

03061  
lej.  
3



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
UNIDAD ACADÉMICA DE LOS CICLOS  
PROFESIONAL Y DE POSGRADO

"EVALUACION DEL COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA  
MEDIANTE ESTUDIOS DE FLUJO ESTOCASTICO"

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

que para obtener el grado de

MAESTRO EN ESTADISTICA E INVESTIGACION  
DE OPERACIONES

Presenta:

MAT. NORMA LUCIA FURLAN MANELLI

1 9 8 6



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## RESUMEN

Uno de los objetivos fundamentales en la planificación de un sistema de potencia eléctrica es el logro de una alta calidad en el servicio. Debido a que están involucradas grandes sumas de dinero, e incluso factores de tipo social, es necesario disponer de métodos precisos para pronosticar y evaluar la habilidad de los diferentes diseños de sistemas de potencia para cumplir satisfactoriamente su función.

Este problema no es sencillo debido a la complejidad de los sistemas de potencia. A pesar de que se ha realizado mucho trabajo en esta área, aun no ha sido posible obtener una solución satisfactoria que tenga en cuenta al sistema en su totalidad y todas las condiciones de falla del mismo.

En la evaluación del funcionamiento de un sistema de potencia es importante analizar el comportamiento de los voltajes nodales y de los flujos de potencia en las líneas.

En este trabajo, que se aparta del enfoque clásico de confiabilidad, se definen índices que proporcionan información del comportamiento de los voltajes nodales y los flujos de potencia activa y reactiva en las líneas de transmisión. Dichos índices se obtienen a partir del análisis estocástico del problema de flujos de potencia, considerando modelos probabilísticos para la generación y la demanda.

Los ejemplos de aplicación muestran que los índices propuestos detectan satisfactoriamente situaciones de riesgo para el sistema, tales como modificaciones en la demanda y/o la generación y salidas de servicio de líneas. Este resultado es el logro central de este trabajo, porque permite visualizar el comportamiento de un sistema de potencia en función de algunas de sus variables importantes.

## Cap. 1

### INTRODUCCION

#### 1.1 Descripción del Problema

Entre los requerimientos más importantes que deben considerarse en la planificación de un sistema de potencia figuran el proporcionar una alta calidad de servicio a los consumidores y el mantener la integridad del sistema durante su operación. Como la inversión y los costos de operación involucrados son muy grandes, resulta indispensable disponer de métodos que proporcionen un pronóstico cuantitativo del rendimiento del sistema y, quizá más importante aún, que permitan evaluar de manera consistente el comportamiento de diseños alternativos.

Este problema no es sencillo debido a la complejidad de los sistemas de potencia, aun de aquellos relativamente pequeños. A partir de la década de los años 40 se formalizaron métodos probabilísticos, desarrollándose la disciplina denominada confiabilidad de sistemas de potencia. La definición clásica de confiabilidad es la siguiente [Billinton, 1974]

"Confiabilidad es la probabilidad de un diseño para realizar su propósito adecuadamente en el periodo de tiempo en que se encuentra en operación."

Esta definición es muy amplia e involucra un estudio en detalle del sistema analizado. Debido a la complejidad de los sistemas de potencia tradicionalmente se han considerado por separado partes del sistema para su análisis: subsistemas de distribución, generación y transmisión. El estudio de estos subsistemas desde el punto de vista de la confiabilidad se halla en distintas etapas de desarrollo [Endrenyi et al., 1982].

En cuanto a los sistemas de distribución existen técnicas no

sofisticadas que permiten resolver el problema satisfactoriamente. Para el analisis de los sistemas de generacion, se han desarrollado distintos metodos para evaluar el comportamiento del sistema a partir del concepto de "interrupcion del servicio" como criterio de falla. Debido a que durante la operacion se toman previsiones para que las fallas en las unidades generadoras no provoquen interrupciones del servicio, recientemente se ha cuestionado la definicion de falla de un sistema de generacion, y se ha planteado la necesidad de introducir características antes no consideradas en su analisis (p.e., reduccion de voltajes). Para los sistemas de transmision y generacion/transmision, si bien se han desarrollado algunos metodos de evaluacion, el problema no ha sido resuelto en forma satisfactoria. En la actualidad existen aun dificultades en aspectos conceptuales, de modelado, computacionales y relacionados con los datos de entrada .

Por lo tanto para el estudio de los sistemas de generacion y de transmision, individual o en conjunto, es conveniente analizar separadamente distintos tipos de eventos de falla del sistema. Una vez definidos y evaluados los indices correspondientes, las decisiones deben tomarse con base en su analisis conjunto .

## 1.2 Objetivos y Procedimientos

El objetivo de este trabajo es definir indices de funcionamiento del sistema a partir de la evaluacion del comportamiento de los voltajes nodales y los flujos de potencia activa y reactiva.

Específicamente, a partir de la consideracion de modelos probabilisticos para la generacion y la demanda se efectua el analisis estocastico de flujo de carga. Esto permite obtener las funciones de densidad de probabilidades de los voltajes nodales y de los flujos de potencia activa y reactiva a partir de las cuales se definen indices para nodos, lineas y sistema que consideran distintos niveles de la curva de duracion de carga.

De esta manera se proporcionan indices de facil manejo e interpretacion, que pueden usarse en la tarea de planificacion de sistemas de potencia electrica. En este trabajo la red de transmision se considera deterministicamente, aunque es de interes fundamental incluir un modelo estocastico de la misma en investigaciones futuras .

El analisis probabilistico del flujo de potencia se realiza

empleando dos tecnicas diferentes: a partir de la consideracion de funciones caracteristicas de variables aleatorias, problema que computacionalmente puede resolverse a traves de la transformada rapida de Fourier, y la segunda emplea el metodo Monte-Carlo.

Los ejemplos de aplicacion muestran que los indices propuestos detectan satisfactoriamente diferentes situaciones de riesgo para el sistema, tales como modificaciones en la demanda y/o la generacion y salidas de servicio de lineas

### 1.3 Contenido

En el Capitulo 2 se describe el modelo de sistema de potencia que sirve de punto de partida para este trabajo. Se presentan ademas las ecuaciones que describen las relaciones entre voltajes complejos y flujos de potencia. Se obtiene una aproximacion lineal a las mismas.

En el Capitulo 3 se describe una de las tecnicas empleadas para resolver el problema, a partir de la consideracion de funciones caracteristicas de variables aleatorias, y sus caracteristicas computacionales.

En el Capitulo 4 se presenta la resolucion del problema de flujo estocastico de potencia por medio del metodo Monte Carlo.

En el Capitulo 5 se definen los indices de comportamiento del sistema de potencia propuestos en este trabajo y se presentan ejemplos de aplicacion que muestran el desempeno practico de los indices.

En el Capitulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo y propuestas para investigaciones futuras.

## Cap. 2

### EL MODELO BASICO PARA EL ANALISIS DE FLUJO DE POTENCIA

En este capitulo se presentan las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo de potencia y se obtiene una aproximacion lineal a partir del modelo de flujo desacoplado. Se describe el problema de flujo de potencia tanto en su definicion deterministica como estocastica.

#### 2.1 Consideraciones Generales

Un sistema de potencia interconectado es una red electrica con una gran cantidad de ramas y nodos. Las lineas de transmision constituyen las ramas. Los nodos son los puntos del sistema en donde se inyecta o se consume potencia, y se les denomina barras generadoras o de carga, respectivamente.

Las cargas, o demandas de potencia, pueden ser satisfechas por una generacion determinada en diferentes formas, o sea en un gran numero de distribuciones de "flujo de potencia" o "flujo de carga".

El objetivo de un estudio deterministico de flujo de potencia es analizar el mecanismo fisico de control del flujo de potencia en la red y establecer la distribucion optima de flujos en las lineas. Por otra parte, el analisis del comportamiento del flujo de potencia es muy importante tambien en la etapa de planificacion de nuevas redes o de adiciones a las existentes.

En un estudio de flujos de potencia es necesario tener en cuenta las caracteristicas de operacion del sistema [Elgerd, 1983]. Entre ellas, que la generacion sea en cada momento igual a la demanda. Con respecto a las lineas de transmision, deben operarse vigilando de cerca sus limites termicos y de estabilidad. Ademas es necesario mantener los niveles de voltaje de las barras dentro de las tolerancias establecidas (+/- 5%).

En el problema de flujo de potencia, la primera etapa consiste

en la formulacion de un modelo matematico conveniente de la red, que describa adecuadamente las relaciones entre voltajes y potencias del sistema. En el planteamiento deterministico, la segunda etapa consiste en la evaluacion numerica de las ecuaciones de flujo de potencia sujetas a las restricciones de potencia y voltaje que deben aplicarse a las distintas barras de la red. Estos calculos dan como resultado los valores de los voltajes complejos en las barras, a partir de los cuales se evaluan los flujos de potencia en todas las lineas de transmision.

## 2.2 El Modelo Basico

En esta seccion se presenta un modelo que describe el mecanismo de flujo de potencia, es decir se expresan las potencias nodales de inyeccion y los flujos de potencia en terminos de los voltajes complejos.

Para determinar el modelo para el caso general de un sistema de  $n$  barras (Elgerd, 1983; Knight, 1972), deben considerarse en cada una de las barras las magnitudes de voltajes nodales ( $|V_i|$ ), los angulos de fase de los voltajes nodales ( $\theta_i$ ), las potencias activas de generacion ( $P_{Gi}$ ), las potencias reactivas de generacion ( $Q_{Gi}$ ), las potencias activas de demanda ( $P_{Di}$ ) y las potencias reactivas de demanda ( $Q_{Di}$ ).

Para el analisis que sigue es conveniente agrupar en un valor neto las potencias de generacion y demanda de un nodo. De esta manera se define la "potencia neta" o "potencia de inyeccion" (...) del nodo, como la diferencia entre las potencias de generacion y carga. En la Fig. 2.1 se muestra este proceso, asi como la notacion a usar, para un ejemplo sencillo de dos nodos.

Las lineas de transmision se representan por un circuito  $\pi$ -equivalente (Fig. 2.1, b, c), que considera las admitancias en serie y en paralelo de la linea. En dicha figura  $Y_s$  indica la admitancia en serie y  $Y_p$  la admitancia en paralelo, las cuales estan definidas por

$$Y_s = \frac{1}{R + jX}$$

$$Y_p = \alpha + j\beta \quad 2.1.b$$

donde  $R$  es la resistencia,  $X$ , es la reactancia,  $\alpha$ , es la conductancia y  $\beta$  es la susceptancia de la línea.

Los elementos serie determinan físicamente la transmisión de potencia. Los elementos en paralelo representan una fuente de potencia reactiva.

Para el caso general de un sistema de  $n$  barras, considerese la barra  $i$ -ésima según la Fig. 2.2. La potencia inyectada en la barra,  $S_i$ , está dada por

$$S_i = S_{Gi} - S_{Di} = (P_{Gi} - P_{Di}) + j(Q_{Gi} - Q_{Di}) \quad 2.2$$

Las líneas de transmisión conectan a la barra  $i$ -ésima con otras barras del sistema. En la representación actual del sistema puede haber a lo sumo  $(n-1)$  de tales líneas, cada una de las cuales se representa por su circuito  $\pi$ -equivalente. Si no existe línea entre dos barras, simplemente se anulan las admitancias correspondientes.

La corriente inyectada al nodo  $i$ ,  $-I_i$ , será igual a la suma de las corrientes en los circuitos. Por lo tanto[1]

-----  
1. El asterisco en la parte superior derecha de una variable indica la operación de conjugación compleja

$$I_i = S_i^* / V_i^* = \sum_{k=1}^n Y_{ik} V_k \quad i = 1, \dots, n \quad 2.3$$

donde

$$y_{ik} = Y_{ki} = -Y_{S_{ik}} \quad , \quad i \neq k \quad 2.4.a$$

$$y_{ii} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Y_{P_{ik}} + Y_{S_{ik}}) \quad 2.4.b$$

donde  $Y = (y_{ik})$  es la matriz de admitancias nodales.

La ecuacion 2.3 representa un sistema de ecuaciones simultaneas lineales y complejas. Esto supone una facil solucion si se conocen  $V$  o  $I$ . Pero en la realidad se conocen las potencias  $S_i$  y no las corrientes  $I_i$ , y el sistema de ecuaciones puede reescribirse, a partir de las relaciones  $I_i = S_i^* / V_i^*$ , de la siguiente forma

$$S_i^* = P_i - jQ_i = V_i^* \sum_{k=1}^n y_{ik} V_k \quad i = 1, \dots, n \quad 2.5$$

que constituyen un sistema de ecuaciones no lineales y complejas.

A partir de la expresiones

$$V_i = |V_i| \cdot j\theta_i \quad i = 1, \dots, n \quad 2.6$$

$$y_{ik} = G_{ik} + B_{ik} \quad k, k = 1, \dots, n \quad 2.7$$

Las ecuaciones 2.5 pueden reescribirse como sigue

$$P_i = |V_i| \sum_{k=1}^n |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad 2.8.a$$

$$Q_i = |V_i| \sum_{k=1}^n |V_k| (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad 2.8.b$$

en donde  $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$ , es la diferencia entre los angulos de fase de los nodos  $i$  y  $k$ .

Las ecuaciones 2.8 describen las relaciones entre voltajes y potencias. Constituyen el punto basico en el analisis de flujo de potencia.

De las variables involucradas en estas ecuaciones las potencias reactivas de generacion,  $P_{Gi}$ , afectan fuertemente a las magnitudes de voltaje,  $|V_i|$ . De igual manera las potencias activas de generacion,  $P_{Gi}$ , afectan en mayor medida a los angulos de fase,  $\theta_i$ .

Una vez que se conocen los voltajes en todos los nodos, se puede calcular el flujo de potencia en las distintas lineas de transmision de la red.

Para analizar este punto, considerese la linea que conecta los nodos  $i$  y  $k$  en la Fig. 2.3. La corriente en la linea,  $I_{ik}$ , medida en el nodo  $i$  y definida como positiva en la direccion  $i \rightarrow k$ , esta dada por

$$I_{ik} = (V_i - V_k) Y_{S_{ik}} + V_i Y_{P_{ik}} \quad 2.9$$

Las potencias en la línea,  $S_{ik}$  y  $S_{ki}$ , medidas en los nodos  $i$  y  $k$ , respectivamente, y ambas definidas como positivas en la línea se obtienen como

$$S_{ik} = P_{ik} + j Q_{ik} = V_i I_{ik}^* \quad 2.10.a$$

$$S_{ki} = P_{ki} + j Q_{ki} = V_k I_{ki}^* \quad 2.10.b$$

Utilizando las expresiones 2.1.b, 2.6 y 2.7, las potencias activas y reactivas en la línea pueden expresarse como

$$P_{ik} = (-G_{ik} + \alpha_i) |V_i|^2 + |V_i||V_k|(G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad 2.11.a$$

$$i, k = 1, \dots, n; i \neq k$$

$$Q_{ik} = (B_{ik} - \beta_i) |V_i|^2 + |V_i||V_k|(G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad 2.11.b$$

$$i, k = 1, \dots, n; i \neq k$$

El conjunto de ecuaciones 2.8 y 2.11 constituyen el modelo matemático que permite pronosticar el comportamiento del flujo de potencia en la red. Las ecuaciones 2.8 describen las relaciones entre voltajes complejos y potencias de inyección, y las ecuaciones 2.11 expresan el flujo de potencia en las líneas en términos de los voltajes.

Un aspecto importante que se menciona, y que aun no se ha considerado, es la ecuacion de balance de potencia. Esta restriccion impone que la potencia generada debe ser igual a la suma de la potencia demandada mas las perdidas.

Como las perdidas no se conocen hasta que se obtiene la solucion, es necesario determinar una unica barra que sea responsable del balance total de potencia. Esto no es totalmente cierto en la practica, ya que el balance se logra usando varias unidades generadoras, de acuerdo a las politicas operativas de la empresa.

La barra responsable del balance de potencia se denomina de holgura o referencia. En dicho nodo solo se especifica el voltaje complejo (magnitud y angulo), de manera que en el sistema 2.3 la ecuacion correspondiente es superflua.

## 2.3 El Modelo de Flujo Desacoplado

Como ya se menciona en el apartado 2.1, las variables que son conocidas son las potencias de inyeccion. Por lo tanto es fundamental realizar aproximaciones que permitan expresar, de manera sencilla voltajes y flujos de potencia en terminos de dichas variables. Como se conoce que las potencias reactivas afectan especialmente a las magnitudes de voltaje y las potencias activas a los angulos de fase, un enfoque posible es considerar separadamente las potencias activas y las potencias reactivas. Esto permite obtener una linealizacion del problema de flujos de potencia [Allan y Al-Shakarchi], que es la que se empleara en este trabajo.

### Angulos de fase y potencias activas

Bajo la suposicion de que la impedancia de la linea que conecta los nodos  $i$  y  $k$  del sistema,  $Z_{ik} = X_{ik} + jR_{ik}$  satisface la condicion

$$X_{ik} \gg R_{ik} \quad 2.14$$

lo cual es valido para las lineas de alto voltaje, puede considerarse solo la reactancia,  $X_{ik}$ , y despreciar la resistencia,  $R_{ik}$ . Los

coeficientes  $G_{ik}$  y  $B_{ik}$  de la expresion 2.8 pueden escribirse como

$$G_{ik} = -R_{ik}/(R_{ik}^2 + X_{ik}^2) \cong 0 \quad ; \quad i \neq k \quad 2.15.a$$

$$B_{ik} = X_{ik}/(R_{ik}^2 + X_{ik}^2) \cong 1/X_{ik} \quad ; \quad i \neq k \quad 2.15.b$$

Una segunda suposicion valida, dadas las características de operacion del sistema, considera que los voltajes se mantendran proximos a sus valores nominales. Puede suponerse entonces

$$|V_i| \cong 1 \quad i = 1, \dots, n \quad 2.16.a$$

$$\text{sen } \theta_{ik} \cong \theta_{ik} \quad i, k = 1, \dots, n \quad 2.16.b$$

en donde la magnitud y la fase de voltaje se dan por unidad, es decir normalizados respecto a sus valores nominales. A partir de estas expresiones se obtiene

$$P_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \theta_k / X_{ik} + \theta_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n 1 / X_{ik} \quad i = 1, \dots, n \quad 2.17$$

En esta aproximación se ignoran las fuentes de potencia reactiva. En la expresión 2.11.a puede considerarse  $\dots = 0$ , y se obtiene la expresión para el flujo de potencias activas

$$P_{ik} = (1 / X_{ik}) \sum_{j=1}^{n-1} (c_{ij} - c_{kj}) P_j \quad ; i, k = 1, \dots, n \quad 2.18$$

donde  $C = (C_{ik})$  es la inversa de la matriz obtenida a partir de las admitancias nodales en la que se ignoran la fila y la columna que corresponden al nodo de holgura y  $c_{nj} = 0$ .

#### Voltajes y potencias reactivas

En este caso las aproximaciones se realizan a partir del conocimiento de que los voltajes en un sistema de potencia están próximos a la unidad. Se puede suponer entonces que

$$|V_i| = 1 + \delta |V_i| \quad 2.19$$

donde  $\delta |V_i|$  es una perturbación de  $|V_i|$  de la unidad. Entonces

$$|V_i|^2 \approx 2 |V_i| - 1 \quad 2.20.a$$

$$|V_i| |V_k| \approx |V_i| + |V_k| - 1 \quad 2.20.b$$

Incluyendo 2.20 en 2.8 se obtienen expresiones lineales de los voltajes en funcion de las potencias reactivas de inyeccion, para los nodos de voltaje no controlado

$$V_D = M^{-1} (Q_D - LV_G + W_D) \quad 2.21$$

Reemplazando 2.21. en 2.11.b se obtiene una expresion lineal de los flujos de potencia reactiva en funcion de las potencias reactivas de inyeccion en los nodos de voltaje no controlado.

Las ecuaciones 2.11.b, 2.17, 2.18 y 2.21 expresan las relaciones lineales entre voltajes, flujos de potencia y potencias de inyeccion que se emplean en este trabajo en el analisis estocastico de flujo de potencia.

#### 2.4 Analisis Estocastico de Flujo de Potencia

Como ya se menciona anteriormente, es muy importante conocer el comportamiento de los voltajes y los flujos de potencia para analizar el funcionamiento de un sistema de potencia.

En un estudio de flujo convencional es necesario efectuar los calculos considerando distintos valores de las variables de control, debido a que no es posible conocer estas con exactitud.

Un estudio de flujo estocastico reconoce la naturaleza probabilistica de la generacion y la demanda, y permite un analisis realista de los voltajes y los flujos de potencia en las lineas.

**FIGURAS**

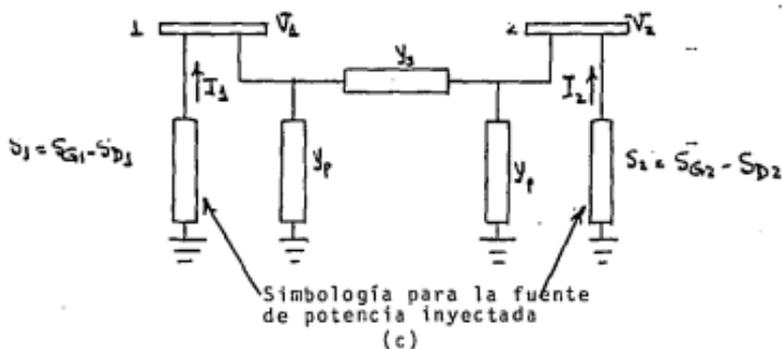
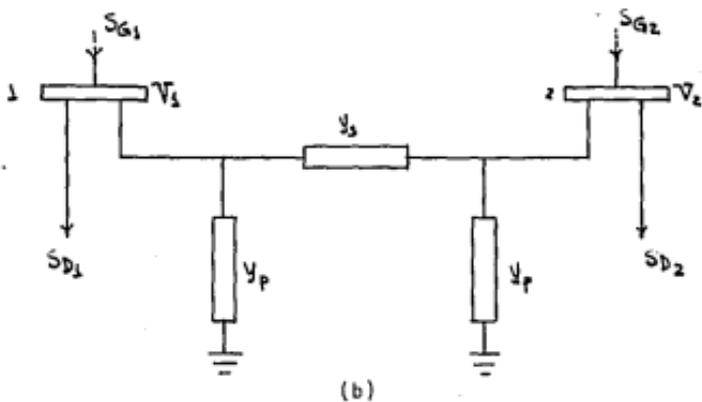
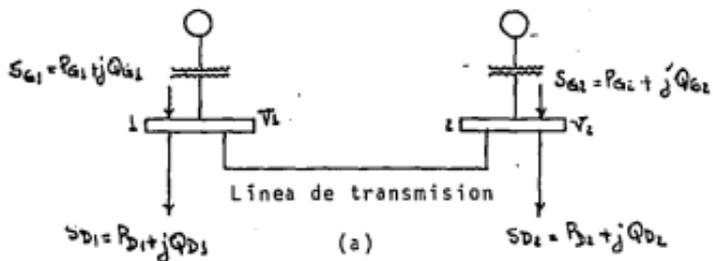


Fig. 2.1 Definición de la potencia de inyección

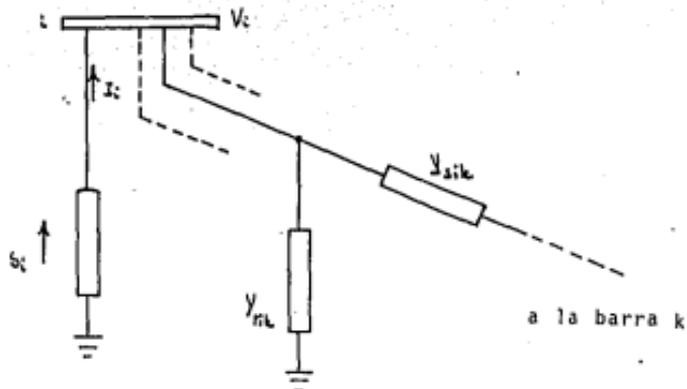


Fig. 2.2 Representacion de una barra arbitraria

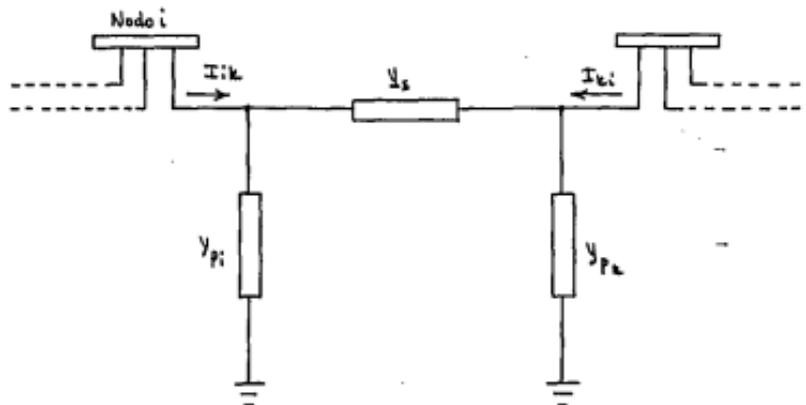


Fig. 2.3 Modelo para hallar la potencia de línea

## Cap. 3

### METODO DE SOLUCION : FUNCIONES CARACTERISTICAS

En este capítulo se describe la solución al problema del análisis estocástico de flujo de potencia a través de las funciones características de variables aleatorias, y las hipótesis necesarias para emplear dicho método.

#### 3.1 Consideraciones Generales

Como ya se mencionó anteriormente, el objetivo de este trabajo es la definición de índices del comportamiento del sistema teniendo en cuenta los voltajes nodales y los flujos de potencia en las líneas. Para ello es necesario determinar la distribución de probabilidad de los mismos.

La aproximación lineal obtenida en el Capítulo 2, a partir de la consideración desacoplada de los flujos, simplifica el problema. Las ecuaciones 2.11.b, 2.17, 2.18, y 2.21 expresan los ángulos de fase nodales, los voltajes y los flujos de potencia activa y reactiva como suma de variables aleatorias cuya distribución es conocida, las potencias de inyección.

Bajo la hipótesis de que las potencias de inyección en los nodos son estocásticamente independientes, el problema se reduce a la evaluación de la función de densidad de una suma de variables aleatorias independientes. Esta suposición no es altamente restrictiva, ya que en muchos sistemas de generación/transmisión la misma es válida.

En los puntos siguientes se desarrollan los conceptos básicos en que se fundamenta el método de solución propuesto, a partir de la consideración de la función característica de variables aleatorias.

## 3.2 Funcion Caracteristica de Variables Aleatorias

La utilidad de las funciones características es que permiten realizar ciertos análisis que no pueden efectuarse directamente con la función de distribución de probabilidades, o la simplificación de estos últimos.

## Definición

1. Sea  $X$  una variable aleatoria unidimensional. Su función característica  $F(u)$  está definida por

$$F(u) = E[\exp(ju X)] \quad -\infty < u < \infty \quad 3.1$$

2. Si  $F(x)$  es una función de distribución de probabilidades, su función característica está definida por su transformada de Fourier-Stieltjes

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j u x) dF(x) \quad -\infty < u < \infty \quad 3.2$$

La función característica está definida para cualquier variable aleatoria, y una de sus propiedades fundamentales es que determina unívocamente a la función de distribución de probabilidades asociada, como sigue del siguiente teorema [Tucker, 1967]

## Teorema 1:

Sean  $F$  y  $G$  dos funciones de distribución de probabilidades con funciones características  $F_c(u)$  y  $G_c(u)$ , respectivamente. Si  $F_c = G_c$ , entonces  $F = G$ .

Por lo tanto el conjunto de las funciones características está en correspondencia uno a uno con el conjunto de todas las funciones de distribución de probabilidades.

Los teoremas siguientes [Tucker, 1967], son también fundamentales para el desarrollo posterior del análisis.

Teorema 2:

Si  $F$  y  $G$  son funciones de distribución de probabilidades con funciones características  $\phi$  y  $\psi$ , respectivamente, entonces  $\phi \cdot \psi = \phi \cdot \psi$  es la función característica de  $H = F * G$ .

Teorema 3:

Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias cuya función característica conjunta está dada por

$$\phi_{X_1, \dots, X_n}(u) = \phi_{X_1}(u_1) \cdots \phi_{X_n}(u_n) \quad u \in \mathbb{R}^n \quad 3.3$$

Entonces  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si y solo si

$$\phi_X(u) = \prod_{j=1}^n \phi_{X_j}(u_j) \quad u \in \mathbb{R}^n \quad 3.4$$

Corolario:

Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables independientes con funciones características  $F_1, \dots, F_n$  respectivamente, y sea  $F$  la función característica de  $X$ , entonces

$$F(u) = \prod_{j=1}^n F_j(u_j) \quad u \in \mathbb{R}^n \quad 3.5$$

El análisis para evaluar las funciones de densidad de los flujos de potencia en las líneas se basa en este Corolario. De acuerdo a 3.1 y 3.2, la función característica de las variables aleatorias discretas se expresa como

$$F(u) = E[\exp(ju x)] = \sum_{i \in I} p_i \exp(ju x_i) \quad -\infty < u < \infty \quad 3.6$$

donde  $I$  identifica el conjunto de subíndices de los valores con probabilidad no nula,  $x_i$ , y  $p_i$  los correspondientes valores de probabilidad. Para las variables aleatorias continuas se obtiene

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux) f(x) dx \quad -\infty < u < \infty \quad 3.7$$

en donde  $f$  y  $F$  indican, respectivamente, las funciones de densidad y de distribución de probabilidades de la variable aleatoria.

### 3.3 Aspectos Computacionales

La evaluación numérica de 3.6 y 3.7 se realiza por medio de la transformada discreta de Fourier de exponente positivo (Apendice A). A su vez, la densidad de la variable aleatoria analizada se recupera usando la transformada discreta de Fourier inversa (de exponente negativo). Estos procesos se describen en el algoritmo siguiente [Brigham, 1974]

1. Sean  $f_1, \dots, f_m$  las funciones de densidad de probabilidades (de longitud finita) trasladadas del origen en  $a_1, \dots, a_n$ , respectivamente.
2. Trasladar  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , al origen y muestrear

$$f_i(k) = f_i(kT + a_i) ; k = 0, \dots, P_i - 1 ; i = 1, \dots, n \quad 3.8$$

donde T es el intervalo de muestreo

3. Elegir m que satisfaga las relaciones

$$m > \sum_{i=1}^n P_i - (n - 1) \quad 3.9$$

donde  $P_i$  es el número de puntos muestreados que definen a  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

4. Completar con ceros las funciones muestreadas en el paso (2)

$$f_i(k) = 0 ; k = P_i, \dots, m-1 ; i = 1, \dots, n \quad 3.10$$

5. Calcular el producto

$$F(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x) ; x = 0, \dots, (m-1) \quad 3.12$$

Calcular la transformada de Fourier inversa usando la expresion

$$f(k) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{N} F(x) \exp(-jz^r k/N) ; k = 0, \dots, (m-1) \quad 3.13$$

Las transformadas de Fourier discretas en los pasos (5) y (7) se evaluan usando un algoritmo de transformada rapida de Fourier (Apendice B).

#### Truncamiento de la funcion de densidad

La aplicacion de la transformada de Fourier discreta requiere que la funcion sea periodica. Es necesario entonces truncar las funciones de densidad de probabilidades de las variables aleatorias continuas, considerando que el intervalo que se analiza es un periodo.

En el presente trabajo se considera como criterio de truncamiento la obtencion del intervalo de minima longitud y probabilidad mayor o igual que 0.99, que contenga un numero entero de veces al intervalo de muestreo, para el caso de las variables continuas. Se tiene ademas en cuenta que los extremos del intervalo de truncamiento no coincidan con puntos de muestreo (Apendice A). En el caso de las variables discretas se incluyen en el intervalo a considerar todos los puntos con probabilidad no nula.

#### Muestreo de la funcion de densidad de probabilidades

En el caso de las funciones de densidad continuas, al realizar el muestreo se tiene en cuenta el area despreciada por el proceso de truncamiento, a efectos de considerarla en las evaluaciones de probabilidades posteriores. De esta manera, si con el truncamiento se desprecia una region cuya area vale ..., el muestreo se efectua considerando

$$\tilde{f}(x_k) = [1/(1 - \alpha)] f(x_k) \quad 3.15$$

donde  $\tilde{f}$  indica la función muestreada.

Las densidades discretas requieren un tratamiento especial ya que no necesariamente los puntos de muestreo coinciden con los puntos de probabilidad no nula. Una vez que se han determinado los extremos inferior y superior del intervalo de truncamiento y los puntos de muestreo, si un punto de probabilidad no nula se encuentra entre dos puntos de muestreo, la probabilidad correspondiente se distribuye entre ellos usando un promedio ponderado determinado por las distancias entre los puntos. Es decir, dado el punto  $x_j$  con probabilidad no nula

$$\Pr(x_j) = p_j \quad 3.16$$

tal que

$$y_k < x_j < y_{k+1} \quad 3.17$$

donde  $y_k$  y  $y_{k+1}$  son dos puntos de muestreo contiguos, sean

$$d = y_{k+1} - y_k \quad 3.18$$

$$d' = x_j - y_k \quad 3.19$$

Entonces la función muestreada en .. y ... tomara los valores

$$f(y_k) = (1 - d'/d) p_j \quad 3.20$$

$$f(y_{k+1}) = (d'/d) p_k \quad 3.21$$

## Cap. 4

### METODO DE SOLUCION : MONTE CARLO

En este capítulo se introducen conceptos generales del método Monte Carlo, así como una descripción de su aplicación en este trabajo.

#### 4.1 Consideraciones Generales

En la literatura no existe una terminología uniforme para las expresiones "simulación estocástica" y "método Monte Carlo", si bien esta última se ha empleado históricamente para designar una técnica que obtiene la solución de un modelo usando números aleatorios o pseudoaleatorios. En este trabajo se sigue la diferenciación dada por Rubinstein (1981):

1. en el método Monte Carlo el tiempo no juega un papel substancial, como si ocurre en simulación estocástica;
2. en el método Monte Carlo las observaciones son independientes. En simulación se experimenta con el modelo a través del tiempo y por lo tanto las observaciones están correlacionadas seriamente;
3. en el método Monte Carlo es posible expresar la respuesta como una función simple de las variables aleatorias de entrada. En simulación la respuesta es, usualmente muy complicada, y puede expresarse explícitamente solo a través de un programa de computadora.

Aun teniendo en cuenta esta diferenciación, ambos métodos tienen en común las etapas básicas del proceso de planificación de un experimento. Pueden considerarse tres aspectos fundamentales (Kleijnen, 1975; Naylor et al., 1982). El primero de ellos consiste en la formulación del problema, definiendo las variables de interés de acuerdo al objetivo del estudio. Una simulación puede realizarse ya sea para comparar las respuestas de sistemas diferentes (en su

estructura o en sus reglas operativas), o para determinar relaciones funcionales entre las variables de entrada y la respuesta. Un punto importante en esta etapa es la especificacion de la precision estadistica con que se observara la respuesta.

La segunda etapa consiste en la recoleccion y procesamiento de datos reales. Una vez que se efectuan las hipotesis distribucionales de las variables de entrada (con base en datos historicos o consideraciones teoricas) deben aplicarse tecnicas de bondad de ajuste para comprobar si los datos reales confirman los supuestos. Puede ocurrir que varias distribuciones de las variables de entrada no sean rechazadas por una prueba de bondad de ajuste, especialmente si se dispone de pocos datos de entrada. Se puede realizar entonces un analisis de sensibilidad para verificar si la respuesta es sensible a estas variaciones en las distribuciones de entrada. En caso afirmativo debe obtenerse mayor cantidad de informacion.

Los datos historicos pueden utilizarse no solo para formular distribuciones teoricas, sino para proveer distribuciones empiricas, a partir de las cuales se realice el muestreo. Tambien pueden emplearse en el orden en que ocurren en la realidad, en lugar de generar datos de entrada a partir de numeros aleatorios.

La tercera etapa de la planificacion de simulacion es la formulacion de un modelo. Algunas partes del modelo se han determinado en la etapa anterior, cuando se especifican ciertas distribuciones de las variables de entrada, pero se tiene aun cierta libertad para especificar el resto del modelo, ya que el sistema real puede ser representado por varios modelos. Si varios modelos satisfacen las pruebas de validacion, debe usarse el modelo mas simple.

Una vez formulado el modelo se puede proceder a realizar el programa de computo.

La validacion del modelo debe efectuarse por medio de la comparacion de los resultados simulados con datos historicos. Para efectuar dicha validacion es necesario que en la vida real exista al menos una variante del sistema simulado y se disponga de datos del mismo.

Una simulacion puede ser de estado estacionario o de estado transitorio. Un sistema se dice de estado estacionario si la probabilidad de estar en uno de sus estados posibles esta gobernada por una funcion de probabilidad fija, aunque si puede variar de un estado a otro. Estas probabilidades fijas son los limites de las probabilidades de ocurrencia despues de un largo periodo de tiempo.

#### 4.2 Aplicacion al Estudio Estocastico de Flujo de Potencia

Al igual que en la solucion a partir de las funciones caracteristicas de variables aleatorias, se utiliza la aproximacion lineal obtenida a traves del modelo de flujo desacoplado. Como en aquel caso, no se esta considerando el modelo a traves del tiempo, sino en estado estacionario.

En este estudio se consideran dados los modelos probabilisticos de generacion y demanda, problema de por si complejo, y se introducen en el modelo planteado en el Capitulo 2. Esto permite simular los voltajes y flujos de potencia activa y reactiva .

Interesa determinar probabilidades de que los flujos superen ciertos limites establecidos de acuerdo a las caracteristicas de operacion del sistema, que permitan definir, posteriormente, indices indicativos del funcionamiento del sistema. El criterio utilizado para determinar el tamano de la muestra para la simulacion es el valor obtenido para la varianza de los estimadores.

#### 4.3 Generacion de Variables Aleatorias

La manera mas conveniente de generar una variable aleatoria no uniforme es a partir de la generacion de variables uniformes en (0,1) y luego realizar transformaciones apropiadas para obtener las desviaciones pseudoaleatorias de la distribucion de interes [Rubinstein, 1981; Kennedy y Gentle, 1980]. Para este estudio se supusieron distribuciones normales y discretas arbitrarias para las potencias de generacion y demanda.

#### Generacion de Variables Aleatorias Normales

En este trabajo la generacion de variables aleatorias normales se realiza utilizando el procedimiento de Box-Muller. Dadas  $U_1$  y  $U_2$  variables uniformes en el intervalo (0,1) e independientes, entonces las variables

$$\begin{aligned}
 z_1 &= (\sqrt{-2 \ln U_1})^{1/2} \cos 2\pi U_2 \\
 z_2 &= (\sqrt{-2 \ln U_2})^{1/2} \sin 2\pi U_2
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

son desviaciones normales independientes .

#### Generacion de Variables Discretas

Sea  $U$  una variable aleatoria uniforme en el intervalo  $0,1$ .  
Entonces  $X$  definida como

$$X = \begin{cases} x_1 & 0 \leq U < p_1 \\ x_2 & p_1 \leq U < p_1 + p_2 \\ \vdots & \\ x_k & p_1 + \dots + p_{k-1} \leq U < 1 \end{cases}
 \tag{4.2}$$

es una variable aleatoria con funcion de probabilidades dada por

$$P_r \{X = x_i\} = p_i \quad i = 1, \dots, k
 \tag{4.3}$$

#### 4.4 Generacion de las Respuestas del Sistema

Una vez que se han generado las variables aleatorias de entrada (generacion y demanda) por los metodos antes expuestos, se generan los voltajes y flujos de potencia a traves de las relaciones lineales expuestas en el Capitulo 2.

Como ya se ha mencionado, en este trabajo el interes primordial es la estimacion de las probabilidades de que voltajes y flujos superen los valores limites establecidos por las caracteristicas de operacion del sistema.

En general, cuando se desea estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento puede usarse el modelo binomial. Se define la variable  $y_i$  con probabilidad

$$P(Y_i=1) = p$$

$$P(Y_i=0) = 1-p$$

4.4

donde se registra  $y_i = 1$  si el evento ocurre en la simulacion  $i$  y  $y_i = 0$  si el evento no ocurre. La probabilidad  $p$  se estima por

$$\hat{p} = \frac{\sum y_i}{m}$$

4.5

La varianza de este estimador esta dada por

$$\hat{\text{var}}(\hat{p}) = \hat{p}(1-\hat{p}) / (m-1)$$

4.6

Un estimador insesgado de  $\text{var}(\dots)$  es

$$\text{var}(\hat{p}) = \hat{p}(1-\hat{p})/(n-1) \quad 4.7$$

#### Tamaño de Muestra

En este trabajo se definió como criterio para determinar el tamaño de muestra, que el estimador de la varianza de la probabilidades a estimar no supere el valor  $10^{-2}$ .

## Cap. 5

### DEFINICION DE INDICES. EJEMPLOS DE APLICACION

En este capitulo se definen indices de funcionamiento de un sistema de potencia, a partir de los resultados obtenidos con los metodos de estudio de flujo de potencia expuestos en los capitulos anteriores.

#### 5.1 Indices de Comporamiento para Lineas y Nodos

Una vez que se conocen los limites para magnitudes de voltajes nodales y para flujos de potencia, establecidos a partir de las características de operacion del sistema, una medida del comportamiento de dichas variables es la probabilidad de que se superen estos valores limites.

Cuando se efectua el analisis de flujo de potencia a traves de la consideracion de las funciones caracteristicas, se obtienen las funciones de densidad de probabilidad de los voltajes y de los flujos y por medio de integracion numerica se evaluan las probabilidades de interes. En este trabajo se emplea el metodo de Simpson para evaluar dichas probabilidades.

En el caso de aplicacion del metodo Monte-Carlo, las probabilidades correspondientes se evaluan por medio del estimador propuesto en el Capitulo 4.

#### 5.2 Indices de Comportamiento para el Sistema

No solo es de interes en la planificacion de un sistema de potencia conocer el comportamiento de los voltajes nodales y los

flujos en las líneas, sino que es importante cuantificar el comportamiento del sistema en índices globales que de una manera sencilla y rápida permitan determinar el comportamiento del sistema.

Debido a la complejidad de la estructura de los sistemas de potencia eléctrica resulta muy costoso en tiempo de procesamiento obtener índices exactos y resulta conveniente definir cotas para las variables que interesa conocer. Se propone aquí considerar tres parámetros a partir del análisis de los voltajes y de los flujos de potencia activa y reactiva.

### Flujos de Potencia

Para cada nivel considerado de la curva de demanda interesa evaluar la probabilidad de que en una o más líneas los flujos de potencia (activa y reactiva) superen los valores límites establecidos a partir de las características de operación del sistema. Como ya se mencionó, es conveniente obtener cotas inferior y superior para dicha probabilidad.

Si se supone independencia total entre las líneas (lo que corresponde a una estructura en paralelo de las líneas) se obtiene que si

$$p_i = \text{Pr} \{ \text{el flujo en la línea } i \text{ supera los límites establecidos} \}$$

5.1

Entonces la probabilidad de que una o más líneas superen los límites establecidos es

$$P = \sum_{k_1}^m p_{k_1} \left[ \prod_{\substack{k_2, \dots, k_m \\ k_i \neq k_j}}^{m-1} (1 - p_{k_i}) \right] + \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \\ k_i \neq k_j}}^m p_{k_1} p_{k_2} \left[ \prod_{\substack{k_3, \dots, k_m \\ k_i \neq k_j}}^{m-2} (1 - p_{k_i}) \right] + \dots \\ \dots + \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{m-1} \\ k_i \neq k_j}}^m \left( \prod_{j=1}^{m-1} p_{k_j} \right) (1 - p_{k_m})$$

5.2

La evaluación de todos los términos de la suma es costosa en

tiempo de proceso. Como los valores  $p_i$  son pequeños, a partir de cierto término su contribución será despreciable. Tiene sentido entonces evaluar solo una cantidad de ellos. En el programa de cómputo desarrollado para este trabajo se desprecian aquellos a partir del primero cuyo valor sea inferior a  $10^{-5}$ .

Si se supone dependencia total para las líneas (lo que corresponde a una estructura de todas las líneas en serie), la probabilidad es

$$P = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_i)$$

5.3

Si se considera

$$P_m = \max_{1 \leq i \leq m} \{P_i\}$$

5.4

se obtiene una cota superior para el sistema.

#### Voltajes

A partir del mismo razonamiento planteado para las líneas se proponen las cotas inferior y superior para el sistema.

Se propone considerar tres niveles de la curva de demanda, valle, medio y pico. Una vez que se han evaluado las cotas propuestas para cada uno de ellos se efectúa un promedio ponderado por los tiempos relativos de duración de cada uno de los tres periodos.

Los valores aquí definidos como cotas del comportamiento de los voltajes y de los flujos de potencias activa y reactiva serán de

utilidad práctica solo si no es muy amplio el intervalo que definen y si, además, detectan de manera sensible situaciones de riesgo para el sistema, como son variaciones en la generación o la demanda, sobrecargas en las líneas, valores anómalos de voltaje o salidas de servicio de líneas.

Los ejemplos que se presentan a continuación muestran que los índices propuestos satisfacen estos requerimientos de manera muy satisfactoria.

## 5.3 Ejemplos de Aplicación

## Ejemplo 1

Se analiza el sistema de prueba de 14 nodos del IEEE. Sobre este sistema se realizan diferentes modificaciones, para probar la sensibilidad de los índices propuestos ante situaciones de riesgo para el sistema. En las Tablas 1,2,3 figuran los datos determinísticos, los parámetros de las líneas y los datos probabilísticos de dicho sistema.

Tabla 1

## Datos Determinísticos

Barra Numero	Tipo	Voltaje p.u.	Potencias Activas		Potencias Reactivas
			Generacion	Carga	MVAR
1	ref.	1.0600	MW	MW	
2	PV	1.0450	40.04	21.74	12.70
3	PV	1.0100		94.20	19.00
4	PQ			47.80	-3.90
5	PQ			7.60	1.60
6	PV	1.0700		11.20	7.50
7	PQ				
8	PV	1.0900			
9	PQ			29.50	16.60
10	PQ			9.00	5.80
11	PQ			3.50	1.80
12	PQ			6.10	1.60
13	PQ			13.50	5.80
14	PQ			14.90	5.00

Tabla 2

Datos para las líneas del sistema de 14 nodos

Barra		Resistencia p.u.	Reactancia p.u.	Susceptancia p.u.	Tasa Transformador
1	2	0.01938	0.05917	0.02640	%
1	5	0.05403	0.22304	0.02640	
2	3	0.04699	0.19797	0.02190	
2	4	0.05811	0.17632	0.01870	
2	5	0.05695	0.17388	0.01700	
3	4	0.06701	0.17103	0.01730	
4	5	0.01335	0.04211	0.00640	
4	7		0.20912		-2.2
4	9		0.55618		-3.1
5	6		0.25202		-6.8
6	11	0.09498	0.19890		
6	12	0.12291	0.25581		
6	13	0.06615	0.13027		
7	8		0.17615		
7	9		0.11001		
9	10	0.03181	0.08450		
9	14	0.12711	0.27038		
10	11	0.08205	0.19207		
12	13	0.22092	0.19988		
13	14	0.17093	0.34802		
9	9		-5.26000		

Tabla 3

## Datos Probabilísticos

## Distribuciones Normales

Barra Numero	Potencia activa		Potencia reactiva	
	Media MW	Desv. Est. %	Media MW	Desv. Est. %
2	-21.74	9.00	-12.70	9.2
3	-94.20	10.00	-19.00	10.5
4	-47.80	11.00	3.90	9.7
5	-7.60	5.00	-1.80	5.0
6	-11.20	6.00	-7.50	6.3
10	-9.00	10.00	-5.80	10.0
11	-3.50	9.50	-1.50	9.5
12	-6.10	7.60	-1.60	8.6
13	-13.50	10.50	-5.80	9.5
14	-14.90	8.60	-5.00	8.6

## Distribuciones Binomiales

Barra	Numero de Unidades	Capacidad MW	Tasa de Salida Forzada
1	10	25.00	0.08
2	2	22.00	0.09

## Distribución Discreta

Barra	Potencia activa		Potencia reactiva	
	MW	prob.	MVAR	prob.
9	-37.3	0.20	-21.0	0.20
	-34.8	0.25	-19.6	0.25
	-30.2	0.30	-17.0	0.30
	-19.6	0.15	-11.0	0.15
	-13.4	0.10	-7.5	0.10

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada una de las variantes de este sistema analizadas, y se indica en que consiste cada modificación.

## Ejemplo 1.1

Los datos coinciden con los dados en las Tablas 1,2,3.

Los resultados obtenidos para este sistema se muestran a continuación.

## Parametros y probabilidades para potencias activas

Línea	Media	Desviación estandar	Probabilidad de sobrecarga
1 - 2	147.88	11.94	0.009298
1 - 5	71.12	4.26	0.013259
2 - 3	70.05	5.00	0.022185
2 - 4	55.23	3.14	0.048658
2 - 5	40.90	2.29	0.000000
3 - 4	-24.15	4.49	0.000000
4 - 5	-62.34	4.43	0.038723
4 - 7	28.98	3.57	0.000000
4 - 9	16.63	2.05	0.000000
5 - 6	42.08	2.53	0.000000
6 -11	6.31	1.41	0.000000
6 -12	7.55	0.40	0.000000
6 -13	17.03	1.14	0.000521
7 - 8	0.00	0.00	0.000000
7 - 9	28.98	3.57	0.000000
9 -10	6.20	1.52	0.007930
9 -14	9.92	1.22	0.000000
10 -11	-2.80	1.41	0.003870
12 -13	1.45	0.39	0.000000
13 -14	4.98	1.08	0.000000

Cota inferior para el sistema : 0.048657

Cota superior para el sistema : 0.136584

## Parámetros para ángulos de fase

Nodo	Media (radianes)	Desviación estandar
1	0.000	0.000
2	-0.068	0.007
3	-0.226	0.015
4	-0.185	0.011
5	-0.159	0.010
6	-0.265	0.015
7	-0.245	0.017
8	-0.245	0.017
9	-0.277	0.020
10	-0.283	0.019
11	-0.277	0.017
12	-0.284	0.015
13	-0.286	0.016
14	-0.304	0.019

## Parámetros para voltajes

Nodo	Media p.u.	Desviación estandar	Probabilidad
4	1.013	0.0008	0.000000
5	1.015	0.0005	0.000000
7	1.049	0.0026	0.249999
9	1.031	0.0050	0.000000
10	1.029	0.0042	0.000000
11	1.045	0.0000	0.017630
12	1.051	0.0005	0.968720
13	1.042	0.0010	0.000000
14	1.015	0.0033	0.000000

## Parámetros para flujos de potencia reactiva

Línea	Media MVAR	Desviación estandar	Probabilidad
1 - 2	-21.88	0.000	0.000000
1 - 3	4.09	0.223	0.000000
2 - 3	2.64	0.000	0.000000
2 - 4	-0.38	0.004	0.000000
2 - 5	0.91	0.272	0.000000
3 - 4	5.61	0.421	0.150480
4 - 5	12.45	0.747	0.040930
4 - 7	-5.36	0.822	0.000000
4 - 9	3.53	0.763	0.000000
5 - 6	11.52	0.251	0.067990
6 -11	7.51	0.905	0.000000
6 -12	2.84	0.157	0.158380
6 -13	9.33	0.611	0.129010
7 - 8	-23.36	1.449	0.027990
7 - 9	16.61	2.234	0.055870
9 -10	-0.07	0.010	0.000000
9 -14	0.10	0.006	0.000000
10 -11	-5.92	0.902	0.035530
12 -13	1.11	0.139	0.000000
13 -14	4.30	0.585	0.000000

Cota inferior para el sistema : 0.158381

Cota superior para el sistema : 0.507315

En las graficas del final del Capitulo se muestran algunas de las funciones de densidad obtenidas para voltajes y flujos de potencia activa y reactiva para este sistema de prueba.

## Ejemplo 1.2

En este ejemplo se modificó la generación, agregando un tercer generador al nodo 2, con las mismas características de los anteriores. A continuación se muestran los valores obtenidos para las cotas del sistema.

## Flujos de potencia activa

Cota inferior para el sistema : 0.564702 Cota superior para el sistema : 0.864455

## Flujos de potencia reactiva

Cota inferior para el sistema : 0.558372 Cota superior para el sistema : 0.832804

## Ejemplo 1.3

En este caso se varía la demanda de potencia activa en el nodo 10, en el cual los valores de la media y la desviación estándar toman los valores -15.0, 1.5.

Los valores obtenidos son

## Flujo de potencia activa

Cota inferior para el sistema : 0.616489 Cota superior para el sistema : 0.976860

## Flujo de potencia reactiva

Cota inferior para el sistema : 0.749982 Cota superior para el sistema : 0,948402

## Ejemplo 1.4

A partir del sistema original se quita la línea que vincula los nodos 2 y 5. Se obtuvieron los siguientes valores

## Flujo de potencia activa

Cota inferior para el sistema : 0.982076 Cota superior para el sistema : 0.998328

## Ejemplo 1.5

A partir del sistema original se quita la línea entre los nodos 9 y 10.

## Flujo de potencia activa

Cota inferior para el sistema : 0.999889 Cota superior para el sistema : 0.999999

El análisis de los resultados anteriores muestra que los índices definidos detectan muy satisfactoriamente situaciones de riesgo para el sistema. Muestran mucha sensibilidad a la salida de servicio de las líneas, detectando, además, la importancia de estas en el sistema. Por otra parte también son muy sensibles a las variaciones en la demanda y la generación.

**GRAFICAS**

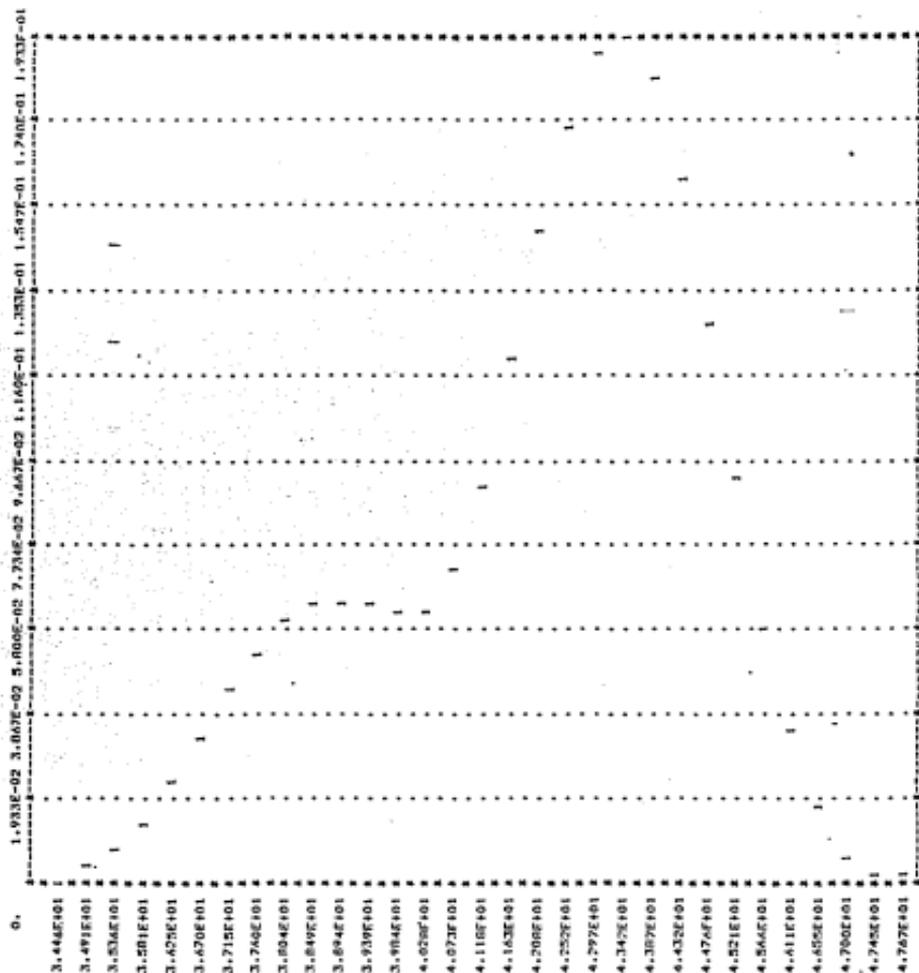


Fig. 5.1 Función de densidad de probabilidades para el flujo de potencia activa en la línea 5-6



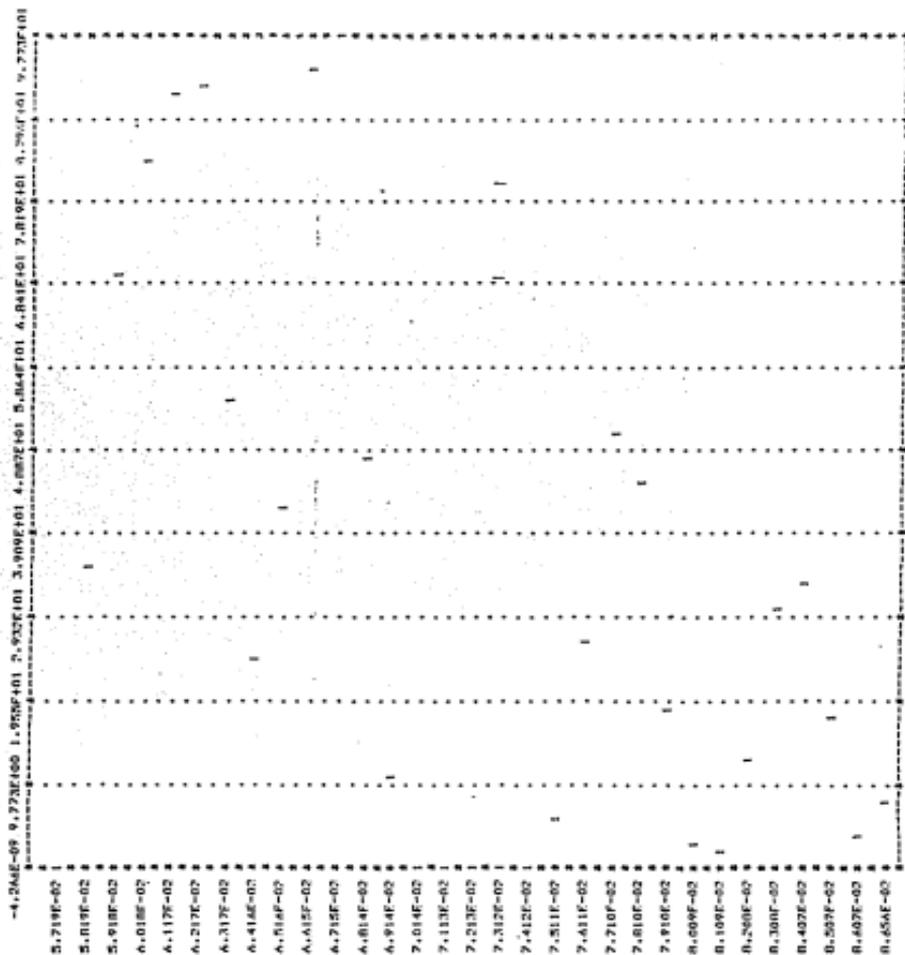


Fig. 5.3 Función de densidad de probabilidades para el flujo de potencia reactiva en la línea 4-7

## Cap. 6

### CONCLUSIONES

En la evaluación del funcionamiento de un sistema de potencia es importante analizar el comportamiento de las variables que definen la distribución de flujos de potencia en las líneas de transmisión, el nivel de tensión de la red y la generación de potencia eléctrica.

En este trabajo se definen índices que proporcionan información del comportamiento de los voltajes nodales y los flujos de potencia activa y reactiva en las líneas de transmisión, que se definen a partir del análisis estocástico del problema de flujos de potencia.

Los ejemplos de aplicación que se incluyen en el Capítulo 5 muestran que los índices propuestos detectan satisfactoriamente eventos de riesgo para el sistema, ante situaciones de cambio tales como modificaciones en la demanda y la generación y salidas de servicio de líneas. Estos resultados pueden ser utilizados en forma directa y eficiente en las etapas de planificación de un sistema eléctrico de potencia.

En este trabajo se han considerado modelos probabilísticos para la generación y la demanda, pero la red de transmisión se ha considerado determinísticamente. Es de interés fundamental desarrollar trabajos posteriores en los que se incluya un modelo estocástico para la red.



## Apendice A

### LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

#### A.1 Desarrollo Teorico

Para discretizar el par de transformadas de Fourier

$$h(t) \leftrightarrow H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(j2\pi n f) dt \quad \text{A.1}$$

es necesario en primer lugar muestrear  $h(t)$ . [Brigham, 1974]. Si  $T$  es el intervalo de muestreo, la función muestreada puede escribirse como (ver Fig. A.1)

$$h(t) \Delta_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kt) \delta(t-kt) \quad \text{A.2}$$

donde  $\Delta_0(t)$  es la delta de Dirac.

El paso siguiente es el truncamiento de la función muestreada por medio de la multiplicación con la función rectangular .... definida por

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 < t < T_0 - T/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{A.3}$$

donde  $T_0$  es la duración de la función de truncamiento.

El truncamiento resulta en

$$h(t) \Delta_0(t)x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kt) \delta(t - kT) \quad \text{A.4}$$

en donde se ha supuesto que hay  $N$  funciones impulso equidistantes dentro del intervalo de truncamiento, es decir  $N = T_0/T$ .

El paso final en la modificación del par de transformadas de Fourier original es muestrear la transformada de Fourier de la Ec. A.4. Esto es equivalente a convolucionar la función truncada y muestreada dada en A.4 por

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \quad \text{A.5}$$

Por lo tanto la relacion deseada es

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= [h(t)x(t)\Delta_0(t)] * \Delta_1(t) \\ &= T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \delta(t-kT - rT_0) \right] \end{aligned} \quad A.6$$

en donde, la notacion  $\tilde{h}(t)$  implica que  $\tilde{h}(t)$  es una aproximacion a la funcion  $h(t)$ . La funcion  $\tilde{h}(t)$  es periodica con periodo  $T_0$ , el cual consiste de N muestras.

Si la funcion rectangular  $x(t)$  se hubiese elegido de tal manera que los puntos finales coincidieran con valores muestreados, la convolucion de la funcion rectangular con impulsos espaciados a intervalos  $T_0$  resultaria un efecto de "superposicion", esto es, el N-esimo punto de un periodo coincidiria y se sumaria al primer punto del proximo periodo. Para evitar que esto ocurra es necesario elegir el intervalo de truncamiento como se ilustra en la Fig. A.1.d.

Para desarrollar la transformada de Fourier de la Ec. A.6 debe tenerse en cuenta que la transformada de Fourier de una funcion periodica  $\tilde{h}(t)$  es una sucesion de impulsos equidistantes [Papoulis, 1962]

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(f - nf_0) ; f_0 = 1/T_0 \quad A.7$$

donde

$$a_n = (1/T_0) \int_{-T/2}^{T/2} T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \delta(t-kT-rT_0) \exp(j2\pi nt/T_0) dt \quad A.8$$

Substituyendo A.6 en A.8 se obtiene

$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(j2\pi nkT/T_0) \quad \text{A.9}$$

La integración se efectúa sobre un solo periodo y por lo tanto

$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(j2\pi nk/N) \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{A.10}$$

Como  $T_0 = NT$ , la Ec. A.10 puede reescribirse como

$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(j2\pi nk/N) \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{A.11}$$

y la transformada de Fourier de A.6 es

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(j2\pi kn/N) \delta(f - nf_0) \quad \text{A.12}$$

En A.12 solo hay N valores diferentes debido a la periodicidad de la exponencial. Por lo tanto la transformada de Fourier A.12 puede expresarse equivalentemente como

$$H(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(j2\pi nk/N) \quad n = 0, \dots, (N-1) \quad A.13$$

Si se supone que las  $N$  muestras de la función original son un periodo de una función periódica, la transformada de Fourier de esta función está dada por las  $N$  muestras calculadas por la Ec. A.13. La notación ..... se usa para indicar que la transformada de Fourier discreta es una aproximación de la transformada de Fourier continua. Normalmente se escribe como

$$h(kT) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} H(n/NT) \exp(-j2\pi nk/N) \quad k=0, \dots, (N-1) \quad A.14$$

ya que la transformada de Fourier de la función periódica muestreada  $h(kT)$  es idénticamente  $H(m/NT)$ .

## A.2 Transformada de Fourier Discreta Inversa

La transformada de Fourier discreta inversa está dada por

$$h(kT) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H\left(\frac{m}{NT}\right) \exp(-j2\pi mk/N) \quad k=0, \dots, (N-1) \quad A.15$$

Para demostrar que A.14 y A.15 forman un par de transformadas de Fourier discretas basta substituir A.15 en A.14

La formula de inversion discreta A.15 es tambien periodica, con periodo de N muestrass,

En resumen el par de transformadas de Fourier discretas esta dada por

$$h(kT) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} H(n/NT) \exp(-j2\pi nk/N)$$

$$H(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(j2\pi nk/N) \quad \text{A.16}$$

Es importante recordar que el par A.18 requiere que ambas funciones sean periodicas

$$H(n/NT) = H[(rN + n)/NT] \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{A.17}$$

$$h(kt) = h[(rN + k)T] \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{A.18}$$

## A.3 Eleccion del Intervalo de Muestreo

Para que sea valido que la transformada de Fourier discreta coincida, salvo una constante, con la transformada de Fourier de la funcion continua, es necesario que  $\Delta(f)$  sea pequeno.

Si se elige  $T$  demasiado grande se produce una superposicion en los valores de la transformada que distorsiona la forma de la misma (Fig. A.2). Esta superposicion ocurrira hasta que la separacion de los impulsos  $\Delta(f)$  se incremente a  $1/T = 2f_c$ , donde  $f_c$  es la mayor componente de frecuencia de la transformada de Fourier de la funcion continua  $h(t)$ . El valor  $1/T = 2f_c$  se conoce como "tasa de muestreo de Nyquist".

**FIGURAS**

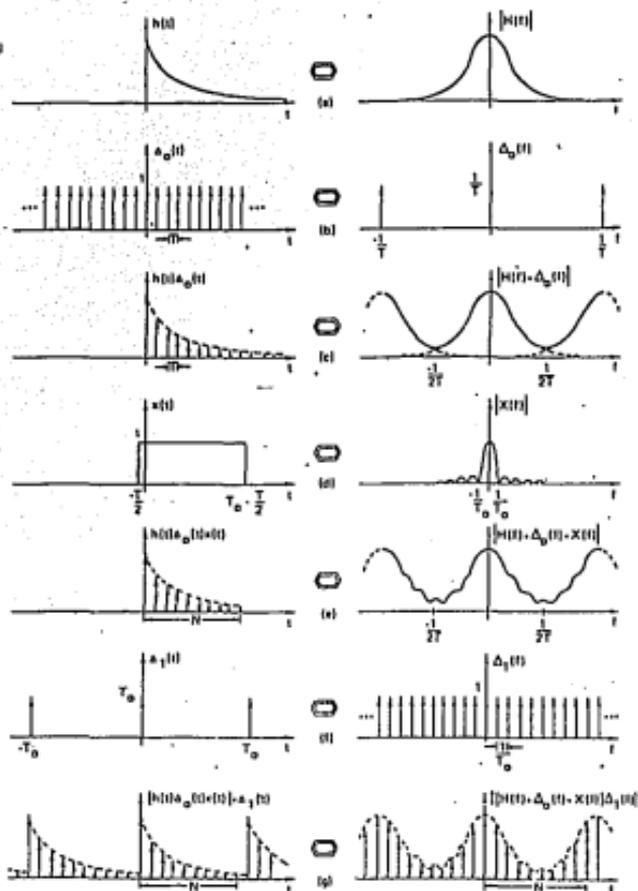


Fig. A-1 Deducción gráfica del par de transformadas de Fourier discretas (tomada de Brigham)

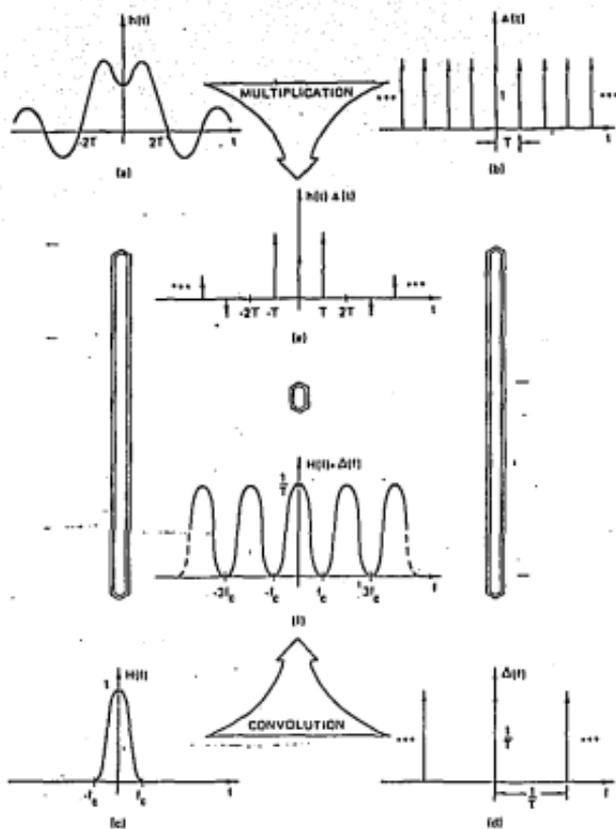


Fig. A-2 Transformada de Fourier discreta de una onda muestreada con la tasa de Nyquist (tomada de Brigham).

## Apendice B

### LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

En este apendice se describen los fundamentos del algoritmo de Transformada rápida de Fourier.

#### B.1 Definición del Algoritmo

Por simplicidad se supondrá en este paragrafo que  $N = 2^M$  (Brigham, 1974)

Considere la transformada de Fourier discreta

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) W^{nk} \quad n=0,1,\dots,(N-1) \quad B.1$$

donde  $W = \exp(j2\pi/N)$ . Si suponemos  $N = 4$ , y por lo tanto  $M = 2$ , la representación de  $k$  y  $n$  como números binarios de dos bits es

$$\begin{aligned} k &= (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11 \\ n &= (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11 \end{aligned} \quad B.2$$

y por lo tanto

$$k = 2k_1 + k_0; \quad n = 2n_1 + n_0$$

B.3

Usando la representacion B.3, la expresion B.1 puede reescribirse, para el caso en que  $L = N$ , como

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 X_0(k_1, k_0) W^{(2n_1 + n_0)(2k_1 + k_0)}$$

B.4

Ahora bien

$$W^{(2n_1 + n_0)(2k_1 + k_0)} = W^{2n_0 k_1} W^{(2n_1 + n_0) k_0}$$

B.5

A partir de B.5 puede reescribirse B.4 como

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[ \sum_{k_1=0}^1 X_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \right] W^{(2n_1 + n_0) k_0}$$

B.6

Esta ecuacion representa el fundamento del algoritmo de transformada rapida de Fourier. La suma entre corchetes de B.6 puede reescribirse como

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \quad \text{B.7}$$

y reemplazando los valores de  $n_0$  y  $k_0$  y escribiendo en notación matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(1,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(1,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \quad \text{B.8}$$

Similarmente, la suma exterior de B.6 es

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1 + n_0)k_0} \quad \text{B.9}$$

o, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} \quad \text{B.10}$$

Por lo tanto puede reescribirse B.6 como

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad \text{B.11}$$

El conjunto de ecuaciones B.8, B.10 y B.11 representa la formulacion original del algoritmo de transformada rapida de Fourier de Cooley-Tuckey para  $N = 4$ .

## B.2 Algoritmo de Cooley-Tuckey para el Caso General

Con un analisis similar al realizado en el paragrafo anterior, si  $N$  tiene  $m$  factores, es decir  $N = \prod_{j=1}^m N_j$ , el algoritmo de Cooley-Tuckey descompone la transformacion  $T$  (dada en B.1) en un producto de  $m$  transformaciones elementales, seguidas por una permutacion de los resultados (Singleton, 1967).

En notacion matricial,  $T$  puede representarse por

$$T = P S = P S_m S_{m-1} \dots S_2 S_1$$

8.12

Cada paso  $S_i$  esta compuesto de  $m / m_i$  transformaciones de dimension  $m_i$ . Puesto que el numero de operaciones aritmeticas para una transformacion de dimension  $m_i$  es del orden de  $m_i^2$ , el numero total de operaciones para la transformacion  $S$  es del orden de  $m \sum m_i$ . La permutacion  $P$  requiere comparativamente pocas operaciones adicionales.

## BIBLIOGRAFIA

- ABOYTES, F., CORY, B. J., "An alternative stochastic load flow formulation". IEEE Transaction Paper, Power Industry Computer Applications Conference, Junio 1975.
- ABOYTES, F., "Stochastic contingency analysis", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 97, 1978.
- ALLAN, R. N., AL-SHAIKARCHI, M. R. G., "Probabilistic a.c. load flow". Proc. IEE, Vol. 123, No. 6, pag 531-536, Junio 1976.
- BILLINTON, R., Power system reliability evaluation. Gordon and Breach, 1970.
- BORKOWSKA, B., "Probabilistic load flow", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 93, 1974
- BRIGHAM, E. D., The Fast Fourier Transform. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1974.
- BURDEN, R., FAIRES, J. D., REYNOLDS, A., Numerical analysis. Wadsworth International Student Edition, 1981.
- DOPAZO, J. F., KITLIN, D. A., SASSON, A. M., "Stochastic load flow". IEEE on Power Apparatus and Systems, Vol. 94, No. 2, Marzo/Abril 1975.
- KAWATA, T., Fourier analysis in probability theory. Academic Press, 1971.
- KENNEDY, W., GENTLE, J., Statistical Computing. Marcel Dekker, Inc., 1980.
- KLEIJNEN, J., Statistical Techniques in simulation, Vol. 1 y 2. Marcel Dekker, Inc., 1975.
- KNIGHT, U. G., Power systems engineering and mathematics. Pergamon Press, 1972.
- NAYLOR, T., BALINTFY, J., BURDICK, D., CHU, K., Tecnicas de simulacion en computadoras. Mexico: Editorial Limusa, 1982.
- PAPOULIS, A., The Fourier Integral and its Applications. New York: McGraw-Hill, 1962.
- RUBINSTEIN, R., Simulation and the Monte Carlo Method. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- SINGLETON, R. C., "On Computing the Fast Fourier Transform". Communications of the ACM, Vol. 10, No. 10, pag 647-654,

Octubre 1967.

## Contenido

Cap. 1: INTRODUCCION	2
1.1 Descripcion del Problema	2
1.2 Objetivos y Procedimientos	3
1.3 Contenido	4
Cap. 2 EL MODELO BASICO PARA EL ANALISIS DE FLUJO DE POTENCIA	5
2.1 Consideraciones Generales	5
2.2 El Modelo Basico	6
2.3 El Modelo de Flujo Desacoplado	11
2.4 Analisis Estocastico de Flujo de Potencia	14
Cap. 3 METODO DE SOLUCION : FUNCIONES CARACTERISTICAS	18
3.1 Consideraciones Generales	18
3.2 Funcion Caracteristica de Variables Aleatorias	19
3.3 Aspectos Computacionales	21
Cap. 4 METODO DE SOLUCION : MONTE CARLO	26
4.1 Consideraciones Generales	26
4.2 Aplicacion al Estudio Estocastico de Flujo de Potencia	28
4.3 Generacion de Variables Aleatorias	28
4.4 Generacion de las Respuestas del Sistema	30
Cap. 5 DEFINICION DE INDICES. EJEMPLOS DE APLICACION	32
5.1 Indices de Comportamiento para Lineas y Nodos	32
5.2 Indices de Comportamiento para el Sistema	32
5.3 Ejemplos de Aplicacion	36
Cap. 6 CONCLUSIONES	48
Apendice A LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA	50
A.1 Desarrollo Teorico	50
A.2 Transformada de Fourier Discreta Inversa	54
A.3 Eleccion del Intervalo de Muestreo	56
Apendice B LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER	60
B.1 Definicion del Algoritmo	60

