O0661
4
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

ORGANIZACION.

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST GRADO.

EL ANALISIS DE REGRESION Y EL CALCULO DIFERENCIAL EN LAS DECISIONES ADMINISTRATIVAS.

Trabajo escrito que para obtener el grado de Maestro en administración presenta el

ING. JORGE ROJAS Y LOPEZ.

SEPTIEMBRE 1980

INDICE

TEMA

El análisis de regresión y el cálculo diferencial en las decisiones administrativas y económicas.

OBJETIVOS

En ésta investigación, se pretende a través de técnicas matemáticas, proporcionar elementos de presentación y análisis de datos recolectados en las organizaciones, y que son necesarios para la toma de decisiones.

Se hace énfasis en el análisis de regresión como un método para la obtención de modelos matemáticos y; el cálculo diferencial como técnica de optimización de estos modelos.

Asimismo, se facilita a estudiantes y profesores del área de administración, un texto original sobre la interrelación del análisis de regresión y el cálculo diferencial que, en forma sencilla los ubique en el contexto de las matemáticas, ayudándoles a expresar en forma simbólica el comportamiento de algunas situaciones productivas o financieras y que, directa o indirectamente requieren de una decisión.

INTRODUCCION

Este trabajo consta de tres partes:

La primera y a manera de repaso, se presentan algunos conceptos matemáticos teóricos, que se consideran necesarios para la mejor comprensión de los temas que se exponen. Estos conceptos se exhiben para ser entendidos en forma intuitiva, utilizando ejemplos más que demostraciones formales. Se presume que el lector tiene ciertos conocimientos sobre la materia, y en su defecto se señalan las diferentes notas bibliográficas al pie de cada página o al final del tema.

En la segunda parte, y considerando que es de vital importancia poder formular modelos matemáticos, se presenta el análisis de regresión como una técnica para dicho fín. En forma muy breve se exponen los conceptos más importantes sobre este tema, así como también los diferentes métodos de ajuste de curvas. Entre éstos, se señala el método de los mínimos cuadrados como el más exacto; se hace una breve demostración a través del cálculo diferencial del porqué este método es considerado el más adecuado.

Con el objeto de facilitar la aplicación del análisis de regresión se incluyen fórmulas y gráficas de las funciones que con mayor frecuencia, se presentan en problemas reales de la administración y la economía.

En la última parte, se mencionan los diferentes aspectos en los que, puede aplicarse el cálculo diferencial como una técnica de optimización, de problemas tanto administrativos como económicos.

PRIMERA PARTE

CONCEPTOS GENERALES

MODELOS

1) Definición de Modelo: Es una representación o abstracción de una situación, que muestra sus relaciones (directas e indirectas), y que permite predecir y comparar los resultados reales con los pronosticados.

Dada la complejidad de algunos problemas reales de la administración, resulta incosteable el aventurarse a tomar una decisión: si no se tiene, cuando menos una idea del posible resultado, o - de las alternativas de decisión. Entonces la forma como puede obtenerse un conjunto de posibles consecuencias es experimentado - sobre una abstracción del sistema real, es decir, sobre un modelo, el cual representa todas las relaciones existentes en el sistema de tal forma que si se modifican las condiciones de alguno de los elementos de éste, se vea reflejado el resultado, en todo el conjunto.

Dependiendo de las particularidades de cada problema, pueden -- tenerse diferentes tipos de modelos, tales como:

2) Modelos Iconicos

Estos representan las propiedades más relevantes del fenómeno, normalmente con un cambio de escala. Ejemplos pueden ser: fotografías, dibujos, modelos de autos, mapas, aviones, etc.
Son en general, específicosy concretos y en ocasiones difíciles de manejar, para fines experimentales.

3) Modelos Analógicos

Estos utilizan un conjunto de propiedades, para representar otro, cuyo comportamiento es análogo; por ejemplo: un sistema mecánico puede representarse por un sistema eléctrico; un sistema - hidráulico puede usarse como un análogo de un sistema eléctrico económico o de tráfico. Una red es análogo de un sistema con - una amplia diversidad de variables, que muestra sus interrelaciones, a través de magnitudes y localizaciones geométricas.

4) Modelos Simbólicos

Utilizan letras, números y otro tipo de símbolos para representar las variables y sus relaciones, constituyen por esto el modelo más general y abstracto. Normalmente son los más sencillos de manejar en la experimentación. Estos toman la forma de relaciones matemáticas, casi siempre ecuaciones o inecuaciones, - que reflejan las estructuras de lo que representan.

Los modelos simbólicos son por lo tanto, los más interesentes - en éste estudio.

Las ecuaciones o inecuaciones que se obtienen al formular un -- modelo, son de hecho proposiciones de igualdad o desigualdad -- que como tales admiten la posibilidad de ser ciertas para determinados valores o falsas para todos los demas. Es claro que sólo nos interesarán los valores que los hacen verdaderos.

Problemas que podrían plantearse a través de un modelo matemático serían los siguientes:

Ejemplo I.

A la función de un circo entraron entre niños y adultos 700 personas, si los niños pagan \$ 15.00 pesos y los adultos \$ 40.00 - ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron al circo, si en taquilla hay \$ 12.000.00?

Solución.

Símbolos: N = Número de niños que entraron al circo

A = Número de adultos que entraron al circo

1a. proposición: - El número de niños y adultos suman 700

$$N + A = 700$$

2a. proposición: La cantidad gastada por los niños en la compra de sus boletos más la cantidad gastada por los adultos para el mismo fin suman 1200. Es decir

$$15N + 40A = 1200 \text{ pesos}$$

De esta forma se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al resolverlo, conduce al siguiente resultado:

$$N = 640$$

y

$$A = 60$$

Estos valores, satisfacen ambas ecuaciones.

Ejemplo II.

Dos máquinas producen las piezas A y B respectivamente. Las - cuales deben ensamblarse secuencialmente, primero la A y des-- pués la B. Para que el proceso de ensamble sea más eficiente,- conviene tener igual número de partes A y B.

La máquina 1 produce 16 piezas "A" por hora, pero por limpie- za y preparación de herramientas puede empezar a trabajar 3 -- horas después de iniciado el turno. La máquina 2 tiene una capa cidad de 10 piezas "B" por hora; Si el turno empieza a las 8 -- horas ¿ a qué hora puede empezar a ensamblarse?

Planteamiento:

Los elementos más relevantes del problema son:

Hora de inicio del turno	$= t_o$
Tiempo de inicio de ensamble	$= t_o + t$
Tiempo de trabajo de las máquinas	$= t$
Número de partes producidas por la máquina 1	$= X_1$
Número de partes producidas por la máquina 2	$= X_2$

Las variables del problema son:

$$t, \quad X_1 \quad y \quad X_2$$

Expresemos el número de piezas producidas por cada una de las máquinas en función del tiempo.

Máquina 1: capacidad 16 piezas por hora, $X_1 = 16t$

pero esta máquina tiene un retraso de 3 horas, por lo que ha -- producido 3(16) = 48 piezas menos que las que debería en el tiempo "t".

Entonces, la primera proposición queda: $X_1 = 16t - 48$

la máquina 2 con capacidad 10 piezas por hora proporciona la segunda proposición: $X_2 = 10t$

Considerando estas 2 ecuaciones y la condición del problema, (para optimizar el ensamble conviene tener igual número de piezas- A y B) se tiene el siguiente sistema.

1) $X_1 = 16t - 48$

2) $X_2 = 10t$

3) $X_1 = X_2$

que haciendo $X_1 = X_2 = X$

se reduce a: $X = 16t - 48$

$X = 10t$

Resolviendo este sistema se tiene que $t = 8$.

El tiempo de inicio de ensamble es:

$t_o + t = 8 + 8 = 16$ horas

Por lo tanto, puede empezar a ensamblarse a las 16 horas (4 de la tarde).

El número de ensambles es de 80 o sea $X = 80$

5) Conclusiones sobre modelos

En diferentes situaciones cuando se dispone de otro tipo de datos, es posible obtener modelos un poco más sofisticados, utilizando - el análisis de regresión.

Las proposiciones tanto de igualdad como de desigualdad (ecuacio nes e inecuaciones) representan la mayoría de las veces objetivos o restricciones propias de un problema y constituyen globalmente el modelo.

La optimización de modelos, que resulten en proposiciones de -- primer grado pueden resolverse por medio de la programación -- lineal.

Los modelos que implican ecuaciones o inecuaciones de 2o. gra do o mayor pueden optimizarse por medio del cálculo diferencial.

RELACIONES

Una relación es la correspondencia entre los elementos de dos - conjuntos, en donde el orden de estos elementos es importante: - al conjunto de los primeros elementos, se le llama dominio, y al conjunto de los segundos, se le llama rango; a los elementos de- este último se les llama imagen.

Este concepto entendido intuitivamente, nos permite entender que existen diferentes tipos de relaciones entre los elementos de dos conjuntos, tales como de igualdad (=) mayor que (>), menor que (<) mayor o igual que (≥), menor o igual que (≤) y también - de pertenencia (∈) o contenido en (⊂) o contiene a (⊃).

Este concepto puede ampliarse diciendo, que: una relación es cual quier combinación entre los elementos de dos conjuntos en donde- siempre el primer elemento de la relación tiene que ser elemento del primer conjunto o dominio y el segundo un elemento del rango.

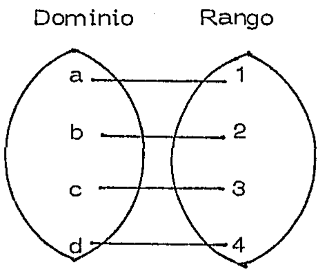
FUNCIONES

Función real "f" de una variable real X.

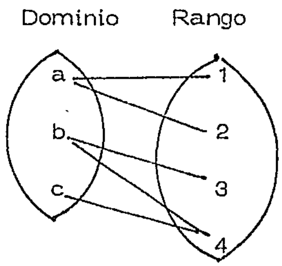
Hay relaciones que por la correspondencia de sus elementos se llaman funciones.

Definición: Una función, es una relación en la que a cada - elemento del dominio le corresponde una y sólo- una imagen.

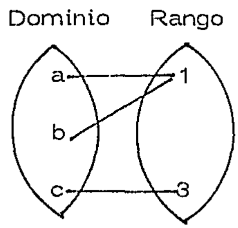
Un elemento del rango puede ser imagen de dos o más elementos del dominio.



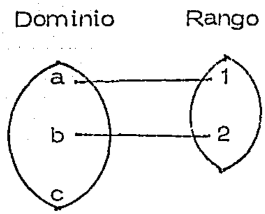
Si es función



No es función hay elementos del dominio que tienen dos imágenes.



Si es función



No es función porque hay un elemento del dominio que no tiene imagen.

Las proposiciones matemáticas son relaciones, y sólo algunas - son funciones.

Utilizando la notación de conjuntos podemos definir a la función F.

$$F = \left\{ (X, Y) \mid X \in \text{Dominio y } Y \in \text{Rango} \right\}$$

que significa: La función F, está formada por las parejas de -- valores (X, Y) donde X es un elemento del dominio y "Y" es un elemento del rango.

Entonces las siguientes relaciones seran o no funciones si cum-- plen con la definición de función.

Si consideramos al dominio como el conjunto de los reales.

$y2 = X.$ No es función puesto que a un elemento del - dominio le corresponden dos imágenes.

$Y = X^2$ Si es función.

INCREMENTO

El incremento de una variable es la diferencia existente entre un valor final y el valor inicial.

Un incremento de la variable X se representa por el símbolo ΔX (lease delta X) y un incremento de la variable Y se representa- por ΔY.

$$\Delta X = X_2 - X_1 \qquad \Delta Y = 1/2 - Y_1$$

Los incrementos pueden ser positivos o negativos dependiendo si el valor de la variable es mayor o menor que el inicial, después de aplicar el incremento.

RECTA Y PENDIENTE DE UNA RECTA

La recta puede definirse como la distancia más corta entre dos puntos, y si se toma como referencia una linea horizontal, una recta, puede tener cierta inclinación sobre la horizontal.

Y

(X_2, X_2)

$(X_1 \quad Y_1)$

$\Delta Y = Y_2 - Y_1$

$\Delta X = X_2 - X_1$

X

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

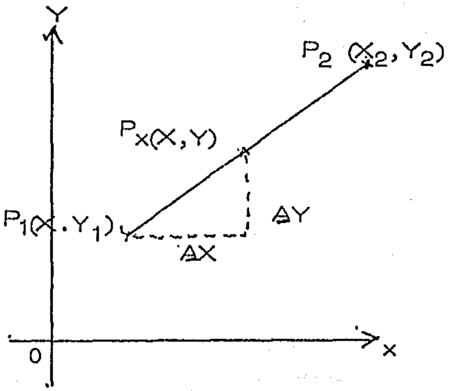
A esa inclinación se le llama pendiente y generalmente se simboliza por "m" y está dada por la relación de los incrementos $m = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ que no es otra cosa que la función trigonométrica tangente del ángulo θ formado por la horizontal y la recta.

$$m = \tan \theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Conociendo las coordenadas de dos puntos de la linea recta puede obtenerse su ecuación, para lo cual puede partirse del concepto del pendiente.

La pendiente de la recta definida por dos puntos de coordenadas P_1 $(X_1;Y_1)$ y P_2 (X_2,Y_2) es:

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$



Ahora, si se supone un punto cualquiera contenido sobre la recta, sus coordenadas serían $(X. Y)$* por lo que si quisieramos obtener la pen - diente de la recta definida por los - puntos P_1 y P_x esta sería:

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{X - Y_1}{X - X_1}$$

y puesto que estas dos pendientes deben ser iguales ya que pertenecen a la misma recta, entonces:

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

que es la fórmula que nos permite encontrar la ecuación de la rec -

---

* las variables se identifican por las últimas letras del abecedario y las constantes por las primeras, pero al sub-indisar las variables, convencionalmente, estas representan valores constantes.

ta. Si se despeja a la variable "Y" se puede obtener la expresión $Y = m x + b$, donde "m" es una constante y representa la pendiente (incluyendo su signo) y "b" que también es constante, representa la ordenada al origen, es decir, el punto donde la recta corta a el eje vertical.

INTERVALOS

Una relación $a < b$ permite definir varios subconjuntos en el conjunto de los reales. Se tienen varios tipos de intervalos:

1) Intervalo cerrado: $[a \ , \ b]$ que puede escribirse $a \leq x \leq b$ que significa que "X" puede tomar cualquier valor en este intervalo incluyendo los límites a y b.

2) Intervalo abierto $]a \ , \ b[$ que también puede escribirse $(a \ , \ b)$ o $a < x < b$, que significa que "X" puede tomar cualquier valor en el intervalo sin incluir sus límites a y b.

3) Intervalos mixtos, (semi-abiertos o semi-cerrados)

$$]a \ , \ b] \quad o \quad (a \ , \ b] \quad o \quad a < x \leq b$$

en donde x puede tomar los valores dento del intervalo incluyendo el límite de la derecha, pero no el de la izquierda, pudiéndose - hablar de un intervalo abierto por la izquierda (semi-abierto) o - cerrado por la derecha (semi-cerrado).

Y de la misma forrna:

$$[a \ , \ b[\quad o \quad [a \ , \ b) \quad O \quad a \leq x < b$$

que significa que "x" no puede tomar el valor de "b" pero si -- cualquier otro en el intervalo " a y b".

4) Intervalos infinitos, tales como:

$$[a, +\infty[\quad o \quad [a \ , \ \infty) \quad o \quad a \leq x < \infty$$

y también:

$$]-\infty, \ a] \quad o \quad (-\infty, \ a] \quad o \quad -\infty < x \leq a$$

<u>Concepto de límite.</u>

Este concepto será expuesto en forma intuitiva. Primero se recor dará el concepto de límite de una variable y posteriormente el - de una función.

1) Límite de una Variable

Este concepto trataremos de explicarlo con algunos ejemplos, - antes de dar una definición.

Consideremos la función 1/x. En esta expresión algebraica, x no puede tomar el valor de "cero" ya que la división por cero no - existe. Por lo que puede decirse que "cero" es un valor prohibido para la variable "x".

Sin embargo, x puede tomar un valor positivo o negativo muy -- cercano a cero, por ejemplo x = 0.003, ó x = -. 002; si consideramos x = 0.003, la diferencia entre este valor y cero es - - 0.003. Pero puede verse que siempre existirá un valor para x, - que permita que la diferencia entre ese valor y cero sea menor - por ejemplo x = 0.00005 su diferencia con cero es 0.00005.

Este razonamiento puede continuarse, y se pueden alcanzar valores cercanos a cero tanto como se quiera, pero nunca puede tomar el valor de cero.

Se acostumbra decir que X tiende a cero, lo cual se indica por $X \rightarrow 0$.

Consideremos ahora el área de un polígono inscrito en un círculo imaginaremos que aumentamos el número de lados iguales de ese polígono. Si "n" (número de lados) tiende a ser muy grande, podemos imaginar que el área de cada polígono inscrito en ese círculo irá aumentando entre mayor sea el número de lados, pero sin embargo, esta área variable, tiende a un límite que es precisamente el área del círculo.

En este caso, la variable V (área) aumenta indefinidamente y la diferencia a - V (donde "a" es el área del círculo) va disminuyendo hasta que finalmente llega a ser menor que cualquier número positivo escogido de antemano, sin importar que tan pequeño se haya elegido.

En consecuencia:

Se dice que la variable V tiende a la constante "a" como límite cuando los valores sucesivos de V son tales que el valor absoluto de la diferencia $|V - a|$, puede llegar a ser finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño como se quiera (E)*.

En otros términos si $|V - a| < E$, ** se dice que, $V \rightarrow a$ (leer V tiende a "a").

2) Límite de una Función

En una función existe, una relacion univoca, entre los valores de la variable independiente y los de la dependiente. Ejemplo: en la función $Y = X^2$, X es la variable independiente y "Y" la dependiente.

Sea una variable independiente "V" y una variable dependiente Z función de V, y supóngase que la variable V recibe valores tales que $V \rightarrow L$. Tenemos que investigar entonces los valores de la

---

* Granville Smith Longley - Cálculo diferencial e integral. McGraw Hill

** Debe recordarse que cuando se coloca una cantidad entre valores absolutos se obtiene un resultado positivo, o sin signo, ej: $|3 - 5| = |-2| = 2$

variable dependiente Z y examinar particularmente si "Z" tiende también a un límite. Si efectivamente existe una constante "a" tal que lim Z = a, entonces se dice que el límite de la función es "a" cuando "V" tiende a "L" y esto se expresa:

$$\lim_{V \to L} Z = a$$

Ejemplo: sea la función $f(x) = 4x + 2$. Encontrar su límite cuando x tiende a 2.

Se resuelve en este caso, sustituyendo el valor al que se aproxima la variable independiente en la expresión.

$$\lim f(x) = f(2) = 4\,(2) + 2 = 10$$

cuando $x \to 2$

entonces $\lim f(x) = 10$ cuando $x \to 2$

Cuando se tiene otro tipo de funciones el límite no se encuentra en forma tan sencilla como la anterior, porque muchas veces se -

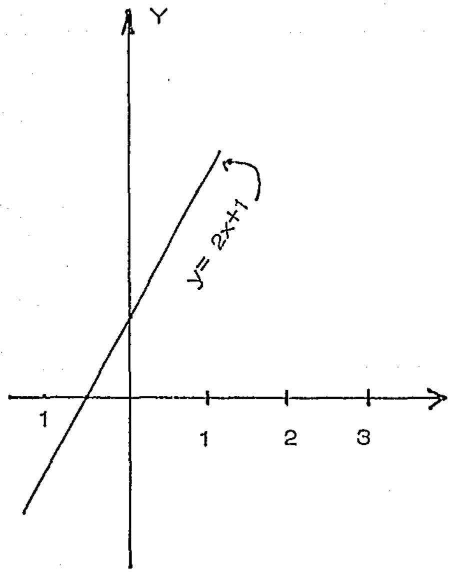
llega a indeterminaciones. Las que hay que evitar por medio de transformaciones algebraicas y algunos teoremas sobre límites. (Ver Granville Smith y Longley Cálculo Diferencial e integral. Ed. McGraw Hill).

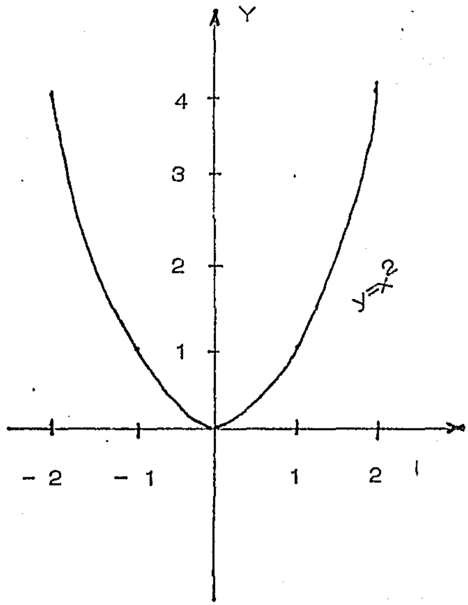
CONTINUIDAD.

Desde un punto de vista intuitivo puede decirse que una función es continua en un intervalo, cuando su representación gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz.

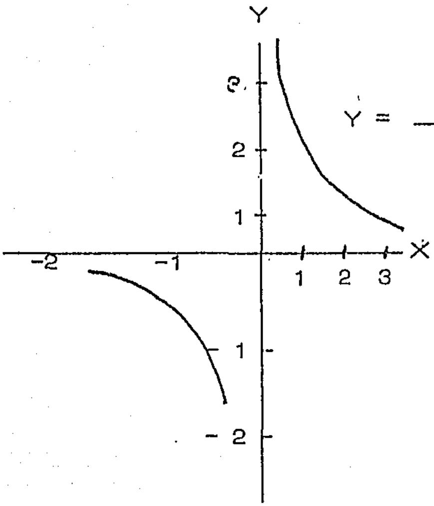
Ejemplos:

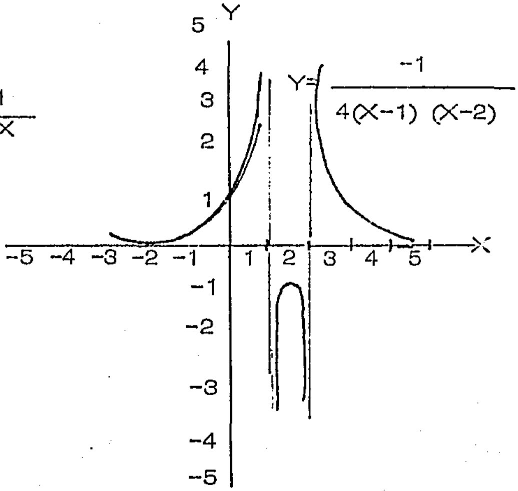
1) Las siguientes funciones son continuas en el intervalo: $]-\infty, \infty[$





2) Las siguientes funciones no son continuas en el intervalo: $]-\infty, \infty[$





Si se quiere ir más allá de lo intuitivo, deben hacerse ciertas consideraciones en algunos casos:

Si el límite de la función f(x), cuando $x \to a$, es diferente de f(a), o sea:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Se dice que la función no es continua para $x = a$. Esto se -- presenta cuando la función $c(x)$ no está definida para $x = a$.

1) Continuidad en un punto

Teorema. Una función $f(x)$, definida en el intervalo (X_1, X_2) es continua en el punto de abscisa "a" de éste intervalo, si admite- como límite a $f(a)$, cuando $x \rightarrow a$.

Ejemplo:

1) la función $f(x) = \frac{1}{X - 1}$ no es continua, se dice que es dis- continua para $X = 1$ ya que no está definida para este valor. Ademas cuando $X \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$ y cuando $X \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

2) la función $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$ es continua en $X = 2$; en efecto $f(2) = 14$, si $X \rightarrow 2$,

2) Continuidad en un intervalo

Teorema. Una función $f(x)$ definida en un intervalo dado es continua en este intervalo, si es continua en cualquier punto de ese intervalo.

Además se puede demostrar que:

1) la suma f(x) + g(x) de dos funciones continuas en el intervalo $[X_1, X_2]$ es una función continua en el mismo intervalo.

2) el producto f(x) . g(x) de dos funciones continuas en el intervalo $[X_1 . X_2]$ es una función continua en el mismo intervalo.

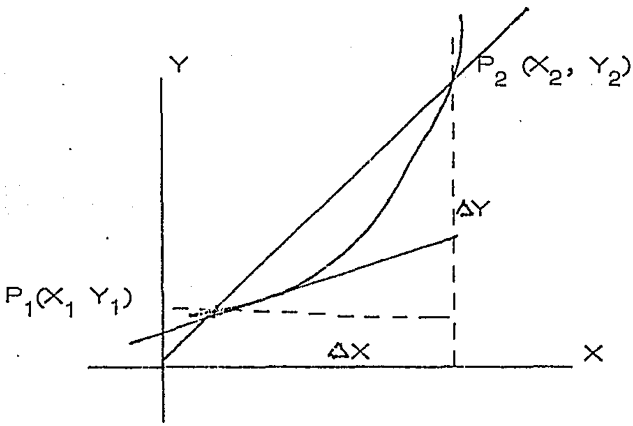
3) el cociente f(x). g(x) de dos funciones continuas en el intervalo $[X_1 . X_2]$ es una función continua en el mismo intervalo, si -- g (x) no se anula en éste.

4) si f(x) es una función continua en el intervalo $[a \;.\; b]$, entonces $[f(x)]^P$ es también una función continua en el mismo intervalo y esto es valido también cuando P es fraccionario, es decir, P = 1/t entonces $f(x)^P$ quedaría $f(x)^{1/t}$

DERIVADA DE UNA FUNCION DE UNA VARIABLE.

Este concepto lo revisaremos utilizando la interpretación geométrica que se le dá a la derivada y el concepto de límite.

Si consideramos una curva en un cierto intervalo y una secante, pasando por los puntos p_1 (x_1, y_1) y p_2 (x_2, y_2), puede obtenerse la pendiente de esta secante, puesto que pueden determinarse sus incrementos. Ahora supongase que el punto P_2 se desliza sobre la curva y se aproxima al punto P_1; puede verse fácilmente que los incrementos varían y que por lo tanto varía también la pendiente de la secante.



Si este punto P_2 se aproxima tanto a P_1 de tal forma que coin cidieran en uno solo, es decir el incremento ΔX fuera tan pequeño que casi se aproximara a cero ¿cuál sería la pendiente de la secante?

Se utiliza el concepto de límite tal como sigue:

Consideramos la función $y = f(x)$

1. Sustituyase x por $(x + \Delta x)$ y calculese la nueva función:

$$Y + \Delta Y = f(x + \Delta x)$$

2. Obtengase el valor del incremento de la función; es decir, al nuevo valor réstese el valor original.

$$\begin{array}{rcl} Y + \Delta Y & = & f\,(x + \Delta x) \\ -Y & = & -\,f(x) \\ \hline \Delta Y & = & f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

3. Obtengase la razón de los incrementos, es decir, dividase la expresión entre ΔX para obtener el valor de la pendiente:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f\,(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta X}$$

4. Cálculese el límite cuando ΔX tiende a cero

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A este límite se le llama primera derivada de una función de una variable, y puede indicarse de alguna de las siguientes formas -- identicas.

$$Y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} f(x) = Dx\, f(x) = f'(x)$$

es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \longrightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

y se lee derivada de "Y" con respecto a "X".

Cuando dos puntos sobre una curva, coinciden en uno sólo, la -- recta que los une, ya no se llama secante, sino tangente puesto que ya no corta a la curva. Entonces:

Equivale a la pendiente de la tangente a una curva en un punto - determinado.

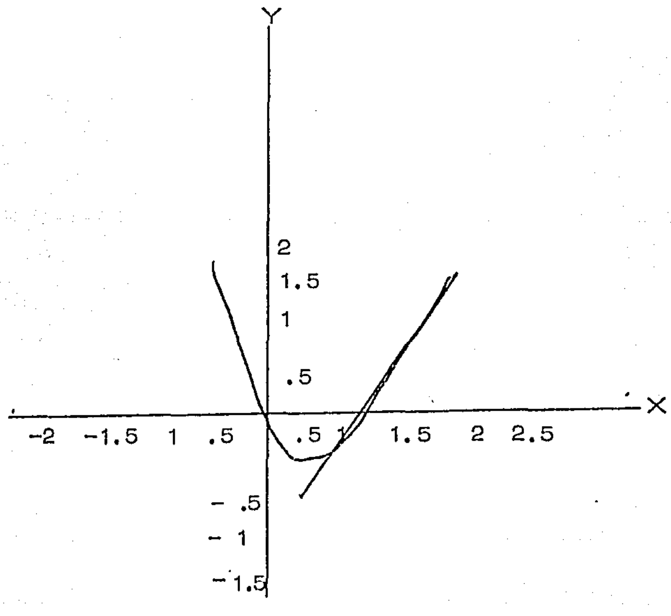
1) Definición de Derivada.

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función, al incremento de la variable independiente cuando -- éste tiende a cero.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual - a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.

Sea la siguiente función: $Y = 2X^2 - 2X$. Cuya gráfica se representa en la figura adjunta y supóngase que nos interesa saber -- cuál es la pendiente de la tangente a esa curva en el punto de coordenadas (1.0)



Utilizando el concepto de límite y derivada se tiene:

1. Paso.

Incrementar "X" y calcular el correspondiente incremento de "Y"

$$Y + \Delta Y = 2 \ (x + \Delta X)^2 - \ 2 \ (X + \Delta X)$$

2. Paso.

Encontrar el incremento ΔY, para lo cual hay que restar a la - función actual la función original, pero antes desarrollaremos -- operaciones.

$$Y + \Delta Y = 2 \ \ X^2 - 2 \times \Delta X + (\Delta X)^2$$

Función actual:

$$Y + \Delta Y = 2X^2 + 4 \times \Delta X \div \ 2 \ \Delta X^2 - 2 \ X - 2 \ \Delta X$$

Menos función original:

$$- Y = \quad - 2 \ X^2 \qquad\qquad\qquad + 2X$$

Resultado $\quad \Delta Y = 4 \times \Delta X + 2 \ \Delta X^2 \quad - \quad 2 \ \ \Delta X$

3. Paso

Ahora para encontrar la pendiente o razón de incrementos dividase entre ΔX.

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{4X \quad \Delta X}{\Delta X} + \frac{2 \quad \Delta X^2}{\Delta X} - \frac{2 \quad \Delta X}{\Delta X}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad 4X + 2\,\Delta X \quad - \quad 2$$

4. Paso.

Calcular el límite de la expresión cuando $\Delta X \longrightarrow 0$

Esto hace que el segundo término del segundo miembro equivalga a cero.

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 4X - 2$$

siendo este resultado la derivada de la función original.

Este mismo resultado puede encontrarse de forma más sencilla utilizando las fórmulas de derivación.

Puesto que esta primera derivada representa la pendiente de la tangente a la curva, en cualquier punto, si se sustituye el valor de la absisa del punto, en esta expresión, se obtiene la pendiente de esa tangente. En este caso $X = 1$

Por lo tanto: $\frac{dy}{dx} = m = 4 \quad (1) - 2$

$$m = 2$$

Es decir la razón de los incrementos es de 2 a 1. A un incremento de una unidad en X (variable independiente) corresponde un -- incremento de 2 en y (variable dependiente o función) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{2}{1}$

Sin embargo este proceso para obtener la pendiente de la tangente es demasiado laborioso y se puede reducir mucho el tiempo,- aplicando las siguientes reglas elementales de derivación:

2) Fórmulas de derivación.

1. $\frac{dc}{dx} = o$ Si c = constante, la derivada de una constante es cero.

II. $\frac{dx}{dx} = 1$

La derivada de una variable con respecto a sí misma es la unidad.

III. $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$

La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones - es igual a la suma algebraica de- cada una de sus derivadas.

Es conveniente hacer notar que u, v, w, no son variables sino símbolos que representan funciones,- por ejemplo: $u = 3x^2 - 2x$; $v = x^2 + 1$; y $w = x$ donde en to dos los casos la variable es "x"

IV. $\frac{d}{dx}(cv) = c \frac{dv}{dx}$

La derivada del producto de una constante por una función es -- igual al producto de la constante por la deriva de la función.

V. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda más el producto de la segunda por la derivada de la primera. La derivada de un cociente puede convertirse en producto.

VI. $\frac{d}{dx}(v^n) = n\ v^{n-1}\ \frac{dv}{dx}$

La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuído en una unidad, por la derivada de la función.

VII. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

Es la misma fórmula que la anterior, solo que aquí la función es "x" y la $\frac{dx}{dx} = 1.$

VIII. $\frac{d}{dx}(Ln\ v) = \frac{1}{v}\ \frac{dv}{dx}$

La derivada del logarítmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función.

IX. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v\ L_n\ a\ \frac{dv}{dx}$

La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto del logarítmo natural de la constante por la constante elevada al exponente variable y por la derivada del exponente.

X. $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v\ \frac{dv}{dx}$

Es la misma fórmula que la anterior, sólo que el $Ln\ e = 1$

3) Tabla de derivadas usuales

I. $$\frac{dc}{dx} = o$$

II. $$\frac{dx}{dx} = 1$$

III. $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

IV. $$\frac{d}{dx}(cv) = c \frac{dv}{dx}$$

V. $$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

VI. $$\frac{d}{dx}(v^n) = n\, v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

VII. $$\frac{dx^n}{dx} = n\, x^{n-1}$$

VIII. $$\frac{d}{dx}(Lnv) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

IX. $$\frac{d}{dx}(a^v) = a^v\, Lna\, \frac{dv}{dx}$$

X. $$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$$

4) Segunda derivada de una función de una variable.

En general, cuando se tiene una función de una variable, su primera derivada rasulta también una función de la misma variable. Esta nueva función, puede también a su vez derivarse. En este caso la derivada de la primera derivada se llama segunda derivada de la función primitiva. Análogamente la derivada de la segunda, se llama tercera derivada y puede continuarse así has a la enésima derivada.

Notación: Los símbolos para las derivadas sucesivas se observan como sigue:

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$ primera derivada

$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$ segunda derivada

$\frac{d^3y}{dx^3} = y'' = f'''(x)$ tercera derivada

$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ enesima derivada

Ejemplo:

$y = 3X^2 + 2X$ función primitiva.

$y' = 6X + 2$ primera derivada

$y'' = 6$ segunda derivada

5) Aplicaciones de la primera y segunda derivada

La utilización más próxima de la primera derivada es la determinación de intervalos crecientes, decrecientes. Y la localización = de puntos extremos relativos (máximos y mínimos), de una función; la segunda derivada sirve para indicar la concavidad de una curva, puntos de inflexión y también máximos y mínimos relativos. Conjuntamente se emplean para graficar funciones.

Estos conceptos llevados a modelos matemáticos que representen problemas reales económico-administrativos, constituyen un medio eficaz de optimización

6) Funciones crecientes y decrecientes

Una función $y = f(x)$ es creciente si "y" aumenta (algebraicamente) cuando "x" aumenta; y decreciente si "y" disminuye cuando "x" -- aumenta.

En cualquier punto donde la función es creciente, la tangente forma un ángulo agudo con el eje de las "x" (el punto A por ejemplo figura I) y la pendiente es positiva. Por otra parte, en un punto, - donde la función es decreciente, la tangente forma un ángulo obtuso con el eje de las "x" (el punto B por ejemplo) y la pendiente es - negativa. (Fig.I)

Teorema

El tipo de función en un intervalo dado puede describirse en términos de la primera derivada, de tal forma que: La función es creciente si la primera derivada es positiva, decreciente, si es negativa y constante si es nula.

Función creciente si $f'(x) > 0$ ó positiva

Función decreciente si $f'(x)$ 0 ó negativo

Función constante si $f'(x) = 0$

Una función puede ser unas veces creciente y otras decreciente - esto puede verse en la siguiente figura, correspondiente a la función.

$$y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$$

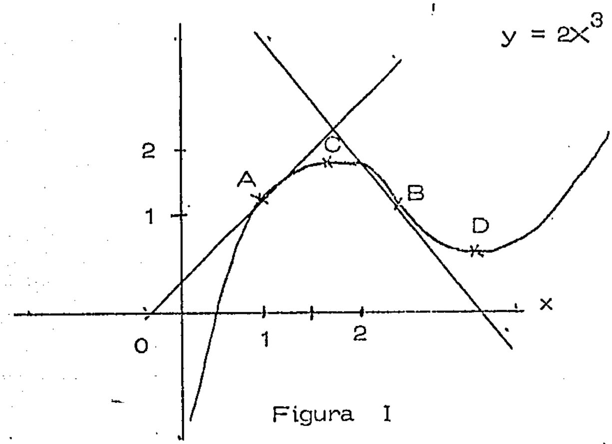


Figura I

La curva sube desde $-\infty$ hasta llegar al punto "C", baja hasta el punto D y sube nuevamente a la derecha de D.

Luego:

a) para $x \in \left]-\infty, 1\right[$ la función es creciente

b) para $x \in \left]1, 2\right[$ la función es decreciente

c) para $x \in \left]2, +\infty\right[$ la función es creciente

Lo anterior puede demostrarse a través del teorema, calculando la primera derivada para un punto dentro del intervalo considerado.

Para el primer intervalo puede elegirse $X = 1/2$ (punto A)
Si la función original $Y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$, la primera derivada $y' = 6X^2 - 18X + 12$.

Sustituyendo X por 1/2 $y' = 3/2 - 9 + 12 = 9/2$ (positivo)
Por lo tanto la función es creciente.

En el segundo intervalo, consideremos el valor $X = 3/2$ (punto B)

Sustituyendo X por 3/2 se obtiene $y' = 27/2 - X = 3/2$ (negativo)

Por lo tanto la función es decreciente.

En el último intervalo comprobemos que es creciente para el valor de $X = 3$

$$f'(3) = 6(3)^2 - 18(3) + 12$$

$$y' = 54 - 54 + 12$$

$y' = 12$ Por lo tanto la función es creciente

7) Máximos y mínimos de una función (extremos)

Definición:

Un valor de una función es un Máximo, si es mayor que cualquier de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente.

Un valor de una función es un Mínimo si es menor que cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente.

En la figura I se observan un máximo en el punto "C" y un mínimo en el punto "D"

Debe observarse que un valor así definido no es necesariamente el mayor o menor posible de una función, ya que hay valores a la derecha de "C" que son mayores o a la izquierda de "D" que son menores que estos. (ver, Fig. I) pág. 40

En un punto extremo la primera derivada cambia de signo para valores un poco más paqueños que el extremo y para valores un poco mayores a éste (Ver figura I.) pág. 40

Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$ se llaman valores críticos

Los valores críticos determinan puntos de cambio, donde la tangente es paralela al eje de las "X" (pendiente nula).

8) Pasos para determinar los extremos de una curva.

1. Calcular la primera derivada
2. Igualar la primera derivada a cero y determinar las raices reales de la ecuación.
3. Hallar la segunda derivada.
4. Sustituir en la segunda derivada cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico. Si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo.

Resumiendo: Las condiciones suficientes para máximos y mínimos de $f(x)$ para valores críticos de la variable son:

$f(x)$ es un máximo si $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ es negativa

$f(x)$ es un mínimo si $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ es positiva

Ejemplo: Apliquemos los pasos anteriores a la función $f(x) = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$

1°) $f'(x) = 6X^2 - 18X + 12$

2°) $f'(x) = 0$ cuando $6X^2 - 18X + 12 = 0$

dividiendo entre 6; $X^2 - 3X + 2 = 0$

factorizando $(X-2)\ (X-1) = 0$

Por lo tanto las raices son $X_1 = 1$, $X_2 = 2$ Valores críticos

3°) $f''(x) = 12X - 18$ sustituyendo el primer valor

4°) $f''(1) = 12 - 18$ (punto crítico C, ver fig. I.) pág. 40

$f''(1) = 6$, por lo tanto se tiene un máximo

$f''(2) = 24 - 18$ (punto crítico D, ver fig I) pág. 40

$f''(2) = 6$, por lo tanto se tiene un mínimo

Se ha demostrado que en el punto "C" de abscisa X = 1 existe un máximo; y en el punto "D" de abscisa X = 2 se tiene un mínimo.

El críterio para determinar extremos que se acaba de exponer, -- tiene un fundamento en el sentido de la concavidad de una curva.

9) Concavidad de una curva.

Supóngase una curva descrita por un punto P (X.Y.), la pendiente de la tangente en "P" varía. Cuando la tangente queda bajo la curva (figura II a), el arco es cóncavo hacia arriba; si la tangente -- queda sobre la curva, el arco es cóncavo hacia abajo (figura II v)

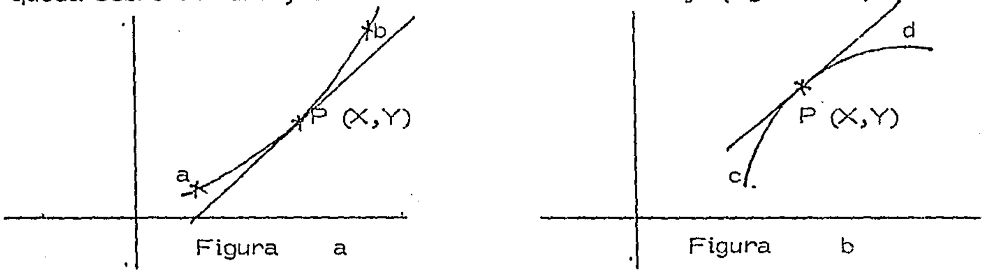


Figura II

En el primer caso la pendiente de la tangente aumenta al desplasarse el punto "P" de "a" a "b" por lo que la función es creciente; en el - segundo caso al desplasarse el punto "P" de "c" a "d" la pendiente - de la tangente disminuye por lo que la función es decreciente.

La gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba si la segunda derivada con respecto a "X" es positiva; es cóncava hacia abajo si ésta derivada es negativa.

10) Puntos de Inflexión

Definición

Un punto de inflexión en una curva, es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuesto.

En un punto de inflexión $f''(x) = 0$

En una función $y = f(x)$ su primera derivada nos indica si es creciente o decreciente en un intervalo: la segunda derivada, nos indica el sentido de la concavidad de la curva, en ese intervalo; de tal forma que una curva que es creciente en un intervalo, puede crecer en forma creciente en una parte de intervalo ó crecer en forma decreciente en otra.

En la figura III, la función es creciente en el intervalo $[a, c]$ pero crece en forma creciente de "a" a "b" y crece en forma decreciente de "b" a "c" ocurriendo un cambio en el sentido del crecimiento en "b" (punto de inflexión).

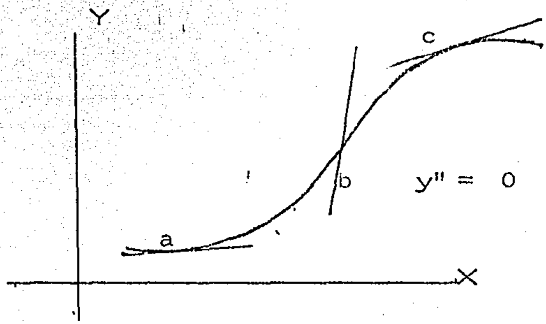


Figura III

Para obtener las abscisas de puntos de inflexión, se resuelve - - $f''(x) = 0$; y para determinar el sentido de la concavidad cerca de - un punto de inflexión, basta calcular $f''(x)$ para un valor de X un - poco meno que la abscisa de dicho punto, y para un valor un poco mayo que esta obscisa.

Si $f''(x)$ cambia de signo, se tiene un punto de inflexión.

Ejemplo:

En la figura I pág. 40 se encuentra la gráfica de la función $y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$ que tiene, según esta, un punto de inflexión.

$$y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$$

primera derivada $\qquad y' = 6X^2 - 18X + 12$

segunda derivada $\qquad y'' = 12X - 18$

Al resolver $y'' = 0$

$$12X - 18 = 0$$

$$12X = 18$$

$$X = 18/12 = 3/2$$

Por lo tanto, la abscisa del punto de inflexión es $X = 1.5$.

- concavidad de la curva, antes de este punto (por ejemplo para $X = 1$)

$$f''(1) = 12 - 18 = -6 \quad \text{(negativa; concavidad hacia abajo)}$$

- concavidad de la curva después del punto de inflexión (por ejemplo: para $x=2$)

$$f''(2) = 12(2) - 18 = 24 - 18 = 6$$
(positiva; concavidad hacia arriba)

11) Construcción de curvas

Las aplicaciones de la primera y segunda derivada, acabados de ex -

poner, utilizados conjuntamente constituyen una herramienta muy valiosa para el estudio de curvas y análisis de fenómenos económico productivos reales.

Graficar la curva descrita por la función.

$$y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$$

Pasos

1°) Obtener su primera derivada; igualarla a cero, para determinar los valores críticos, correspondientes a las abscisas de los máximos y mínimos.

2°) Obtener su segunda derivada; sustituir en esta los valores críticos obtenidos en el primer paso, con el objeto de determinar la concavidad de la curva para esos puntos y afirmar cuales corresponden a un máximo y cuáles a un mínimo: igualar la segunda derivada a cero y resolver la ecuación resultante para obtener el valor de la abscisa de los puntos de inflexión.

3°) Sustituir las abscisas de los extremos y puntos de inflexión, en la ecuación original para obtener las ordenadas correspondientes.

4°) Determinar algunos otros puntos necesarios para completar la noción sobre la curva, tales como intersección con los ejes - igualando X ó f (x) a cero y resolviendo para la otra variable.

$$y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$$

La primera derivada es: $y' = 6X^2 - 18X + 12$

Igualandola a cero $6X^2 - 18X + 12 = 0$

Dividiendo entre 6 $X^2 - 3X + 2 = 0$

Factorizando se tiene: $(X-2)(X-1) = 0$

Los valores críticos son $\begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 2 \end{cases}$ abscisas que pertenecen a un máximo o un mínimo

segunda derivada $y'' = 12X - 18$

$f''(1) = 12 - 18 = -6$ (negativa) concavidad hacia abajo

por lo tanto para $X = 1$ un máximo.

$f''(2) = 12(2) - 18$,

$= 24 - 18 = 6$ (positiva) concavidad hacia arriba, - por lo tanto para $X = 2$ un mínimo.

igualando $f''(x) = 0$

$$12X - 18 = 0$$

$$12X = 18$$

$X = 1.5$ punto de inflexión

Intersección con el eje y para lo que $X = 0$

$$y = 2X^3 - 9X^2 + 12X - 3$$

$$y = -3$$

Resumiendo las abscisas encontradas

$X = 1$	máximo
$X = 2$	mínimo
$X = 1.5.$	punto de inflexión
$X = 0$	la curva corta al eje vertical

Que con los valores correspondientes para la función ; se tienen las coordenadas de 4 puntos, los puntos son:

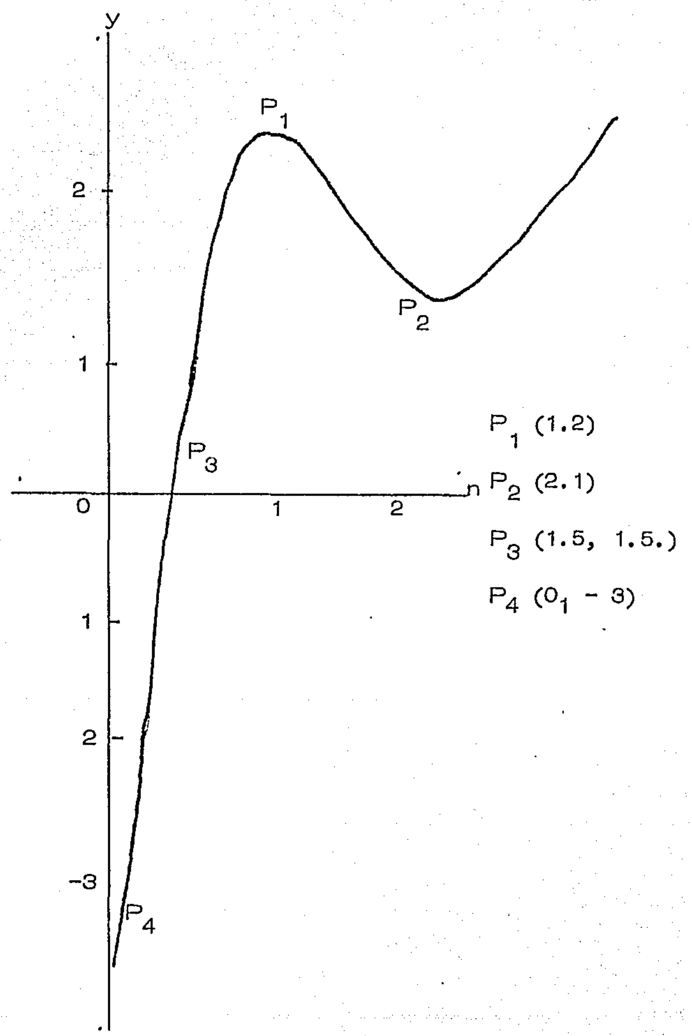
P_1 = (1.2)

P_2 = (2.1)

P_3 = P_3 (1.5 1.5)

P_4 = (0_1 - 3)

Graficando



Conclusiones:

De la gráfica puede verse que la curva se comporta de la siguiente forma:

En el intervalo $]-\infty;1[$ la curva crece en forma decreciente

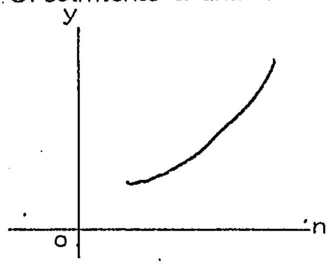
En el intervalo $]1;3/2[$ La curva decrece en forma decreciente

En el intervalo $]3/2;2[$ la curva decrece en forma creciente

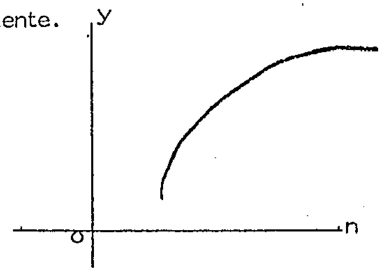
En el intervalo $]2,+\infty[$ la curva crece en forma creciente

Para entender mejor el significado de crecimiento creciente o decreciente y decrecimiento creciente y decreciente, pueden observarse las siguientes figuras:

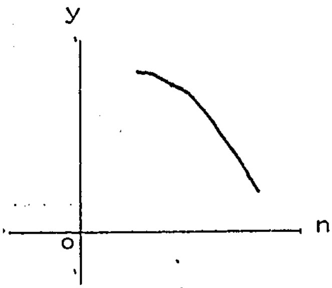
Crecimiento a una tasa creciente



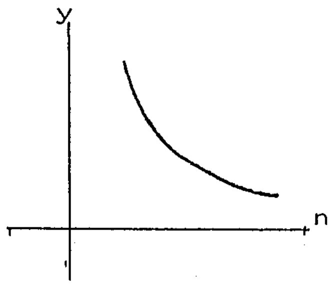
Crecimiento a una tasa decreciente.



Decrecimiento a una tasa decreciente.



Decrecimiento a una tasa creciente.



DERIVADA DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

1) Generalidades.

En los problemas reales intervienen muchas variables. Para poder plantearlo y resolverlo, se identifican las más relevantes; en ocasiones existe sólo una variable muy importante, entonces el problema se plantea y resuelve con respecto a esta variable; sin embargo, otros problemas no pueden reducirse a una sóla variable y es necesario hacer intervenir dos o más variables para que el modelo formulado tenga sentido. Por ejemplo, una función de producción $Q = f(t,K)$, en la que se desea encontrar t y K tales que maximicen Q, donde Q es la cantidad producida, invirtiendo un capital K y empleando una cantidad de trabajo t. Esta es una función en la que intervienen dos variables.

Otro ejemplo es el de un fabricante de dos productos "X" y "Y" en el que su costo total "Z" depende de los niveles de producción de cada producto. Por ejemplo cuando produce cinco unidades de "X" y seis de "Y" su costo total es de diez y siete. De acuerdo con -

esto pueden asociarse valores de costo total para cada pareja de valores (X.Y) Por ejemplo :

(X.Y)	Z
(5.6)	17
(5.7)	19
(6.6)	18
(6.7)	20 etc.

Una función multivariada, puede optimizarse utilizando las mismas reglas de derivación usadas para el cálculo de una variable; sólo que no es posible derivar con respecto a todas las variables a un mismo tiempo, por lo que se consideran todas las variables excepto una, como constantes, y se deriva con respecto a esta. Eso se repite cambiando de variable para obtener la derivada con respecto a cada una de las variables.

El símbolo usado en la derivación parcial, es la letra griega ∂ (delta minúscula)

por ejemplo: $\frac{\partial Z}{\partial y}$ (léase, derivada parcial de "Z" con respecto a "y" o simplemente, parcial de "Z")

Una función multivariada puede derivarse con respecto a una sóla variable, o con respecto a todas las variables, dependiendo si varían o no simultáneamente todas las variables.

Por ejemplo la función $Z = f(x.y)$ tiene las siguientes derivadas de primer orden.

$\frac{\partial Z}{\partial X} =$ derivada parcial Z con respecto a X ("y" permanece constante)

$\frac{\partial Z}{\partial Y} =$ derivada parcial de Z con respecto Y ("X" permanece constante)

ejemplo: encontrar las derivadas parciales de:

$$Z = aX^2 + 2b\,x\,y + cy^2$$

solución: $\frac{\partial Z}{\partial X} = 2aX + 2by$ considerando a y como constante

$\frac{\partial Z}{\partial Y} = 2bX + 2cY$ considerando a X como constante

Las notaciones más usadas en la derivación parcial son:

considerando $Z = f(X.Y)$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} f(X,Y) = \frac{\partial f}{\partial X} = fx\,(X.Y) = Z\ x(X.Y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{y} f(X.y) = \frac{\partial f}{\partial y} = fy(X.y) - Zy(x.y)$$

notaciones semejantes se emplean para funciones de cualquier - número de variables.

2.) Derivadas de orden superior

Una función en "X" y "Y" al derivarse parcialmente puede resul- tar en otra función, con las mismas variables, lo cual puede a - su vez derivarse, teniendo una derivada de segundo orden.

Por ejemplo si (1) $u = f(X.Y)$

tiene dos derivadas de primer orden:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = fx(X.Y) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = fy(X.Y)$$

que son también funciones de X y Y, que pueden derivarse nueva- mente. Tomando la primera función de (2) y derivando, se tienen dos derivadas, ahora de segundo orden.

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_{xx}(X.Y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = Fyx(X,Y)$$

De la misma forma de la segunda función de (2) se tienen otras dos derivadas de segundo orden.

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = Fx.y\ (X,Y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = fyy\ (X,Y)$$

Aparentemente en (3) y (4) hay cuatro derivadas de segundo orden pero puede demostrarse que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

siempre que las derivadas sean continuas. Es decir, no importa el cambio de orden al derivar sucesivamente con respecto a "X" y "Y" Así f(X,Y) tiene sólo tres derivadas parciales de segundo orden, a saber.

$$(5) \quad fxx\ (X,Y), \quad fxy\ (X,Y), \quad fyy\ (X,y)$$

ejemplo:

Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función multivariada.

$$Z = 10 + X^2 + 3\ y^3 - 5Xy^2$$

Derivadas de primer orden.

(1) $\dfrac{\partial Z}{\partial X} = 2X - 5Y^2$ (se considera a "Y" como cte)

(2) $\dfrac{\partial Z}{\partial Y} = 9Y^2 - 10XY$ (se considera a "X"como cte)

Derivadas de segundo orden

(3) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 2$ (en (1) se considera a "Y" como cte)

(4) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 18Y - 10X$ (en (2) se considera a "X" como cte)

(5) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X} = - 10X$ (en (1) se considera ahora a X como cte)

(6) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = - 10Y$ (en (2) se considera a "Y" como cte)

puede verse en (5) y (6) que ambas expresiones son iguales, por lo que sólo existen 3 derivadas de segundo orden.

3) Máximos y Mínimos para funciones de dos variables

Las condiciones necesarias para que f(X,Y) admita un extremo, para ciertos valores críticos de las variables, son las llamadas relaciones de "Monge"

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial X} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

si $\quad (2) \quad \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0\right.$ se tiene un extremo.

si a) $\quad \dfrac{{}^2 f}{x^2} < 0 \quad$ se tiene un máximo.

(3) b) $\quad \dfrac{{}^2 f}{x^2} > \quad 0 \quad$ se tiene un mínimo

Nota: si (2) es mayor que cero, no hay extremo

si (2) es igual a cero no puede decirse nada de la función.

Ejemplo:

Una fábrica produce dos tipos de maquinaria pesada "X" y "Y" la función de costo conjunto está dada por

$$f(X,Y) = X^2 + 2Y^2 - XY - 14X$$

Para minimizar el costo, ¿cuantas máquinas de cada tipo deben producir?.

Solución.

$$f(X,Y) = X^2 + 2Y^2 - XY - 14X$$

1°) Obtener los derivadas parciales de primer orden, de la función igualarlas a cero y resolver el sistema resultante.

1a. Condición (1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2X - Y - 14 \; ; \; \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4Y - X \; ; \; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} 1) & \begin{cases} 2X - Y - 14 = 0 \\ 4Y - X = 0 \end{cases} \\ 2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1) & 2X - Y = 14 \\ 2) & -2X + 8Y = 0 \\ \hline & 0 + 7Y = 14 \end{array}$$

multiplicando (2) por 2 y ordenando

$$Y = \frac{14}{7} \qquad \boxed{Y = 2}$$

Sustituyendo este valor en (2)

$$4\,(2) - X = 0 \qquad \boxed{X = 8}$$

2°) para saber si los puntos críticos obtenidos son o nó extremos

hay que verificar:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$$

por lo que hay que obtener las parciales de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

Sustituyendo estos valores en la condición, se tiene

$$(-1)^2 - (2)\ (4) = 1 - 8 - 7 < 0$$

por lo tanto se tiene un extremo .

Este extremo es un mínimo si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

Puesto que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ se tiene un mínimo para los valores - críticos encontrados en la primera condición.

Conclusión:

Hay que producir 2 máquinas del tipo "Y" y 8 máquinas del tipo - "X" para minimizar los costos.

SEGUNDA PARTE

ANALISIS DE REGRESION

1) DEFINICION

El análisis de regresión consiste fundamentalmente en dos operaciones:

a) Obtener una ecuación y una línea que represente la ecuación, que describa la forma de como se relacionan las variables. La ecuación y su línea, a menudo llamadas ecuación de regresión y línea de regresión, respectivamente, pueden ser lineal o curvilínea.

b) Estimar una variable, dependiente a partir de otra u otras llamadas variables independientes, basados en la relación descrita por la ecuación de regresión.

El término regresión fué originado por Francis Golton, en su publicación "Regression Towards Mediocrity" del Journal of The Anthropologial Institute en 1885, describiendo la línea de regresión como la Relación Promedio entre las Variables.

En la actualidad, se sigue interpretando como un promedio y se ha desarrollado un método muy preciso para obtener la ecuación de regresión: El de los mínimos cuadrados.

Además del método de los mínimos cuadrados, que es una forma -sofisticada para obtener la ecuación de la línea de regresión, existen otros métodos, menos precisos que el anterior, como el procedimiento "Mano alzada" que es un método subjetivo pero rápido de-otener la recta de regresión.

En ambos métodos existe siempre un error, entre las observaciones reales y las calculadas por la ecuación de regresión, pero esa diferencia es mínima con el método de los mínimos cuadrados.

Los diferentes tipos de líneas a los que pueden ajustarse los datos dependen de la relación que estos guarden entre sí, por ejemplo:- Los datos de la figura (a) pueden ajustarse a una recta con pendiente positiva puesto que la relación que guardan sus datos (X,Y) es -creciente, es decir, al aumentar uno (variable independiente X) aumenta el otro (variable dependiente Y). La figura (b) mantiene una-relación curvilínea, que puede ajustarse a una parabola; la figura (c), puede ajustarse a una hipérbola.

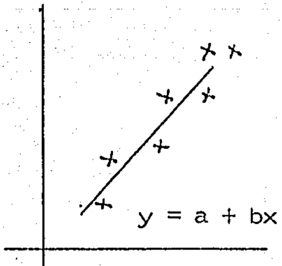


Figura a

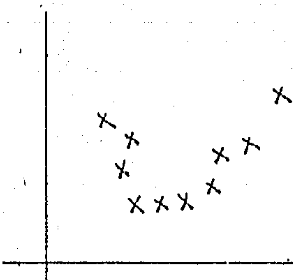


Figura b

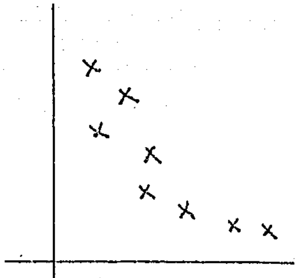


Figura c

El método de los mínimos cuadrados es aplicable a cualquier tipo de línea, mientas que el método de mano alzada sólo es válida -- para el caso de una recta.

2) METODO DE MANO ALZADA, PARA OBTENER LA RECTA DE REGRESION.

Para la elaboración de un modelo, generalmente se recurre a datos históricos; estos, no siempre guardan una relación lineal, pero para propósitos de estimación, pueden ajustarse a una recta, que es- el modelo más simple y el más comunmente utilizado.

El método de mano alzada, es útil, cuando se quieren ajustar los - datos a una recta.

El procedimiento que se sigue es el siguiente:

1°) Se grafican los datos para tener el llamado diagrama de esparcimiento.

2°) A ojo, se traza una recta, que a juicio propio, quede equidistante de todos los puntos del diagrama.

3°) Se eligen dos puntos de esa recta, y se aplica la fórmula -- para obtener la ecuación de la recta dados dos puntos.

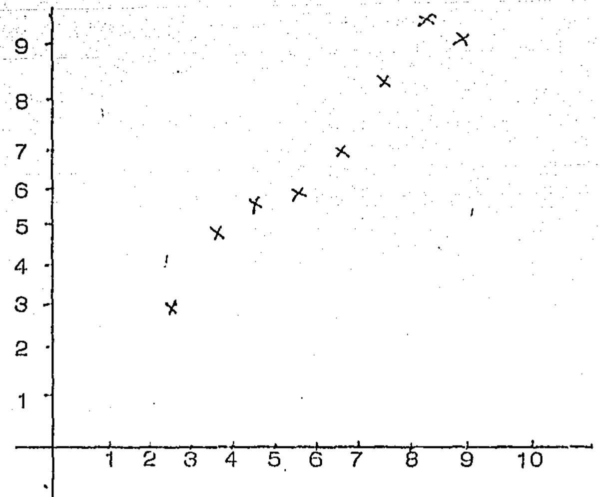
$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Ejemplo 1

Sean los siguientes datos, correspondientes al vólumen de ventas - obtenidas, en función de la inversión en publicidad.

Ventas por $ 100,000	Y	3.5	5	5.6.	5.8	6.8	8.5	10	9.5
Publicidad en miles de pesos	X	3	4	5	6	7	8	9	10

Diagrama de esparcimiento, ejemplo 1.

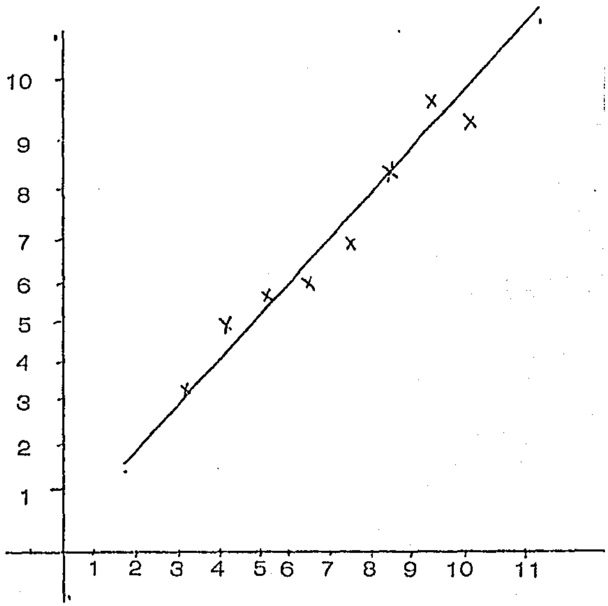


Uniendo los puntos del diagrama anterior, es obtenida una gráfica que no es recta. Sin embargo, la tendencia puede ajustrase a una recta.

La recta dibujada pasa por los puntos de coordenadas:

P_1 (3;3.5) P_2 (8;8.5)

con los que puede obtenerse su ecuación mediante la siguiente fórmula:



$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Sustituyendo datos:

$$\frac{Y - 3.5}{X - 3} = \frac{8.5 - 3.5}{8 - 3}$$

$$\frac{Y - 3.5}{X \quad 3} = \frac{5}{5}$$

$$Y - 3.5 = 1 \ (X-3)$$

$\underline{Y = X + .5}$ .qué es la ecuación de regresión por el método de mano alzada.

3) METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Cuando una línea nó puede ajustarse perfectamente a todos los puntos, hay en general desviaciones entre los valores individuales (Y) y los valores calculados con la ecuación de regresión (Yc)

Las propiedades de la línea de regresión, basadas en el método de los mínimos cuadrados en relación con las desviaciones son similares a las de una media aritmética a saber:

1. La suma algebraica de las desviaciones de los valores individuales (Y) con respecto a los correspondientes en la línea de regresión (Yc) es nula.

$$\sum (Y - Yc) = 0$$

2. La suma del cuadrado de las desviaciones de los valores individuales (Y) con respecto a los correspondientes en la línea de regresión (Yc) es mínima.

$$\sum (Y - Yc)^2 < \sum (Y - Y_A)$$

donde Y_A es un valor calculado con cualquier otra recta que no sea la obtenida por el método de los mínimos cuadrados. (La ilustración se hace más adelante).

El método de los mínimos cuadrados, permite ajustar los datos a cualquier tipo de curva (recta, parábola, hipérbola, una función logarítmica, exponencial, etc.).

El procedimiento que se sigue es el siguiente:

1°) Elegir la forma de la ecuación, a la cual deberán ajustarse - los datos. Esta depende no solamente de la tendencia de éstos. Sino en forma muy importante de los objetivos perseguidos al obtener el modelo.

2°) Obtener un sistema de ecuaciones, tal que resolviéndolo, proporcionen el valor de los parámetros de la ecuación, elegida en el punto 1°.

El sistema de ecuaciones se obtiene utilizando la siguiente regla: la cual tiene su fundamento analítico en la demostración de que; los - valores de los parámetros que se deben tomar como muestra son los que minimicen la siguiente expresión.

$$\sum_{i=1}^{n} (Yi - Yc)^2$$

donde Yi son los valores observados de la variable dependiente y - $Yc = f(Xi)$ son los valores calculados por la línea de regresión - para cada valor de Xi (valor observado de la variable independiente).

a) Caso de una recta.

1°) Supóngase que los datos se tratan de ajustar a una recta, cuya ecuación es:

$$Y = a + b X$$

para los cuales se conocen un cierto número "n" de parejas de datos (Xi, Yi).

2°) Obtener una ecuación por cada parámetro desconocido. Los parámetros que hay que determinar en este caso son "a" y "b".

3°) Los valores (Y_1, X_1) (X_2, Y_2)...(Xn, Yn) representan a las variables X, y, Y, entonces pueden tenerse n ecuaciones de la forma

$$Yi = a + b Xi$$

Considerar las n ecuaciones de la forma y = a + bx, multiplicadas por el coeficiente de la primera incógnita (a) que en este caso es 1, por lo que las ecuaciones sumadas quedan:

$$Y_1 = a + bx_1$$

$$Y_2 = a + bx_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = a + bx_n$$

$y \Sigma = na + b \Sigma x$ Que es la primera ecuación

Para la segunda ecuación, se hace lo mismo sólo que ahora se multiplica por el coeficiente de la segunda incógnita (b) (recuérdese que las incógnitas a determinar son a y b); por lo tanto, el coeficiente de b es x_i.

$$y_1 x_1 = ax_1 + bx_1^2$$

$$y_2 x_2 = ax_2 + bx_2^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n x_n = ax_n + bx_n^2$$

$\Sigma xy = a \Sigma x + b \Sigma x^2$ Que es la segunda ecuación

Por lo que el sistema de ecuaciones lo constituyen en este caso:

I) $\Sigma y = na + b \Sigma x$

II) $\Sigma Xy = a \Sigma x + b \Sigma x^2$

donde las incógnitas son a y b. Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de los parámetros que sustituidos en la expre sión elegida, se tiene la ecuación de la línea de regresión por el método de los mínimos cuadrados.

Cuando hay más de 2 incógnitas, el procedimiento expresado arriba se continúa de manera semejante. Es decir, los coeficientes de la 3a. y 4a. incógnitas se usan para multiplicar cada una de las "n" ecuaciones ordenadamente.

Finalmente, se resuelven las ecuaciones para obtener los valores de los parámetros.

b) Caso de una parábola.

Aplicando la regla anterior, puede obtenerse el sistema requerido para encontrar la línea de regresión de una parábola de ecuación

$y = a + bx + cx^2$ --- (1)

En esta son tres los parámetros que hay que determinar, por lo que se tendrá un sistema de tres ecuaciones.

La primera se obtiene de multiplicar la expresión (1) por el coeficiente del primer parámetro (que en este caso es uno) y sumar las "n" expresiones correspondientes a los "n" datos observados resultando finalmente:

I) $\sum Y = na + b\sum x + c\sum x^2$

La segunda se obtiene de multiplicar la expresión (1) por el coeficiente del segundo parámetro (que en este caso es x) y sumar en forma semejante a la anterior.

II) $\sum XY = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$

La tercera ecuación se obtiene de multiplicar la expresión (1) por el coeficiente del tercer parámetro, (que en este caso es x^2) y se procede en forma semejante a la anterior.

III) $\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$

Siendo entonces el sistema resultante el siguiente:

$$\sum y = na + b\sum x = c\sum x^2$$

$$\sum Xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

donde las incógnitas son precisamente a, b y c; resolviéndolo se obtienen los valores, que nos definen la ecuación de la línea de regresión elegida (expresión (1)).

c) Caso de una hipérbola.

Para la hipérbola se sigue un proceso semejante, sea $y = a + \frac{b}{x}$ (2) la ecuación elegida.

El sistema requerido, será de dos ecuaciones.

La primera ecuación:

El coeficiente del primer parámetro es uno por lo que ecuación queda:

$$\text{I)} \quad \sum y = na + b \sum \frac{1}{x}$$

La segunda ecuación:

El coeficiente del segundo parámetro es $\frac{1}{x}$ por lo que la ecuación queda:

$$\text{II)} \quad \sum \frac{y}{a} = a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2}$$

El sistema de ecuaciones que hay que resolver es:

$$\text{I)} \quad \sum Y = na + b \sum \frac{1}{X}$$

$$\text{II)} \quad \sum \frac{Y}{x} = a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2}$$

resolviendo el sistema para a y b, se obtienen los valores de los parámetros que sustituidos en la expresión (2) se obtiene la ecuación de la línea de regresión, que corresponde a una hipérbola.

d) Análisis teórico.

Se ha dicho que el método de los mínimos cuadrados se aplica para ajustar cualquier tipo de curva. Y según el método descrito, lo primero que hay que hacer es determinar la ecuación a la que se desean ajustar los datos. Además se dijo que la ecuación debe ser tal que minimice la siguiente expresión (de ahí el nombre de mínimos cuadrados).

$$\sum_{i=1}^{n} (Yi - Yc)^2 \qquad (3)$$

llamemos "E" a esa expresión y por medio del cálculo diferencial determinemos los valores que la minimicen.

Puesto que la ecuación de la línea de regresión generalmente tiene dos o más parámetros, debe entonces utilizarse la derivación parcial, para minimizar la expresión (3). De esta forma se obtienen tantas derivadas parciales como parámetros tenga la ecuación que, al igualarlas a cero para satisfacer la condición necesaria para tener un mínimo, se obtienen las "n" ecuaciones del sistema. — Resolviendo este sistema se obtienen los valores de los parámetros.

En seguida se ilustra el caso de una hipérbola de ecuación:

$Y = a + \frac{b}{X}$ obteniendo primero el sistema de ecuaciones deseado y segundo demostrando que los valores que se obtengan de resolverlo constituyen un mínimo.

Si la ecuación a la que se tratan de ajustar los datos es la siguiente:

$$y = a + \frac{b}{x} \quad (2)$$

entonces la expresión (3) se transforma en:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (yi - (a + \frac{b}{xi})^{2}$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} (yi - a - \frac{b}{xi})^{2}$$

Derivando parcialmente con respecto a cada uno de los parámetros; (derivadas de primer orden) e igualando a cero cada parcial (primera condición necesaria) se obtienen las cuaciones requeridas.

(2) $$\frac{\partial E}{\partial a} = -2 \sum (Yi - a - \frac{b}{Xi})$$

igualando a cero y dividiendo entre dos se tiene:

$$\sum Yi + na + \sum \frac{b}{xi} = 0$$

Despejando $\sum Yi$ se tiene:

(I) $\sum Yi = na + b \sum \frac{1}{xi}$ Que es la primera ecuación.

(3) $\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum \frac{1}{xi} \left(Yi - a - \frac{b}{xi} \right)$

igualando a cero y dividiendo entre dos se tiene:

$$- \sum \frac{Yi}{xi} + \sum \frac{a}{xi} + \sum \frac{b}{xi^2} = 0$$

Despejando el término que contiene a la variable dependiente se tiene:

(II) $\sum \frac{Yi}{xi} = a \sum \frac{1}{xi} + b \sum \frac{1}{xi^2}$ Que es la segunda ecuación.

por lo que el sistema deseado queda:

(I) $\sum Yi = na + b \sum \frac{1}{xi}$

(II) $\sum \frac{Yi}{xi} = a \sum \frac{1}{xi} + b \sum \frac{1}{xi^2}$

Que es semejante al obtenido aplicando la regla expuesta en páginas anteriores. Resolviéndolo, se obtienen los valores de los parámetros a y b.

Estos valores constituyen un mínimo si satisfacen las condiciones siguientes:

Condición necesaria:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial a\, \partial b}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}\right)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial b^2}\right) < 0 \quad \text{para que exista un extremo}$$

y

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} > 0 \quad \text{para que exista un mínimo}$$

Obtengamos las derivadas de segundo orden:

de (2) se tiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2n$$

de (2) se tiene:

$$\frac{\partial E}{\partial b\, \partial a} = \frac{2}{Xi}$$

de (3) se tiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = \frac{2}{Xi^2}$$

Sustituyendo estos valores en la condición necesaria

$$\left(\frac{2}{Xi}\right)^2 - \left(2n\right)\left(\frac{2}{Xi^2}\right) < 0 \quad \text{si esto se cumple se tiene un extremo}$$

El primer término, siempre es positivo, por estar elevado al cuadrado. El cociente de este término es más pequeño comparado con el segundo término, puesto que depende del número de datos. Si el número de datos fuera uno, el valor de esta expresión sería nulo. Si $n = 2$ el segundo término sería más grande que el primero, siendo esta expresión negativa, para cualquier número de datos por lo que cumple con esta condición.

La segunda condición para un mínimo es:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} > 0$$

Sustituyendo por su valor se tiene:

$2n > 0$ que siempre es positivo puesto que depende sólo del número de datos existiendo por lo tanto un mínimo.

Con lo anterior, se ha ilustrado que el método de los mínimos - cuadrados satisface la condición $\sum_{i=1}^{n} (Yi - Yc)^2 = \min.$ y que las ecuaciones obtenidas por la regla expuesta o a través del cálculo diferencial, nos permiten determinar los valores de - los parámetros de Yc tales que representen un promedio aritmé - tico.

e) Ejemplo de análisis de regresión:

* La ecuación de la recta de regresión, del ejemplo 1 (pág. 69), - obtenida; por el método de los mínimos cuadrados quedaría de - la siguiente forma:

1°) La ecuación deseada es de la forma $Y_c = a + bx$

2°) Las ecuaciones necesarias son:

$$A \begin{cases} \text{I} & \sum Y = na + b \sum x \\ \text{II} & \sum XY = a \sum X + b \sum X^2 \end{cases}$$

Los elementos que hay que calcular para obtener el sistema anterior son:

---

* Utilizando el método de los mínimos cuadrados para el mismo problema en el que se obtuvo la recta de regresión por el método de mano alzada,

Número de datos	Y	X	XY	X^2
1	3.5	3	10.5	9
2	5.0	4	20	16
3	5.6	5	28	25
4	5.8	6	34.8	36
5	6.8	7	47.6	49
6	8.5	8	68.0	64
7	10.0	9	90.0	81
8	9.5	10	95.0	100
$\sum$	54.7	52	393.9	380

Sustituyendo estos valores en el sistema A.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \left\{ \begin{array}{l} 54.7 = 8a + 52B \\ 393.9 = 52a + 380b \end{array} \right. \\ \mathrm{II} & \end{array}$$

Resolviendo el sistema por sustitución, despejando a "a" de I

$$\mathrm{I}' \quad a = \frac{54.7 - 52b}{8}$$

Sustituyendo este valor en II se tiene:

$$393.9 = 52 \quad \left(\frac{54.7 - 52b}{8}\right) + 380b$$

Resolviendo esta ecuación

$$3151.2 = 6.5 \quad (54 - 52b) + 3040b$$

$$3151.2 = 355.55 - 338b + 3040b$$

$$2795.65 = 2702b$$

$$b = \frac{2795.65}{2702}$$

$$b = 1.035$$

Sustituyendo este valor en (1') se tiene:

$$a = \frac{54.5 - 52 \quad (1.035)}{8}$$

$$a = \frac{54.7 - 53.80}{8}$$

$$a = \frac{.89}{8}$$

$$\underline{a = .1122}$$

por lo que la ecuación resultante es:

$Y_c = \underline{.11 + 1.03X}$ Ecuación de la recta de regresión obtenida por el método de los mínimos cuadrados.

Si se compara esta ecuación con la obtenida por el método de -

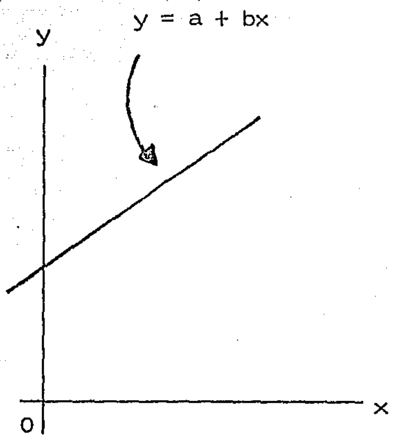
mano alzada

$\underline{Yc = .5 + X}$ Ecuación de la recta de re-
gresión método de mano alzada.

Puede verse que existe ligera diferencia.

Los diferentes tipos de ecuaciones más utilizadas en problemas - administrativos o económicos y sus respectivas gráficas se pre - sentan a continuación.

4) Tipos de funciones a las que puede ajustarse una nube de - puntos.



a) Función lineal (pendiente positiva).

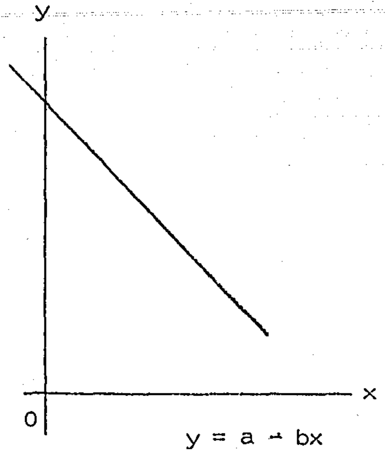
Este tipo de funciones se utiliza para representar:

a) Costos totales en función de la cantidad producida.

b) Ingresos totales en función de la cantidad vendida (el término a = 0 y pasa por el origen).

c) Nivel de producción en - función de materias primas.

d) Cantidad ofrecida en función del precio (ecuación de la oferta).



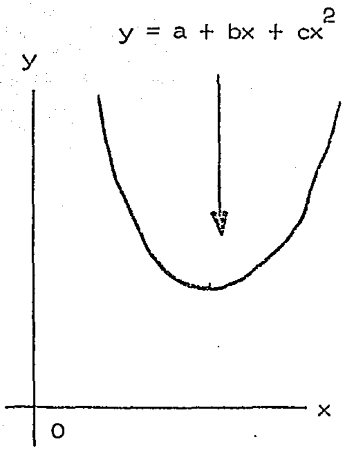
Función lineal (pendiente negativa).

Este tipo de función se utiliza para representar:

a) Cantidad demandada en función del precio (ecuación de la demanda).

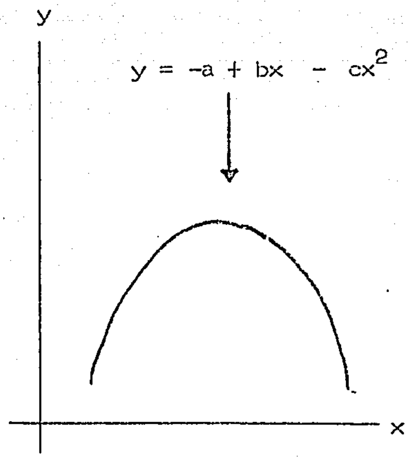
b) Nivel de piezas defectuosas en función de las inversiones en control de calidad.

b) Parábola



Puede representar algunos de los conceptos especificados para la recta cuando la tendencia no es lineal. El signo del término cuadrático permitirá obtener una curva cóncava hacia arriba (+) o hacia abajo (-).

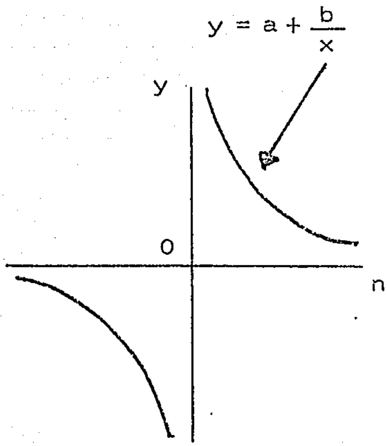
a) Puede representar la función de utilidad, en función de la cantidad producida y vendida.



b) Ventas en función de inversión en publicidad.

c) Transformación de producto en función de la materia prima.

d) Función de costos en función de la cantidad producida.

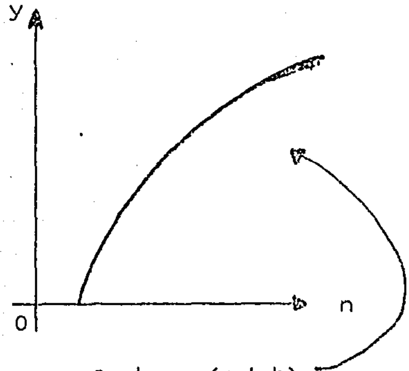


c) Hipérbola equilátera.

El interés en administración y economía es para valores positivos de "x". Puede representar la cantidad demandada en función del precio (ecuación de demanda) y algunos conceptos semejantes a los de la recta, cuando se observa este comportamiento de los datos.

d) Función logarítmica.

Puede utilizarse para representar:



$y = a \ Ln (x + b)$

a) Ingresos totales en función de cantidades producidas y vendidas.

b) Costos totales de producción, en función de cantidad producida (dentro de cierto intervalo).

<u>Nota:</u>

Una función de ingresos representada por una función logarítmica, puede interpretarse de la forma siguiente:

En un principio los ingresos que se obtienen por unidad son relativamente altos y este ingreso no aumenta en forma proporcional con la cantidad, ésto sucede muchas veces, puesto que las empresas otorgan descuentos conforme aumenta la cantidad comprada o tienen que vender más barato para incrementar sus ventas, llegando un momento en el que el ingreso adicional por la venta de una pieza más es muy pequeño.

La forma general de una función logarítmica es $y = a \log_c (x + b)$

Si $a = 1$ y $b = 0$, se tiene $y = \log_c x$, que es la forma más simple y queda comprendida en el primero y cuarto cuadrantes, y es creciente si la base c de los logarítmos es mayor que 1; puesto que las bases más comunes son 10 y e, y ambas son mayores que 1, entonces son crecientes.

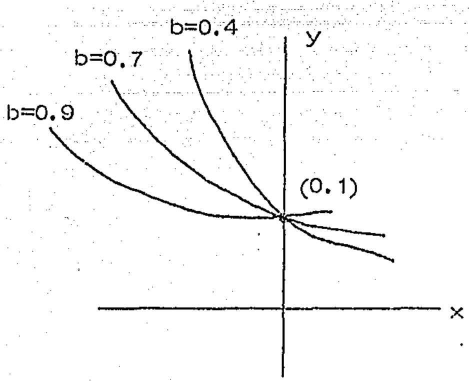
La cantidad "b" sumada a la variable x, equivale a una translación del eje "y" hasta una abscisa "b".

Si $b = 0$, la curva corta el eje horizontal en $x = 1$.

El coeficiente "a" lo único que hace es variar la pendiente de la curva que siempre es creciente para $a > 1$ la pendiente es mayor que si $0 < a < 1$.

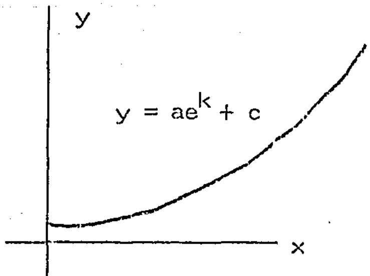
e) Función exponencial.

Las funciones exponencias más simples son de la forma $y = b^x$, donde



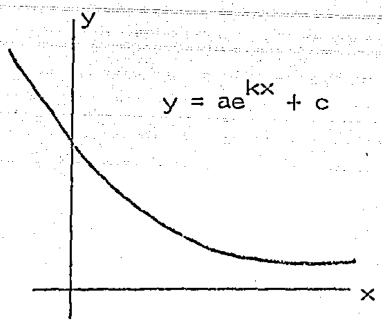
b $>$ 0. Es decreciente si $0<b<1$, y creciente si b $>$ 1; en ambos casos la curva es asintótica al eje de las "x" y se intersecta con "y" en el punto (0,1).

La función exponencial de uso más frecuente es $y = e^x$, donde "e" es la base de los logarítmos naturales y vale aproximadamente $e = 2.71828$.



a 0, k 0, c 0

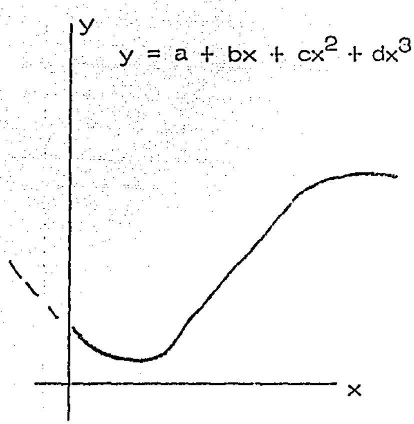
La forma más general de la función exponencial es $y = ae^{kx} + c$. Esta curva es asintótica a la recta $y = c$, y se aproxima a su asíntota desde arriba si $a > 0$ y desde abajo si $a < 0$; la curva es creciente, si a y k tienen el mismo signo, y decreciente si tienen signos opuestos.



La curva se intersecta con y en $(0, a + c)$ y si $c < 0$, se intersecta con el eje "x" en $\left(\frac{1}{x} \text{ Ln} \left|\frac{c}{a}\right|, 0\right)$.

f) Función de 3er. grado.

Pueden utilizarse para representar los costos totales en función de la cantidad producida, pero no es muy conveniente ya que la utilización de esta función con algunos otros conceptos (ejemplo para maximización de utilidades en función del precio óptimo) conduce a obtener ecuaciones de 2°ó 3°grado, las cuales es muy difícil o casi imposible de solución.



Generalmente, este tipo de curva puede aproximarse a una recta o a una logarítmica para ciertos intervalos.

CONCLUSIONES

El análisis de regresión, tiene múltiples aplicaciones en la administración; por ejemplo, en mercadotecnia, se utiliza para planeación, básicamente en la determinación de pronósticos y tendencias, así como para análisis de crecimiento, cuotas de ventas, etc. En producción, tiene también sus aplicaciones para determinar estándares de producción, pronósticos, etc. En el área de recursos humanos también puede utilizarse por ejemplo, el establecer eficiencias y comportamientos; para la determinación de salarios en función de la eficiencia, etc.

En finanzas tiene también muchas formas de aplicarse.

Puesto que la ecuación de la línea de regresión es de hecho un modelo, su dificultad mayor está en la obtención de los datos, que entre mayor sea el número de éstos más precisión tendrá el modelo.

La elección de la ecuación a la que deberán ajustarse los datos es importante y está relacionada con los objetivos que se persigan. La ecuación más comun es la de la recta, porque en la mayoría de los casos aunque la tendencia sea curvilínea, estos datos podrán ajustarse a una recta, la cual es más fácil de obtener y manejar sobre todo cuando se usa para pronósticos.

En análisis de regresión es pues, un método más para obtener -
modelos matemáticos.

TERCERA PARTE

APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL PROBLEMAS ADMINISTRATIVOS.

1. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA.

1. Definición y concepto.

La elasticidad de la demanda analiza la variación porcentual de la demanda, con relación al precio.

$$\eta = \frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\text{Porcentaje del cambio en la cantidad vendida}}{\text{Porcentaje del cambio, en el precio}}$$

Por medio del cálculo diferencial ésta queda definida, como el valor absoluto del producto de las relaciones precio-cantidad y la derivada de la demanda con respecto al precio.

$$\eta = \left| \frac{P}{D} \cdot \frac{dD}{dP} \right|$$

Cuando $0 < \eta < 1$ se dice que se tiene una demanda inelástica.

Y cuando $\eta > 1$ se dice que se tiene una demanda elástica.

La interpretación que puede darse a estos valores es la siguiente:

Al variar un precio la demanda puede comportarse elástica o inelásticamente.

Cuando es elástica, los cambios en la demanda pueden ser drásticos (variar grandemente), y hay que tomar precauciones en cuanto a estos cambios.

Cuando es inelástica, las variaciones en el precio no afectan sensiblemente la demanda.

El análisis de la elasticidad de la demanda es de gran utilidad para los administradores, sobre todo para los del área de Mercadeo que tienen que fijar o variar precios y siempre tienen la incertidumbre sobre cuál pueda ser la reacción en la demanda.

Cuando se dispone de datos estadísticos, matemáticamente se puede obtener la ecuación de la línea de regresión que muestre la tendencia de la demanda al variar el precio y por medio del cálculo diferencial determinar su comportamiento; es decir, determinar si es elástica o inelástica para un cierto cambio de precio.

Por ejemplo:

Supóngase que repentinamente se desea hacer un cambio en el precio de venta de cierto detergente cuya presentación es en bolsas de 10 Kg. Sólo se dispone de tres datos, que corresponden a las tres últimas variaciones de precio.

Precio por paquete de 10 Kg. de detergente	50	65	90
Cantidad demandada	30,000	15,000	10,000

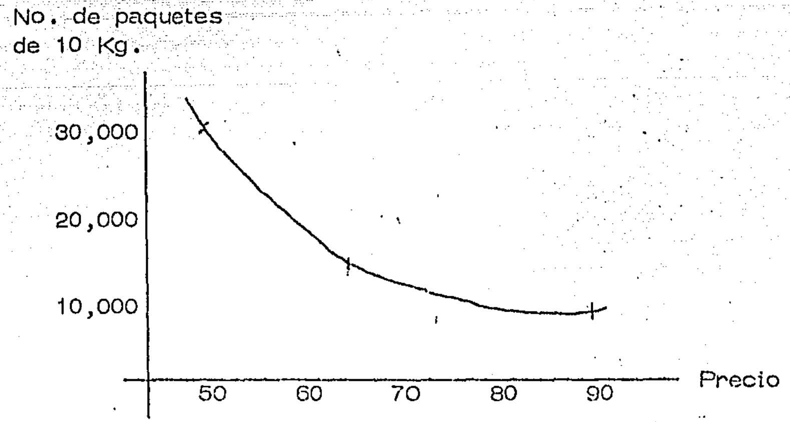
Solución.

Primero.- Obtener la ecuación de la línea de regresión (ecuación de la demanda en función del precio).

Segundo.- Analizar su elasticidad.

2. Obtención de la función de la demanda.

Graficando los datos proporcionados, puede observarse su tendencia y ver que éstos pueden ajustarse a la ecuación de una hipérbola. (ver gráfica).



La ecuación de esta hipérbola tiene la forma siguiente: $Y = a + \frac{b}{x}$ que la obtendremos por el método de los mínimos cuadrados.

Para utilizar el método de los mínimos cuadrados se requieren de dos ecuaciones, por ser dos los parámetros que hay que determinar. Las ecuaciones necesarias determinadas según el método expuesto en el capítulo anterior son:

$$\text{I} \quad \sum y = na + b \sum \frac{1}{x}$$

$$\text{II} \quad \sum \frac{y}{x} = a \sum \frac{1}{b} + b \sum \frac{1}{x2}$$

Con lo que se tiene un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas (a y b) cuyos valores trataremos de determinar. Con los datos ori_ ginales puede construirse la siguiente tabla:

en miles

x	y	1/x	1/x2	y/x
50	30	.020	.00040	.60
65	15	.015	.00024	.23
90	10	.011	.00012	.11
$\sum$	55	.056	.00076	.94

Substituyendo estos valores en las ecuaciones , se tiene el siguiente sistema:

I $\quad 55 = 3a + .046b$

II $\quad .94 = .046a + .00076b$

Se resuelve este sistema por el método de igualación, eliminando el parámetro "a".

Como "y" está representado en miles, conviene trabajar con 4 decimales.

I $\quad 3a = 55 - .046b$

$$a = \frac{55}{3} - \frac{.046b}{3}$$

$$\text{I} \qquad a = 18.3333 - .0153b$$

$$\text{II} \qquad .046a = .94 - b(.00076)$$

$$a = \frac{.94}{.046} - \frac{b(.00076)}{.046}$$

$$\text{III} \qquad a = 20.4348 - .0165b$$

Resultando el sistema equivalente:

$$\text{I} \qquad a = 18.3333 - .0153b$$

$$\text{II} \qquad a = 20.4348 - .0165b$$

lo cual resulta:

$$18.3333 - .0153b = 20.4348 - .0165b$$

$$.0012b = 2.1015$$

$$b = 2.1015 \qquad \underline{b = 1751.25}$$

Sustituyendo este valor en alguna de las ecuaciones, por ejemplo, II se obtiene el valor de a

$$a = 20.4348 - .0169\ (1751.25)$$

$$= 20.4348 - 28.8956$$

$$\underline{a = -8.46}$$

Sustituyendo estos valores, en la ecuación propuesta se tiene:

$$Y = -8.46 + \frac{1751.25}{X}$$

ó

$$D = -8.46 + \frac{1751.25}{P} \quad (1)$$

Donde "X" representa el precio P de cada bulto de 10 kg y

"Y" representa la cantidad demandada D en miles de paquetes de 10 kg.

3.- Análisis de la Elasticidad.

El precio actual es de \$90.00 se desea incrementarla a \$ 100.00. Se pregunta ¿Cómo repercutiría esto en la demanda?

Analicemos la elasticidad de la demanda, dada por:

$$\eta = \left| \frac{P}{D} \cdot \frac{dD}{dP} \right| \quad (2)$$

$$D = -8.46 + \frac{1751.25}{P}$$

$$\frac{dD}{dP} = -\frac{1751.25}{P2}$$

El valor de P de la expresión 2 es el correspondiente al nuevo pre cio de \$ 100.00 y el de D es el obtenido de la ecuación de regresión (1) al sustituir P = \$ 100.00

$$P = 100$$

por lo que y

$$D = -8.46 + \frac{1751.25}{100}$$

$$D = 9.0525$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (2), se tiene:

$$\eta = \left| \frac{100}{9.057} \cdot \frac{1751.25}{10.000} \right| = 1.9346$$

Por lo que puede concluirse que la demanda es elastica y que la repercución de esta al variar el precio es de aproximadamente - - -

$$\frac{9.052}{10,000} = .10 \text{ o sea } 10\%$$

II. Modelos Productivos, Conceptos y Supuestos.

1. Generalidades.

Las aplicaciones del cálculo diferencial en problemas administrativos o contables, son todos muy semejantes en su metodología, puesto que se trata de optimizar una expresión matemática que representa alguna situación real. Utilizando el cálculo diferencial las operaciones se reducen a obtener la derivada de la función que pretende optimizarse, para determinar el valor de la variable controlable, (máximo o mínimo) que permite alcanzar el objetivo.

2. Supuestos básicos para plantear y resolver algunos Modelos Productivos.

Los modelos de un problema real, pueden ser muy complicados y difíciles de resolver, si éstos son muy precisos. Pero, bajo ciertos supuestos y dependiendo de los objetivos que se persigan, los modelos pueden simplificarse bastante y su resolución se hace más fácil. Sin embargo, debe tenerse cuidado en la utilización de los supuestos, porque pueden influir en forma importante en el resultado que arroje el modelo. Muchos modelos matemáticos se reducen a combinaciones algebraicas, que administrativa o contablemente tienen sentido. Por ejemplo: se acostumbra representar a los ingresos por la ecuación:

$$I = PX$$

En donde I es el ingreso de las ventas, P es el precio de venta unitario y X es el número de artículos vendidos. En la realidad estos ingresos dependen de varios conceptos, entre los que se pueden mencionar: La publicidad, el número de vendedores, el precio del artículo, la penetración en el mercado, el número de artículos vendidos, etc.

Supuestos básicos.

1. Todos los costos pueden clasificarse en fijos y variables.

2. El precio de venta unitario, es constante, es decir no varía al cambiar el volumen de ventas.

3. Los costos variables por unidad son constantes cualquiera que sea el volumen de producción; en otras palabras, los costos globales fluctuan proprocionalmente al número de artículos producidos.

4. Los costos fijos permanecen constantes ante las fluctuaciones del volumen de producción.

5. Los elementos que intervienen en los costos variables globales se presentan siempre en la misma proporción, con respecto a éstos cualquiera que sea el volumen de producción.

6. Todo lo que se produce se vende, o sea, que los cambios entre el inventario final y el inventario inicial son insignificantes.

7. No hay cambios en la eficiencia y la productividad de la organización, así como en lo referente a la competencia, los clientes, las zonas de venta, etc.

3. Conceptos sobre costos.

Administrativa y contablemente, en general, puede hablarse de dos tipos de costos: costos de distribución y costos de producción.

A. <u>Costos de Producción.</u>

Los costos de producción incluyen:

1. Materia prima directa, que es el costo de los materiales, que físicamente se transforman en parte del producto terminado y se pueden identificar con cada artículo.

2. Mano de obra directa, es el costo de los servicios de los empleados que trabajan directamente en la transformación del producto.

3. Costos indirectos de fabricación, son los costos de fabricación que no pueden identificarse plenamente con cada artículo.

Estos a su vez se dividen en:

a) Materiales indirectos, son los costos de los materiales que intervienen en la fabricación del producto, pero que no se identifican con cada artículo, como por ejemplo, lubricantes, pigmentos, materiales de limpieza, etc.

b) Mano de obra indirecta, son los costos de los servicios de los empleados que no trabajan directamente sobre el producto pero que de una manera u otra tienen que ver con la producción. Por ejemplo: el salario de los compradores de la materia prima.

c) Costos generales de fabricación, son otros costos de fabricación, como la depreciación del edificio o del equipo, seguros, ventas, impuestos, etc.

B. Costos de Distribución.

Los costos de distribución son los otros costos en los que se incurre en una organización, y que tienen que ver con la entrega del producto a consumidores intermedios y finales, como pueden ser: los costos de venta, (publicidad, promoción, vendedores), los de investigación, costos financieros y administrativos.

C. Costos de Variables y Costos Fijos.

Para efectos de planeación y control se acostumbra dividir los costos en variables y fijos.

Los costos variables son aquellos que fluctuan en proporción directa con el número de unidades producidas (materia prima y mano de obra directa). También se incluyen aquí algunos costos de distribución (comisiones a vendedores).

Los costos fijos son aquellos que no fluctuan en proporción directa con la producción, como pueden ser todos los gastos administrativos tales como: sueldo de secretarias, ventas, servicios municipales, etc. No puede hablarse de una clasificación de los costos que los tipifique como variables o fijos y que sea aplicable en alguna organización. Sino en general el contralor de costos los separa en variables y fijos de acuerdo a su experiencia y las características de los costos que intervienen.

D. Función de Costos Totales.

De acuerdo con lo antes expuesto, es la costumbre representar a los costos totales de una empresa por la ecuación:

$$Ct = Cv + Cf$$

en donde:

Ct = costo total

Cv = costo variable

Cf = costo fijo

El modelo parece muy simple, pero no es así, puesto que, cada elemento que incluye tiene en sí una gran complicación, pero que resulta útil para ciertos objetivos, y muchos de los modelos administrativos o contables que se utilizan, caen bajo esta tipificación en la que se parte de supuestos básicos, que permiten simplificar el modelo y hacerlo más manejable.

E. Costo Marginal.

Cuando se tiene establecido un programa de producción para un cierto artículo, el costo que se tiene por producir una unidad adicional del mismo artículo, es lo que se entiende por costo marginal.

En términos del cálculo diferencial éste concepto es equivalente a la primera derivada del costo total, que se interpreta como la tasa de variación, o el límite de la razón del incremento en el costo total, con respecto al incremento en la cantidad total cuando éste tiende a cero.

Costo Marginal $\frac{dc}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta X}$ donde: C = costo total
X = número de artículos prod.

F. Costo Promedio.

El costo total de producir "X" número de unidades dividido entre el número de unidades producidas, es el costo promedio.

$$\overline{C} = \frac{C}{X} = \frac{f(X)}{X}$$

donde: $\overline{C}$ = es el costo promedio

C = es el costo total en función de la cantidad producida.

X = es la cantidad de artículos producidos

A Léase incremento.

4. Ingresos.

a. Concepto y Simplificación de la función de ingreso.

Ingreso es el valor recibido por la venta de cierta cantidad de bienes o servicios a un cierto precio.

Dependiendo de las condiciones particulares de cada caso, los ingresos no guardan una relación proporcional a la cantidad, es decir no son lineales, sino que siguen una tendencia curvilínea puesto que al aumentar la cantidad vendida, generalmente se ofrecen descuentos.

Sin embargo, se acostumbra representar a la función de ingresos como una relación proporcional, a la cantidad, dentro de cierto intervalo. Es decir el precio de venta no cambia al variar la cantidad vendida.

$$I = PX \qquad \text{para} \qquad a \leq x \leq b$$

donde:

I = Ingreso

P = Precio de venta de cada artículo

X = Cantidad de artículos vendidos

a, b = Límites inferior y superior del intervalo de cantidad.

4. Ingresos.

a. Concepto y Simplificación de la función de ingreso.

Ingreso es el valor recibido por la venta de cierta cantidad de bienes o servicios a un cierto precio.

Dependiendo de las condiciones particulares de cada caso, los ingresos no guardan una relación proporcional a la cantidad, es decir no son lineales, sino que siguen una tendencia curvilínea puesto que al aumentar la cantidad vendida, generalmente se ofrecen descuentos.

Sin embargo, se acostumbra representar a la función de ingresos como una relación proporcional, a la cantidad, dentro de cierto intervalo. Es decir el precio de venta no cambia al variar la cantidad vendida.

$$I = PX \qquad \text{para} \qquad a \leq x \leq b$$

donde:

I = Ingreso

P = Precio de venta de cada artículo

X = Cantidad de artículos vendidos

a, b = Límites inferior y superior del intervalo de cantidad.

b. Ingreso Marginal.

Ingreso marginal, es el ingreso que se tiene por vender una unidad adicional, a las ya colocadas. En términos del cálculo diferencial, el ingreso marginal corresponde a la primera derivada del ingreso total; que es la tasa de variación o el límite de la razón del incremento en el ingreso total, con respecto al incremento a la demanda total, cuando ésta tiende a cero.

$$\text{Ingreso Marginal} \quad \frac{dI}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta X}$$

donde:

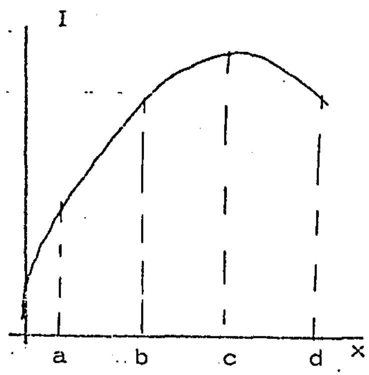
I = Ingreso total

X = Número de artículos demandados y vendidos.

Δ = Símbolo de incremento

c. Ingresos crecientes y decrecientes.

Lo más común, es suponer que entre mayor sea la cantidad vendida, mayores son los ingresos, y ésto es válido en cierto intervalo. (Intervalo (a. b.)).



Sin embargo, después de cierta cantidad, se acostumbra otorgar descuentos, entonces los ingresos, no aumentan en la misma proporción (intervalo (b. c)), y si se continua con la misma política, llega un momento en que los ingresos disminuyen al aumentar la cantidad vendida, y ésto se debe no sólo a la política establecida, sino que depende también de la capacidad instalada, que no se incrementa, al incrementar la producción (intervalo (c. d)).

Lo anterior se justifica con la llamada "Ley de los rendimientos decrecientes", que afirma:

"Si una producción cualquiera, requiere de uno, dos o varios factores de producción, sin que cambie la cantidad de los demás factores, el ingreso marginal del factor que varía, crece hasta cierto punto y después decrece". *

El motivo de esta disminución radica en que la empresa, a medida que emplea junto con un factor fijo dado, cantidades crecientes del factor variable, se aleja cada vez más de la combinación óptima de factores.

Los rendimientos son crecientes cuando los costos son decrecientes.

Los rendimientos son decrecientes cuando los costos son crecientes.

---

* Desarrollo contemporáneo de la Contabilidad y Control de Costos. Roberto Dutilli, Michel Fiol. Ed. Trillas.

d. Ley de oferta y demanda.

Un incremento en la cantidad ofrecida o una diminución en la cantidad demandada, provocan una disminución del precio; y de forma similar una diminución en la cantidad ofrecida o un aumento en la cantidad demandada provocan un aumento de precio.

III. Modelo para minimizar el costo promedio.

Concepto y Función de Costo Total.

En situaciones que tienen que ver con producción, por lo regular se busca el minimizar el costo, siempre y cuando éste esté dentro de la capacidad de producción.

Cuando por medio de datos estadísticos y bajo ciertos supuestos- es posible obtener la función de costos totales, se puede, a través del cálculo diferencial, llegar a optimizar esta función y determinar la cantidad que hay que producir para minimizar el costo - promedio.

Criterios.

Para lograr esta optimización, pueden utilizarse dos criterios, - que nos llevan exactamente al mismo resultado.

Primer criterio:

Cuando se tiene la función de costos totales, dividirla entre el - número de unidades producidas, para obtener la función de costo promedio, y después minimizar esta función.

Segundo criterio:

Puede demostrarse que el mínimo costo promedio, ocurre cuando el costo marginal y el costo promedio son iguales, por lo que igualando estas dos funciones, se llega al mismo resultado.

Ilustración.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo.

Primer criterio:

Consideremos la siguiente función de costo total:

$$C = 2x^2 + 5x + 18$$

donde: C = costo total

x = número de artículos producidos

La función de costo promedio será:

$$= \frac{C}{x} = \overline{C} = \frac{2x^2}{x} + \frac{5x}{x} + \frac{18}{x}$$

$$\overline{C} = 2x + 5 + \frac{18}{x}$$

derivando con respecto a x la función de costo promedio e igualando a cero (condición necesaria para un extremo).

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = 2 - \frac{18}{x^2}$$

$$2 - \frac{18}{x^2} = 0$$

despejando a x se tiene:

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

El valor negativo de x se desprecia, por carecer de sentido, por lo tanto:

$$x = 3$$

Para este valor se tendrá un mínimo, si la segunda derivada es positiva.

$$\frac{d^2\bar{c}}{dx^2} = \frac{2\,(18)}{x^3} =$$

$$\frac{d^2\bar{c}}{dx} = \frac{36}{x^3}$$ que es positiva para $x = 3$ por lo que se tiene un mínimo para ese valor.

Conclusión:

La cantidad que se tiene que producir para minimizar el costo - promedio, son 3 unidades.

Segundo criterio:

Obtener las funciones de costo promedio y costo marginal e igualarlas para obtener la cantidad que hay que producir para obtener el costo promedio mínimo.

De la función de costo total puede obtenerse la función de costo - promedio y costo marginal:

Función de costo total $C = 2x^2 + 5x + 18$ (1)

Función de costo marginal $\frac{dc}{dx} = 4x + 5$ (2)

Función de costo promedio $\overline{C} = 2x + 5 + \frac{18}{x}$ (3)

Igualando las expresiones (2) y (3) $\frac{dc}{dx} = \overline{C}$

se tiene:

$$4x + 5 = 2x + 5 + \frac{18}{x}$$

despejando a x se llega a:

$$4x^2 + 5x = 2x^2 + 5x + 18$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = \frac{18}{2}$$

$$x^2 = \frac{18}{2}$$

$$x = \pm 3$$

se desprecia el valor negativo y se llega a:

$$x = 3$$

que es el mismo resultado al que se había llegado con el otro - criterio.

Gráfica e Interpretación.

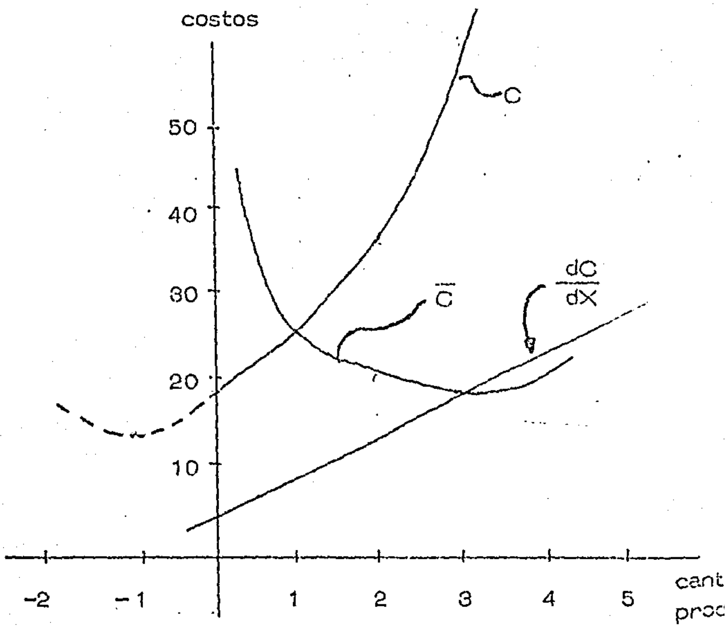
Graficando las expresiones, puede entenderse mejor el por qué - de este resultado.

Costo total

$$C = 2x^2 + 5x + 18$$

Utilicemos estos puntos para graficar la función.

X	C
0	18
1	25
-5/4	14.87
4	70
2	36
3	60



Costo promedio

$$\bar{C} = 2x + 5 + \frac{18}{x}$$

X	$\bar{C}$
1	25
2	18
3	17
1/2	42
4	17.5

Costo marginal

$$\frac{dc}{dx} = 4x = 5$$

X	d c/d
0	5
3	17

Puede observarse que el mínimo costo promedio está en la intersección de la ecuación de costo promedio y costo marginal, por lo que cualquier criterio es indiferente y nos llevaría al mismo resultado.

El propósito de utilizar el criterio del mínimo costo promedio es básicamente, para obtener el costo uniatrio más bajo. Lo que en un momento dado permitiría aumentar el margen de utilidad, o bajar el precio para beneficio del consumidor o para estar a un nivel más competitivo en los precios e incrementar las ventas.

IV. Determinación del nivel óptimo de producción y venta, para maximizar utilidades.

Uno de los problemas más comúnes de una decisión gerencial es el determinar, qué cantidad hay que fabricar y vender para obtener las máximas utilidades.

Una primera respuesta sería, hay que vender lo más posible para que de esa forma maximizar los ingresos. Pero dependiendo de las características del mercado, una variación desmedida en la cantidad ofrecida provocaría una variación en el precio del artículo, lo cual haría cambiar los ingresos (Ley de la oferta y la demanda); y por otro lado, la capacidad de producción, puede ser tal que el costo marginal sea mayor al ingreso marginal, y ésto ocasione una disminución de las utilidades (Ley de los rendimientos decrecientes). Pudiendo decir entonces, que no siempre mayores ingresos proporcionan mayores utilidades. El cálculo diferencial puede servir para determinar el nivel óptimo de producción y ventas, bajo ciertos supuestos.

Para ilustrar el método considere el siguiente ejemplo:

La gerencia de una empresa desea, con el propósito de establecer sus niveles de producción y políticas de mercadeo, encontrar el nivel óptimo de ventas, con el cual maximice las utilidades. Se sabe que la capacidad de la planta es de 1800 unidades. Los costos fijos cargados al artículo, se han estimado en \$ 2,500.00 y los costos variables por unidad en \$ 0.50, la función de ingreso en base a datos de años anteriores, se ajusta a una función logarítmica, cuya ecuación es la siguiente: $I = 500 \log (X + 1)$.

Solución.

Primer paso.

Obtener la función de costos totales.

Utilizando los supuestos establecidos, la función de costo total estará dada por:

$$C_t = 2500 + .5x \qquad (1)$$

Segundo paso.

Obtener la función de utilidad.

$$U = I - C_t$$

Puesto que la función de ingresos ya está dada

$$I = 500 \, L_n \, (x + 1) \qquad (2)$$

La función de utilidad es:

$$U = I - C_t \qquad (3)$$

que sustituyendo los valores de (1) y (2) se tiene:

$$U = 500 \, L_n \, (x + 1) - 2500 - .5x$$

derivando ésta con respecto a la cantidad, e igualando a cero - para obtener el valor del extremo (condición necesaria).

$$\frac{du}{dx} = \frac{500}{x + 1} - .5$$

$$\frac{500}{x + 1} = .5$$

$$500 = .5x + .5$$

despejando x se tiene:

$$x = 999 \text{ unidades}$$

a este valor le corresponderá un máximo, si la segunda derivada con respecto a x es negativa, para este valor.

$$\frac{d^2y}{d\,x^2} = - \frac{500}{(x + 1)^2}$$

La segunda derivada es negativa, para - cualquier valor de x por lo que para - $x = 999$ se tienen las máximas utilidades.

Del resultado anterior, puede decirse que se obtendrá la máxima utilidad, cuando el volumen de producción y ventas alcance un nivel de 999 unidades.

El monto de la utilidad se obtiene reemplazando en la función correspondiente el valor de $X = 999$ unidades.

$$U = 500\ L_n\ (x + 1) - 2500 - .5x$$

$$U = 500\ L_n\ (999 + 1) - 2500 - .5(999)$$

$$U = 500\ (6.9) - 2500 - 499.5$$

$$= 3453.87 - 2500 - 499.5$$

$$= 2653.87 - 499.5$$

$$= 454.38$$

Las utilidades son \$ 454.38

Puede comprobarse que produciendo a la capacidad máxima las utilidades son menores:

$$U = 500\ L_n\ (x + 1) - 2500 - .5x$$

$$U = 500\ L_n\ (1801) - 2500 - .5(1800)$$

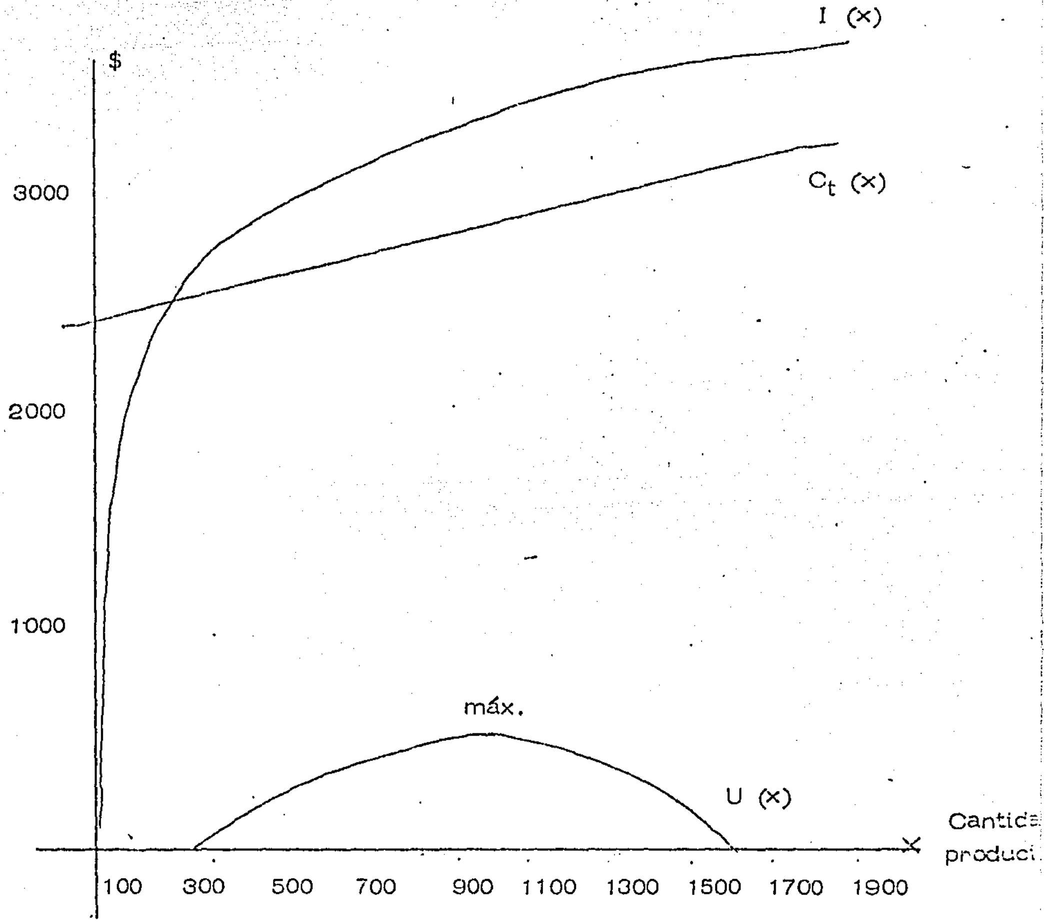
$$U = \$\ 348.09$$

Grafiquemos las funciones involucradas para aclarar los resultados.

$I(X)$ = Ingreso total

$Ct(X)$ = Costo total

$U(X)$ = Utilidad total



Funciones de Ingreso, Costo total, Utilidad para el problema de la determinación de la cantidad óptima de producción y venta para - maximizar utilidades.

En la figura anterior, muestra la gráfica de la ecuación de costos totales, y de ingresos totales.

En esta puede verse que la función de ingresos crece mucho, en un principio pero no se mantiene con el mismo ritmo de crecimiento. La función de costos totales crece a un ritmo constante, llegando un momento en que este crecimiento es mayor que el de ingresos, originando una disminución de utilidades, como se puede ver en la figura. Las utilidades alcanzan un máximo para $X = 999$ después de este punto la función de utilidad decrece.

Conclusiones.

El cálculo diferencial, constituye un instrumento matemático eficaz y preciso para la toma de decisiones, de tipo productivo, como por ejemplo, determinación del nivel de producción para la maximización de utilidades, o la minimización de costos.

Es importante hacer notar, que entre más preciso sea el modelo utilizado, más exacta será la solución, y que las consideraciones o supuestos hechos para simplificar el manejo matemático del modelo, sean respetadas, por ejemplo en el caso anterior. Se supone que la cantidad producida era igual a la cantidad vendida, y que la diferencia entre los inventarios finales e iniciales era -

despreciable, también implícitamente se considera que los ingresos son continuos y no discretos como es en la realidad, además se - acierta que la función de ingresos es válida sólo en el intervalo - establecido es decir de 0 a 1800 que es la capacidad de la planta.

V. Determinación del precio de un artículo.

Uno de los problemas que se presentan al introducir un nuevo artículo es, entre otros muchos, el establecer su precio de venta. Dependiendo del enfoque y los diferentes objetivos que se persigan, éste puede ser uno de los principales problemas a resolver. Cuando se pretende maximizar la utilidad de una empresa, el precio del artículo interviene directamente en los ingresos de ésta.

Hay muchas formas de determinar el precio de un artículo; una de éstas sería, considerar su costo, más una utilidad unitaria deseada. Otra sería tratar de encontrar el punto de equilibrio en el mercado. Pero cuando se trata de artículos de consumo, y precisamente de un artículo cuya demanda es elástica, entonces el problema es diferente y es preciso utilizar otros métodos para encontrar el precio óptimo, es decir el precio con el cual se obtiene la mayor utilidad.

El método que se utiliza tiene que considerar en forma importante la función de la demanda.

Por medio de un muestreo, se pueden obtener una serie de datos que proporcionen una correspondencia entre precio y cantidad, y por medio del análisis de regresión obtener la ecuación de la cantidad demandada. Con esta información y otra que pueda obtenerse internamente en la empresa referente a los costos totales, puede formularse el modelo que nos lleve a la optimización del objetivo.

Bajo ciertos supuestos básicos, las funciones requeridas serán las siguientes:

función de utilidad $\quad U = I - C_t \quad$ (1)

que representa el objetivo a maximizar

donde $\quad U$ = utilidad

I = ingreso

C_t = costo total

Según se explicó en el punto II de esta tercera parte, la función de ingresos y la de costos totales pueden simplificarse y presentarse de la siguiente forma:

función de ingresos: $\quad I = Px \quad$ (2)

donde $\quad P$ = precio por unidad

x = cantidad producida y vendida (cantidad demandada).

función de costos totales:

$$C_t = C_f + Cv\,X \qquad (3)$$

donde C_f = costos fijos

Cv = costos variables por unidad

En las expresiones (2) y (3) aparece "X" que es la cantidad demandada, la cual tendrá que determinarse en función del precio. (Ecuación de la demanda). Ilustremos este modelo con un ejemplo.

La gerencia de cierta empresa manufacturera de juguetes desea introducir uno nuevo para la próxima navidad, uno de sus problemas es el precio de venta. Se pretende que éste sea tal que produzca la máxima utilidad basándose tanto en la función de costos de producción, como en la función de demanda, obtenida de datos proporcionados por los distribuidores.

Supóngase que los datos que proporcionaron los distribuidores en cuanto a la demanda, en función del precio de un juguete semejante, son los siguientes:

Precio por unidad	50	65	90
Cantidad demandada en miles de unidades	30	15	10

De datos internos de la empresa se sabe:

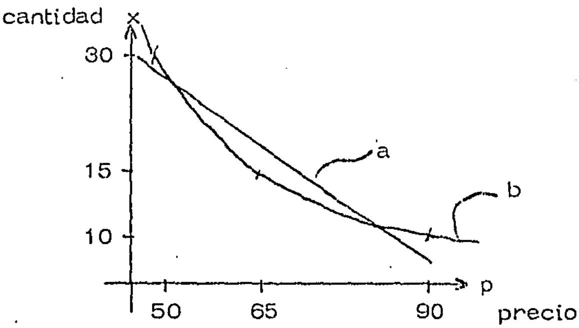
Los costos fijos asignados para el nuevo juguete se estiman en - \$ 40,000.00 y los costos variables se estiman en \$ 35.00 por - unidad.

El objetivo es maximizar la función de utilidad (1) pero en fun - ción del precio, por lo que las expresiones necesarias deberán - tener como variable independiente el precio P.

Solución:

<u>Primero</u> encontrar la <u>función de demanda.</u>

Los datos de los distribuidores están graficados en la siguiente - figura:



Los datos podrían ajustarse a una recta (a) que sería muy simple; en forma más adecuada a una hiperbola (b), utilicemos esta segunda. La ecuación que se obtiene (ver Elasticidad de la demanda) es:

(4) $X = -8.46 + \frac{1751.25}{p}$ donde X representa la cantidad demandada en miles de unidades y p el precio por unidad donde $50 \leq p \leq 90$

Segundo obtener la función de costos totales.

La expresión pedida es: $C_t = C_f + CvX$; de la información interna se sabe que:

$$Cf = 40,000.00$$

$$Cv = 35$$

por lo que la ecuación queda:

$$C_f = 40,000 + 35x$$

En la que hay que sustituir el valor de "x", puesto que la variable independiente tiene que ser el precio; puesto que:

$$x = -8.46 + \frac{1751.25}{p}$$ sustituyendo queda:

$$C_t = 40,000.00 + 35\left(-8.46 + \frac{1751.25}{p}\right)$$

que efectuando operaciones resulta:

(5) $$C_t = 39703.90 + \frac{61.293.75}{p}$$

Tercero encontrar la función de ingresos, en función del precio:

$$I = Px$$

$$I = P\left(-8.46 + \frac{1751.25}{P}\right)$$

(6) $$I = -8.46P + 1751.25$$

Cuarto encontrar la expresión de utilidad en función del precio - sustituyendo (5) y (6) en (1).

$$\therefore U = (-8.46P + 1751.25) - \left(39.703.90 + \frac{61.293.75}{P}\right)$$

$$U = -8.46P + 1751.25 - 39.703.90 - \frac{61.293.75}{P}$$

(7) $$U = -37.952.65 - 8.46P - \frac{61.292.75}{P}$$

Esta es la función que hay que maximizar con respecto al precio.

Quinto determinar el precio óptimo que maximice las utilidades, la solución se obtiene:

Derivando la función de utilidad (7) con respecto al precio, e - igualando a cero, se tiene el valor deseado.

$$\frac{du}{dP} = -8.46 + \frac{61.293.75}{P2}$$

haciendo: $\frac{du}{dP} = o$ y despejando P, se obtiene

$$-8.46 + \frac{61.293.75}{P2} = o$$

$$-8.46\ P2 + 61.293.75 = o$$

$$8.46\ P2 = 61.293.75$$

$$P2 = \frac{61.293.75}{8.46}$$

$$P2 = 7245.12$$

$$P = \pm\ 85.12 \qquad\qquad P = \$\ 85.12$$

Se desprecia la cantidad negativa, por lo que cada juguete debe-venderse a $ 85.12 para maximizar la utilidad.

Sexto verificar que el valor obtenido es un máximo, sustituyéndolo, en la segunda derivada.

$$\frac{du2}{dp2} = \frac{-2(61.293.75)}{P3}$$

$$\frac{D2U}{dp2} = \frac{-122587.50}{P3}$$

que para el valor de - P = 85.12 resulta negativa constituyendo, por lo tanto un máximo. (Condición suficiente)

conviene determinar la cantidad que debe producirse y venderse-así como el monto de las utilidades.

Sustituyendo el valor de P en la expresión (4)

$$X = -8.46 + \frac{1751.25}{P}$$

$$X = -8.46 + \frac{1751.25}{85.12}$$

$$X = -8.46 + 20.57$$

$X = 12.11389$ pero como está expresado en miles unidades.

$$X = 12,114$$

cantidad a producir y vender.

La utilidad se obtiene de la expresión (1)

$$U = I - C_t$$

donde $I = 85.12\ (12114)$

$= 1.031,143.60$

t $C_t = 40,000 + 35\ (12.114)$

$= 40,000 + 423990$

$= 463,990$

por lo tanto:

$U = 1.031,143.60 - 463.990$

$= \$\ 567,153.60$

que es la utilidad.

VI. Modelos de Inventario.

Introducción.

Las cantidades invertidas en los inventarios constituyen para algunas empresas, una parte muy importante de sus activos, independientemente de que los inventarios sean de materias primas o de productos terminados. Cualquier tipo de inventario implica un costo, que influye en las utilidades de la empresa.

El propósito de los modelos de inventario, es precisamente la minimización de los costos de inventario. Este propósito lleva implícito la determinación de los procedimientos óptimos de adquisición de las existencias para satisfacer demandas futuras.

Definición de los costos cargados a los inventarios.

De los costos cargados al inventario puede hablarse básicamente de los cuatro siguientes:

C_1 = Costo unitario de la parte

El costo unitario de la parte es el valor que en sí tiene un solo artículo, comprado o manufacturado.

C_2 = Costo de adquisición (caso de compra), o

Costo de arranque de producción (caso de manufactura)

Para el caso de compra, el costo de adquisición, incluye todos los costos en los que se incurre desde el momento en el cual se hace el pedido, hasta el momento en que se tiene almacenada la mercancía. Por ejemplo, se pueden considerar los costos de elaboración de la requisición u orden de compra, con sus respectivas autorizaciones, comprador, transporte, recibo, inspección y almacenamiento entre otros.

Para el caso de manufactura, es el costo en el que se incurre desde el momento de hacer la orden de manufactura, hasta que sale el primer artículo bueno, en los que quedan incluidos costos semejantes a los implicados en el caso de compra, solo que aquí hablaremos de costo de arranque de producción.

C_3 = Es el costo de mantenimiento del inventario, dentro del almacén.

Generalmente en este costo se consideran: renta del espacio ocupado, (o depreciación del inmueble), manejo de materiales, valor del inventario, (un porcentaje), seguros, deterioros obsolescencia, aire acondicionado, energía, etc.

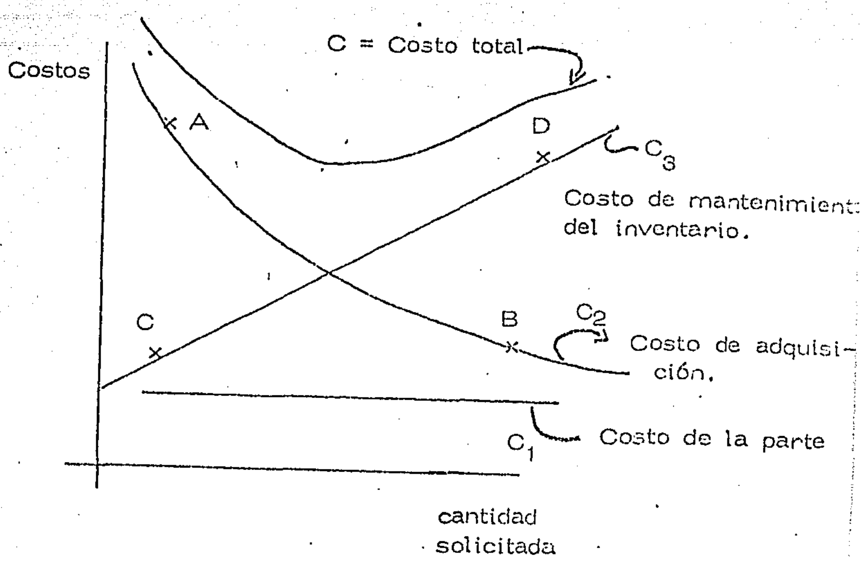
C_4 = Costo de déficit.

En ocasiones se preve, un costo de déficit, que es el costo adicional que tiene que hacerse, por no disponer del artículo, en el momento que es solicitado, o por - tener ventas anticipadas. Ejemplo de estos costos - pueden ser los referentes a: pérdida de oportunidad - (perder un cliente), parar la línea de producción (si - no se tiene la materia prima), reponer el servicio - (entregá a domicilio), etc. En los modelos aquí estu_ diados, no se permite déficit, por lo que este costo no se incluye.

Decisiones sobre los inventarios.

De hecho hay dos decisiones importantes en los problemas de inventario: "Qué cantidad pedir" y "Cada cuándo hay que pedirlo". Para éstas, hay una infinidad de alternativas, que dependerían de los recursos disponibles y de la capacidad de almacenamiento.

Una de éstas sería: Comprar grandes cantidades, para reducir - el costo de adquisición; otra podría ser comprar poco, aunque en forma más frecuente, para disminuir el costo de mantenimiento - del inventario. Sin embargo, cualquiera de estas alternativas, llevadas al extremo, aumentaría el costo total "C", como puede verse en la siguiente figura:



- El costo unitario "C_1", permanece constante, dentro de un cierto intervalo, (número de unidades solicitadas).

- El costo de adquisición "C_2" es muy alto cuando se pide en pocas cantidades, punto "A" y este costo decrece conforme aumenta la cantidad de cada pedido, lo que implica menos adquisiciones, punto "B".

- El costo de mantenimiento "C_3" es bajo, cuando se tienen pocos artículos, punto "C" y va en aumento al incrementarse la cantidad del inventario, punto "D".

Por lo anterior es lógico suponer que la cantidad que hay que pedir cada vez, debe ser un punto intermedio entre estos extremos y que coincida con un mínimo en la función de costo total. Al resolver este problema por medio del cálculo diferencial habremos determinado el "lote económico de compra" o (manufactura).

El lote económico de compra es la cantidad que hay que comprar cada vez, para minimizar el costo total, cargado al inventario.

Tipos de Inventario.

Básicamente, se tienen dos tipos de inventarios: de productos terminados y de materias primas.

Cada uno tiene sus particularidades, pero tienen una consecuencia común: el servicio, si se trata de productos terminados se habla de un servicio al cliente; si se trata de materias primas se hablará de un servicio a la planta, pero todo se refleja en los costos.

Los modelos que pueden desarrollarse para cada tipo de inventario bajo condiciones de certeza (modelos determinísticos), corresponden a modelos de compra (materias primas, o artículos terminados) y modelos de manufactura (artículos en proceso y terminados).

En el presente estudio se revisan estos dos modelos, considerando que no se permite déficit.

Modelo determinístico de compra sin déficit.

Consideraciones.

La demanda y tiempo de entrega son determinísticos.

La demanda se efectúa a una tasa constante.

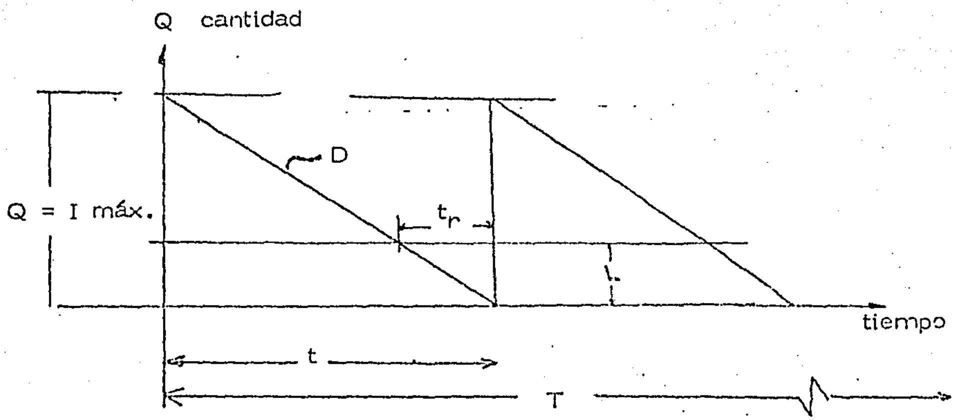
El reabastecimiento, es instantáneo.

Los coeficientes de costo son constantes (C_1, C_2, C_3).

El tiempo total, se considera de un año.

No se permite déficit.

Este modelo se ilustra en la gráfica siguiente:



Donde:

D = tasa de la demanda, en unidades por período.

Q = lote económico de compra; es la cantidad que hay que pedir al principio de cada período de tiempo t, para minimizar el costo total anual.

t_r = tiempo que transcurre entre la solicitud de la cantidad y su recibo.

t = tiempo entre pedidos o tiempo de un período en años.

T = tiempo de N períodos, generalmente un año ($T = 1$). (Esta suposición simplifica la deducción del modelo)

R = tasa de abastecimiento, se considera instantáneo.

C^1 = costo total de un solo pedido.

C = costo total de N pedidos al año.

En este modelo intervienen los siguientes costos:

C_1 = costo de la parte.

C_2 = costo del pedido.

C_3 = costo de mantener un artículo en el inventario, por unidad de tiempo.

L = Nivel de reorden.

El objetivo es establecer la cantidad Q, que hay que pedir cada vez, tal que minimice el costo total anual, es decir el costo de "N" pedidos.

El costo de un solo pedido está definido por: la suma de los siguientes costos.

- $C_1 Q$ = El precio de la parte multiplicado por el número de partes pedidas.
- C_2 = El costo del pedido.
- $C_3 \frac{Q}{2} t$ = El costo de mantener un inventario promedio durante un período t, se considera que el inventario nunca está al máximo Q, y tampoco a un mínimo y que la demanda es constante, por lo que el inventario promedio está dado por la expresión $\frac{Q}{2}$.

Por lo que la expresión de costo para un solo pedido, está dado por:

$$C^1 = C_1 Q + C_2 + C_3 \frac{Q}{2} t$$

Para obtener el costo de N pedidos, se multiplica la expresión anterior por N, lo que nos da el costo total anual.

(1) $$C = C^1 N = N C_1 Q + N C_2 + N C_3 \frac{Q}{2} t$$

Pero nos interesa expresar N y t, en función de Q, puesto - que es la variable que pretendemos determinar (Lote económico de compra). Para lo cual utilizamos las siguientes relaciones:

En un año T se tienen N períodos t, es decir:

$$T = Nt$$

Despejando N se tiene:

$$N = \frac{T}{t}$$

Pero como T = 1 (un año) según se especificó al presentar el modelo.

(2) $$N = \frac{1}{t}$$

(3) $$t = \frac{1}{N}$$ que representa el tiempo de un período en años.

Además la cantidad Q, se consume a un ritmo D en "t" tiempo, de donde se obtiene la siguiente relación $Q = Dt$, la cual despejando t queda:

$$t = \frac{Q}{D} \tag{4}$$

Utilizando las relaciones (2) y (4) se tiene que:

$$N = \frac{1}{Q/D}$$

que finalmente queda:

$$N = \frac{D}{Q} \tag{5}$$

Reemplazando el valor "N" de la expresión (5) en la expresión (1) se tiene:

$$C = \frac{D}{Q} C_1 Q + \frac{D}{Q} C_2 + \frac{D}{Q} C_3 \frac{Q}{2} t$$

y sustituyendo el valor de t dado por (4), en esta última expresión queda:

$$C = \frac{D}{Q} C_1 Q + \frac{D}{Q} C_2 + \frac{D}{Q} C_3 \frac{Q}{2} \frac{D}{Q}$$

que simplificando nos lleva a la expresión de costo total anual.

$$C = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} \tag{6}$$

Para tener el costo mínimo, utilizaremos el cálculo diferencial - y tendrán que cumplirse las siguientes condiciones para que exista un mínimo.

1o. $\frac{DC}{DQ} = 0$ (para el extremo)

y

2o. $\frac{D^2 C}{DQ} > 0$ (para un mínimo)

$$\frac{DC}{DQ} = \frac{-C_2 D}{Q^2} + \frac{C_3}{2}$$

$$-\frac{C_2 D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} = 0$$

despejando Q se tiene:

$$Q = \sqrt{\frac{2 C_2 D}{C_3}} \tag{7}$$

La expresión (7) representa el lote económico de compra.

$$y \quad \frac{D^2 C}{D\,Q} = \frac{2\,C_2\,D}{Q^3}$$

Puesto que todos los elementos de esta expresión son positivos, satisface la condición suficiente para un mínimo. Por lo que sustituyendo el valor de Q, de la expresión (7) en la expresión (6) de costo total, se tendrá la expresión para el costo mínimo.

(8) $$C\ \text{mín.} = C_1\,D + \sqrt{2\,C_2 \quad C_3\,D}$$

Algunas preguntas interesantes que conviene responder son las siguientes:

a) Cantidad óptima pedida Q = L.E.C.

b) Costo total por año C costo mínimo = C mín.

c) Número de pedidos por año $N = \frac{1}{t} = \frac{D}{Q}$

d) Tiempo entre pedidos $t = \frac{1}{N} = \frac{Q}{D}$

e) Nivel de reorden $L = Dt_r$. Es el nivel mínimo de inventario que debe alcanzarse, para en ese momento emitir la orden de compra, para que ésta sea surtida en el momento que se tengan cero existencia y no se tenga déficit.

Ejemplo:

La demanda de un artículo particular es de 24,000 unidades al año. El costo de almacenamiento por unidad es de $ 2.00 al año. El costo de ordenar el pedido se estima en $ 400.00. No se permite déficit. Las unidades se compran, por lo que el reabastecimiento se considera instantáneo. El costo unitario es de $ 1.00. El tiempo de entrega es constante y dura 18 días calendario en surtirse el pedido.

Determinar:

a) Lote económico de compra.

b) Costo mínimo total (por año).

c) Número de pedidos por año.

d) Tiempo entre pedidos en años.

e) Nivel de reorden.

Solución:

El lote económico de compra está dado por la expresión (7) donde:

$C_1 = 1.00$

$C_2 = 400.00$

$C_3 = 2.00$

$D = 24,000$ al año

$$Q = \sqrt{\frac{2\ (400)\ 24,000}{2}}$$

$$Q = 3090.38$$

a) El lote económico de compra será de $\underline{Q = 3090}$ unidades

b) El costo total mínimo se obtiene utilizando la ecuación (8) - se tiene:

$$C\ mín. = 1\ (24,000) + \sqrt{2\ (400)\ (2)\ (24,000)}$$

$$C\ mín. = 24,000 + \sqrt{38400000}$$

$$C\ mín. = 24,000 + 6196.77$$

$$C\ mín. = \$\ 30,196.77 \quad \text{al año}$$

c) El número de pedidos por año se determina utilizando la - expresión (5)

$$N = \frac{24,000}{3098} = 7.75 \quad \text{pedidos por año}$$

esto es aproximadamente 8 pedidos al año.

d) Para calcular el tiempo entre pedidos se utiliza la expresión (3) o la expresión (4)

$$t = \frac{1}{7.75} = .129 \text{ años}$$

es decir, si se tiene un año de 365 días, cada 47 días habrá que hacer un pedido. (.129) (365) = 47.08

e) El nivel de reorden. En este caso, se cálcula fácilmente, multiplicando la tasa de demanda por el tiempo de entrega en años.

Si $T = 365$ días

y el tiempo de entrega 18 días, entonces $t_r = \frac{18}{365} = .049$ años

$L = (.049)(24000) = 1183$ unidades.

Es decir cuando el nivel de inventarios llegue a 1183 unidades hay que hacer el pedido, para permitir que éste reciba al agotarse la última unidad.

Modelo determinístico de manufactura sin déficit.

Consideraciones.

La demanda y el tiempo de entrega son determinísticos.

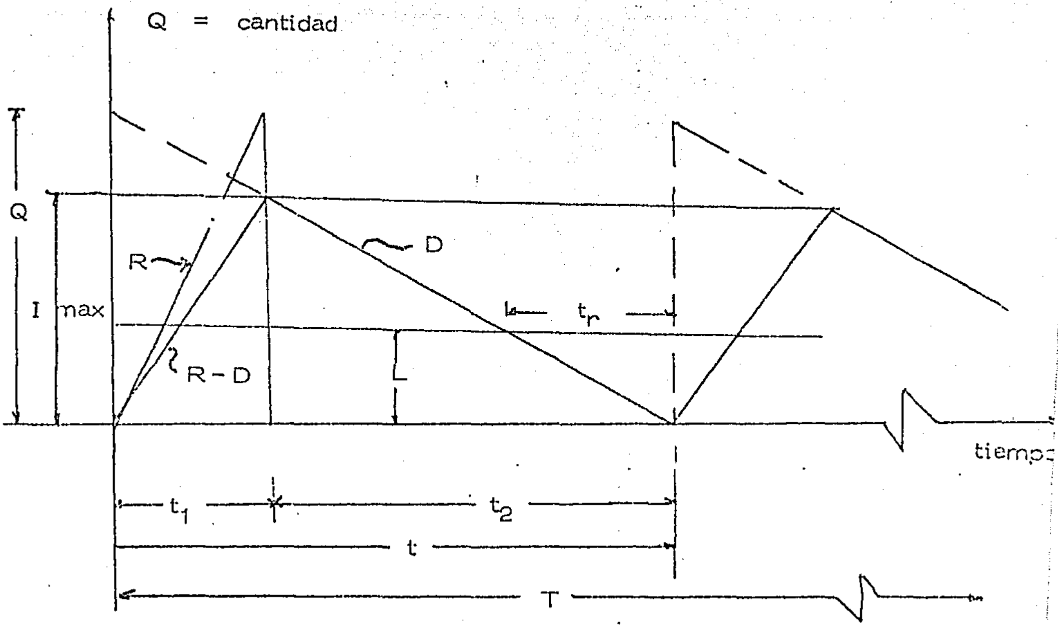
La demanda se efectúa a una tasa constante.

La tasa de reabastecimiento o manufactura es constante y mayor que la tasa de demanda.

Los coeficientes de costo son constantes (C_1, C_2, C_3).

No se permite déficit.

Este modelo se ilustra en la gráfica siguiente:



Donde:

D = Tasa de la demanda en unidades por período.

Q = Lote económico de manufactura; cantidad que hay que fabricar en cada corrida de producción, cada período de tiempo t, para minimizar el costo total.

t_r = Tiempo que transcurre entre que se solicita la orden - de manufactura hasta que se inicia la producción.

t_1 = Tiempo de manufactura y consumo.

t_2 = Tiempo de consumo exclusivamente.

t = Tiempo entre pedidos; o tiempo de un período en años - $t = t_1 + t_2$.

T = Tiempo de N períodos generalmente un año ($T = 1$). (Esta suposición simplifica la deducción del modelo)

C^1 = Costo total de un solo pedido.

C = Costo total de N pedidos $C = NC^1$

C_1 = Costo de la parte.

C_2 = Costo del arranque de producción.

C_3 = Costo de mantener un artículo e inventario por unidad - de tiempo.

R = Tasa de reabastecimiento o manufactura en unidades por período.

L = Nivel de reorden.

I max. = Inventario máximo. Este es diferente de "Q", puesto- que se produce y consume al mismo tiempo y nunca se llega a tener la cantidad Q.

El objetivo al igual que en el modelo anterior, es determinar la cantidad "Q" que hay que manufacturar en cada corrida de producción, para minimizar el costo total anual, es decir el costo de N pedidos.

El costo de un solo pedido está definido por la suma de los siguientes costos:

$C_1 \; Q$ = El costo de la parte, multiplicado por el número de partes manufacturadas.

C_2 = El costo de arranque de la producción.

$C_3 \; \frac{I \; max}{2} \; (t_1 + t_2)$ = El costo de mantener un inventario promedio, durante un período de tiempo $t = t_1 + t_2$

Se recuerda que la expresión de inventario promedio $(\frac{I \; max}{2})$, considera que no todo el tiempo se tiene un inventario máximo y tampoco un inventario mínimo (cero existencias), sino un promedio entre estos extremos por ser la tasa de manufactura y demanda constantes.

De tal forma que la expresión de costo total de un pedido es:

(11) $$C^1 = C_1 \; Q + C_2 + C_3 \; (\frac{I \; max}{2}) \; (t_1 + t_2)$$

La expresión de costo total de N períodos se obtiene de multiplicar la expresión (11) por el número de períodos N lo que resulta en:

$$C = C^1 N = C_1\, QN + C_2\, N + C_3 \left(\frac{I\ max}{2}\right)(t_1 + t_2)\, N \qquad (12)$$

puesto que se desea optimizar la cantidad económica de manufactura "Q" es necesario expresar N, I max, y $(t_1 + t_2)$ en función de Q.

De la figura pueden determinarse las siguientes equivalencias:

Para I max:

El inventario máximo (I max) se alcanza en un tiempo t_1, a un ritmo (R-D) o sea:

$$I\ max = t_1\ (R-D) \qquad (13)$$

puesto que nos interesa un inventario promedio, dividimos entre dos, ambos miembros de la ecuación (13)

$$\frac{I\ max}{2} = t_1\ \frac{(R - D)}{2} \qquad (14)$$

Para t_1

Para el valor de t_1, hay que encontrar un equivalente, el cual - se obtiene fácilmente de la siguiente suposición: si no se consume lo producido en un tiempo t_1, se alcanzaría un inventario Q, a un ritmo R, o sea:

$$Q = t_1 R$$

de donde

(15) $$t_1 = \frac{Q}{R}$$

sustituyendo este valor en 14 se tiene:

$$\frac{I\ max}{2} = \frac{Q}{2\,R}\ (R-D)$$

(16) $$\frac{I\ max}{2} = \frac{Q}{2}\ (1 - \frac{D}{R})$$

Para $t_1 + t_2$

De una manera semejante a la utilizada en el caso de t_1, puede verse de la figura, que teniendo un nivel Q de inventario, éste se consume a un ritmo D, en un tiempo $(t_1 + t_2)$, ésto es:

$$Q = D\ (t_1 + t_2)$$

de donde:

(17) $$t_1 + t_2 = \frac{Q}{D}$$

y puesto que el número de períodos al año está dado por la expresión (5) $N = \frac{D}{Q}$ según se vió en el modelo anterior, el cual es semejante a éste, por la relación que guardan N, D y Q, pueden sustituirse estos valores en la ecuación de costo total (12), - lo que resulta en:

$$(18) \qquad C = C_1 Q \left(\frac{D}{Q}\right) + C_2 \left(\frac{D}{Q}\right) + C_3 \cdot \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{D}{R}\right) \frac{Q}{D} \cdot \frac{D}{Q}$$

Simplificando se llega a:

$$(19) \qquad C = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

Para minimizar el costo con respecto a la cantidad.

Calcular $\frac{dC}{dQ} = 0$ (para el valor extremo)

y $\frac{d^2C}{dQ^2} > 0$ (para un mínimo)

$$\frac{dC}{dC} = -\frac{C_2 D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

$$-\frac{C_2 D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} \left(1 - \frac{D}{R}\right) = 0$$

despejando Q se tiene:

$$(20) \qquad Q = \sqrt{\frac{2 C_2 D}{C_3 (1 - D/R)}}$$

Que es el lote económico de manufactura que minimiza el costo total anual.

$$\frac{d^2 C}{d\ Q^2} = \frac{2\ C_2\ D}{Q^3}$$

Como todos los elementos de esta expresión son positivos, la segunda derivada es mayor que cero (condición suficiente), por lo tanto se tiene un costo mínimo para el valor determinado por la expresión (20).

Sustituyendo el valor de "Q" de la ecuación (20) en la expresión (19) se llega a:

(21) $$C\ \text{mín.} = C_1\ D + \sqrt{2\ C_2\ C_3\ D\ \ (1 - D/R)}$$

Que es la expresión para calcular el costo total mínimo cuando se manufactura Q.

Ejemplo:

La demanda de un artículo particular es de 24,000 unidades al año, el costo anual de almacenamiento por unidad es de $ 2.00.

El costo de arranque de la producción se estima en $ 1,000 y la capacidad de manufactura es de 40,000 unidades al año.

El costo unitario de la parte se estima en \$ 0.70, el tiempo que transcurre de la orden de manufactura hasta que se tiene el primer artículo, es de 10 días calendario.

Determinar:

a) Lote económico de manufactura.

b) Costo mínimo total por año.

c) Número de pedidos al año.

d) Tiempo entre pedidos en años.

e) Nivel de reorden.

Solución:

Los datos son:

$$C_1 = \$\ 0.70$$

$$C_2 = \$\ 1,000$$

$$C_3 = \$\ 2.00$$

$$D = 24,000$$

$$t_r = 10 \text{ días}$$

a) Por medio de la expresión (20) puede saberse el lote económico de manufactura.

$$Q = \sqrt{\frac{2\ (1000)\ 24000}{2\ (1 - \frac{24000}{40,000})}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{48,000,000}{2\ (.4)}}$$

$$Q = \sqrt{60,000,000}$$

$$Q = 7,745.96$$

La cantidad que hay que fabricar en cada corrida de producción, para minimizar el costo total anual es de 7.746 unidades.

b) El costo mínimo anual se obtiene por medio de la ecuación (21).

$$C\ mín. = .70\ (24000) + \sqrt{2\ (1000)\ (2.00)\ 24000\ (1 - \frac{24000}{40000})}$$

$$C\ mín. = 14,800 + \sqrt{96,000,000\ (.4)}$$

$$14,800 + \sqrt{38,400,000}$$

$$14,800 + 6196.77$$

$$C\ mín. = \$\ 20,996.77$$

c) Número de pedidos al año. Este se obtiene por la expresión (5)

$$N = \frac{24,000}{7,746} = 3.09$$

Hay que organizar tres corridas de producción al año, para satisfacer la demanda.

d) El tiempo entre pedidos está dado por la expresión (3) del modelo anterior, que no cambia en este modelo.

$$t = \frac{1}{N} = \frac{1}{3.09} = .324 \text{ años}$$

ésto es, si se considera un año de 365 días, el pedido deberá hacerse cada (.324) (365) = 118 días (redondeando)

e) Nivel de reorden.

$$L = t_r \ D$$

$$t_r = \left(\frac{10}{365}\right) = .0274 \text{ años}$$

$$L = (.0274)\ (24,000) = 657.53$$

Cuando se tenga en el inventario <u>658 unidades,</u> deberá emitirse la orden de manufactura (pedido), para evitar el déficit.

Conclusiones.

Los modelos de inventario aquí presentados, son los más sencillos, pero no por eso dejan de ser útiles. Particularmente éstos pueden constituir un elemento de apoyo para la decisión de manufacturar o comprar, ya que el objetivo general será minimizar los costos.

El ejemplo presentado en cada uno de los dos casos podría ser el caso de esta situación.

Resumiendo los resultados y comparándolos podría decidirse:

Concepto	Mod.de compra	Mod.manufactura
a) Lote económico en número unidades.	3,090	7,746
b) Costo mínimo anual	30,196.77	20,996.77
c) Número de pedidos al año	8 pedidos	3 corridas
d) Tiempo entre pedidos	47 días	118 días
e) Nivel de reorden en número unidades.	1,183	658

Analizando los resultados, puede verse, que el costo se reduce una tercera parte, manufacturando las partes más que comprándolas.

Si la capacidad de la planta y almacén permiten el fabricar y almacenar esta cantidad, la decisión sería manufacturar.

BIBLIOGRAFIA

Ernest F. Haeussler & Richard S. Paul.
Introductory Mathematical Analysis. For students of business & economics.
Reston Publishing Co. Inc. Reston Virginia, U.S.A.
Prentice Hall.

William J. Baumol.
Economic Theory and Operations Analysis.
Prentice Hall.

William W. Thompson Jr.
Calculus with applications in the management and social sciences.
Prentice Hall.

Laurence D. Hoffmann.
Cálculo para las ciencias sociales y administrativas.
McGraw Hill.

Jean E. Draper & Jane S. Klingman.
Matemáticas para administración y economía.
Harper & Row Latinoamericana.

Michael L. Kovacic.
Matemática. Aplicaciones a las ciencias económico administrativas.

Samuel B. Richmond.
Operations research for management decisions.
Ronald Press Co. New York.

John E. Freund.
Introducción a las matemáticas de los negocios y la economía.
Prentice Hall Internacional.

Ya Lun Chou.
Análisis Estadístico.
Interamericana.

Harold J. Larson.
Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística.
Limusa, México.

Fred N. Kerlinger/Elazar J. Pedhazur.
Multiple Regression in Behavioral Research.
Holt Rine-Hart and Wirston Inc. New York.

Grace A. Bush John E. Young.
Foundations of mathematics with applications to the social and management sciences.

Crhis A. Theodore.
Applied mathematics an introduction.
Cuantitative Analysis for business.
Irwin Series, 1975.

'mes