + h)$  para alguna  $\epsilon > 0$ .

**Prueba:** (de la proposición P-1) : Probaremos seis aseveraciones que nos darán como consecuencia esta proposición.

Tomemos  $P_p$  y  $P_c$  los proyectores ortogonales asociados a  $h$  en  $\mathcal{H}_p$  y  $\mathcal{H}_c$  respectivamente.

**Aseveración A-1** . Sea  $\delta_1$  cualquier real positivo, entonces podemos escoger el soporte de  $f$  lo suficientemente pequeño para que :

$$\hat{C}_1 \geq (\mu - \delta_1) P_p f(k^2+h) + P_c k^2 f(k^2+h)$$
 IV-16

**Prueba** (de la aseveración A-1) Será suficiente con probar que

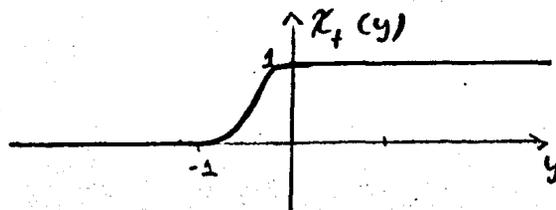
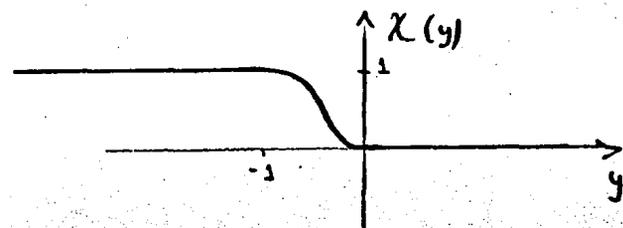
$$P_c k^2 f^2(k^2+h) \geq (\mu - \delta_1) P_p f^2(k^2+h)$$
 IV-17

Si  $k^2 \geq \mu - \delta_1$  es inmediato IV-17.

Supongamos que  $k^2 < \mu - \delta$ , y tomemos el soporte de  $f$  de tal modo que  $\mu - \delta > \mu - \delta$ . Probaremos que  $P_p f(k^2 + h) = 0$ . Como  $P_p f(k^2 + h) = f(k^2 + h) \chi$  y  $f(k^2 + h) \subset [-c + k^2, k^2]$  entonces  $f(k^2 + h) = 0$  ///

Definamos ahora dos funciones  $\chi_-$  y  $\chi_+$  en  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$  como sigue:

$$\chi_-(y) = 1 \text{ si } y < -1 ; \chi_-(y) = 0 \text{ si } y > 0 ; \chi_+ = 1 - \chi_-$$



estas dos funciones nos serán muy útiles cuando hagamos uso de IV-2 y IV-3.

Notemos que  $\hat{C}_i = \hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i + \hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i + \hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i + \hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i$ . Las siguientes aseveraciones nos permitirán obtener desigualdades para los términos de la anterior ecuación.

Aseveración A-2. Podemos tomar el soporte de  $f$  lo suficientemente pequeño para que dada  $\delta_2 > 0$ :

$$P_p \hat{C}_i P_c + P_c \hat{C}_i P_p \geq -\delta_1 f(k^2+h) - \delta_2 f(k^2+h) P_p \chi_- P_c f(k^2+h) - \delta_2 f(k^2+h) P_c \chi_- P_p f(k^2+h)$$

IV-18

Prueba:

$$\hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i = P_p f(k^2+h) i \left[ -\frac{1}{2\delta_1} + \delta_2(y), \delta_2 \right] f(k^2+h) P_c$$

como  $f(k^2+h) i \left[ -\frac{1}{2\delta_1}, \delta_2 \right] f(k^2+h) = f(k^2+h) \left( -\frac{1}{2\delta_1} \right) f(k^2+h)$  (ver apéndice IV(A)), entonces

$$\hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i = P_p f(k^2+h) h f(k^2+h) P_c + P_p f(k^2+h) i \left[ \delta_2(y), \delta_2 \right] f(k^2+h) P_c - P_p f(k^2+h) \delta_1 f(k^2+h) P_c$$

$$= P_p f(k^2+h) i \left[ \delta_2, \delta_2 \right] f(k^2+h) P_c - P_p f(k^2+h) \delta_1 f(k^2+h) P_c \text{ IV-19}$$

Tomemos ahora una función  $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \ni g=1$  en el soporte de  $f$ , entonces  $f(k^2+h) = f(k^2+h)g(k^2+h)$  (teorema I-15) y en IV-19:

$$\hat{P}_i \hat{C}_i \hat{P}_i = f(k^2+h) P_p g(k^2+h) i \left[ \delta_2(y), \delta_2 \right] g(k^2+h) P_c f(k^2+h) - f(k^2+h) P_p g(k^2+h) \left[ \delta_1 \chi_+ + (\delta_1 - \delta_2) \chi_- + \delta_2 \chi_- \right] g(k^2+h)$$

$$\cdot P_c f(k^2+h) \dots \dots \dots \text{IV-20}$$

Análogamente:

$$\hat{P}_c P_c = f(k^2+h) P_c g(k^2+h) i [q_1, D_y] g(k^2+h) P_c f(k^2+h) - f(k^2+h) P_c g(k^2+h) [q_1 X_+ + (q_1 - q_-) X_- + q_- X_-] g(k^2+h) P_c f(k^2+h) \quad \text{IV-21}$$

Ahora hagamos lo que será una muy importante descomposición:

$$g(k^2+h) i [q_1, D_y] g(k^2+h) = g(k^2+h) i [(q_1 - q_-) X_- + q_- X_- + q_1 X_+, D_y] g(k^2+h) \\ = g(k^2+h) \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} y (q_1 - q_-) X_- + \frac{1}{2} (q_1 - q_-) X_- y \frac{d}{dy} + \frac{1}{2} (q_1 - q_-) X_- - \frac{1}{2} q_- \left( \frac{d}{dy} X_- \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} y q_1 X_+ + \frac{1}{2} y q_1 X_+ \frac{d}{dy} + \frac{1}{2} q_1 X_+ \right\} g(k^2+h) \quad \text{IV-22}$$

Notemos que todas las cantidades  $y (q_1 - q_-) X_-$ ,  $\frac{1}{2} (q_1 - q_-) X_-$ ,  $\frac{1}{2} q_- \left( \frac{d}{dy} X_- \right)$ ,  $y q_1 X_+$ ,  $\frac{1}{2} q_1 X_+$  son acotadas y tienden a cero en  $\infty$  en vista de IV-2 y IV-3. Entonces por el teorema de Rellich (ver apéndice IV(F)) el operador entre parentesis en IV-22 multiplicado por  $g(k^2+h)$  es compacto en  $L(\mathbb{R})$ ; dicho operador lo denotaremos por  $i [q_1, D_y] g(k^2+h)$ . También el operador  $[q_1 X_+ + (q_1 - q_-) X_-] g(k^2+h)$  es compacto. Por lo tanto la ecuación IV-21 puede ser escrita como:

$$\hat{P}_c P_c = f(k^2+h) P_c g(k^2+h) K g(k^2+h) P_c + (k^2+h) - f(k^2+h) P_c q_- X_- P_c f(k^2+h) \quad \text{IV-23}$$

con  $K$  un operador compacto en  $L(\mathbb{R})$ .

Ahora notemos el hecho significativo de que  $P_c g(k^2+h)$  para cada  $k$  fijo tiende a cero fuertemente cuando la longitud del soporte de  $g$  tiende a cero. Esto lo podemos ver del siguiente hecho: Sea  $u \in L(\mathbb{R})$  entonces si  $\{E(\lambda)\}$  es la familia espectral de  $h$

$$\|g(k^2+h) P_c u\|^2 = \int_0^\infty |g(k^2+h)|^2 d(E(\lambda) P_c u, u)$$

Si denotamos por  $E_1, E_2, E_3, \dots$  los eigenvalores negativos de  $h$  con  $E_1 < E_2 < E_3, \dots$  y  $E_0 = 0$  si cero es un eigenvalor; tenemos:

$$E(\lambda) P_c = \begin{cases} E(\lambda) & \text{si } \lambda < E_1 \\ E(\lambda) - \sum_{1 \leq j \leq k} E(E_j) - E(E_0) & \text{si } E_k \leq \lambda < E_{k+1} \\ E(\lambda) - P_c & \text{si } \lambda \geq 0 \end{cases}$$

entonces la función  $(E(\lambda) P_c u, u)$  es continua en todas partes y con esto la medida de cada punto es cero. Entonces el teorema de

convergencia dominada de Lebesgue nos garantiza que si el soporte de  $g$  tiende a cero ( $g$  siempre debe ser uno en una vecindad de  $\mu$ ) casi dondequiera relativo a la medida asociada a  $(E(\lambda), u, u)$  entonces  $\|g(k^i+h)P_c\|$  tiende a cero.

Más aún, dada una  $k_0$  arbitraria en  $\tilde{K}$  (el conjunto compacto ya determinado) podemos escoger una pequeña vecindad  $V_{k_0}$  alrededor de  $k_0$  de tal modo que  $g(k^i+h)P_c$  tienda a cero fuertemente cuando el soporte de  $g$  tiende a cero para toda  $k \in V_{k_0}$ .

Por el apéndice IV(D) tenemos que dada  $k_0 \in \tilde{K}$  existe una vecindad  $V_{k_0}$  alrededor de  $k_0$  donde  $Kg(k^i+h)P_c$  tiende a cero en la topología uniforme de  $\beta(L(\mathbb{R}), L(\mathbb{R}))$  cuando el soporte de  $g$  tiende a cero.

Ahora,  $\tilde{K}$  es cubierto por la unión de todas las vecindades  $V_{k_0}$  con  $k_0 \in \tilde{K}$ . entonces como  $\tilde{K}$  es compacto existe una colección finita de tales vecindades que cubren a  $\tilde{K}$ , esto es:  $\tilde{K} \subset \bigcup_{i=1}^N V_{k_i}$ . Entonces podemos tomar el soporte de  $g$  suficientemente pequeño para que  $g(k^i+h)Kg(k^i+h)P_c$  tenga norma menor que  $\lambda/2$  para todo  $k \in \tilde{K}$ .

Por lo tanto tenemos que podemos tomar el soporte de  $g$  suficientemente pequeño para que:

$$P_p g(k^i+h) K g(k^i+h) P_c \geq -\lambda/2 \quad \text{y debido a IV-23}$$

$$\Rightarrow P_p \hat{C}_i P_c \geq -\lambda/2 f^2(k^i+h) - \eta f(k^i+h) P_p \lambda - P_c f(k^i+h) \quad \text{IV-24}$$

haciendo lo mismo para que  $P_{C_i}^{\hat{C}_i}$  queda demostrada la aseveración  $A_{-2}$ . ///

Aseveración  $A_{-3}$ . Dado  $\lambda_3 > 0$  podemos elegir el soporte de  $f$  suficientemente pequeño para que:

$$P_c \hat{C}_i P_c \geq h P_c f^2(k^i+h) - \lambda_3 f^2(k^i+h) - \eta f(k^i+h) P_c \lambda - P_c f(k^i+h) \quad \text{IV-25}$$

prueba:

$$P_c \hat{C}_i P_c = P_c f(k^i+h) i [h, \lambda_3] f(k^i+h) P_c$$

Si tomamos  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  con  $g=1$  en el soporte de  $f$  entonces

$$P_c \hat{C}_i P_c = h P_c f^2(k^i+h) + f(k^i+h) P_c g(k^i+h) i [\eta, \lambda_3] g(k^i+h) P_c f(k^i+h) - f(k^i+h) P_c s(k^i+h) [\eta, \lambda_3 + (\eta, -\eta) \lambda - \eta \lambda] \cdot g(k^i+h) P_c f(k^i+h) \dots \dots \dots \text{IV-26}$$

La demostración se sigue de IV-26 haciendo lo análogo a la demostración de la aseveración  $A_{-2}$ , la cual se basa en el hecho de que  $g(k^i+h)$  tiende fuertemente a cero cuando el soporte de  $g$  tiende a cero para  $k_0 \in \tilde{K}$ . ///

Ahora veamos el término  $P_{C_i}^{\hat{C}_i}$ . Tomemos  $\gamma(y)$  una función en  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

que vale uno en una pequeña vecindad alrededor del origen. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 P_0 &= (P_0 \gamma(h) + P_0 (1-\gamma(h))) \hat{C}_2 (\gamma(h) P_0 + (1-\gamma(h)) P_0) \\ &= P_0 \gamma(h) \hat{C}_2 \gamma(h) P_0 + P_0 \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) P_0 + P_0 (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 \gamma(h) P_0 \\ &+ P_0 (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) P_0 \end{aligned} \quad \text{IV-27}$$

Aseveración A<sub>4</sub>. Podemos escoger el soporte de  $f$  lo suficientemente pequeño para que

$$P_0 (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) P_0 = 0$$

Prueba:

Como  $h$  es acotado por abajo, sus eigenvalores también lo son y como el espectro esencial de  $h$  es  $[0, \infty)$  y  $h$  no tiene eigenvalores positivos, los eigenvalores de  $h$  solo se pueden acumular en el cero. Denotemos con  $E_i$ ,  $i \in N$  a los eigenvalores de  $h$  (en forma creciente) y como  $P_i$ ,  $i \in N$  el eigenproyector respectivo. También definamos  $P_\infty$  como el eigenproyector asociado al cero si este es eigenvalor y en caso contrario como cero.

Sea  $n \in N$  y  $m_n = \min\{E_p - E_q / 1 \leq q < p \leq N\}$ . Tomemos el soporte de  $f$  de modo que  $0 < \lambda \leq m_n$ .

Sea  $k \in \mathbb{R}$ , entonces cada vez que  $k + E_l$  está en el soporte de  $f$  se tiene que  $k + E_l$  no está para todo  $l \neq k$  y  $l = 0, 1, 2, \dots, N$

$$\Rightarrow f(k + E_j) f(k + E_l) = 0 \quad \forall j \neq l \quad 1 \leq j, l \leq N \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(k + E_j) P_j [h, D_y] P_l f(k + E_l) = 0 \quad \forall j \neq l \quad 1 \leq j, l \leq N \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{IV-28}$$

Por el teorema del virial (ver la proposición II.4 de [M])

$$\forall j \in N: P_j [h, D_y] P_j \quad \text{y} \quad P_\infty [h, D_y] P_\infty = 0 \quad \text{IV-29}$$

entonces

$$\begin{aligned} &P_0 (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) P_0 = \\ &= (1-\gamma(h)) P_0 f(k+h) \hat{C}_2 [h, D_y] f(k+h) P_0 (1-\gamma(h)) \end{aligned} \quad \text{IV-30}$$

Pero  $(1-\gamma(h)) P_0 f(k+h) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0} P_\mu (1-\gamma(E_\mu)) f(k+E_\mu)$

y como en una vecindad de cero  $\gamma(\lambda) = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \exists 1-\gamma(E_\mu) = 0$  si  $\mu > N$  (esta es la  $N$  que utilizamos en IV-28)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (1-\gamma(h)) \rho_j f(k+h) i [h, D_j] f(k+h) \rho_k (1-\gamma(h)) = \\ & = \left[ \sum_{j=1}^N (1-\gamma(E_j)) f(k+E_j) \rho_j \right] i [h, D_j] \left[ \sum_{k=1}^N (1-\gamma(E_k)) f(k+h) \rho_k \right] \\ & = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (1-\gamma(h)) f(k+E_j) \rho_j i [h, D_j] \rho_k f(k+h) (1-\gamma(h)) \\ & = \sum_{j=1}^N (1-\gamma(h)) f(k+E_j) \rho_j i [h, D_j] \rho_j f(k+E_j) (1-\gamma(h)) \\ & + \sum_{j \neq k}^N (1-\gamma(h)) f(k+E_j) \rho_j i [h, D_j] \rho_k f(k+E_k) (1-\gamma(h)) \quad \text{IV-31} \end{aligned}$$

Por IV-28 y IV-29 en IV-31 tenemos que las dos sumas son cero y de IV-30 concluimos. ///

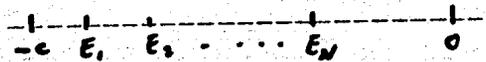
Aseveración A<sub>5</sub>. Dado  $h > 0$  podemos escoger el soporte de  $\gamma$  lo suficientemente pequeño de tal modo que:

$$\begin{aligned} f(k+h) \rho_j \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) \rho_j + \rho_j (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 \gamma(h) \rho_j f(k+h) &\geq -\chi_j f(k+h) - \\ -\gamma_j f(k+h) \rho_j \{ \gamma(h) \chi_- (1-\gamma(h)) + (1-\gamma(h)) \chi_+ \gamma(h) \} \rho_j f(k+h) &\quad \text{IV-32} \end{aligned}$$

Prueba:

Notemos que

$$\rho_{\infty} \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) \rho_j = \sum_{j=1}^N f(k^j) \rho_{\infty} i [h, D_j] (1-\gamma(E_j)) f(k^j+h) \rho_j \quad \text{IV-33}$$



tomemos  $m = \min\{m, |E_N|\}$  y redefinamos

el soporte de  $f \Rightarrow 0 < 2\delta < m'$  entonces todos los términos de IV-33 son cero y con esto

$$\rho_{\infty} \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) \rho_j = 0 \quad \text{IV-34}$$

$$\begin{aligned} \text{entonces } \rho_j \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) \rho_j &= \rho_j (1-\rho_{\infty}) \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) \rho_j \\ &= \sum_{j,l} \rho_j (1-\rho_{\infty}) \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) \rho_l \quad (\text{pues } \rho_j = \sum_{j \in M} \rho_j + \rho_{\infty} \text{ y } \rho_{\infty} (1-\gamma(h)) = 0) \\ &\stackrel{\text{IV-20}}{=} \sum_{j \neq l} \rho_j (1-\rho_{\infty}) \gamma(h) f(k^j+h) i \left[ -\frac{d^2}{2y^2} + \gamma_1(y), D_j \right] (1-\gamma(h)) \rho_l \cdot f(k^l+h) \\ &= \sum \rho_j f(k^j+h) (1-\rho_{\infty}) \gamma(h) \left[ -\gamma_j \chi_- + (\gamma_i - \gamma_-) \chi_+ - \gamma_j \chi_+ + i [\gamma_j, D_j] \right] \cdot \\ &\quad \cdot (1-\gamma(h)) \rho_l \cdot f(k^l+h) \quad \dots \dots \text{IV-35} \end{aligned}$$

Análogamente  $\rho_j (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 \rho_{\infty} \gamma(h) = 0$  con las mismas

condiciones que ya tenemos para el soporte de  $f$  y con esto:

$$P_0 (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 \gamma(h) P_0 = \sum_{j \neq l} f(k^2+h) P_j (1-\gamma(h)) \left( -\gamma_1 \chi_- + (\gamma_1 - \gamma_2) \chi_- - \gamma_1 \chi_+ + i [\gamma_1, \gamma_2] \right) \gamma(h) (1-P_0) P_l f(k^2+h) \dots \dots \dots \text{IV-36}$$

De las ecuaciones IV-35 y IV-36 obtenemos:

$$\begin{aligned} & P_0 \gamma(h) \hat{C}_2 (1-\gamma(h)) P_0 + P_0 (1-\gamma(h)) \hat{C}_2 \gamma(h) P_0 = \\ & = \sum_{j \neq l} P_j f(k^2+h) (1-P_0) \gamma(h) V f(k^2+h) (1-\gamma(h)) P_l + \\ & + \sum_{j \neq l} P_j f(k^2+h) (1-\gamma(h)) V f(k^2+h) (1-P_0) \gamma(h) P_l - \\ & - \gamma_1 \sum_{j \neq l} P_j f(k^2+h) (1-P_0) \gamma(h) \chi_- (1-\gamma(h)) P_l f(k^2+h) - \\ & - \gamma_1 \sum_{j \neq l} P_j f(k^2+h) (1-\gamma(h)) \chi_- (1-P_0) \gamma(h) f(k^2+h) \dots \dots \text{IV-37} \end{aligned}$$

donde  $V = i [\gamma_1, \gamma_2] - \gamma_1 \chi_+ - (\gamma_1 - \gamma_2) \chi_-$ .  
 Para obtener una cota inferior para los primeros dos términos de IV-37 notemos que  $(1-P_0) \gamma(h)$  tiende fuertemente a cero cuando el soporte de  $\gamma(\rho)$  se toma cada vez mas pequeño (esto es consecuencia del teorema espectral y del teorema de convergencia dominada de Lebesgue).

Tomemos  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  con  $g=1$  en el soporte de  $f$  entonces el primer término de IV-37 nos queda:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \neq l} P_j f(k^2+h) (1-P_0) \gamma(h) V f(k^2+h) (1-\gamma(h)) P_l = \\ & = f(k^2+h) \left\{ \sum_{j \neq l} P_j (1-P_0) \gamma(h) V g(k^2+h) (1-\gamma(h)) P_l \right\} f(k^2+h) \dots \text{IV-38} \end{aligned}$$

como  $Vg(k^2+h)$  es compacto (teorema de Rellich, ver apéndice IV(F)), entonces por el apéndice IV(D)  $(1-P_0) \gamma(h) V g(k^2+h) (1-\gamma(h))$  tiende en la norma de  $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  a cero cuando la longitud del soporte de  $\gamma(\rho)$  tiende a cero. Entonces dada  $\delta > 0$  podemos tomar el soporte de  $\gamma(\rho)$  suficientemente pequeño para que

$$\| (1-P_0) \gamma(h) V g(k^2+h) (1-\gamma(h)) \| \leq \delta/2$$

Sea  $K = (1-P_0) \gamma(h) V g(k^2+h) (1-\gamma(h))$ , entonces con relación a IV-38

$$\begin{aligned} \left| \left( \sum_{j \neq l} P_j K P_l \varphi, \varphi \right) \right| & \leq \sum_j \left( K \sum_{l \neq j} P_l \varphi, P_j \varphi \right) + \sum_j \left( P_j \varphi, P_j \varphi \right) \\ & = \left| \left( K \sum_j P_j \varphi, \sum_j P_j \varphi \right) \right| \leq \|K\| \left\| \sum_j P_j \varphi \right\|^2 \leq \|K\| \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j \neq l} \rho_j \kappa \rho_l \psi \geq -\delta_4/2$$

Análogamente para el segundo término de IV-37 tenemos que este es mayor o igual a  $-\delta_4/2$ .

Por otro lado, los dos últimos términos de IV-37 son iguales a

$$- \eta_- f(\kappa+h) \rho_+ (\gamma(h) \chi_- (1-\gamma(h)) + (1-\gamma(h)) \chi_- \gamma(h)) \rho_+ f(\kappa+h) \\ + \eta_+ f(\kappa+h) \left[ \sum_j \rho_j (\gamma(h) \chi_- (1-\gamma(h)) + (1-\gamma(h)) \chi_- \gamma(h)) \rho_j \right] f(\kappa+h)$$

como este último segundo término es positivo (tomando  $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ ) es inmediata la aseveración A-5. ///

Aseveración A-6. Dada  $\delta_5 > 0$  podemos tomar el soporte de  $\gamma$  lo suficientemente pequeño para que

$$\rho_+ \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) \rho_+ \geq -\delta_5 f(\kappa+h) - \eta_- \rho_+ f(\kappa+h) \gamma(h) \cdot \\ \cdot \chi_- \gamma(h) f(\kappa+h) \rho_+$$

IV-39

Prueba:

$$\rho_+ \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) \rho_+ = \rho_+ (\rho_+ + (1-\rho_+) \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) (\rho_+ + (1-\rho_+) \rho_+)) \\ = \rho_+ \rho_+ \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) \rho_+ \rho_+ + \rho_+ (1-\rho_+) \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) \rho_+ + \\ + \rho_+ \rho_+ \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) (1-\rho_+) \rho_+ + \rho_+ (1-\rho_+) \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) (1-\rho_+) \rho_+$$

Y por el teorema del virial :

$$\rho_+ \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) \rho_+ = \sum_j \rho_j (1-\rho_+) \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) \rho_+ + \sum_j \rho_+ \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) (1-\rho_+) \rho_j \\ + \sum_{j \neq l} \rho_j (1-\rho_+) \gamma(h) \hat{c}_2 \gamma(h) (1-\rho_+) \rho_l \\ = \sum_j f(\kappa+h) \left\{ \rho_+ \gamma(h) (-\eta_- + i [\eta_+, D_y]) \gamma(h) (1-\rho_+) \rho_j + \rho_j (1-\rho_+) \gamma(h) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (-\eta_- + i [\eta_+, D_y]) \gamma(h) \rho_+ \right\} f(\kappa+h)$$

$$+ \sum_{j \neq l} f(\kappa+h) \left\{ \rho_j (1-\rho_+) \gamma(h) (-\eta_- + i [\eta_+, D_y]) \gamma(h) \rho_l \right\} f(\kappa+h)$$

haciendo  $\eta_- = \eta_- \chi_- + (\eta_- - \eta_-) \chi_- + \eta_- \chi_+$

$$V = -(\eta_- - \eta_-) \chi_- - \eta_- \chi_+ + i [\eta_+, D_y]$$

$$P_0 y(h) \hat{c}_2 y(h) P_0 = \sum_j f(k^j+h) \{ P_{\infty} y(h) v (1-P_{\infty}) y(h) P_j + P_j (1-P_{\infty}) y(h) \cdot \\ \cdot v y(h) P_{\infty} \} f(k^j+h) + \sum_{j \neq 1} f(k^j+h) \{ P_j (1-P_{\infty}) y(h) v y(h) P_{\infty} \} f(k^j+h) -$$

$$- \gamma_1 f(k^1+h) P_1 y(h) \chi - P_1 y(h) f(k^1+h) + \gamma_1 f(k^1+h) P_{\infty} y(h) \chi - y(h) P_{\infty} f(k^1+h) + \\ + \gamma_1 \sum f(k^j+h) P_j y(h) \chi - y(h) P_j f(k^j+h)$$

IV-40

y notando que los dos últimos términos de la anterior ecuación son positivos, la aseveración se probará si demostramos que :

$$\sum_j P_{\infty} y(h) v y(h) (1-P_{\infty}) P_j + P_j (1-P_{\infty}) y(h) v y(h) P_{\infty} + \\ + \sum_{j \neq 1} P_j (1-P_{\infty}) y(h) v y(h) P_{\infty} \geq -\gamma_5$$

IV-41

si tomamos el soporte de  $y(p)$  lo suficientemente pequeño. Pero esto último es consecuencia de que  $v y(h)$  es compacto y  $(1-P_{\infty}) y(h)$  tiende fuertemente a cero si el soporte de  $y(h)$  tiende a cero. La manera de hacer ver que IV-41 es válido es análoga a como se hizo en la proposición A<sub>2</sub>-5. ///

De las aseveraciones anteriores tenemos :

$$\hat{c} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 \geq (\mu - \gamma_1) P_1 f'(k^1+h) + P_2 k^1 f'(k^1+h) - \\ - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) f(k^1+h) - \gamma_1 f(k^1+h) \{ P_1 \chi - P_2 + P_2 \chi - P_2 + \\ + P_2 \chi - P_2 + P_1 [ y(h) \chi - (1-y(h)) + (1-y(h)) \chi - y(h) + y(h) \chi - y(h) P_1 ] \cdot \\ \cdot f(k^1+h) + P_2 f(k^1+h) h P_2 f(k^1+h)$$

como  $-\gamma_1 f(k^1+h) P_1 (1-y(h)) \chi - (1-y(h)) f(k^1+h) P_1 \leq 0$

entonces:

$$\hat{c} \geq (\mu - \gamma_1) P_1 f(k^1+h) + (k^1+h) P_2 f(k^1+h) - (\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) f(k^1+h) - \\ - \gamma_1 f(k^1+h) \chi - f(k^1+h) \dots \dots \dots \text{IV-42}$$

Como  $0 \leq \chi_0 \leq 1 \Rightarrow -\gamma_1 f(k^1+h) \chi - f(k^1+h) \geq -\gamma_1 f^2(k^1+h)$

entonces

$$\hat{c} \geq (\mu - \gamma_1 - \sum_{i=1}^5 \gamma_i) f(k^1+h) + (\mu - P_1) P_2 f(k^1+h) + (k^1+h) P_2 f(k^1+h)$$

Tomamos  $\gamma_1 < \mu$  para que  $(\mu - \gamma_1) P_2 f(k^1+h) + (k^1+h) P_2 f(k^1+h) \geq 0$

entonces  $\hat{C} \geq (\mu - \eta - \sum_{i=1}^k \lambda_i) f(k^2 + h)$   
 y como  $\mu - \eta > 0$  podemos tomar  $\sum_{i=1}^k \lambda_i$  de tal modo que  $\delta = \mu - \eta - \sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$

$\therefore \hat{C} \geq \delta f(k^2 + h)$  con lo que se demuestra la

proposición P<sub>1</sub>-1. ///

Como  $Ff(B_0)F^{-1} = f(FB_0F^{-1}) = f(k^2 + h)$  y la transformada de Fourier es un operador unitario tenemos de la proposición P<sub>1</sub>-1 que

$$C \geq \delta f(B_0) \quad \text{IV-43}$$

Proposición P<sub>1</sub>-2 : Sea  $F(\varphi) \in C_c(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $F(B) - F(B_0)$  es compacto como operador de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Prueba:

Dada  $\delta > 0$  }  $F_\delta$  función polinomial en  $(y+\delta)^{-1}$  con  $\delta$  lo suficientemente grande para que  $\|F(y) - F_\delta(y)\|_\infty < \delta$ . Notemos que si  $F(B) - F(B_0)$  es compacto, entonces  $F(B) - F(B_0)$  también lo es puesto que  $\|F(B) - F(B_0)\| \leq \delta/2$  y  $\|F(B_0) - F_\delta(B_0)\| \leq \delta/2$  por lo que

$$\| [F(B) - F(B_0)] - [F_\delta(B) - F_\delta(B_0)] \| < \delta \quad \forall \delta > 0$$

$F_\delta(B) - F_\delta(B_0) \xrightarrow{\text{m.p.}(L^2, L^2)} F(B) - F(B_0)$ , entonces si  $F_\delta(B) - F_\delta(B_0)$  es compacto  $\forall \delta > 0 \Rightarrow F(B) - F(B_0)$  es compacto (ver I.1.4).

Probemos ahora que  $F(B) - F(B_0)$  es compacto.  $F$  es una combinación lineal de  $(y+\delta)^{-m}$   $\delta_1 \leq m \leq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow F(B) - F(B_0)$  es combinación lineal de  $(B+\delta)^{-m} - (B_0+\delta)^{-m}$ , pero esto último es igual a

$-\sum_{i=1}^m (B+\delta)^{-i} q_i(x,y) (B_0+\delta)^{-i}$ . Probaremos que  $(B+\delta)q_i(x,y)(B_0+\delta)^{-i}$  es compacto. Para esto notemos que  $(B_0+\delta)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$   $1 \leq i \leq k$  es un operador acotado siendo esto consecuencia de la desigualdad

$$\| (B_0+\delta)^{-1} \varphi \|_{H^1} \leq \| (-\Delta+1)(B_0+\delta)^{-1} \varphi \|_{L^2}$$

donde  $(B_0+\delta)$  es un operador acotado de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  si  $\delta$  es suficientemente grande para que  $-\delta \in \mathbb{R}(B_0)$  ( $B_0$  es acotado por abajo) y como  $-\Delta$  es cerrado entonces  $(-\Delta+1)(B_0+\delta)^{-1}$  es acotado en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Tomemos una sucesión  $\{u_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  acotada. Entonces la

^ Aquí  $H_2^1(\mathbb{R}^n)$  es considerado como el subespacio de funciones de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  que tienen primeras y segundas derivadas distribucionales en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  con la norma  $\|F\|_{H_2^1} = (\int_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2)^{1/2}$ .

^^ Esta desigualdad es consecuencia de las propiedades de la Transformada de Fourier.

$$\text{Como } i(q_1, D) = -\frac{1}{2} \nabla \cdot z q_2 + \frac{1}{2} q_2 z \cdot \nabla + \left(\frac{z \cdot z}{2}\right) q_2 \dots \text{IV-45}$$

$$\text{con } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad z = (x_1, \dots, x_n, y)$$

entonces usando IV-22 y IV-45 tenemos en IV-44 :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a) i(a, D) \tilde{f}(a) &= \hat{f}(a) f(a) i(a, D) f(a) \tilde{f}(a) + \\ &+ \tilde{f}(a) K_1 f(a) \end{aligned} \quad \text{IV-46}$$

donde  $K_1$  es un operador compacto.

Usando IV-43 tenemos:

$$\hat{f}(a) i(a, D) \tilde{f}(a) \geq \gamma \hat{f}(a) f(a) \tilde{f}(a) + \tilde{f}(a) K_1 \hat{f}(a) \quad \text{IV-47}$$

Por la proposición E-2  $f(B) - f(B_0) = K_2$  con  $K_2$  compacto. tenemos :

$$\begin{aligned} \hat{f}(a) i(a, D) \tilde{f}(a) &= \gamma \hat{f}(a) f(a) \tilde{f}(a) + \tilde{f}(a) (K_1 - K_2) \hat{f}(a) \\ &= \gamma \hat{f}(a) \tilde{f}(a) + \tilde{f}(a) K_3 \hat{f}(a) \end{aligned} \quad \text{IV-48}$$

con  $K_3 = K_1 - K_2$  compacto.

Por el apéndice IV(E) tenemos que podemos encontrar  $E(\Delta)$  tal que  $f(B)E(\Delta) \neq E(\Delta)$ . entonces en IV-48 tenemos:

$$E(a) i(a, D) E(a) \geq \gamma E(\Delta) + K \quad \text{IV-49}$$

con  $K = E(\Delta) K_3 E(\Delta)$  que es a su vez otro compacto, probándose con esto el lema 1. ///

Por las demostraciones de los teoremas 2.1 y 3.1 de [F] se sigue del lema IV-1 que  $v=0$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces como  $v = \psi$  se tiene que  $\psi$  debe anularse fuera de la bola de radio  $R+2$  y por continuación única tenemos que  $\psi=0$  en  $\Omega$ , quedando con esto demostrado el teorema principal B. ///

## Observaciones.

-----

Los ejemplos tratados en el capítulo II, aunque no están identificados con un caso físico concreto, muestran que la aparición de eigenvalores positivos es factible tanto en Mecánica Cuántica como en acústica así como en algunas otras áreas de la física donde se tengan fenómenos de propagación de ondas tales como en elasticidad, fenómenos electromagnéticos, etc.. Entonces el estudio de la ausencia de eigenvalores positivos tiene su razón de ser tanto con respecto a las aplicaciones como con la teoría abstracta de los espectros de los operadores.

Por otro lado, el haber mostrado en los capítulos III y IV los teoremas principales A y B sobre ausencia de eigenvalores positivos, nos enseña el tipo de técnicas que son apropiadas para el estudio de estos problemas. Notemos que (y esto es algo que se recalcó desde un principio en este trabajo) un cambio en las hipótesis acerca de las características de la velocidad de propagación en la guía de ondas deformada con respecto a la perfecta nos lleva a una técnica de demostración considerablemente distinta.

En el caso del teorema A, las hipótesis III-2, III-3 y III-4 nos ayudan para concluir que  $\hat{V}(k,y) = 0$   $\forall k' < 1/c_1$ ,  $v > M$ . La hipótesis III-5, que consideramos es la que tiene mayor influencia en la determinación de la técnica a utilizarse, nos ayuda para poder hacer la extensión analítica para  $\hat{f}(k,y)$  a la banda  $|\text{Im}z| < \alpha$  que es justamente lo que, mediante el principio

del límite absorbivo, garantiza  $V=0$  y  $\rightarrow M$  y  $\dot{V}$   $K'$ .

En el caso del teorema IV las hipótesis están fuertemente ligadas a utilizar técnicas de compacidad que caracterizan la demostración en este caso.

Nótese que puede haber casos de guías de ondas deformadas que cumplan con las hipótesis del teorema III y no con las del IV (o viceversa). Entonces lo interesante está en tratar de buscar hipótesis sobre  $C(x,y)$  y  $C(y)$  de tal modo que muchos tipos de las guías de ondas mencionados queden contemplados y se siga teniendo ausencia de eigenvalores positivos. La técnica de demostración en este caso quizá pueda ser una combinación de ideas recogidas de las técnicas expuestas en los capítulos III y IV.



APENDICES DEL CAPITULO III

APENDICE III(A)

Probaremos que  $R(z)$  son operadores en  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}), H_{z, -\alpha}^2)$ , con  $z \in \Omega$

Nos basaremos en las siguientes relaciones :

para  $\alpha > 0$   $L^2_\alpha(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset L^2_{-\alpha}(\mathbb{R})$  III-A1

cumpléndose con relación a III-A1 :

para  $\alpha > 0$   $\|u\|_{L^2_\alpha}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2_{-\alpha}}^2$  III-A2

Sea  $\varphi \in L^2_\alpha$ , debemos demostrar que  $\|R(z)\varphi\|_{H_{z, -\alpha}^2} \leq C \|\varphi\|_{L^2_\alpha}$  para alguna constante  $C$ . Esto será consecuencia inmediata de probar:

(a)  $\|R(z)\varphi\|_{L^2_\alpha} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2_\alpha}$

(b)  $\|\frac{1}{\partial \bar{y}} R(z)\varphi\|_{L^2_\alpha} \leq C_2 \|\varphi\|_{L^2_\alpha}$

(c)  $\|\frac{1}{\partial y} R(z)\varphi\|_{L^2_\alpha} \leq C_3 \|\varphi\|_{L^2_\alpha}$

Para demostrar estas relaciones utilizaremos el hecho de que  $R(z) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$  con  $z \in \Omega(h)$ .

Utilizando III-A2 tenemos :

$$\|R(z)\varphi\|_{L^2_\alpha} \leq \|R(z)\varphi\|_{L^2} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2_\alpha}$$

lo que demuestra (a).

Para demostrar (b) y (c) notemos que  $\frac{1}{\partial \bar{y}} R(z)$  y  $\frac{1}{\partial y} R(z)$  son operadores cerrados definidos en todo el espacio ; entonces por el teorema de la gráfica cerrada están en  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ . Las demostraciones de (b) y (c) son ahora análogas a la de (a).

APENDICE III(B)

Proposición Sea  $H: D(H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador autoadjunto.  
 entonces  $\forall f$  en  $\mathcal{H}$  se tiene  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon R(\mu \pm i\epsilon)f = 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$   
 si  $\mu$  no es eigenvalor de  $H$ . ( $R(z)$  es la resolvente de  $H$ )

Prueba: Por cálculo funcional tenemos :

$$\| \epsilon R(\mu \pm i\epsilon) f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - (\mu \pm i\epsilon)|^2} d(E(\lambda) f, f)$$

con  $\{E(\lambda)\}$  la familia espectral asociada a  $H$ .  
 Entonces

$$\| \epsilon R(\mu \pm i\epsilon) f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{|\lambda - \mu \mp i\epsilon|^2} d(E(\lambda) f, f)$$

Sean  $f_{\epsilon}(\lambda) = \frac{\epsilon}{|\lambda - \mu \mp i\epsilon|^2}$   
 entonces  $f_{\epsilon}(\lambda) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  si  $\lambda \neq \mu$

entonces  $f_{\epsilon}(\lambda) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  a.e. (pues  $\mu$  no es eigenvalor)

y como  $\| f_{\epsilon}(\lambda) \| \leq 1 \quad \forall \epsilon > 0$   
 entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue<sup>^</sup> se  
 concluye. ///

<sup>^</sup> la medida asociada a  $(E(\lambda)f, g)$  es finita.

APENDICE III(C)

Probaremos que  $\hat{f}(k,y)$ , como función de  $k$  se puede definir en el subconjunto de  $\mathbb{C}$  donde están los números cuya parte imaginaria es, en valor absoluto, menor que  $\alpha$ .

(a) Primero demostraremos que  $\exp(\alpha|x|)f(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con la  $\alpha$  que aparece en III-5.

$$\text{Como } f(x,y) = -\Delta\phi - 2 \nabla\phi \cdot \nabla U + \Delta U \left( \frac{1}{c_1(x,y)} - \frac{1}{c_0(y)} \right)$$

donde  $\Delta\phi$  y  $\nabla\phi$  se anulan fuera de la bola de radio  $R+2$ , entonces solo es necesario demostrar que  $e^{\alpha|x|} \Delta U \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Tenemos entonces :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta U \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) \right|^2 e^{2\alpha|x|} dx dy = \Delta^2 \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 \frac{[c_0 - c]^2 [c_0 + c]^2}{c^4 c_0^2} e^{2\alpha|x|} dx dy$$

y en vista de que  $C(x,y)$  y  $C_0(y)$  cumplen con III-1 tenemos

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 [c_0 - c]^2 e^{2\alpha|x|} dx dy && \text{con } C \text{ constante} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 e^{-2\alpha|x|} e^{2\alpha|x|} dx dy < \infty && \text{pues } v \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

↑ Por III-5. ///

(b) Probaremos ahora que de  $\hat{f}(k,y)$  podemos definir para casi toda  $y$  una función de  $|k|$  en la franja del plano complejo en donde están los puntos cuya parte imaginaria es en valor absoluto menor que  $\alpha$ .

Tomemos

$$\hat{f}(k,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tilde{k} \cdot \tilde{x}} f(x,y) dx$$

como  $k = |k|w$  con  $|w|=1$ , entonces para  $w$  y " $y$ " fijos tenemos (haciendo  $|k| = \rho$ ) que:

$$\text{de } \rho \hat{f}(\rho, w, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\rho\tilde{w} \cdot \tilde{x}} f(x,y) dx \quad \text{nos da una función}$$

Consideremos ahora  $\rho = \rho_1 + i\rho_2$  con  $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ ; entonces

$$\hat{f}(\rho, w, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\rho_1\tilde{w} \cdot \tilde{x}} e^{\rho_2\tilde{w} \cdot \tilde{x}} f(x,y) dx$$

si hacemos  $g(x,y) = \exp(\alpha|x|) f(x,y)$ , entonces

$$\hat{f}(\rho, w, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\rho_1\tilde{w} \cdot \tilde{x}} e^{\rho_2\tilde{w} \cdot \tilde{x} - \alpha|x|} g(x,y) dx$$

por lo tanto si  $\rho_2 \tilde{w} \cdot \tilde{x} - \alpha|x| \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{f}(\rho, w, y)$  está

bien definida con  $\hat{f} = \hat{f}_1 + i\hat{f}_2$  (pues  $g(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$   $\forall y \in \mathbb{R}$ )

Ahora, si  $|\tau_1| < \alpha \Rightarrow |\tau_2 \cdot \omega \cdot x| \leq \alpha|x|$   
 entonces  $\tau_2 \cdot \omega \cdot x - \alpha|x| \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  ///

(c) Probaremos ahora que  $\hat{f}(\tau, \omega, y)$  es analítica para casi toda  $y$  si  $|\operatorname{Im} \tau| < \alpha$ .

Sea  $\tau$  fijo tal que  $|\operatorname{Im} \tau| < \alpha$   
 Tomemos cualquier sucesión  $\{h_n\} \subset \mathbb{C}$  que converja al cero.  $y$  tal que  $|\operatorname{Im}(\tau + h_n)| < \alpha$ . Debemos demostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}(\tau + h_n, \omega, y) - \hat{f}(\tau, \omega, y)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \hat{f}}{h_n} \quad \text{existe}$$

Notemos que

$$\frac{\Delta \hat{f}}{h_n} = \int e^{-i\tau \omega \cdot x} \left[ \frac{e^{-ih_n \omega \cdot x} - 1}{h_n} \right] f(x, y) dx$$

Sean

$$f_n(x) = e^{-i\tau \omega \cdot x} \left[ \frac{e^{-ih_n \omega \cdot x} - 1}{h_n} \right] f(x, y)$$

entonces como

$$\frac{e^{-ih_n \omega \cdot x} - 1}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -i[\omega \cdot x]$$

tenemos

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -i[\omega \cdot x] e^{-i\tau \omega \cdot x} f(x, y)$$

y

$$|f_n(x)| \leq |\omega||x| |f(x, y)|$$

y como  $|\omega||x| |f(x, y)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall y \in \mathbb{R}$  (pues  $\exp(\alpha|x|) f(x, y)$  está en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ), podemos utilizar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue que nos garantiza la existencia del límite deseado y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \hat{f}}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} -i(\omega \cdot x) e^{-i\tau \omega \cdot x} f(x, y) dx \quad ///$$

APENDICE III(D)

Teorema de continuación única :

---

Sea  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\forall \alpha \in H_1(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$   
Sea  $D$  un conexo abierto de  $\mathbb{R}^n$  y supongamos que se cumple la  
siguiente desigualdad :

$$|\Delta U(\alpha)| \leq M |\alpha| \quad \alpha \in D.$$

Entonces si  $U$  se anula en una vecindad de un punto cualquiera de  $D$ ,  $U$  se anula en todo  $D$ .

Para la demostración ver [R3].

APENDICES DEL CAPITULO IV

Apéndice IV(A)

Sea  $z_j = x_j$ ,  $i=1,2,\dots,n$  ;  $z_{n+1} = y$ . Definimos además  $\Delta_j = -\frac{1}{jy^2}$   
 y  $D_j = z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial z_j} z_j$  para  $j=1,2,\dots,n+1$ . Entonces en IV-11  
 tenemos :

$$(\psi, \psi) = (f(B_0)\psi, i \left[ -\sum_{j=1}^{n+1} \Delta_j + q_1(z_{n+1}), \sum_{j=1}^{n+1} D_j \right] f(B_0)\psi) \quad 4A-1$$

Como  $f(B_0)\psi \in H_2(\mathbb{R}^{n+1})$   $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$  con  $k \in \mathbb{N}$

y además  $(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}, v) = (u, \frac{\partial^2 v}{\partial z_i^2}) \quad \forall u, v \in H_2(\mathbb{R}^{n+1})$

entonces  $f(B_0) - \Delta_j f(B_0)$  conmuta con  $f(B_0) D_k f(B_0)$  para  $j \neq k$

por lo que en 4A-1 tenemos

$$(\psi, \psi) = (f(B_0)\psi, \sum_{j=1}^{n+1} i [-\Delta_j, D_j] + i [q_1(z_{n+1}), D_{n+1}] f(B_0)\psi) \quad 4A-2$$

pero  $f(B_0) i [-\Delta_j, D_j] f(B_0) = f(B_0) (-\Delta_j) f(B_0)$  entonces

en 4A-2 tenemos :

$$(\psi, \psi) = (f(B_0)\psi, -\Delta f(B_0)\psi) + (f(B_0)\psi, i [q_1(z_{n+1}), D_{n+1}] f(B_0)\psi) \quad 4A-3$$

Notemos que  $q_1 f(B_0)\psi \in H_1(\mathbb{R}^{n+1})$  pues es igual a

$$y (-\Delta + q_1) f(B_0)\psi + y \Delta f(B_0)\psi = y g(B_0)\psi + y \Delta f(B_0)\psi$$

donde  $g(\psi) = y f(\psi)$  está en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , entonces

$$\begin{aligned} (f(B_0)\psi, i [q_1(z_{n+1}), D_{n+1}] f(B_0)\psi) &= (f(B_0)\psi, i [q_1(z_{n+1}), D_{n+1}] f(B_0)\psi) \\ &= (f(B_0)\psi, -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} y q_1 - q_1 y \frac{\partial}{\partial y} - q_1 \right\} f(B_0)\psi) \dots \quad 4A-4 \end{aligned}$$

de 4A-3 es inmediato IV-12.

Por otro lado  $f(B_0) \left\{ -\Delta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} y q_1 - q_1 y \frac{\partial}{\partial y} - q_1 \right) \right\} f(B_0)$   
 es acotado porque  $-\Delta$  es un operador autoadjunto y por lo tanto

cerrado en  $H_1(\mathbb{R}^n)$  así como  $i \frac{d}{dy}$  lo es en  $H_1(\mathbb{R}^n)$ .

Entonces los operadores :

$f(0) (-1) f(0) , f(0) \frac{d}{dy} y q, f(0) , f(0) \frac{d}{dy} f(0)$  son cerrados

(  $q(y)$  es acotada por IV-1) y definidos en todo  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces por el teorema de la gráfica cerrada son acotados.

Apéndice IV(B)

Tenemos  $\hat{C} = FCF^{-1} = Ff(B_0) \dot{=} [B_0, D] f(B_0) F^{-1}$

(ver apéndice IV(A) )

$$\hat{C} = Ff(B_0) (-\Delta) f(B_0) F^{-1} + Ff(B_0) \dot{=} [q(y), D_y] f(B_0) F^{-1}$$

$$\hat{C} = GF(-\Delta) \overline{FG} + GF \dot{=} [q, D_y] \overline{FG}$$

4B-2

con  $G = Ff(B_0) F^{-1}$

Pero  $G = f(k - \frac{1}{y}, q(y)) = f(k^2 + h)$

4B-3

y además  $GF \dot{=} [q(y), D_y] \overline{FG} = G \dot{=} [q(y), D_y] G$

4B-4

entonces de 4B-2 , 4B-3 , 4B-4 tenemos :

$$\begin{aligned} \hat{C} &= G(k - \frac{1}{y})G + G \dot{=} [q(y), D_y] G = G(k - \frac{1}{y})G + G \dot{=} [q(y), D_y] G \\ &= k f(k^2 + h) + f(k^2 + h) \dot{=} [h, D_y] f(k^2 + h) \end{aligned}$$

pues  $f(k^2 + h) (-\frac{1}{y}) f(k^2 + h) = f(k^2 + h) \dot{=} [-\frac{1}{y}, D_y] f(k^2 + h)$  ///

Apéndice IV(C)

Daremos los rasgos generales para demostrar que  $[0, \infty)$  es el espectro esencial de  $h$ . La ausencia de eigenvalores positivos se sigue del teorema 3.21 de [E].

Definamos el operador  $h_p$  como sigue :

$D(h_p) = \{ \varphi \in H_{2,0}(\mathbb{R}) \}$  donde  $H_{2,0}(\mathbb{R})$  es la clausura de  $C_0^\infty(\mathbb{R}-0)$  con

la norma  $\left( \int |\varphi|^2 + \int |\varphi'|^2 + \int |\varphi''|^2 \right)^{1/2}$

y  $h_p \varphi = h \varphi$  con  $h = -\frac{d^2}{dy^2} + q_1(y)$ .

Definamos también  $h_p^\pm$  análogamente a  $h_p$ , pero en  $\mathbb{R}^\pm$ . Tendremos entonces  $h_0 = h_0^+ \oplus h_0^-$

Utilizaremos el hecho de que si  $z \in \rho(h) \cap \rho(h_p)$  entonces

$(h-z)^{-1} - (h_p-z)^{-1} = K$  es un compacto. Por lo tanto el espectro esencial de  $h$  es el mismo que el de  $h_p$ , siendo esto consecuencia del teorema de Weyl (teorema 4.7 de [Sc]).

Como  $\sigma_{\text{ess}}(h) = \sigma_{\text{ess}}(h_0^+) \cup \sigma_{\text{ess}}(h_0^-)$  nos basta con conocer  $\sigma_{\text{ess}}(h_0^+)$

Denotemos a  $h_0^+ = -\frac{d^2}{dy^2} \Big|_{y^+} + q_1(y)$  y  $h_0^- = -\frac{d^2}{dy^2} \Big|_{y^-} + q_1(y)$

Notemos que el operador

$$(h_0^+ - z)^{-1} - \left(-\frac{d^2}{dy^2} - z\right)^{-1} = (h_0^+ - z)^{-1} q_1(y) \left(-\frac{d^2}{dy^2} - z\right)^{-1}$$

es compacto por el teorema de Rellich dado que  $q_1(y) \rightarrow 0$  as  $y \rightarrow \infty$ .

entonces por el teorema de Weyl

pero  $\sigma_{\text{ess}}(h_0^+) = \sigma_{\text{ess}}\left(-\frac{d^2}{dy^2} \Big|_{y^+}\right)$   
 $\sigma_{\text{ess}}\left(-\frac{d^2}{dy^2} \Big|_{y^+}\right) = [0, \infty)$   $\therefore \sigma_{\text{ess}}(h_0^+) = [0, \infty)$

Análogamente:

$$h_0^- = -\frac{d^2}{dy^2} \Big|_{y^-} + (q_1 - q_-) + q_-$$

y como  $(q_1 - q_-) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sigma_{\text{ess}}\left(-\frac{d^2}{dy^2} + (q_1 - q_-)\right) = [0, \infty)$

$\Rightarrow \sigma_{\text{ess}}(h_0^-) = [q_-, \infty)$  con  $q_- > 0$

---


$$-\frac{d^2}{dy^2} \Big|_{y^+}(\varphi) = -\frac{d^2 \varphi}{dy^2} \quad \text{con} \quad \varphi \in H_{1,0}(\mathbb{R}^+)$$

$$\therefore \sqrt{u_{11}}(h) = (0, \infty) \cup (-\infty, 0) = [0, \infty)$$

$$\therefore \sqrt{u_{12}}(h) = [0, \infty) \quad \text{///}$$

Proposición : Tenemos una sucesión de operadores autoadjuntos contenida en  $\mathcal{B}(X, X)$  tal que  $O_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  fuertemente y  $\|O_n\| \leq M$ . Entonces para todo compacto  $K$  de  $X$  en  $X$  tenemos:

$$\|O_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad \|K O_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{en la topología uniforme de } \mathcal{B}(X, X)$$

Prueba:

Como  $K$  es compacto definido en un espacio de Hilbert, entonces existen dos sucesiones ortonormales  $\{\psi_n\}$  y  $\{\phi_n\}$  y escalares positivos  $\{\lambda_n\}$  tal que:

$$K = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n$$

donde se tiene la convergencia en la norma de  $\mathcal{B}(X, X)$

Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\exists N \ni \forall n \geq N$

$$\Rightarrow \left\| K - \sum_{k=1}^N \lambda_k (\psi_k, \cdot) \phi_k \right\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2N}$$

Tomemos  $x \neq 0 \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} \|K O_n x\|^2 &= \left\| K O_n x - \sum_{k=1}^N \lambda_k (\psi_k, O_n x) \phi_k + \sum_{k=1}^N \lambda_k (\psi_k, O_n x) \phi_k \right\|^2 \\ &\leq 2 \left[ \left\| K - \sum_{k=1}^N \lambda_k (\psi_k, \cdot) \phi_k \right\|^2 \|O_n\|^2 \|x\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k (\psi_k, O_n x) \phi_k \right\|^2 \right] \\ &= 2 \left[ \frac{\varepsilon^2}{2} \|x\|^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \|O_n \psi_k\|^2 \|x\|^2 \right] \end{aligned}$$

Como  $O_n \rightarrow 0$  fuertemente, podemos tomar  $n$  suficientemente grande para que:

$$\|O_n \psi_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2\delta N} \quad \forall k=1, 2, \dots, N$$

con  $\delta = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ . Entonces tendremos que para  $n \geq N$

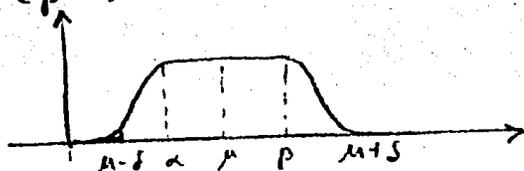
$$\frac{\|K O_n x\|^2}{\|x\|^2} \leq \varepsilon^2 \quad \therefore \|K O_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La demostración de que  $\|O_n K\| \rightarrow 0$  es análoga. ///

^ Si las sucesiones  $\{\psi_n\}$  y  $\{\phi_n\}$  son finitas, es inmediato el resultado.

Apéndice IV(E)

Sea  $f \in C(\mathbb{R})$ ,  $f=1$  en una vecindad pequeña de  $\mu$ , entonces podemos tomar  $\Delta = [\alpha, \beta)$ ,  $\mu \in \Delta$  de tal modo que  $f=1$  en  $\Delta$  y  $f(B)E(\Delta) = E(\Delta)$  con  $E(\Delta) = E(\beta-0) - E(\alpha)$



Prueba:

$(f(B)E(\Delta)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(E(\lambda)E(\Delta)u, v)$  con  $\{E(\lambda)\}$  la familia espectral asociada a  $B$  y  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Notemos que

$$E(\lambda)E(\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \alpha \\ E(\lambda) - E(\alpha) & \alpha \leq \lambda < \beta \\ E(\beta-0) - E(\alpha) & \beta \leq \lambda \end{cases}$$

entonces  $f=1$  a.e. (relativo a la medida  $d(E(\lambda)E(\Delta)u, v)$ )

$$(f(B)E(\Delta)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 d(E(\lambda)E(\Delta)u, v)$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (E(\lambda)E(\Delta)u, v) - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (E(\lambda)E(\Delta)u, v)$$

$$= ((E(\beta-0) - E(\alpha))u, v) - 0 = (E(\Delta)u, v)$$

$$f(B)E(\Delta) = E(\Delta) \quad \text{///}$$

APENDICE IV(F)

Def. Un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tiene la propiedad del segmento si contiene una cubierta de abiertos  $\{O_i\}$  que es localmente finita y correspondientes vectores  $\{y_i\}_{i \in I}$  de tal modo que para  $0 < t < 1$  se tiene  $x + ty_i \in \Omega$  para  $x \in \Omega$ .

Tomemos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto.  $H_k(\Omega)$  con  $\{v \in \mathcal{D}(\Omega)\}$  denotará el espacio de funciones que están en  $L^2(\Omega)$  con la propiedad de que todas sus derivadas distribucionales de orden menor o igual a  $k$  están en  $L^2(\Omega)$ .  $H_k(\Omega)$  es dotado de una norma :

$$\|v\|_{k, \Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$$

y de un producto escalar:

$$(v, \varphi)_{k, \Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha v \overline{D^\alpha \varphi} dx$$

con lo que  $H_k(\Omega)$  es un espacio de Hilbert.

Teorema (de compacidad de Rellich)

Sea  $\Omega$  un dominio acotado que tiene la propiedad del segmento. Entonces cada sucesión acotada en  $H_k(\Omega)$  tiene una subsucesión convergente en  $H_j(\Omega)$  con  $0 \leq j < k$ .

Para la demostración de este teorema ver [A].

## BIBLIOGRAFIA

- [A] Agmon, Shmuel. Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand 1963 .
- [B] Bachman, G. and Laurence Narici. Functional Analysis.
- [E] MSP Eastham Kalf. Schrodinger-type operators with continuous spectra. Pitman Advanced Publishing Program 1982.
- [F] Froese, R. and Herbst, I. Exponential bounds and absence of positive eigenvalues for N-body Schrodinger . Comm. Math. Phys. 87 (1982) 429-447.
- [K1] Kato, Tosio. Perturbation theory for linear operators. Springer Verlag. 1976.
- [K2] Kato, Tosio. Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient. Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 403-425.
- [M] Mourre, E. Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators. Comm. Math. Phys. 78 (1981) 391-408.
- [R1] Reed, M. and Simon, B. Methods of modern mathematical physics. Vol I (1972). Academic Press.
- [R2] Reed, M. and Simon, B. Methods of modern mathematical physics. Vol IV (1978). Academic Press.
- [S] Stone. Linear transformations in Hilbert Space.
- [Sc] Schechter. Spectra of partial differential operators. North-Holland Publishing Company. 1971.
- [W1] Weder, Ricardo. Absence of eigenvalues of the acoustic propagator in deformed wave guides . Comunicaciones Técnicas N 438 . IIMAS- UNAM. 1986
- [W2] Weder, Ricardo. The limiting absorption principle at thresholds. Comunicaciones técnicas N 447, 1986. IIMAS-UNAM.
- [Wi] Wilcox, Calvin H. Sound propagation in stratified fluids. Springer Verlag. 1984