UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"UN TEOREMA SOBRE SEPARACION DE VARIABLES Y TENSORES DE KILLING CONFORMES EN ESPACIOS DE EINSTEIN"

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA) PRESENTADA POR:

J. GUSTAVO E. PRECIADO R.

OCTUBRE 1980

INDICE:

	PAGINA
PREFACIO	1
CAPITULO 1	6
CAPITULO 2	14
CAPITULO 3	33
BIBLIOGRAFIA	64

PREFACIO

Es bien sabida la importancia que tiene, para el entendimiento físico de un espacio de Einstein, el conocimiento de sus geodésicas. Ahora bien, uno de los métodos más eficientes para obtener este conocimiento es el clásico método de separación de variables para construir una integral completa de la ecuación de Hamilton - Jacobi

$$(*) \qquad g^{ij} W_{,i} W_{,j} = E$$

donde g^{ij} es el tensor métrico del espacio en cuestión, $W_{,i} = \partial W / \partial x^i$ y E es una constante.

Los esfuerzos dirigidos en este sentido, no solo para espacios de Einstein, sino para espacios Riemannianos o pseudoriemannianos generales, datan desde la segunda mitad del siglo pasado con los trabajos clásicos de Liouville, Stäckel, Levi-Civita, Eisenhart etc., decaen durante un tiempo y resurgen en los últimos diez años en los trabajos de Carter, Havas, Benenti y Francaviglia, Boyer, Kalnins y Miller etc. [1-12].

Una evolución muy semejante han tenido los métodos de la teoría de grupos de Lie para el estudio de ecuaciones diferenciales, y ha sido hasta estos últimos años que la íntima relación que existe entre estas dos corrientes de la matemática aplicada se ha reconocido con toda claridad. [13].

Por otra parte, en vista de la no linealidad de las ecuaciones de Einstein y los problemas consiguientes que se encuentran para su solución, aunada al hecho de que la topología del espacio no es conocida a priori, puede decirse que el acervo completo de consecuencias implicado por estas ecuaciones está aun lejos de haber sido enteramente entendido.

Desde la aparición de la solución obtenida por Schwarzschild en 1916, los relativistas se han dado cuenta de que un buen camino para aumentar el entendimiento de esas implicaciones, es el de construir soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y estudiar sus propiedades a la mayor profundidad posible. [17]. Ahora bien, la mayoría de los espacios más extensamente estudiados, como son los de Schwarzschild, Kerr, De Sitter, Kasner, etc., son espacios que, por un lado, exhiben un gran número de simetrías y por otro lado, en todos ellos puede encontrarse un sistema de coordenadas en el que la ecuación de Hamilton - Jacobi (*) admite una integral completa separada. Es de interés investigar sobre la clase completa de espacios que exhiben esta propiedad, porque esto ofrece la posibilidad de encontrar nuevas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que pueden ser estudiadas en mayor profundidad por el conocimiento de sus geodésicas, esto es, nuevas rutas para elucidar más claramente el contenido de la teoría de gravitación Einsteniana.

Actualmente, en esta investigación, se ha establecido claramente el resultado de que el estudio del problema de separación de variables para (*), es el estudio de sus simetrías, es decir, el estudio de los tensores de Killing que posee el tensor métrico. Además, cuando la dimensión del espacio es menor o igual a cuatro, se tiene ya una clasificación completa de los sistemas de coordenadas en los que (*) es separable, así como una forma canónica representante, para cada clase, del tensor métrico. Queda, sin embargo, por completar el problema de resolver las ecuaciones de Einstein correspondientes a cada clase, para pasar así a una clasificación de espacios. Es en este paso donde se sitúa el presente trabajo.

En el primer capítulo, de naturaleza introductoria, se revisa rápidamente la evolución que el estudio del problema de separación para la ecuación (*) ha tenido, a partir de los trabajos de Stäckel, hasta el tiempo presente. En el segundo capítulo se presenta, con mayor detenimiento, el método que para este estudio han seguido Boyer, Kalnins y Miller. Aquí, en lugar de repetir las demostraciones, que pueden encontrarse en los artículos que se citan, la validez de los resultados se verifica, en lo posible, para el caso concreto que se contempla en este trabajo. Finalmente, en el tercer capítulo, se muestra de manera esquemática, pero suficientemente clara, el proceso de solución de las ecuaciones de Einstein correspondientes a este caso. Se encuentra que estas ecuaciones pueden resolverse exactamente y que el espacio obtenido es de De Sitter, esto es, un teorema de tipo "no-go".

El estudio es de naturaleza local y se supone que, en las regiones consideradas, los cambios de coordenadas son bien definidos, las funciones que aparecen son diferenciables el número de veces que sean necesarias etc. A lo largo de todo el trabajo se emplea la convención de suma sobre índices repetidos, a menos que se indique explícitamente lo contrario con las letras (n.s.). Frecuentemente, cuando no hay riesgo de confusiones, se omitirá escribir, en cada expresión, el conjunto sobre el que corren los índices involucrados. El operador de derivación $\partial/\partial x^i$ se escribirá como ∂x^i y para una función U de varias variables, la parcial $\partial x^i U$ se escribirá U_{x^i} o también, en ocasiones, $U_{,i}$. Si la función U depende de una sola variable, la derivada se escribirá como U' o también $\dot{U}$.

Dos números entre paréntesis redondos, (n-m), se refieren a la expresión (m) del n-ésimo capítulo, y la notación (m) se refiere a la expresión (m) del mismo capítulo donde aparece. Los números entre paréntesis cuadrados [n], se refieren a la bibliografía que aparece al final del trabajo.

CAPITULO 1

Introducción Histórica

El estudio del problema de separación de variables para la ecuación de Hamilton - Jacobi

$$(*) \qquad g^{ij}\, W_{,i} W_{,j} = E$$

siempre se hace con referencia a un sistema de coordenadas específico $(x^1, \ldots, x^n)$, de manera que el primer paso en un estudio de esta naturaleza, es dar una clasificación completa de los distintos sistemas de coordenadas en los que $(*)$ admite una integral completa separada, donde por ésto último se entiende una familia n-paramétrica de soluciones de $(*)$:

$$(**) \quad W(x;\lambda) = W_1(x^1;\lambda) + \cdots + W_n(x^n;\lambda)$$

donde $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, y los parámetros λ_i se suponen esenciales e independientes, i.e., se supone que la matriz

$$(1) \qquad W_{,x^i \lambda_j} \qquad i,j = 1, \ldots, n$$

es no singular en la región considerada. [18].

(Nótese que en virtud de que W no aparece explícitamente en la ecuación (*), uno de los parámetros λ_i puede siempre tomarse como constante aditiva en la integral completa (* *).)

En un principio, la atención fue dirigida primordialmente al estudio de separación de (*) en coordenadas ortogonales, y en este contexto, los primeros resultados conclusivos fueron obtenidos por Stäckel en 1891 [2], quien demostró que la ecuación

$$(2) \qquad g^{ij} W_{,i} W_{,j} = H_i^2 (W_{,i})^2 = E$$

es separable en el sistema ortogonal $(x^1, \ldots, x^n)$, si y solo si la métrica covariante

$$(3) \qquad g_{ij}\, dx^i dx^j = h_i^2 (dx^i)^2 = ds^2$$

está en la llamada forma de Stäckel, es decir, existe una matriz no singular Θ_{ij}, con la propiedad de que el j-ésimo renglón depende solamente de x^j, (una matriz de Stäckel), tal que las funciones h_i en (3) son de la forma:

$$h_i^2 = \frac{ⓝ}{ⓝ^{i1}} \tag{4}$$

donde ⓝ y $ⓝ^{i1}$ son el determinante y el $(i1)$-cofactor de la matriz Θ_{ij}.

El estudio del problema de separación en coordenadas más generales fue iniciado por Levi-Civita en 1904. Partiendo de la definición ordinaria de separabilidad, i.e., de la supuesta existencia de una integral completa separada (**) para la ecuación (*), las coordenadas separables son divididas en dos clases: aquellas para las que la expresión

$$W_{,ii} = -\frac{1}{2g^{il}W_{,l}}\left(g^{hk}{}_{,i}W_{,h}W_{,k}\right) \quad (i \text{ n.s.})$$

es lineal en las $W_{,i}$, son denominadas de primera clase, y las restantes son de segunda clase. Sobre esta misma línea, trabajando con las condiciones de integrabilidad que garantizan la existencia de (**), Benenti ha demostrado que para cada variable de primera clase existe un vector de Killing asociado, y que la familia de vectores de Killing así obtenida es conmutativa. De aquí concluye que siempre puede elegirse un sistema de coordenadas en el que las variables de primera clase sean ignorables, i.e., no aparecen explícitamente en la ecuación (*).

En una serie de trabajos recientes, [6-12], Boyer, Kalnins y Miller se han dedicado al estudio del mismo problema, pero desde un punto de vista más avanzado con respecto al anterior.

Por una parte, en lugar de suponer solamente la existencia de una integral completa separada (**), se postula una forma general para las ecuaciones separadas, ordinarias, que cada sumando de (**) debe satisfacer. Por otra parte, la clasificación de coordenadas separables es, desde un principio, en ignorables y esenciales (i.e., no ignorables), y además, para considerar la posibilidad de espacios pseudoriemannianos, las coordenadas esenciales se dividen en nulas y no nulas.

La consistencia de este punto de vista con la definición clásica de separabilidad, ha sido establecida recientemente por Benenti [4].

Debe recordarse que el estudio es de naturaleza local, y que en la vecindad de un punto dado del espacio, pueden existir distintos sistemas de coordenadas separables que presenten el mismo número de coordenadas ignorables y esenciales de cada tipo. Estos sistemas están conectados entre sí por la acción de un pseudo grupo y en lo que respecta a la clasificación de sistemas separables deben ser considerados equivalentes. Esto provee de un cierto ámbito de libertad para buscar que los objetos geométricos relevantes, en particular el tensor métrico, tengan, en un esquema de separabilidad dado, la representación más sencilla posible. Como se dijo antes, cuando la dimensión del espacio es menor o igual a cuatro, la clasificación completa de estas formas canónicas ha sido ya obtenida [6,11].

El resurgimiento de los métodos de la teoría de grupos de Lie, aplicado al estudio de ecuaciones diferenciales, ha revelado la profunda relación que existe entre el problema de separación de variables para una ecuación diferencial parcial dada, y el del análisis de las simetrías que esta ecuación posee. En el presente contexto, esta relación se manifiesta en el resultado de que con cada sistema de coordenadas en el que (*) admite una solución separada, se puede asociar una familia conmutativa (involutiva), linealmente independiente (en cada fibra del haz cotangente) de tensores de Killing de primero y segundo orden, de tantos miembros como dimensiones tenga el espacio en cuestión, uno de los cuales puede siempre tomarse como el tensor métrico.

La relación inversa no es en general cierta, es decir, no toda tal familia de tensores de Killing conduce a la separación de (*) en algún sistema de coordenadas, pero la caracterización exacta de las familias que sí tienen que ver con el problema de separación se ha conseguido recientemente, por medio de condiciones que se refieren a la posibilidad de diagonalizar simultáneamente la parte esencial de los tensores de Killing de segundo orden, y la existencia de una cierta foliación ortogonal. [10,12].

Estos resultados contienen, como caso especial, los que habían ya sido obtenidos por Stäckel para el caso de coordenadas ortogonales, y se extienden al caso no ortogonal por la consideración expresa de la posibilidad de coordenadas ignorables.

Debe mencionarse en este punto, que existe una diferencia de tratamiento en el problema de separación para (*), dependiendo de si la constante E es distinta o igual a cero. Lo dicho hasta ahora es válido en el primer caso, es decir, cuando las características de (*) representan trayectorias de cuerpos. Para el caso $E = 0$, cuando las características representan rayos luminosos, la extensión es inmediata, aunque no trivial [12].

Si se considera a (*) como la ecuación de una superficie en el espacio extendido con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n, W, W_{,1}, \ldots, W_{,n})$, las simetrías de (*) son grupos uniparamétricos de Lie, actuando en este espacio, cuyos generadores son tangentes a la superficie (*), en otras palabras, que la transforman en ella misma. Esto conduce al resultado de que lo anterior permanece válido en el caso $E = 0$, siempre que se reemplaze "Tensores de Killing" con "Tensores de Killing conformes". Además, en la clasificación de coordenadas, las variables esenciales en el sentido original, cuya influencia puede ser factorizada completamente de (*), son clasificadas como conformemente ignorables, para distinguirlas de las esencialmente ignorables que no aparecen explícitamente en (*). En particular para el caso de coordenadas ortogonales estudiado por Stäckel, la condición necesaria y suficiente para poder separar la ecuación

$$(*)' \qquad g^{ij} W_{,i} W_{,j} = 0$$

Es que la métrica sea conformemente equivalente a una métrica en forma de Stäckel (3),(4).

En el siguiente capítulo se presenta una descripción más detallada del método de Boyer, Kalnins y Miller para el estudio del problema de separación de (*)", ilustrándolo en lo posible con el caso concreto aquí considerado, que es el correspondiente a un esquema de separabilidad que contiene dos variables esenciales no nulas, una ignorable estricta y una conformemente ignorable.

El siguiente caso más complejo, cuando la coordenada ignorable estricta se hace conformemente ignorable, se encuentra actualmente en estudio y los resultados serán publicados más adelante.

CAPITULO 2

El Método de Boyer, Kalnins y Miller

En este capítulo se presenta el estudio del problema de separación de variables para $(*)'$, de acuerdo al tratamiento de Boyer, Kalnins y Miller. La intención es mostrar la secuencia de resultados principales, cuyas demostraciones, como se dijo antes, pueden encontrarse en las referencias y serán por tanto omitidas. La validez de estos resultados será verificada, sin embargo, en el caso concreto del que este trabajo se ocupa.

Ya se ha hecho ver antes que por un esquema de separabilidad, en la vecindad de un punto dado del espacio, para la ecuación $(*)'$, es la clase de los sistemas de coordenadas en tal vecindad, que presentan el mismo número de variables esenciales e ignorables de cada tipo. Se denota pues un esquema de separabilidad dado con cuatro enteros: $[n_1, n_2, n_3', n_3'']$, donde $n_1+n_2+n_3 = n$, $n_3 = n_3'+n_3''$, y se conviene en que cualquier representante de clase $(x^1, \ldots, x^n)$ es tal que $(x^1, \ldots, x^{n_1})$ son coordenadas esenciales no nulas, $(x^{n_1+1}, \ldots, x^{n_1+n_2})$ son esenciales nulas, $(x^{n_1+n_2+1}, \ldots, x^{n_1+n_2+n_3'})$ son ignorables estrictas y las n_3'' restantes son conformemente ignorables.

Si se utilizan los índices $a, b, c, \ldots$ para las primeras, $r, s, t, \ldots$ para las segundas y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para las n_3 ignorables, puede verificarse directamente que los sistemas de coordenadas que pertenecen a un mismo esquema de separabilidad están conectados entre sí por el pseudogrupo de transformaciones:

$$x'^a = F_a(x^a) \qquad (a \text{ n.s.})$$

(1) $$x'^r = F_r(x^r) \qquad (r \text{ n.s})$$

$$x'^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta + H^\alpha_b(x^b) + H^\alpha_t(x^t)$$

donde F_i, H^α_i, son funciones arbitrarias de x^i, y A^α_β es una matriz constante, $n_3 \times n_3$, no singular.

DEFINICION:

Se dice que la ecuación $(*)'$ es separable en un esquema $[n_1, n_2, n_3', n_3'']$, si existe una integral completa para $(*)'$ de la forma $(**)$, tal que cada sumando en $(**)$ satisface las ecuaciones separadas ordinarias:

$$\dot{W}_a^2 + C_a^{\alpha\beta}\dot{W}_\alpha \dot{W}_\beta = \lambda_j \Theta_{aj} \quad (a \text{ n.s.})$$

$$(2) \qquad 2\, B_r^\alpha \dot{W}_r \dot{W}_\alpha + C_r^{\alpha\beta}\dot{W}_\alpha \dot{W}_\beta = \lambda_j \Theta_{rj} \quad (r \text{ n.s.})$$

$$\dot{W}_\alpha = \lambda_\alpha$$

donde $j = 2, \ldots, n_1+n_2$, $\dot{W}_i = \partial_{x^i} W$, $B_i^\alpha, C_i^{\alpha\beta}$, Θ_{ij} dependen solamente de x^i; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los parámetros esenciales e independientes de la integral completa (**), (λ_1 es el parámetro aditivo), y existen n_1+n_2 funciones $\Theta_{i1}(x^i)$ (i n.s.) tales que la matriz

$$\Theta_{ij} \qquad i,j = 1, \ldots, n_1+n_2$$

es no singular en la región considerada, i.e, es una matriz de Stäckel.

Nótese que por las propiedades que definen una integral completa, la matriz

$$\partial\lambda_K \dot{W}_i \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ K = 2, \ldots, n \end{array}$$

tiene rango $n-1$ y que el vector

$$(3) \qquad p^i = g^{ij}\dot{w}_j \qquad i,j = 1,\dots,n$$

se encuentra, en virtud de $(*)'$, en el núcleo de esta matriz. De aquí se sigue que si existe una forma bilineal simétrica tal que

$$a^{ij}\dot{w}_i\dot{w}_j = 0 \qquad i,j = 1,\dots,n$$

debe entonces existir una función $Q(x)$ distinta de cero tal que

$$(4) \qquad a^{ij}\dot{w}_i\dot{w}_j = Q\,g^{ij}\dot{w}_i\dot{w}_j \qquad i,j=1,\dots,n$$

Ahora bien, si se denota por $\bar{\Theta}_{ij}$ a la matriz inversa de Θ_{ij}, las siguientes condiciones son válidas:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \lambda_j \bar{\Theta}_{i1}\Theta_{ij} &= 0 \\ \lambda_j \bar{\Theta}_{il}\Theta_{ij} &= \lambda_l \end{aligned} \qquad j,l = 2,\dots,n_1+n_2$$

Si se sustituye (2) en (5), los miembros de la izquierda en esta expresión son formas bilineales simétricas en las $\dot{w}_i$, es decir

$$\lambda_j \bar{\Theta}_{ik} \Theta_{ij} = a^{ij}_{k} \dot{w}_i \dot{w}_j$$

entonces, por lo que se dijo antes respecto a (4), debe tenerse que

$$(6) \qquad a^{ij}_{1} \dot{w}_i \dot{w}_j = Q\, g^{ij} \dot{w}_i \dot{w}_j$$

por lo que los coeficientes no nulos del tensor métrico son:

$$g^{aa} = \frac{1}{Q} \bar{\Theta}_{a1} \quad , \quad g^{r\alpha} = \frac{1}{Q} \bar{\Theta}_{r1} B^{\alpha}_{r}$$

$$(7) \qquad g^{\alpha\beta} = \frac{2}{Q} \left[C^{\alpha\beta}_{b} \bar{\Theta}_{b1} + C^{\alpha\beta}_{t} \bar{\Theta}_{t1} \right]$$

$$g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{Q} \left[C^{\alpha\alpha}_{b} \bar{\Theta}_{b1} + C^{\alpha\alpha}_{t} \bar{\Theta}_{t1} \right]$$

con (a, r, α n.s.).

y las componentes a_{ℓ}^{ij} que no se anulan, para $\ell = 2, \ldots, n_1+n_2$ son:

$$a_{\ell}^{aa} = \bar{\Theta}_{a\ell} \quad , \quad a_{\ell}^{r\alpha} = \bar{\Theta}_{r\ell} B_r^{\alpha}$$

$$(8) \qquad a_{\ell}^{\alpha\beta} = 2C_b^{\alpha\beta}\bar{\Theta}_{b\ell} + 2C_t^{\alpha\beta}\bar{\Theta}_{t\ell} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$a_{\ell}^{\alpha\alpha} = C_b^{\alpha\alpha}\bar{\Theta}_{b\ell} + C_t^{\alpha\alpha}\bar{\Theta}_{t\ell}$$

Por (7), el tensor métrico puede escribirse como

$$(9) \qquad g^{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \delta^{ab} H_a^{-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & H_r^{-2} B_r^{\alpha} \\ \hline 0 & H_r^{-2} B_r^{\alpha} & g^{\alpha\beta} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array}$$

donde la métrica

$$(10) \qquad d\tilde{s}^2 = H_j^{\,2}\, dx^{j\,2} = \frac{Q}{\bar{\Theta}_{j1}}\, dx^{j\,2} \qquad j = 1, \dots, n_1+n_2$$

es conformemente equivalente a una métrica en la forma de Stäckel (1-4), y tiene a los $g^{\alpha\beta}$ como multiplicadores de Stäckel, es decir, las métricas

$$(11) \qquad g^{\alpha\beta}\, d\tilde{s}^2 \qquad \alpha, \beta = n_1+n_2+1, \dots, n$$

son tambien, cada una, conformemente equivalentes a métricas en forma de Stäckel.

Para estudiar el papel de las formas determinadas por (8), es conveniente trabajar en el espacio fase introduciendo, en consistencia con (3) los momentos

$$(12) \qquad p_i = \dot{w}_i \qquad i = 1, \dots, n$$

y definiendo el paréntesis de Poisson $[F, G]$ para dos funciones $F(x,p)$, $G(x,p)$ de la manera usual:

$$[F, G] = \partial_{x^i} F \, \partial_{p_i} G - \partial_{x^i} G \, \partial_{p_i} F \tag{13}$$

En este lenguaje el vector $\xi^i(x)\,\partial_{x^i}$ es un vector de Killing conforme si y solo si existe una función $\rho(x)$ tal que

$$[\xi^i p_i, \, g^{ij} p_i p_j] = \rho \, g^{ij} p_i p_j \tag{14}$$

y el tensor $a^{ij}(x)\,\partial_{x^i}\partial_{x^j}$ es un tensor de Killing conforme si y solo si existen n funciones $Q^e(x)$ tales que

$$[a^{ij} p_i p_j, \, g^{ij} p_i p_j] = (Q^e p_e) \, g^{ij} p_i p_j \tag{15}$$

Ahora bien, si se definen

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \partial_{x^\alpha} \\ A_e &= a^{ij}_e \, \partial_{x^i} \partial_{x^j} \qquad i,j = 1,\dots,n \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\;\; e = 1,\dots,n_1+n_2 \end{aligned} \tag{16}$$

donde las a^{ij}_{e} son las componentes determinadas por (6), (7) y (8), se tiene que el conjunto dado en (16) es una familia involutiva de tensores de Killing conformes, linealmente independientes en cada punto de la región considerada, i.e., se satisfacen las ecuaciones:

$$[L_\alpha, g^{ij} p_i p_j] = \rho_\alpha g^{ij} p_i p_j$$

(17) $$[A_e, g^{ij} p_i p_j] = (Q^k_e \pi_k) g^{ij} p_i p_j$$

$$[L_\alpha, L_\beta] = [L_\alpha, A_e] = [A_e, A_m] = 0$$

Excepto para las L_α y $A_1 = Q g^{ij} p_i p_j$, las relaciones (17) son tediosas de verificar en el caso general. En lugar de hacerlo, tómese el caso aquí considerado, que es el correspondiente a un esquema de separabilidad [2, 0, 1, 1] en cuatro dimensiones. Usando el pseudogrupo (1), en este caso siempre puede tenerse que $\Theta_{22} = 1$. Más aún, dado que la columna Θ_{a1} está sujeta solamente a la condición de que Θ_{ab} sea no singular, puede elegirse también $\Theta_{21} = -1$, $\Theta_{11} = 1 - \Theta_{12}$. Asimismo, no se pierde generalidad si se supone que la función $Q(x)$ es positiva, de manera que en este caso las componentes del tensor métrico pueden escribirse:

$$
\begin{aligned}
& g^{11} = g^{22} = K^2 \\
(18) \qquad & g^{34} = K^2 (h_1 + h_2) \qquad K^2 = \frac{1}{Q} \\
& g^{33} = K^2 (e_1 + e_2) \\
& g^{44} = K^2 (f_1 + f_2)
\end{aligned}
$$

con lo que las correspondientes de A_2 resultan:

$$
\begin{aligned}
& a^{11}_2 = \Theta_{11} - 1 \ , \quad a^{22}_2 = \Theta_{11} \\
& a^{34}_2 = (\Theta_{11} - 1) h_1 + \Theta_{11} h_2 \\
(19) \qquad & a^{33}_2 = (\Theta_{11} - 1) e_1 + \Theta_{11} e_2 \\
& a^{44}_2 = (\Theta_{11} - 1) f_1 + \Theta_{11} f_2
\end{aligned}
$$

donde K depende solamente de x^1, x^2, x^4, e_a, f_a, h_a solamente de x^a y Θ_{11} solamente de x^1.

Con ésto, un cálculo sencillo muestra que las ecuaciones (17) son satisfechas con:

$$
\begin{aligned}
& P_3 = 0 \quad , \quad P_4 = 2(\ln K)_{,4} \\
& Q^1_2 = 2a^{11}_2 (\ln K)_{,1} - \dot{a}^{11}_2 \\
(20) \qquad & Q^2_2 = 2a^{22}_2 (\ln K)_{,2} \\
& Q^3_2 = a^{34}_2 P_4 \\
& Q^4_2 = a^{44}_2 P_4
\end{aligned}
$$

Con cada sistema separable para $(*)'$ hay entonces asociada una familia involutiva, linealmente independiente, de $(n-1)$ tensores de Killing conformes. La relación inversa no es, en general, cierta. No toda tal familia está asociada con algún sistema de coordenadas en las que $(*)'$ es separable. Las condiciones adicionales que es necesario imponer sobre los miembros de la familia, pueden obtenerse con una mirada más cercana a las expresiones (7) y (8). Antes, una definición:

Se dice que una 1-forma $\eta_i(x)\,dx^i$ es una eigenforma, correspondiente a la raíz ρ, del tensor $b^{ij}\partial x^i \partial x^j$ si se satisface

$$(b^{ij} - \rho\, g^{ij})\,\eta_j = 0 \qquad i,j = 1,\dots,n \tag{21}$$

Con esta definición, de las expresiones (7), (8) se sigue que:

(22) Para cada una de las n_1 coordenadas esenciales no nulas, la 1-forma $dx^a = \delta^a_j dx^j$ es una eigenforma simultánea para cada A_ℓ $\ell = 1,\dots,n_1+n_2$, correspondiente a una raíz ρ^ℓ_a de multiplicidad uno.

(23) Para cada una de las n_2 coordenadas esenciales nulas, la 1-forma $dx^r = \delta^r_j dx^j$ es también una eigenforma simultánea para cada A_ℓ $\ell = 1,\dots,n_1+n_2$. Las raíces ρ^ℓ_r tienen multiplicidad dos pero correspon-

den a solo una eigenforma.

(24) Las cantidades

$$a_{\ell}^{\alpha\beta} - P_{i}^{\ell} g^{\alpha\beta} \qquad \ell, i = 1, \ldots, n_1 + n_2$$

no dependen de x^i, para todo α, β.

El establecimiento de esta última propiedad, requiere un análisis detallado de las condiciones (17) por tanto, al igual que éstas, se verificará solamente para el esquema considerado: $[2,0,1;1]$.

En este caso, por (18) y (19) se tiene:

$$P_1^1 = P_2^1 = K^{-2}$$

(25)
$$P_1^2 = K^{-2}(\Theta_{11} - 1)$$

$$P_2^2 = K^{-2}(\Theta_{11})$$

de manera que para $\ell = 1$, en virtud de (6), las condiciones (24) son trivialmente satisfechas, mientras que para $\ell = 2$ las condiciones (24), para cada elección de α y β son:

$$
\begin{aligned}
& a^{34}_{2} - \rho^{2}_{1}\, g^{34} = h_2 \\
& a^{34}_{2} - \rho^{2}_{2}\, g^{34} = -h_1 \\
(26) \qquad & a^{33}_{2} - \rho^{2}_{1}\, g^{33} = e_2 \\
& a^{33}_{2} - \rho^{2}_{2}\, g^{33} = -e_1 \\
& a^{44}_{2} - \rho^{2}_{1}\, g^{44} = f_2 \\
& a^{44}_{2} - \rho^{2}_{2}\, g^{44} = -f_1
\end{aligned}
$$

de modo que en este caso (24) es cierta.

Nótese que las propiedades (22), (23) y (24) son satisfechas también por los $n_3(n_3+1)/2$ tensores de Killing conformes $L_\alpha L_\beta$ $\alpha \leq \beta$, para los que todas las raíces propias ρ en (21) son cero. De esta manera, con cada sistema separable para $(*)'$, hay asociado un espacio vectorial K-dimensional $(K = n + n_3(n_3-1)/2)$, de tensores de Killing conformes de segundo orden. El conjunto $\{A_\ell, L_\alpha L_\beta\}$, $\ell = 1,\dots,n_1+n_2$, $\alpha \leq \beta$, es una base para este espacio.

Los tensores de este espacio tienen todos la forma general

$$(27) \qquad A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} \delta^{ab}\rho_a^A g^{aa} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho_r^A g^{r\alpha} \\ \hline 0 & \rho_r^A g^{r\alpha} & a^{\alpha\beta} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array}$$

De aquí y la condición (24), se sigue que si $\underset{\sim}{\rho}^A = \underset{\sim}{\rho}^B$ para dos elementos A, B

en el espacio, entonces $A-B$ está en el subespacio generado por los $L_\alpha L_\beta$ $\alpha \leq \beta$.

Las condiciones (22), (23), (24) sobre los tensores de Killing conformes son también suficientes para separación de $(*)'$, sin embargo, éstas condiciones son poco prácticas en el sentido de que es difícil, en un sistema de coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$, perteneciente a un esquema de separabilidad dado, las 1-formas dx^a, dx^r sean justamente las necesarias en las condiciones (22), (23), (24) para una familia específica de tensores de Killing conformes. Para enunciar de manera más práctica las condiciones necesarias y suficientes, debe hacerse antes la siguiente definición:

En un sistema de coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$, sea $\{\Theta^j = \lambda^j_i(x)\, dx^i, i=1,\ldots,n\}$, $j=1,\ldots,n$, una base (comarco) local de 1-formas. Se dice que las 1-formas $\{\Theta^j\}$ son normalizables si existen funciones analíticas (localmente) $g_j(x)$, $y^j(x)$ tales que

$$\Theta^j = g_j\, dy^j \qquad j \text{(n.s.)}$$

Con esto se tiene entonces:

TEOREMA:

Supóngase que en el espacio en cuestión, descrito localmente por las coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$, existe un espacio K-dimensional $\mathcal{a}$ de tensores de Killing de segundo orden tal que:

(i) $[A, B] = 0 \quad \forall\, A, B \in \mathcal{a}$.

(ii) Hay una base de 1-formas $\Theta^h = \lambda^h_i\, dx^i$ tal que

a) las Θ^a $1 \le a \le n_1$, son eigenformas simultáneas para cada $A \in \mathcal{a}$ correspondientes a las raíces ρ^A_a de multiplicidad uno.

b) las Θ^r $n_1 + 1 \le r \le n_1 + n_2$, son eigenformas simultáneas para cada $A \in \mathcal{a}$, correspondientes a las raíces ρ^A_r. Estas raíces tienen multiplicidad dos pero corresponden a solo una eigenforma.

(iii) Se satisface la condición:

$$\underline{X}^h \left(\lambda_i^\alpha a^{ij} \lambda_j^\beta - \rho_h^A \lambda_i^\alpha g^{ij} \lambda_j^\beta \right) = 0$$

donde $\{\underline{X}^h\}$ es el marco dual de $\{\Theta^h\}$. (h n.s.), para todo $A = a^{ij}\partial x^i \partial x^j \in \mathcal{a}$, $\alpha, \beta = n_1+n_2+1, \dots, n$, $h = 1, \dots, n$.

(iv) Existen $n_3 = n - n_1 - n_2$ vectores de Killing conformes $L_\alpha = \xi_\alpha^i \partial x^i$, tales que

$$[L_\alpha, L_\beta] = [L_\alpha, A] = 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{a}.$$

(v) $G_{ab} \equiv \lambda_i^a g^{ij} \lambda_j^b = 0 \quad 1 \leq a < b \leq n,$

$G_{ar} = G_{a\alpha} = G_{rs} = 0$, $1 \leq a \leq n_1$,

$n_1+1 \leq r, s \leq n_1+n_2$, $n_1+n_2+1 \leq \alpha \leq n$.

(vi) $K = n + n_3(n_3-1)/2.$

Entonçes existe un sistema de coordenadas locales $(y^1, \dots, y^n)$ tal que

$$\Theta^h = f^h_j(y)\, dy^j \qquad (j \text{ n.s.})$$

y la ecuación de Hamilton-Jacobi (*)' es separable en estas coordenadas. Asimismo, con todo sistema de coordenadas separable $(y^1, \dots, y^n)$ hay asociado un espacio vectorial $\mathcal{a}$ de tensores de Killing conformes de segundo orden que satisfacen las propiedades (i) - (vi).

El paso crucial en la demostración de este teorema es probar que las 1-formas Θ^h son normalizables, de manera que, en un sistema de coordenadas adecuado todo se traduce a las condiciones (22), (23) y (24). [12].

Nótese que la condición de normalizabilidad garantiza que el sistema de 1-formas Θ^h es integrable en el sentido de Frobenius. [16].

CAPITULO 3

Solución de las Ecuaciones de Einstein

El tensor métrico (2-18), se escribe como :

$$g^{ij} = K^2 \left[\begin{array}{c|c} \delta^{ab} & 0 \\ \hline 0 & G^{\alpha\beta} \end{array}\right] \qquad g_{ij} = \frac{1}{K^2}\left[\begin{array}{c|c} \delta_{ab} & 0 \\ \hline 0 & G_{\alpha\beta} \end{array}\right]$$

donde

$$G^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} e & h \\ h & f \end{bmatrix} \qquad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\psi}\begin{bmatrix} f & -h \\ -h & e \end{bmatrix}$$

(1)

$$\psi = |G^{\alpha\beta}| = ef - h^2 \qquad G^{\alpha\delta}G_{\delta\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

En la elección de comarco ortonormal, la parte ignorable se deja sin especificar, debido a que no es conveniente, en este momento, añadir condiciones sobre la métrica. Si $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, \Theta^4)$ es el comarco ortonormal, la relación entre éste y el comarco (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) es dada por las ecuaciones : (recuérdese que $a, b, c, \ldots$ toman los valores 1,2, y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ toman los valores 3,4).

$$\theta^a = \frac{1}{\kappa}\, dx^a \qquad \theta^\alpha = \frac{1}{\kappa} L^\alpha_\gamma\, dx^\gamma$$

(2)

$$dx^a = \kappa\, \theta^a, \qquad dx^\alpha = \kappa M^\alpha_\gamma\, \theta^\gamma$$

donde $L^\alpha_\gamma M^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta$.

La condición de ortonormalidad, como puede verificarse fácilmente, puede escribirse en las dos formas equivalentes siguientes:

(3) $$L^\gamma_\alpha L^{\bar\gamma}_\beta = -G_{\alpha\beta}, \qquad M^\alpha_\gamma M^\beta_{\bar\gamma} = -G^{\alpha\beta}$$

donde la notación $U^{\bar\alpha}_\beta$ significa $(-1)^\alpha U^\alpha_\beta$. De (2) se obtienen las 2-formas:

$$d\theta^a = \kappa_{,b}\, \theta^a \wedge \theta^b + \kappa_{,\gamma} M^\gamma_\upsilon\, \theta^a \wedge \theta^\upsilon$$

(4)

$$d\theta^\alpha = -\left(\kappa_{,b}\, \delta^\alpha_\upsilon + \kappa L^\alpha_\gamma M^\gamma_{\upsilon,b}\right) \theta^b \wedge \theta^\upsilon + \kappa_{,\gamma} M^\gamma_\beta\, \theta^\alpha \wedge \theta^\beta$$

poniendo ésto en la primera ecuación de estructura

$$d\theta^i + \omega^i{}_k \wedge \theta^k = 0, \quad \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$$

se obtiene que los coeficientes de conexión son:

$$\omega^{a}{}_{b} = \kappa\left(\phi_{,a}\theta^{b} - \phi_{,b}\theta^{a}\right)$$

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \kappa\Big[\tfrac{1}{2}\left(L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}{}_{\beta,c} + L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}{}_{\alpha,c}\right)\theta^{c} \mp \qquad (5)$$
$$\phi_{,\gamma}M^{\gamma}_{\beta}\,\theta^{\alpha} - \phi_{,\gamma}M^{\gamma}_{\alpha}\,\theta^{\beta}\Big]$$

$$\omega^{\alpha}{}_{a} = -\kappa\Big[\phi_{,\gamma}M^{\gamma}_{\alpha}\,\theta^{a} + \left(\phi_{,a} + L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}{}_{\alpha,a}\right)\theta^{\alpha}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}{}_{\beta,a} - L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}{}_{\alpha,a}\right)\theta^{\beta}\Big]$$

a?

donde $\phi = \ln \kappa$, $\alpha \neq \beta$ n.s. Calculando la derivada exterior de estos coeficientes se tiene que

$$d\omega^{a}{}_{b} = \kappa^{2}\left[\phi_{,cc}\,\theta^{a}\wedge\theta^{b} + \phi_{,b\gamma}M^{\gamma}_{\upsilon}\,\theta^{a}\wedge\theta^{\upsilon} - \phi_{,a\gamma}M^{\gamma}_{\upsilon}\,\theta^{b}\wedge\theta^{\upsilon}\right]$$

$$d\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \kappa^{2}\Big[\tfrac{1}{2}\left(L^{\alpha}_{\gamma,c}M^{\gamma}{}_{\beta,d} + L^{\beta}_{\gamma,c}M^{\gamma}{}_{\alpha,d}\right)\theta^{c}\wedge\theta^{d} + \qquad (6)$$
$$(-1)^{\alpha}\phi_{,\gamma\upsilon}G^{\gamma\upsilon}\,\theta^{\alpha}\wedge\theta^{\beta} + \Big(\left(\Delta\phi_{,\gamma}G^{\gamma\bar{\beta}}\right)_{,c}M^{\gamma}_{\upsilon} +$$
$$\left(\Delta\phi_{,\gamma}G^{\gamma\bar{\alpha}}\right)_{,c}M^{\beta}_{\upsilon}\Big)\,\theta^{c}\wedge\theta^{\upsilon}\Big]$$

con $\Delta = 1/\sqrt{-\psi}$

$$d\omega^{\alpha}{}_{a} = \kappa^2 \Big[(\phi_{,\gamma} M^{\gamma}_{\bar{\alpha}})_{,b}\, \theta^{a}\wedge\theta^{b} + \phi_{,a\gamma} M^{\gamma}_{\beta}\, \theta^{\alpha}\wedge\theta^{\beta}$$

(6)
$$+ \Big(\phi_{,\gamma\mu} M^{\gamma}_{\bar{\alpha}}\, \delta^{a}_{c} - \big(\phi_{,a} L^{\alpha}_{\mu} + \tfrac{1}{2} M^{\gamma}_{\bar{\alpha},a}\, G_{\gamma\mu}$$

$$+ \tfrac{1}{2} L^{\alpha}_{\mu,a} \big)_{,c} \Big) M^{\mu}_{\nu}\, \theta^{c}\wedge\theta^{\nu} \Big]$$

con $\alpha \neq \beta$, $a \neq b$ n.s.

Antes de calcular las componentes del tensor de Riemann, es conveniente definir, por su frecuente aparición, las siguientes cantidades:

$$L^{\nu}_{\gamma} M^{\gamma}_{\nu,a} = \frac{1}{2} G_{\gamma\nu} G^{\gamma\nu}{}_{,a} \equiv \frac{1}{2} \Psi_{,a}$$

(7)

$$\frac{1}{2} \left(M^{\gamma}_{\bar{\mu}}\, G_{\gamma\nu,c} \right)_{,d} M^{\nu}_{\mu} = \frac{3}{4} \Psi_{,cd} - \frac{1}{4} G_{\gamma\nu} G^{\gamma\nu}{}_{,cd} \equiv \mathcal{G}_{cd}$$

donde $\Psi = \ln|\psi|$.

Ahora, poniendo (5) y (6) en la segunda ecuación de estructura:

$$d\omega^{i}{}_{j} + \omega^{i}{}_{k} \wedge \omega^{k}{}_{j} = R^{i}{}_{jkl}\, \theta^{k}\wedge\theta^{l}$$

se obtienen las componentes del tensor de Riemann:

$$R^{a}{}_{bab} = \kappa^2\left[\Phi_{,cc} - \Phi_{,\gamma}\Phi_{,\nu}G^{\gamma\nu}\right]$$

$$R^{a}{}_{ba\alpha} = \kappa^2\Big[(\Phi_{,b\gamma}+\Phi_{,b}\Phi_{,\gamma})M^{\gamma}_{\alpha} + \tfrac{1}{2}\Phi_{,\gamma}M^{\gamma}_{\beta}\big(L^{\beta}_{\nu}M^{\nu}_{\alpha,b} - L^{\alpha}_{\nu}M^{\nu}_{\beta,b}\big) + \Phi_{,\gamma}M^{\gamma}_{\alpha}L^{\alpha}_{\nu}M^{\nu}_{\alpha,b}\Big]$$

$$R^{\alpha}{}_{a\alpha b} = \kappa^2\Big[\Phi_{,ab}+\Phi_{,a}\Phi_{,b} + \tfrac{1}{2}\big(M^{\gamma}_{\bar{\alpha}}G_{\gamma\nu,\alpha}\big)_{,b}M^{\nu}_{\alpha} + \tfrac{1}{4}\big(L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,b}+L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,b}\big)\big(L^{\beta}_{\nu}M^{\nu}_{\alpha,a} - L^{\alpha}_{\nu}M^{\nu}_{\beta,a}\big)\Big] \tag{8}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\bar{\alpha}\beta} = \kappa^2\Big[\Phi_{,\gamma\nu}G^{\gamma\nu} - \Phi_{,c}\Phi_{,c} - L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,c}L^{\beta}_{\nu}M^{\nu}_{\beta,c} - \tfrac{1}{2}\Phi_{,c}\Psi_{,c} - \tfrac{1}{4}\big(L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,c} - L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,c}\big)^2\Big]$$

$$R^{\alpha}{}_{aa\alpha} = \kappa^2\Big[\Phi_{,\gamma\nu}M^{\gamma}_{\bar{\alpha}}M^{\nu}_{\alpha} - \Phi_{,aa} + \Phi_{,c}L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,c} - \tfrac{1}{2}\big(M^{\gamma}_{\bar{\alpha}}G_{\gamma\nu,a}\big)_{,a}M^{\nu}_{\alpha} + \Phi_{,b}\Phi_{,b} - \tfrac{1}{4}\big(L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,a} + L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,a}\big)\big(L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,a} - L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,a}\big) - \Phi_{,\gamma}\Phi_{,\nu}M^{\gamma}_{\bar{\beta}}M^{\nu}_{\beta}\Big].$$

$$R^{\alpha}{}_{aa\beta} = \kappa^2\Big[(\Phi_{,\gamma\nu}+\Phi_{,\gamma}\Phi_{,\nu})M^{\gamma}_{\bar\alpha}M^{\nu}_{\beta} + \tfrac{1}{2}\Phi_{,c}\,(L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,c} - L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,c}) - \tfrac{1}{2}(M^{\gamma}_{\bar\alpha}G_{\gamma\nu,\alpha})_{,a}M^{\nu}_{\beta} - \tfrac{1}{2}(L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,a})(L^{\alpha}_{\nu}M^{\nu}_{\beta,a} + L^{\beta}_{\nu}M^{\nu}_{\alpha,a})\Big] \tag{8}$$

$$R^{a}{}_{b\bar\alpha\beta} = \frac{\kappa^2}{2}\Big[(L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,b} - L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,b})(L^{\alpha}_{\nu}M^{\nu}_{\alpha,a} - L^{\beta}_{\nu}M^{\nu}_{\beta,a}) - (L^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma}_{\beta,a} - L^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma}_{\alpha,a})(L^{\alpha}_{\nu}M^{\nu}_{\alpha,b} - L^{\beta}_{\nu}M^{\nu}_{\beta,b})\Big]$$

con $a \neq b$, $\alpha \neq \beta$, a, b, α, β n.s.

Las ecuaciones de Einstein, en el comarco orto-normal son:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_{a\alpha} = 0 && \forall a, \alpha \\ R_{aa} &= \Lambda && a \text{ n.s.} \\ R_{\alpha\beta} &= \pm\, \delta_{\alpha\beta} && \end{aligned} \tag{9}$$

con $\Lambda = \dfrac{R}{4}$, $R = R^{i}{}_{i}$, $R_{ij} = R^{k}{}_{ikj}$.

Usando (8) para el cálculo de las componentes del tensor de Ricci, R_{ij}, se obtiene lo siguiente:

$R_{ab} = 0 \quad a \neq b \implies$

(10) $2(\phi_{,ab} + \phi_{,a}\phi_{,b}) + g_{ab} = 0$

$R_{a\alpha} = 0 \quad \forall\, a, \alpha \implies$

(11) $2K_{,a\alpha} + K_{,\gamma} G^{\gamma\upsilon}{}_{,a} G_{\upsilon\alpha} = 0$

$R_{aa} = \Lambda \quad (a \text{ n.s.}) \implies$

(12)
$$K^2 \Big[(\phi_{,\gamma\upsilon} + 2\phi_{,\gamma}\phi_{,\upsilon}) G^{\gamma\upsilon} + 2(\phi_{,aa} - \phi_{,b}\phi_{,b})$$
$$- \tfrac{1}{2}\phi_{,c}\Psi_{,c} + g_{aa} + \phi_{,cc} \Big] = \Lambda \quad (b \neq a \text{ n.s.})$$

$R_{\bar\beta\beta} = -\Lambda \quad (\beta \text{ n.s.}) \implies$

(13)
$$K^2 \Big[\phi_{,\gamma\upsilon}(2M^{\gamma}_{\bar\beta} M^{\upsilon}_{\beta} - G^{\gamma\upsilon}) - 2\phi_{,\gamma}\phi_{,\upsilon} M^{\gamma}_{\bar\alpha} M^{\upsilon}_{\alpha}$$
$$+ 2\phi_{,c}\phi_{,c} + \tfrac{1}{2}\phi_{,c}\Psi_{,c} - \phi_{,cc} - \tfrac{1}{2}(M^{\gamma}_{\bar\beta} G_{\gamma\upsilon,c})_{,c} M^{\upsilon}_{\beta}$$
$$+ 2\phi_{,c} L^{\beta}_{\gamma} M^{\gamma}_{\beta,c} + L^{\alpha}_{\gamma} M^{\gamma}_{\alpha,c} L^{\beta}_{\upsilon} M^{\upsilon}_{\beta,c}$$
$$- \tfrac{1}{2} L^{\alpha}_{\gamma} M^{\gamma}_{\beta,c} L^{\beta}_{\upsilon} M^{\upsilon}_{\alpha,c} + \tfrac{1}{2} L^{\beta}_{\gamma} M^{\gamma}_{\alpha,c} L^{\beta}_{\upsilon} M^{\upsilon}_{\alpha,c} \Big] = -\Lambda$$
$$(\beta \neq \alpha \text{ n.s.})$$

$R_{\alpha\beta} = 0 \ , \ \alpha \neq \beta \ \Rightarrow$

$$2(\Phi_{,\gamma\nu} + \Phi_{,\gamma}\Phi_{,\nu}) M^{\gamma}_{\alpha} M^{\nu}_{\beta} + \Phi_{,c}\left(L^{\bar{\alpha}}_{\gamma} M^{\gamma}_{\beta,c} - L^{\beta}_{\gamma} M^{\gamma}_{\bar{\alpha},c}\right)$$

$$(14) \quad -\frac{1}{2}\left(M^{\gamma}_{\alpha} G_{\gamma\nu,c}\right)_{,c} M^{\nu}_{\beta} + \frac{1}{2}\left(L^{\bar{\beta}}_{\gamma} M^{\gamma}_{\beta,c}\right)\left(L^{\alpha}_{\nu} M^{\nu}_{\beta,c}\right.$$

$$\left. + L^{\beta}_{\nu} M^{\nu}_{\alpha,c}\right) = 0$$

Para la solución del sistema [(10)-(14)], es útil anotar las siguientes combinaciones:

$R_{cc} = 2\Lambda \ \Rightarrow$

$$(15) \quad K^2\left[2(\Phi_{,\gamma\nu} - 2\Phi_{,\gamma}\Phi_{,\nu}) G^{\gamma\nu} + 4\Phi_{,cc} - 2\Phi_{,c}\Phi_{,c} - \Phi_{,c}\Psi_{,c} + g_{cc}\right] = 2\Lambda$$

$R_{aa} - R_{bb} = 0 \quad (a \neq b) \ \Rightarrow$

$$(16) \quad 2(\Phi_{,aa} + \Phi_{,a}\Phi_{,a}) + g_{aa} = 2(\Phi_{,bb} + \Phi_{,b}\Phi_{,b}) + g_{bb}$$

$R_{\bar{\mu}\mu} + R_{cc} = 0 \ \Rightarrow$

$$(17) \quad -2(\Phi_{,\gamma\nu} + \Phi_{,\gamma}\Phi_{,\nu}) G^{\gamma\nu} + 2(\Phi_{,cc} + \Phi_{,c}\Phi_{,c}) + \Phi_{,c}\Psi_{,c} - \frac{1}{4}\left(2\Psi_{,cc} - \Psi_{,c}\Psi_{,c}\right) + g_{cc} = 0$$

$R_{\bar\mu\mu} = -2\Lambda \implies$

$$K^2\left[2\left(-2\phi_{,\gamma\nu}+\phi_{,\gamma}\phi_{,\nu}\right)G^{\gamma\nu}-\frac{1}{4}\left(2\Psi_{,cc}-\Psi_{,c}\Psi_{,c}\right)+2\phi_{,c}\Psi_{,c}-2\left(\phi_{,cc}-2\phi_{,c}\phi_{,c}\right)\right]=-2\Lambda. \tag{18}$$

Por (13) y la condición $R_{\bar\alpha\alpha}-R_{\bar\beta\beta}=0$ $(\alpha\neq\beta)$, se tiene:

$$R_{\bar\beta\beta}=K^2\left[\left(-2\phi_{,\gamma\nu}+\phi_{,\gamma}\phi_{,\nu}\right)G^{\gamma\nu}+\phi_{,c}\Psi_{,c}+2\phi_{,c}\phi_{,c}-\phi_{,cc}-\frac{1}{8}\left(2\Psi_{,cc}-\Psi_{,c}\Psi_{,c}\right)\right]=-\Lambda. \tag{19}$$

Finalmente, $R_{cc}+R_{\bar\beta\beta}=\Lambda$ (β n.s.) $\implies$

$$K^2\left[-3\phi_{,\gamma}\phi_{,\nu}G^{\gamma\nu}+3\phi_{,cc}-\frac{1}{8}\left(2\Psi_{,cc}-\Psi_{,c}\Psi_{,c}\right)+g_{cc}\right]=\Lambda. \tag{20}$$

En este punto deben hacerse dos observaciones: primeramente, que la dependencia explícita del comarco ortonormal sólo se encuentra en las condiciones $R_{\alpha\beta}=0$, $R_{\bar\alpha\alpha}=R_{\bar\beta\beta}$ ($\alpha\neq\beta$ n.s.). En segundo lugar, que las ecuaciones [(10) - (20)] son válidas también cuando x^3 es conformemente ignorable, i.e., $K=K(x^1,x^2,x^3,x^4)$, y pueden por tanto ser usadas como punto de partida en el estudio de este caso más general.

En el proceso de solución del sistema [(10)-(20)], es necesario, en varios puntos, distinguir entre diversos casos. Para mayor claridad, cada uno de estos casos se etiqueta con una secuencia de letras y números: A, B, A1, A2, A1A, A1B, etc.

De la ecuación (11), con $\alpha = 3$ se sigue:

$$\frac{1}{\psi}\left(h_{,a}' f \pm f_{,a}' h\right) = 0$$

y se tienen dos casos:

CASO A: $hf \neq 0$ CASO B: $hf = 0$

CASO A:

(21) $$f = C_1 h \quad , \quad C_1 = \text{cte.} \neq 0.$$

con ésto, y poniendo $\alpha = 4$ en (11) se tiene:

(22) $$2 K_{,a4} = - K_{,4} \frac{h_{,a}'}{h}$$

por tanto:

(23) $$K = U(x^4) h^{-1/2} + P(x^1, x^2)$$

con $U' \neq 0$ y P no es proporcional a $h^{-1/2}$ a menos que $P \equiv 0$.

Sustituyendo lo anterior en (10), se tiene:

$$\frac{3}{4} U \frac{h_1' h_2'}{h^{5/2}} + P_{,12} = -\frac{3}{8}\left(U h^{-1/2} + P\right) \Psi_{,12}$$

y dado que $U' \neq 0$ se sigue:

$$(24) \qquad \Psi_{,12} = -2 \frac{h_1' h_2'}{h^2} = 2 \left(\frac{h_1'}{h}\right)_{,2}$$

$$(25) \qquad P_{,12} + \frac{3}{8} P \, \Psi_{,12} = 0$$

Nuevamente, se consideran dos casos:

CASO A1: $h_1' h_2' \neq 0$ CASO A2: $h_1' h_2' = 0$

CASO A1:

Recordando que $\Psi = \ln|\psi|$, al integrar (24) se obtiene:

$$(26) \qquad \psi = Q_1(x^1) Q_2(x^2) h^2 \quad , \quad Q_1 Q_2 \neq 0$$

Dado que $\psi = ef - h^2$, de (21) se sigue:

$$(27) \qquad e = \frac{h}{c_1}\left(1 + Q_1 Q_2\right)$$

operando en esta ecuación con ∂x^1 o ∂x^2 se tiene:

$$(28) \qquad q_1' q_2' h + q_1' h_2' + q_2' h_1' = 0$$

donde $q_a = \ln Q_a$.

Se separan dos casos:

CASO A1A: ${q_1'}^2 + {q_2'}^2 \neq 0$, CASO A1B: ${q_1'}^2 + {q_2'}^2 = 0$

<u>CASO A1A:</u>

Al integrar (28), despreciando en h constantes aditivas no esenciales se obtiene:

$$Q_1 Q_2 = \frac{C_2}{h_1 h_2} \quad , \quad C_2 = \text{cte}.$$

por tanto:

$$(29) \qquad \psi = \frac{C_2 h^2}{h_1 h_2} \quad , \quad e = \frac{h}{c_1}\left(1 + \frac{C_2}{h_1 h_2}\right)$$

y de la segunda ecuación en (7) puede calcularse directamente:

$$G_{aa} = -2h^{1/2}(h^{-1/2})_{,aa} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_a''}{h_a} - \frac{1}{2}\frac{h_a'^2}{h_a^2} - \frac{h_a'^2}{h h_a}\right) \tag{30}$$

(a n.s.)

Poniendo ésto en (16) y usando la condición $\mathcal{V}' \neq 0$ se obtienen las ecuaciones:

$$P_{,11} + \frac{P}{2} G_{11} = P_{,22} + \frac{P}{2} G_{22} \tag{31}$$

$$h(t_2 - t_1) = \frac{h_2'^2}{h_2} - \frac{h_1'^2}{h_1} \tag{32}$$

donde en (32) se ha definido:

$$t_a = \frac{h_a''}{h_a} - \frac{1}{2}\frac{h_a'^2}{h_a^2} \qquad \text{(a n.s.)}$$

Aplicando ∂x^1 o ∂x^2 en (32) se sigue:

$$\frac{t_1'}{h_1'} = \frac{t_2'}{h_2'} = \lambda \qquad \lambda = \text{cte.}$$

$$\therefore \quad t_a = \lambda h_a + \alpha_a \qquad \alpha_a = \text{cte.} \qquad a = 1,2.$$

Sustituyendo en (32) se tiene la siguiente ecuación para h_a:

(33) $$h_a'^2 = \lambda h_a^3 + \gamma_a h_a^2 + \beta h_a$$

con λ, γ_a, β constantes, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, (a.n.s.)

La útil ecuación siguiente se deriva inmediatamente de (33):

(34) $$\sum_{c=1}^{2} \left(\frac{h_c''}{h^2} - \frac{h_c'^2}{h^3} \right) = \frac{\lambda}{2}$$

Puede ahora verificarse de manera directa, aunque tediosa, que de (33) y (34) se sigue:

(35) $$\frac{1}{2} \Psi_{,cc} - \frac{1}{4} G_{\gamma\nu} G^{\gamma\nu}{}_{,cc} + \frac{1}{8} \Psi_{,c} \Psi_{,c} = 0$$

y que por tanto la ecuación (20) es:

(36) $$C_1 K_{,4}^2 h - K K_{,cc} + K_{,c} K_{,c} = -\frac{\Lambda}{3}$$

Sustituyendo la expresión (23) para la función K y operando dos veces en el resultado con $\frac{1}{U'} \partial_{x^4}$, se encuentra que U debe satisfacer:

(37) $$U'' = -\frac{\lambda}{4C_1} U + \eta \qquad \eta = \text{cte.}$$

ó la ecuación equivalente:

(38) $$U'^2 = -\frac{\lambda}{4C_1}U^2 + 2\eta U + \delta \qquad , \qquad \delta = \text{cte}.$$

y regresando ésto a (36), se obtienen las ecuaciones:

(39) $$-2\eta C_1 + h^{-1/2}P_{,cc} + P(h^{-1/2})_{,cc} - 2(h^{-1/2})_{,c}P_{,c} = 0$$

(40) $$P P_{,cc} - P_{,c}P_{,c} = \delta C_1 + \frac{\Lambda}{3}$$

Usando nuevamente (33), (34), la ecuación (17) se escribe:

(41) $$-2C_1 K K_{,44} h + 2KK_{,cc} + KK_{,c}\Psi_{,c} + \frac{K^2}{2}\left(\frac{h_c'^2}{h^2} - \frac{h_c'^2}{h h_c}\right) = 0$$

Al sustituir aquí (23), (37) y (38), el resultado puede tratarse como una ecuación polinomial para U, y se sigue que (41) es entonces equivalente a las ecuaciones:

(42) $$2\eta C_1 + \frac{\lambda}{2}Ph^{1/2} - \frac{P_{,c}h_c'}{h^{1/2}h_c} - \frac{P}{2}\frac{h_c'^2}{h^{3/2}h_c} = 0$$

(43) $$-4\eta C_1 - \frac{\lambda}{2}Ph^{1/2} + 2P_{,cc}h^{-1/2} + 2\frac{P_{,c}h_c'}{h^{3/2}} + \frac{P}{2}\frac{h_c'^2}{h^{5/2}} = 0$$

Tratando ésto como polinomio en U se tiene que el coeficiente de U^2 es

$$\frac{h_{,cc}}{h^2} - \frac{h_{,c}^2}{h^3} - \frac{\lambda}{2} \equiv 0$$

en virtud de (34). El coeficiente de U es:

$$P(h^{-1/2})_{,cc} + h^{-1/2} P_{,cc} - 2(h^{-1/2})_{,c} P_{,c} - 2\eta c_1 \equiv 0$$

en virtud de (39). Finalmente el coeficiente de U^0 es:

$$P P_{,cc} - P_{,c} P_{,c} - \delta c_1 = \frac{\Lambda}{3}$$

por la condición (40). Una larga serie de cálculos semejantes, arroja el resultado de que las únicas componentes del tensor de Riemann que no se anulan son:

$$R^4{}_{343} = \frac{\Lambda}{3}$$

$$(45) \qquad R^1{}_{212} = \frac{\Lambda}{3}$$

$$R^\alpha{}_{a\alpha a} = \frac{\Lambda}{3} \qquad \alpha = 3,4 \,,\; a = 1,2 .$$

y naturalmente, las que se obtienen de éstas por las condiciones de simetría de $R^i{}_{jkl}$.

//

$$(49) \qquad \frac{1}{3}\sum_c \left(\frac{h_c''}{h^2} - \frac{h_c'^2}{h^3} \right) = \lambda \quad , \qquad \lambda = \text{cte}$$

$$(50) \qquad U'^2 = -\frac{\lambda}{C_1} U^2 + 2\eta U + \delta \qquad \eta, \delta, \text{ ctes.}$$

Sustituyendo en (48) se tienen:

$$(51) \qquad -2\eta C_1 + h^{-1/2} P_{,cc} + P (h^{-1/2})_{,cc} - 2 (h^{-1/2})_{,c} P_{,c} = -\lambda P h^{1/2}$$

$$(52) \qquad \delta C_1 - P P_{,cc} + P_{,c}^2 = -\frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{2} P^2 h$$

Usando (50), la ecuación (17) es polinomial en U. La anulación del coeficiente de U^2 implica $\lambda = 0$, y la anulación de los coeficientes de U y U^0 implica:

$$-\eta C_1 + h^{-1/2} P_{,cc} + P (h^{-1/2})_{,cc} - 2 (h^{-1/2})_{,c} P_{,c} = 0$$

$$2 P P_{,cc} + 2 P P_{,c} \frac{h_c'}{h} + \frac{P^2}{2} \frac{h_c'^2}{h^2} = 0$$

De la primera de estas ecuaciones y (51), se sigue que $\eta = 0$. En el comarco ortonormal definido por (44) puede verificarse que el resto de las ecuaciones [(10)-(20)] no añaden nuevas condiciones.

De aquí puede verse ya, fácilmente, que el caso A1B se obtiene del caso A1A haciendo $\lambda = \eta = 0$.

CASO A2: ($h_1' h_2' = 0$ · ver pag.)

No puede tenerse que $h_1'^2 + h_2'^2 = 0$, ya que si esto sucediera, entonces

$$\psi = C_1 e + C_0^2 \quad , \quad C_0, C_1 \quad \text{ctes.}$$

$$K = U(x^4) + P(x^1, x^2).$$

La ecuación (10) sería entonces

$$P_{,12} = -\frac{3}{8}(U + P)\, \Psi_{,12}$$

y como $U' \neq 0$, debería tenerse

$$\Psi_{,12} = -\frac{\psi_{,1}\psi_{,2}}{\psi^2} = 0$$

es decir

$$e_1' e_2' = 0$$

por tanto al menos una de las variables x^1, x^2, sería conformemente ignorable. Por tanto $h_1'^2 + h_2'^2 \neq 0$.

Eligiendo $h_1' \neq 0$, $h_2' = 0$, es decir $h = h_1$, de (25), (24) y (23) se sigue que:

$$(53) \qquad \Psi_{,12} = P_{,12} = K_{,12} = 0\,,$$

por tanto K es de la forma:

$$(54) \qquad K = U h^{-1/2} + P_1(x^1) + P_2(x^2)$$

donde $P_1 \neq \alpha h^{-1/2} + \beta$, con α, β constantes, a menos que $\alpha = \beta = 0$.

Por otro lado, de (53), (21) y la definición de ψ se tiene que:

$$(55) \qquad \begin{aligned} \psi &= c_1 e_2 h \\ e &= \frac{h}{c_1} + e_2 \end{aligned} \qquad e_2' \neq 0$$

y de aquí se calculan inmediatamente

$$(56) \qquad \begin{aligned} G_{11} &= -h^{1/2}\left(h^{-1/2}\right)_{,11} \\ G_{22} &= -e_2^{1/2}\left(e_2^{-1/2}\right)_{,22} \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (16), usando $U' \neq 0$, da las condiciones:

$$g_{22} = -g_{11} = \frac{\alpha}{4} \quad , \quad \alpha = \text{cte.}$$

(57)

$$P_1'' - \frac{\alpha}{4} P_1 = P_2'' + \frac{\alpha}{4} P_2 = C_2 \;, \quad C_2 = \text{cte.}$$

puede entonces verificarse fácilmente que

$$g_{cc} = 2\Psi_{,cc} - \Psi_{,c}\Psi_{,c} = 0$$

por lo que la ecuación (20) es :

(58) $$-K_{,4}^{2} C_1 + K K_{,cc} + K_{,c} K_{,c} = \frac{\Lambda}{3} .$$

Operando dos veces con $\frac{1}{U'}\partial x^4$ se obtienen

$$\frac{h''}{h^2} - \frac{h'^2}{h^3} = \frac{\lambda}{2} \quad , \quad \lambda = \text{cte.}$$

(59)

$$U'^2 = -\frac{\lambda}{4C_1} U^2 + 2\eta U + \delta \quad , \quad \eta, \delta, \text{ ctes.}$$

De la primera de éstas, (56) y (57) se sigue :

(60) $$h'^2 = \lambda h^3 + \alpha h^2$$

Regresando a (58) se obtienen las ecuaciones:

$$(61)\quad \begin{aligned} &-2\eta c_1 + 2c_2 h^{-1/2} + \frac{\alpha}{4} P h^{-1/2} - 2P_1'(h^{-1/2})' = 0 \\ &-\delta c_1 + 2c_2 P - P_1'^2 - P_2'^2 = \frac{\Lambda}{3} \end{aligned}$$

con $P = P_1 + P_2$.

Por (59), la ecuación (20) es polinomial en U. Usando (60), la anulación del coeficiente de U^2 implica:

$$(62)\qquad e_2'^2 = -\alpha e_2^2$$

A su vez, la anulación del coeficiente de U se traduce en las condiciones:

$$(63)\quad \begin{aligned} &P_2 = 0 \\ &2\eta c_1 h^{1/2} - P_1' h'/h - P_1\left(\frac{\lambda h}{2} + \alpha\right) = 0 \end{aligned}$$

y finalmente, la anulación del coeficiente de U^0, usando (57), implica:

$$P_1 = 0$$

por tanto, de (63) y (61) se sigue que

$$\eta = 0 \quad , \quad \delta = -\frac{\Lambda}{3c_1} \,, \; c_2 = 0$$

El resto de las ecuaciones [(10)-(20)], en el comarco ortonormal especificado por (44), no añaden más condiciones. Nuevamente, tratando las componentes del tensor de Riemann (8) como polinomios en U, se encuentra que las únicas que no se anulan son las ya escritas en (45).

CASO B: ($hf = 0$ ver pág.)

No puede tenerse $h = f = 0$, porque la métrica sería degenerada, por tanto consideramos dos casos:

CASO B1 : $h = 0, f \neq 0$, CASO B2 : $h \neq 0, f = 0$

CASO B1:

La ecuación (11), con $\alpha = 3$ es identidad y con $\alpha = 4$ conduce a

$$K = U(x^4) f^{-1/2} + P(x^1, x^2)$$

con $P \neq \alpha f^{-1/2}$, $\alpha = \text{cte.}$, a menos que $\alpha = 0$.

De la ecuación (10), con $U' \neq 0$ y $\Psi = ef$ se obtienen.

$$P_{,12} - \frac{3}{4} P \frac{f_1' f_2'}{f^2} = 0$$

El resto de las ecuaciones [(10)-(20)], en el comarco ortonormal especificado por (44), no conduce a condiciones independientes adicionales. Nuevamente, tratando a las componentes del tensor de Riemann (8), como polinomios en U, se encuentra que las únicas que no se anulan son las ya escritas en (45).

<u>CASO B</u>: ($hf = 0$ ver pág.).

No puede tenerse $h = f = 0$, porque la métrica sería degenerada, y se consideran por tanto dos casos:

CASO B1 : $h = 0, f \neq 0$, CASO B2 : $h \neq 0, f = 0$.

<u>CASO B1</u> :

Si $f_1' f_2' \neq 0$, este caso se obtiene del A1 haciendo

$$\begin{aligned} h &\to f \\ C_1 &\to 1 \end{aligned}$$

Si $f_1' f_2' = 0$ entonces, eligiendo $f_1' \neq 0, f_2 = 0$, i.e. $f = f_1$, debe tenerse $e_2' \neq 0, e_1 = 0$, i.e., $e = e_2$, y este caso se obtiene del A2 haciendo

$$\begin{aligned} h &\to f \\ e_2 &\to e \\ C_1 &\to 1 \end{aligned}$$

En ambas situaciones del caso B1, el comarco ortonormal es dado por:

$$M^3_4 = M^4_3 = 0 \ , \ M^3_3 = \sqrt{e} \ , \ M^4_4 = \sqrt{-f}$$

$$L^3_4 = L^4_3 = 0 \ , \ L^4_4 = \frac{1}{\sqrt{-f}} \ , \ L^3_3 = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

<u>CASO B2</u>: ($h \neq 0$, $f = 0$ ver pag.).

De (11), (10) y (16) se siguen las condiciones:

$$K = U(x^4)\, h^{-1/2} + P(x^1, x^2)$$

Con $P \neq \alpha h^{-1/2}$, $\alpha = \text{cte.}$, a menos que $\alpha = 0$.

$$P_{,12} - \frac{3}{4} P \frac{h_1 h_2}{h^2} = 0$$

$$P_{,11} - P_{,22} + \frac{P}{2} (g_{11} - g_{22}) = 0$$

Con $g_{aa} = -2 h^{1/2} (h^{-1/2})_{,aa}$ (a n.s.)

Dado que aquí se tiene que $G^{44} = f = 0$, las ecuaciones (17) y (20) son polinomiales en U, y de ellas se obtienen inmediatamente:

$$\sum_c \left(\frac{h_c''}{h^2} - \frac{h_c'^2}{h^3} \right) = 0$$

$$P(h^{-1/2})_{,cc} + h^{-1/2} P_{,cc} - 2 P_{,c}(h^{-1/2})_{,c} = 0$$

$$P_{,cc} + P_{,c} \frac{h_c'}{h} + \frac{P}{4} \frac{h_c'^2}{h^2} = 0$$

$$P P_{,cc} - P_{,c}^2 = \frac{\lambda}{3}$$

Si se escribe

$$P = W(x^1, x^2) h^{-1/2} \quad , \quad W \neq cte.$$

puede demostrarse fácilmente que las seis ecuaciones anteriores son consecuencia de las condiciones de integrabilidad del sistema

$$(64) \qquad \begin{aligned} W_{,1}^2 + W_{,2}^2 + \frac{\lambda}{3} h &= 0 \\ W_{,11} + W_{,22} &= 0 \end{aligned}$$

con $W_{,1} W_{,2} \neq 0$.

En la elección del comarco ortonormal, deben distinguirse dos casos:

CASO B2A: $e \neq 0$, CASO B2B: $e = 0$.

CASO B2A:

Se selecciona el comarco especificado por:

(65)
$$M^3_4 = 0\,,\ M^3_3 = \sqrt{e}\,,\ M^4_3 = M^4_4 = \frac{h}{\sqrt{e}}$$
$$L^3_4 = 0\,,\ L^4_4 = \frac{\sqrt{e}}{h}\,,\ L^3_3 = -L^4_3 = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

La ecuación (14) es entonces:

$$2KK_{,44}\frac{h^2}{e} + KK_{,c}\left(\frac{h_c'}{h} - \frac{e_c'}{e}\right) + \frac{K^2}{2}\left(\frac{e_{,cc}}{e}\right.$$
$$\left. + 2\frac{h_c'^2}{h^2} - 3\frac{e_c' h_c'}{e h}\right) = 0$$

Operando en ésta con $\frac{1}{U'}\partial x^4$ se obtiene

(66)
$$U'' = \eta U + \delta$$

con η, δ, constantes. Regresando a ( ) se siguen:

$$(67) \qquad 2\eta h + \frac{1}{2} v_{,cc} = 0$$

$$(68) \qquad 2\delta h - w_{,c} v_{,c} + \frac{1}{2} w v_{,cc} = 0$$

donde se ha definido $v = \frac{e}{h}$. La condición $e_{,12} = 0$ implica:

$$(69) \qquad h_1' v_{,2} + h_2' v_{,1} + h v_{,21} = 0$$

Las ecuaciones (64), (67), (68) y (69) implican

$$v = \alpha (h_1 - h_2)$$

$$\alpha = \text{cte.}$$

$$e = \alpha (h_1^2 - h_2^2)$$

y el resto de las ecuaciones [(10)-(20)], no añaden condiciones independientes. De nuevacuenta, por (66), las componentes del tensor de Riemann son polinomios en v y usando [(65)-(69)] se encuentra que las únicas que no se anulan son las dadas en (45).

<u>CASO (B2B:</u> (e = 0 ver pág.).

Aquí el comarco es especificado por :

$$M^3{}_3 = M^4{}_3 = M^4{}_4 = -M^3{}_4 = \sqrt{\frac{h}{2}}$$

$$L^4{}_4 = L^3{}_4 = L^3{}_3 = -L^4{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

Este caso se obtiene de B2B haciendo

$$e = v = 0 .$$

Se tiene entonces que en todos los casos las únicas componentes no nulas del tensor de Riemann son

$$R^4{}_{343} = \frac{\Lambda}{3}$$

$$R^1{}_{212} = \frac{\Lambda}{3}$$

$$R^a{}_{a\alpha a} = \frac{\Lambda}{3}$$

Usando esto en la expresión para el tensor conforme de Weyl:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + g_{a[b}R_{c]d} + \frac{1}{3} R\, g_{a[c}g_{d]b}$$

puede verse facilmente que todas las componentes C_{abcd} son cero. Esto y las condiciones (9) caracterizan por completo, localmente, el espacio:

Si $\Lambda = 0$ se tiene el espacio plano de Minkowski. Si $\Lambda > 0$ el espacio es de De Sitter y si $\Lambda < 0$ el espacio es anti De Sitter. [15]

BIBLIOGRAFIA

[1]: B. Carter, Phys. Rev. 174, 1559 (1968)
Comm. Math. Phys. 10 230 (1968)

[2]: S. Benenti, M. Francaviglia. "The theory of separability of the Hamilton-Jacobi equation and its applications to General Relativity". Próximo a aparecer en Einstein Memorial Volume, A. Held Ed.

[3]: P. Havas, Journ. Math. Phys. 16, 1461 (1975)
Journ. Math. Phys. 16, 2476 (1975)

[4]: S. Benenti. "Separability structures on riemannian manifolds". Próximo a aparecer.

[5]: L. P. Eisenhart, Ann. Math. 25, 284 (1934).
Riemannian Geometry, Princeton (1966).

[6]: Boyer C. P., Kalnins E. G., Miller W. Jr.
Trans. Amer. Math. Soc. 242, 355 (1978)

[7]: E. G. Kalnins, W. Miller Jr. Journ. Math. Phys.

[8]: E. G. Kalnins, W. Miller Jr. Trans. Amer. Math. Soc.

[9]: E.G. Kalnins, W. Miller Jr. "Killing tensors and variable separation for Hamilton-Jacobi and Helmoltz equations". Próximo a aparecer.

[10]: E.G. Kalnins, W. Miller Jr. "Killing tensors and nonorthogonal variable separation for Hamilton-Jacobi Equations". Próximo a aparecer.

[11]: C.P. Boyer, E.G. Kalnins, W. Miller Jr. Comm. Math. Phys. 59, 285, (1978).

[12]: E.G. Kalnins, W. Miller Jr. "Conformal Killing tensors and variable separation for Hamilton-Jacobi equations". Próximo a aparecer.

[13]: W. Miller Jr. "Symmetry and separation of variables". Addison-Wesley, Reading Mass. (1977)

[14]: L.P. Eisenhart. "Continuous groups of transformations". Dover, (1961).

[15]: S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. "The large scale structure of space-time". Cambridge (1977).

[16]: M. Spivak. "A comprehensive introduction to differential geometry". Publish or Perish (1979)

[17]: J. Ehlers, W. Kundt. "Exact solutions of the gravitational field equations".

[18]: R. Courant, D. Hilbert. "Methods of mathematical physics". V. II. Interscience (1962).