00362

Reg. 3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA FIGURA ESPECTRAL DEL PRODUCTO TENSORIAL DE DOS OPERADORES

T E S I S

Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
Presenta
Elena de Oteyza de Oteyza

México D.F. 1980

INDICE

INTRODUCCION i

CAPITULO I: Producto tensorial. 1

CAPITULO II: Resultados sobre operadores. 10

CAPITULO III: Algunas relaciones entre los espectros de dos operadores. 31

CAPITULO IV: El espectro esencial del producto tensorial de dos operadores. 36

CAPITULO V: Los espectros esenciales izquierdo y derecho del producto tensorial de dos operadores. 51

CAPITULO VI: La figura espectral del producto tensorial de dos operadores. 67

BIBLIOGRAFIA 92

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre los complejos, separables y de dimensión infinita. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denotará a los operadores lineales acotados en $\mathcal{H}$. Carl Pearcy en 1977 introdujo el concepto de la figura espectral de un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Este concepto fué estudiado posteriormente por varios matemáticos y es su relación con el problema clásico de subespacios invariantes planteado hace unos cincuenta años, lo que lo convierte en un concepto importante. Uno de los resultados mas trascendentes sobre la figura espectral es el de Brown, Douglas y Fillmore que se puede enunciar de la siguiente manera:

"Dos operadores esencialmente normales en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ son debilmente equivalentes si y solo si tienen la misma figura espectral".

Otro resultado que no podemos dejar de lado por su gran importancia es el de los matemáticos rumanos C. Apostol, C. Foias y D. Voiculescu que caracteriza a los operadores quasitriangulares:

"Un operador en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es quasitriangular si y solo si su figura espectral no contiene números negativos".

En el artículo de C. Bosch, C. Hernández, E. de Oteyza y C. Pearcy se calcula la figura espectral de f(T) donde T es un operador en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y f es una función analítica en un -

abierto que contiene al espectro de T. Este es el primer artículo de una serie que los autores junto con Angel Carrillo han planeado realizar para caracterizar la figura espectral de operadores construidos a partir de otros.

En este trabajo nos avocamos al estudio de la figura espectral del producto tensorial de dos operadores. Los resultados existentes en este sentido son pocos, dispersos y algunos confusos, sin embargo T. Ichinose en 1978 publicó en su artículo "Spectral properties of tensor products of linear operators I" una fórmula similar a la que aparece en el teorema 4.9 del capítulo IV de esta tesis. Su demostración es confusa y poco convincente. La prueba de esa fórmula se hace aquí de manera diferente y desde nuestro punto de vista la demostración aunque un poco extensa en clara.

Recientemente en el Abstracts of papers presented to the A.M.S. de octubre de 1980 (Vol. 1, No. 6, P. 575) aparece un resumen de resultados obtenidos por L.A. Fialkow, que se intitula "The essential spectrum of a tensor product of operators". En ese resumen anuncia un teorema similar a los teoremas 5.11 y 5.12. Pero se deduce de esas quince líneas que él utiliza técnicas distintas a las que nosotros utilizamos en esta tesis. Parece ser que los resultados del capítulo V no son conocidos y que las técnicas utilizadas para probar resultados similares a los de Ichinose y Fialkow son diferentes.

En los capítulos I y II se encuentran los prerrequisitos para este trabajo en el que también suponemos un conocimiento más o menos amplio de las bases y teoremas fundamentales del análisis funcional.

Quiero agradecer a Carlos Bosch Giral por la dirección de esta tesis, a Angel Carrillo Hoyo y Carlos Hernández Garciadiego por sus consejos y el apoyo que me brindaron en la elaboración de esta tesis, así como a la Srita. Lucina Parra Aguilar por su trabajo mecanográfico.

CAPITULO I

Definición 1.1 Dados $\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_n$ espacios de Hilbert, denotamos por Hom $(\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_n)$ las funciones $\ell:\mathcal{H}_1\times\dots\times\mathcal{H}_n\to\mathbb{C}$ que son multilineales conjugadas

Dados $x_i\in\mathcal{H}_i$, $x_1\otimes\dots\otimes x_n$ denota la función multilineal conjugada

$$(x_1\otimes\dots\otimes x_n)(y_1,\dots,y_n)=\prod_{i=1}^{n}<x_i,y_i>_i$$

Ejemplo 1.2 Sean $x_1\otimes x_2:\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2\to\mathbb{C}$ entonces

$$(x_1\otimes x_2)(y_1,y_2)=<x_1,y_1><x_2,y_2>$$

Definición 1.3 Sea $\mathrm{Hom}_f(\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_n)$ la variedad lineal generada por $x_1\otimes\dots\otimes x_n$ en $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_n)$. Se puede definir un único producto interior

$$<\ell,x_1\otimes\dots\otimes x_n>=\ell(x_1,\dots,x_n)\quad .$$

Ejemplo 1.4 Sea $\ell\in\mathrm{Hom}_f(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ dada por $\ell=y_1\otimes y_2$ entonces

$$<y_1\otimes y_2,x_1\otimes x_2>=(y_1\otimes y_2)(x_1,x_2)=<y_1,x_1><y_2,x_2>$$

Definición 1.5 Usando la definición del producto interior se puede completar Hom_f y obtener un subconjunto de $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_n)$ denotado por

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n = \overline{\mathrm{Hom}_f(\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)}^{\|\ \|}$ y es un espacio de Hilbert

Ejemplo 1.6 En $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es claro que

1) $x \otimes 0 = 0 = 0 \otimes x$

2) $x_1 \otimes \alpha x_2 = \alpha(x_1 \otimes x_2) = \alpha x_1 \otimes x_2$

3) $(x_1 + x_2) \otimes x_3 = x_1 \otimes x_3 + x_2 \otimes x_3$

Definición 1.7 Sea $\{e_{ij}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_i$, entonces $\{e_{1j_1} \otimes \ldots \otimes e_{nj_n}\}$ es una base de $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$

Ejemplo 1.8 Sea $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ y sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$

P.D. $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

P.D. $\{e_i \otimes e_j\}$ es ortonormal

$$< e_{i_1} \otimes e_{j_1}, e_{i_2} \otimes e_{j_2} > = (e_{i_1} \otimes e_{j_1})(e_{i_2}, e_{j_2}) =$$

$$= < e_{i_1}, e_{i_2} > < e_{j_1}, e_{j_2} > = \begin{cases} 0 \text{ si } i_1 \neq i_2 \\ \quad \text{o} \\ \quad j_1 \neq j_2 \\ 1 \text{ si } i_1 = i_2 \\ \quad \text{y} \\ \quad j_1 = j_2 \end{cases}$$

∴ son ortonormales

Veremos que $\{e_i \otimes e_j\}$ es base

Los elementos $x \otimes y$ con $x, y \in \mathcal{H}$ generan a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Veremos que estos se pueden poner como .

$$x \otimes y = \sum_{i,j} \gamma_{ij}(e_i \otimes e_j)$$

Si $x \otimes y \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ y $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$ entonces

$$\begin{aligned} x \otimes y = x \otimes \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (x \otimes e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \otimes e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i (e_i \otimes e_j))\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes e_j) \\ &= \sum_{i,j} \gamma_{ij} (e_i \otimes e_j) \end{aligned}$$

$\therefore$ $\{e_i \otimes e_j\}$ es una base de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

$\therefore$ $\{e_i \otimes e_j\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

Observación 1.9 La norma de $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ esta dada por

$$\|x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\| = \|x_1\| \ldots \|x_n\|$$

Ejemplo 1.10

$$\| x_1 \otimes x_2 \|^2 = |< x_1 \otimes x_2 , x_1 \otimes x_2 >| = (x_1 \otimes x_2)(x_1 , x_2) =$$

$$= <x_1 , x_1 > < x_2 , x_2 > = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2$$

$$\therefore \|x_1 \otimes x_2\| = \|x_1\| \, \|x_2\|$$

Definición 1.11 Dados los operadores $A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ hay un operador de $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1 , \ldots , \mathcal{H}_n)$ en sí mismo definido por

$$\left[(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(\ell) \right] (y_1 , \ldots , y_n) = \ell(A_1^* y_1 , \ldots , A_n^* y_n)$$

que manda $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$ en sí mismo y que satisface

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = (A_1 x_1) \otimes \ldots \otimes (A_n x_n)$$

Ejemplo 1.12 Sea $A_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$

$$((A_1 \otimes A_2)(x_1 \otimes x_2))(y_1 , y_2) = (x_1 \otimes x_2)(A_1^* y_1 , A_2^* y_2)$$

$$= < x_1 , A_1^* y_1 > < x_2 , A_2^* y_2 >$$

$$= < A_1 x_1 , y_1 > < A_2 x_2 , y_2 >$$

$$= (A_1 x_1 \otimes A_2 x_2)(y_1 , y_2)$$

$\therefore (A_1 \otimes A_2)(x_1 \otimes x_2) = A_1 x_1 \otimes A_2 x_2$ $\therefore$ manda $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Propiedades del producto tensorial de operadores 1.13

Sean $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, $B, B_1, B_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1.- $A \otimes 0 = 0 \otimes B = 0$

2.- $I \otimes I = I$

3.- $(A_1 + A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) + (A_2 \otimes B)$

4.- $(A \otimes (B_1 + B_2)) = (A \otimes B_1) + (A \otimes B_2)$

5.- $\alpha A \otimes \beta B = \alpha\beta(A \otimes B)$

6.- $A_1 A_2 \otimes B_1 B_2 = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$

7.- $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

8.- $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_2$, que permite identificar $\mathcal{H}_2$ con el espacio $\ell_2(I)$ de familias $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ de números complejos tales que

$$\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty$$

Sea $U_i : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}^i \subset \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, U_i es lineal e isométrica,

$$x \longmapsto x \otimes e_i$$

$\mathcal{H}^i$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, los $\mathcal{H}^i$ son ortogonales dos a dos. Todo elemento x de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es de la forma - $x = \sum_{i \in I} x^i \otimes e_i$ donde $\{x^i\}_{i \in I}$ es una familia cualquiera de elementos de $\mathcal{H}_1$ tales que $\Sigma \|x^i\|^2 < \infty$ y $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \|x^i\|^2$

$$\therefore \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cong \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_1)$$

Sea $U_i^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ una aplicación lineal tales que $U_i^*(\mathcal{H}_i^{\perp}) = 0$,

U_i^* es isometría

$U_i^* U_i : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ es la identidad

$U_i U_i^*$ es la proyección de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}^i$

Para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $U_i^* T U_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \Rightarrow U_i^* T U_j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$

$$\mathcal{H}_1 \xrightarrow{U_j} \mathcal{H}^j \subset \mathcal{H} \xrightarrow{T} \mathcal{H} \xrightarrow{U_i^*} \mathcal{H}_1$$

$$x \longmapsto x \otimes e_j \longmapsto T(x \otimes e_j) \longmapsto (T(x \otimes e_j))^i$$

Llamamos $T_{ij} = U_i^* T U_j$

Por abuso de notación se escribe $T = (T_{ij})$

$$T=(T_{ij})=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots T_{1n} \dots \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots\dots \\ T_{31} & \dots\dots & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.14

Sean $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, supongamos que $< T_2 e_j, e_i > = \lambda_{ij}$ tal que (λ_{ij}) sea la matriz representativa de T_2, respecto a la - base $\{e_i\}_{i\in I}$ (e.d. $T_2 = (x_{ij})$)

Entonces la matriz (T_{ij}) de $T = T_1 \otimes T_2$ está dada por $T_{ij} = \lambda_{ij} T_1$, en efecto, para $x \in \mathcal{H}_1$

$$U_i^*(T_1 \otimes T_2)\, U_j\, x = U_i^*(T_1 \otimes T_2)(x \otimes e_j)$$

$$= U_i^*(T_1 x \otimes T_2 e_j)$$

$$= U_i^*\left(\sum_{\alpha\in I}(T_1 x \otimes \lambda_{\alpha j} e_\alpha)\right)$$

$$= U_i^*\left(\sum_{\alpha\in I}\lambda_{\alpha j}(T_1 x \otimes e_\alpha)\right)$$

$$= U_i^*\left(\sum_{\alpha\in I}\lambda_{\alpha j}(U_\alpha(T_1 x))\right)$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \lambda_{\alpha j} U_i^* U_\alpha T_1 x$$

$$= \lambda_{ij} T_1 x$$

$\therefore\ T_{ij} = \lambda_{ij} T_1$

$$T_2 \otimes T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} T_1 & \lambda_{12} T_1 & \cdots \\ \lambda_{21} T_1 & \lambda_{22} T_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

En particular, la matriz de $T_1 \otimes I$ es $(\delta_{ij} T_1)$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecher

$$(\delta_{ij} T_1) = \begin{bmatrix} T_1 & & & & & \\ & T_1 & & & O & \\ & & T_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & O & & & T_1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} = T_1 \otimes I$$

y la matriz de $I \otimes T_2$ es $(\lambda_{ij}\ I_{\mathcal{H}_1})$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots \\ \lambda_{21} & \cdot & \\ \lambda_{31} & \cdot & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad I \otimes T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} I & \lambda_{12} I & \cdots \\ \lambda_{21} I & \cdots & \\ \lambda_{31} I & \cdots & \end{bmatrix}$$

CAPITULO II

A lo largo de este capítulo daremos las notaciones, definiciones y propiedades elementales que usaremos en este trabajo. Supondremos para no alargar esta tesis que el lector está familiarizado con los teoremas básicos del análisis funcional los cuales puede consultar en [ ], [ ].

Trabajaremos en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita sobre los complejos y usualmente los denotaremos de la siguiente manera $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$,... A los operadores, es decir, a las funciones lineales contínuas de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ las denotaremos por A,B,S ó T. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denotará al conjunto de operadores lineales continuos de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$; la identidad en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ será denotada por I. También usaremos por comodidad y brevedad los siguientes símbolos:

$$\dim \ker A = \text{Nul } A \qquad\qquad \dim \ker A^* = \text{Def } A$$

donde $\ker A = \{x \mid Ax = 0\}$, el rango de A es la imagen de A y A^* denota al adjunto de A.

$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ no es invertible}\}$

$\pi_0(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}$

Los elementos de $\pi_0(A)$ se llaman valores propios de A.

En general y cuando no haya confusión denotaremos Tx el valor de T en el punto x en vez de T(x).

Un concepto de gran utilidad en este trabajo es el de operador acotado inferiormente.

Definición 2.1. T está acotado inferiormente si existe $K > 0$ tal que para toda x en $\mathcal{H}$

$$K \|x\| \leq \|Tx\|.$$

Definición 2.2. $\pi(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I$ no está acotado inferiormente$\}$

Es fácil usando las definiciones probar el siguiente lema:

Lema 2.3 $\pi_0(A) \subset \pi(A)$.

Definición 2.4 $\pi_1(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \{x_n\}$ ortonormal tal que $\|(A - \lambda I)(x_n)\| \to 0\}$

Tenemos una propiedad que nos relaciona a π_1 y a π y que es fácil de demostrar usando las definiciones.

Lema 2.5. $\pi_1(A) \subset \pi(A)$

Corolario 2.6 $\pi_1(A) \cup \pi_0(A) \subset \pi(A)$.

El siguiente lema solo lo usaremos para espacios de Hilbert aunque lo enunciaremos en su forma mas general.

Lema 2.7. Sean X y Y espacios de Banach y $\Lambda: X \to Y$ lineal, continua y biyectiva. Entonces existen $a,b \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$a\|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq b\|x\| \quad \forall x \in X \quad .$$

Este lema lo utilizaremos en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.8. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo tiene rango cerrado si y solo si T está acotado inferiormente.

Demostración

$\Leftarrow$) T está acotado inferiormente $\Rightarrow \exists\, K > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{H}$

$$K\|x\| \leq \|Tx\|$$

Sea $y \in \overline{\text{Ran } T} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset \mathcal{H}$ una sucesión tal que $Tx_n \to y$

Por lo tanto Tx_n es de Cauchy, esto es

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N > 0$ tal que si $n,m > N$ entonces $\|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$

pero

$$K\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon \quad \text{si } n,m > N.$$

$\Rightarrow K\|x_n - x_m\| < \varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \dfrac{\varepsilon}{K}$ si $n,m > N$. Entonces

$\{x_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

Sea $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$

Como T es contínuo $\Rightarrow Tx_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \therefore y \in \text{Ran } T \Rightarrow \text{Ran } T$ es cerrado.

$\Rightarrow$) Si T es inyectivo y el Ran T es cerrado entonces $T : \mathcal{H} \to T(\mathcal{H})$ es biyectivo y contínuo $\Rightarrow$ T está acotado inferiormente por el lema 2.7

Teorema 2.9 El rango de T, Ran T es cerrado si y solo si Ran T^* es cerrado.

Demostración

Denotaremos por $(\ker T)^{\perp}$ al ortogonal de ker T, es decir,

$$(\ker T)^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} \mid \langle y,x \rangle = 0 \quad \text{donde} \quad x \in \ker T\}$$

Veamos primero Ran T cerrado $\Rightarrow$ Ran T^* cerrado.

Para ver que Ran T^* es cerrado, basta ver que Ran $T^* = (\ker T)^{\perp}$.

La contención Ran $T^* \subset (\ker T)^{\perp}$ es inmediata.

Para ver que $(\ker T)^{\perp} \subset \text{Ran } T^*$

Sea $z \in (\ker T)^{\perp}$, definimos la funcional $f: \text{Ran } T \to \mathbb{C}$ por $f(T(x)) = \langle x,z \rangle$ se prueba que es contínua y por lo tanto puede extenderse a $\mathcal{H}$ usando el teorema de Hahn-Banach.

$$f \in \mathcal{H}^* \Rightarrow \exists\, z_0 \text{ tal que } \langle Tx, z_0 \rangle = f(T(x)) = \langle x, z \rangle \;\; \forall x \in \mathcal{H}$$

$\Rightarrow z = T^* z_0 \quad \therefore z \in \text{Ran } T^* \quad \therefore (\ker T)^{\perp} = \text{Ran } T^*$

$\Leftarrow$) Como $T = T^{**}$ la otra implicación es inmediata.

Lema 2.10 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\dim T(M) < \infty$ entonces $T(M^{\perp})$ es cerrado si y solo si Ran (T) es cerrado

Este lema aparece en Douglas y nos servirá para la demostración del siguiente teorema

Teorema 2.11 T inyectivo, Ran T no cerrado entonces existe una sucesión ortonormal $\{x_n\}$ tal que $T(x_n) \to 0$

Demostración

La sucesión se construye inductivamente. Sea $x_1 \in \mathcal{H}$ tal que $\|Tx_1\| < 1$. Habiendo construido $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormales tales que $\|T(x_n)\| < \frac{1}{n}$.

Sea $M = V\{x_1, \ldots, x_n\}$, es decir, el subespacio generado por $x_1, \ldots, x_n$; Ran $T = T(M) + T(M^{\perp})$

Como $T(M)$ es de dimensión finita, por el lema anterior $T(M^{\perp})$ no es cerrado y por el teorema 2.8 podemos elegir $x_{n+1} \in M^{\perp}$ tal que $\|x_{n+1}\| = 1$ y $\|T(x_{n+1})\| < \frac{1}{n+1}$.

En el teorema anterior se puede eliminar la hipótesis de inyectividad obteniendo:

Teorema 2.12. Si Ran T no es cerrado, entonces existe una sucesión ortonormal $\{x_n\}$ tal que $T(x_n) \to 0$.

Demostración.

Lo que debemos hacer es construir un operador inyectivo S tal que Ran S = Ran T y aplicar el teorema anterior al operador S.

Definamos $S:(\ker T)^{\perp}\to\mathcal{H}$ como $S(x)=T(x)$.

La $\dim(\ker T)^{\perp}$ es infinita. Si no fuera así, $\operatorname{Ran} T=(\ker T)^{\perp}$ sería cerrado.

Teorema 2.13 Si Ran T no es cerrado, entonces existe una sucesión ortonormal $\{x_n\}$ tal que $T^*(x_n)\to 0$

Demostración

Ran T no es cerrado entonces Ran T* no es cerrado (Teorema 2.9).

Por el teorema 2.12 $\exists\{x_n\}$ ortonormal tal que $T^*(x_n)\to 0$.

Teorema 2.14. Si Ran T es cerrado y existe $\{x_n\}$ ortonormal tal que $Tx_n\to 0$ entonces Nul $T=\infty$.

Demostración

i) T no puede ser inyectivo, porque si lo fuera (teorema 2.8) T estaría acotado inferiormente y no lo está.

ii) Supongamos que $\ker T=V\{e_1,\dots,e_n\}$

$$\mathcal{H}=\ker T\oplus(\ker T)^{\perp}$$

definimos $S:(\ker T)^{\perp}\to\mathcal{H}$ como $S(x)=T(x)$

S es inyectivo y Ran S = Ran T es cerrado entonces por el teorema 2.8 está acotado inferiormente $\Rightarrow \exists\ K > 0$ tal que $K\|x\| \leq \|Sx\|\ \forall x \in (\ker T)^{\perp}$

Sea $\{x_n\}$ la sucesión ortonormal

$$x_n = y_n + z_n \quad y_n \in \ker T, \quad z_n \in (\ker T)^{\perp}$$

$$Tx_n = Ty_n + Tz_n = 0 + Sz_n$$

Como $Tx_n \to 0$ si $n \to \infty$ entonces $Sz_n \to 0$ si $n \to \infty$ y además

$$K\|z_n\| \leq \|Sz_n\| \Rightarrow z_n \to 0, \text{ esto es,}$$

dada $\varepsilon > 0\ \exists\ N > 0$ tal que $\|x_n - y_n\| < \varepsilon/2$.

Por otro lado, como $\{y_n\} \subset \ker T$ y $\ker T$ es un espacio de dimensión finita, existe una subsucesión de $\{y_n\}$ convergente a y_0 que denotaremos $\{y_{n_k}\}$, es decir,

$$\|y_{n_k} - y_0\| < \varepsilon/2 \quad \text{si } k > N.$$

$$\|x_{n_k} - y_0\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y_0\| < \varepsilon \text{ si } k > N.$$

de donde $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente, lo que es una contradicción, ya que $\{x_n\}$ es ortonormal ($\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$).

Usando algunos de los teoremas anteriores probaremos un teorema que nos relaciona $\pi(A)$ con $\pi_0(A)$ y $\pi_1(A)$.

Teorema 2.15 $\pi(A) \subset \pi_0(A) \cup \pi_1(A)$.

Demostración

Probaremos que $\mathbb{C} \setminus \pi_0(A) \cup \pi_1(A) \subset \mathbb{C} \setminus \pi(A)$

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \pi_0(A) \cup \pi_1(A) \Rightarrow \lambda \notin \pi_0(A) \cup \pi_1(A) \Rightarrow \lambda \notin \pi_0(A)$ y $\lambda \notin \pi_1(A)$

$\Rightarrow A-\lambda I$ es inyectivo y $\nexists \{x_n\}$ ortonormal tal que $\|(A-\lambda I)(x_n)\| \to 0$ entonces por el teorema 2.11 $\operatorname{Ran}(A-\lambda I)$ es cerrado.

Como $A-\lambda I$ es inyectivo y $\operatorname{Ran}(A-\lambda I)$ es cerrado entonces $A-\lambda I$ está acotado inferiormente (teorema 2.8) $\Rightarrow \lambda \notin \pi(A) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pi(A)$

Por lo tanto $\pi(A) \subset \pi_0(A) \cup \pi_1(A)$.

Con este teorema y el corolario 2.6 se tiene:

Corolario 2.16 $\pi(A) = \pi_0(A) \cup \pi_1(A)$.

Definiciones 2.17

$\sigma_i(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A-\lambda I$ no es invertible por la izquierda$\}$

$\sigma_d(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A-\lambda I$ no es invertible por la derecha$\}$

Por medio del siguiente teorema obtendremos una caracterización del espectro izquierdo de A, $\sigma_i(A)$.

Teorema 2.18 $\sigma_i(A) = \pi(A)$

Demostración

Veamos primero que $\pi(A) \subset \sigma_i(A)$

Sea $\lambda \in \pi(A) \Rightarrow$ por definición $A - \lambda I$ no está acotado inferiormente

$\lambda \in \pi(A) \Rightarrow$ por el corolario 2.16 $\lambda \in \pi_1(A)$ o $\lambda \in \pi_0(A)$

Si $\lambda \in \pi_0(A)$ entonces $A - \lambda I$ no es inyectivo, por lo tanto $A - \lambda I$ no es invertible por la izquieda, es decir, $\lambda \in \sigma_i(A)$.

Si $\lambda \in \pi_1(A) \setminus \pi_0(A)$ entonces $A - \lambda I$ es inyectivo y $\exists \{x_n\}$ ortonormal tal que $\| (A - \lambda I)(x_n) \| \to 0$

Supongamos que $\lambda \notin \sigma_i(A)$ entonces $\exists B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $B(A - \lambda I) = I$

$$\| (B(A - \lambda I))(x_n) \| \leq \| B \| \, \| (A - \lambda I)(x_n) \| \to 0$$

por otro lado $\| (B(A - \lambda I))x_n \| = \| x_n \| = 1$ lo cual es una contradicción

De donde $\lambda \in \sigma_i(A)$

Por lo tanto $\pi(A) \subset \sigma_i(A)$

Ahora veremos que $\sigma_i(A) \subset \pi(A)$

Probaremos que $\mathbb{C} \setminus \pi(A) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_i(A)$

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \pi(A) \Rightarrow \lambda \notin \pi(A) \Rightarrow A - \lambda I$ está acotado inferiormente y $A - \lambda I$ es inyectivo entonces por el teorema 2.8, $A - \lambda I$ tiene rango cerrado.

Tenemos que ver que $A-\lambda I$ es invertible por la izquierda, es decir, $\exists\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $B(A-\lambda I) = I$

Como $\mathrm{Ran}(A-\lambda I)$ es cerrado podemos escribir a $\mathcal{H}$ como:

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(A-\lambda I) \oplus (\mathrm{Ran}(A-\lambda I))^{\perp}$$

Si $(A-\lambda I)(x) = y$ definimos

$$By = \begin{cases} x \text{ si } y \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I) \\ \\ 0 \text{ si } y \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I)^{\perp} \end{cases}$$

Es claro de la definición que B es lineal

Veamos ahora que B es acotado, para lo cual basta que sea acotado en $\mathrm{Ran}(A-\lambda I)$ porque en el ortogonal vale cero. Tenemos entonces que probar que

$\exists\ M > 0$ tal que $\forall\ y \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I)$ $\|By\| < M\|y\|$

Sea $y \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I) \Rightarrow y = (A-\lambda I)(x)$

$\|By\| = \|B(A-\lambda I)x\| = \|x\| \leq \frac{1}{K}\|(A-\lambda I)(x)\| = \frac{1}{K}\|y\|$ ya que $A-\lambda I$ está acotado inferiormente

Por lo tanto $\quad \|By\| \leq \frac{1}{K}\|y\| \quad \frac{1}{K} = M$

$\therefore B$ está acotado $\Rightarrow B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$\therefore A-\lambda I$ es invertible por la izquierda $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_i(A) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_i(A)$

De donde $\sigma_i(A) \subset \pi(A)$. Por lo tanto $\sigma_i(A) = \pi(A)$.

Teorema 2.19 $\bar{\lambda} \in \sigma_i(A^*) \iff \lambda \in \sigma_d(A)$

Demostración

$$\begin{aligned}
\lambda \notin \sigma_d(A) &\iff A - \lambda I \text{ es invertible por la derecha} \\
&\iff \exists B \text{ tal que } (A-\lambda I)B = I \\
&\iff ((A-\lambda I)B)^* = I^* = I \\
&\iff B^*(A-\lambda I)^* = I \\
&\iff (A-\lambda I)^* \text{ es invertible por la izquierda} \\
&\iff \bar{\lambda} \notin \sigma_i(A^*)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{\lambda} \in \sigma_i(A^*) \iff \lambda \in \sigma_d(A)$

Usando los teoremas anteriores es fácil ver que

Corolario 2.20

i) $\lambda \in \sigma_d(A) \iff \bar{\lambda} \in \pi(A^*)$

ii) $\pi(A^*) = \pi_1(A^*) \cup \pi_0(A^*)$

Definición 2.21

Sea $\phi(A) = \sigma(A) \setminus \pi(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I$ no es invertible pero está acotado inferiormente$\}$

Teorema 2.22 $\phi(A)$ tiene las siguientes propiedades

i) $\phi(A)$ es abierto

ii) Si $\lambda \in \phi(A)$ entonces $\overline{\lambda}$ es un valor propio de A^*, es decir,

$$\lambda \in \phi(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \pi_0(A^*)$$

Demostración

i) Probaremos que $\phi(A)$ es abierto.

Sean $G_i = \{A | A$ es invertible solamente por la izquierda$\}$

$\Omega = \{A | A$ está acotado inferiormente, pero no es invertible$\}$

Veremos que $G_i = \Omega$.

$A \in G_i \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(A) \setminus \sigma_i(A) \Longleftrightarrow$ teorema 2.18

$0 \in \sigma(A) \setminus \pi(A) \Longleftrightarrow A \in \Omega$

Por lo tanto $G_i = \Omega$

Sea $\lambda \in \phi(A) \Longleftrightarrow A - \lambda I \in G_i$ que es abierto [ ]

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tal que si $\| B - (A - \lambda I) \| < \varepsilon$ entonces $B \in G_i$

Sea $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ entonces

$\| (A - \mu I) - (A - \lambda I) \| = \| \mu - \lambda \| < \varepsilon \Rightarrow A - \mu I \in G_i \Rightarrow \mu \in \phi(A)$

$\therefore \phi(A)$ es abierto

ii) Ahora probaremos que $\lambda \in \phi(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \pi_0(A^*)$

Si $\lambda \in \phi(A)$ entonces $\lambda \in \sigma_d(A)$ y por el Corolario 2.20 y el teorema 2.18

$\bar{\lambda} \in \sigma_i(A^*) = \pi_0(A^*) \cup \pi_1(A^*)$.

Como $\phi(A) = \sigma(A) \setminus \pi(A)$ entonces $\lambda \notin \pi(A)$ por lo tanto $\lambda \notin \pi_0(A)$, es decir, $A - \lambda I$ es inyectivo entonces por el Teorema 2.8 el $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ es cerrado y por el teorema 2.9 el $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)^* = \mathrm{Ran}(A^* - \bar{\lambda} I)$ es cerrado.

Por lo tanto si $\bar{\lambda} \notin \pi_0(A^*)$ entonces $\bar{\lambda} \in \pi_1(A^*)$ y por el teorema 2.8 el $\mathrm{Ran}(A^* - \bar{\lambda} I)$ no es cerrado, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\lambda \in \phi(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \pi_0(A^*)$

Haremos ahora un resumen de algunos conceptos que nos serán de gran utilidad en los siguientes capítulos [ ], [ ]

Sea $\mathbb{K}$ el ideal de operadores compactos en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y ψ la proyección canónica de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en el álgebra de Calkin $\mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathbb{K}$

El espectro esencial de un operador T, denotado por $\sigma_e(T)$, es el espectro de $\psi(T)$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathbb{K}$ y $\sigma_{ed}(T)$, $\sigma_{ei}(T)$ denotan el espectro esencial derecho e izquierdo de T respectivamente.

Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, un hueco de $\sigma_e(T)$ es una componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ (y por lo tanto es un conjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$) y un pseudo-hueco de $\sigma_e(T)$ es una componente de $\sigma_e(T) \setminus \sigma_{ei}(T)$ o

$\sigma_e(T) \setminus \sigma_{ed}(T)$. Los pseudo-huecos son también conjuntos abiertos conexos de $\mathbb{C}$ ya que

$$\partial \sigma_e(T) \subset \sigma_{ei}(T) \cap \sigma_{ed}(T).$$

Estos conceptos están estrechamente relacionados con la teoría Fredholm.

Un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es semi-Fredholm izquierdo [derecho] si T tiene rango cerrado y Nul $T < \infty$ [Def $T < \infty$]. El conjunto de todos los operadores semi-Fredholm en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un conjunto abierto (respecto a la topología de la norma) y se denota por $S\mathcal{F}$

Sea $i : S\mathcal{F} \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, llamado el índice Fredholm y definido por

$$i(T) = \text{Nul } T - \text{Def } T$$

Si $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tiene la topología discreta y $S\mathcal{F}$ la topología de la norma, $i(T)$ es contínua y por lo tanto constante en las componentes conexas de $S\mathcal{F}$.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ al subconjunto de $S\mathcal{F}$ para los cuales $i(T)$ es finito. $\mathcal{F}$ es el conjunto de operadores Fredholm en $\mathcal{H}$.

El lema de Atkinson [ ] relaciona la teoría de operadores de Fredholm con el comportamiento de $\psi(T)$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H}) / \mathbb{K}$ de la siguiente manera:

T es SF izquierdo $\Longleftrightarrow \psi(T)$ es invertible por la izquierda.

T es SF derecho $\Longleftrightarrow \psi(T)$ es invertible por la derecha.

$T \in F$ $\Longleftrightarrow \psi(T)$ es invertible.

De lo anterior tenemos

$$\sigma_{ei}(T) = \sigma_i(\psi(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ no es } SF \text{ izquierdo}\}$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ran}(T - \lambda I) \text{ es no cerrado o } \mathrm{Nul}(T - \lambda I) = \infty\}$$

$$\sigma_{ed}(T) = \sigma_d(\psi(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ no es } SF \text{ derecho}\}$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ran}(T - \lambda I) \text{ es no cerrado o } \mathrm{Def}(T - \lambda I) = \infty\}$$

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \notin F\}$$

$$\sigma_e(T) \setminus \sigma_{ei}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \in SF \text{ y } i(T - \lambda I) = -\infty\}$$

$$\sigma_e(T) \setminus \sigma_{ed}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \in SF \text{ y } i(T - \lambda I) = +\infty\}$$

A cada hueco, que denotaremos por H (pseudo-hueco SH) de $\sigma_e(T)$ se le asocia un único índice $i(H)$ (respectivamente $i(SH)$) que es el índice de $T - \lambda I$ donde $\lambda \in H$ (respectivamente $\lambda \in SH$) .

La figura espectral de un operador T, que denotaremos por $FE(T)$, es el conjunto formado por $\sigma_e(T)$, el conjunto de huecos y sus índices correspondientes y el conjunto de pseudo-huecos y sus respectivos índices.

Con los espectros esenciales derechos o izquierdos obtendremos teoremas similares a los que obtuvimos en los casos de los espectros derechos e izquierdos

Teorema 2.23 $\pi_1(A) = \sigma_{ei}(A)$.

Demostración

Veamos primero que $\pi_1(A) \subset \sigma_{ei}(A)$

Sea $\lambda \in \pi_1(A)$

Si $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ no es cerrado entonces $\lambda \in \sigma_{ei}(A)$

Si $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ es cerrado, como $\lambda \in \pi_1(A)$ $\exists\{x_n\}$ ortonormal tal que $\|(A - \lambda I)(x_n)\| \to 0$ entonces (Teorema 2.14)

$\mathrm{Nul}(A - \lambda I) = \infty \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ei}(A)$

Por lo tanto $\pi_1(A) \subset \sigma_{ei}(A)$

Ahora probemos que $\sigma_{ei}(A) \subset \pi_1(A)$

Sea $\lambda \in \sigma_{ei}(A)$

Si $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ no es cerrado entonces (Teorema 2.12) $\exists\{x_n\}$ ortonormal tal que $\|(A - \lambda I)(x_n)\| \to 0 \Rightarrow \lambda \in \pi_1(A)$

Si $\mathrm{Nul}(A - \lambda I) = \infty$, sea $\{x_n\}$ una base ortonormal del $\ker(A - \lambda I)$ entonces $(A - \lambda I)(x_n) = 0 \Rightarrow \|(A - \lambda I)(x_n)\| = 0 \Rightarrow \lambda \in \pi_1(A)$

De donde $\sigma_{ei}(A) \subset \pi_1(A)$

Por lo tanto $\sigma_{ei}(A) = \pi_1(A)$

Teorema 2.24 $\overline{\lambda} \in \pi_1(A^*) \iff \lambda \in \sigma_{ed}(A)$

Demostración

Observemos que Def $A^* = \dim \ker A^{**}$ y $A^{**} = A$ entonces Def $A^* = $ Nul A. y Nul $A^* = $ Def A

Utilizando las definiciones del $\sigma_{ei}(A)$, $\sigma_{ed}(A)$ y el teorema 2.9 obtenemos:

$$\lambda \in \sigma_{ed}(A) \iff \text{Ran}(A - \lambda I) \text{ es no cerrado ó Def}(A - \lambda I) = \infty$$

$$\iff \text{Ran}(A - \lambda I)^* \text{ es no cerrado o Nul}(A - \lambda I)^* = \infty$$

$$\iff \text{Ran}(A^* - \overline{\lambda} I) \text{ es no cerrado o Nul}(A^* - \overline{\lambda} I) = \infty$$

$$\iff \overline{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^*)$$

$$\iff \overline{\lambda} \in \pi_1(A^*) \text{ (Teorema 2.23)}$$

Corolario 2.25 $\sigma_{ei}(A) \subset \sigma_i(A)$

Corolario 2.26 $\sigma_{ed}(A) \subset \sigma_d(A)$

Utilizando las definiciones de $\sigma_e(A)$, $\sigma_{ei}(A)$ y $\sigma_{ed}(A)$ obtenemos

$$\sigma_e(A) = \sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ed}(A).$$

Otro de los resultados sobre operadores de Fredholm que usaremos a lo largo de esta tesis es la suma directa de operadores de Fredholm es un operador de Fredholm.

Sean $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ y $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, usaremos $A \oplus B$ para denotar el operador en $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ definido por $(A \oplus B)(x,y) = (Ax, By)$ al cual llamaremos suma directa de A y B. Matricialmente a este operador se le representa por

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Lema 2.27 $\text{Ran}(A \oplus B)$ es cerrado $\Longleftrightarrow$ Ran A y Ran B son cerrados.

Demostración

<=) Sea $z = (z_1, z_2) \in \overline{\text{Ran}(A \oplus B)}$ entonces existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\} \subset A \oplus B$ tal que

$$(Ax_n, By_n) \to (z_1, z_2)$$

es decir $\|(Ax_n, By_n) - (z_1, z_2)\| \to 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\|Ax_n - z_1\|^2 + \|By_n - z_2\|^2} \to 0$ $\Longleftrightarrow \|Ax_n - z_1\| \to 0$ y $\|By_n - z_2\| \to 0$. Es decir

$z_1 \in \overline{\text{Ran A}} = \text{Ran A}$ y $z_2 \in \overline{\text{Ran B}} = \text{Ran B}$ de donde

$z_1 = Aw_1$ $\quad z_2 = Bw_2$. Por lo tanto

$z = (z_1, z_2) = (Aw_1, Bw_2) = (A \oplus B)(w_1, w_2)$

=>) Sean $z_1 \in \overline{\text{Ran A}}$ y $z_2 \in \overline{\text{Ran B}}$ entonces existen dos sucesiones

$\{x_n\} \subset \mathcal{H}_1$ tal que $Ax_n \to z_1$

y $\{y_n\} \subset \mathcal{H}_2$ tal que $By_n \to z_2$

$\Rightarrow (A \oplus B)(x_n, y_n) \to (z_1, z_2)$

Como $\mathrm{Ran}(A \oplus B)$ es cerrado entonces $(z_1, z_2) = (Aw_1, Bw_2)$, esto es $z_1 = Aw_1$ y $z_2 = Bw_2 \Rightarrow z_1 \in \mathrm{Ran}\, A$ y $z_2 \in \mathrm{Ran}\, B$

Por lo tanto Ran A es cerrado y Ran B es cerrado.

Lema 2.28 Sean $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ entonces

i) $\mathrm{Nul}(A \oplus B) = \mathrm{Nul}\, A + \mathrm{Nul}\, B$

ii) $\mathrm{Def}(A \oplus B) = \mathrm{Def}\, A + \mathrm{Def}\, B$

Demostración

i)

a) Si $\mathrm{Nul}\, A = \infty$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ ortonormal tal que $Ax_n = 0$ y por lo tanto $(x_n, 0) \in \ker(A \oplus B)$ donde $\{(x_n, 0)\}$ es ortonormal $\Rightarrow \mathrm{Nul}(A \oplus B) = \infty$.

b) Si $\mathrm{Nul}\, B = \infty$ entonces $\mathrm{Nul}(A \oplus B) = \infty$, se prueba igual que (a).

c) Si $\mathrm{Nul}\, A < \infty$ y $\mathrm{Nul}\, B < \infty$ entonces sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de A sea $\{y_1,\ldots,y_m\}$ una base de B.

Veremos que

$$(x_1,0),\ldots,(x_n,0),(0,y_1),\ldots,(0,y_m)$$

es una base de $\ker(A\oplus B)$

Si $x\in\ker A$, $y\in\ker B$ entonces $x=\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n$,
$y=\beta_1y_1+\ldots+\beta_my_m$

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n,0)+(0,\beta_1y_1+\ldots+\beta_my_m)$$

$$=\alpha_1(x_1,0)+\ldots+\alpha_n(x_n,0)+\beta_1(0,y_1)+\ldots+\beta_m(0,y_m)$$

$\therefore$ la colección genera a $\ker(A\oplus B)$

Además la colección es ortonormal por lo tanto es linealmente independiente.

ii)

Como $(A\oplus B)^*=A^*\oplus B^*$ entonces

$$\mathrm{Def}(A\oplus B)=\mathrm{Nul}(A\oplus B)^*=\mathrm{Nul}(A^*\oplus B^*)=\mathrm{Nul}\,A^*+\mathrm{Nul}\,B^*$$

$$=\mathrm{Def}\,A+\mathrm{Def}\,B.$$

Teorema 2.29 $A\oplus B$ es un operador de Fredholm $\Longleftrightarrow$ A y B son operadores de Fredholm y $i(A\oplus B)=i(A)+i(B)$

Demostración

La demostración se sigue de los lemas 2.27 y 2.28

Teorema 2.30 $A \oplus B$ es semi-Fredholm de índice $+\infty$ $(-\infty)$ $\Longleftrightarrow$ sucede alguno de los siguientes casos:

i) A y B son semi-Fredholm de índice $+\infty(-\infty)$

ii) A es semi-Fredholm de índice $+\infty(-\infty)$ y B es Fredholm

iii) A es Fredholm y B es semi-Fredholm de índice $+\infty$ $(-\infty)$

Demostración

La demostración se sigue de los lemas 2.27 y 2.28.

CAPITULO III

En este capítulo estudiaremos algunas relaciones entre los espectros que nos ayudarán en las demostraciones de los capítulos centrales de esta tesis que son el IV y el V.

Uno de estos resultados es un caso particular del espectro esencial de $A \otimes B$, donde B será la identidad, es decir, probaremos que $\sigma_e(A \otimes I) = \sigma(A)$. El caso general será tratado en el capítulo IV.

Lema 3.1 $\sigma_{ei}(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A \otimes B)$

Demostración

Sea $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\sigma_{ei}(B)$ de donde $\lambda = \mu\gamma$ con $\mu \in \sigma_{ei}(A)$, $\gamma \in \sigma_{ei}(B)$ entonces existen dos sucesiones ortonormarles $\{x_n\}, \{y_n\}$ tales que

$$\|(A - \mu I)(x_n)\| \to 0 \quad y \quad \|(B - \gamma I)(y_n)\| \to 0$$

Probaremos que $(A \otimes B - \mu\gamma(I \otimes I))(x_n \otimes y_n) \to 0$ y $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal

$$(A \otimes B - \mu\gamma(I \otimes I))(x_n \otimes y_n) = (A \otimes B - \mu I \otimes B + \mu I \otimes B - \mu I \otimes \gamma I)(x_n \otimes y_n)$$

$$= ((A - \mu I) \otimes B + \mu I \otimes (B - \gamma I))(x_n \otimes y_n) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(A - \mu I)x_n} \otimes By_n + \mu x_n \otimes \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(B - \gamma I)\, y_n}$$

Por lo tanto

$(A \otimes B - \mu\gamma(I \otimes I))(x_n \otimes y_n) \to 0$

Veremos ahora que $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal

$$<x_n \otimes y_n, x_m \otimes y_m> = <x_n, x_m><y_n, y_m> = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m \end{cases}$$

Lema 3.2 $\sigma_{ed}(A)\sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ed}(A \otimes B)$

Demostración

Sea $\lambda \in \sigma_{ed}(A)\sigma_{ed}(B)$ de donde $\lambda = \mu\gamma$ con $\mu \in \sigma_{ed}(A)$, $\gamma \in \sigma_{ed}(B)$ entonces existen dos sucesiones ortonormales $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tales que

$$\|(A^* - \overline{\mu}I)(x_n)\| \to 0 \quad y \quad \|(B^* - \overline{\gamma}I)(y_n)\| \to 0$$

Veremos que $\|(A^* \otimes B^* - \overline{\mu}\,\overline{\gamma}\, I \otimes I)(x_n \otimes y_n)\| \to 0$ con $\{x_n \otimes y_n\}$ ortonormal.

$$(A^* \otimes B^* - \overline{\mu}\,\overline{\gamma}\, I \otimes I)(x_n \otimes y_n) = (A^* - \overline{\mu}I)\, x_n \otimes B^* y_n + \overline{\mu} x_n \otimes (B^* - \overline{\gamma}I)\, y_n \to 0$$

y por el lema anterior la sucesión $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal. De donde $\|(A^* \otimes B^* - \overline{\mu}\,\overline{\gamma} I)(x_n \otimes y_n\| \to 0$ y $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal, esto es,

$\overline{\mu}\,\overline{\gamma} = \overline{\lambda} \in \sigma_{ei}(A \otimes B)^* \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ed}(A \otimes B)$

Lema 3.3 $\pi_0(A)\pi_0(B) \subset \pi_0(A \otimes B)$

Demostración

Sea $\lambda = \mu\gamma \in \pi_0(A)\pi_0(B)$ tal que $\mu \in \pi_0(A)$, $\gamma \in \pi_0(B)$

Como $\mu \in \pi_0(A)$ entonces $\exists\, x \neq 0$ tal que $(A - \mu I)(x) = 0$

$\gamma \in \pi_0(B)$ entonces $\exists\, y \neq 0$ tal que $(B - \gamma I)(y) = 0$

Entonces tenemos que $x \otimes y \neq 0$ y

$$(A \otimes B - \lambda I)(x \otimes y) = ((A - \mu I)(x) \otimes By) + (\mu x \otimes (B - \gamma I)(y))$$

$$= (0 \otimes By) + (\mu x \otimes 0)$$

$$= 0$$

Por lo tanto

$\therefore \mu\gamma \in \pi_0(A \otimes B)$

Teorema 3.4 $\sigma(A \otimes B) = \sigma(A)\sigma(B)$

Demostración

La demostración de este teorema aparece en [ ]

Teorema 3.5 Sean $\sigma_e(A \otimes I)$ el espectro esencial de $A \otimes I$ y $\sigma(A)$ el espectro de A, entonces

$$\sigma_e(A \otimes I) = \sigma(A)$$

Demostración

Probaremos primero que $\sigma_e(A \otimes I) \subset \sigma(A)$

Sabemos que $\sigma_e(A \otimes I) \subset \sigma(A \otimes I)$

y $\sigma(A \otimes I) = \sigma(A)\sigma(I) = \sigma(A)$ [ ]. Entonces

$\sigma_e(A \otimes I) \subset \sigma(A)$

Ahora veremos que $\sigma(A) \subset \sigma_e(A \otimes I)$

Sea $\lambda \in \sigma(A)$ entonces $A - \lambda I$ no es invertible $\Rightarrow \lambda \in \pi_1(A)$, $\lambda \in \pi_0(A)$ o $\lambda \in \phi(A)$

Si $\lambda \in \pi_1(A)$ entonces $\exists\{x_n\}$ ortonormal tal que

$$\|(A-\lambda I)(x_n)\| \to 0 \Rightarrow (A-\lambda I)(x_n) \to 0$$

sea y tal que $\|y\| = 1$ entonces $\{x_n \otimes y\}$ es ortonormal

$$((A-\lambda I)\otimes I)(x_n \otimes y) = [(A-\lambda I)x_n] \otimes y \to 0$$

$$\|$$

$$(A \otimes I - \lambda I)(x_n \otimes y) \to 0 \quad \therefore \lambda \in \sigma_e(A \otimes I)$$

Si $\lambda \in \pi_0(A)$ entonces $\mathrm{Nul}(A-\lambda I) > 0$, esto es, $\exists x \in \ker(A-\lambda I)$, $x \neq 0$ y $\|x\| = 1$ tal que para toda $y \in \mathcal{H}$

$$((A-\lambda I)\otimes I)(x \otimes y) = ((A-\lambda I)x \otimes y) = 0 \otimes y = 0$$

$$\|$$

$$(A \otimes I - \lambda I)(x \otimes y) = 0 \Rightarrow \mathrm{Nul}(A \otimes I - \lambda I) = \infty \Rightarrow \lambda \in \sigma_e(A \otimes I)$$

Si $\lambda \in \phi(A)$ entonces $\overline{\lambda} \in \pi_0(A^*)$, es decir, $\exists x \in \ker(A-\lambda I)^*$, $x \neq 0$ y $\|x\| = 1$ tal que para toda $y \in \mathcal{H}$

$$((A-\lambda I)^* \otimes I^*)(x \otimes y) = ((A-\lambda I)^* x) \otimes y = 0$$

$$\|$$

$$(A^* - \overline{\lambda} I \otimes I^*)(x \otimes y) = (A^* \otimes I^* - \overline{\lambda} I)(x \otimes y) = ((A \otimes I)^* - \overline{\lambda} I)(x \otimes y) =$$

$$= (A \otimes I - \lambda I)^*(x \otimes y) = 0$$

Entonces

$\mathrm{Def}(A \otimes I - \lambda I) = \infty \Rightarrow \lambda \in \sigma_e(A \otimes I)$

Esto es $\sigma(A) \subset \sigma_e(A \otimes I)$

Por lo tanto $\sigma(A) = \sigma_e(A \otimes I)$

CAPITULO IV

En este capítulo veremos que $\sigma_e(A \otimes B) = \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$, para ello utilizaremos algunos lemas y proposiciones que nos ayudarán a probar esta propiedad.

El primero de ellos es un lema técnico que usaremos en dos ocaciones.

Luego seguirán algunas proposiciones que nos permitirán ver que $\sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A \otimes B)$, en esta parte se usarán los conceptos fundamentales del producto tensorial así como los conceptos de huecos y pseudo-huecos.

Para probar la otra inclusión usaremos la expresión matricial de operadores así como la teoría de operadores de Fredholm.

Lema 4.1 Si U, V son abiertos conexos acotados de $\mathbb{C}$ y existen $\mu \in U$, $\gamma \in V$ tales que $\mu\gamma = \lambda$, entonces existen $\mu_0 \in \bar{U}$ y $\gamma_0 \in \bar{V}$ tales que $\mu_0\gamma_0 = \lambda$ y $\mu_0 \in \partial U$ o $\gamma_0 \in \partial V$.

Demostración.

Sea $t \in [1,\infty)$ tal que $t\mu \in U$ para alguna t

Sea $t_1 = \inf\{t \in [1,\infty) \mid t\mu \notin U\}$ entonces $t_1\mu \in \partial U$. Si $\gamma/t \in V$. $\forall t \in [1,\infty)$ entonces t_1 satisface el lema.

Por lo tanto $t_1\mu \in \partial U$ y $\gamma/t_1 \in \bar{V}$

Si $\gamma/t \notin V$ para alguna $t \in [1,\infty)$, sea $t_2 = \inf\{t \in [1,\infty) \mid \gamma/t \notin V\}$ entonces $\gamma/t_2 \in \partial V$

Sea $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$ entonces $t_0\mu \in \partial U$ ó $\gamma/t_0 \in \partial V$ y $t_0\mu \in \bar{U}$ y $\gamma/t_0 \in \bar{V}$ entonces $t_0\mu = \mu_0$ y $\gamma/t_0 = \gamma_0$

Lema 4.2

i) Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B)$ entonces $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$

ii) Si $\mu \in \sigma_{ed}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B)$ entonces $\mu\gamma \in \sigma_{ed}(A \otimes B)$

Demostración

i) Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ entonces por la definición 2.4 $\exists\{x_n\}$ ortonormal tal que $\|(A - \mu I)(x_n)\| \to 0$

Si $\gamma \in \sigma_i(A)$ entonces por el teorema 2.18 $\exists\{y_n\}$ una sucesión con $\|y_n\| = 1$ tal que $(B - \gamma I)(y_n) \to 0$

Veamos que

$$(A \otimes B - \mu\gamma I \otimes I)(x_n \otimes y_n) \to 0 \text{ y } \{x_n \otimes y_n\} \text{ es ortonormal.}$$

Con lo cual por la definición 2.4 se tendrá que $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$.

$$(A \otimes B - \mu\gamma I \otimes I)(x_n \otimes y_n) = (A - \mu I)x_n \otimes By_n + \mu x_n \otimes (B - \gamma I)y_n \to 0$$

$$\Longrightarrow (A \otimes B - \mu\gamma I)(x_n \otimes y_n) \to 0$$

Veamos ahora que $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal

$$<x_i \otimes y_i, x_j \otimes y_j> = <x_i, x_j><y_i, y_j> = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

ii) La demostración es análoga a la del inciso (i).

Lema 4.3 Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

i) Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \phi(B)$ entonces $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$

ii) Si $\mu \in \sigma_{ed}(A)$ y $\overline{\gamma} \in \phi(B^*)$ entonces $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

Demostración

i) Si $\gamma \in \phi(B)$(2.21) por el teorema 2.22 tenemos que $\overline{\gamma} \in \pi_0(B^*)$ de donde $\mathrm{Def}\,(B-\gamma I) > 0$ y además $\gamma \notin \sigma_i(B)$. Entonces pueden suceder dos casos:

a) $\gamma \in \sigma_e(B) \Rightarrow \gamma \in \sigma_e(B) \setminus \sigma_{ei}(B)$ y por la definición γ está en un pseudo-hueco de índice $-\infty$.

b) $\gamma \in \sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$, como $\gamma \notin \sigma_i(B) \Rightarrow \mathrm{Nul}(B-\gamma I) = 0$, además $\mathrm{Def}(B-\gamma I) > 0$ de donde

γ está en un hueco de índice menor que cero.

Como $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ entonces también hay dos casos:

a') $\mu \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A)$.

En este caso tenemos $\mu \in \sigma_{ed}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B)$, lo cual, como ya se probó en el lema 4.2(ii) implica $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

b') $\mu \in \sigma_{ei}(A) \setminus \sigma_{ed}(A) \Rightarrow \mu$ está en un pseudo-hueco de índice $+\infty$

Analicemos los distintos casos:

(a y b')

γ está en un pseudo-hueco V de índice $-\infty \Rightarrow V \subset \sigma_{ed}(B)$

μ está en un pseudo-hueco U de índice $+\infty \Rightarrow U \subset \sigma_{ei}(A)$

Tomemos μ_0 y γ_0 como en el lema 4.1 entonces

Si $\gamma_0 \in \partial V$ entonces $\gamma_0 \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ei}(B)$

$$\mu_0 \in \begin{cases} U \Rightarrow \mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \\ \text{ó} \\ \partial U \subset \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ei}(A) \end{cases}$$

De donde

$\mu_0\gamma_0 = \mu\gamma \in \sigma_{ei}(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A \otimes B)$ (lema

Por lo tanto $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

Si $\mu_0 \in \partial U$ entonces $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ed}(A)$

Ya analizamos el caso en que $\gamma_0 \in \partial V$. Así, supongamos que

$\gamma_0 \in V \Rightarrow \gamma_0 \in \sigma_{ed}(B)$. De donde

$\mu_0\gamma_0 = \mu\gamma \in \sigma_{ed}(A)\sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ed}(A \otimes B)$ (lema

Por lo tanto $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$

(b y b')

$\mu \in U$ pseudo-hueco de índice $+\infty \Rightarrow U \subset \sigma_{ei}(A)$

$\gamma \in W$ hueco de índice menor que cero $\Rightarrow W \subset \sigma(B)$.

Tomemos μ_0 y γ_0 como en el lema 4.1 entonces:

Si $\gamma_0 \in \partial W$ tenemos un caso análogo al anterior y $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

Supongamos $\mu_0 \in \partial U \Rightarrow \mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ed}(A)$ y $\gamma_0 \in W \Rightarrow$ por ser el índice < 0, que el $\mathrm{Def}(B - \gamma_0 I) > 0 \Rightarrow$ $\overline{\gamma}_0 \in \pi_0(B^*) \Rightarrow \gamma_0 \in \sigma_d(B)$ y como $\mu_0 \in \sigma_{ed}(A)$ se tiene que - (lema 4.2(ii)) $\mu_0\gamma_0 = \mu\gamma \in \sigma_{ed}(A \otimes B)$.

De donde $\mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$

ii) La demostración es análoga a la del inciso (i).

Proposición 4.4 Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\sigma_e(A), \sigma_e(A \otimes B)$ los espectros esenciales de A y $A \otimes B$ respectivamente y $\sigma(B)$ el espectro de B entonces

$$\sigma_e(A)\sigma(B) \subset \sigma_e(A \otimes B)$$

Demostración.

Utilizando los lemas 4.2 y 4.3 la demostración es inmediata De manera análoga se demuestra que $\sigma(B)\sigma_e(A) \subset \sigma_e(A \otimes B)$ Por lo tanto $\sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A \otimes B)$.

Veamos ahora los lemas y proposiciones necesarios para probar la otra inclusión.

Proposición 4.5 Sea $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(A \otimes B) \setminus \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$ con $\lambda = \mu\gamma$ donde $\mu \in \sigma(A)$, $\gamma \in \sigma(B)$ entonces μ y γ no pueden estar ambos en huecos contenidos en $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ respectivamente.

Demostración

Como $\lambda \in \sigma(A \otimes B) \setminus \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)\sigma(B)$ y

$\lambda \notin \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B) \therefore \lambda \notin \sigma_e(A)\sigma(B)$ y $\lambda \notin \sigma(A)\sigma_e(B)$

Sabemos que $\lambda = \mu\gamma$ con $\mu \in \sigma(A)$ y $\gamma \in \sigma(B)$.

Así $\mu \in \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ y $\gamma \in \sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$

Supongamos que $\mu \in W \subset \sigma(A)$ y $\gamma \in V \subset \sigma(B)$ donde W y V son huecos.

Tomemos μ_0, γ_0 como en el lema 4.1

Si $\mu_0 \in \partial W$ entonces $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_e(A)$

$$\gamma_0 \in \begin{cases} V \subset \sigma(B) \\ \text{ó} \\ \partial V \Rightarrow \gamma_0 \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B) \subset \sigma_e(B) \subset \sigma(B) \end{cases}$$

De donde

$\lambda = \mu_0\gamma_0 \in \sigma_e(A)\sigma(B)$ lo cual es una contradicción entonces y γ no están en huecos simultaneamente.

Supongamos que $\gamma_0 \in \partial V \Rightarrow \gamma_0 \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B) \subset \sigma_e(B)$ y $\mu_0 \in W \subset \sigma(A)$ entonces $\lambda = \mu_0\gamma_0 \in \sigma(A)\sigma_e(B)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto μ y γ no están en huecos simultaneamente

NOTA: Recordemos que si $\mu \in \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ y μ no está en un hueco del $\sigma_e(A)$ entonces μ es un punto aislado de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$

Lema 4.6 Sea λ como en la proposición anterior y sea

$D_A = \{\mu \mid \mu$ es un punto aislado de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ tal que $\exists \gamma \in \sigma(B)$ con la propiedad que $\lambda = \mu\gamma\}$

entonces D_A es finito

Demostración

Supongamos que D_A es infinito. $D_A \subset \sigma(A) \setminus \sigma_e(A) \subset \sigma(A)$.
Como $\sigma(A)$ es compacto entonces [Teorema 2.37] existe una sucesión $\mu_n \in D_A$ convergente

$$\mu_n \longrightarrow \mu_0 \in \sigma(A)$$

μ_0 no es un punto aislado de $\sigma(A)$ por ser de acumulación.

μ_0

- $\in \sigma_e(A)$
- $\notin \sigma_e(A) \Rightarrow A - \mu_0 I$ es Fredholm $\Rightarrow \mu_0 \in H \subset \sigma(A)$ (o es un punto aislado lo cual es una contradicción por ser de acumulación) donde H es un hueco. Para n suficientemente grande $\mu_n \in H \subset \sigma(A)$ por ser H abierto $\therefore \mu_n$ no es punto aislado para n suficientemente grande, lo cual es una contradicción

Sea $\gamma_n = \lambda/\mu_n$, $\{\gamma_n\}$ es una sucesión en $\sigma(B)$ que converge a λ/μ_0 ($\mu_0 \neq 0$ ya que las γ_n están acotadas).

$\lambda = \mu_0 \gamma_0$ donde $\mu_0 \in \sigma_e(A)$, $\gamma_0 \in \sigma(B) \Rightarrow \lambda \in \sigma_e(A)\sigma(B)$ lo cual es una contradicción por lo tanto D_A es finito, o sea, $D_A = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$.

Claramente se tiene una afirmación similar para el conjunto D_B definido de manera análoga.

Observación 4.7

Los puntos aislados de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ son valores propios de multiplicidad finita ($\mu \in D_A \subset \sigma(A) \setminus \sigma_e(A) \Rightarrow A - \mu I$ es Fredholm $\Rightarrow$ rango de $A - \mu I$ es cerrado, $\mathrm{Nul}(A - \mu I) < \infty$ y $\mathrm{Def}(A - \mu I) < \infty \Rightarrow$ $\ker(A - \mu I) = \{x \mid Ax = \mu x\} \Rightarrow \mu$ es un valor propio de A de multiplicidad finita (multiplicidad finita $\Longleftrightarrow \dim\{x \mid Ax = \mu x\}$ es finita)).

Los puntos aislados de $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$ son valores propios de multiplicidad finita.

Utilizando el teorema de descomposición de Riesz, tenemos - que existe $\mathcal{H}'$ tal que $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}$ y una descomposición ortogonal tal que $\mathcal{H}' = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus M_{n+1}$ y operadores $A_j \in \mathcal{L}(M_j)$ $1 \leq j \leq n+1$ tales que

i) $\dim M_j < \infty$ $1 \leq j \leq n$

ii) $\sigma(A_j) = \{\mu_j\} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$

iii) $\sigma(A_{n+1}) \cap \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \phi$

iv) A es similar a $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus A_{n+1}$.

$$A_j = \begin{bmatrix} \mu_j & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mu_j \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura pondremos $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus A_{n+1}$

Analogamente $\exists\, \mathcal{H}''$ tal que $\mathcal{H}'' \cong \mathcal{H}$, $\mathcal{H}'' = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m \oplus N_{m+1}$ y existen operadores $B_k \in \mathcal{L}(N_k)$ tales que

i) $\dim N_k < \infty \quad 1 \leqslant k \leqslant m$

ii) $\sigma(B_k) = \{\gamma_k\} \quad 1 \leqslant k \leqslant m$

iii) $\sigma(B_{m+1}) \cap \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} = \phi$

iv) $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus B_{m+1}$

$$B_k = \begin{bmatrix} \gamma_k & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \gamma_k \end{bmatrix}$$

De donde

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_1 \otimes B & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & A_n \otimes B & \\ 0 & & & A_{n+1} \otimes B \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A_1 \otimes B = A_1 \otimes (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m \oplus B_{m+1})$$

$$= (A_1 \otimes B_1) \oplus \cdots \oplus (A_1 \otimes B_m) \oplus (A_1 \otimes B_{m+1})$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \otimes B - \lambda I = {} & A_1 \otimes B_1 - \lambda I \oplus \cdots \oplus A_1 \otimes B_m - \lambda I \oplus A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \\ & \vdots \\ & \oplus A_n \otimes B_1 - \lambda I \oplus \cdots \oplus A_n \otimes B_{m+1} - \lambda I \\ & \oplus A_{n+1} \otimes B_1 - \lambda I \oplus \cdots \oplus A_{m+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I \end{aligned}$$

Sea λ como en la proposición 4.5. De acuerdo a la descomposición anterior.

Proposición 4.8 $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm $\forall j = 1, \ldots, n+1$

$\forall k = 1, \ldots, m+1$

Demostración

Probaremos que $A_1 \otimes B_1 - \lambda I$ es Fredholm.

Como M_1 y N_1 son de dimensión finita $\Rightarrow$ son cerrados y la dimensión de la matriz es $\dim M_1 \times \dim N_1 \Rightarrow$ la matriz es de dimensión finita $\Rightarrow S = M_1 \otimes N_1$ es cerrado.

Sea $T = A_1 \otimes B_1 - \lambda I$

$$\begin{aligned}\dim S &= \dim(\text{rango } T) + \dim \ker T\\ &= \dim(\ker T^*)^{\perp} + \dim \ker T\\ &= \dim S - \dim \ker T^* + \dim \ker T\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim \ker T - \dim \ker T^* = 0 \Rightarrow \text{Nul } T = \text{Def } T \Rightarrow T$ es Fredholm de indice cero. Analogamente se prueba que $A_j \otimes B_k - \lambda I$ con $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$ son Fredholm de índice cero.

Veremos ahora que $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es Fredholm

$\lambda \notin \sigma(A_{n+1})\sigma(B_{m+1}) = \sigma(A_{n+1} \otimes B_{m+1}) \Rightarrow A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es invertible $\Rightarrow$ es Fredholm de indice cero.

Solo falta analizar los operadores de la forma $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ y

$A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I \quad 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m$

Veamos que $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$ e Fredholm

$$A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I = (A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I) + (\mu_1 I \otimes B_{m+1}) - (\mu_1 I \otimes B_{m+1})$$

$$= (I \otimes \mu_1 B_{m+1} - \lambda I \otimes I) + (A_1 \otimes B_{m+1} - \mu_1 I \otimes B_{m+1})$$

$$= (I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) + ((A_1 - \mu_1 I) \otimes B_{m+1})$$

P.D. $I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}})$ es Fredholm.

$$I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}}) = \underbrace{\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}} \oplus \ldots \oplus \mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}}}_{\dim M_1 < \infty}$$

$$\mu_1 B_{m+1} - \lambda I = \mu_1 (B_{m+1} - \lambda/_{\mu_1} I)$$

$\lambda/_{\mu_1} \notin \sigma_e(B_{m+1})$ porque si $\lambda/_{\mu_1} \in \sigma_e(B_{m+1}) \subset \sigma_e(B) \Rightarrow \lambda/_{\mu_1} \in \sigma_e(B)$ y como $\mu_1 \in \sigma(A) \Rightarrow \mu_1 (\lambda/_{\mu_1}) \in \sigma(A)\sigma_e(B)$ lo cual es una contradicción $\therefore \lambda/_{\mu_1} \notin \sigma_e(B_{m+1})$

Como $\lambda/_{\mu_1} \notin \sigma_e(B_{m+1}) \Rightarrow B_{m+1} - \lambda/_{\mu_1} I$ es Fredholm $\Rightarrow \mu_1 (B_{m+1} - \lambda/_{\mu_1} I)$ es Fredholm.

$\therefore$ $I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)$ es Fredholm y su índice es:

$$i(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) = (\dim M_1)(i(\mu_1 (B_{m+1} - \lambda/_{\mu_1} I))).$$

Como F es abierto en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ existe $\delta > 0$ tal que si $\| S - I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) \| < \delta$ entonces S es Fredholm y tiene el mismo índice que

$$I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)$$

Además $A_1 - \mu_1 I$ es nilpotente entonces es similar a un operador nilpotente de norma menor que $\delta / \| B_{m+1} \|$ es decir que existe

$$X \in \mathcal{L}(M_1) \text{ invertible tal que } X^{-1}(A_1 - \mu_1 I)X = T \text{ y}$$

$$\| T \| < \delta / \| B_{m+1} \| \Rightarrow \| X^{-1}(A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1} \| = \| X^{-1}(A_1 - \mu_1 I) X \| \| B_{m+1} \| < \delta$$

$\Rightarrow I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) + (X^{-1}(A_1 - \mu_1 I) X) \otimes B_{m+1}$ es Fredholm del mismo indice que $I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)$

Pero

$$(X^{-1} \otimes I)(A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I)(X \otimes I) =$$

$$= (X^{-1} \otimes I)((I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + ((A_1 - \mu_1 I) \otimes B_{m+1})(X \otimes I)$$

$$= (X^{-1} \otimes I)(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I))(X \otimes I) + (X^{-1} \otimes I)((A_1 - \mu_1 I) \otimes B_{m+1})(X \otimes I)$$

$$= (I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + (X^{-1}(A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1}).$$

Entonces

$A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I$ es similar a

$$(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + (X^{-1}(A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1})$$

Por lo tanto es Fredholm del mismo índice, de donde

$$i(A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I) = (\dim M_1)(i(\mu_1(B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I)))$$

Analogamente se prueba que $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ y $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq k \leq m$ son Fredholm

$\therefore$ $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm para toda j y k.

Teorema 4.9 $\sigma_e(A \otimes B) = \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$

Demostración.

Caso 1. $\lambda = 0$

Si $0 \in \sigma_e(A \otimes B)$ entonces $A \otimes B$ no es Fredholm

$A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B)$ no es Fredholm.

Supongamos que $(A \otimes I)$ y $(I \otimes B)$ son Fredholm entonces por [Proposición 1.16] $A \otimes B$ es Fredholm.

Entonces alguno de los dos no es Fredholm. Supongamos que $A \otimes I$ no Fredholm $\Rightarrow 0 \in \sigma_e(A \otimes I) = \sigma(A)$ y sea $\gamma \in \sigma_e(B)$

$\Rightarrow 0.\gamma = 0 \in \sigma(A)\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$.

Analogamente se demuestra si $I \otimes B$ es no Fredholm. De donde si $0 \in \sigma_e(A \otimes B)$ entonces $0 \in \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$

La otra implicación se sigue de la proposición 4.4.

Caso 2. $\lambda \neq 0$

Por la proposición 4.4 tenemos

$$\sigma_e(A \otimes B) \supset \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B).$$

Para la otra contención

Sabemos que $\sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B) \subset \sigma(A \otimes B)$

si $\lambda \notin \sigma(A \otimes B)$ entonces claramente $\lambda \notin \sigma_e(A \otimes B)$

si $\lambda \in \sigma(A \otimes B) \setminus \sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$ entonces usando la proposición 4.5 y el lema 4.6 podemos descomponer a $\mathcal{H}$ como en la observación 4.7 y obtener

$$\begin{aligned} A \otimes B - \lambda I = {} & A_1 \otimes B_1 - \lambda I \oplus \ldots\ldots \oplus A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \\ & \vdots \\ & \oplus A_{n+1} \otimes B_1 - \lambda I \oplus \ldots\ldots \oplus A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I \end{aligned}$$

Por la proposición 4.8, cada $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm y como la suma directa de operadores de Fredholm es de Fredholm obtenemos que $A \otimes B - \lambda I$ es de Fredholm y por lo tanto $\lambda \notin \sigma_e(A \otimes B)$ y además

$$i(A \otimes B - \lambda I) = \Sigma\, i(A_j \otimes B_k - \lambda I)$$

El objetivo de este capítulo es el de obtener una caracterización del espectro esencial izquierdo y del espectro esencial derecho del producto tensorial de dos operadores.

Para ello utilizaremos algunos de los resultados y técnicas usadas en el capítulo IV, así como algunos teoremas de Fralkow [6], [7].

Los resultados que probaremos en este capítulo son:

$$\sigma_{ei}(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$$

$$\sigma_{ed}(A \otimes B) = \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B) \cup \sigma_d(A)\sigma_{ed}(B)$$

que son análogos al obtenido en el capítulo anterior.

Teorema 5.1 [12 teorema 5.31 Cap. IV] Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ semi-Fredholm, entonces $T-\lambda I$ es semi-Fredholm y $\mathrm{Nul}(T-\lambda I)$, $\mathrm{Def}(T-\lambda I)$ son constantes para $|\lambda| > 0$ suficientemente pequeña

Lema 5.2 [7 lema 3.6].

i) Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \partial(\sigma_d(T))$ y λ no es un punto aislado de $\sigma_d(T)$ entonces $\lambda \in \sigma_{ed}(T) \cap \sigma_{ei}(T)$.

ii) Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \partial(\sigma_i(T))$ y λ no es un punto aislado de $\sigma_i(T)$ entonces $\lambda \in \sigma_{ed}(T) \cap \sigma_{ei}(T)$.

Demostración

i) Supongamos que $\lambda \in \partial(\sigma_d(T))$, λ no es un punto aislado de $\sigma_d(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{ed}(T) \cap \sigma_{ei}(T)$ entonces $\psi(T-\lambda I)$ es invertible por la izquierda o por la derecha y por lo tanto es semi-Fredholm.

Entonces por el lema 5.1 existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{Ran}(T-\beta I)$ es cerrado, $\mathrm{Nul}(T-\beta I)$ y $\mathrm{Def}(T-\beta I)$ son constantes para $0 < |\beta - \lambda| < \delta$.

Como $\lambda \in \partial(\sigma_d(T))$ entonces existe $\beta_0 \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\beta_0 - \lambda| < \delta$ y $T - \beta_0 I$ es invertible por la derecha, de donde $T - \beta_0 I$ es sobre y $\mathrm{Def}(B-\beta_0 I)=0$. Por lo tanto $\mathrm{Def}(T-\beta I)=0$ para toda β tal que $0 < |\beta - \lambda| < \delta$,

entonces

$$\{\beta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\beta - \lambda| < \delta\} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_d(T)$$

Por lo tanto λ es un punto aislado de $\sigma_d(T)$, lo cual es una contradicción. De donde

$$\lambda \in \sigma_{ed}(T) \cap \sigma_{ei}(T)$$

ii) La demostración es análoga a la del inciso (i).

Lema 5.3 Sea $H \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y D un conjunto numerable de puntos aislados en H. Entonces $H\setminus D$ es conexo.

Demostración

Como H es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ entonces H es conexo por trayectorias. Sean $x, y \in H$ y Γ una trayectoria en H que une a x con y. Como D son puntos aislados, por cada $z_j \in D$ existe $B_{\varepsilon_j}(z_j)$ tal que $B_{\varepsilon_j} \cap D = \{z_j\}$ si $\Gamma \cap D \neq \phi$. Entonces se modifica la trayectoria dentro de la bola $B_{\varepsilon_j}(z_j)$ de manera que no pase por z_j. Sea Γ' la nueva trayectoria entonces $\Gamma' \subset H\setminus D$, es decir que $H\setminus D$ es conexo por trayectorias de donde $H\setminus D$ es conexo.

Teorema 5.4 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y H un hueco o pseudo-hueco de $\sigma_e(T)$ tal que $H \subset \mathbb{C}\setminus\sigma_{ei}(T)$, entonces sucede una y solo una de las siguientes afirmaciones:

a) $H \cap \sigma_i(T) = \phi$

b) $H \subset \sigma_i(T)$

c) $H \cap \sigma_i(T)$ es un conjunto numerable de puntos aislados de $\sigma_i(T)$.

Más aún la intersección de $\sigma_i(T)$ con la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ei}(T)$ es un conjunto numerable de puntos aislados.

Demostración

Supongamos que (a) y (b) no suceden.

Sea $W_n = \{\lambda \in H \cap \partial\sigma_i(T) \mid \text{dist}(\lambda,\sigma_{ei}(T)) \geq \frac{1}{n}\}$ entonces por el lema 5.2 W_n contiene unicamente puntos aislados de $\sigma_i(T)$.

Probemos que W_n es finito.

Supongamos que W_n es infinito, entonces existe una sucesión $\{\lambda_m\} \subset W_n$ tal que λ_m converge a λ_0. Como $\partial\sigma_i(T)$ es cerrada entonces $\lambda_0 \in \partial\sigma_i(T)$ y además $\text{dist}(\lambda_0,\sigma_{ei}(T)) \geq \frac{1}{n}$, por lo - tanto $\lambda_0 \in W_n$ y es un punto de acumulación de $\sigma_i(T)$, lo cual es una contradicción ya que λ_0 es un punto aislado de $\sigma_i(T)$ por estar en W_n

Por lo tanto W_n es finito.

Sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = H \cap \partial\sigma_i(T)$ es un conjunto numerable de puntos aislados de $\sigma_i(T)$.

Ahora probaremos que $H \cap \text{int}\,\sigma_i(T)$ es vacio, así habremos probado que $H \cap \sigma_i(T) = D$.

Supongamos que $H \cap \text{int}\,\sigma_i(T) \neq \phi$ entonces

$$H \setminus D = H \setminus \partial\,\sigma_i(T) = (\text{int}\,\sigma_i(T) \cap H) \cup (H \setminus \sigma_i(T))$$

donde $(\text{int}\,\sigma_i(T) \cap H)$ y $(H \setminus \sigma_i(T))$ son abiertos no vacios y ajenos. Por lo tanto $H \setminus \partial\sigma_i(T) = H \setminus D$ es disconexo, lo que - contradice el lema 5.3

Para probar que $\sigma_{ei}(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$

solo falta una de las inclusiones, ya que la inclusión $\sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A \otimes B)$ es consecuencia del lema 4.2. Veremos primero algunos lemas y proposiciones que nos servirán para esta demostración.

Lema 5.5 [10] $\sigma_i(A \otimes B) = \sigma_i(A)\sigma_i(B)$

Proposición 5.6 Sea $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma_i(A \otimes B) \setminus \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ con $\lambda = \mu\gamma$ donde $\mu \in \sigma_i(A)$, $\gamma \in \sigma_i(B)$ entonces μ y γ no puede estar en huecos o pseudo-huecos simultaneamente contenidos en $\sigma_i(A)$ y $\sigma_i(B)$ respectivamente.

Demostración

Como $\lambda \in \sigma_i(A \otimes B) \setminus \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ entonces $\lambda \in \sigma_i(A)\sigma_i(B)$ por el lema 5.5 y $\lambda \notin \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ es decir que $\lambda \notin \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B)$ y $\lambda \notin \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$.

Sabemos que $\lambda = \mu\gamma$ con $\mu \in \sigma_i(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B)$.

Así $\mu \in \sigma_i(A) \setminus \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B) \setminus \sigma_{ei}(B)$

Supongamos que $\mu \in W \subset \sigma_i(A)$ y $\gamma \in V \subset \sigma_i(B)$ donde W y V son huecos o pseudo-huecos de índice $-\infty$.

Tomemos μ_0, γ_0 como en el lema 4.1.

Si $\mu_0 \in \partial W$ entonces $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma_0 \in \sigma_i(B)$ entonces $\lambda = \mu_0\gamma_0 \in \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B)$ esto es una contradicción.

Si $\gamma_0 \in \partial V$ entonces $\gamma_0 \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ei}(B)$ y $\mu_0 \in \sigma_i(A)$ entonces $\lambda = \mu_0 \gamma_0 \in \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto μ y γ no están simultaneamente en huecos o pseudo-huecos contenidos en $\sigma_i(A)$ y $\sigma_i(B)$ respectivamente.

Nota: Recordemos que si $\mu \in \sigma_i(A) \setminus \sigma_{ei}(A)$ y μ no está en un hueco o pseudo-hueco del $\sigma_{ei}(A)$ entonces μ es un punto aislado de $\sigma_i(A) \setminus \sigma_{ei}(A)$.

Lema 5.7 Sea λ como en la proposición anterior y sea

$$D_{A_i} = \{\mu \mid \mu \text{ es un punto aislado de } \sigma_i(A) \text{ en } \sigma_i(A) \setminus \sigma_{ei}(A) \text{ tal que existe } \gamma \in \sigma_i(B) \text{ con la propiedad que } \lambda = \mu\gamma\}$$

entonces D_{A_i} es finito

Demostración

La demostración es análoga a la del lema 4.6, utilizando el lema 5.2.

También en este caso se tiene una afirmación similar para el conjunto D_{B_i} definido de manera análoga.

Observación 5.8

Sea $\mu_j \in D_{A_i}$, $1 \leq j \leq n$ entonces por [7 corolario 2.3] existe $\mathcal{H}'$ tal que $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}$ y una descomposición ortogonal tal que $\mathcal{H}' = M_1 \oplus \dots \oplus M_{n+1}$ y operadores $A_j \in \mathcal{L}(M_j)$ $1 \leq j \leq n+1$ tal que:

i) $\dim M_j < \infty \quad (1 \leq j \leq n)$

ii) $\sigma(A_j) = \{\mu_j\} \quad (1 \leq j \leq n)$

iii) $\sigma_i(A_{n+1}) \cap \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \phi$

iv) A es similar a $A_1 \oplus \ldots \oplus A_{n+1}$

$$A_j = \begin{bmatrix} \mu_j & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \mu_j \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura pondremos $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_{n+1}$

Analogamente existe $\mathcal{H}''$ tal que $\mathcal{H}'' \cong \mathcal{H}$, $\mathcal{H}'' = N_1 \oplus \ldots \oplus N_{m+1}$ y existen operadores $B_k \in \mathcal{L}(N_k)$ $1 \leq k \leq m+1$ tal que:

i) $\dim N_k < \infty \quad (1 \leq k \leq m)$

ii) $\sigma(B_k) = \{\gamma_k\} \quad (1 \leq k \leq m)$

iii) $\sigma_i(B_{m+1}) \cap \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} = \phi$

iv) $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_{m+1}$

$$B_k = \begin{bmatrix} \gamma_k & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \gamma_k \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_1 \otimes B & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_{m+1} \otimes B \end{bmatrix}$$

donde

$$A_1 \otimes B = A_1 \otimes (B_1 \oplus \ldots \oplus B_{m+1})$$

$$= A_1 \otimes B_1 \oplus \ldots \oplus A_1 \otimes B_{m+1}$$

Por lo tanto

$$A \otimes B - \lambda I = A_1 \otimes B_1 - \lambda I \oplus \ldots \oplus A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$$
$$\vdots$$
$$\oplus A_{n+1} \otimes B_1 - \lambda I \oplus \ldots \oplus A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$$

Sea λ como en la proposición 5.6. Conforme a la descomposición anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.9 $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm de índice cero con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq k \leq m$.

Demostración

La demostración se sigue de la primera parte de la prueba de la proposición 4.8.

Proposición 5.10 $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ $1 \leq j \leq n$, $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ $1 \leq k \leq m$ y $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ son semi-Fredholm de índice menor que ∞.

Demostración

Probaremos que $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es semi-Fredholm.

Sabemos que $\lambda \notin \sigma_i(A_{n+1})\sigma_i(B_{m+1}) = \sigma_i(A_{n+1} \otimes B_{m+1})$ (lema 5.5) entonces $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es invertible por la izquierda, esto es, $\mathrm{Nul}(A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I) = 0$ y $\mathrm{Ran}(A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I)$ es cerrado. Por lo tanto $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es Fredholm o semi-Fredholm de índice menor o igual a cero.

Ahora veremos que $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es semi-Fredholm.

Por la demostración de la proposición 4.8 sabemos que podemos escribir $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$ como

$$(I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + ((A_1 - \mu_1 I) \otimes B_{m+1}):$$

Probaremos primero que $I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}})$ es semi-Fredholm izquierdo

$$I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}}) = \underbrace{\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}} \oplus \ldots \oplus \mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}}}_{\dim M_1 < \infty}$$

$\mu_1 B_{m+1} - \lambda I = \mu_1 (B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I)$

$\lambda/\mu_1 \notin \sigma_{ei}(B_{m+1})$ porque si $\lambda/\mu_1 \in \sigma_{ei}(B_{m+1}) \subset \sigma_{ei}(B)$ entonces $\lambda/\mu_1 \in \sigma_{ei}(B)$ y como $\mu_1 \in \sigma_i(A)$ entonces $\lambda = \mu_1(\lambda/\mu_1) \in \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ que es una contradicción.

Ahora como $\lambda/\mu_1 \notin \sigma_{ei}(B_{m+1})$ entonces $\mathrm{Ran}(B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I)$ es cerrado y $\mathrm{Nul}(B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I) < \infty$, es decir, $B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I$ es semi-Fredholm de índice menor que ∞.

Así que, $\mu_1(B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I)$ también es semi-Fredholm de índice $< \infty$ de donde $I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)$ es semi-Fredholm y el índice es la suma de los índices, es decir,

$$i(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) = (\dim M_1)(i(\mu_1(B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I)))$$

Por ser los operadores semi-Fredholm un conjunto abierto existe $\delta > 0$ tal que si $\| S - I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) \| < \delta$ entonces S es semi-Fredholm del mismo índice.

Como $A_1 - \mu_1 I$ es nilpotente entonces es similar a un operador nilpotente de norma menor que $\delta/\|B_{m+1}\|$ [15].

Esto es, existe $X \in \mathcal{L}(M_1)$ invertible tal que $X^{-1}(A_1 - \mu_1 I)X = T$ y $\|T\| < \delta/\|B_{m+1}\|$ entonces $\| X^{-1}(A_1 - \mu_1 I)X \otimes B_{m+1} \| < \delta$

Por lo tanto $(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + (X^{-1}(A_1 - \mu_1 I)X \otimes B_{m+1})$ es semi-Fredholm del mismo índice que $I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)$

Pero $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es similar a $(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + (X^{-1}(A_1 - \mu_1 I)X \otimes B_{m+1})$ de donde $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es semi-Fredholm y su índice es

$$i(A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I) = (\dim M_1)(i(\mu_1 (B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I))) < \infty$$

Analogamente se prueba que $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ y $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ con $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$ son semi-Fredholm de índice menor que ∞.

Teorema 5.11 $\sigma_{ei}(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$.

Demostración

Por el lema 4.2 tenemos que $\sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A \otimes B)$

Caso 1. $\lambda = 0$

Si $0 \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ entonces $A \otimes B$ no es semi-Fredholm izquierdo. Sabemos que $A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B)$

Supongamos que $(A \otimes I)$ y $(I \otimes B)$ son semi-Fredholm izquierdos, entonces por [13 proposición 1.16] $A \otimes B$ es semi-Fredholm izquierdo. Por lo tanto alguno de los dos no lo es.

Supongamos que $A \otimes I$ no es semi-Fredholm izquierdo entonces $0 \in \sigma_{ei}(A \otimes I) = \sigma_i(A)$ y sea $\gamma \in \sigma_{ei}(B)$, entonces

$$0 \cdot \gamma = 0 \in \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$$

Si $I \otimes B$ es el que no es semi-Fredholm izquierdo la demostración es similar.

De modo que si $0 \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ entonces

$$0 \in \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$$

Caso 2. $\lambda \neq 0$

Para probar que $\sigma_{ei}(A \otimes B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ usaremos los lemas y proposiciones anteriores

Sabemos que $\sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_i(A \otimes B)$

Si $\lambda \notin \sigma_i(A \otimes B)$ entonces $\lambda \notin \sigma_{ei}(A \otimes B)$

Si $\lambda \in \sigma_i(A \otimes B) \setminus \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ei}(B)$ entonces usando la proposición 5.6 y el lema 5.7 podemos descomponer a $\mathcal{H}$ de la misma manera que en la observación 5.8 y obtener

$$\begin{aligned} A \otimes B - \lambda I = {} & A_1 \otimes B_1 - \lambda I \oplus \ldots \oplus A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \\ & \vdots \\ & \oplus A_{n+1} \otimes B_1 - \lambda I \oplus \ldots \oplus A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I \end{aligned}$$

Por la proposición 5.9 $A_j \otimes B_k - \lambda I$ con $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$ son Fredholm y por la proposición 5.10 $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ con $1 \leq j \leq n$, $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ con $1 \leq k \leq m$ y $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ son semi-Fredholm de índice menor que ∞.

Además la suma directa de semi-Fredholm es semi-Fredholm, de donde obtenemos que:

$A \otimes B-\lambda I$ es semi-Fredholm con índice $i(A \otimes B-\lambda I)=\Sigma i(A_j \otimes B_k-\lambda I)$

Por lo tanto $\lambda \notin \sigma_{ei}(A \otimes B)$.

Teorema 5.12 $\sigma_{ed}(A \otimes B)=\sigma_{ed}(A)\sigma_d(B) \cup \sigma_d(A)\sigma_{ed}(B)$

Demostración

$$\lambda \in \sigma_{ed}(A \otimes B) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_{ei}(A \otimes B)^* \iff \overline{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^* \otimes B^*)$$

$$\iff \overline{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^*)\sigma_i(B^*) \cup \sigma_i(A^*)\sigma_{ei}(B^*)$$

$$\iff \overline{\lambda} \in \sigma_{ei}(A^*)\sigma_i(B^*) \text{ o } \overline{\lambda} \in \sigma_i(A^*)\sigma_{ei}(B^*)$$

$$\iff \overline{\lambda}=\overline{\mu}\,\overline{\gamma} \text{ donde } \overline{\mu} \in \sigma_{ei}(A^*) \text{ y } \overline{\gamma} \in \sigma_i(B^*) \text{ o}$$

$$\overline{\mu} \in \sigma_i(A^*) \text{ y } \overline{\gamma} \in \sigma_{ei}(B^*)$$

$$\iff \mu \in \sigma_{ed}(A),\ \gamma \in \sigma_d(B) \text{ o } \mu \in \sigma_d(A),\ \gamma \in \sigma_{ed}(B)$$

$$\iff \lambda \in \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B) \text{ o } \lambda \in \sigma_d(A)\sigma_{ed}(B)$$

$$\iff \lambda \in \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B) \cup \sigma_d(A)\sigma_{ed}(B).$$

Utilizando las propiedades del espectro esencial tenemos el siguiente resultado

(1) $\sigma_e(A \otimes B)=\sigma_{ei}(A \otimes B) \cup \sigma_{ed}(A \otimes B)$

Por otro lado, usando el teorema 4.9 tenemos que

(2) $\sigma_e(A \otimes B)=\sigma_e(A)\sigma(B) \cup \sigma(A)\sigma_e(B)$

Ahora veremos que estos dos resultados son equivalentes, para ello usemos las siguientes igualdades

$$\sigma_e(A) = \sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ed}(A)$$

$$\sigma(A) = \sigma_i(A) \cup \sigma_d(A)$$

$$\sigma_e(B) = \sigma_{ei}(B) \cup \sigma_{ed}(B)$$

$$\sigma(B) = \sigma_i(B) \cup \sigma_d(B)$$

Sustituyendo en (2) haciendo los productos indicados y utilizando los resultados de los teoremas 5.11 y 5.12 obtenemos:

$$\sigma_e(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A \otimes B) \cup \sigma_{ed}(A \otimes B) \cup \sigma_{ei}(A)\sigma_d(B) \cup \sigma_{ed}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\sigma_{ed}(B)$$
$$\cup\, \sigma_d(A)\sigma_{ei}(B).$$

Este resultado aparentemente es diferente a la fórmula (1), sin embargo veremos a continuación que son iguales

Lema 5.13 $\sigma_{ei}(A)\sigma_d(B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B)$

Demostración

Sea $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\sigma_d(B)$ con $\lambda = \mu\gamma$ donde $\mu \in \sigma_{ei}(A)$, $\gamma \in \sigma_d(B)$

Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ pueden suceder dos casos.

a) $\mu \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A)$ de donde $\mu \in \sigma_{ed}(A)$, $\gamma \in \sigma_d(B)$ y $\lambda = \mu\gamma \in \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B)$.

b) $\mu \in \sigma_{ei}(A) \setminus \sigma_{ed}(A)$ de donde μ está en un pseudo-hueco U de índice $+\infty$

Si $\gamma \in \sigma_d(B)$ entonces puede suceder que:

a') $\gamma \in \sigma_{ed}(B) \cap \sigma_{ei}(B)$ de donde $\gamma \in \sigma_{ei}(B)$, $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B)$.

b') $\gamma \in \sigma_{ed}(B) \setminus \sigma_{ei}(B)$ de donde γ está en un pseudo-hueco V de índice $-\infty$

c') $\gamma \in \sigma_d(B) \setminus \sigma_{ed}(B)$ de donde γ está en un hueco

Si $\mathrm{Nul}(B-\gamma I) > 0$ entonces $\gamma \in \pi_0(B) \subset \sigma_i(B)$ por lo tanto $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B)$

Si $\mathrm{Nul}(B-\gamma I) = 0$ entonces γ está en un hueco W de índice menor que cero, $W \subset \sigma(B)$

Analicemos los distintos casos;

(b y b')

$\mu \in U$, $i(U) = +\infty$; $\gamma \in V$, $i(V) = -\infty$

Tomemos μ_0 y γ_0 como en el lema 4.1 entonces

Si $\gamma_0 \in \partial V$ entonces $\gamma_0 \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ei}(B)$

y $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A)$ entonces $\lambda = \mu_0\gamma_0 \in \sigma_{ei}(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B)$

Si $\mu_0 \in \partial V$ entonces $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ed}(A)$

y $\gamma_0 \in \sigma_{ed}(B)$ por lo tanto $\lambda = \mu_0\gamma_0 \in \sigma_{ed}(A)\sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B)$

de donde $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B)$

(b y c')

$\mu \in U,\ i(U) = +\infty;\quad \gamma \in W, i(W) < 0$

Tomemos μ_0, γ_0 como en el lema 4.1

Si $\gamma_0 \in \partial W$ entonces $\gamma_0 \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ei}(B)$

y $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A)$ por lo tanto $\lambda = \mu_0\gamma_0 \in \sigma_{ei}(A)\sigma_{ei}(B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B)$

Si $\mu_0 \in \partial U$ entonces $\mu_0 \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ed}(A)$

El caso en que $\gamma_0 \in \partial V$ ya ha sido analizado. Así, supongamos que $\gamma_0 \in W$, como $i(W) < 0$ entonces $\mathrm{Def}(B - \gamma_0 I) > 0$, es decir, $(B - \gamma_0 I)^*$ no es invertible por la izquierda, por lo tanto, $B - \gamma_0 I$ no es invertible por la derecha, esto es, $\gamma_0 \in \sigma_d(B)$ por lo tanto

$$\lambda \in \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B).$$

de donde

$$\sigma_{ei}(A)\sigma_d(B) \subset \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\sigma_d(B)$$

Analogamente se demuestra que $\sigma_{ed}(A)\sigma_i(B)$, $\sigma_i(A)\sigma_{ed}(B)$ y $\sigma_d(A)\sigma_{ei}(B)$ estan contenido en $\sigma_{ei}(A \otimes B) \cup \sigma_{ed}(A \otimes B)$

En la primera parte de este capítulo determinaremos como encontrar la figura espectral del producto tensorial de dos operadores A y B, conociendo la figura espectral de A y de B respectivamente.

Posteriormente calcularemos la figura espectral del producto tensorial de algunos operadores conocidos, como por ejemplo $U \otimes U$ donde U es el corrimiento lateral.

Lema 6.1 Sean J un hueco de $\sigma_e(A)$, $\gamma \neq 0$ un punto aislado de $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$, si $\gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ es no vacio entonces sus componentes conexas son huecos de $\sigma_e(A \otimes B)$.

Demostración

Como γJ es abierto y $\sigma_e(A \otimes B)$ es compacto entonces $\gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ es abierto. Si $\gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ es no vacio entonces como J es acotado, $\gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ es un subconjunto acotado y abierto de $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ y por lo tanto cada componente V de $\gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ está contenida en un único hueco H de $\sigma_e(A \otimes B)$. Supongamos ahora que $V \neq H$, entonces existe un punto $z_0 \in \partial V \cap H$ y como $H \cap \sigma_e(A \otimes B) = \phi$, $z_0 \notin \sigma_e(A \otimes B)$.

Elegimos una sucesión $\{z_n\}$ de puntos distintos de V tales que $z_n \to z_0$.

Como $V \subset \gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos distintos de J tales que $\gamma x_n = z_n$ para toda n. Sea $\{x_{n_k}\}$

una subsucesión convergente de $\{x_n\}$, digamos, $x_{n_k} \to x_0$. Entonces $x_0 \in \overline{J}$ y claramente $\gamma x_0 = z_0$. Pero que $x_0 \in \partial J$ es imposible ya que $\partial J \subset \sigma_e(A)$ y $\gamma x_0 = z_0 \notin \sigma_e(A \otimes B)$. Más aún, $x_0 \in J$ es imposible porque implicaría que $\gamma x_0 = z_0 \in \gamma J \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ contrario al hecho de que $z_0 \in \partial V$.

Análogamente se demuestra que si W es un hueco de $\sigma_e(B)$, $\mu \neq 0$ es un punto aislado de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$, si $\mu W \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ es no vacio entonces sus componentes conexas son huecos de $\sigma_e(A \otimes B)$

A continuación veremos como se forman los huecos H del $\sigma_e(A \otimes B)$ partiendo de los huecos del $\sigma_e(A)$ y $\sigma_e(B)$ así como de los puntos aislados de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ y $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$.

Sea $\lambda \in H$.

Definimos $E_A(\lambda) = \{\mu \mid \mu$ es un punto aislado de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$, tal que $\lambda/_\mu \in V_\mu \subset \sigma(B)$, donde V_μ es un hueco de $\sigma_e(B)\}$

y $E_B(\lambda) = \{\gamma \mid \gamma$ es un punto aislado de $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$, tal que $\lambda/_\gamma \in J_\gamma \subset \sigma(A)$ donde J_γ es un hueco de $\sigma_e(A)\}$

Consideremos ahora los conjuntos D_A y D_B definidos en el lema 4.6. Es fácil ver que $E_A \subset D_A$ y $E_B \subset D_B$ entonces como D_A y D_B son finitos, E_A y E_B también lo son.

Lema 6.2 Sean $\lambda \in H$ y $\gamma \in E_B(\lambda)$, $\gamma \neq 0$ entonces $H \subset \gamma J_\gamma \subset \sigma(A \otimes B)$

Demostración

Sean $\lambda \in H$, $\gamma \in E_B(\lambda)$, $\gamma \neq 0$ y $J_\gamma(\lambda)$ el hueco de $\sigma_e(A)$ tal que existe $\mu \in J_\gamma$ y $\mu\gamma = \lambda$.

Queremos ver que $H \subset \gamma J_\gamma$

Supongamos que $H \not\subset \gamma J_\gamma$, entonces existe un punto $z \in H \cap \partial(\gamma J_\gamma) \subset H \cap \gamma(\partial J_\gamma)$ ya que H y γJ_γ son conjuntos abiertos conexos.

Sea $x \in \partial(J_\gamma)$ tal que $\gamma x = z$. Como J_γ es abierto entonces $x \in \partial(J_\gamma) \subset (\sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A))$ y $z = \gamma x \in \gamma(\sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A)) \subset \sigma(B)\sigma_e(A)$, esto es, $z \in \sigma(B)\sigma_e(A) \subset \sigma_e(A \otimes B)$ lo cual es una contradicción ya que $z \in H$.

Por lo tanto $H \subset \gamma J_\gamma$

Ademas $\gamma J_\gamma \subset \sigma(B)\sigma(A) = \sigma(A \otimes B)$

Analogamente si $\lambda \in H$ y $\mu \in E_A(\lambda)$, $\mu \neq 0$ entonces $H \subset \mu V_\mu \subset \sigma(A \otimes B)$

Lema 6.3 Los conjuntos E_A y E_B son independientes de la λ elegida en H.

Demostración

Lo probaremos para E_B.

Sean $E_B(\lambda) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ y $\lambda' \in H$ tal que $\lambda' = \gamma'\mu'$ con $\gamma' \neq \gamma_i$ para toda i.

Sea J' el hueco de $\sigma_e(A)$ donde está μ' entonces por el lema 6.1

$H \subset \gamma' J'$, es decir, $\lambda = \mu''\gamma'$ lo cual es una contradicción, ya que $\gamma' \notin E_B(\lambda)$.

Lema 6.4 Sea H un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$. $H \subset \sigma(A \otimes B)$ si y solo si $E_A \neq \phi$ ó $E_B \neq \phi$

Demostración

<==) Es inmediato del lema 6.2

==>) Sea $H \subset \sigma(A \otimes B)$ y $\lambda \in H$. Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\} \subset H$ donde las λ_n son todas distintas y además $\lambda_n \neq 0$ para toda n, que converge a λ.

Como $H \subset \sigma(A \otimes B)$ y $\sigma(A \otimes B) = \sigma(A)\sigma(B)$ entonces $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)\sigma(B)$, es decir, $\lambda_n = \mu_n \gamma_n$ donde $\mu_n \in \sigma(A)$ y $\gamma_n \in \sigma(B)$. Además $H \cap \sigma_e(A \otimes B) = \phi$ entonces $\lambda_n \notin \sigma_e(A \otimes B)$. Por la proposición 4.5, μ_n y γ_n no estan ambos en huecos contenidos en $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ respectivamente. Por lo anterior $\mu_n \in \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ y $\gamma_n \in \sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$.

Tenemos que la sucesión $\{\mu_n\}$ está acotada y por lo tanto tiene una subsucesión $\{\mu_{n_k}\}$ que converge

$$\mu_{n_k} \to \mu_0$$

La subsucesión $\{\gamma_{n_k}\}$ de la sucesión $\{\gamma_n\}$ también está acotada y por lo tanto tiene una subsucesión $\{\gamma_{n_{k_j}}\}$ convergente

$$\gamma_{n_{k_j}} \to \gamma_0$$

De donde la sucesión $\{\mu_{n_{k_j}} \gamma_{n_{k_j}}\}$ converge a $\mu_0 \gamma_0$

Pero $\{\mu_{n_{k_j}} \gamma_{n_{k_j}}\} = \{\lambda_{n_{k_j}}\}$ convenga a λ. Por lo tanto $\lambda = \mu_0 \gamma_0$

Si ambas sucesiones $\{\mu_{n_{k_j}}\}$ y $\{\gamma_{n_{k_j}}\}$ fuera constantes entonces la sucesión $\{\lambda_{n_{k_j}}\}$ sería constante, lo que contradice a que todas eran distintas.

Supongamos que la sucesión $\{\mu_{n_{k_j}}\}$ no es constante entonces μ_0 es un punto de acumulación de $\sigma(A)\setminus\sigma_e(A)$. Sea J la componente de $\mathbb{C}\setminus\sigma_e(A)$ donde está μ_0.

Si J fuera la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus\sigma_e(A)$ entonces μ_0 sería un punto aislado de $\sigma(A)$.

Por lo tanto J es un hueco contenido en $\sigma(A)$ y γ_0 es un punto aislado de $\sigma(B)\setminus\sigma_e(B)$. Además $\gamma_0 \neq 0$ ya que si $\gamma_0 = 0$ entonces elegimos $\mu \in \sigma_e(A)$ tal que $\lambda = 0 \cdot \mu \in \sigma_e(A \otimes B)$

De donde $\gamma_0 \in E_B$.

Teorema 6.5 Sea H un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$. $H \subset \sigma(A \otimes B)$ si y solo si E_A ó E_B son no vacios y H es una componente conexa de

Recordemos que $\mathcal{H} \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus M_{n+1}$ y $\mathcal{H} \cong N_1 \oplus \ldots \oplus N_m \oplus N_{m+1}$

Los terminos $A_j \otimes B_k - \lambda I$ con $j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$ corresponden a la descomposición de λ en $\lambda = \mu\gamma$ donde μ es un punto aislado de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ y γ es un punto aislado de $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$ y su índice es cero (proposición 4.8)

Los términos $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ con $j = 1, \ldots, n$ son la descomposición de λ en $\lambda = \mu_j (\lambda/_{\mu_j})$ donde μ_j es un punto aislado de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ y $\lambda/_{\mu_j}$ está en un hueco V_{μ_j} contenido en $\sigma(B)$ y el índice de estos operadores es:

$$i(A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I) = \sum_{j=1}^{n} (\dim M_j)(i(\mu_j(B_{m+1} - \lambda/_{\mu_j} I)))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\dim M_j)(i(V_{\mu_j})).$$

Los terminos $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ con $k = 1, \ldots, m$ corresponde a la descomposición de λ en $\lambda = \gamma_k (\lambda/_{\gamma_k})$ donde γ_k es un punto aislado de $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$ y $\lambda/_{\gamma_k}$ está en un hueco J_{γ_k} contenido en $\sigma(A)$ y el índice de estos operadores es:

$$i(A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I) = \sum_{k=1}^{m} (\dim N_k)(i(\gamma_k(A_{n+1} - \lambda/_{\gamma_k} I)))$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (\dim N_k)(i(J_{\gamma_k})).$$

El término $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es invertible y por lo tanto su índice es cero (proposición 4.8).

Por lo tanto el índice de $A \otimes B - \lambda I$ es:

$$i(A \otimes B - \lambda I) = \sum_{j=1}^{n} (\dim M_j)(i(V_{\mu_j})) + \sum_{k=1}^{m} (\dim N_k)(i(J_{\gamma_k})).$$

Esta fórmula no depende de λ. Como una recopilación de lo anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.6 Sea H un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$

i) Si $E_A = E_B = \phi$ entonces $H \not\subset \sigma(A \otimes B)$ y por lo tanto $i(H) = 0$

ii) Si $E_A \neq \phi$ ó $E_B \neq \phi$ entonces

$$i(H) = \sum_{j=1}^{n} (\dim M_j)(i(V_{\mu_j})) + \sum_{k=1}^{m} (\dim N_k)(i(J_{\gamma_k}))$$

Estudiemos ahora los pseudo-huecos de $\sigma_e(A \otimes B)$.

Lema 6.7 Sean J' un pseudo-huecos de índice $-\infty\,[+\infty]$ de $\sigma_e(A)$ y $\gamma \neq 0$ un punto aislado de $\sigma_i(B) \setminus \sigma_{ei}(B)$ $[\sigma_d(B) \setminus \sigma_{ed}(B)]$, si $\gamma J' \setminus \sigma_{ei}(A \otimes B)$ es no vacio $[\gamma J' \setminus \sigma_{ed}(A \otimes B)]$ entonces sus componentes conexas son pseudo-huecos de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $-\infty\,[+\infty]$.

Demostración

La demostración es análoga a la del lema 6.1

Analogamente se demuestra que si W' es un pseudo-hueco de índice $-\infty\,[+\infty]$ de $\sigma_e(B)$ y $\mu \neq 0$ es un punto aislado de

$\sigma_i(A)\setminus\sigma_{ei}(A)$ $[\sigma_d(A)\setminus\sigma_{ed}(A)]$, si $\mu W'\setminus\sigma_{ei}(A\otimes B)$ es no vacio $[\mu W'\setminus\sigma_{ed}(A\otimes B)]$ entonces sus componentes conexas son pseudo-huecos de $\sigma_e(A\otimes B)$ de índice $-\infty[+\infty]$.

Para λ en un pseudo-hueco H' de índice $-\infty$ definimos $E_{A_i}(\lambda)$ como sigue:

$E_{A_i}(\lambda)=\{\mu|\mu$ es un punto aislado de $\sigma_i(A)\setminus\sigma_{ei}(A)$ tal que $\lambda/\mu\in V_\mu\subset\sigma_i(B)$ donde V_μ es pseudo-hueco de $\sigma_e(B)$ de índice $-\infty\}$.

y definimos $E_{B_i}(\lambda)$ de manera análoga.

De la misma manera como se hizo en el caso de los huecos, se puede demostrar que E_{A_i} y E_{B_i} son independientes de la λ elegida en el pseudo-hueco. Además tenemos que $H'\subset\sigma_i(A\otimes B)$ si y solo si $E_{A_i}\neq\phi$ ó $E_{B_i}\neq\phi$ lo cual nos permite obtener un teorema similar al teorema 6.5

Teorema 6.8 Sea H' un pseudo-hueco de $\sigma_e(A\otimes B)$. $H'\subset\sigma_i(A\otimes B)$ si y solo si E_{A_i} ó E_{B_i} son no vacio y H' es una componente conexa de

$$\bigcap_{\gamma\in E_{B_i}}\gamma J'_\gamma \cap \bigcap_{\mu\in E_{A_i}}\mu V'_\mu\setminus\sigma_{ei}(A\otimes B)$$

Desde luego, se tiene un teorema análogo para pseudo-huecos de índice $+\infty$.

No todos los pseudo-huecos de $\sigma_e(A \otimes B)$ se obtienen como en el teorema anterior, como lo muestran los ejemplos 6.10.

Veamos otra manera en que pueden aparecer pseudo-huecos

Teorema 6.9 Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)[\sigma_{ed}(A)]$ y H es un hueco o pseudo-hueco de $\sigma_e(B)$ tal que $H \subset \sigma_i(B)$ $[\sigma_d(B)]$ entonces las componentes conexas de $\mu H \setminus \sigma_{ed}(A \otimes B)$ $[\mu H \setminus \sigma_{ei}(A \otimes B)]$ son pseudo-huecos de índice $+\infty$ $[-\infty]$.

Demostración

Si $\lambda \in \mu H \setminus \sigma_{ed}(A \otimes B)$ entonces $\lambda = \mu\gamma$ donde $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B)$ entonces $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\sigma_i(B) \subset \sigma_{ei}(A \otimes B) \setminus \sigma_{ed}(A \otimes B)$. De donde λ está en un pseudo-hueco J de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $+\infty$.

La demostración de que J es una componente conexa de $\mu H \setminus \sigma_{ed}(A \otimes B)$ es similar a la del lema 6.1.

Ejemplos 6.

1. Sea $\mathcal{H}$ el espacio (ℓ_2) y sea U el corrimiento lateral izquierdo en $\mathcal{L}((\ell_2))$ definido por

$$U(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

Entonces U^* es el corrimiento lateral derecho, es claro que $UU^* = I$ y $U^*U = I - P$ donde P es la proyección de rango uno. Calcularemos la figura espectral de U.

Primero veremos que el espectro de U es $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

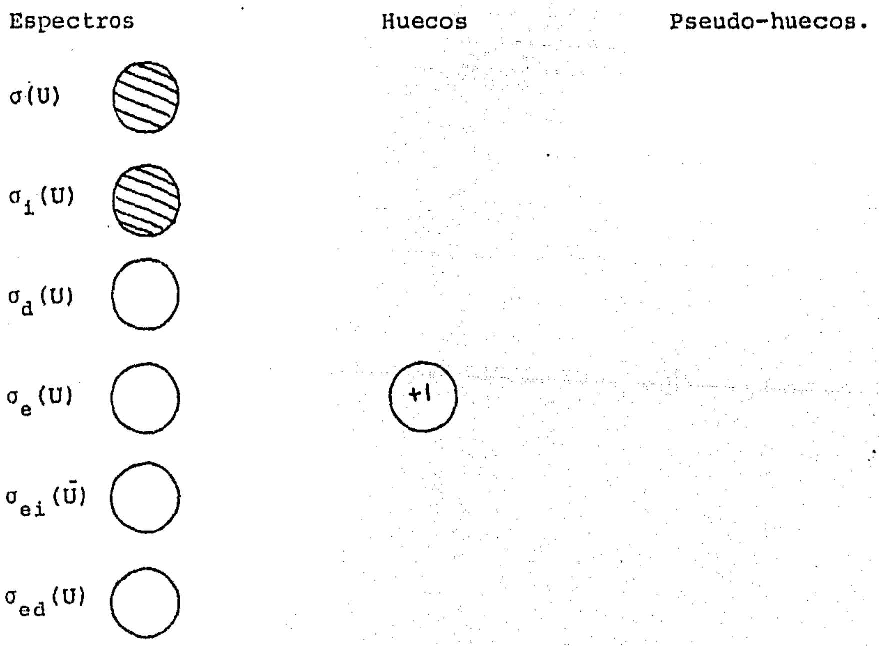
Como la norma de U, $\|U\| = 1$ entonces $\sigma(U) \subset \overline{D}$ [17 corolario 3 teorema 18.4].

Para toda $\lambda \in D$, λ es un valor propio de U entonces $D \subset \sigma(U)$, como el espectro es cerrado entonces $\overline{D} \subset \sigma(U)$. Por lo tanto $\overline{D} = \sigma(U)$.

Para calcular el espectro esencial basta observar que $\psi(U)$ es unitario, entonces $\sigma_e(U) = \partial D$.

Además $i(U) = 1$

Gráficamente tenemos que:



$FE(U) = \{\sigma_e(U) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}, \quad H = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}, \quad i(H) = 1\}$

2. Sea U como en el ejemplo 1 y sea I la identidad. Calcularemos la figura espectral de $U \otimes I$.

Sabemos que $\sigma(I) = \sigma_i(I) = \sigma_d(I) = \sigma_e(I) = \sigma_{ei}(I) = \sigma_{ed}(I) = \{1\}$

Los espectros de U son:

$\sigma(U) = \sigma_i(U) = \overline{D}; \quad \sigma_d(U) = \sigma_{ei}(U) = \sigma_{ed}(U) = \sigma_e(U) = \partial D.$

Entonces

$\sigma(U \otimes I) = \sigma(U)\sigma(I) = \sigma(U) = \overline{D}$

$\sigma_i(U \otimes I) = \sigma_i(U)\sigma_i(I) = \sigma_i(U) = \overline{D}$

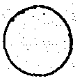
$\sigma_d(U \otimes I) = \sigma_d(U)\sigma_d(I) = \sigma_d(U) = \partial D$

$$\begin{aligned}\sigma_{ei}(U \otimes I) &= \sigma_{ei}(U)\sigma_i(I) \cup \sigma_i(U)\sigma_{ei}(I)\\ &= \sigma_{ei}(U) \cup \sigma_i(U) = \overline{D}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ed}(U \otimes I) &= \sigma_{ed}(U)\sigma_d(I) \cup \sigma_d(U)\sigma_{ed}(I)\\ &= \sigma_{ed}(U) \cup \sigma_d(U) = \partial D\end{aligned}$$

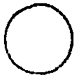
$$\begin{aligned}\sigma_e(U \otimes I) &= \sigma_e(U)\sigma(I) \cup \sigma(U)\sigma_e(I)\\ &= \sigma_e(U) \cup \sigma(U) = \overline{D}\end{aligned}$$

Espectros	Huecos	Pseudo-huecos.
$\sigma(U \otimes I)$ 		
$\sigma_i(U \otimes I)$ 		

$\sigma_d(U \otimes I)$ 

$\sigma_e(U \otimes I)$ 

$\sigma_{ei}(U \otimes I)$ 

$\sigma_{ed}(U \otimes I)$ 

Por lo tanto la figura espectral de $U \otimes I$ es

$$FE(U \otimes I) = \{\sigma_e(U \otimes I) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\},\ PH = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\},\ i(PH) = +\infty\}$$

3. Sea U como en el ejemplo 1. Estudiaremos ahora la figura espectral de $U \otimes U$.

$\sigma(U \otimes U) = \sigma(U)\sigma(U) = \overline{D}$

$\sigma_i(U \otimes U) = \sigma_i(U)\sigma_i(U) = \overline{D}$

$\sigma_d(U \otimes U) = \sigma_d(U)\sigma_d(U) = \partial D$

$\sigma_{ei}(U \otimes U) = \sigma_{ei}(U)\sigma_i(U) = \overline{D}$

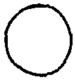
$\sigma_{ed}(U \otimes U) = \sigma_{ed}(U)\sigma_d(U) = \partial D$

$\sigma_e(U \otimes U) = (\sigma_e(U)\sigma(U) = \overline{D}$

Espectros Huecos Pseudo-huecos.

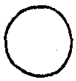
$\sigma(U \otimes U)$ 

$\sigma_i(U \otimes U)$ 

$\sigma_d(U \otimes U)$ 

$\sigma_e(U \otimes U)$ 

$\sigma_{ei}(U \otimes U)$  

$\sigma_{ed}(U \otimes U)$ 

$FE(U \otimes U) = \{\sigma_e(U \otimes U) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\},\ PH = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\},\ i(PH) = +\infty\}$

4. Sea $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador tal que:

$\sigma(B) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\} \cup \{3\}$

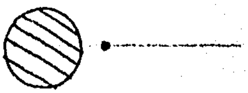
$\sigma_i(B) = \sigma(B)$

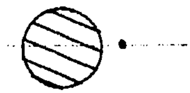
$\sigma_d(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 2\} \cup \{3\}$

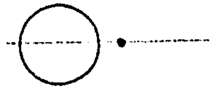
$\sigma_e(B) = \sigma_{ei}(B) = \sigma_{ed}(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 2\}$

La multiplicidad del punto aislado es 2.

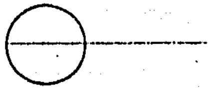
Espectros Huecos Pseudo-huecos.

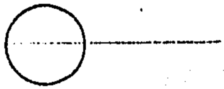
$\sigma(B)$ 

$\sigma_i(B)$ 

$\sigma_d(B)$ 

$\sigma_e(B)$ 

$\sigma_{ei}(B)$ 

$\sigma_{ed}(B)$ 

Sea I la identidad. Entonces la figura espectral de $I \otimes B$ es:

$$\sigma(I \otimes B) = \sigma(I)\sigma(B) = \sigma(B)$$

$$\sigma_i(I \otimes B) = \sigma_i(I)\sigma_i(B) = \sigma_i(B)$$

$$\sigma_d(I \otimes B) = \sigma_d(I)\sigma_d(B) = \sigma_d(B)$$

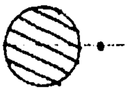
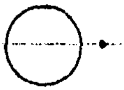
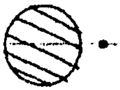
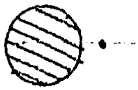
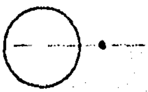
$$\sigma_{ei}(I \otimes B) = \sigma_{ei}(I)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(I)\sigma_{ei}(B)$$

$$= \sigma_i(B) \cup \sigma_{ei}(B) = \sigma_i(B)$$

$$\sigma_{ed}(I \otimes B) = \sigma_{ed}(I)\sigma_d(B) \cup \sigma_d(I)\sigma_{ed}(B)$$

$$= \sigma_d(B) \cup \sigma_{ed}(B) = \sigma_d(B).$$

$$\sigma_e(I \otimes B) = \sigma_e(I)\sigma(B) \cup \sigma(I)\sigma_e(B)$$
$$= \sigma(B) \cup \sigma_e(B) = \sigma(B)$$

Espectros	Huecos	Pseudo-huecos.
$\sigma(I \otimes B)$ 		
$\sigma_i(I \otimes B)$ 		
$\sigma_d(I \otimes B)$ 		
$\sigma_e(I \otimes B)$ 		
$\sigma_{ei}(I \otimes B)$ 		$+\infty$
$\sigma_{ed}(I \otimes B)$ 		

Por lo tanto

$$FE(I \otimes B) = \{\sigma_e(I \otimes B) = \sigma(B),\ PH = \{\lambda \mid |\lambda| < 2\},\ i(PH) = +\infty\}$$

5. Sea U como en el ejemplo 1 y B como en el ejemplo 4.

Calcularemos la figura espectral de $U \otimes B$.

$\sigma(U \otimes B) = \sigma(U)\sigma(B) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 3\}$

$\sigma_i(U \otimes B) = \sigma_i(U)\sigma_i(B) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 3\}$

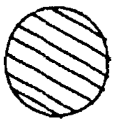
$\sigma_d(U \otimes B) = \sigma_d(U)\sigma_d(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 3\} \cup \{\lambda \mid |\lambda| = 2\}$

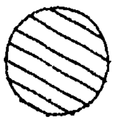
$\sigma_{ei}(U \otimes B) = \sigma_{ei}(U)\sigma_i(B) \cup \sigma_i(U)\sigma_{ei}(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 3\} \cup \{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\}$

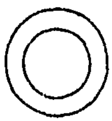
$\sigma_{ed}(U \otimes B) = \sigma_{ed}(U)\sigma_d(B) \cup \sigma_d(U)\sigma_{ed}(B) = \sigma_d(U \otimes B)$

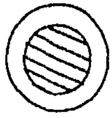
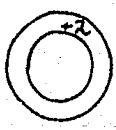
$\sigma_e(U \otimes B) = \sigma_e(U)\sigma(B) \cup \sigma(U)\sigma_e(B) = \sigma_{ei}(U \otimes B)$

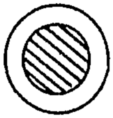
Espectros Huecos Pseudo-huecos.

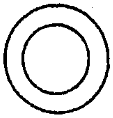
$\sigma(U \otimes B)$ 

$\sigma_i(U \otimes B)$ 

$\sigma_d(U \otimes B)$ 

$\sigma_e(U \otimes B)$  

$\sigma_{ei}(U \otimes B)$ 

$\sigma_{ed}(U \otimes B)$ 

$FE(U \otimes B) = \{\sigma_e(U \otimes B) = \{\lambda \,|\, |\lambda| \leq 2$ ó $|\lambda| = 3\}$, $H = \{\lambda \,|\, 2 < |\lambda| < 3\}$, $i(H) = 2 \times 1 = 2$,

$PH = \{\lambda \,|\, |\lambda| < 2\}, i(PH) = +\infty\}$

6. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador tal que

$$\sigma(A) = \sigma_i(A) = \sigma_d(A) = \sigma_e(A) = \sigma_{ei}(A) = \sigma_{ed}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| = 1 \text{ y } \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$$

Gráficamente es espectro de A es

Calcularemos la figura espectral de $A \otimes A$.

$\sigma(A \otimes A) = \sigma(A)\sigma(A) = \{\lambda \,|\, |\lambda| = 1\}$

$\sigma_i(A \otimes A) = \sigma_i(A)\sigma_i(A) = \sigma(A \otimes A)$

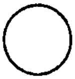
$\sigma_d(A \otimes A) = \sigma_d(A)\sigma_d(A) = \sigma(A \otimes A)$

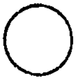
$\sigma_e(A \otimes A) = \sigma_e(A)\sigma(A) = \sigma(A \otimes A)$

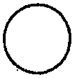
$$\sigma_{ei}(A \otimes A) = \sigma_{ei}(A)\sigma_i(A) = \sigma(A \otimes A)$$

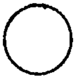
$$\sigma_{ed}(A \otimes A) = \sigma_{ed}(A)\sigma_d(A) = \sigma(A \otimes A)$$

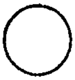
Espectros | Huecos | Pseudo-huecos.

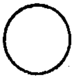
$\sigma(A \otimes A)$ 

$\sigma_i(A \otimes A)$ 

$\sigma_d(A \otimes A)$ 

$\sigma_e(A \otimes A)$  

$\sigma_{ei}(A \otimes A)$ 

$\sigma_{ed}(A \otimes A)$ 

$$FE(A \otimes A) = \{\sigma_e(A \otimes A) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\},\ H = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\},\ i(H) = 0\}$$

7. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador tal que

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) = \sigma_e(T) = \sigma_{ed}(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}$$

$$\sigma_i(T) = \sigma_{ei}(T) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$$

y sea $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador tal que

$\sigma(S) = \sigma_i(S) = \sigma_d(S) = \{1,2\}$

$\sigma_e(S) = \sigma_{ei}(S) = \sigma_{ed}(S) = \{1\}$

Gráficamente

Espectros Huecos Pseudo-huecos.

$\sigma(T)$

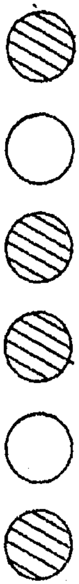
$\sigma_i(T)$

$\sigma_d(T)$

$\sigma_e(T)$

$\sigma_{ei}(T)$

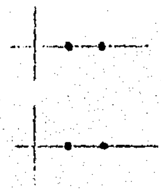
$\sigma_{ed}(T)$

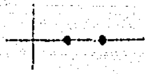


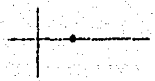
Espectros Huecos Pseudo-huecos.

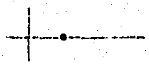
$\sigma(S)$

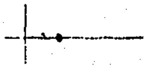
$\sigma_i(S)$



$\sigma_d(S)$ 

$\sigma_e(S)$ 

$\sigma_{ei}(S)$ 

$\sigma_{ed}(S)$ 

Tenemos que

$$\sigma(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma(S) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\}$$

$$\sigma_i(T \otimes S) = \sigma_i(T)\sigma_i(S) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\} \cup \{\lambda \mid |\lambda| = 2\}$$

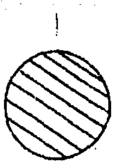
$$\sigma_d(T \otimes S) = \sigma_d(T)\sigma_d(S) = \sigma(T \otimes S)$$

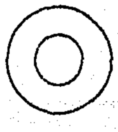
$$\sigma_e(T \otimes S) = \sigma_e(T)\sigma(S) \cup \sigma(T)\sigma_e(S) = \sigma(T \otimes S)$$

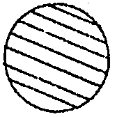
$$\sigma_{ei}(T \otimes S) = \sigma_{ei}(T)\sigma_i(S) \cup \sigma_i(T)\sigma_{ei}(S) = \sigma_i(T \otimes S)$$

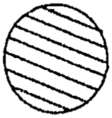
$$\sigma_{ed}(T \otimes S) = \sigma_{ed}(T)\sigma_d(S) \cup \sigma_d(T)\sigma_{ed}(S) = \sigma(T \otimes S)$$

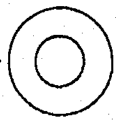
Espectros	Huecos	Pseudo-huecos

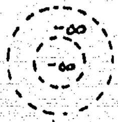
$\sigma(T \otimes S)$ 

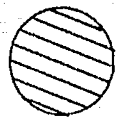
$\sigma_i(T \otimes S)$ 

$\sigma_d(T \otimes S)$ 

$\sigma_e(T \otimes S)$ 

$\sigma_{ei}(T \otimes S)$ 



$\sigma_{ed}(T \otimes S)$ 

Aplicaciones 6.11

Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 6.12 [13 Definición 4.8] Un operador A en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es quasitriangular si existe una sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de proyecciones de rango finito que converge puntualmente a I y que satisfacen $\|P_n A P_n - A P_n\| \to 0$. La clase de todos los operadores quasitriangulares se denota por QT.

Definición 6.13 Un operador A en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es biquasitriangular si A y A^* son quasitriangulares. La clase de todos los operadores biquasitriangulares se denotará por BQT.

Estas clases de operadores son muy importantes ya que los rumanos Apostol, Foias y Voiculescu demostraron que si

$S \notin BQT$ entonces T tiene un espacio hiperinvariante [13 Teorema 4.27].

Utilizando la siguiente caracterización [13 Teorema 1.31] Un operador T es quasitriangular si y solo si FE(T) no contiene huecos ni pseudo-huecos de índice negativo.

A continuación veremos como se comportan los operadores quasitriangulares en el producto tensorial.

Teorema 6.14 Si $A \in QT$ y $B \in QT$ entonces $A \otimes B \in QT$.

Demostración

Si A y B son quasitriangulares entonces FE(A) y FE(B) no contienen números negativos.

Sea H un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$ entonces por el teorema 6.6 $i(H) \geq 0$.

Supongamos ahora que H' es un pseudo-hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $-\infty$, entonces $H' \subset \sigma_{ed}(A \otimes B) \setminus \sigma_{ei}(A \otimes B)$.

Sea $\lambda \in H'$ donde $\lambda = \mu\gamma$ con $\mu \in \sigma_{ed}(A)$, $\gamma \in \sigma_d(B)$ (teorema 5.12) si $\mu \in \sigma_d(A)$, $\gamma \in \sigma_{ed}(B)$ el razonamiento es análogo.

Como FE(A) no contiene números negativos entonces

$$\sigma_{ed}(A) \setminus \sigma_{ei}(A) = \phi$$

de donde $\sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ei}(A)$, esto es, $\mu \in \sigma_{ei}(A)$.

Como $\gamma \in \sigma_d(B)$ hay dos posibilidades

a) Si $\gamma \in \partial\sigma(B)$ entonces $\gamma \in \sigma_d(B) \cap \sigma_i(B) \subset \sigma_i(B)$ de donde $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ lo cual es una contradicción.

b) Si $\gamma \in \text{int}\ \sigma(B)$ entonces podrían suceder los siguientes casos.

i) $\gamma \in \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B)$, es decir, $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ que no puede ser.

ii) γ está en un pseudo-hueco de índice $+\infty$, esto es, $\gamma \in \sigma_{ei}(B) \setminus \sigma_{ed}(B)$, entonces $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ que es imposible.

iii) γ está en un hueco de índice mayor que cero, entonces $\gamma \in \sigma_i(B)$, de donde, $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ que es una contradicción.

iv) γ está en un hueco de índice igual a cero contenido en $\sigma(B)$ entonces $\text{Nul}(B - \gamma I) = \text{Def}(B - \gamma I) > 0$, de donde, $\gamma \in \sigma_i(B)$, esto es $\mu\gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto H' tiene índice $+\infty$.

De donde $FE(A \otimes B)$ no tiene números negativos y esto quiere decir que $A \otimes B \in QT$.

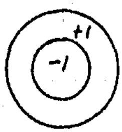
Corolario 6.15 Si $A \in BQT$ y $B \in BQT$ entonces $A \otimes B \in BQT$.

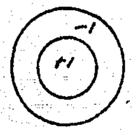
Sin embargo es posible que aparezcan operadores biquasitriangulares en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ a partir de operadores que no lo son como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 6.16 Existen operadores A y B en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tales que A, A*, B y B* no son quasitriangulares y que $A \otimes B$ es biquasitriangular

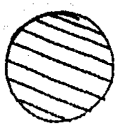
Demostración

Sean A y B tales que

FE(A) = 

FE = (B) 

Si calculamos $FE(A \otimes B)$ como lo hicimos con los ejemplos 6.10 obtenemos.

$FE(A \otimes B)$ = 

y como no tiene huecos positivos ni negativos entonces $A \otimes B$ es biquasitriangular.

[1] Bosch C., Hernández C., Oteyza E. Pearcy C.: "Spectral pictures of funtions of operators", por aparecer.

[2] Brown A. and Pearcy C.:"Spectra of tensor products of operators", Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966). pp 162-166

[3] Brown A. and Pearcy C.:"Introduction to operator theory I" Springer. Verlag 1977.

[4] Dixmier J.:"Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien", Gauthier-Villars, París 1956.

[5] Douglas R.:"Banach algebra techiniques of operator theory", Academic Press, New York and London, 1972.

[6] Fialkow L.:"Elements of spectral theory for generalized derivations I", J. Operators theory 3 (1980) pp 89-113.

[7] Fialkow L.:"Elements of spectral theory for generalized derivations II" J. Operators theory (por aparecer).

[8] Fialkow L.:"The essential spectrum of a tensor product of operators" Abstracts AMS 1980 vol. 4 No. 6 P.575

[9] Halmos, P.:"Finite-dimensional vector spaces", Springer-Verlag 1974.

[10] Harte, R.:"Spectral mapping theorems on a tensor products" Bulletin of the American Mathematical Society 79 (1973).

[11] Ichinose T.:"Spectral properties of tensor products of linear operators I".Trans. AMS Vol. 235, 1978 pp 78-113.

[12] Kato T.:"Perturbation theory for linear operators" 2d edition Springer-Verlag, 1976.

[13] Pearcy C.:"Some recent developments in operators theory", C.B.M.S., Amer. Math. Soc., number 36, 1978.

[14] Radjavi H. and Rosenthal P.: "Invariant subspaces", Springer-Verlag 1973.

[15] Rota: "On models of linear operators", Com. Pure Apl. Math 13 (1960).

[16] Rudin W.:"Funtional analysis". Mc. Graw-Hill Book Company New York, 1973.

[17] Rudin W.:"Real and compelx analysis "2d edition, Mc. Graw-Hill Book Company, New York 1974.

[18] Rudin W.:"Principles of mathematical analysis",3ed.
edition, Mc. Graw-Hill Kogakusha, 1976.

[19] Simon, B.:"Trace ideals and their applications".
Cambridge University Press, 1979.