UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REPRESENTACIONES DE POLICARCAJES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A:

MARY GLAZMAN NOWALSKI

MARZO 1986

I N D I C E

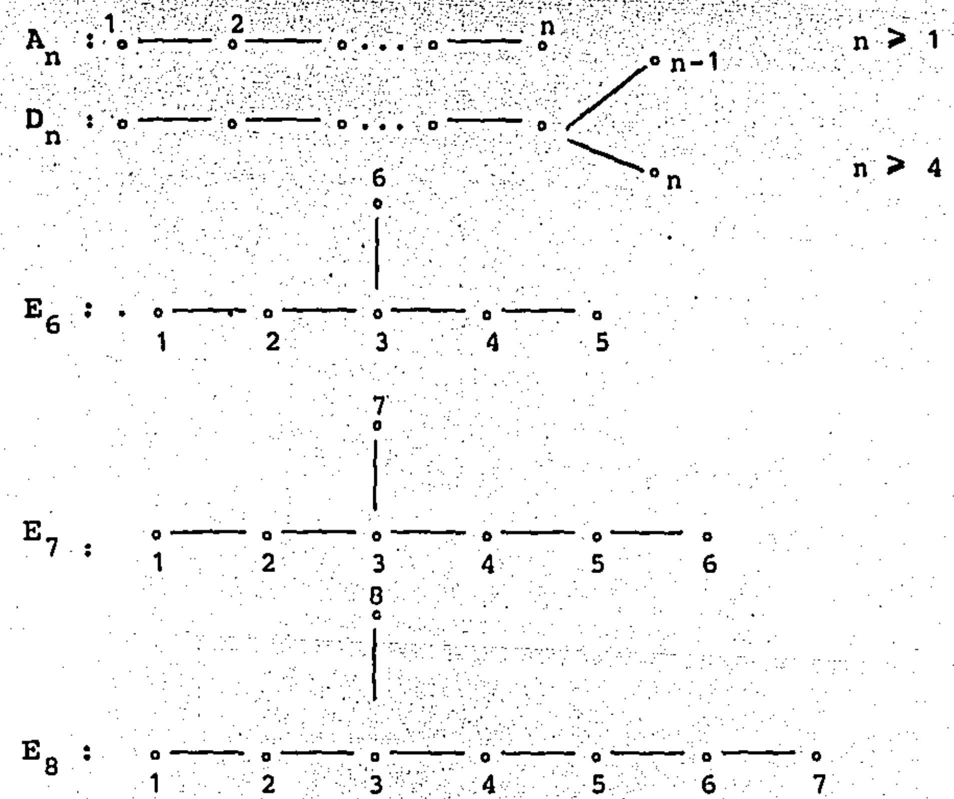
INTRODUCCIÓN

La Teoría de Representaciones es el estudio a través de representaciones concretas, de sistemas algebraicos abstractos. En particular la Teoría de Representaciones de Algebras estudia la categoría de módulos sobre un algebra.

Si k es un campo, es de particular interés estudiar las categorías de módulos sobre algebras que tienen dimensión finita sobre k. En estos casos, el teorema de Krüll Schmidt, dice que todo módulo se puede escribir como una suma finita de módulos inescindibles y que esta descomposición es única, salvo isomorfismos. De esta forma, para estudiar las categorías de módulos sobre estas algebras basta estudiar los módulos inescindibles. Si Λ es una k-algebra y mod Λ tiene un número finito de módulos inescindibles no isomorfos diremos que Λ es de tipo de representación finito.

Una forma de estudiar algebras de tipo de representación finita es por medio de carcajes y relaciones. Esto es, dada una k-algebra de dimensión finita, inescindible y básica podemos asociarle una carcaj con relaciones y dado un carcaj con relaciones podemos asociarle una k-algebra.

En 1972 Gabriel demuestra que si $\mathcal{C}$ es un carcaj, sin ciclos ni relaciones, la k-algebra asociada a $\mathcal{C}$, que denotaremos $k\mathcal{C}$ (con k algebraicamente cerrado) es de tipo de representación finita sí y sólo sí $\mathcal{C}$ es una de las siguientes gráficas (con cualquier orientación en las aristas).



Estas gráficas coinciden con los diagramas Dynkin que tienen una sóla flecha conectando dos vértices que surgen en el estudio de las algebras de Lie semisimples. Pero ¿qué sucede con los otros diagramas Dynkin?

B_n: $\circ$ —— $\circ$ —— $\circ \ldots \circ \Rightarrow \circ$ $\qquad n > 2$

C_n: $\circ$ —— $\circ$ —— $\circ \ldots \circ \Leftarrow \circ$ $\qquad n > 3$

F_4: $\underset{1}{\circ}$ —— $\underset{2}{\circ} \Rightarrow \underset{3}{\circ}$ —— $\underset{4}{\circ}$

G_2: $\circ \Rrightarrow$

Con el fin de dar una interpretación de estos diagramas que tienen más de una flecha conectando dos vértices, en 1973 Nazarova y Roiter introducen el concepto de policarcajes, definen su representación y caracterizan a los policarcajes de tipo finito y de tipo manso. Sin embargo, en el artículo original, no aparecen las pruebas de estos resultados.

En el presente trabajo daremos una interpretación de las representaciones de policarcajes en términos de módulos y demostraremos el teorema de Nazarova y Roiter para los policarcajes de tipo finito. También describiremos el carcaj de Auslander - Reiten de un policarcaj a partir del carcaj de un algebra hereditaria.

El trabajo estará dividido en tres capítulos precedidos por un capítulo 0 en donde se dan algunos resultados elementales en el estudio de la Teoría de Representaciones.

En el capítulo uno describiremos la categoría de representaciones de policarcajes en términos de módulos y daremos algunas de sus propiedades más importantes.

En el capítulo dos veremos que ciertas relaciones cero pueden separarse, esto es, dado un carcaj Γ con una relación cero ρ es posible, en algunos casos que se analizarán, construir un carcaj Δ sin relaciones de tal manera que ambos tengan el mismo tipo de representacion. En [C.R.1] Ringel describe esta presentacion, atribuida a Zavadsky, introduciendo un funtor entre ambas categorías de representaciones. Haremos un estudio detallado de este funtor viendo, entre otras cosas, que induce una equivalencia entre ciertas categorías cocientes. Describiremos la relación entre los morfismos irreducibles de ambas categorías; ésta será la principal herramienta para construir el carcaj de Auslander Reiten de un policarcaj. En particular, la descripción de este funtor nos permitirá demostrar el teorema de Nazarova y Roiter para el caso finito.

Utilizando los resultados del capítulo anterior en el capítulo 3 construiremos los carcajes de Auslander Reiten de los policarcajes de tipo finito G_2, F_4, B_n y C_n. En los casos B_n y C_n describiremos el carcaj de A. R., con una sóla orientación y con la ayuda de los funtores de Coxeter parciales se podrá construir con cualquier orientación.

Quisiera señalar que Dlab y Ringel dan otra interpretación de los diagramas Dynkin que tienen más de una flecha conectando a sus vértices, en términos de gráficas valuadas. Sin embargo no existe una relación natural entre policarcajes y gráficas valuadas. Construiremos el carcaj de A. R. de G_2 con esta interpretación y veremos que ni siquiera coincide en el número de representaciones inescindibles.

CAPITULO 0.

Este capítulo contiene nociones elementales y resultados conocidos en la Teoría de Representaciones de Algebras, que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Los resultados serán únicamente enunciados pudiendo consultarse las demostraciones en las referencias que se indican.

Como referencias generales utilizaremos [A,F] o [C R], para anillos y módulos.

El capítulo estará dividido en cuatro secciones, en la primer sección estableceremos la relación que existe entre un carcaj o gráfica orientada y la teoría de módulos sobre cierta algebra [CLS]. Definiremos el carcaj de Auslander Reiten de una categoría de módulos y daremos una breve idea de como construírlo [ARIII], [ARIV]. En la segunda seccion construiremos una categoría cociente a partir de la definición de un ideal en una categoría. Un ideal importante será el radical de la categoría [B]. En la tercer sección describiremos los funtores de Coxeter parciales izquierdos y derechos [BGP] [APR] y enunciaremos algunas propiedades generales de estos funtores; introduciremos la matriz de Coxeter y describiremos su relación con el Dtr [C R_2].

En la cuarta sección definiremos la categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado [G_2]. Veremos que es equivalente a la categoría de módulos de cierta algebra y enunciaremos el teorema de Kleiner de los conjuntos parcialmente ordenados de tipo finito.

Sección 0.1

Carcajes y Algebras de Carcajes

Un *carcaj* es una gráfica orientada, esto es, un carcaj consta de un conjunto C_0 de vértices, de un conjunto C_1 de flechas y de dos funciones $i, f : C_1 \longrightarrow C_0$; si $\alpha \in C_1$, $i(\alpha)$ indica el vértice inicial de α y $f(\alpha)$ el vértice final de α.

Un camino dirigido (de longitud n) de i a j en C es una sucesión de vértices y flechas

$(j|\alpha_n\ldots\alpha_1|i)\; i \xrightarrow{\alpha_1} 0 \xrightarrow{\alpha_2} 0 \ldots 0 \xrightarrow{\alpha_n} j$ donde $i(\alpha_{s+1}) = f(\alpha_s)$.

En particular tenemos los caminos de longitud $n = 0$ que llamaremos caminos triviales $(\tau i : i|i)$ que va de i en i y que no involucran ninguna flecha.

Sea k un campo, el algebra de caminos kC, asociada a C es el k - espacio verctorial libre que tiene por base los caminos dirigidos en C. El producto de dos caminos se define, en la base, pegando los caminos cuando esto es posible y 0 si no lo es y esta definición se extiende por linealidad.

C es finito si C_0 y C_1 son conjuntos finitos. Si C es finito $\sum_{i \in C_0} \tau_i$ es el elemento unidad de kC y $\{\tau_i | i \in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales. Si C es finito y conexo kC es un algebra inescindible; si C no tiene ciclos dirigidos kC es un algebra de dimensión finita.

Denotamos por F el ideal izquierdo de kC generado por los caminos longitud uno (flechas). F resulta ser un ideal bilateral y como k-espacio vectorial tiene por base los caminos de longitud mayor o igual a 1.

Un ideal I de kC se dice que es admisible si $I \subset F^2$

y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n \subset I$.

Si I es un ideal admisible $kC/_I$ es una k-algebra de dimensión finita, inescindible y básica y $\{\bar{\tau}_i \mid i \in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.

Una relación $\rho \in C$ es una combinación lineal de caminos de longitud mayor o igual a 2. Si $\rho = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_i$, donde cada γ_i tiene el mismo punto inicial i y el mismo punto final j, (y en la cual no todos los coeficientes son cero) diremos que ρ es una relación legible de i a j. Un ideal admisible I puede generarse por un número finito de relaciones legibles.

A la pareja (C,I) donde C es un carcaje I es un ideal admisible se le llama un carcaj con relaciones y $kC/_I = k(C,I)$.

Una *k-representación* V de C es una pareja (V,T) donde $V = (V_i)_{i\in C_0}$ es una familia de k-espacios vectoriales y $T = (T_\alpha)_{\alpha\in C_1}$ es una familia de transformaciones lineales. Un *morfismo* $\phi: V \longrightarrow W$ de representaciones es una familia $(\phi_i)_{i\in C_0}$ de transformaciones lineales tales que, para cada flecha $\overset{i}{0} \xrightarrow{\alpha} \overset{j}{0}$ en C_1, el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "\phi_i"'] & V_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ W_i \arrow[r, "R_\alpha"] & W_j \end{tikzcd} \qquad \phi_j\, T_\alpha = R_\alpha\, \phi_i$$

Si $\gamma = (j|\alpha_n \ldots \alpha_1|i)$ es un camino dirigido no trivial en C, evaluar V en γ es componer las transformaciones lineales correspondientes

$$V(\gamma) := T_{\alpha_n} \circ T_{\alpha_{n-1}} \circ \ldots T_{\alpha_1} : V_i \longrightarrow V_j$$

Si $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i$ es una relación en C podemos evaluar V en ρ : $V(\rho) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V(\gamma_i)$, $\lambda_i \in k$. Decimos que una representación V satisface la relación ρ si $V(\rho) = 0$. Si en ρ, $n = 1$ y $\lambda_1 = 1$, diremos que ρ es una relación cero: las representaciones que satisfacen una relación cero son aquellas que evaluarlas en cierto camino nos dan la transformación cero.

Sea Λ una k algebra de dimensión finita, básica e inescindible. Podemos asociarle a Λ un carcaj C_Λ de la siguiente forma: si $\{e_i | i=1\ldots n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ entonces $(C_\Lambda)_0$ tiene n vertices. Si $i, j \in (C_\Lambda)_0$ hay $n_{ij} = \dim e_j \frac{\mathrm{rad}\Lambda}{\mathrm{rad}^2\Lambda} e_i$ flechas de i a j.

Existe un morfismo suprayectivo $\varphi : k\,C_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ cuyo núcleo $\ker\varphi$ es un ideal admisible, eso es, $\Lambda \simeq \frac{k\,C_\Lambda}{\ker\varphi}$.

De esta forma el estudio de las algebras de dimensión finita se puede reducir al de los carcajes por un ideal admisible. Sea $\mathrm{Mod}(C,I)$ la categoría de representaciones de C que satisfacen I. En [CLS] se demuestra que $\mathrm{Mod}(C,I) \simeq \mathrm{Mod}\,\Lambda$; donde $\Lambda = {}^{kC}/_{I}$; si $\mathrm{mod}\,\Lambda$ es la subcategoría plena de los Λ-módulos finitamente generados y $\mathrm{mod}(C,I)$ es la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(C,I)$ cuyos objetos son las representaciones V de C tal que V_i es de dimensión finita para todo i en C_0, se tendrá que $\mathrm{mod}(C,I) \simeq \mathrm{mod}\Lambda$.

Un algebra Λ es de *tipo de representación finita* sí sólo tiene un número finito de Λ-módulos inescindibles finitamente generados no isomorfos. Si el algebra es de tipo finito, un teorema de M. Auslander nos dice que todo Λ-módulo, finitamente generado o no, es suma directa de Λ módulos inescindibles finitamente generados [A].

De esta forma, conociendo los módulos inescindibles finitamente generados conoceremos $\mathrm{Mod}\,\Lambda$.

Para conocer todos los módulos inescindibles utilizaremos los morfismos irreducibles. Si $X, Y \in \text{mod}\,\Lambda$; $0 \neq f \in \text{Hom}_{\Lambda}(X, Y)$ es irreducible si f no es mono escindible ni epi escindible y si $f = hg$ entonces g es mono escindible o h es epi escindible. Si Λ es de tipo de representación finita todo morfismo entre inescindibles no isomorfos es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles entre inescindibles.

Los morfismos irreducibles se construyen de la siguiente forma:

a) Si P es un módulo proyectivo inescindible y X es un sumando del radical de P existe un morfismo irreducible $f : X \longrightarrow P$.

b) Si I es un módulo inyectivo inescindible y Y es un sumando de $I/_{\text{Soclo}\, I}$ existe un morfismo irreducible $g : I \longrightarrow Y$.

c) Para los casos restantes se introducen las sucesiones de Auslander-Reiten o sucesiones que casi se dividen.

Una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ en mod Λ es de Auslander-Reiten si

i) La sucesión no se escinde

ii) A y C son inescindibles

iii) Si $h : X \longrightarrow C$ no es epi escindible entonces existe $t : X \longrightarrow B$ tal que $h = gt$ o equivalentemente.

iii)' Si $h : A \longrightarrow X$ no es mono escindible ble existe $s : B \longrightarrow X$ tal que $h = sf$.

Sabemos, por el teorema de Krüll-Schmidt que $B = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i$ donde cada B_i es un Λ-módulo inescindible finitamente generado. Si en esta descomposición no aparecen sumandos repetidos, los morfismos $f_i = A \longrightarrow B_i$ donde $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_n \end{bmatrix}$ son los morfismos irreducibles que comienzan en A, y los morfismos $g_i : B_i \longrightarrow C$ donde $g = (g_1, \ldots g_n)$ son los morfismos irreducibles que terminan en C.

Para cada Λ-módulo inescindible y no proyectivo M existe una única sucesión que casi se divide (salvo isomorfía) que termina en M

$$0 \longrightarrow DTr\, M \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y para cada Λ-módulo inescindible y no inyectivo N existe una única sucesión que casi se divide (salvo isomorfía) que empieza en N

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow \mathrm{Tr}\, DN \longrightarrow 0$$

donde $D : \mathrm{mod}\,\Lambda \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ es la dualidad usual, $D(M) = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ y $\mathrm{Tr}(M)$, el transpuesto de M es el Λ^{op} - modulo definido así: tomamos una resolución proyectiva minimal $P' \xrightarrow{g} P \longrightarrow M$ y le aplicamos $\mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,\Lambda_\Lambda)$. Entonces $\mathrm{Tr}\,M$ es el conúcleo de $\mathrm{Hom}(g, \Lambda_\Lambda)$, es decir, $\mathrm{Tr}(M)$ está definido por la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P', \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Tr}\,M \longrightarrow 0$$

Si $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ es la categoría de módulos finitamente generados módulo los proyectivos y $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ es la categoría de módulos finitamente generados módulo los inyectivos

$$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda^{op}$$

induce una dualidad y $D\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \longrightarrow \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ es una equivalencia de categorías.

El carcaj de Auslander-Reiten de un algebra Λ es el carcaj Γ_Λ cuyos vértices son las clases de isomorfía de los Λ-módulos inescindibles finitamente generados y de i a j hay una flecha si existe una morfismo irreducible de M_i a M_j. Si Λ es de tipo de representación finita Γ_Λ es finito y existe sólo una flecha conectando cada vértice.

Dada una representación V en $\mathrm{mod}(C, I)$ llamaremos vector de dimensión de V al vector $(\dim V_i)_{i\varepsilon C_0}$.

Este vector será de gran utilidad en la construcción de carcajes de Auslander-Reiten.

La técnica que utilizaremos para construir el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría de representaciones de un carcaj finito C sin ciclos ni relaciones fue utilizada por primera vez por Bautista.

Sección 02.

El radical de una categoría

Sea C una categoría pre-aditiva esqueléticamente pequeña y Ab la categoría de grupos abelianos (C,Ab) denota la categoría de funtores aditivos covariantes de C en Ab. (C,Ab) es una categoría abeliana.

Dado un funtor $F \varepsilon \mathrm{obj}(C, Ab)$ decimos que G es un *subfuntor* de F si: a) Para todo $X \varepsilon \mathrm{obj}\, C$, GX es un subgrupo de FX b) Los morfismos inclusión $i_X : GX \longrightarrow FX$

definen un morfismo inclusión $i : G \longrightarrow F$ (esto es $\{i_X\}_{X \varepsilon C}$ es natural)

Sea $A \;\varepsilon$ obj C, $\mathrm{Hom}(A, —) \;\varepsilon$ obj (C, Ab)

Un *ideal derecho* en C es un subfuntor de $\mathrm{Hom}(A, —)$

Un *ideal izquierdo* en C es un subfuntor de $\mathrm{Hom}\,(—, A) \;\varepsilon$ obj(C^{op}, Ab)

Un *ideal bilateral* en C es un subfuntor de $\mathrm{Hom}(—, ?) : C^{op} \times C \longrightarrow Ab$.

I es un ideal bilateral de C sí y sólo sí para cada $f \;\varepsilon\; I(A, X)$, $g \;\varepsilon\; \mathrm{Hom}(X, B)$ entonces $g \circ f \;\varepsilon\; I(A, B)$ y para cada $f' \;\varepsilon\; I(Y, B)$, $h \;\varepsilon\; \mathrm{Hom}(A, Y)$ entonces $f'\, h \;\varepsilon\; I(A,B)$ con $A, B, X, Y \;\varepsilon\; C$.

Efectivamente si I es un ideal bilateral de C y $f \;\varepsilon I(A, X)$ y $g \;\varepsilon\; \mathrm{Hom}(X, B)$. Consideremos la restricción en $I(A, X)$ de $\mathrm{Hom}(A, g) : I\,(A, X) \longrightarrow I(A, B)$

$$\begin{tikzcd}
I(A, X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(A,g)\,\big|_{I(A,X)}"] \arrow[d] & I(A,B) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(A,X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(A,g)"] & \mathrm{Hom}(A,B)
\end{tikzcd}$$

ie $\hom(A,g)(f) = gf \in I(A,B)$

Análogamente, si $f' \in I(Y, B)$ y $h : A \longrightarrow Y$ de la restricción en $I(Y,B)$ de $\mathrm{Hom}(h, b) : I(Y,B) \longrightarrow I(A, B)$ obtenemos que $\mathrm{Hom}(h, B)(f') = f'h \in I(A,B)$.

Inversamente tendremos para cada $A \in C$, $I(A, X)$ es un subgrupo de (A, X) $\forall X \in C$ porque si $\alpha, \beta \in I(A, X)$, $1_X \in \mathrm{Hom}_C(X, X)$ y $\alpha + \beta = 1_X(\alpha + \beta) \in I(A, X)$.

Además $\{i_X\}_{X \in C}$ es natural.

Dado un ideal bilateral I en C podemos formar la *categoría cociente* C/I que tiene los mismos objetos que C y si $A, B \in \mathrm{obj}\ C/I$, $\mathrm{Hom}_{C/I}(A, B) := \dfrac{\mathrm{Hom}_C(A, B)}{I(A, B)}$

La composición de morfismos es la inducida por la de C, es decir, si $f + I(A, B) \in \mathrm{Hom}_{C/I}(A, B)$ y $g + I(B, C) \in \mathrm{Hom}_{C/I}(B, C)$ entonces:

$$(g + I(B,C))\,(f + I(A, B)) := g \circ f + I(A,C)$$

Esta composición está bien definida pues si

$$f' \in f + I(A,B) \text{ y } g' \in g + I(B, C) \Rightarrow \begin{array}{ll} f' = f + \alpha & \alpha \in I(A,B) \\ g' = g + \beta & \beta \in I(B,C) \end{array}$$

$g' \circ f' = (g+\beta)\ (f + \alpha) = gf + g\alpha + \beta f + \beta\alpha$ con

$g\alpha,\ \beta f,\ \beta\alpha \in I(A, C)$

Dada una categoría $\mathcal{C}$ *y un ideal* I podemos definir un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/I$ definido así: si $A \in \text{obj}\,\mathcal{C}$, $FA = A$. Si $f : A \longrightarrow B$ en morf $\mathcal{C}$ $Ff : FA \longrightarrow FB$ es la clase $f + I(A, B)$.

Dados dos ideales I_1, I_2 en $\mathcal{C}$ podemos construir nuevos ideales $I_1 \cap I_2$ y $I_1 I_2$ de la siguiente forma:

$$(I_1 \cap I_2)\ (A, B) := I_1\ (A, B) \cap I_2\ (A, B)$$

$f \in I_1\ I_2$ sí sólo sí existe $C \in \mathcal{C}$ tal que f es suma finita de morfismos de la forma $A \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} B$ con $f_1 \in I_1\ (A, C)$ y $f_2 \in I_2\ (C, B)$.

Si $f \in I_1\ I_2\ (A, B)$ entonces $f = \sum_{i=1}^{n} f_i\ g_i$ donde $A \xrightarrow{g_i} C \xrightarrow{g_i} B$ con $g_i \in I_1\ (A, C)$ y $f_i \in I_2(C, B)$ pero por ser I_1, I_2 ideales $f_i\ g_i \in I_1(A, B)$ y $f_i\ g_i \in I_2\ (A, B)$ es decir $f \in (I_1 \cap I_2)\ (A, B)$.

Un ejemplo importante de ideal en $\mathcal{C}$ es el <u>*radical de Jacobson*</u> de $\mathcal{C}$.

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(A,B) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}(B,A)\ gf \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}\ A)\}$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \mid \forall\ h \in \mathrm{Hom}\ (B,A)\ fh \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}\ B)\}$$

. Una categoría preaditiva $\mathcal{C}$ es una *prevariedad Krüll Schmidt* si

a) Cualquier objeto en $\mathcal{C}$ es suma directa finita de objetos inescindibles.

b) Los idempotentes en $\mathcal{C}$ se escinden.

c) Para cada objeto inescindible $M \in \mathcal{C}$, End M es un anillo local.

Proposición 0.2.1 [B]

Sea $\mathcal{C}$ una prevariedad Krüll-Schmidt e I un ideal bilateral en $\mathcal{C}$. Si $f = (f_{ij}) : \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i \longrightarrow \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} B_j$ donde $f_{ij} : A_i \longrightarrow B_j$ es la representación matricial de f en $\mathcal{C}$ entonces $f \in I\ (\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i,\ \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} B_j)$ sí y sólo sí $f_{ij} \in I(A_i\ ,\ B_j)\ \forall\ i,\ j.$

Proposición 0.2.2. [B]

Sea C una prevariedad Krüll-Schmidt

a) $\mathrm{rad}_C(X, X)$ es el radical de Jacobson del anillo End X $\forall$ $X \varepsilon$ obj C.

b) Si A y B son objetos inescindibles en C entonces $\mathrm{rad}_C(A, B)$: $\{f : A \longrightarrow B | f$ no es isomorfismo$\}$.

Definimos $\mathrm{rad}^2(A, B) = \mathrm{rad}\,\mathrm{rad}(A, B)$; esto es $f \varepsilon \mathrm{rad}^2(A, B)$ si existe $C \varepsilon C$ tal que f es la suma finita de morfismos de la forma $A \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} B$ donde $f_1 \varepsilon \mathrm{rad}\,(A, C)$ y $f_2 \varepsilon \mathrm{rad}\,(C, A)$.

Proposición 0.2.3 [B]

Sean A y B objetos inescindibles en C. Entonces $f : A \longrightarrow B$ es irreducible sí y sólo sí $f \varepsilon \mathrm{rad}(A, B)$ $f \notin \mathrm{rad}^2\,(A, B)$.

Sección 0.3

Funtores de Coxeter Parciales

Sean Λ y Γ k-algebras de dimensión finita básicas. En [APR] se define un funtor $F : \text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\,\Gamma$ como un *funtor de Coxeter parcial izquierdo* si existe $S \in \text{mod}\,\Lambda$ simple proyectivo no inyectivo y $T \in \text{mod}\,\Gamma$ simple inyectivo no proyectivo tal que $F(S) = 0$ y F induce una equivalencia de categorías entre la subcategoría plena de $\text{mod}\,\Lambda$ cuyos objetos son los módulos que no tienen sumandos directos isomorfos a S : C_S , y la subcategoría plena de $\text{mod}\,\Gamma$ cuyos objetos son los módulos que no tienen sumandos directos isomorfos a T : $\mathcal{D}_T$.

Se define también un funtor de *coxeter parcial derecho* $G : \text{mod}\,\Gamma \longrightarrow \text{mod}\,\Lambda$ si existe $T \in \text{mod}\,\Gamma$ simple inyectivo no proyectivo y $S \in \text{mod}\,\Lambda$ simple proyectivo no inyectivo tal que $G(T) = 0$ y G induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{D}_T$ y C_S.

Se demuestra que estos funtores F y G son únicos salvo equivalencia de funtores (si Λ_1, Γ_1, Λ_2 y Γ_2 son k-algebras decimos que dos funtores $F_1 : \text{mod}\,\Lambda_1 \longrightarrow \text{mod}\,\Gamma_1$ y $F_2 : \text{mod}\,\Lambda_2 \longrightarrow \text{mod}\,\Gamma_2$ son equivalentes si existen equivalencias de categorías $u : \mathrm{mod}\,\Lambda_1 \longrightarrow \mathrm{mod}\,\Lambda_2$ y $v : \mathrm{mod}\,\Gamma_1 \longrightarrow \mathrm{mod}\,\Gamma_2$ tal que $F_2 u = v F_1$).

El funtor F tiene las siguientes propiedades:

1. $F(\mathrm{tr}\,DS)$ es un Γ módulo proyectivo y si $\{P_1=S, P_2, \ldots P_n\}$ es un conjunto completo de proyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ entonces $\{F(\mathrm{tr}\,DS), FP_2, \ldots, FP_n\}$ es un conjunto completo de proyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\,\Gamma$.

2. Si $\{I_1, \ldots, I_n\}$ es un conjunto completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles (no isomorfos) con $I_1 = E(S)$ la envolvente inyectiva de S entonces $\{T, FI_2, \ldots, FI_n\}$ es un conjunto completo de Γ-módulos inyectivos inescindibles y $FI_1 = D\,\mathrm{tr}\,T$.

3. Si A es un Λ-módulo inescindible no inyectivo no isomorfo a S y $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, entonces $0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\,\Gamma$, $F(\mathrm{tr}\,DA) \simeq \mathrm{tr}\,D\,(FA)$ y $F(D\,\mathrm{tr}\,C) \simeq D\,\mathrm{tr}\,(FC)$.

4. F tiene un adjunto izquierdo G que es un funtor de Coxeter parcial derecho.

El funtor G tiene las siguientes propiedades:

1. $G(\mathrm{Dtr}\ T)$ es un Λ-módulo inyectivo y si $\{T, I_2, \ldots I_n\}$ es un conjunto completo de inyectivos inescindibles (no isomorfos) en $\mathrm{mod}\,\Gamma$ entonces $\{G(\mathrm{D\,tr}\,T), G\,I_2, \ldots, G\,I_n\}$ es un conjunto completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos.

2. Si C es un Γ-módulo no proyectivo no isomorfo a T y $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander Reiten en $\mathrm{mod}\,\Gamma$ entonces $0 \longrightarrow GA \longrightarrow GB \longrightarrow GC \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander Reiten en $\mathrm{mod}\,\Lambda$ y $\mathrm{D\,tr}\,(G\,C) \simeq G(\mathrm{D\,tr}\,C)$ y $\mathrm{tr}\,D(G\,A) \simeq G(\mathrm{tr}\,DA)$.

3. G tiene como un adjunto a un funtor de Coxeter parcial izquierdo F.

Funtores de Coxeter parciales en términos diagramáticos

Sea C un diagrama sin ciclos ni relaciones y sea Ω

una orientación en C. Sea $\alpha \in C_0$.

Denotaremos $\sigma_\alpha \Omega$ a la orientación que se obtiene al cambiar la orientación de todas las flechas que contienen α. Un vértice $\gamma \in (C_0, \Omega)$ es una *fuente* si γ no es punto final de ninguna flecha en (C_1, Ω). Un vértice $\beta \in (C_0, \Omega)$ es un *pozo* si β no es punto inicial de ninguna flecha en (C_1, Ω). Sea $\mathrm{mod}\,k\,(C, \Omega)$ la categoría de representaciones del carcaj (C, Ω). En [BGP] se demuestra que si β es un pozo de (C_0, Ω) el funtor de Coxeter parcial izquierdo $S_\beta^+ : \mathrm{mod}\,k\,(C, \Omega) \longrightarrow \mathrm{mod}\,k\,(C, \sigma_\beta \Omega)$ induce una equivalencia de categorías entre la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,k\,(C, \Omega)$ cuyas representaciones no tienen sumandos directos isomorfos al simple proyectivo P_β y la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,k\,(C, \sigma_\beta \Omega)$ cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos al simple inyectivo I_β. S_β^+ se define en los objetos de la siguiente forma: si $(V, f) \in \mathrm{mod}\,k\,(C, \Omega)$, $S_\beta^+ (V, f) = (W, g)$ donde $W_j = V_j$ si $j \neq \beta$. Si $f_1, \ldots, f_r$ son todas las flechas que terminan en β, sea

$$h : \bigoplus_{j=1}^{r} V_j \longrightarrow V_\beta$$

$$(V_j \xrightarrow{f_j} V_\beta)$$

$$(v_1, \ldots, v_r) \longrightarrow f(v_1) + \ldots + f(v_r)$$

entonces $W_\beta = \ker h$.

Si $f_\gamma \notin \{f_1,\dots,f_r\}$ entonces $g_\gamma = f_\gamma$.

Si $f_\gamma \in \{f_1,\dots,f_r\}$ entonces $g_\gamma : W_\beta \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} V_j \xrightarrow{\text{proyección}} V_\gamma$

Ademas $S_\beta^+ (P_\beta) = 0$.

De manera análoga tendremos que si α es un pozo de (C_0, Ω), el funtor de Coxeter parcial izquierdo

$$S_\alpha^- : \mathrm{mod}\, k\,(C, \Omega) \longrightarrow \mathrm{mod}\, k\,(C, \sigma_\alpha \Omega)$$

induce una equivalencia de categorías entre la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\, k\,(C, \Omega)$ cuyas representaciones no tienen sumandos directos isomorfos al simple inyectivo I_α y la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\, k\,(C, \sigma_\alpha \Omega)$ cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos al simple proyectivo P_α. S_α^- se define en los objetos de la siguiente forma: si $(V, f) \in \mathrm{mod}\, k\,(C, \Omega)$, $S_\alpha^-(V, f) = (W, g)$ donde $W_j = V_j = V_j$ si $j \neq \alpha$.

Si $f_1, \dots, fr$ son todas las flechas que empiezan en α sea $\tilde{h} : V_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ (si $f_j : V_\alpha \longrightarrow V_j$) definida así

$$v \longrightarrow (f_1(v), f_2(v), \dots, f_r(v))$$

entonces $W_\alpha = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j \Big/ \mathrm{I_m}\, \tilde{h}$ (ie coker $\tilde{h}$)

Si $f_\gamma \notin \{f_1,\dots,f_r\}$ entonces $g_\gamma = f_\gamma$

Si $f_\gamma \in \{f_1,\dots,f_r\}$ entonces $W_\gamma \longrightarrow W_\alpha$ se define por

$$V_\gamma = W_\gamma \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} V_j \xrightarrow{\text{proyección}} W_\alpha$$

Además, para cualquier representación inescindible X no isomorfa a P_β se tiene que el vector de dimensión que denotaremos $\underline{\dim}\, S_\beta^+ (X) = s_\beta\,(\underline{\dim}\, X)$ donde $s_\beta : \mathbb{Q}^{C_0} \longrightarrow \mathbb{Q}^{C_0}$ es el operador definido así: $s_\beta (x)_\alpha = (y_\alpha)$ donde

$$y_i = x_i \quad \text{si} \quad i \neq \beta$$

$$y_\beta = - x_\beta + \sum_{i \to \beta} x_i$$

Matriz de Coxeter

Sea Λ una k-algebra de dimensión finita. La matriz de Cartan de $\Lambda : C = C_\Lambda$ es la matriz de $n \times n$ que tiene en el lugar (i, j) $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda (P_i, P_j)$.

Si D es un Dynkin con una sóla flecha conectando dos vértices, la matriz de Cartan de $kD : C_{kD}$ es invertible.

A la matriz $\phi = - C^t C$ se le llama matriz o transformación de Coxeter.

En $[CR_2]$ se demuestra que si la dimensión proyectiva de M es menor o igual a 1 y $\operatorname{Hom}(M, \Lambda) = 0$ entonces $\underline{\dim}\, D\, \mathrm{tr}\, M = \phi\, (\underline{\dim}\, M)$.

Como kD es hereditaria, la dimensión global de kD es menor o igual a uno. Por lo tanto la dimensión proyectiva de $M \in \mathrm{mod}\, k\Lambda$ es menor o igual a uno.

Sección 0.4

Representaciones de conjuntos parcialmente ordenados

En $[G_2]$ P. Gabriel introduce los siguientes conceptos asociados a un conjunto parcialmente ordenado:

Si S es un conjunto parcialmente ordenado, un *S-espacio* sobre k, que denotaremos $(V, (V_i)_{i \in S})$, es un k-espacio vectorial V junto con una familia de subespacios $(V_i)_{i \in S}$ tal que $V_i \subseteq V_j$ si $i < j$ en S. Si $(V, (V_i)_{i \in S})$ y $(W, (W_i)_{i \in S})$ dos S-espacios, un morfismo entre ellos es una transformación lineal $f : V \longrightarrow W$ que satisface que $f(V_i) \subseteq W_i$.

Denotemos con $\mathcal{S}(S)$ a la categoría cuyos objetos son los S-espacios y cuyos morfismos son los morfismos de S-espacios.

Dado un conjunto parcialmente ordenado S, construyamos el conjunto $S' = S \cup \{M\}$ donde M satisface, que para todo punto $p \in S$, $p < M$. Asociaremos a S el siguiente carcaj, que denotaremos por Q_S

i) $(Q_S)_0$ tendrá por vértices a los elementos del conjunto S'.

ii) Dados dos vértices i, j de S', hay una flecha de i a j si $i < j$, y si $i < \ell < j$ entonces $\ell = i$ o $\ell = i$ o $\ell = j$; es decir, hay una flecha de i a j si los puntos son comparables e inmediatos.

Sea kQ_S el algebra de Q_S y sea I el ideal admisible de kQ_S generado por todas las diferencias de caminos dirigidos que tienen los mismos puntos iniciales y los mismos puntos finales.

A los S-espacios los podemos ver como las representaciones de (Q_S, I) en las que todas las transformaciones lineales asociadas a las flechas de Q_S son monomorfismos, esto es, $\mathcal{S}(S)$ resulta ser una subcategoría plena de mod kQ/I. Por lo tanto, si $\mathcal{S}(S)$ es de tipo de representación infinita, mod kQ/I es de tipo de representación infinita.

Sea S un conjunto parcialmente ordenado.

Si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ en S, denotaremos a esta cadena por (n). A la unión ajena de cadenas $(n_1) \ldots (n_S)$ la denotaremos $(n_1, \ldots n_S)$ $N = \{a_1, a_2, a_3, a_4 \quad a_1 < a_2,\ a_3 < a_4\}$ concluiremos esta sección enunciando el teorema de Kleiner de los conjuntos parcialmente ordenados de tipo de representación finita.

<u>Teorema de Kleiner</u>

El conjunto parcialmente ordenado S es de tipo de representación finita sí y sólo sí S es finito y no contiene como subconjunto propio a ninguno de los siguientes conjuntos $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$ o $(N, 4)$.

Este teorema teorema fue demostrado por Kleiner en [K] utilizando las técnicas de Nazarova y Roiter.

CAPITULO I.

En este capítulo daremos la definición de policarcaj y la de representación de un policarcaj. Interpretaremos la categoría de representaciones de un policarcaj en términos de módulos describiéndola como la subcategoría plena de representaciones de cierto carcaj con relaciones. Esta subcategoría resulta cerrada bajo extensiones, conúcleos y envolventes inyectivas.

Definición 1.1 Un *policarcaj* es un carcaj en el que se asocia a cada flecha un número natural que llamaremos *peso*.

Definición 1.2 Una representación de un policarcaj es:

i) Ubicar en cada vértice un k-espacio vectorial de dimensión finita.

ii) Asociar a cada flecha $\alpha : i \xrightarrow{t} j$ de peso t un conjunto de t transformaciones lineales $A_1 \ldots A_t$ donde:

$$A_1 : V_i \longrightarrow V_j \qquad\qquad A_2 : V_i \longrightarrow V_j \big/ I_m A_1$$

$$A_s = V_i \longrightarrow V_j^s \quad \text{donde } V_j^s = V_j^{s-1} \big/ I_m A_{s-1}$$

Dado un policarcaj PQ la categoría de representaciones de PQ, que denotaremos $\widetilde{PQ}$ tiene por objetos las representaciones de PQ y si R, R' ε obj $\widetilde{PQ}$, $\sigma : R \longrightarrow R'$ es una colección $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \varepsilon I}$ de transformaciones lineales (I es el conjunto de vértices de cualquier representación de PQ) que satisfacen, en cada flecha $\alpha : i \xrightarrow{n} j$ de PQ, que los siguientes cuadros conmuten

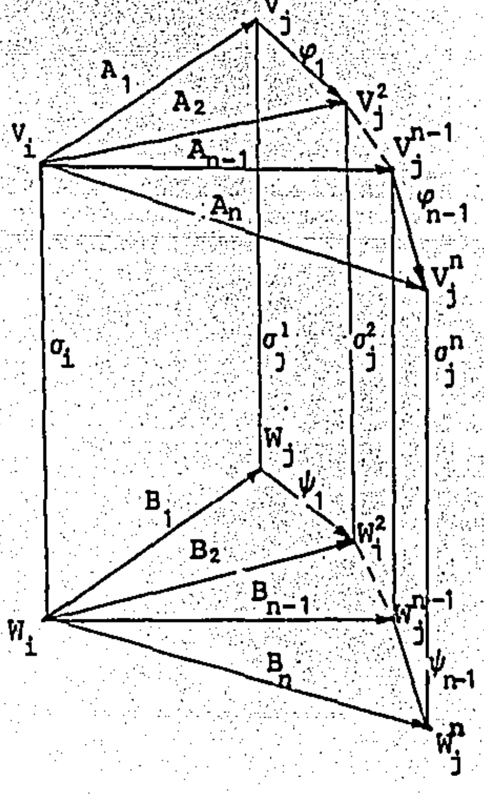
$$\sigma_j^p \, A_p = B_p \sigma_i \qquad p = 1, \ldots n$$

y además

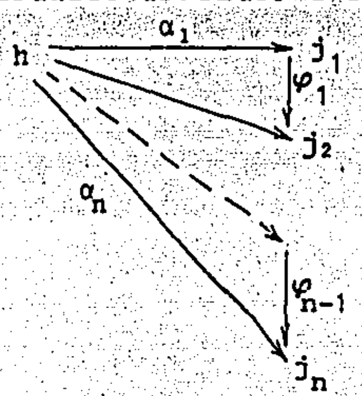
$$\sigma_j^p \, \varphi_{p-1} = \psi_{p-1} \sigma_j^{p-1} \quad p=2, \ldots n$$

donde φ_j y ψ_j son los morfismos canónicos.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "\sigma"] \\ R' \end{tikzcd}$$



A cada policarcaj PQ podemos asociarle el carcaj Q de su representación; esto es, podemos asociarle el carcaj que tiene tantos vértices como vértices tenga una representación de PQ, y tantas flechas como transformaciones lineales aparecen en la representación de PQ. De esta forma, a $\widetilde{PQ}$ la podemos ver como la categoría de representaciones de Q que satisfacen, en el abanico asociado a cada flecha $\alpha: h \xrightarrow{n} j$ de PQ que



$\operatorname{Im} \alpha_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$ y que φ_i es un epimorfismo $(i = 1, \ldots n)$.

Denotemos γ_{i_α} a esta condición y $\gamma = \langle \gamma_{i_\alpha} \rangle_{\alpha \in (PQ)_1}$.

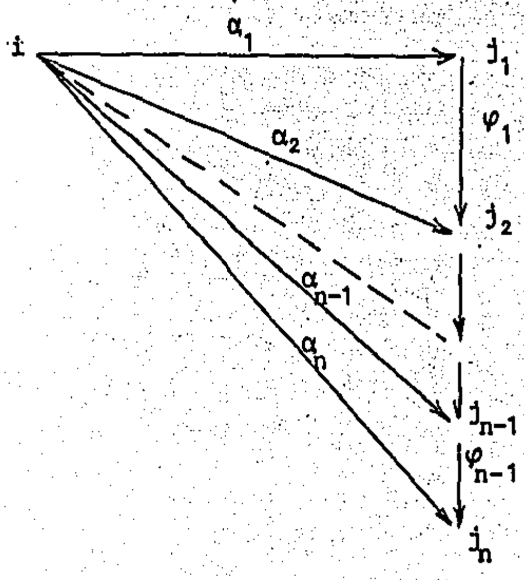
Si mod (Q, γ) es la categoría de representaciones de Q que satisfacen la condición γ y mod (Q, ρ) es la categoría de representaciones de Q que satisfacen la relación ρ donde $\rho = \langle \rho_{i_\alpha} \rangle_{\alpha \in (PQ)_1}$, y ρ_i es la relación $\varphi_i \alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots n)$ entonces tendremos que mod (Q, γ) es una subcategoría plena de mod $(Q, \rho) \simeq$ mod $kQ/\langle \rho \rangle$.

De ahí que la categoría $\widetilde{PQ}$ la podemos ver como una subcategoría plena de cierta categoría de módulos.

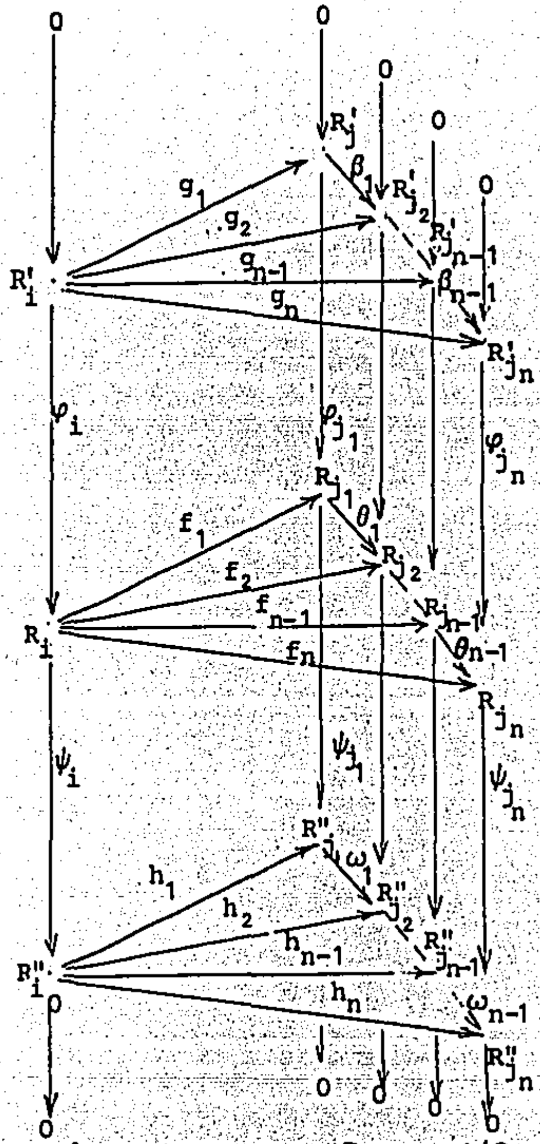
i) $\widetilde{PQ}$ es cerrada bajo extensiones

Si $0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\psi} R'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(Q,\rho)$ y R' y $R'' \in \mathrm{mod}(Q,\gamma)$ queremos ver que $R \in \mathrm{mod}(Q,\gamma)$.

Para cada flecha $\alpha: i \xrightarrow{n} j$ de $\widetilde{PQ}$ tendremos n flechas en Q.



Si $0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\psi} R'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(Q,\rho)$, será exacta en cada vértice, en particular:



Para demostrar que $R \in \operatorname{mod}(Q,\gamma)$ necesitamos ver que $I_m f_s = \operatorname{Ker} \theta_s$ y θ_s es epi $(s = 1,\ldots,n)$ en cada abanico de Q asociado a una flecha α de PQ. Pero observemos que para cada $s=1,\ldots n$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R'_{j_s} \arrow[r, "\varphi_{j_s}"] \arrow[d, "\beta_s"] & R_{j_s} \arrow[r, "\psi_{j_s}"] \arrow[d, "\theta_s"] & R''_{j_s} \arrow[r] \arrow[d, "\omega_s"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R'_{j_{s+1}} \arrow[r, "\varphi_{j_{s+1}}"] & R_{j_{s+1}} \arrow[r, "\psi_{j_{s+1}}"] & R''_{j_{s+1}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

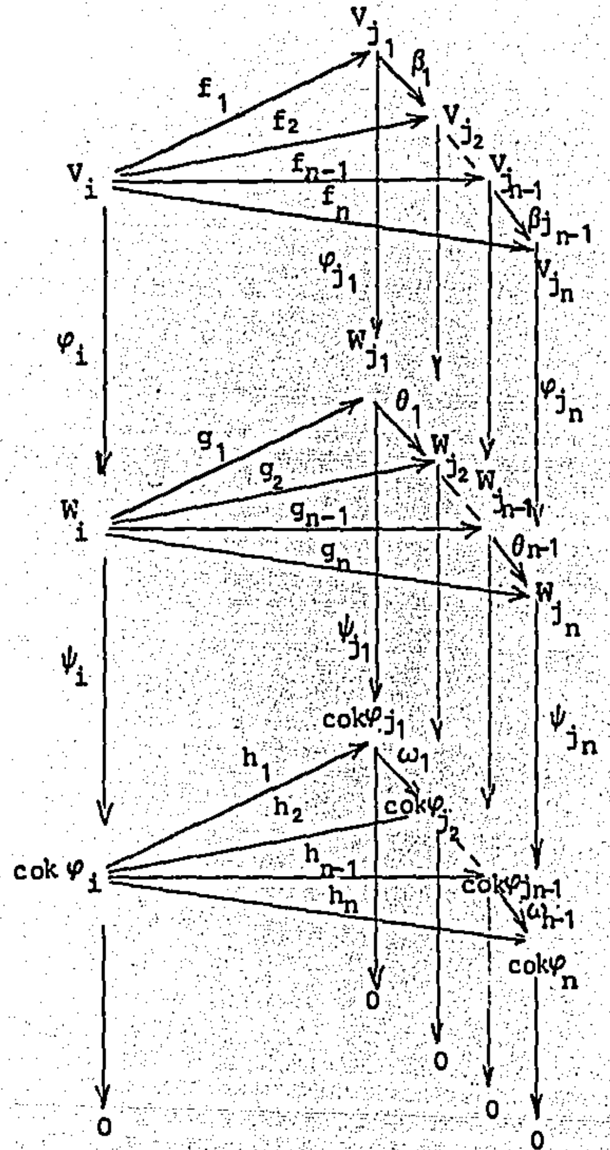
β_s, ω_s y ψ_{j_s} son epimorfismos, de donde θ_s es epimorfismo.

Además, como $R \in \text{mod}(Q,\rho)$ $\theta_s f_s = 0$ $(s = 1,\ldots 0)$ es decir, $I_m f_s \subset \text{Ker}\,\theta_s$. La otra contención se puede demostrar cazando elementos.

Por lo tanto $\text{mod}(Q,\gamma)$ es cerrada bajo sumas directas.

ii) $\tilde{PQ}$ es cerrada bajo conúcleos

Sean V y $W \in \text{obj mod}(Q,\gamma)$ y $\varphi: V \longrightarrow W$ un morfismo en $\text{mod}(Q,\gamma)$. Queremos demostrar que $\text{cok}\,\varphi \in \text{mod}(Q,\gamma)$. Como $\text{mod}(Q,\rho)$ es cerrada bajo conúcleos, $\text{cok}\,\varphi \in \text{mod}(Q,\rho)$ y tenemos la siguiente sucesión exacta $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} \text{cok}\,\varphi \longrightarrow 0$ en $\text{mod}(Q,\rho)$. En particular, tendremos en la flecha $\alpha : i \xrightarrow{n} j$



Pero observemos que para cada $s = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{tikzcd} W_{j_s} \arrow[r, "\theta_s"] \arrow[d, "\psi_{j_s}"'] & W_{j_{s+1}} \arrow[d, "\psi_{j_{s+1}}"] \\ \operatorname{cok}\varphi_{j_s} \arrow[r, "\omega_s"] & \operatorname{cok}\varphi_{j_{s+1}} \end{tikzcd}$$

$\omega_s \psi_{j_s} = \psi_{j_{s+1}} \theta_s$ es un epimorfismo porque θ_s y $\psi_{j_{s+1}}$ lo son, de donde ω_s es un epimorfismo.

Además, como cok $\varphi \in \mathrm{mod}(Q,\rho)$, $\omega_s h_s = 0$ de donde $I_m h_s \subset \mathrm{Ker}\ \omega_s$ y cazando elementos se demuestra la otra contención.

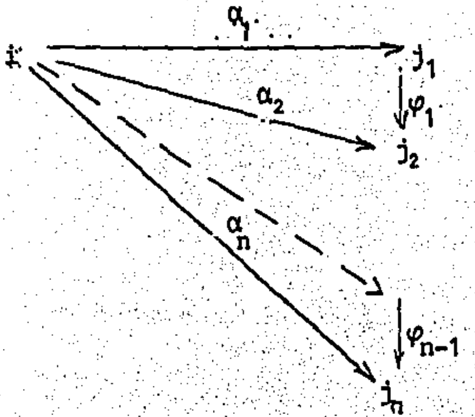
Por lo tanto $\mathrm{mod}(Q,\gamma)$ es cerrada bajo conúcleos.

iii) $\widetilde{PQ}$ es cerrada bajo envolventes inyectivas

Como la envolvente inyectiva de un módulo es igual a la envolvente inyectiva de su soclo, bastará analizar las envolventes inyectivas de los simples. Pero las envolventes inyectivas de los simples son los módulos inyectivos inescindibles; por lo tanto, si queremos demostrar que $\mathrm{mod}(Q,\gamma)$ es cerrada bajo envolventes inyectivas bastará con demostrar que los inyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}(Q,\rho)$ están en $\mathrm{mod}(Q,\gamma)$.

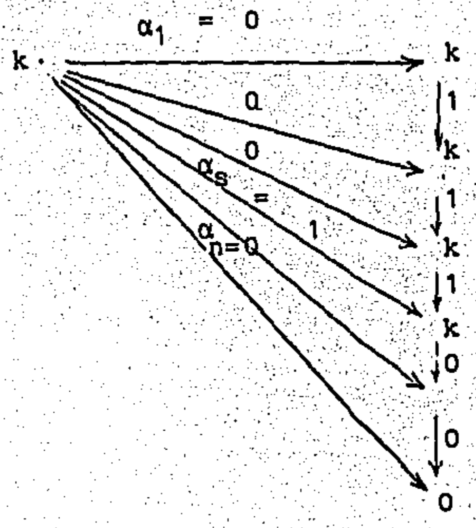
Analizaremos los inyectivos inescindibles I_j, para cada $j \in Q_0$, de $\mathrm{mod}(Q,\rho)$.

Consideremos el abanico asociado a la flecha $\alpha: i \xrightarrow{n} j$



Para cada $1 \leq s \leq n$ I_{j_s} se puede describir así:

$I_{j_s}\Big|_{\alpha}$ será de la forma:



$$(I_{j_s})_i = k \quad (I_{j_s})_r = \begin{cases} k & r \leq s \\ 0 & s < r \leq n \end{cases}$$

$$\alpha_r : \begin{cases} 0 \text{ si } r \neq s \\ 1 \text{ si } r = s \end{cases}$$

$$\varphi_r = \begin{cases} 1 \text{ si } r < s \\ 0 \quad s \leq r \leq n-1 \end{cases}$$

de donde

$$(I_{j_s})_i \xrightarrow{\alpha_r} (I_{j_s})_{r-1} \xrightarrow{\varphi_r} (I_{j_s})_r \longrightarrow 0 \text{ es exacta}$$

Si

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "\beta_m"'] & q_1 \arrow[d, "\psi_1"] \\
 & q_2 \arrow[d, dashed, "\psi_{m-1}"] \\
 & q_m
\end{tikzcd}$$

es el abanico asociado a la flecha $\beta : p \xrightarrow{m} q$ tendremos $(I_{j_s})_{q_\ell} = 0$ si $1 < \ell < m$.

para $\ell = 1$ tendremos dos posibilidades

i) Si no existe un camino de q a j $(I_{j_s})_{q_1} = 0$ y en este caso

$0 = (I_{j_s})_p \xrightarrow{0} (I_{j_s})_{q_\ell} = 0 \xrightarrow{0} (I_{j_s})_{q_{\ell+1}} = 0 \longrightarrow 0$ es exacta.

ii) Si existen t camino de q a j, el número de caminos de p a j será mayor e igual a t de donde $\dim(I_{j_s})_p \geq \dim(I_{j_s})_{q_1}$, es decir, en I_{j_s}, β_1 es un epimorfismo y

$(I_{j_s})_p \xrightarrow{\beta_1} (I_{j_s})_{q_1} \xrightarrow{0} (I_{j_s})_{q_2} = 0$ es exacta.

Por lo tanto $I_{j_s} \in \mathrm{mod}(Q, \gamma)$ para toda $s = 1, \ldots n$.

El inyectivo I_i se puede describir así:

$I_i\Big|_\alpha$ será de la forma

$(I_i)_i = k \quad (I_i)_{j_s} = 0$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "0"] \arrow[ddr] \arrow[dddr, "0"'] \arrow[ddddr] & 0 \arrow[d] \\
& 0 \arrow[d] \\
& 0 \arrow[d] \\
& 0 \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

de donde

$(I_i)_i \xrightarrow{0} (I_i)_{j_s} = 0 \xrightarrow{0} (I_i)_{j_{s+1}} = 0$ es exacta y en el abanico asociado a $\beta : p \longrightarrow q$ tendremos $(I_i)_{q_\ell} = 0$ si $1 < \ell \leq m$. Para $\ell = 1$ tendremos dos posibilidades.

i) Si no existe un camino de q a i $(I_i)_{q_1} = 0$ y en este caso

$(I_i)_p \xrightarrow{0} (I_i)_{q_\ell} = 0 \longrightarrow (I_i)_{q_{\ell+1}} = 0 \longrightarrow 0$ es exacta.

ii) Si existen t caminos de q a i, el número de caminos de p a i será mayor o igual a t de donde $\dim(I_i)_p \geq \dim(I_i)_{q_1}$, es decir, en I_i, β_1 es un epimorfismo y

$(I_i)_p \xrightarrow{\beta_1} (I_i)_{q_1} \xrightarrow{0} (I_i)_{q_2} = 0 \longrightarrow 0$ es exacta y

$I_i \in \mathrm{mod}\ (Q,\gamma)$

Como en cada vértice de Q_0 empieza o termina una flecha, tendremos que para cada $j \in Q_0$, el inyectivo inescindible de $\mathrm{mod}(Q,\rho)$ asociado a j está en $\mathrm{mod}(Q,\gamma)$. Por lo tanto $\mathrm{mod}(Q,\gamma)$ es cerrado bajo envolventes inyectivas.

CAPITULO II.

Ciertas relaciones cero pueden separarse; esto es, dado un carcaj Γ con una relación cero, ρ, es posible, en algunos casos, encontrar un carcaj Δ, sin relaciones, de tal manera que el carcaj (Γ, ρ) tenga el mismo tipo de representación que el carcaj Δ.

Para demostrar esto consideraremos primero la categoría de representaciones del carcaj Δ :mod $k\Delta$ y la categoría cociente mod $k\Delta/_C$, donde C es cierto ideal de la categoría y describiremos la relación que existe entre las representaciones inescindibles de ambas categorías. A partir de Δ construiremos el carcaj Γ que satisface cierta relación cero, que llamaremos ρ y daremos un funtor

$$F : \text{mod } k\Delta \longrightarrow \text{mod } k\Gamma/_{\langle\rho\rangle}$$

Con este material se integrará la sección 2.1

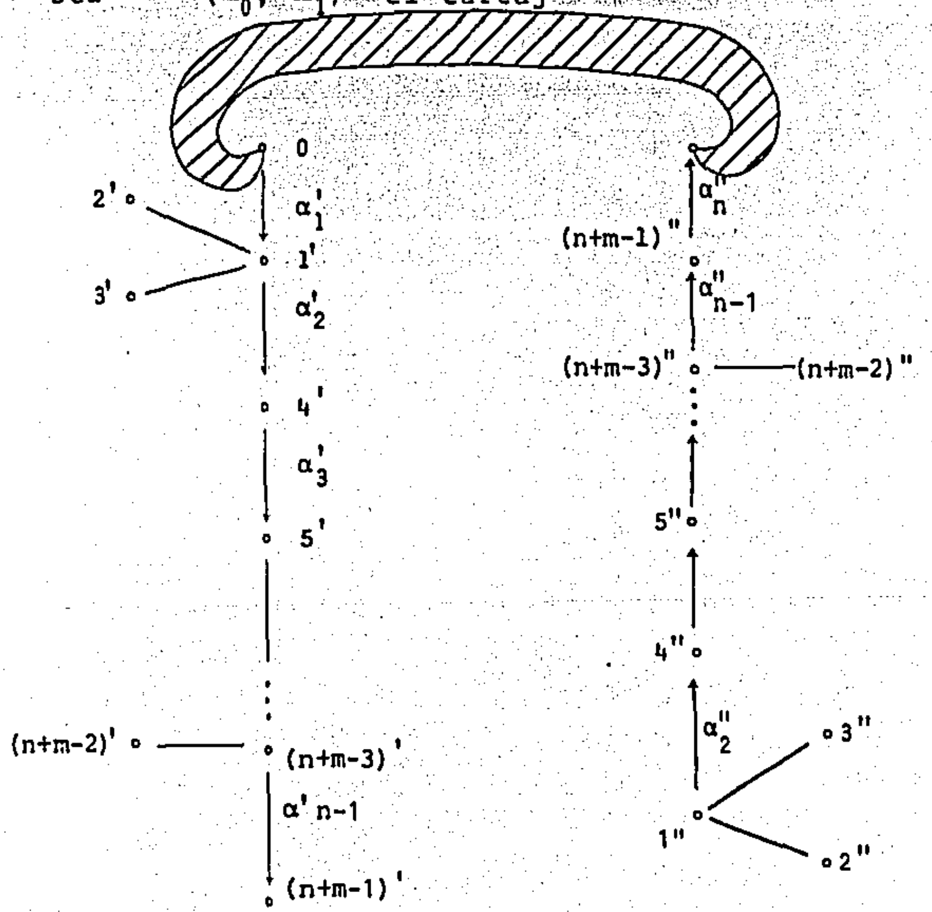
Como el funtor F no es, en general, denso; en la sección 2.2 presentaremos dos casos en los que F resulta denso. Estos dos casos aparecen en [C.R.1] y Ringel atribuye esta presentación a Zavadsky. Nosotros analizaremos que sucede con los morfismos irreducibles de mod kΔ al aplicarle F.

En la sección 2.3 demostraremos el teorema de Nazarova y Roiter para el caso finito utilizando la herramienta de la sección anterior.

Sección 2.1

Descripción de la categoría mod kΔ y de la categoría cociente mod kΔ/C

Sea $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ el carcaj



Podemos ver a Δ como la unión de tres subcarcajes: $\Delta = \Gamma' \cup \Delta' \cup \Delta''$ donde Γ' es un carcaj arbitrario y Δ' y Δ'' son dos árboles orientados. Δ' sin la primer flecha es el mismo subcarcaj que Δ'' sin la última flecha. Γ' y Δ' se intersectan en el vértice 0 y no tienen ninguna flecha en común, Γ' y Δ'' se intersectan en el vértice $(n + m)$ y no tienen ninguna flecha en común y Δ' y Δ'' son ajenos entre sí.

Sea $\bmod k\Delta$ la categoría de representaciones de Δ y sea $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de $\bmod k\Delta$ definida por:

$\mathcal{C} = \{X \in \bmod k\Delta \mid X|_{\Gamma'} = 0\}$

Dados $X, Y \in \bmod k\Delta$, definimos

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}(X,Y) \mid \exists\, C \in \mathcal{C} \text{ tal que } \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\cup"] & Y \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \}$$

$\mathcal{C}(\_,?)$ es un ideal de $\bmod k\Delta$ pues

1. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ $C_1 \oplus C_2 \in \mathcal{C}$
2. $\mathcal{C}(X,Y)$ es un subgrupo de $\mathrm{Hom}_{\Delta}(X,Y)$ pues si $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$ existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & & Y \\ & C_1 \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "h_2"'] & & Y \\ & C_2 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} f_1 = g_1 h_1 \\ f_2 = g_2 h_2 \end{matrix}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\binom{h_1}{h_2}"'] & & Y \\ & C_1 \oplus C_2 \arrow[ur, "(g_1 g_2)"'] & \end{tikzcd}$$

$$(g_1, g_2) \binom{h_1}{h_2} = g_1 h_1 + g_2 h_2 = f_1 + f_2 \in C(X, Y)$$

3. Si $X, Y, W \in \operatorname{mod} k\Delta$, $t \in \operatorname{Hom}_\Delta (Y, W)$, $f \in C(X, Y)$ entonces $tf \in C(X, W)$ puesto que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[r, "t"] & W \\ & C \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

$tf = t\,(gh) = (tg)h$

ie tf se factoriza a través de un objeto de C

$tf \in C(X, W)$

Si $r \in \operatorname{Hom}(W, X)$ y $f \in C(X, Y)$ entonces $fr \in C(W,Y)$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "r"] & X \arrow[rr] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\ & & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$fr = (gh)r = g(hr)$

fr se factoriza a través de un objeto de C, por lo tanto $fr \in C(W, Y)$ □

Como C es un ideal podemos definir la categoría cociente $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta := \dfrac{\mathrm{mod}\, k\Delta}{C}$, esto es, los objetos de $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$ son los objetos de $\mathrm{mod}\, k\Delta$, si $X, Y \in \mathrm{obj}\, \underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$, $\underset{\sim}{\mathrm{morf}}\,(X,Y) = \dfrac{\mathrm{morf}_C(X,Y)}{C(X,Y)}$.

$\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$ resulta ser una categoría aditiva, ie, si $X,Y \in \mathrm{obj}\, \underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$ y $\overline{f}, \overline{g} \in \underset{\sim}{\mathrm{morf}}(X,Y)$ definimos $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f+g}$ y esta suma está bien definida puesto que si:

$$\overline{f}_1 = \overline{f} \Rightarrow f = f_1 + \alpha \quad \text{con} \quad \alpha \in C(X, Y)$$

$$\overline{g}_1 = \overline{g} \Rightarrow g = g_1 + \beta \quad \text{con} \quad \beta \in C(X, Y)$$

entonces

$$\begin{aligned} f + g &= f_1 + \alpha + g_1 + \beta \\ &= f_1 + g_1 + \alpha + \beta \in f_1 + g_1 + C(X, Y) \\ \Rightarrow \overline{f + g} &= \overline{f_1 + g_1} \end{aligned}$$

La composicion de morfismos es bilineal, ie, si

$\overline{h} \in \underset{\sim}{\mathrm{morf}}(Y, Z)$ $\qquad$ $\overline{p} \in \underset{\sim}{\mathrm{morf}}(W, X)$

$\overline{h} \circ \overline{f+g} = \overline{hf + hg}$

$\overline{f+g} \circ \overline{p} = \overline{fp + gp}$

la aditividad $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$ la hereda de la aditividad de $\mathrm{mod}\, k\Delta$

Proposición 2.1

Sean M y N objetos en mod $k\Delta$. Si M y N no tienen sumados en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}(M,N) \subset rad^2(M,N)$.

Demostración

Sea $f \in \mathcal{C}(M,N)$, ie, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que

$$f = hg \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & {}_{g}\searrow \quad \nearrow_{h} & \\ & C & \end{array}$$

Sea M_i un sumando inescindible de M, C_r un sumando inescindible de C y N_s un sumando inescindible de N.

Si $g \notin rad(M,C)$, por la proposición 0.2.1 del capítulo 0, $p_r.\,g\;j_i \notin rad(M_i, C_r)$ y por la proposición 0.2.2b.) $p_r.\,g\;j_i$ es un isomorfismo, contradiciendo que M no tiene sumandos en $\mathcal{C}$. Análogamente, si $h \notin rad(C,N)$ $p_s h\, j_r$ es un isomorfismo, contradiciendo que N no tiene sumandos en $\mathcal{C}$.

Por lo tanto $g \in rad(M,C)$ y $h \in rad(C,N)$, es decir, $f \in rad^2(M,N)$.

Observación

Si M no tiene sumandos en $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(M,M)$ es un ideal de

End M; por la proposición anterior y la proposición 0.2.2a) del capítulo 0:

$$C(M, M) \subseteq \mathrm{rad}^2 (M, M) \subseteq \mathrm{rad}(M, M) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}\, M)$$

<u>Proposición 2.2</u>

Sea $M \in \mathrm{mod}\, k\Delta \setminus C$. M es inescindible en $\mathrm{mod}\, k\Delta$ si y sólo si M es inescindible en $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$.

<u>Demostración</u>

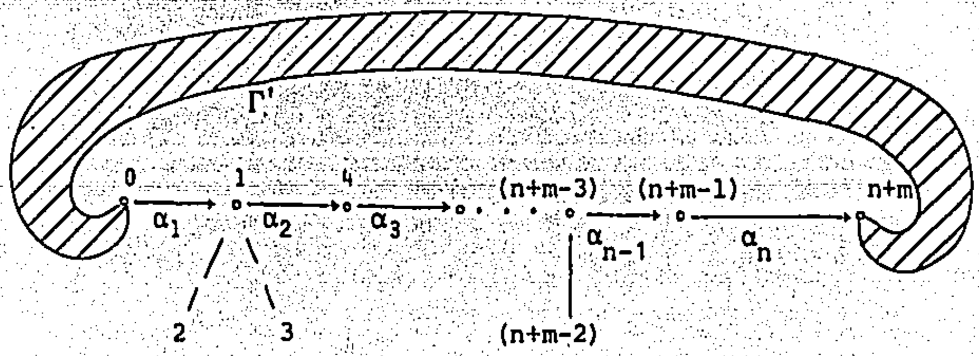
" $\Longrightarrow$" Si M es inescindible en $\mathrm{mod}\, k\Delta$, End M es local pero $\mathrm{End}\, M \longrightarrow \dfrac{\mathrm{End}\, M}{C(M,M)} = \underset{\sim}{\mathrm{End}}\, M$ es un epimorfismo de anillos, de donde $\underset{\sim}{\mathrm{End}}\, M$ es local

"$\Longleftarrow$" Por la observación

$$\frac{\mathrm{End}\, M}{\mathrm{rad}(\mathrm{End}\, M)} \subset \frac{\mathrm{End}\, M}{C(M,M)} = \underset{\sim}{\mathrm{End}}\, M$$

□

Sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ el carcaj



Podemos ver a Γ como la unión de dos subcarcajes $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ donde Γ' es un carcaj arbitrario y Γ'' es el mismo árbol orientado que Δ' con una flecha más al final (o es el mismo árbol que Δ'' con una flecha más al principio). Γ' y Γ'' se intersectan en los vértices 0 y $n+m$ y no tienen ninguna flecha en común. Estamos interesados en estudiar el carcaj Γ con la relación $\rho = \alpha_n \dots \alpha_1 = 0$.

Sea mod $k\Gamma/\langle\rho\rangle$ la categoría de representaciones de Γ con la relación ρ. Sabemos que mod $k\Gamma/\langle\rho\rangle$ es la subcategoría plena de mod $k\Gamma$ cuyos objetos satisfacen la relación ρ.

Sea $F : \text{mod } k\Delta \longrightarrow \text{mod } k\Gamma/\langle\rho\rangle$ un funtor definido de la siguiente manera:

Si $V = (V_i, T_\alpha)_{\substack{i\in\Delta_0\\ \alpha\in\Delta_1}}$ es una representación en mod $k\Delta$

<u>En los objetos</u> $FV = W = (W_j, S_\gamma)_{\substack{j\in\Gamma_0\\ \gamma\in\Gamma_1}}$ donde

$$W_j = V_j \quad \text{si} \quad j \in (\Gamma')_0 .$$

En particular $W_0 = V_0 \quad W_{n+1} = V_{n+1}$

$$W_j = V_{j'} \oplus V_{j''} \ \text{si} \ j \in (\Gamma'')_0$$

$S_\gamma = T_\gamma$ si $\gamma \varepsilon (\Gamma')_1$

$S_i = T_{\alpha_{i'}} \oplus T_{\alpha_{i''}}$ si $i \varepsilon (\Gamma'')_1$ en particular

$S_1 = \begin{bmatrix} T_{\alpha'_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad S_n = \begin{bmatrix} 0 & T_{\alpha''_n} \end{bmatrix}$

<u>En los morfismos</u>

Si $V = (V_i, T_\alpha)$ y $W = (W_i, R_\alpha)$ son dos representaciones de Δ y $\psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha\varepsilon\Delta_0} : V \longrightarrow W$ es un morfismo de representaciones.

$F\psi|_{\Gamma'} = \psi|_{\Gamma'}$. En particular $(F\psi)_0 = \psi_0$ $(F\psi)_{n+1} = \psi_{n+1}$

$(F\psi)_j = \psi_{j'} \oplus \psi_{j''}$ si $j \varepsilon (\Gamma'')_0$

□

Sea $\mathcal{D}$ la subcategoría plena de $\text{mod}\, k\Gamma/\langle\rho\rangle$ definida por

$\mathcal{D} = \{X \varepsilon \text{mod}\, k\Gamma/\langle\rho\rangle \,|\, X|_{\Gamma'} = 0\}$

En forma análoga tendremos que $\mathcal{D}(\_,¿)$ es un ideal de $\text{mod}\, k\Gamma/\langle\rho\rangle$ y podemos construir la categoría cociente $\underset{\sim}{\text{mod}}\, k\Gamma/\langle\rho\rangle$

Proposición 2.3

Sea $F : \text{mod}\, k\Delta \longrightarrow \text{mod}\, \frac{k\Gamma}{\langle \rho \rangle}$

1) F es aditivo

2) F es exacto

3) $Ff = 0 \iff f = 0$

4) Ff es un isomorfismo $\iff f$ es un isomorfismo.

Demostración

1. Sean $V, W \in \text{obj mod}\, k\Delta$ y $\psi, \varphi \in \text{morf}_\Delta(V,W)$

$\psi + \varphi \in \text{morf}_\Delta(V,W)$ y aplicando F tendremos

$$F(\psi + \varphi\Big|_{\Gamma'} = (\psi + \varphi)_{\Gamma'} = \psi\Big|_{\Gamma'} + \varphi\Big|_{\Gamma'} = F\psi\Big|_{\Gamma'} + F\varphi\Big|_{\Gamma'}$$

$$F(\psi + \varphi)\Big|_{\Gamma''} = \begin{pmatrix} \psi_i + \varphi_i & 0 \\ 0 & \psi_i' + \varphi_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_i & 0 \\ 0 & \varphi_i' \end{pmatrix} =$$

$$= F\psi\Big|_{\Gamma''} + F\varphi\Big|_{\Gamma''}$$

Por lo tanto $F(\psi + \varphi) = F\psi + F\varphi$ ie, F es un funtor aditivo.

2. Sea $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\operatorname{mod} k\Delta$. Eso significa que es exacta en cada vértice de Δ, en particular

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X|_{\Gamma'} & \xrightarrow{f} & Y|_{\Gamma'} & \xrightarrow{g} & Z|_{\Gamma'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & FX|_{\Gamma'} & \xrightarrow{Ff|_{\Gamma'}} & FY|_{\Gamma'} & \xrightarrow{Fg|_{\Gamma'}} & FZ|_{\Gamma'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es exacta.

Como

$$0 \longrightarrow X_{i'} \xrightarrow{f_{i'}} Y_{i'} \xrightarrow{g_{i'}} Z_{i'} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad i' \in \Delta'$$

$$0 \longrightarrow X_{i''} \xrightarrow{f_{i''}} Y_{i''} \xrightarrow{g_{i''}} Z_{i''} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad i'' \in \Delta''$$

son exactas, tendremos que

$$0 \longrightarrow X_{i'} \oplus X_{i''} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_{i'} & 0 \\ 0 & f_{i''} \end{pmatrix}} Y_{i'} \oplus Y_{i''} \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_{i'} & 0 \\ 0 & g_{i''} \end{pmatrix}} Z_{i'} \oplus Z_{i''} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (FX)_i \xrightarrow{(Ff)_i} (FY)_i \xrightarrow{(Fg)_i} (FZ)_i \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir

$$0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$$

es exacta.

3. Si $Ff = 0$ $\quad f|_{\Gamma'} = Ff|_{\Gamma'} = 0$

Si $f_i \neq 0$ para alguna $i \in \Delta' \cup \Delta''$ tendremos:

$$(Ff)_i = \begin{bmatrix} f_{i'} & 0 \\ 0 & f_{i''} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{contradicción.}$$

Por lo tanto $f_i = 0 \quad \forall\, i \in \Delta' \cup \Delta''$

4. Sea $f : X \longrightarrow Y$. Tenemos la siguiente sucesión exacta en $\operatorname{mod} k\Delta$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} \operatorname{cok} f \longrightarrow 0$$

Pero F es exacto, de donde

$$0 \longrightarrow F(\ker f) \xrightarrow{Fi} FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fp} F(\operatorname{cok} f) \longrightarrow 0$$

es exacta

Si Ff es un isomorfismo $f(\operatorname{Ker} f) = 0$ y $F(\operatorname{cok} f) = 0$

Como $Fi = 0$ y $Fp = 0$, por 3) $i = 0$ y $p = 0$, es decir, f es un isomorfismo.

Proposición 2.4

Sean $V, W \in \operatorname{mod} k\Delta \setminus C$ y sea $g \in \operatorname{Hom}_\Gamma(FV, FW)$ entonces existe $h \in \operatorname{Hom}_\Delta(V, W)$ tal que $g = F(h) + r$ con $r \in \mathcal{D}(FV, FW)$

<u>Demostración</u>

Sea $g : FV \longrightarrow FW$ un morfismo en mod $\frac{k\Gamma}{(\rho)}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
V_0 \arrow[r, "\binom{\alpha_1}{0}"] \arrow[d, "g_0"'] & V_1' \oplus V_1'' \arrow[d, "\begin{pmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 \end{pmatrix}"] \\
W_0 \arrow[r, "\binom{\beta_1}{0}"] & W_1' \oplus W_1''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
V_i' \oplus V_i'' \arrow[r, "\begin{pmatrix} \alpha_{11}^k & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^k \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} g_{11}^i & g_{12}^i \\ g_{21}^i & g_{22}^i \end{pmatrix}"'] & V_j' \oplus V_j'' \arrow[d, "\begin{pmatrix} g_{11}^j & g_{12}^j \\ g_{21}^j & g_{22}^j \end{pmatrix}"] \\
W_i' \oplus W_i'' \arrow[r, "\begin{pmatrix} \beta_{11}^k & 0 \\ 0 & \beta_{22}^k \end{pmatrix}"] & W_j' \oplus W_j''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
V_{m+m-1}' \oplus V_{n+m-1}'' \arrow[r, "(0 \quad \alpha_n)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} g_{11}^{n+m-1} & g_{12}^{n+m-1} \\ g_{21}^{n+m-1} & g_{22}^{n+m-1} \end{pmatrix}"'] & V_{n+m} \arrow[d, "g_{n+m}"] \\
W_{n+m-1}' \oplus W_{n+m-1}'' \arrow[r, "(0 \quad \beta_n)"] & W_{n+m}
\end{tikzcd}$$

Definimos $\bar{h} : FV \longrightarrow FW$ de la siguiente forma:

$$\bar{h}\big|_{\Gamma'} = g\big|_{\Gamma'}$$

$$\bar{h}\big|_{\Gamma''} = \begin{pmatrix} g_{11}^i & 0 \\ 0 & g_{22}^i \end{pmatrix} \quad \text{en el vértice } i$$

$\bar{h}$ así definido es un morfismo de representaciones.

Sea $r = g - \bar{h} : FV \longrightarrow FW$ ie r es el morfismo definido de la siguiente forma:

$$r\big|_{\Gamma'} = 0$$

$$r\big|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} 0 & g^i_{12} \\ g^i_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en el vértice } i$$

Dado $\bar{h}$ podemos definir $h : V \longrightarrow W$ de la siguiente forma:

$$h\big|_{\Gamma'} = \bar{h}\big|_{\Gamma'}$$

$$(h)_i = h^i_{11} \quad i \in \Delta'_0$$

$$(h)_i = h^i_{22} \quad i \in \Delta''_0$$

Así definido resulta un morfismo de representaciones tal que $Fh = \bar{h}$.

Si FV ó $FW \in \mathcal{D} \Rightarrow V$ ó $W \in C$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto FV y $FW \in \operatorname{mod} \frac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle} \backslash \mathcal{D} \Rightarrow r$ no es mono ni epi y por lo tanto se factoriza propiamente a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} FV & \xrightarrow{r} & FW \\ & {\scriptstyle s}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \varepsilon} & \\ & I_m r & \end{array}$$

pero $I_m r \in \mathcal{D}$, por lo tanto $r \in \mathcal{D}(FV,FW)$

ie $g = \bar{h} + r = F(h) + r$ con $r \in D(FV,FW)$.

Proposición 2.5

$F : \operatorname{mod} k\Delta \longrightarrow \operatorname{mod} k\Gamma/\langle\rho\rangle$ induce un funtor fiel y pleno

$\bar{F} : \underset{\sim}{\operatorname{mod}}\, k\Delta \longrightarrow \underset{\sim}{\operatorname{mod}}\, k\Gamma/\langle\rho\rangle$

Demostración:

Sean $X, Y \in \operatorname{obj} \operatorname{mod} k\Delta \setminus C$. Es claro que

$F\,C(X,Y) \subset \mathcal{D}(FX,FY)$, por lo tanto F induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C(X,Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Delta(X,Y) & \longrightarrow & \underset{\sim}{\operatorname{Hom}}(X,Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}(FX,FY) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Gamma(FX,FY) & \longrightarrow & \underset{\sim}{\operatorname{Hom}}(FX,FY) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

a) $\bar{F}$ es pleno

Sea $0 \neq \bar{f} \in \underset{\sim}{\operatorname{Hom}}(FX,FY) \Rightarrow$ existe $0 \neq f \in \operatorname{Hom}(FX,FY)$ que no se factoriza a través de un objeto de $\mathcal{D}$.

Por la proposición 2.4, existe $h \in \operatorname{Hom}_\Delta(X,Y)$ tal que

$f = F(h) + r$ con $r \in \mathcal{D}(FX,FY)$

$\bar{f} = \overline{F(h)} = \bar{F}(h)$ con $0 \neq h \in \operatorname{Hom}_\Delta(X,Y)$

b) $\overline{F}$ es fiel

Sea $f : X \longrightarrow Y$ en $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\; k\Delta$ tal que $\overline{F}\, f = 0$

es decir existe $Z \in \mathcal{D}$ tal que

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "u"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & FY \\ & Z \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} \quad \text{en} \quad \mathrm{mod}\; k\Gamma/(\rho)$$

que visto en el carcaj sería:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\begin{bmatrix}\alpha \\ 0\end{bmatrix}"] \arrow[d] & X_1' \oplus X_1'' \arrow[d, "(u_1',\ u_1'')"] \\ 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & Z_1 \arrow[d, "\begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix}"] \\ Y_0 \arrow[r, "\begin{bmatrix}\beta \\ 0\end{bmatrix}"] & Y_1' \oplus Y_1'' \end{tikzcd} \qquad (u_1', u_1'')\begin{bmatrix}\alpha \\ 0\end{bmatrix} = u_1'\,\alpha = 0$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
X'_i \oplus X''_i \arrow[r, "\begin{bmatrix}\alpha^k_{11} & 0 \\ 0 & \alpha^k_{22}\end{bmatrix}"] \arrow[d, "{(u'_i, u''_i)}"'] & X'_j \oplus X''_j \arrow[d, "{(u'_j, u''_j)}"] \\
Z_i \arrow[r, "\gamma_k"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} v'_i \\ v''_i \end{bmatrix}"'] & Z_j \arrow[d, "\begin{bmatrix} v'_j \\ v''_j \end{bmatrix}"] \\
Y'_i \oplus Y''_i \arrow[r, "\begin{bmatrix}\beta^k_{11} & 0 \\ 0 & \beta^k_{22}\end{bmatrix}"] & Y'_j \oplus Y''_j
\end{tikzcd}$$

$$(u'_j, u''_j) \begin{bmatrix}\alpha^k_{11} & 0 \\ 0 & \alpha^k_{22}\end{bmatrix} = \gamma_k \, (u'_i, u''_i)$$

$$\Rightarrow (u'_j \alpha^k_{11} \, , \, u''_i \alpha^k_{22}) = (\gamma_k u'_i \, , \, \gamma_k \, u''_i)$$

$$\begin{bmatrix} v'_j \\ v''_j \end{bmatrix} \gamma_k = \begin{bmatrix}\beta^k_{11} & 0 \\ 0 & \beta^k_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_i \\ v''_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v'_j \; \gamma_k \\ v''_j \; \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^k_{11} \; v'_i \\ \beta^k_{22} \; v''_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
X'_{n+m-1} \oplus X''_{n+m-1} \arrow[r, "{(0 \;\; \alpha'_n)}"] \arrow[d, "{(u'_{n+m-1} \;\; u''_{n+m-1})}"'] & X_{n+m} \arrow[d, "0"] \\
Z_{n+m-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} v'_{n+m-1} \\ v''_{n+m-1} \end{bmatrix}"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\
Y'_{n+m-1} \oplus Y''_{n+m-1} \arrow[r, "{(0 \;\; \beta'_n)}"] & Y_{n+m}
\end{tikzcd}$$

$$(0 \quad \beta'_n) \begin{bmatrix} v'_{n+m-1} \\ v''_{n+m-1} \end{bmatrix} = \beta'_n \; v''_{n+m-1} = 0$$

Pero además $\begin{bmatrix} v'_i \\ v''_i \end{bmatrix} (u'_i, u''_i) = \begin{bmatrix} v'_i \cdot u'_i & v'_i \cdot u''_i \\ v''_i \cdot u'_i & v''_i \cdot u''_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^i_{11} & 0 \\ 0 & f^i_{22} \end{bmatrix}$

Estos morfismos inducen los morfismos

$$FX \xrightarrow{\theta} Z \oplus Z \xrightarrow{\delta} FY$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
X_0 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "0"'] & X'_1 \oplus X''_1 \arrow[d, "{\begin{bmatrix} u'_1 & 0 \\ 0 & u''_1 \end{bmatrix}}"] & X'_i \oplus X''_i \arrow[r, "{\begin{bmatrix} \alpha^k_{11} & 0 \\ 0 & \alpha^k_{22} \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} u'_i & 0 \\ 0 & u''_1 \end{bmatrix}}"'] & X'_j \oplus X''_j \arrow[d, "{\begin{bmatrix} u'_j & 0 \\ 0 & u''_j \end{bmatrix}}"] \\
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & Z_1 \oplus Z_1 \arrow[d, "{\begin{bmatrix} v'_1 & 0 \\ 0 & v''_1 \end{bmatrix}}"] & Z_i \oplus Z_i \arrow[r, "{\begin{bmatrix} \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_k \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} v'_i & 0 \\ 0 & v''_i \end{bmatrix}}"'] & Z_j \oplus Z_j \arrow[d, "{\begin{bmatrix} v'_j & 0 \\ 0 & v''_j \end{bmatrix}}"] \\
Y_0 \arrow[r, "b"] & Y'_1 \oplus Y''_1 & Y'_i \oplus Y''_i \arrow[r, "{\begin{bmatrix} \beta^k_{11} & 0 \\ 0'' & \beta_{22} \end{bmatrix}}"] & Y'_j \oplus Y''_j
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
X'_{n+m-1} \oplus X''_{n+m-1} \arrow[r, "(0 \quad \alpha'_n)"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} u' & 0 \\ 0 & u'' \end{bmatrix}}"'] & X_{n+m} \arrow[d, "0"] \\
Z_{n+m-1} \oplus Z_{n+m-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} v' & 0 \\ 0 & v'' \end{bmatrix}}"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\
Y'_{n+m-1} \oplus Y''_{n+m-1} \arrow[r, "(0 \quad \beta'_n)"] & Y_{n+m}
\end{tikzcd}$$

Sea $\overline{Z} \in \text{mod}\, k\Delta$ la siguiente representación:

$\overline{Z}|_{r'} = 0$ y en cada rama tiene a Z de donde $\overline{Z} \in C$

y θ y δ inducen los morfimos $X \xrightarrow{\overline{\theta}} \overline{Z} \xrightarrow{\overline{\delta}} y$

$\overline{\delta}\ \overline{\theta}\ |_{r'} = 0$

$(\overline{\delta}\ \overline{\theta})_i = v_i'\ u_i'$ si $i \in \Delta_o'$

$(\overline{\delta}\ \overline{\theta})_i = v_i''\ u_i''$ si $i \in \Delta_o''$

$\therefore\ F\ (\overline{\delta}\ \overline{\theta})|_{r'} = 0 \qquad F(\overline{\delta}\ \overline{\theta})_{i \in r_o''} = \begin{bmatrix} v_i'\ u_i' & 0 \\ 0 & v_i''\ u_i'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}^i & 0 \\ 0 & f_{22}^i \end{bmatrix}$

$f|_{r'} = F\ f|_{r'} = 0 = F(\overline{\delta}\ \overline{\theta})|_{r'} = \overline{\delta}\ \overline{\theta}|_{r'}$

$f_i = f_{11}^i = v_i'\ u_i'$ si $i \in \Delta_o'$ (en la rama izquierda)

$f_i = f_{22}^i = v_i''\ u_i''$ si $i \in \Delta_o''$ (en la rama derecha)

$\therefore$ f está factorizado a través de $\overline{Z} \in C$ $\therefore$ $\overline{f} = 0$

y $\overline{F}$ es fiel.

<u>Proposición 2.6</u>

Sea $V \in \text{mod}\, k\Delta$. FV tiene sumandos en D si y solo si V tiene sumandos en C -

<u>Demostración</u>

" $\Rightarrow$ " Supongamos que $F\,V$ tiene un sumando inescindible $X \in D$, esto es, existe un idempotente $r = t\,s \in \text{End } F\,V$

$$\begin{tikzcd} F\,V \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "s"'] & & F\,V \\ & X \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

Como r es idempotente $r \notin \text{rad}\,(\text{End } F\,V)$, por lo tanto existen

$$X \xrightarrow{j_x} F\,V \xrightarrow{s} X \xrightarrow{t} F\,V \xrightarrow{p_x} X$$

$p_x r\, j_x = p_x t\, s\, j_x$ es un idempotente en End X que es local

$\therefore\ p_x t\, s\, j_x = 1_x \Rightarrow s\, j_x \in \text{End } X$ es invertible $\Rightarrow$

s es epi escindible.

<u>Afirmación</u> Existe $\overline{X} \in C$ tal que $\overline{X}$ es sumando de V.

Observemos como es s:

$s|_{\Gamma'} = 0$ y $s|_{\Gamma''}$

$$\begin{tikzcd} V_i' \oplus V_i'' \arrow[r, "\begin{bmatrix} \alpha_{11}^k & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^k \end{bmatrix}"] \arrow[d, "(s_i', s_i'')"'] & V_j' \oplus V_j'' \arrow[d, "(s_j', s_j'')"] \\ X_i \arrow[r, "\gamma_k"] & X_j \end{tikzcd}$$

Como s es epi escindible existe $u : X \longrightarrow F\,V$

tal que $s\,u : 1_X$ donde $(u)|_{\Gamma'} = 0$ $(u_{\Gamma''})_i = \begin{bmatrix} u_i' \\ u_i'' \end{bmatrix}$

A s lo podemos descomponer como la suma de los morfismos $s = s' + s''$ donde

$$s'|_{\Gamma'} = 0 \qquad (s'|_{\Gamma''})_i = (s_i', 0)$$

$$s''|_{\Gamma'} = 0 \qquad (s''|_{\Gamma''})_i = (0, s_i'')$$

$1_X = s\,u = (s' + s'')u = s'\,u + s''\,u \in \text{End}\,X$

$\Rightarrow$ $s'\,u$ es invertible o $s''\,u$ es invertible.

Supongamos que $s'\,u$ es invertible.

Dado s' podemos encontrar $\overline{s}' : V \longrightarrow \overline{X}$, tal que $F\,\overline{s}' = s'$; donde $\overline{X}$ es la representación de Δ que tiene a X en Δ' (en la rama izquierda) y 0 en las demás partes; para los vertices distintos de cero, $\overline{s}_i' = s_i'$ y

$\bar{u} : \bar{X} \longrightarrow V$ tal que $\bar{u}_i = u_i'$.

Como $s'u$ es invertible, lo es en cada vértice, en particular $(s_i',0)\begin{bmatrix} u_i' \\ u_i'' \end{bmatrix} = s_i' u_i'$ es invertible, de donde $\bar{s}'\bar{u}$ también lo es, por lo tanto $\bar{s}'$ es un epi escindible, ie $\bar{X} \in C$ es un sumando de V.

De manera análoga podemos encontrar $\bar{\bar{s}}'' : V \longrightarrow \bar{\bar{X}}$ tal que $F\,\bar{\bar{s}}'' = s''$ donde $\bar{\bar{X}}$ es una representación de Δ que tiene a X en Δ'' (en la rama derecha) y 0 en las demás partes. Para los vértices distintos de 0, $\bar{\bar{s}}_i'' = s_i''$ y $\bar{\bar{u}} : \bar{\bar{X}} \longrightarrow V$ tal que $\bar{\bar{u}}_i = u_i''$.

Por lo tanto si $s''u$ es invertible entonces $\bar{\bar{s}}''\bar{\bar{u}}$ también lo es, ie, $\bar{\bar{s}}''$ es un epi escindible de donde $\bar{\bar{X}} \in D$ es un sumando de V.

"$\Leftarrow$" si M tiene un sumando X en C, ie $M = N \oplus X$ como F es aditivo $F M = F N \oplus F X$ donde $F X \in D$.

Corolario 1:

Si V y W no tienen sumandos en C entonces:

$$D(F V, F W) \subset \mathrm{rad}^2(F V, F W)$$

Corolario 2:

Sean V y $W \in \text{mod}\, k\Delta$. Si V y W no tienen sumandos en C entonces $g \in \text{Hom}_\Gamma(FV, FW)$ puede escribirse como $g = F(h) + r$ donde $h \in \text{Hom}_\Delta(V,W)$ y $r \in \text{rad}^2(FV, FW)$

Proposición 2.7

Sea $M \in \text{obj mod}\ k\Delta$ que no está en C. M es inescindible sí y sólo sí FM es inescindible.

Demostración

Como $\overline{F} : \underset{\sim}{\text{mod}}\ k\Delta \longrightarrow \underset{\sim}{\text{mod}}\ \frac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle}$ es un funtor fiel y pleno, si $M \in \text{mod}\ k\Delta \setminus C$, $\overline{F}_M : \underset{\sim}{\text{End}}\ M \longrightarrow \underset{\sim}{\text{End}}\ FM$ es un isomorfismo.

Además, por la proposición 2.1 $C(M,M) \subset \text{rad}(\text{End}\ M)$ y por el corolario 1 de la proposición 2.6 $D(FM, FM) \subset \text{rad}\ (\text{End}\ FM)$ de donde:

$$\text{rad}(\underset{\sim}{\text{End}}\ M) = \text{rad}\left[\frac{\text{End}\ M}{C(M,N)}\right] = \frac{\text{rad}(\text{End}\ M)}{C(M,N)}$$

y
$$\text{rad}(\underset{\sim}{\text{End}}\ FM) = \frac{\text{rad}(\text{End}\ FM)}{D(FM, FM)}$$

Por lo tanto, End M es local sí y sólo sí End FM es local.

Proposición 2.8

Si M y N no tienen sumandos en C, $\overline{F}M \simeq \overline{F}N \Longleftrightarrow M \simeq N$

Demostración

Supongamos que $\overline{f} : \overline{F}M \longrightarrow \overline{F}N$ es un isomorfismo en $\underset{\sim}{\text{mod}}\ \dfrac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle}$, ie, existe $f \in \text{Hom}(FM, FN)$ tal que $\overline{f} : f + \alpha$

con $\alpha \in D(FM, FN) \subset \text{rad}^2(FM, FN) \subset \text{rad}(FM, FN)$.

Por la proposición 2.4 existe $h \in \text{Hom}_\Delta(M,N)$ tal que $f = Fh + r$ con $r \in D(FM, FN) \subset \text{rad}^2(FM, FN) \subset \text{rad}(FM, FN)$

Como $f \notin \text{rad}(FM, FN)$ $Fh = f - r \notin \text{rad}(FM, FN)$

Caso 1

Si M y N son inescindibles, por la proposición 0.2.2.b) Fh es un isomorfismo y por 2.3 h es un isomorfismo ie, $M \simeq N$

<u>Caso 2</u>

Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ y $N = \bigoplus_{j \in J} N_j$ es una descomposición de M y N en suma de inescindibles, como $\overline{F} \notin \operatorname{rad}(\overline{F}M, \overline{F}N)$ por la proposición 0.2.1 existe $i_1 \in I$ y $j_1 \in J$ tal que $p_{j_1} \overline{f}\, t_{i_1} \notin \operatorname{rad}(\overline{F}M_{i_1}, \overline{F}N_{j_1})$ y por la proposición 0.2.2b) $\overline{F}M_{i_1} \simeq \overline{F}N_{j_1}$ con M_{i_1}, N_{j_1} inescindibles. Por el caso 1, $M_{i_1} \simeq N_{j_1}$ consideremos

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & \overline{F}M_{i_1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \bigoplus_i \overline{F}M_i \simeq \overline{F}(\bigoplus_i M_i) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \bigoplus \overline{F}M_i / \overline{F}M_{i_1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & O \\
O \arrow[r] & \overline{F}N_{j_1} \arrow[r] & \bigoplus \overline{F}N_j \simeq \overline{F}(\bigoplus_j N_j) \arrow[r] & \bigoplus \overline{F}N_j / \overline{F}N_{j_1} \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

Como $\bigoplus_{i \neq i_1} \overline{F}M_i \simeq \bigoplus_{j \neq j_1} \overline{F}N_j$ repetimos el argumento anterior y encontramos $i_2 \in I$, $j_2 \in J$ tal que $M_{i_2} \simeq N_{j_2}$. Continuando este procedimiento tendremos que para cada $i \in I$ existirá $j \in J$ tal que $M_i \simeq N_j$. Como M y N son módulos finitamente generados, este proceso es finito, de donde resulta que $M \simeq N$.

Sea $M \in C$, esto es, $M|_{\Gamma'} = O$. Si M es inescindible entonces $M|_{\Delta'} = 0$ o $M|_{\Delta''} = 0$ porque si $M|_{\Delta'} \neq 0$ y $M|_{\Delta''} \neq 0$ podriamos descomponer a $M = M' \oplus M''$ donde M' sería la representación de Δ que tendría, en Δ', la misma representación que M en Δ' y 0 en las demás partes y M'' sería la representación que tendría, en Δ'', la misma representación que M en Δ'' y 0 en las demás partes. Esto es, las representaciones inescindibles de C son aquellas representaciones inescindibles de Δ' o de Δ'' que tienen 0 en los otros vértices. $\square$

El funtor F, en general, no es denso. Por ejemplo si

$$\Gamma : \begin{tikzcd} & & \circ & & \\ \circ \arrow[rr] & & \circ \arrow[rr] & & \circ \\ & \circ \arrow[ur] & & \circ \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$; la representación V de Γ

$$V : \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & & k^2 \arrow[rr, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}"] & & k \\ & k \arrow[ur, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"] & & k \arrow[ul, "\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}"'] & \end{tikzcd}$$ es inescindible pues si

$$f : V \longrightarrow V$$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, "\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}"] \arrow[dd, "x"'] & & k^2 \arrow[rr, "(0\ 1)"] \arrow[dd, "\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}"] & & k \arrow[dd, "w"] \\
& k \arrow[ur, "\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}"] \arrow[dd, "y"] & & k \arrow[ul, "\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}"'] \arrow[dd, "z"] & \\
k \arrow[rr, "\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}"] & & k^2 \arrow[rr, "(0\ 1)"] & & k \\
& k \arrow[ur, "\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}"] & & k \arrow[ul, "\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por ser f morfismo de representaciones

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix} \Rightarrow x = a \qquad c = 0$$

$$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix} \Rightarrow b = 0 \qquad y = d$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}z = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}z\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\\ c+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ d\end{bmatrix} \Rightarrow z = a = d$$

$$w(0\ 1) = (0\ 1)\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow (0\ w) = (c\ d) \Rightarrow c = 0 \qquad w = d$$

De donde tenemos que $c = b = 0 \quad z = a = x = d = y$

Si $x = 0 \Rightarrow f = 0$, si $x \neq 0 \Rightarrow f$ es invertible

$\therefore$ End V local, ie V es inescindible.

Si existieran representaciones W de:

$$\begin{tikzcd} W_o \arrow[rr, "\alpha"] & & W' & & \\ & W_2' \arrow[ur, "\beta"] & & W_3' \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd} \quad y \ \overline{W} \ de \quad \begin{tikzcd} & W_1'' \arrow[rr, "\delta"] & & W_4 \\ W_2'' \arrow[ur, "\beta'"] & & W_3'' \arrow[ul, "\gamma'"'] & \end{tikzcd}$$

de tal manera que al aplicar el funtor F nos diera V, esto es

$$\begin{tikzcd} W_o \arrow[rr, "\begin{bmatrix}\alpha\\ o\end{bmatrix}"] & & W_1' \oplus W_1'' \arrow[rr, "(0\ \delta)"] & & W_4 = V \\ & W_2' \oplus W_2'' \arrow[ur, "\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta'\end{bmatrix}"'] & & W_3' \oplus W_3'' \arrow[ul, "\begin{bmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma'\end{bmatrix}"'] & \end{tikzcd}$$

tendríamos que a V lo podriamos escribir como

$$\begin{tikzcd} W_0 \arrow[r, "\alpha"] & W_1' \arrow[r, "o"] & 0 & \oplus & 0 \arrow[r, "o"] & W_1'' \arrow[r, "\delta"] & W_4 \\ W_2' \arrow[ur, "\beta"] & & W_3' \arrow[ul, "\gamma"'] & & W_2'' \arrow[ur, "\beta'"] & & W_3'' \arrow[ul, "\gamma'"'] \end{tikzcd}$$

contradiciendo que V era inescindible.

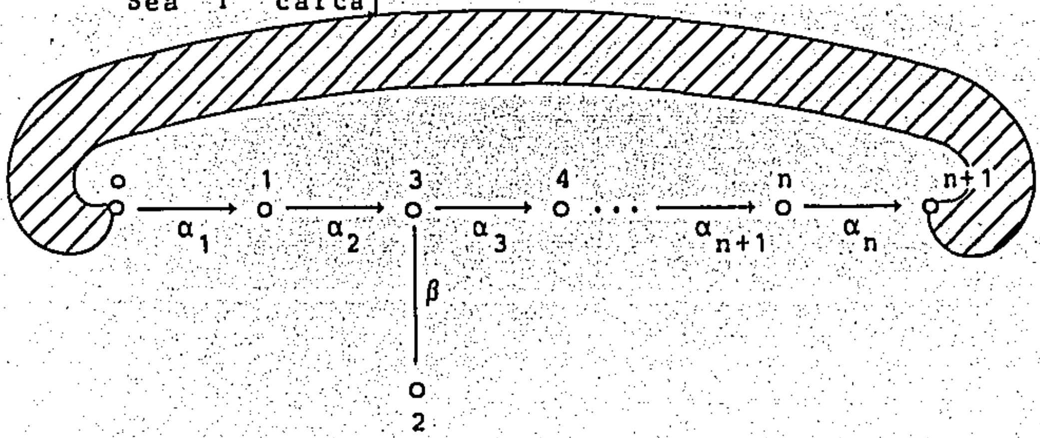
Sección 2.2

Relaciones cero que pueden separarse

Estudiaremos ahora dos casos en que el funtor F es denso. Esto es, dado el carcaj Γ con la relación cero ρ queremos construir un carcaj Δ sin relación cero, de tal manera que ambos tengan el mismo tipo de representación.

Caso 1.

Sea Γ carcaj



con la relación $\rho = \alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1 = 0$

Observación

Sea Γ'' el carcaj:

$$
\begin{tikzcd}
\overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_2"] & \overset{3}{\circ} \arrow[r] \arrow[d, dash, "\beta"] & \overset{4}{\circ} \arrow[r] & \circ \cdots \overset{n-1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \overset{n}{\circ} \arrow[r, "\alpha_n"] & \overset{n+1}{\circ} \\
& \underset{2}{\circ} & & & &
\end{tikzcd}
$$

donde β tiene cualquier orientación. Γ'' es un Dynkin del tipo D_{n+1} y es por lo tanto de tipo finito.

La matriz de Cartan C de Γ'' es

$$
C = \left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
* & 1 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & * & 1 & 1 & \cdots & & & \\
\hdashline
1 & * & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
1 & * & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\
1 & * & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\qquad \text{* depende de la orientación de } \beta
$$

donde $cij = \dim_k \operatorname{Hom}(P_i, P_j)$

La transformación de Coxeter $\phi^{-1} = -CC^{-t}$ aplicada en un vector de dimensión nos describirá el vector de dimención del trD. Si en Γ'' escogemos la siguiente orientación para β

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 4 \cdots n \arrow[r] & n+1 \\ & 2 & & \end{tikzcd}$$

entonces $C = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right]$

$C^{-1} = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{array}\right]$ de donde $\phi^{-1} = \left[\begin{array}{cccccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Aplicando la transformación de Coxeter al vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ obtendremos:

$$\phi^{-1}\, X = (-x_1 + x_3, -x_1 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_5, \ldots,$$

$$, \ldots \ , -x_1 + x_2 + x_n, -x_1 + x_2 + x_{n+1}, -x_1 + x_2)$$

en particular, como el vector de dimensión de P_2 es $(0,1,0,\ldots,0,0,0)$ tendremos que el vector de dimensión del $\operatorname{tr} D\, P_2 = \phi^{-1}(0,1,0,\ldots,0,0,0) = (0,0,1,1,\ldots,1,1,1)$ y el del $(\operatorname{tr} D)^2\, P_2 = (\phi^{-1})^2\, P_2 = (1,1,1,\ldots,\ldots,1,1,0)$.

De manera análoga tenemos que, como el vector de dimensión de P_{n+1} es $(0,0,0,\ldots,0,0,1)$, el del $(\operatorname{tr} D)\, P_{n+1}$ es $(0,0,0,\ldots,0,1,0)$, es decir, el simple S_n.

Si $j < n-2$ $(\operatorname{tr} D)^j\, P_{n+1}$ será el simple S_{n+1-j}.

Si $j = n-2$ entonces $(\phi^{-1})^j\, P_{n+1} = \phi^{-1} S_4 = (0,1,1,0,\ldots,0,0,0)$ y $(\phi^{-1})^{n-1}\, P_{n+1} = (1,0,1,1,\ldots,1,1,1)$ que es el vector de dimensión de I_{n+1}.

Si en Γ'' escogemos la siguiente orientación para β

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\circ} \arrow[r] & \overset{3}{\circ} \arrow[r] & \overset{4}{\circ} \cdots \overset{n}{\circ} \arrow[r] & \overset{n+1}{\circ} \\
 & \underset{2}{\circ} \arrow[u, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

entonces $$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y en este caso la transformación de Coxeter será:

$$\phi^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Al aplicar la transformación de Coxeter al vector $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1})$ obtendremos que

$$\phi^{-1} Y = (-y_1 + y_3, -y_2 + y_3, -y_1 - y_2 + y_3 + y_4, -y_1 - y_2 + y_3 + y_5,$$

$$, \ldots, -y_1 - y_2 + y_3 + y_n, -y_1 - y_2 + y_{n+1}, -y_1 - y_2 + y_3)$$

En particular, P_2 tiene vector de dimensión $(0,1,1,\ldots,1,1,1)$ de donde, el del $\operatorname{tr} D\, P_2$ será $\phi^{-1} P_2 = (1,0,1,1,\ldots,1,1,0)$.

El vector de dimensión de P_{n+1} es $(0,0,0,\ldots,0,0,1)$ y el del $(\operatorname{tr} D)\, P_{n+1}$ es $\phi^{-1} P_{n+1} = (0,0,0,\ldots,0,1,0) = S_n$ es decir el simple en el vértice n.

Si $j \leq n-2$ entonces $(\operatorname{tr} D)^j P_{n+1} = (\phi^{-1})^j P_{n+1}$ es el simple S_{n+1-j}.

Para $j = n-1$ tendremos $(\phi^{-1})^{n-1} P_{n+1} = (1,1,1,1,\ldots,1,1,1)$ que es el vector de dimensión del inyectivo I_{n+1}

<u>Lema 1</u>

a) Si Z una representación inescindible de

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_2"] & \overset{3}{\circ} \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\beta"] & \overset{4}{\circ} \arrow[r] & \circ \cdots \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \overset{n}{\circ} \arrow[r, "\alpha_n"] & \overset{n+1}{\circ} \\
 & \underset{2}{\circ} & & & &
\end{tikzcd}$$

entonces $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es mono si y sólo si $\operatorname{Hom}((\operatorname{tr} D)^2 P_2, Z) = 0$.

b) Si Z es una representación inescindible de

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_2"] & \overset{3}{\circ} \arrow[r, "\alpha_3"] & \overset{4}{\circ} \cdots \circ \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \overset{n}{\circ} \arrow[r, "\alpha_n"] & \overset{n+1}{\circ} \\
 & \underset{2}{\circ} \arrow[u, "\beta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$\alpha_n \ldots \alpha_2$ es mono sí y sólo sí $\mathrm{Hom}((\mathrm{tr}\, D)P_2, Z) = 0$

<u>Demostración</u> <u>a)</u>

" $\Rightarrow$ " Supongamos que $\alpha_n \ldots \alpha_2$ no es mono y sea

$$0 \neq x \in \mathrm{Ker}\, \alpha_n \ldots \alpha_2$$

Definimos la transformación lineal $\eta_1 : k \longrightarrow Z_1$
$\qquad\qquad 1 \longrightarrow x$

Esto induce el siguiente morfismo $0 \neq \eta : ((\mathrm{tr}\, D)^2 P_2 \longrightarrow Z$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, "1"] \arrow[ddd, "\eta_1"'] & & k \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "1"'] \arrow[ddd, "\alpha_2\eta_1"] & k \arrow[r] \arrow[ddd, "\alpha_3\alpha_2\eta_1"] & \cdots \arrow[r, "1"] & k \arrow[r, "0"] \arrow[ddd, "\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1\alpha_2 \eta_1"] & o \arrow[ddd, "0"] \\
 & k \arrow[dddd, "\beta\alpha_2 \eta_1"] & & & & & \\
 & & & & & & \\
Z_1 \arrow[rr, "\alpha_2"] & & Z_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[ddl, "\beta"] & Z_4 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & Z_n \arrow[r, "\alpha_n"] & Z_{n+1} \\
 & & & & & & \\
 & Z_2 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Claramente $0 \neq \eta$ es un morfismo de representaciones de donde $\mathrm{Hom}((\mathrm{tr}\ D)^2 P_2, Z) \neq 0$

" $\Leftarrow$ " Supongamos que $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es mono y sea $f \in \mathrm{Hom}((\mathrm{tr}\ D)^2 P_2, Z)$

$$
\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, "1"] \arrow[dd, "f_1"] & & k \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dd, "f_3"] & k \arrow[r] \arrow[dd, "f_4"] & \cdots & k \arrow[r, "1"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & k \arrow[r, "0"] \arrow[dd, "f_n"] & 0 \arrow[dd, "0"] \\
& k \arrow[dd, "f_2"] & & & & & & \\
Z_1 \arrow[rr, "\alpha_2"] & & Z_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[dl, "\beta"] & Z_4 \arrow[r, "\alpha_4"] & \cdots & Z_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & Z_n \arrow[r, "\alpha_n"] & Z_{n+1} \\
& Z_2 & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Observemos que

$$\alpha_2 \; f_1 = f_3$$

$$\alpha_i \; f_i = f_{i+1} \qquad\qquad i = 3, \ldots, n-1$$

$$\beta \;\; f_3 = f_2$$

de donde

$\alpha_{n-1} \ldots \alpha_2 \; f_1 = f_n$

$\alpha_n \ldots \alpha_2 \; f_1 = \alpha_n \; f_n = 0 \Rightarrow f_1 = 0$ y como $f_3 = \alpha_2 \; f_1$

tendremos $f_3 = 0$ pero $f_{i+1} = \alpha_i f_i \; \forall \; i=3,\ldots,n \Rightarrow f = 0$

$\therefore$ $\mathrm{Hom}((\mathrm{tr}\; D)^2 P_2, Z) \neq 0 \Rightarrow \alpha_n \ldots \alpha_2$ no es mono.

La demostración de b) es análoga.

Lema 2

Sea Z una representación

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \xrightarrow{\alpha_2} & \overset{3}{\circ} & \xrightarrow{\alpha_3} & \overset{4}{\circ} & \xrightarrow{\alpha_4} & \cdots \overset{n}{\circ} & \xrightarrow{\alpha_n} & \overset{n+1}{\circ} \\ & & | & & & & & & \\ & & \underset{2}{\circ} & & & & & & \end{array}$$

Si $Z_{n+1} \neq 0$ entonces $\mathrm{Hom}(Z, I_{n+1}) \neq 0$

Demostración

Si $Z_{n+1} \neq 0$, sea α un elemento de la base de Z_{n+1} y consideremos la transformación lineal $\mu_{n+1} : Z_{n+1} \longrightarrow k$

$$\alpha \longrightarrow 1$$

μ_{n+1} induce el morfismo

$0 \neq \mu : Z \longrightarrow I_{n+1}$

<u>Caso 1</u>

Si $\overset{3}{\circ} \xrightarrow{\beta} \overset{2}{\circ}$

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n \dots \alpha_3\alpha_2"'] & & Z_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n \dots \alpha_3"] & Z_4 \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots & Z_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n\alpha_{n-1}"] & Z_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n"] & Z_{n+1} \arrow[dd, "\mu_{n+1}"] \\
& Z_2 \arrow[dd] & & & & & & \\
k \arrow[rr, "1"] & & k \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "0"] & k \arrow[r, "1"] & \cdots & k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r, "1"] & k \\
& 0 & & & & & &
\end{tikzcd}$$

<u>Caso 2</u>

Si $\overset{3}{\circ} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\circ}$.

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n \cdots \alpha_2"'] & & Z_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n \cdots \alpha_3"] & Z_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[dd] & \cdots & Z_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n \alpha_{n-1}"] & Z_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n"] & Z_{n+1} \arrow[dd, "\mu_{n+1}"] \\
& Z_2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dd, "\mu_{n+1}\alpha_n \cdots \alpha_3 \beta"] & & & & & & \\
k \arrow[rr, "1"] & & k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r, "1"] & \cdots & k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r, "1"] & k \\
& k \arrow[ur, "1"] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

de donde $\mathrm{Hom}(Z, I_{n+1}) \neq 0$.

<u>Lema 3</u>

Sea Z una representación inescindible de Γ''

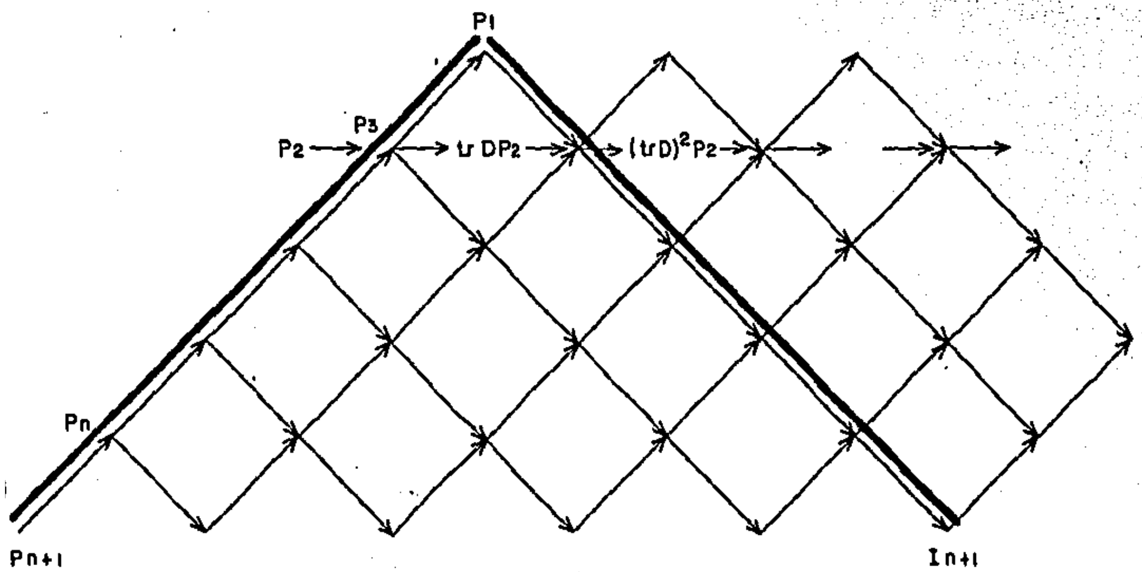
$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_2"] & \overset{3}{\circ} \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, dash, "\beta"] & \overset{4}{\circ} \arrow[r] & \cdots & \overset{n}{\circ} \arrow[r, "\alpha_n"] & \overset{n+1}{\circ} \\
& \underset{2}{\circ} & & & &
\end{tikzcd}$$

Si $Z_{n+1} \neq 0$ entonces $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es un monomorfismo.

Demostración

Caso 1

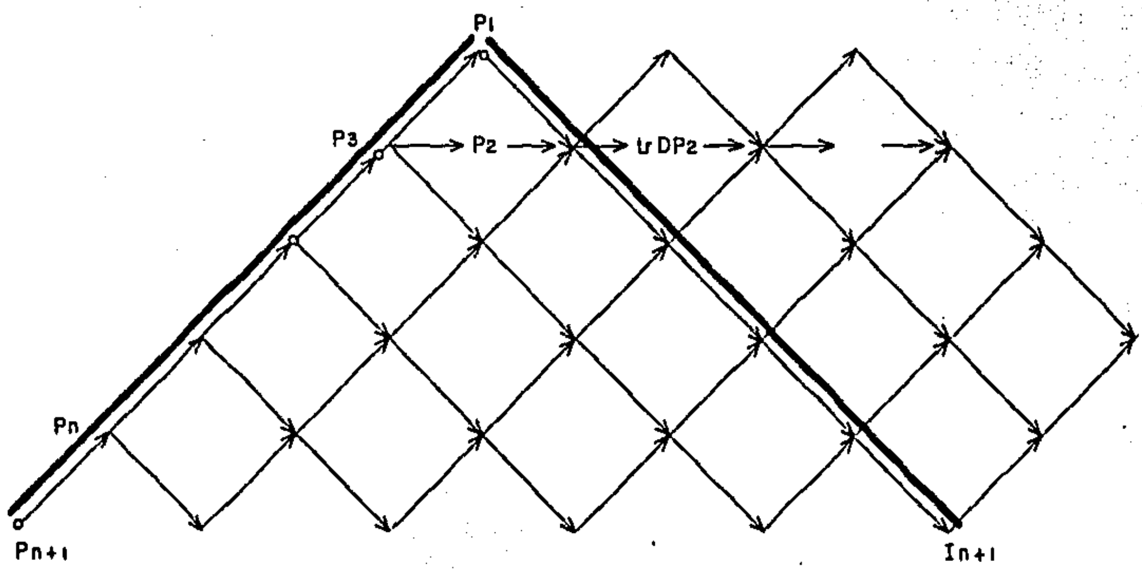
Si $\overset{3}{\circ} \xrightarrow{\beta} \overset{2}{\circ}$. La gráfica de Auslander Reiten de Γ'' es de la forma



Por el lema 2 sabemos que si $Z_{n+1} \neq 0$ entonces $\mathrm{Hom}(Z, I_{n+1}) \neq 0$. Es decir, si $Z_{n+1} \neq 0$, Z debe de estar en el triángulo enmarcado. Como Γ'' es de tipo finito, todo morfismo entre $(\mathrm{tr}\ D)^2 P_2$ y el inyectivo I_{n+1} es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles entre inescindibles (Capítulo 0, Sección 1) de donde $\mathrm{Hom}_{\Gamma''}((\mathrm{tr}\,D)^2 P_2, Z) = 0$ y por el lema 1, tendremos que en $Z, \alpha_n \ldots \alpha_2$ es un monomorfismo.

Caso 2

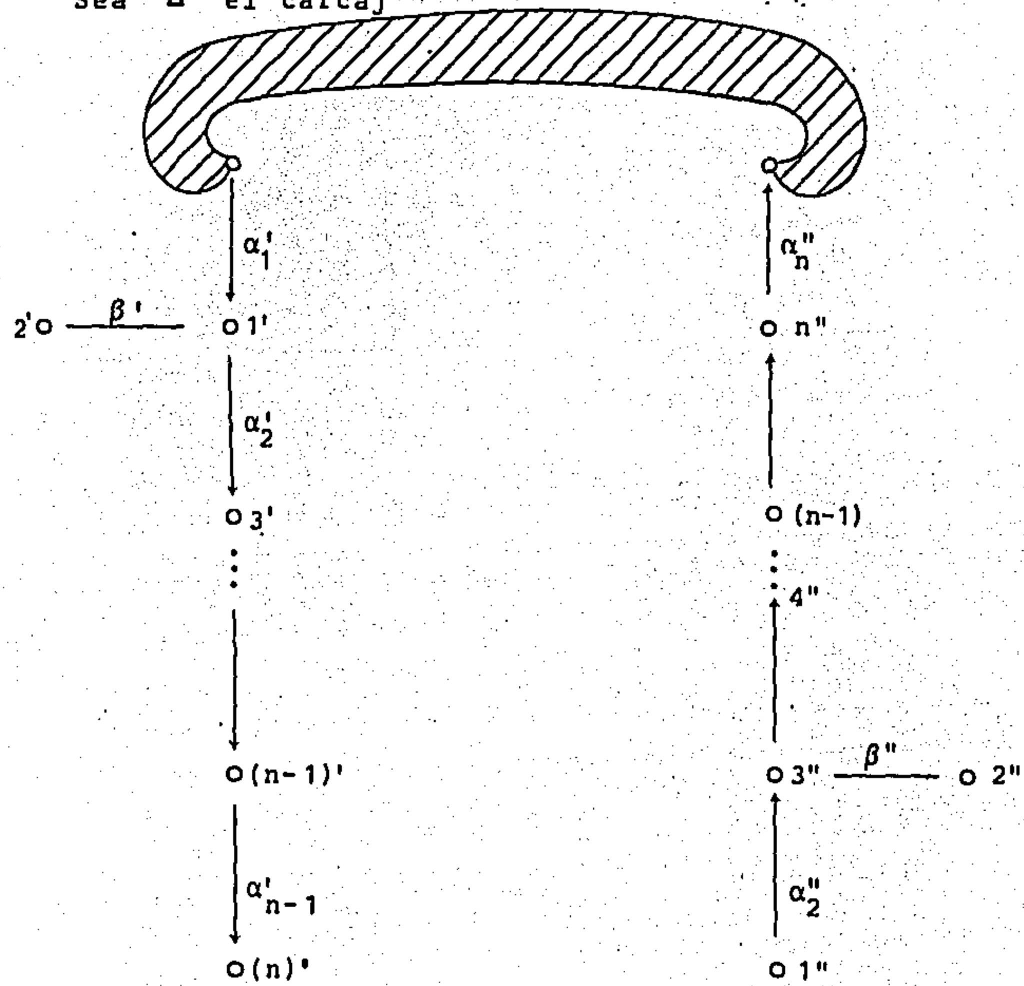
Si $\overset{3}{\circ} \longleftarrow \overset{2}{\circ}$. La gráfica de Auslander Reiten de Γ'' es de la forma



Repetimos la demostración del Caso 1, observando que $\mathrm{Hom}_{\Gamma''}((\mathrm{tr}\,D)\,P_2, Z) = 0$

$\square$

Sea Δ el carcaj



y consideremos el funtor $F : \mathrm{mod}\ k\Delta \longrightarrow \mathrm{mod}\ \dfrac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle}$.

descrito en la sección 1.1.

La demostración de que F es denso resulta de la siguiente proposición de C. Ringel [CR1]

<u>Proposición</u> (Ringel)

El funtor F induce una biyección entre las representaciones inescindibles en mod $k\Delta$ que no están en C y las representaciones inescindibles de mod $\frac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle}$ que no están en D.

Por cada representación inescindible W en D existen dos representaciones inescindibles V y V' en C tales que $F V = F V' = W$.

<u>Demostración</u>

Demostraremos que para cada representación inescindible W en mod $\frac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle}$ que no está en D existe una única representación inescidndible V en mod $k\Delta$ que no está en C tal que $F V = W$.

Sea W una representación inescindible en mod $\frac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle} - C$ y consideremos la restricción de W a Γ'' (sin la flecha α_1)

$$\begin{tikzcd}
\overset{W_1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_2"] & \overset{W_3}{\circ} \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, dash, "\beta"] & \overset{W_4}{\circ} \arrow[r] & \circ \cdots \overset{W_n}{\circ} \arrow[r, "\alpha_n"] & \overset{W_{n+1}}{\circ} \\
 & W_2 & & &
\end{tikzcd}$$

Descompongamos $W|_{\Gamma''} = X \oplus Y$ donde Y es suma de representaciones inescindibles con la componente $n+1$ distinta de 0 y X es la suma de representaciones inescindibles con la componente $n+1$ igual a 0.

Por el lema 3 tendremos que en Y la composición $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es un monomorfismo.

Es decir, W es la representación:

$$\begin{tikzcd}
W_0 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}}"'] & X_1 \oplus X_1 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}}"'] & X_3 \oplus X_3 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f_3 & 0 \\ 0 & g_3 \end{bmatrix}}"'] \arrow[d, dash, "{\begin{bmatrix} f_\beta & 0 \\ 0 & g_\beta \end{bmatrix}}"] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \oplus X_{n-1} \arrow[r, "{\begin{bmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & g_{n-1} \end{bmatrix}}"'] & X_n \oplus X_n \arrow[r, "{(0 \; g_n)}"'] & Y_{n+1} = W_n \\
 & & X_2 \oplus X_2 & & & &
\end{tikzcd}$$

con $g_n \ldots g_2$ mono.

Como $W \in \operatorname{mod} \dfrac{k\Gamma}{\langle \rho \rangle}$ tendremos que

$$(0\ g_n)\begin{bmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & g_{n-1}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & g_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 0 + g_n\, g_{n-1} \cdots g_2\, g = 0$$

Pero $g_n\, g_{n-1} \cdots g_2\, g = 0$ con $g_n \cdots g_2$ monomorfismo

$$\Rightarrow g = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} f \\ 0\end{bmatrix} : W_o \longrightarrow W_1 = X_1 \oplus Y_1$$

Sea V la siguiente representación de Δ

$V|_{\Gamma'} = W|_{\Gamma'}$

$V|_{\Delta'} = X$ (en la rama izquierda)

$V|_{\Delta''} = Y$ (en la rama derecha)

Hemos encontrado una representación V en mod $k\,\Delta$ tal que $F\,V = W$.

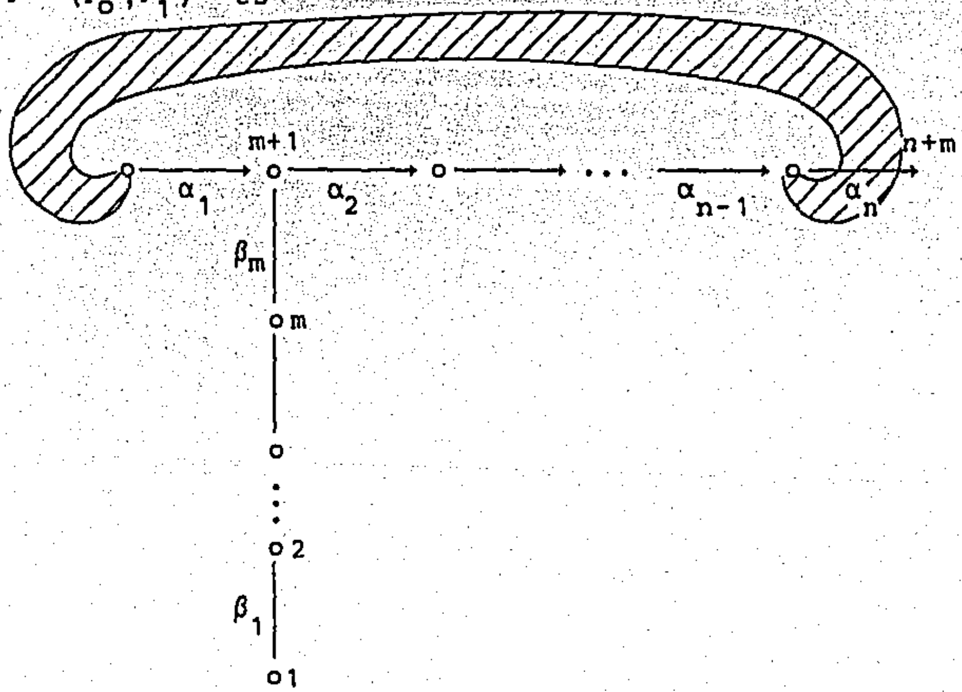
Por la proposición 2.7, V es inescindible y es única porque si existiera otra representación V' tal que $\phi\, V' = W$

por la proposición 2.8 $V' \simeq V$.

Si $W_o = 0$ y $W_{n+1} = 0$ entonces $Y = 0$ y tendremos dos representaciones inescindibles V y V' en mod $k\Delta$ tales que $FV = FV' = W$.

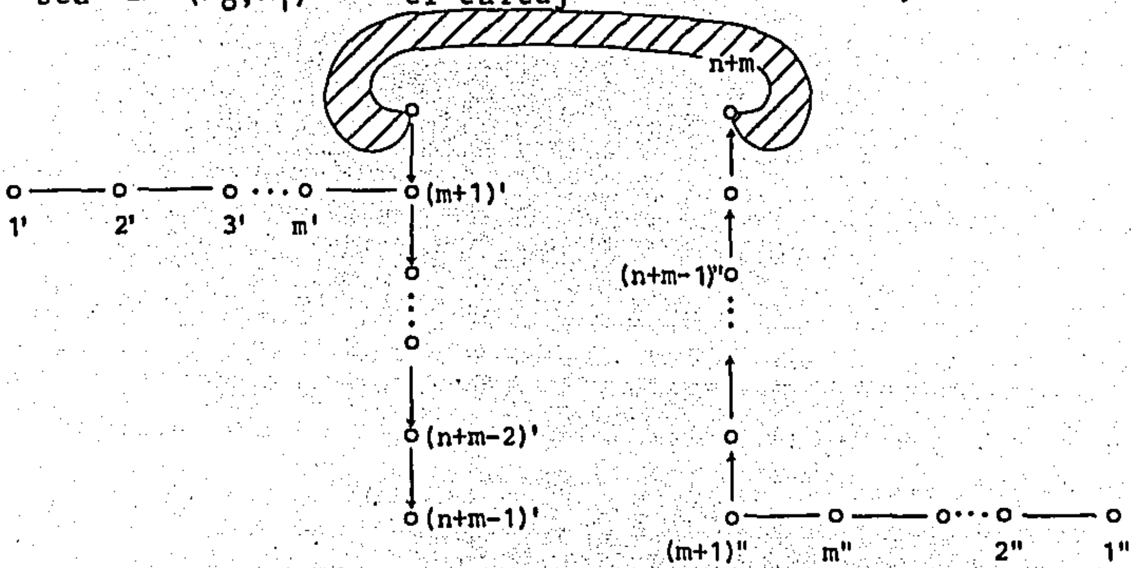
V es la representación de Δ que consiste en poner X_j en el vértice j de Δ' y 0 en las demás partes y V' es la representación que consiste en poner X_j en el vértice j'' de Δ'' y 0 en las demás partes.

Otro caso en el que el funtor F es denso es cuando $\Gamma = (\Gamma_o, \Gamma_1)$ es



con la relación $\rho = \alpha_n \ldots \alpha_1 = 0$.

Sea $\Delta = (\Delta_o, \Delta_1)$ el carcaj



La demostración de la proposición de Ringel para estos carcajes Δ y Γ es igual a la anterior.

En este caso, si Z es una representación inescindible de Γ'' con $Z_{n+m} \neq 0$, la demostración de que $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es un monomorfismo es más sencilla y se obtiene del hecho de que Γ'' es un carcaj del tipo A_n

$$\Gamma'' : \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \circ \cdots \underset{m}{\circ} \text{---} \underset{m+1}{\circ} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{m+2}{\circ} \xrightarrow{\alpha_3} \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{m+n-1}{\circ} \xrightarrow{\alpha_n} \underset{m+n}{\circ}$$

y para las representaciones inescindibles Z de estos carcajes se tiene:

i) $\dim Z_i$ es 1 o es 0

ii) Si $\dim Z_j \neq 0$ y $\dim Z_s \neq 0$ y $j < i < s$ entonces $\dim Z_i \neq 0$

iii) Si $\dim Z_{m+1} \neq 0$ y $\dim Z_{n+m} \neq 0$ entonces $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es la identidad; si $\dim Z_{m+1} = 0$ entonces $\alpha_n \ldots \alpha_2 = 0$ y en ambos casos $\alpha_n \ldots \alpha_2$ es un monomorfismo.

Proposición 2.9

Sean X, Y representaciones inescindibles en mod $k\Delta \setminus C$, $f: X \longrightarrow Y$ es irreducible sí y sólo sí $Ff: FX \longrightarrow FY$ es irreducible.

Demostración

Sabemos, por la proposición 2.5 y por las proposiciones de Ringel que el funtor $F: \text{mod } k\Delta \longrightarrow \text{mod } \dfrac{k\Gamma}{\langle \rho \rangle}$ induce una equivalencia $\overline{F}: \underset{\sim}{\text{mod}}\, k\Delta \longrightarrow \text{mod } \dfrac{k\Gamma}{\langle \rho \rangle}$.

Como X, Y no tiene sumandos en C, por la proposición 2.1 y el corolario 1 de la proposición 2.6

$$C(X,Y) \subset \text{rad}^2(X,Y) \subset \text{rad}(X,Y) \qquad D(FX,FY) \subset \text{rad}^2(FX,FY) \subset \text{rad}(FX,FY)$$

de donde

$$\text{rad } \underset{\sim}{\text{Hom}}(X\ Y) = \frac{\text{rad Hom}(X,Y)}{C(X,Y)} \qquad \text{y}$$

$$\text{rad } \underset{\sim}{\text{Hom}}(FX,FY) = \frac{\text{rad Hom}(FX,FY)}{D(FX,FY)}$$

Como la equivalencia $\overline{F}$ preserva el radical, induce un isomorfismo

$$\frac{\mathrm{Hom}(X,Y)}{\mathrm{rad}^2\mathrm{Hom}(X,Y)} \simeq \frac{\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}\,(X,Y)}{\mathrm{rad}^2\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}(X,Y)} \simeq \frac{\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}\,(FX,FY)}{\mathrm{rad}^2\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}(FX,FY)} \simeq \frac{\mathrm{Hom}(FX,FY)}{\mathrm{rad}^2\mathrm{Hom}(FX,FY)}$$

f es irreducible $\Leftrightarrow \overline{f} \varepsilon \dfrac{\mathrm{rad}\,\mathrm{Hom}(X,Y)}{\mathrm{rad}^2\mathrm{Hom}(X,Y)}$ es distinto de cero ie, $\overline{f}$ es irreducible en $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta \Leftrightarrow \overline{F}\,\overline{f}\,\varepsilon\, \dfrac{\mathrm{rad}\,\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}(FX\ FY)}{\mathrm{rad}^2\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}\ FX,FY}$ es distinto de cero, ie $\overline{F}\,f$ es irreducible en $\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\, k\Delta$ $\Leftrightarrow$ F f es irreducible en mod $k\Delta$

<u>Proposición 2.10</u>

Sean $X \varepsilon C$, $Y \varepsilon \mathrm{mod}\, k\Delta \setminus C$ dos representaciones inescindible. $f:X \longrightarrow Y$ es irreducible sí y sólo sí $F\,f:FX \longrightarrow FY$ es irreducible.

<u>Demostración</u>

Recordemos que dado $V \varepsilon D$ existen dos representaciones inescindibles $\overline{V}$ y $\overline{\overline{V}}$ de $\operatorname{mod} k\Delta$ tales que $F\overline{V} : F\overline{\overline{V}} = V$. Donde $\overline{V}$ es la representación de $\operatorname{mod} k\Delta$ que tiene V_j en el vértice j' de Δ' y 0 en las demás partes y $\overline{\overline{V}}$ es la representación de $\operatorname{mod} k\Delta$ que tiene V_j en el vértice j'' de Δ'' y 0 en las demás partes.

"$\Rightarrow$" Sea $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo irreducible. Supongamos que $Ff: FX \longrightarrow FY$ se factoriza a través de Z y descompongamos $Z = V \oplus W$ donde $V \varepsilon D$ y $W \varepsilon \operatorname{mod} \frac{k\Gamma}{(\rho)} \setminus D$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "{\begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix}}"'] & & FY \\ & V \oplus W \arrow[ur, "(t'\ v')"'] & \end{tikzcd} \qquad \therefore \quad Ff : [t'\ v'] \begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix} = t's' + v'u'$$

Dado $s': FX \longrightarrow V$, como $V = F\overline{V} = F\overline{\overline{V}}$; dependiendo de la forma de X, sabemos que existe un morfismo $s: \overline{X} \longrightarrow \overline{V}$ o un morfismo $s: \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{V}}$ tal que $Fs = s'$ con $s'|_{r'} = 0$.

Como $W \varepsilon \operatorname{mod} \frac{k\Gamma}{(\rho)} - D$, por las proposiciones de Ringel, existe una única representación en $\operatorname{mod} k\Delta - D, M$ tal que $FM = W$ y además $W|_{r''} = W' \oplus W''$ donde $W'_{n+1} = 0$ $W''_{n+1} \neq 0$.

Por lo tanto si $u': FX \longrightarrow W$ tendremos que

$u'|_{r'} = 0$ y

$$u'|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} \lambda' \\ \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta' \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} \lambda' : FX|_{\Gamma''} \longrightarrow W'|_{\Gamma''} \\ \delta' : FX|_{\Gamma''} \longrightarrow W''|_{\Gamma''} \end{array}$$

ie, $u' = \overline{\lambda}' + \underline{\delta}'$ y existen morfismos

$\lambda = \overline{X} \longrightarrow M$ tal que $F\lambda = \overline{\lambda}'$

$\delta : \overline{\overline{X}} \longrightarrow M$ tal que $F\delta = \underline{\delta}'$

Siguiendo un razonamiento análogo al de u', dada $t' : V \longrightarrow FY$ tendremos que

$t'|_{\Gamma'} = 0$

$$t'|_{\Gamma''} : \begin{bmatrix} \tau' \\ \rho' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho' \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} \tau' : V|_{\Gamma''} \longrightarrow Y'|_{\Gamma''} \\ \rho' : V|_{\Gamma''} \longrightarrow Y''|_{\Gamma''} \end{array}$$

ie, $t' = \overline{\tau}' + \underline{\rho}'$ y existen morfismos

$\tau : \overline{V} \longrightarrow Y$ tal que $F\tau = \overline{\tau}'$

$\rho : \overline{\overline{V}} \longrightarrow Y$ tal que $F\rho = \underline{\rho}'$

Dado $v' : FM = W \longrightarrow FY$, por la proposición 2.4 existe $\omega \in \mathrm{Hom}(M,Y)$ tal que $v' = F(\omega) + \kappa'$. Sea $\omega' = F(\omega)$, $\kappa' \in D(FM,FY)$, ie, a κ' la podemos factorizar a través de una $D \in D$ $\kappa' = m'l'(W \xrightarrow{l'} D \xrightarrow{m'} FY)$.

Utilizando el mismo razonamiento que para u' y para t' tendremos

$$m'|_{\Gamma'} = 0$$

$$m'|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \text{ donde } \begin{array}{l} \theta' : D|_{\Gamma''} \longrightarrow Y'|_{\Gamma''} \\ \varepsilon' : D|_{\Gamma''} \longrightarrow Y''|_{\Gamma''} \end{array}$$

ie, $m' = \overline{\theta}' + \underline{\varepsilon}'$ y existen morfismos

$$\theta : \overline{D} \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad F\theta = \overline{\theta}'$$

$$\varepsilon : \overline{\overline{D}} \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad F\varepsilon = \underline{\varepsilon}'$$

y $l'|_{\Gamma''} = (\alpha',\beta') = (\alpha',0) + (0,\beta')$ donde $\begin{array}{l} \alpha' : W'|_{\Gamma''} \longrightarrow D|_{\Gamma''} \\ \beta' : W''|_{\Gamma''} \longrightarrow D|_{\Gamma''} \end{array}$

ie $l' = \overline{\alpha}' + \underline{\beta}'$

de donde tenemos

$$Ff = t's' + v'u' = (\overline{\tau}' + \underline{\rho}')s' + (\omega' + \kappa')(\overline{\lambda}' + \underline{\delta}')$$

$$= \overline{\tau}'s' + \underline{\rho}'s' + (\omega' + m'l')(\overline{\lambda}' + \underline{\delta}')$$

$$= \overline{\tau}'s' + \underline{\rho}'s' + [\omega' + (\overline{\theta}' + \underline{\varepsilon}')(\overline{\alpha}' + \underline{\beta}')](\overline{\lambda}' + \underline{\delta}')$$

$$= \overline{\tau}'s' + \underline{\rho}'s' + [\omega' + \overline{\theta}'\overline{\alpha}' + \overline{\theta}'\underline{\beta}' + \underline{\varepsilon}'\overline{\alpha}' + \underline{\varepsilon}'\underline{\beta}'][\overline{\lambda}' + \underline{\delta}']$$

$$= \overline{\tau}'s' + \underline{\rho}'s' + \omega'\overline{\lambda}' + \overline{\theta}'\overline{\alpha}'\overline{\lambda}' + \overline{\theta}'\underline{\beta}'\overline{\lambda}' + \underline{\varepsilon}'\overline{\alpha}'\overline{\lambda}' + \underline{\varepsilon}'\underline{\beta}'\overline{\lambda}'$$

$$+ \omega'\underline{\delta}' + \overline{\theta}'\overline{\alpha}'\underline{\delta}' + \overline{\theta}'\underline{\beta}'\underline{\delta}' + \underline{\varepsilon}'\overline{\alpha}'\underline{\delta}' + \underline{\varepsilon}'\underline{\beta}'\underline{\delta}'$$

Como $Ff|_{\Gamma'} = 0$, en Γ'' este morfismo toma la siguiente forma:

$$Ff|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} \tau's' + \omega'\lambda' + \theta'\alpha'\lambda' + \theta'\beta'\delta' \\ \\ \rho's' + \varepsilon'\alpha'\lambda' + \omega'\delta' + \varepsilon'\beta'\delta' \end{bmatrix} \text{ y dependiendo de } X$$

tendremos que $Ff|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix}$ o $Ff|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_i \end{bmatrix}$

$$\text{Si } Ff|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho's' + \varepsilon'\alpha'\lambda' + \omega'\delta' + \varepsilon'\beta'\delta' = 0 \text{ y}$$

$$f_i = \tau' s' + \omega'\lambda' + \theta'\alpha'\lambda' + \theta'\beta'\delta' = \tau' s' + \omega'\lambda' + \theta'(\alpha'\beta')\begin{bmatrix}\lambda' \\ \delta'\end{bmatrix} = \tau' s' + \omega'\lambda' + \theta' 1' u'$$

ie, $F f = \overline{\tau}' s' + \omega'\overline{\lambda}' + \overline{\theta}' 1' u'$

Sabemos que $\overline{\tau}' s' = F\tau \cdot F s = F(\tau s)$

$\omega'\overline{\lambda}' = F\omega \cdot F\lambda = F(\omega\lambda)$

y si $n' = 1'u'$ $(F X \xrightarrow{u'} W \xrightarrow{1'} D)$ existe $\overline{n} : \overline{X} \longrightarrow \overline{D}$, $F\overline{n} = n'$

o

$\overline{\overline{n}} : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{D}}$, $F\overline{\overline{n}} = n'$

$\therefore$ $\overline{\theta}'(1'u') = F\theta \cdot F\overline{n} = F(\theta\overline{n})$

$\therefore$ $F f = F(\tau s) + F(\omega\lambda) + F(\theta\overline{n}) = F(\tau s + \omega\lambda + \theta\overline{n})$

y por ser F aditivo $F(f - \tau s - \omega\lambda - \theta\overline{n}) = 0$

y por la proposición 2.3.3 $f - \tau s - \omega\lambda - \theta\overline{n} = 0$

$f = \tau s + \omega\lambda + \theta\overline{n}$

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} s \\ \lambda \\ \overline{n} \end{bmatrix}"'] & & Y \\ & \overline{V} \oplus M \oplus \overline{D} \arrow[ur, "{[\tau\omega\theta]}"'] & \end{tikzcd}$$

Pero f irreducible $\Rightarrow \begin{bmatrix} s \\ \lambda \\ \overline{n} \end{bmatrix}$ es mono escindible θ

$(\tau\ \omega\ \theta)$ es epi escindible.

Si $\begin{bmatrix} s \\ \lambda \\ \overline{n} \end{bmatrix}$ es mono escindible, existe $(a,b,c) : \overline{V} \oplus M \oplus \overline{D} \longrightarrow \overline{X}$

tal que $1_{\overline{X}} = (a\ b\ c) \begin{bmatrix} s \\ \lambda \\ \overline{n} \end{bmatrix} = a\,s + b\lambda + c\,\overline{n} \in \operatorname{End} \overline{X}$ que es local

$\Rightarrow$ $a\,s + c\overline{n}$ es invertible o $b\lambda$ es invertible.

Si $b\lambda$ es invertible $\Rightarrow \overline{X}$ es un sumando de M contradiciendo que M no tiene sumandos en C. Por lo tanto $\therefore$ $a\,s + c\overline{n}$ es invertible en End $\overline{X} \Rightarrow a\,s$ es invertible o $c\,\overline{n}$ es invertible. Si $c\,\overline{n}$ es invertible $\Rightarrow F\overline{n} = n' = l'u'$ es mono escindible $\Rightarrow u'$ es mono escindible, ie, existe $g' : W \longrightarrow FX$, $g'u' = 1_{FX}$

Consideremos $(0\ g') : V \oplus W \longrightarrow FX$

$$(0\ g') \begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix} = g'u' = 1_{FX} \Rightarrow \begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix} \text{ es mono escindible}$$

Si as es invertible $\Rightarrow Fs = s'$ es mono escindible, ie, existe $h' : V \longrightarrow FX$ tal que $h's' : 1_{FX}$. Consideremos $(h' \; 0) : V \oplus W \longrightarrow FX$. $(h' \; 0)\begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix} = h's' = 1_{FX} \Rightarrow \begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix}$ es mono escindible.

Si $(\tau \; \omega \; \theta)$ es epi escindible existe $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} : Y \longrightarrow V' \oplus \overline{W} + \overline{D}$

tal que $1_y = (\tau \; \omega \; \theta)\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \tau a' + \omega b' + \theta c' \varepsilon$ End Y que es local.

Si $\tau a'$ es invertible $\Rightarrow \tau$ es epi $\Rightarrow Y|_{\Gamma'} = 0$ ie $Y \varepsilon C$!

Si $\theta c'$ es invertible $\Rightarrow \theta$ es epi $\Rightarrow Y|_{\Gamma'} = 0$ ie $Y \varepsilon C$!

$\therefore$ $\omega b'$ es invertible, ie ω es epi escindible, $\therefore$ $F\omega = \omega'$ es epi escindible, ie existe $j : FY \longrightarrow W$ tal que $\omega' j = 1_{FY}$.

Pero $v' = \omega' + \kappa \Rightarrow 1_{FY} = (v' - \kappa)j = v'j - \kappa j = v'j - m'l'j \varepsilon$ End(FY) que es local.

Si $m'l'j$ fuera invertible $\Rightarrow m'$ es epi escindible $\Rightarrow FY \varepsilon D$ contradicción!

$\therefore$ $v'j$ es invertible $\Rightarrow v'$ es epi escindible, es decir, existe $d : FY \longrightarrow W$ tal que $v'd = 1_{FY}$. Consideremos $\begin{bmatrix}0\\d\end{bmatrix} : FY \longrightarrow V \oplus W \qquad (t',v')\begin{bmatrix}0\\d\end{bmatrix} = v'd = 1_{FY} \Rightarrow (t',v')$

es epi escindible

$\therefore$ Ff es irreducible

Si $Ff|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix}0\\f_i\end{bmatrix}$ entonces $\tau' s' + \omega'\lambda' + \theta'\alpha'\lambda' + \theta'\beta'\delta' = 0$

y $f_i = \rho' s' + \omega'\delta' + \varepsilon\alpha'\lambda' + \varepsilon\beta'\delta' = \rho' s' + \omega'\delta' + \varepsilon(\alpha'\beta')\begin{bmatrix}\lambda'\\\delta'\end{bmatrix}$

$= \rho' s' + \omega'\delta' + \varepsilon' l' u'$

ie, $Ff = \underline{\rho}' s' + \omega'\underline{\delta}' + \underline{\varepsilon}' l' u'$

Sabemos que $\underline{\rho}' s' = F\rho \cdot Fs = F(\rho s)$

$\omega'\underline{\delta}' = F\omega \cdot F\delta = F(\omega\delta)$

$\underline{\varepsilon}' l' u' = F\varepsilon \cdot F\overline{\overline{n}} = F(\varepsilon\overline{\overline{n}})$

$\therefore$ $Ff = F(\rho s + \omega\delta + \varepsilon\overline{\overline{n}}) \Rightarrow f = \rho s + \omega\delta + \varepsilon\overline{\overline{n}}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\overline{X}} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, swap, "\begin{bmatrix}s\\\delta\\\overline{\overline{n}}\end{bmatrix}"] & & Y \\
& \overline{\overline{V}} \oplus M \oplus \overline{\overline{D}} \arrow[ur, swap, "{[\rho\ \omega\ \varepsilon]}"] &
\end{tikzcd}$$

y por un razonamiento análogo al anterior tendremos que $\begin{bmatrix} s' \\ u' \end{bmatrix}$ es mono escindible o (t',v') es epi escindible, ie, Ff es irreducible

"$\Leftarrow$" Sea $Ff : FX \longrightarrow FY$ un morfismo irreducible.

Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ se factoriza a través de Z y descompongamos $Z = V \oplus W$ donde $V \in C$ y $W \in \operatorname{mod} k\Delta \setminus C$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, swap, "\begin{bmatrix} s \\ \lambda \end{bmatrix}"] & & Y \\ & V \oplus W \arrow[ur, swap, "{[\tau\ \omega]}"] & \end{tikzcd} \qquad f = [\tau\ \omega]\begin{bmatrix} s \\ \lambda \end{bmatrix} = \tau s + \omega\lambda$$

Aplicandole F tendremos

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, swap, "\begin{bmatrix} Fs \\ F\lambda \end{bmatrix}"] & & FY \\ & FV \oplus FW \arrow[ur, dashed, swap, "{[F\tau, F\omega]}"] & \end{tikzcd}$$

Como Ff es irreducible $\begin{bmatrix} Fs \\ F\lambda \end{bmatrix}$ es mono escindible

o $(F\tau, F\omega)$ es epi escindible.

Si $\begin{bmatrix} Fs \\ F\lambda \end{bmatrix}$ es mono escindible, existe $(a,b):FV \oplus FW \longrightarrow FX$ tal que $1_{FX} = (a,b)\begin{bmatrix} Fs \\ F\lambda \end{bmatrix} = aFs + bF\lambda \in \text{End } FX$ que es local

$\Rightarrow a \cdot Fs$ es invertible o $b \cdot F\lambda$ es invertible.

Si $b \cdot F\lambda$ es invertible, FX es un sumando de $F\,W$! contradicción pues $F\,W$ no tiene sumandos en D.

$\therefore$ $a \cdot Fs$ es invertible, ie Fs es mono escindible $\Rightarrow s$ es mono escindible, ie, existe $p: V \longrightarrow X$ tal que $p \cdot s = 1_X$. Consideremos $(p \cdot 0): V \oplus W \longrightarrow X$

$(p\,;0)\begin{bmatrix} s \\ \lambda \end{bmatrix} = ps = 1_X$ ie, $\begin{bmatrix} s \\ \lambda \end{bmatrix}$ es mono escindible.

Si $(F\tau, F\omega)$ es epi escindible existe $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}: FY \longrightarrow FV \oplus FW$ tal que $1_{FY} = (F\tau, F\omega)\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = F\tau \cdot c + F\omega \cdot d \in \text{End } FY$ que es local $\Rightarrow F\tau \cdot c$ es invertible o $F\omega \cdot d$ es invertible.

Si $F\tau \cdot c$ es invertible, $F\tau$ es epi escindible, ie, $FY|_{\Gamma'} = 0$! contradicción.

Por lo tanto $F\omega \cdot d$ es invertible, de donde $F\omega$ es epi escindible, ie, existe $h': FY \longrightarrow FW$ tal que $F\omega \cdot h' = 1_{FY}$.

Como $h' \in \text{Hom}_{\Gamma}(FY, FW)$, por la proposición 2.4, existe $h \in \text{Hom}_{\Delta}(Y,W)$ tal que $h' = F\,h + r$ con $r \in D(FY,FW)$ ie existe

$D \in \mathcal{D}$ tal que

$$\begin{tikzcd} FY \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "u"'] & & FW \\ & D \arrow[ur, dashed, "v"'] & \end{tikzcd}$$

$$1_{FY} = F\omega \cdot h' = F\omega(Fh + r) = F\omega Fh + F\omega \cdot r = F(\omega h) + F\omega \cdot r \in \mathrm{End}\ Y$$

$F\omega \cdot r$ no puede ser invertible porque si lo fuera r sería mono escindible y eso significa que u sería mono, ie $Y|_{r'} = 0$! contradicción.

Por lo tanto $F(\omega h)$ es un isomorfismo y por el lema 2.3 ωh es un isomorfismo, ie, ω es epi escindible. Si ω es epi escindible existe $q : Y \longrightarrow W$ tal que $\omega q = 1_Y$.

Consideremos $\begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} : Y \longrightarrow V \oplus W$ $(\tau\ \omega) \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} = \omega q = 1_Y$.

Por lo tanto $(\tau\ \omega)$ es epi escindible.

Hemos demostrado que $\begin{bmatrix} Fs \\ F\lambda \end{bmatrix}$ es mono escindible o $(F\tau, F\omega)$ es epi escindible, ie, f es irreducible.

De manera análoga podemos demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.11

Sea $X \in \mathrm{mod}\ k\Delta \setminus C$, $Y \in C$ dos representaciones inescindibles. $f : X \longrightarrow Y$ es irreducible sí y sólo sí $Ff : FX \longrightarrow FY$ es irreducible.

Proposición 2.12

Sean $X \in D$, $Y \in \mathrm{mod}\ k\Delta \setminus D$ (ρ) dos representaciones inescindibles y sea $g : X \longrightarrow Y$ un morfismo irreducible. Entonces existe $f' : \overline{X} \longrightarrow Y'$ o $f'' : \overline{\overline{X}} \longrightarrow Y'$, irreducible, tal que $g = F f' + r$ o $g = F f'' + r$ donde $F\overline{X} = F\overline{\overline{X}} = X$, $F\overline{Y} = Y$ y $r \in \mathrm{rad}^2(X,Y)$.

Demostración

Por la proposición de Ringel y utilizando la notación de la proposición 2.10 sabemos que existen dos representaciones inescindibles $\overline{X}$ y $\overline{\overline{X}}$ de $\mathrm{mod}\ k\Delta$ tales que $F\overline{X} = F\overline{\overline{X}} = X$ y que existe $\overline{Y}$ mod $k\Delta$ tal que $F\overline{Y} = Y$. Recordemos que $Y|_{\Gamma''} = Y' \oplus Y''$ donde $Y'_{n+1} = 0$ y $Y''_{n+1} \neq 0$.

Por lo tanto, si $g : X \longrightarrow Y$, $g|_{\Gamma'} = 0$ y

$$(g_i)_{i\varepsilon\Gamma''} = \begin{bmatrix} g_i' \\ g_i'' \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} g_i' &= (FX)_i \longrightarrow (Y')_i \\ g_i'' &= (FX)_i \longrightarrow (Y'')_i \end{aligned}$$

Es decir $g|_{\Gamma''} = \begin{bmatrix} g' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g'' \end{bmatrix}$ y podemos ver a g como

$$g = \overline{g}' + \underline{g}'' \qquad (\text{con } \overline{g}'|_{\Gamma'} = 0 \quad \text{y} \quad \underline{g}''|_{\Gamma'} = 0)$$

De esta forma, existe $f' : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ tal que $F f' = \overline{g}'$ y existe $f'' : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{Y}$ tal que $F f'' : \underline{g}''$.

Como g es irreducible $g = \overline{g}' + \underline{g}'' \varepsilon \operatorname{rad}(X,Y) - \operatorname{rad}^2(X,Y)$ de donde $F f' = \overline{g}' \notin \operatorname{rad}^2(X,Y)$ o $F f'' = \underline{g}'' \notin \operatorname{rad}^2(X,Y)$, es decir $F f' = \overline{g}'$ es irreducible o $F f'' = \underline{g}''$ es irreducible y por la proposición 2.10, f' es irreducible o f'' es irreducible.

□

De manera análoga podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.13

Sea $X \in \mathrm{mod}\, k\Gamma_{(\rho)} \setminus D$ y $Y \in D$ dos representaciones inescindibles y sea $g : X \longrightarrow Y$ un morfismo irreducible. Entonces existe $f' : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ o $f'' : \overline{X} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ irreducible tal que $g = F f' + r$ o $g = F f'' + r$ donde $F\overline{X} = X$ $F\overline{Y} = F\overline{\overline{Y}} = Y$ y $r \in \mathrm{rad}^2(X,Y)$

Observacion

Dada una representación inescindible $X \in C$, a X la podemos ver como una representación del subcarcaj Δ' o como una representación del subcarcaj Δ''.

Si $X, Y \in C$, $f : X \longrightarrow Y$ induce dos morfismos $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ donde $\overline{X}, \overline{Y}$ son representaciones de Δ' y $\overline{\overline{f}} : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ donde $\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}}$ son representaciones de Δ''.

Proposición 2.14

Sean $X, Y \in C$ representaciones inescindibles $F f : FX \longrightarrow FY$ es irreducible sí y sólo sí $\overline{f}$ y $\overline{\overline{f}}$ son irreducibles

<u>Demostración</u>

" $\Rightarrow$ " Sea $Ff: FX \longrightarrow FY$ un morfismo irreducible. Como FX es inescindible, por la proposición de Ringel existen dos representaciones inescindibles $\overline{X}$ y $\overline{\overline{X}}$ en $\operatorname{mod} k\Delta$ tales que $F\overline{X} = F\overline{\overline{X}} = FX$. Analogamente para FY existen dos representaciones inescindibles en $\operatorname{mod} k\Delta$: $\overline{Y}$ y $\overline{\overline{Y}}$ tales que $F\overline{Y} = F\overline{\overline{Y}} = FY$.

De la observación tenemos que $Ff: FX \longrightarrow FY$ induce dos morfismos $\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $\overline{\overline{f}}: \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ y queremos demostrar que tanto $\overline{f}$ como $\overline{\overline{f}}$ son irreducibles.

Como F es exacto y $F\overline{f} = F\overline{\overline{f}} = Ff$ es irreducible $\overline{f}$ y $\overline{\overline{f}}$ no son mono ni epi escindibles.

Consideremos una factorización de $\overline{f}$ y $\overline{\overline{f}}$ a través de z y descompongamos $z = V \oplus W$ donde $V \in C$ y $W \in \operatorname{mod} k\Delta \setminus C$.

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}"'] & & \overline{Y} \\ & \overline{V} \oplus W \arrow[ur, "{[\gamma,\delta]}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{\overline{X}} \arrow[rr, "\overline{\overline{f}}"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix}"'] & & \overline{\overline{Y}} \\ & \overline{\overline{V}} \oplus W \arrow[ur, "{[\gamma',\delta']}"'] & \end{tikzcd}$$

Aplicando F tendremos

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] FX \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} F\alpha' \\ F\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\alpha \\ F\beta \end{bmatrix}"'] & & FY \\ & FV \oplus FW \arrow[ur, "{[F\gamma, F\delta] = [F\gamma', F\delta']}"'] & \end{tikzcd}$$

Como Ff es irreducible $\begin{bmatrix} F\alpha \\ F\beta \end{bmatrix}$ es mono escindible O $(F\gamma, F\delta)$ es epi escindible.

Si $\begin{bmatrix} F\alpha \\ F\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\alpha' \\ F\beta' \end{bmatrix}$ es mono escindible, existe

$(a,b) : FV \oplus FW \longrightarrow FX$

$1_{FX} = (a\ b) \begin{bmatrix} F\alpha \\ F\beta \end{bmatrix} = a \cdot F\alpha + bF\beta \quad \varepsilon \text{ End } FX$ que es local

Por lo tanto $a \cdot F\alpha$ es invertible o $bF\beta$ invertible. Si $b \cdot F\beta$ es invertible FW tendría sumandos en D y por la proposición 2.6 W tendría sumandos en C! Contradicción

Por lo tanto $a \cdot F\alpha$ es invertible, ie, $F\alpha$ es mono escindible, de donde α y α' son mono escindibles .

Si α es mono escindible, existe $p : \overline{V} \longrightarrow \overline{X}$ tal que $p\alpha = 1_{\overline{X}}$. Consideremos $(p\ 0) : \overline{V} \oplus W \longrightarrow \overline{X}$

$(p\ 0)\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = p\,\alpha = 1_{\overline{X}}$. Por lo tanto $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ es mono escindible.

De manera análoga tendremos que $\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix}$ es mono escindible.

Si $(F\gamma, F\delta) = (F\gamma', F\delta')$ es epi escindible existe

$\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} : FY \longrightarrow FV \oplus FW$ tal que $1_{FY} = (F\gamma, F\delta)\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} = F\gamma c + F\delta \cdot d \in \operatorname{End} FY$

que es local.

Por lo tanto $F\gamma \cdot c$ es invertible o $F\delta \cdot d$ es invertible. Si $F\delta \cdot d$ es invertible, entonces FW tendría sumandos en D lo cual no puede ser. Por lo tanto $F\delta \cdot c$ es invertible, ie, $F\gamma$ es epi escindible, de donde γ y γ' son epi escindibles.

Si γ es epi escindible, existe $q : \overline{Y} \longrightarrow \overline{V}$ tal que $\gamma q = 1_{\overline{Y}}$. Consideremos $\begin{bmatrix}q\\ 0\end{bmatrix} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{V} \oplus W$

$(\gamma\ \delta)\begin{bmatrix}q\\ 0\end{bmatrix} = \gamma q = 1_{\overline{Y}}$. Por lo tanto $(\gamma\ \delta)$ es epi escindible.

De manera análoga tendremos que (γ', δ') es epi escindible.

Por lo tanto $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $\overline{\overline{f}} : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ son irreducibles.

" $\Leftarrow$ " Sean $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $\overline{\overline{f}} : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ morfismos irreducibles y supongamos que $Ff : FX \longrightarrow FY$ no es irredu cible. Esto es, existe una factorización de Ff a través de Z, donde Z se descompone como $V \oplus W$ con $V \in D$ y $W \in \operatorname{mod} \frac{k\Gamma}{\langle\rho\rangle} \setminus D$.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "{\begin{bmatrix}\lambda\\ \delta\end{bmatrix}}"'] & & FY \\ & V \oplus W \arrow[ur, "{(\varepsilon,\theta)}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\begin{bmatrix}\lambda\\ \delta\end{bmatrix}$ no es mono escindible ni (ε,θ) es epi escindible

Dado $V \in D$, existen $\overline{V}$ y $\overline{\overline{V}} \in C$ tales que $F\overline{V} = F\overline{\overline{V}} = V$ y como $\lambda : FX \longrightarrow V$, existen $\lambda' : \overline{X} \longrightarrow \overline{V}$ y $\lambda'' : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{\overline{V}}$ donde $F\lambda' = F\lambda'' = \lambda$

De manera análoga, como $\varepsilon : V \longrightarrow FY$ existen $\varepsilon' : \overline{V} \longrightarrow \overline{Y}$ y $\varepsilon'' : \overline{V} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ donde $F\varepsilon' = F\varepsilon'' = \varepsilon$

$$Ff = (\varepsilon\ \theta)\begin{bmatrix}\lambda\\ \delta\end{bmatrix} = \varepsilon\lambda + \theta\delta = F\varepsilon' \cdot F\lambda' + \theta\delta = F(\varepsilon'\lambda') + \theta\delta = F(\varepsilon''\delta'') + \theta\delta$$

Por lo tanto $F(\overline{f} - \varepsilon'\lambda') = F(\overline{\overline{f}} - \varepsilon''\delta'') = \theta\delta$.

Observemos que $\varepsilon'\lambda' \in \operatorname{rad}^2(\overline{X},\overline{Y})$ y $\varepsilon''\lambda'' \in \operatorname{rad}^2(\overline{\overline{X}},\overline{\overline{Y}})$ ya que si λ' o λ'' fueran mono escindibles, $F\lambda' = F\lambda'' = \lambda$ sería mono escindible y tendríamos que $\begin{bmatrix}\lambda\\ \delta\end{bmatrix}$ sería mono escindible! contradicción; y si ε' o ε'' fueran epi escindibles,

$F\varepsilon' = F\varepsilon'' = \varepsilon$ sería epi escindible y tendríamos que (ε,θ) sería epi escindible! contradicción.

Por lo tanto $\overline{h} = \overline{f} - \varepsilon'\lambda'$ y $\overline{\overline{h}} = \overline{\overline{f}} - \varepsilon''\lambda''$ son irreducibles

Por otro lado $F\overline{h} = F\overline{\overline{h}} = \theta\,\delta \in \operatorname{rad}^2(FX,FY)$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta"'] & & FY \\ & W \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Por la proposición de Ringel existe $\overline{W}$ tal que $F\overline{W} = W$

Como $\delta|_{\Gamma'} = 0$ y $(\delta_i)_{i\in\Gamma_0''} = \begin{bmatrix}\delta_i' \\ \delta_i''\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\delta_i' \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ \delta_i''\end{bmatrix}$ tendremos que $\delta = \overline{\delta}' + \underline{\delta}''$ y existe $\delta' : \overline{X} \longrightarrow \overline{W}$ y $\delta'' : \overline{\overline{X}} \longrightarrow \overline{W}$ tal que $F\delta' = \overline{\delta}'$ y $F\delta'' = \underline{\delta}''$.

Como $\theta|_{\Gamma'} = 0$ y $(\theta_i)_{i\in\Gamma_0''} = (\theta_i', \theta_i'') = (\theta_i', 0) + (0, \theta_i'')$ tendremos que $\theta = \overline{\theta}' + \underline{\theta}''$ y existen $\theta' : \overline{W} \longrightarrow \overline{Y}$ y $\theta'' : \overline{W} \longrightarrow \overline{\overline{Y}}$ tal que $F\theta' = \overline{\theta}'$ y $F\theta'' = \underline{\theta}''$.

Observemos que $\overline{\theta}'\overline{\delta}'$ y $\underline{\theta}''\underline{\delta}''$ están en el $\operatorname{rad}^2(FX,FY)$ por la proposición 2.6, $\theta'\delta' \in \operatorname{rad}^2(\overline{X},\overline{Y})$ y $\theta''\delta'' \in \operatorname{rad}^2(\overline{\overline{X}},\overline{\overline{Y}})$.

Sean $\overline{s} = \overline{h} - \theta'\delta'$ y $\overline{\overline{s}} = \overline{\overline{h}} - \theta''\delta''$ dos morfismos irreducibles.

Observemos que

$$\theta\delta = (\overline{\theta}'+\underline{\theta}'')(\overline{\delta}'+\underline{\delta}'') = \overline{\theta}'\overline{\delta}'+\overline{\theta}'\underline{\delta}''+\underline{\theta}''\overline{\delta}'+\underline{\theta}''\underline{\delta}'' = F(\theta'\delta')+F(\theta'\delta'')+F(\theta''\delta')+F(\theta''\delta'')$$

Pero $\theta'\delta'' = \theta''\delta' = 0$. Por lo tanto

$$\theta\delta = F(\theta'\delta' + \theta''\delta'') = F(\theta'\delta') + F(\theta''\delta'')$$

$$F\overline{s} = F(\overline{h} - \theta'\delta') = F\overline{h} - F(\theta'\delta') = \theta\delta - F(\theta'\delta') = F(\theta''\delta'')$$

$F(\overline{s} - \theta''\delta'') = 0$ y por la proposición 2.3 $\overline{s} - \theta''\delta'' = 0$, ie $\overline{s} = \theta''\delta''$.

Por ser $\overline{s}$ irreducible, δ'' es mono escindible o θ'' es epi escindible. Pero δ'' no puede ser mono escindible ni θ'' epi escindible porque, por la proposición 2.6, $\overline{W}$ no tiene sumandos en C.

$$F\overline{\overline{s}} = F\overline{h} - F(\theta''\delta'') = \theta\delta - F(\theta''\delta'') = F(\theta'\delta') \therefore F(\overline{\overline{s}} - \theta'\delta') = 0$$

y por la porposición 2.3 $\overline{\overline{s}} - \theta'\delta' = 0$, ie $\overline{\overline{s}} = \theta'\delta'$.

Como $\overline{\overline{s}}$ es irreducible, δ' es mono escindible o ε' es epi escindible. Pero δ' no puede ser mono escindible ni θ' epi escindible.

Por lo tanto $Ff: FX \longrightarrow FY$ es irreducible.

Sección 2.3

Nos disponemos ahora a demostrar el teorema de Nazarova y Roiter, pero antes será útil el siguiente resultado.

Lema

Sean V, V_1, V_2 y W k- espacios vectoriales y $f:V \longrightarrow V_1$ y $g:V_2 \longrightarrow W$ transformaciones lineales. $V \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{(0,g)} W$ es exacta sí y sólo sí f es un epimorfismo y g es un monomorfismo.

Demostración

"$\Rightarrow$" Supongamos $V \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{(0,g)} W$ es exacta ie, $\operatorname{Ker}(0,g) = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$

Pero $\operatorname{Ker}(0,g) = V_1 \oplus \operatorname{Ker} g$ y $\operatorname{Im}\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} f \oplus 0$, de donde $V_1 \oplus \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

Sea $x \in \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f \subset V_1$. Por lo tanto $x \in V_1 \cap \operatorname{Ker} g = 0$ ie, $x = 0$, de donde g es un monomorfismo $\operatorname{Im} f = V_1 \oplus \operatorname{Ker} g = V_1$. Por lo tanto f es un epimorfismo.

"$\Leftarrow$" Supongamos que f es un epimorfismo y g un monomorfismo

$$\operatorname{Ker}(0,g) = V_1 \oplus \operatorname{Ker} g = V_1 = \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la sucesión

$$V \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{(0,g)} W \quad \text{es exacta.}$$

<u>Teorema</u> de Roiter y Nazarova.

Un policarcaj es de tipo finito $\Leftrightarrow$ su diagrama es un diagrama Dynkin.

<u>Demostración</u>

"$\Leftarrow$" $A_l\ (l \geq 1)$

$$\underset{1}{\circ} \overset{1}{\text{——}} \underset{2}{\circ} \overset{1}{\text{——}} \circ \cdots \circ \overset{1}{\text{——}} \underset{l-1}{\circ} \overset{1}{\text{——}} \underset{l}{\circ}$$

Como todas las flechas tiene peso 1 este diagrama coincide con el Dynkin A_l que sabemos que es de tipo de representación finita.

$B_l\ (l \geq 2)$

$$\underset{1}{\circ} \overset{1}{\text{——}} \underset{2}{\circ} \overset{1}{\text{——}} \underset{3}{\circ} \cdots \circ \overset{1}{\text{——}} \underset{l-1}{\circ} \xrightarrow{2} \underset{l}{\circ}$$

Sus representaciones coinciden con las representaciones del carcaj Γ

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \cdots \circ \arrow[r, dash] & \overset{l-1}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & l \arrow[d, "\beta"] \\ & & & & l+1 \end{tikzcd}$$

con las condiciones

a) $l-1 \xrightarrow{\alpha} l \xrightarrow{\beta} l+1$ es exacta

b) β es un epimorfismo.

Como $\beta\,\alpha = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ sin relación 0

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[dr, dash] \\ & \underset{2}{\circ} \arrow[dr, dash] \\ & & \cdots \arrow[dr, dash] \\ & & & \circ \arrow[dr, dash] \\ & & & & l-1\ \circ \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & l+1 \\ & & & & l' & l'' \arrow[u, "\beta'"'] \end{tikzcd}$$

de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de relación de Γ con la relación 0, coincide.

Por el lema anterior, las representaciones de Δ con α' epi y β' iso coinciden con las representaciones de Γ con las condiciones a), b), ie, coinciden con las representaciones del Dynkin D_{l+1} con α' epi que es de tipo finito

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & l+1 \\
\underset{1}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{2}{\circ} \arrow[r, dash] & \circ\cdots & \underset{l-2}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{l-1}{\circ} \arrow[urr] \arrow[drr, "\alpha'"] & & \\
 & & & & & & l
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $B_l (l \geqslant 2)$ es de tipo de representación finito.

$\underline{C_l (l \geqslant 3)}$ $\quad \underset{1}{\circ} - \underset{2}{\circ} - \underset{3}{\circ} \cdots \underset{l-2}{\circ} - \underset{l-1}{\circ} \xleftarrow{2} \underset{l}{\circ}$

Sus representaciones coinciden con las representaciones del carcaj Γ

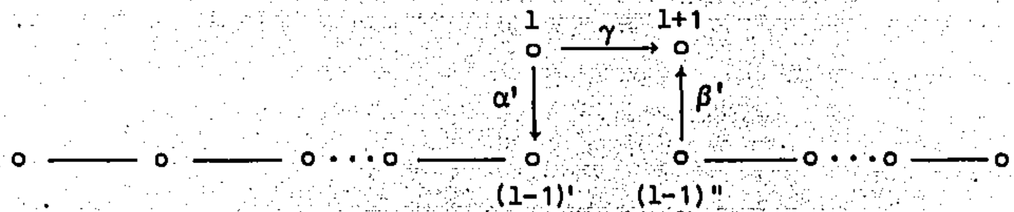
$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ\cdots\circ \arrow[r, dash] & \overset{l-1}{\circ} \arrow[d, "\beta"'] & \overset{l}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & & & \underset{l+1}{\circ} &
\end{tikzcd}$$

con las condiciones

a) $l \xrightarrow{\alpha} l-1 \xrightarrow{\beta} l+1$ exacta

b) β es un epimorfismo .

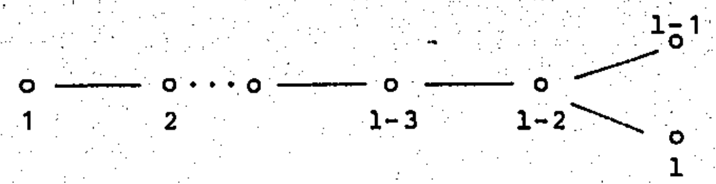
Como $\beta\alpha=0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ sin relación 0



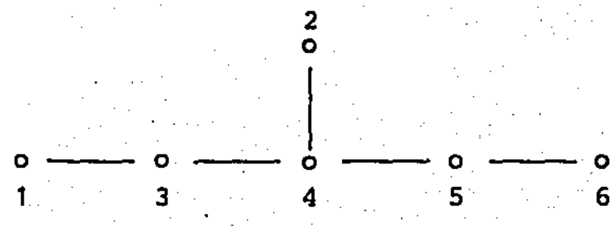
Por el lema anterior, las representaciones de Δ con α' epi y β' iso coinciden con las representaciones de Γ con las condiciones a),b), ie coinciden con las representaciones del Dynkin A_{2l-1} con α' epi, que es de tipo finito.

$\therefore$ $C_l (l \geq 3)$ es de tipo de representación finito.

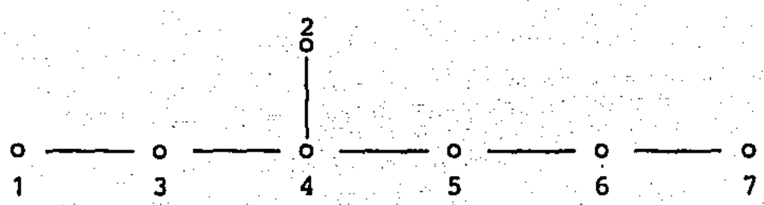
<u>$D_l (l \geq 4)$</u>



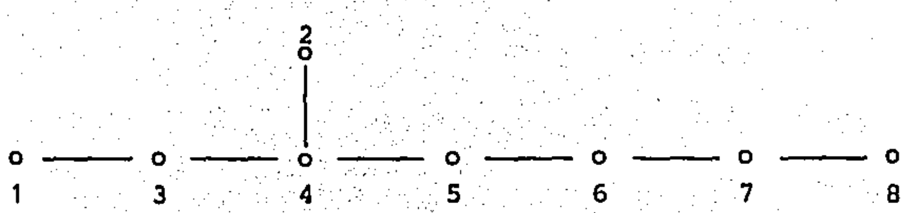
$\underline{E_6}$



$\underline{E_7}$

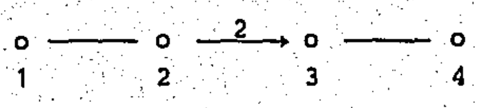


$\underline{E_8}$



Como todas las flechas tienen peso 1, coinciden con los Dynkin D_1, E_6, E_7, E_8 que son de tipo de representación finito.

F_4:



Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ:

$$\begin{tikzcd}
\overset{i}{\circ} \arrow[r, dash] & \overset{j}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \overset{k}{\circ} \arrow[r, dash] \arrow[d, "\beta"] & \overset{m}{\circ} \\
 & & l &
\end{tikzcd}$$

con las siguientes condiciones

a) $j \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} l$ es exacta

b) β es un epimorfismo

Como $\beta\alpha=0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ, sin relación 0 de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Γ con la relación 0, coincide

$$\begin{tikzcd}
 & \circ i \arrow[d, dash] & & & \\
 & j\circ \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & \circ l & & \\
m'\circ \arrow[r, dash] & k' & k'' \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[r, dash] & \circ m'' &
\end{tikzcd}$$

Por el lema anterior, las representaciones de Δ con α' epi y β' iso coinciden con las representaciones de Γ con las condiciones a). b), ie, coinciden con las representaciones del Dynkin E_6

$$\begin{tikzcd} & & {} \arrow[d, dash] & & \\ \circ \arrow[r, dash] & \circ & \circ \arrow[l, two heads, "\alpha'"'] \arrow[r, "\gamma"] & \circ \arrow[r, dash] & {} \end{tikzcd}$$

con α' epi que es de tipo finito.

$\therefore$ F_4 es de tipo de representación finito

G_2: $i \xrightarrow{3} j$

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] \arrow[ddr, "\theta"'] & j \arrow[d, "\beta"] \\ & k \arrow[d, "\delta"] \\ & l \end{tikzcd}$$

con las siguientes condiciones

a) $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta

b) $i \xrightarrow{\gamma} k \xrightarrow{\delta} l$ es exacta

c) β y δ son epimorfismos.

Como $\beta\alpha=0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ' de tal manera que el tipo de representación de Δ' y el de Γ con la condición $\beta\alpha=0$ coincidan

Δ':

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & \\
i \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & & k \arrow[ul, "\delta"'] \\
j' & & j'' \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Como $\delta\gamma = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ, sin relación 0 de tal manera que el ti po de representación de Δ y el tipo de representación de Δ' con la condición $\delta\gamma = 0$ coinciden.

$$\begin{tikzcd}
j' & & & \\
 & i \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma'"'] & 1 & \\
j''' \arrow[r, "\beta''"'] & k' & k'' \arrow[u, "\delta'"'] & j^{IV} \arrow[l, "\beta'''"]
\end{tikzcd}$$

Por el lema anterior, las representaciones de Δ con β'', β''' y δ' iso y α' y γ' epi coinciden con las representaciones de Γ con las condiciones a), b), c), ie coinciden con las representaciones de D_4 con α' y γ' epi

$$\begin{tikzcd}
j' & & \\
& i \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[r, "\theta"] \arrow[dl, "\gamma'"] & l \\
k' & &
\end{tikzcd}$$

que es de tipo finito.

$\therefore$ G_2 $\circ \xrightarrow{3} \circ$ es de tipo de representación finita.

"$\Rightarrow$" Analizaremos, en cada diagrama Dynkin que sucede si le agregamos más peso a las flechas.

i) $\xrightarrow{4}$

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen las siguientes condiciones

a) $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta

b) $i \xrightarrow{\gamma} k \xrightarrow{\delta} l$ es exacta

c) $i \xrightarrow{\theta} l \xrightarrow{\epsilon} m$ es exacta

d) β, δ, ϵ son epimorfismos

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[ddr, "\theta"] \arrow[dddr, "\mu"'] & j \arrow[d, "\beta"] \\
& k \arrow[d, "\delta"] \\
& l \arrow[d, "\epsilon"] \\
& m
\end{tikzcd}$$

Como $\beta\,\alpha=0$, por la proposición de Ringel podemos contruir el carcaj Δ' de tal manera que el tipo de representación de Δ' y el tipo de representación de Γ con $\beta\,\alpha=0$, coincide

Δ':

$$\begin{tikzcd}
& m & \\
& l \arrow[u, "\epsilon"'] & \\
i \arrow[uur, "\mu"] \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & & k \arrow[ul, "\delta"'] \\
j' & & j'' \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Nos interesan las representaciones de Γ en las que $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta y β un epimorfismo y, por el lema, estas coinciden con las representaciones de Δ' en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo.

Como $\delta\gamma=0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ'' de tal manera que el tipo de representación de Δ'' y el tipo de representación de Δ' con $\delta\gamma=0$, coinciden

Δ'':

$$\begin{tikzcd}
 & j' & & m & & \\
 & & i \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "\gamma'"'] & & l \arrow[ul, "\varepsilon"'] & \\
j''' \arrow[rr, "\beta''"'] & & k' & & k'' \arrow[u, "\delta'"'] & j^{IV} \arrow[l, "\beta'''"]
\end{tikzcd}$$

Las representaciones de Δ' en las que $i \xrightarrow{\gamma} k \xrightarrow{\delta} l$ es exacta y δ un epimorfismo coinciden por el lema, con las representaciones de Δ'' en las que γ' es un epimorfismo y δ' un isomorfismo.

Como $\varepsilon\theta=0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ sin relación 0 de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Δ'' con $\varepsilon\theta=0$ coincide .

Δ

$$\begin{tikzcd}
j^{III} \arrow[dr, "\beta''"] & & & & & \\
 & k' & j' & & & \\
 & & i \arrow[ul, "\gamma'"'] \arrow[u, "\alpha'"'] \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta'"'] & m & & \\
j^{V} \arrow[r, "\beta^{IV}"'] & k''' \arrow[r, "\delta''"'] & l' & l'' \arrow[u, "\varepsilon'"'] & k^{IV} \arrow[l, "\delta'''"] & j^{IV} \arrow[l, "\beta^{V}"]
\end{tikzcd}$$

Las representaciones de Δ'' en las que $i \xrightarrow{\theta} l \xrightarrow{\varepsilon} m$ es exacta y ε un epimorfismo coinciden, por el lema, con las representaciones de Δ en las que θ' es un epimorfismo y ε' un isomorfismo.

Por lo tanto, las representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a), b), c) y d) coincinden con las representaciones de Δ que satisfacen que $\beta'',\beta^{IV},\beta^{V},\delta'',\delta''',\varepsilon'$ son isomorfismos y que α',γ',θ' son epimorfismos pero estas coinciden con las representaciones de Γ'' en las que α',γ' y θ' son epimorfismos

$$\begin{tikzcd} j' & & m \\ & i \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dl, "\gamma'"] \arrow[dr, "\theta'"'] & \\ k' & & l' \end{tikzcd}$$

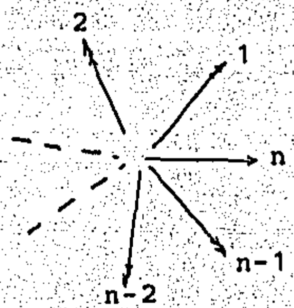
Dualizando obtenemos, por cada representación de Γ'' una representación de $(\Gamma'')^*$:

$$\begin{tikzcd} j'^* \arrow[dr, "\alpha'^*"] & & m^* \arrow[dl, "\mu'^*"'] \\ & i^* & \\ k'^* \arrow[ur, "\gamma'^*"'] & & l'^* \arrow[ul, "\theta'^*"] \end{tikzcd}$$

en la que $\alpha'^*, \gamma'^*, \theta'^*$ son monomorfismos.

Pero la categoría de representaciones de $(\Gamma'')^*$ contiene la subcategoría plena de representaciones de $(\Gamma'')^*$ en la que todas sus flechas son monomorfismos y que corresponden a las representaciones del conjunto parcialmente ordenado (1,1,1,1) que, por el teorema de Kleiner [C.R.1] es de tipo de representación infinita. Por lo tanto $\xrightarrow{4}$ es de tipo de representación infinito.

En general, si $\xrightarrow{n}$ con $n \geqslant 4$, su categoría de representaciones tiene el mismo tipo de representación que



La categoría de representaciones de este carcaj contiene a la subcategoría de representaciones que tienen isomorfismos en $n-4$ de sus flechas y que coincide con el caso que acabamos de analizar.

Por lo tanto $\xrightarrow{n}$ con $n \geqslant 4$ es de tipo de representación infinito.

ii) $\overset{1}{-\!\!-\!\!-\!\!-}$ o $\xrightarrow{3}$ (cualquier orientación en la primer flecha)

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ con las siguientes condiciones

a) $j \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} l$ es exacta

b) $j \xrightarrow{\gamma} l \xrightarrow{\delta} m$ es exacta

c) β y δ son epimorfismos

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\mu"] & \circ j \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] \arrow[ddr, "\theta"'] & k \arrow[d, "\beta"] \\
& & l \arrow[d, "\delta"] \\
& & m
\end{tikzcd}$$

Como $\beta\,\alpha=0$, por la proposición de Ringel, podemos construir el carcaj Δ' de tal manera que el tipo de representación de Δ' y el tipo de representación de Γ con $\beta\,\alpha=0$ coincide

Δ':

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, dash, "\mu"] & & m & \\
& j \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & & l \arrow[ul, "\delta"'] \\
& k' & & k'' \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Como nos interesan las representaciones de Γ en las que $j \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} l$ es exacta y β un epimorfismo, estas coinciden, por el lema, con las representaciones de Δ' en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo.

Como $\delta\gamma = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Δ' con $\delta\gamma = 0$, coincide

Δ :

$$\begin{tikzcd}
k' & i \arrow[d, "\mu"] & & \\
& j \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma'"'] & m & \\
k''' \arrow[r, "\beta''"] & l' & l'' \arrow[u, "\delta'"'] & k^{IV} \arrow[l, "\beta'''"']
\end{tikzcd}$$

Las representaciones de Δ' en las que $j \xrightarrow{\gamma} l \xrightarrow{\delta} m$ es exacta y δ un epimorfismo, coinciden, por el lema, con las representaciones de Δ en las que γ' es epi y δ' un isomorfismo.

Por lo tanto, las representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a), b) y c) coinciden con las representaciones de Δ que satisfacen que β'', β''' y δ' son isomorfismos y que α' y γ' son epimorfismos. Pero estas representaciones coinciden con las representaciones de Γ'' en las que α' y γ' son epimorfismos.

$$
\begin{tikzcd}
i & & m \\
& j \arrow[ul, dash, "\mu"'] \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
k' & & l'
\end{tikzcd}
$$

Como $i \overset{\mu}{\text{———}} j$ tiene cualquier orientación analizaremos las dos posibilidades.

<u>Caso 1</u> Si $\mu : j \longrightarrow i$.

La categoria de representaciones de Γ'' con α' y γ' epimorfismos contiene a la categoria de representaciones de Γ' con α', γ' y θ epimorfismos y por el análisis hecho en el Caso i), esta categoría es de tipo de representación infinito.

Por lo tanto $\xleftarrow{\;1\;} \; \xrightarrow{\;3\;}$ es tipo de representación infinito.

<u>Caso 2</u>

Si $\mu : i \longrightarrow j$, el vértice i es una fuente, por lo tanto el simple en i es un inyectivo inescindible. Aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_i^- obtendremos (Ver sección 0.3) una equivalencia entre las representaciones inescindibles de Γ'' no isomorfas a I_i y las representaciones inescindibles de $\sigma_i \Gamma''$

$$\begin{tikzcd}
i & & m \\
& j \arrow[ul] \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
k' & & l'
\end{tikzcd}$$

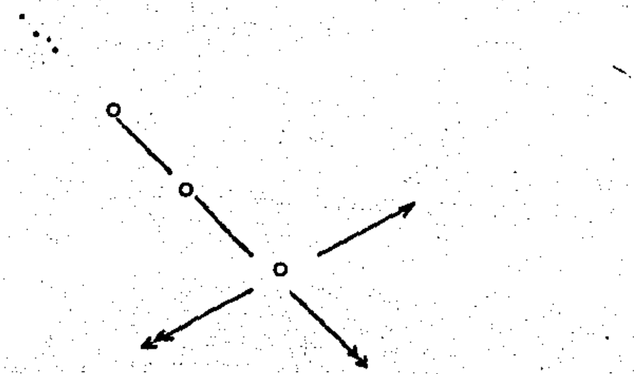
no isomorfas al proyectivo inescindible P_i.

Como nos interesan las representaciones V de Γ'' en las que α' y γ' son epimorfismos, en $S_i^-(V)$ α' y γ' son epimorfismos y hemos reducido este caso al caso 1, es decir, $\sigma_i \Gamma''$ es de tipo de representación infinito. De donde Γ'' es de tipo de representación infinito.

Por lo tanto $\xrightarrow{\ 1\ }\ \xrightarrow{\ 3\ }$ es de tipo de representación infinito.

En general la categoria de representaciones de

$$\text{---}\circ\text{---}\circ\cdots\circ\text{---}\underset{n-1}{\circ}\xrightarrow{3}{}_{n}$$ tiene el mismo tipo de representación que



La categoría de representaciones de este carcaj contiene a la categoría de representaciones de ese carcaj que tienen isomorfismos en $n-1$ de sus flechas (que corresponden a la cola) y que coincide con la categoría de representaciones de las cuatro flechas que acabamos de analizar.

Por lo tanto $\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\cdots\circ\xrightarrow{3}$ tiene tipo de representación infinita.

iii) $\circ\text{---}\circ\xleftarrow{3}\circ$ (cualquier orientación en la primer flecha)

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen las siguientes condiciones

a) $\overset{k}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{j}{\circ} \xrightarrow{\beta} \overset{1}{\circ}$ es exacta

b) $\overset{k}{\circ} \xrightarrow{\gamma} \overset{1}{\circ} \xrightarrow{\delta} \overset{m}{\circ}$ es exacta

c) β y δ son epimorfismos

$$\begin{tikzcd}
\overset{i}{\circ} \arrow[r, no head, "\mu"] & \overset{j}{\circ} \arrow[d, "\beta"'] & \circ k \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[ddl, "\theta"] \\
& 1\circ \arrow[d, "\delta"'] & \\
& \underset{m}{\circ} &
\end{tikzcd}$$

Como $\beta\alpha=0$ por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ' de tal manera que el tipo de representación de Δ' y el tipo de representación de Γ con $\beta\alpha=0$ coincide

Δ':

$$\begin{tikzcd}
& & m & & \\
& k\circ \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & & \circ 1 \arrow[ul, "\delta"'] & \\
\overset{i'}{\circ} \arrow[r, no head, "\mu'"] & j' & & j'' \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[r, no head, "\mu''"] & \overset{i''}{\circ}
\end{tikzcd}$$

Como nos interesan las representaciones de Γ en las que $k \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} 1$ es exacta y β es un epimorfismo, por el lema, estas coinciden con las representaciones de Δ' en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo.

Como $\delta\gamma = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ, sin relación cero, de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Δ' con $\delta\gamma = 0$ coincide.

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, dash, "\mu'"] & & & & & \\
& j' & & & & \\
& & k \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, dash, "\gamma'"'] & m \arrow[d, dash, "\delta'"] & & \\
i''' \arrow[r, dash, "\mu'''"'] & j''' \arrow[r, "\beta''"'] & l' & l'' & j^{IV} \arrow[l, "\beta'''"] \arrow[r, dash, "\mu^{IV}"'] & i^{IV}
\end{tikzcd}
$$

Las representaciones de Δ' en las que $k \xrightarrow{\gamma} l \xrightarrow{\delta} m$ es exacta y δ es un epimorfismo coincide con las representaciones de Δ en las que γ' es un epimorfismo y δ' un isomorfismo.

Por lo tanto, las representaciones de Γ que satisfacen a), b) y c) coinciden con las representaciones de Δ en las que β'', β''' y δ' son isomorfismo y α' y γ' son epimorfismo, esto es, coincide con las representaciones de

Γ'' en las que γ' y α' son epimorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & & i \arrow[d, dash, "\mu'"] & & \\
 & & j' & & \\
i''' \arrow[r, dash, "\mu'''"'] & l' & k \arrow[l, two heads, "\gamma'"] \arrow[u, "\alpha'"'] \arrow[r, "\theta"'] & m \arrow[r, dash, "\mu^{IV}"'] & i^{IV}
\end{tikzcd}$$

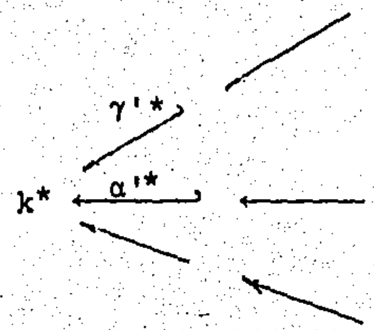
Como $\mu : i$ ——— j tiene cualquier orientación, analizaremos las dos posibilidades.

<u>Caso 1</u>

Si $j \xrightarrow{\mu} i$, el carcaj Γ'' sería de la forma (con γ' y α' epimorfismos)

$$\begin{tikzcd}
 & \circ \arrow[r] & i''' \\
k \arrow[ur, "\gamma'"] \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[dr, "\theta"'] & \circ \arrow[r] & i \\
 & \circ \arrow[r] & i^{IV}
\end{tikzcd}$$

Dualizando obtenemos. para cada representación de Γ'' una representación de $(\Gamma'')^*$



en la que γ'^* y α'^* son monomorfismos.

Pero la categoria de representaciones de este carcaj, contiene a la subcategoria plena de representaciones de $(\Gamma'')^*$ en las que todas las flechas son monomorfismos.

Esta subcategoria corresponde a las representaciones del parcialmente ordenado (2.2.2) que, de acuerdo al teorema de Kleiner es de tipo de representación infinita.

Por lo tanto $\xleftarrow{\ 1\ } \ \xleftarrow{\ 3\ }$ es de tipo de representación infinita.

<u>Caso 2</u>

Si $i \longrightarrow j$ el carcaj Γ'' sería de la forma

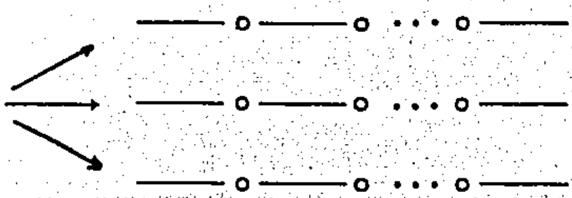
$$\begin{tikzcd}
 & & i \arrow[d, "\mu"] & & \\
 & & j' & & \\
i''' \arrow[r] & o & k \arrow[l] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[r] & m & i^{IV} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Como i, i''', i^{IV} son fuentes podemos aplicar los funtores de coxeter parciales derechos S_i^- $S_{i'''}^-$ $S_{i^{IV}}^-$ y obtendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de Γ'' no isomorfas a los inyectivos I_i, $I_{i'''}$ y $I_{i^{IV}}$ y las representaciones proyectivas de $\sigma_i\, \sigma_{i'''}\, \sigma_{i^{IV}}\, \Gamma''$ no isomorfas a los proyectivos P_i, $P_{i'''}$, $P_{i^{IV}}$.

De esta forma nos reducimos al caso 1 que ya vimos que era de tipo de representación infinita, por lo tanto Γ'' es de tipo infinito de donde $\xrightarrow{1}\ \xleftarrow{3}$ es de tipo infinito.

En general, la categoría de representación de

$$o \text{ ---- } o \text{ ---- } o \cdots o \text{ ---- } \underset{n-1}{o} \xleftarrow{3} \underset{n}{}$$ tiene el mismo tipo de representación que:



Esta categoría contiene a la subcategoría de representaciones que tienen isomorfismos en n - 2 flechas de cada una de sus tres colas y que coincide con alguna de las dos categorías que acabamos de analizar. Por lo tanto

$—— \cdots —— \xleftarrow{3}$ es de tipo de representación infinito.

iv) $—— \circ —— \circ \xrightarrow{2} \circ —— \circ$

Las representaciones de esta policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, dash, "\theta"] & \overset{j}{\circ} \arrow[r, dash, "\delta"] & \overset{k}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \overset{l}{\circ} \arrow[r, dash, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & \circ n \\ & & & m & \end{tikzcd}$$

a) $k \xrightarrow{\alpha} l \xrightarrow{\beta} m$ exacta

b) β es un epimorfismo

Como $\beta\alpha = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ, sin relación 0 de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Γ con $\beta\alpha = 0$ coinciden

Δ:

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, dash, "\theta"'] & & & & & \\
& \overset{o}{j} \arrow[dr, dash, "\delta"'] & & & & \\
& & k \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & & m & \\
& n' \arrow[r, dash, "\mu'"] & l' & & l'' \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[r, dash, "\mu''"] & n''
\end{tikzcd}$$

Como nos interesan las representaciones de Γ en las que $k \xrightarrow{\alpha} l \xrightarrow{\beta} m$ es exacta y β es un epimorfismo, por el lema, estas coinciden con las representaciones de Δ en las que α' es un epimorfismo y β' es un isomorfismo, esto es, con las representaciones de Γ'' en las que

$$
\begin{tikzcd}
 & & i \arrow[d, dash, "\theta"] & & \\
 & & j \arrow[d, dash, "\delta"] & & \\
n' \arrow[r, dash, "\mu'"] & l' & k \arrow[l, "\alpha'"'] \arrow[r, "\gamma"] & {} & {} \arrow[r, dash, "\mu''"] & n''
\end{tikzcd}
$$

α' es un epimorfismo.

Como θ, δ y μ tienen cualquier orientación, analizaremos que sucede con cada una de ellas.

Dado el policarcaj:

$$
\begin{tikzcd}
i & j \arrow[l] & k \arrow[l] \arrow[r, "2"] & l \arrow[r] & n
\end{tikzcd}
$$

su carcaj asociado es

$$
\begin{tikzcd}
i & j \arrow[l, "\theta"'] & k \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & l \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & n \\
 & & & l' &
\end{tikzcd}
$$

El carcaj $\Gamma''_{,}$, sería, en este caso, de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & i & & \\
 & & j \arrow[u, "\theta"'] & & \\
n' & l' \arrow[l, "\mu'"'] & k \arrow[l, two heads, "\alpha'"'] \arrow[u, "\delta"'] \arrow[r, "\gamma"] & {} \arrow[r, "\mu''"] & n''
\end{tikzcd} .$$

Pero la categoría de representación de $\Gamma''_{,}$, con α' epimorfismo contiene a la categoría de representaciones de $\Gamma''_{,}$ con α' y δ' epimorfismos que vimos, en iii) caso 1, que era de tipo de representación infinito. Por lo tanto $\longleftarrow \; \longleftarrow \; \xrightarrow{\;2\;} \; \longrightarrow$ es de tipo infinito.

Aplicando el funtor de Coxeter parcial izquierdo S_i^+ obtendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de $\Gamma''_{,}$, y las representaciones inescindibles de $\sigma_i\Gamma''_{,}$. Por lo tanto, ambas tienen el mismo tipo de representación, de donde $\longrightarrow \; \longleftarrow \; \xrightarrow{\;2\;} \; \longrightarrow$ es de tipo de representación infinito.

Aplicando el funtor de Coxeter parcial izquierdo S_j^+ a la categoría de representaciones de $\sigma_i\Gamma''_{,}$, obtendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de $\sigma_i\Gamma''_{,}$, y la categoría de representaciones de $\sigma_j\ \sigma_i\Gamma''_{,}$. Por lo tanto ambas tienen el mismo tipo de representación, ie,

$\longleftarrow \; \longrightarrow \; \xrightarrow{2} \; \longrightarrow$ es de tipo de representación infinita.

Siguiendo un razonamiento análogo vemos que bastará aplicar el funtor de Coxeter parcial izquierdo S_i^+ a $\sigma_j \sigma_i \Gamma''_{\prime}$ para ver que $\longrightarrow \; \longrightarrow \; \xrightarrow{2} \; \longrightarrow$ es de tipo de representación infinito.

Aplicando los funtores de Coxeter parciales izquierdos $S_{n'}^+$ y $S_{n''}^+$ a $\sigma_i \; \sigma_j \; \sigma_i \Gamma''_{\prime}$, tendremos que $\longrightarrow \; \longrightarrow \; \xrightarrow{2} \; \longleftarrow$ es de tipo de representación infinito.

Si aplicamos los funtores de Coxeter parciales izquierdos $S_{n'}^+$ y $S_{n''}^+$ a $\sigma_j \; \sigma_i \Gamma''_{\prime}$ podremos ver que $\longleftarrow \; \longrightarrow \; \xrightarrow{2} \; \longleftarrow$ es de tipo de representación infinita y si se los aplicamos a $\Gamma''_{\prime}$ tendremos que $\longleftarrow \; \longleftarrow \; \xrightarrow{2} \; \longleftarrow$ es de tipo infinito. Finalmente si aplicamos este par de funtores a $\sigma_i \Gamma''_{\prime}$ tendremos que $\longrightarrow \; \longleftarrow \; \xrightarrow{2} \; \longleftarrow$ es de tipo infinito.

v) $\circ \frac{\quad\quad}{} \circ \frac{\quad\quad}{} \circ \xleftarrow{\;2\;} \circ \frac{\quad\quad}{}$

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ con las siguientes condiciones:

Γ:

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, dash, "\mu"] & \overset{j}{\circ} \arrow[r, dash, "\delta"] & \overset{k}{\circ} \arrow[d, "\beta"'] & \overset{l}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, dash, "\theta"] \arrow[dl, "\gamma"] & n \\
 & & m & &
\end{tikzcd}$$

a) $l \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} m$ es exacta

b) β es un epimorfismo

Como $\beta\alpha = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ, sin relación 0, de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Γ con $\beta\alpha = 0$ coinciden

Δ :

$$\begin{tikzcd}
 & & n \arrow[dr, dash, "\theta"] & & & & \\
 & & & l \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & m & & \\
i' \arrow[r, dash, "\mu'"] & j' \arrow[rr, dash, "\delta'"] & & k' & k'' \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[r, dash, "\delta''"] & j'' \arrow[r, dash, "\mu''"] & i''
\end{tikzcd}$$

Nos interesan las representaciones de Γ en las que $l \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} m$ es exacta y β un epimorfismo.

Por el lema, estas coinciden con las representaciones de Δ en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo , esto es, coinciden con las representaciones de Γ'' en las que α' es un epimorfismo

$$\begin{tikzcd}
 & & & n \arrow[d, dash, "\theta"] & & & \\
i' \arrow[r, dash, "\mu'"] & j' \arrow[r, dash, "\delta'"] & k' & l \arrow[l, "\alpha'"'] \arrow[r, "\gamma"] & k'' \arrow[r, dash, "\delta''"] & j'' \arrow[r, dash, "\mu''"] & i''
\end{tikzcd}$$

Como μ, δ y θ tienen cualquier orientación analizaremos todas las posibilidades.

Dado el policarcaj $\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \xleftarrow{2} \quad \longrightarrow$, su carcaj asociado es:

$$\begin{tikzcd}
i & j \arrow[l, "\mu"'] & k \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, "\beta"'] & l \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\theta"] \arrow[dl, "\gamma"] & n \\
 & & m & &
\end{tikzcd}$$

En este caso el carcaj Γ''_1, es de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & & n & & & \\
i' & j' \arrow[l, "\mu'"'] & k' \arrow[l, "\delta'"'] & 1 \arrow[l, "\alpha'"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, "\theta"] & k'' \arrow[r, "\delta''"] & j'' \arrow[r, "\mu''"] & i''
\end{tikzcd}$$

Dualizando obtenemos, para cada representación de Γ_1'', una representación de $(\Gamma_1'')^*$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \cdot \arrow[d] & & & \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "\alpha'^*"] & \cdot & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Pero la categoría de representación este carcaj contiene a la subcategoria plena de representación de $(\Gamma_1'')^*$ en el que todas las flechas son monomorfismo.

Esta subcategoría corresponde a las representaciones del parcialmente ordenado (1,3,3) que de acuerdo al teorema de Kleiner es de tipo de representación infinito.

Por lo tanto $\longleftarrow\ \longleftarrow\ \xleftarrow{\ 2\ }\ \longrightarrow$ es de tipo infinito.

Aplicando al funtor de Coxeter parcial izquierdo

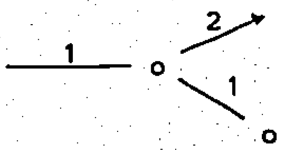
S_n^- a Γ_1'', tendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de Γ_1'', y las representaciones inescindibles de $\sigma_n\Gamma_1''$. Por lo tanto $\longleftarrow\ \longleftarrow\ \xleftarrow{2}\ \longleftarrow$ es de tipo de representación infinito.

Aplicando los funtores de Coxeter parciales izquierdo $S_{i'}^+$ y $S_{i''}^+$ a Γ_1'', podemos ver que $\longrightarrow\ \longleftarrow\ \xrightarrow{2}\ \longrightarrow$ es detipo de representación infinita y si le aplicamos el funtor de Coxeter parcial izquierdo S_n^+ a $\sigma_{i'}\sigma_{i''}\Gamma_1''$ tendremos que el policarcaj $\longrightarrow\ \longleftarrow\ \xleftarrow{2}\ \longleftarrow$ es de tipo de representación infinito.

Si aplicaramos los funtores de Coxeter parciales izquierdos $S_{j'}^+$ y $S_{j''}^+$ a $\sigma_{i'}\sigma_{i''}\Gamma_1''$, podemos ver que $\longleftarrow\ \longrightarrow\ \xleftarrow{2}\ \longrightarrow$ es de tipo infinito y se los aplicamos a $\sigma_n\sigma_{i'}\sigma_{i''}\Gamma_1''$ tendremos que $\longleftarrow\ \longrightarrow\ \xleftarrow{2}\ \longleftarrow$ es de tipo infinito.

Si aplicamos los funtores de Coxeter parciales izquierdos $S_{i'}^+$ y $S_{i''}^+$ a $\sigma_{j'}\sigma_{j''}\sigma_{i'}\sigma_{i''}\Gamma_1''$ podemos ver que $\longrightarrow\ \longrightarrow\ \xleftarrow{2}\ \longrightarrow$ es de tipo infinito y si se les aplicamos a $\sigma_n\sigma_{j'}\sigma_{j''}\sigma_{i'}\sigma_{i''}\Gamma_1''$ obtendremos que $\longrightarrow\ \longrightarrow\ \xleftarrow{2}\ \longleftarrow$ es de tipo infinito.

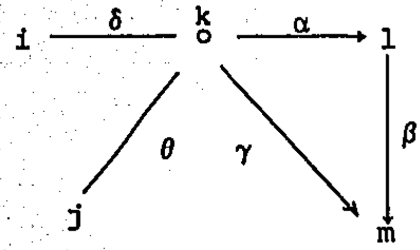
vi)



Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ con las siguientes condiciones:

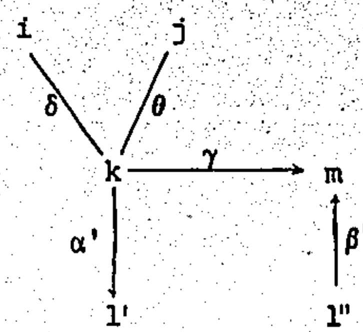
a) $k \xrightarrow{\alpha} l \xrightarrow{\beta} m$ es exacta

b) β es un epimorfismo



Como $\beta\,\alpha = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ, sin relación 0, de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación del Γ con $\beta\,\alpha = 0$ coinciden

Δ:



Nos interesan las representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a) y b), por el lema, estas coinciden con las representaciones de Δ en las que β' es un isomorfismo y α' un epimorfismo, esto es, coinciden con las representaciones de Γ'' en las que α' es un epimorfismo

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, dash, "\delta"] & & j \arrow[dl, dash, "\theta"'] \\ & k \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ l' & & m \end{tikzcd}$$

Como δ y θ tienen cualquier orientación, analizaremos que sucede en cada orientación posible.

Si Γ es
$$\begin{tikzcd} i & k \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & l \arrow[d, "\beta"] \\ j & & m \end{tikzcd}$$

El carcaj Γ_1'', es de la forma

$$\begin{tikzcd}
i & & j \\
& k \arrow[ul, "\delta"'] \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
l' & & m
\end{tikzcd}$$

donde α' es un epimorfismo.

La categoria de representaciones de Γ_1'', con α' epi contiene a la subcategoria plena de representaciones de Γ_1'', en las que α', δ, θ y γ son epimorfismos y que es de tipo infinito (caso i).

Por lo tanto $\longleftarrow \ \xrightarrow{2} \ \searrow$ es de tipo infinito

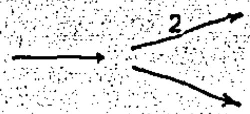
Si Γ es

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\delta"] & k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, "\theta"] \arrow[dr, "\gamma"] & l \arrow[d, "\beta"] \\
j & & m
\end{tikzcd}$$

El carcaj Γ_2'' es de la forma

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[dr] & & j \\
& k \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
l' & & m
\end{tikzcd}
$$

Aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_i^- obtendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de Γ_2'' y las representaciones inescindibles de $\sigma_i \Gamma_2'' = \Gamma_1''$.

Por lo tanto  es de tipo de representación infinito.

Si Γ es:

$$
\begin{tikzcd}
i & k \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] & l \arrow[d, "\beta"] \\
j \arrow[ur, "\theta"] & & m
\end{tikzcd}
$$

El carcaj Γ''_3 es de la forma

$$\begin{tikzcd}
i & & j \arrow[dl, "\theta"] \\
& k \arrow[ul, "\delta"'] \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
l' & & m
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_j^- obtenemos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de Γ''_3 y las representaciones inescindibles de $\sigma_j\ \Gamma''_3 = \Gamma''_1$.

Por lo tanto
$$\begin{tikzcd}
& & \cdot \\
\cdot & \cdot \arrow[l] \arrow[ur, "2"] & \\
& & \cdot \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$
es de tipo infinito.

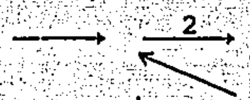
Si Γ es:

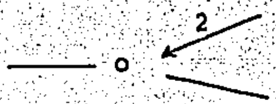
$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\delta"] & k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] & l \arrow[d, "\beta"] \\
j \arrow[u, "\theta"] & & m
\end{tikzcd}$$

El carcaj Γ''_4 es de la forma

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\delta"] & & j \arrow[dl, "\theta"'] \\ & k \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ l' & & m \end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_i^- obtendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de Γ_4'' y las representaciones inescindibles de $\sigma_i\ \Gamma_4'' = \Gamma_3''$.

Por lo tanto  es de tipo infinito.

vii) 

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, dash, "\delta"] & k \arrow[dl, dash, "\theta"] \arrow[dr, "\beta"'] & l \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ j & & m \end{tikzcd}$$

a) $l \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} m$ es exacta

b) β es un epimorfismo

Consideremos el carcaj Δ:

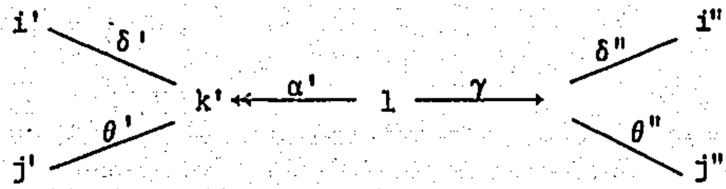
$$\begin{tikzcd}
 & l \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dd, "\alpha'"] & m & \\
i' \arrow[dr, dash, "\delta'"] & & & i'' \arrow[dl, dash, "\delta''"'] \\
 & k' & k'' \arrow[uu, "\beta'"] & \\
j' \arrow[ur, dash, "\theta'"'] & & & j'' \arrow[ul, dash, "\theta''"]
\end{tikzcd}$$

y el funtor $F:\mathrm{mod}\,k\Delta \longrightarrow \mathrm{mod}\,k\Gamma/\langle\rho\rangle$ (donde $\rho = \beta\alpha = 0$) descrito en la sección 2.1.

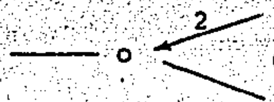
Por la proposición 2.5 el funtor F induce un funtor fiel y pleno $\overline{F}:\underset{\sim}{\mathrm{mod}}\,k\Delta \longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{mod}}\,k\Gamma/\langle\rho\rangle$ y por la proposición 2.7 sabemos que $M \in \mathrm{mod}\,k\Delta - C$ es inescindible sí y sólo sí FM es inescindible en $\mathrm{mod}\,k\Gamma/\langle\rho\rangle$. Pero en C solo hay un número finito de representaciones inescindibles (el doble de las representaciones inescindibles de $\circ \!<\!\begin{smallmatrix}\circ\\ \circ\end{smallmatrix}$).

Por lo tanto, en $\mathrm{mod}\,k\Gamma/\langle\rho\rangle$ tendremos, al menos, tantas representaciones inescindibles no isomorfas como representaciones inescindibles no isomorfas hay en $\mathrm{mod}\,k\Delta - C$.

Nos interesan las representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a) y b); estas corresponden, por el lema, a las representaciones de Δ en las que α' es un epimorfismo y β' es un isomorfimso. Esto es, las podemos ver como las representaciones de Δ' en las que α' es un epimorfismo.



Pero la categoría de representaciones de Δ' con α' epi contiene a la categoría de representaciones de Δ' con α' iso, esto es, a la categoría de representaciones del Dynkin extendido $\tilde{D}_6$ que sabemos que es de tipo de representación infinito.

Por lo tanto  es de tipo de representación infinita.

viii) $\xleftarrow{\ 2\ }\quad\xrightarrow{\ 2\ }$

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen:

a) $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta

b) $i \xrightarrow{\varepsilon} l \xrightarrow{\delta} m$ es exacta

c) β y δ son epimorfismos

$$\begin{tikzcd} j \arrow[d, "\beta"'] & i \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[dr, "\theta"'] & l \arrow[d, "\delta"] \\ k & & m \end{tikzcd}$$

Como $\beta\alpha = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ' de tal manera que el tipo de representación de Δ' y el tipo de representación de Γ con $\beta\alpha = 0$ coincide

$$\begin{tikzcd} l \arrow[dd, "\delta"'] & & \\ & i \arrow[ul, "\varepsilon"'] \arrow[dl, "\theta"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dd, "\alpha'"'] & k \\ m & & \\ & j' & j'' \arrow[uu, "\beta'"'] \end{tikzcd}$$

Nos interesan las representaciones de Γ en las que $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta y β es un epimorfismo y, por el lema, estas coinciden con las representaciones de Δ' en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo.

Como $\delta\varepsilon = 0$, por la proposición de Ringel podemos construir el carcaj Δ de tal manera que el tipo de representación de Δ y el tipo de representación de Δ' con $\delta\varepsilon = 0$ coincide

Δ:

$$\begin{tikzcd} m & & i \arrow[ll, "\theta"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dl, "\varepsilon'"'] \arrow[d, "\alpha'"] & k \\ l'' \arrow[u, "\delta'"] & l' & j & j \arrow[u, "\beta'"'] \end{tikzcd}$$

Las representaciones de Δ' en las que $i \xrightarrow{\varepsilon} l \xrightarrow{\delta} m$ es exacta y δ es un epimorfismo coinciden con las representaciones de Δ con las que ε' es un epimorfismo y δ' es un isomorfismo.

Por lo tanto, las representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a) b) y c) coinciden con las representaciones de Δ que satisfacen que δ' y β' son isomorfismos y ε' y α' son epimorfismos, ie, coinciden con las representaciones de (con ε' y α' epimorfismos)

$$\begin{tikzcd} m & & k \\ & i \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[dl, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \\ l' & & j' \end{tikzcd}$$

que por lo visto en ii) caso 1 es de tipo infinito.

Por lo tanto $\xleftarrow{\ 2\ }\quad\xrightarrow{\ 2\ }$ es de tipo de representación infinito.

$$\xleftarrow{\ 2\ } \circ \;\text{——}\;\; \text{——} \;\cdots\; \text{——} \;\; \xrightarrow{\ 2\ }$$

La categoría de representaciones de este policarcaj coincide con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{tikzcd}
j \arrow[d, "\beta"'] & i \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \cdots \circ \arrow[r, dash] & \overset{l}{\circ} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\theta"'] & m \arrow[d, "\delta"] \\
k & & & & & n
\end{tikzcd}$$

a) $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta

b) $l \xrightarrow{\varepsilon} m \xrightarrow{\theta} n$ es exacta

c) β y δ son epimorfismos

Por la proposición de Ringel el tipo de representación de Γ con $\beta\alpha = 0$ y $\delta\varepsilon = 0$ coincide con el tipo de representación de Δ

$$\begin{tikzcd}
k & i \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[r, no head] \arrow[d, "\alpha'"] & o \arrow[r, no head] & o \cdots o \arrow[r, no head] & o \arrow[r, no head] & l \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & n \\
j'' \arrow[u, "\beta'"] & j' & & & & m' & m'' \arrow[u, "\delta'"']
\end{tikzcd}$$

Como nos interesan las representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a), b), c), estas coinciden con las representaciones de Δ que satisfacen que β' y δ' son isomorfismos y α' y ε' son epimorfismos.

Si en las flechas intermedias ponemos identidades, reduciremos este caso al caso anterior que vimos que era de tipo infinito, por lo tanto $\xleftarrow{2} \cdots \xrightarrow{2}$ es de tipo de representación infinito.

ix) $\xrightarrow{2} \quad \xrightarrow{2}$

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta

b) $j \xrightarrow{\delta} l \xrightarrow{\varepsilon} m$ es exacta

c) β y ε son epimorfismos

$$\begin{tikzcd} i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & j \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\theta"'] & & l \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & & m & \end{tikzcd}$$

Como $\varepsilon\delta = 0$, por la proposición de Ringel, podemos construir el carcaj Δ' de tal manera que el tipo de representación de Δ' y el tipo de representación de Γ con $\varepsilon\delta = 0$ coincide

$$\begin{tikzcd} i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & j \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dl, "\beta"] \arrow[d, "\delta'"] & & m \\ & k & l' & l'' \arrow[ur, "\varepsilon'"] & \end{tikzcd}$$

Como nos interesan las representaciones de Γ en las que $j \xrightarrow{\delta} l \xrightarrow{\varepsilon} m$ es exacta y ε es un epimorfismo, estas coinciden con las representaciones de Δ' en las que δ' es un epimorfismo y ε' un isomorfismo.

Sea Δ el carcaj:

$$\begin{tikzcd}
 & & i \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"'] & k & & \\
l^{IV} \arrow[r, "\varepsilon''"] & m' & j' \arrow[l, "\theta'"'] \arrow[d, "\delta''"] & j'' \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[r, "\theta''"] \arrow[d, "\delta'''"] & m'' & l^{VI} \arrow[l, "\varepsilon'''"'] \\
 & & l''' & l^{V} & &
\end{tikzcd}$$

y sea $F : \operatorname{mod} k\Delta \longrightarrow \operatorname{mod} k\Delta'/\langle\rho\rangle$ $(\rho = \beta\alpha = 0)$ el funtor definido en la sección 2.1.

Por la proposición 2.5, 2.7 y 2.8 tendremos en $\operatorname{mod} k\Delta'/\langle\rho\rangle$, al menos, tantas representaciones inescindibles como representaciones inescindibles hay en $\operatorname{mod} k\Delta\setminus C$.

Las representaciones de Δ' en las que $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta y β es un epimorfismo se corresponden con las representaciones de Δ en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo.

Por lo tanto nos interesan las representaciones de Δ en las que ε'', ε''' y β' son isomorfismos y α', δ'' y δ''' son epimorfismo, que coinciden con las representaciones de

Δ''' con α', δ'', δ''' epimorfismos

$$\begin{tikzcd}
m' & & & & m'' \\
& j \arrow[ul, "\theta'"'] \arrow[dl, "\delta''"] & i \arrow[l, two heads, "\alpha'"'] \arrow[r, "\gamma"] & {} \arrow[ur, "\theta''"] \arrow[dr, "\delta'''"'] & \\
l''' & & & & l^{IV}
\end{tikzcd}$$

Pero la categoría de Δ''' con α', δ'', δ''' epimorfismos contiene a la categoría de representaciones de Δ''' en la que α' y γ son isomorfismos y δ'' y δ''' son epimorfismos que es de tipo infinito por lo visto en ii) caso 1.

Por lo tanto $\xrightarrow{2} \xrightarrow{2}$ es de tipo de representación infinito.

Por un razonamiento análogo al del caso viii) podemos reducir el caso $\xrightarrow{2}$ - - - — - - — — — — $\xrightarrow{2}$ a este caso.

x) $\xrightarrow{2} \xleftarrow{2}$

Las representaciones de este policarcaj coinciden con las representaciones del carcaj Γ:

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & j \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\theta"'] & & l \arrow[ll, "\delta"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& k & & m &
\end{tikzcd}$$

que satisfacen

a) $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ es exacta

b) $l \xrightarrow{\delta} j \xrightarrow{\theta} m$ es exacta

c) β y θ son epimorfismos.

Sea D la categoria de representaciones del carcaj $\cdot \rightrightarrows \cdot$ que sabemos que es de tipo infinito [Gn] y sea F la subcategoría plena de representaciones de Γ que satisfacen las condiciones a), b), c).

Definimos un funtor $G : D \longrightarrow F$ de las siguiente forma :

i) en los objetos: si $V \underset{S}{\overset{T}{\rightrightarrows}} W$ es un objeto en D

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "T"'] & & V\oplus W \arrow[dl, "{(0,1)}"] \arrow[dr, "{(0,1)}"'] & & V \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "S"] \\
& W & & W &
\end{tikzcd}$$

es un objeto en F.

ii) en los morfismos.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, shift left, "T_1"] \arrow[r, shift right, "S_1"'] \arrow[d, "f"'] & W_1 \arrow[d, "g"] \\
V_2 \arrow[r, shift left, "T_2"] \arrow[r, shift right, "S_2"'] & W_2
\end{tikzcd}
\xrightarrow{\quad G \quad}
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "T_1"'] \arrow[dd, "f"'] & & V_1\oplus W_1 \arrow[dl, "{(0,1)}"] \arrow[dr, "{(0,1)}"'] \arrow[dd, "{\begin{bmatrix}f&0\\0&g\end{bmatrix}}"] & & V_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "S_1"] \arrow[dd, "f"] \\
& W_1 \arrow[dd, "g"] & & W_1 \arrow[dd, "g"] & \\
V_2 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "T_2"'] & & V_2\oplus W_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"] \arrow[dr, "{(0,1)}"'] & & V_2 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "S_2"] \\
& W_2 & & W_2 &
\end{tikzcd}$$

Si $V = (V_1 \overset{T_1}{\underset{T_2}{\rightrightarrows}} V_2)$ y $W = (W_1 \overset{S_1}{\underset{S_2}{\rightrightarrows}} W_2)$ son dos objetos en D y $\varphi \in \operatorname{Hom}(GV, GW)$ entonces $\varphi = G(\psi) + \varphi''$ donde φ'' es nilpotente. Veamoslo:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] \arrow[dr, "T_1"] \arrow[dd, "\varphi_1"'] & & V_1 \oplus V_2 \arrow[dl, "(0,1)"'] \arrow[dr, "(0,1)"] \arrow[dd, "\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{bmatrix}"] & & V_1 \arrow[ll, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] \arrow[dl, "T_2"'] \arrow[dd, "\varphi_4"] \\
& V_2 \arrow[dd, "\varphi_2"] & & V_2 \arrow[dd, "\varphi_3"] & \\
W_1 \arrow[rr, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"] \arrow[dr, "S_1"'] & & W_1 \oplus W_2 \arrow[dl, "(0,1)"'] \arrow[dr, "(0,1)"] & & W_2 \arrow[ll, "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] \arrow[dl, "S_2"] \\
& W_2 & & W_2 &
\end{tikzcd}$$

Como φ es un morfismo de representaciones tendremos

$$\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\varphi_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_1\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \varphi_{11} = \varphi_1 & \text{a)}\\ \varphi_{21} = 0 & \text{b)}\end{array}$$

$$\varphi_2 T_1 = S_1 \varphi_1 \qquad \text{c)}$$

$$\varphi_2 (0,1) = (0,1) \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow (0,\varphi_2) = (\varphi_{21}, \varphi_{22}) \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_{22} \quad \text{d)}$$

$$\varphi_3 (0,1) = (0,1) \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow (0,\varphi_3) = (\varphi_{21}, \varphi_{22}) \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_{22} \quad \text{e)}$$

$$\varphi_3 T_2 = S_2 \varphi_4 \qquad \text{f)}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_{11} = \varphi_4 \qquad \text{g)}$$

De a) y g) tendremos

$$\varphi_1 = \varphi_{11} = \varphi_4$$

De d) e)

$$\varphi_2 = \varphi_{22} = \varphi_3$$

Por lo tanto, a φ lo podemos ver como

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "T_1"] \arrow[dd, "\varphi_1"'] & & V_1\oplus V_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"'] \arrow[dr, "{(0,1)}"] \arrow[dd, "{\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_{12}\\ 0 & \varphi_2\end{bmatrix}}"] & & V_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "T_2"'] \arrow[dd, "\varphi_1"] \\
& V_2 \arrow[dd, "\varphi_2"] & & V_2 \arrow[dd, "\varphi_2"] & \\
W_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "S_1"'] & & W_1\oplus W_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"] \arrow[dr, "{(0,1)}"'] & & W_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "S_2"] \\
& W_2 & & W_2 &
\end{tikzcd}
=
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "T_1"] \arrow[dd, "\varphi_1"'] & & V_1\oplus V_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"'] \arrow[dr, "{(0,1)}"] \arrow[dd, "{\begin{bmatrix}\varphi_1 & 0\\ 0 & \varphi_2\end{bmatrix}}"] & & V_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "T_2"'] \arrow[dd, "\varphi_1"] \\
& V_2 \arrow[dd, "\varphi_2"] & & V_2 \arrow[dd, "\varphi_2"] & \\
W_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "S_1"'] & & W_1\oplus W_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"] \arrow[dr, "{(0,1)}"'] & & W_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "S_2"] \\
& W_2 & & W_2 &
\end{tikzcd}
+
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "T_1"] \arrow[dd, "0"'] & & V_1\oplus V_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"'] \arrow[dr, "{(0,1)}"] \arrow[dd, "{\begin{bmatrix}0 & \varphi_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}}"] & & V_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "T_2"'] \arrow[dd, "0"] \\
& V_2 \arrow[dd, "0"] & & V_2 \arrow[dd, "0"] & \\
W_1 \arrow[rr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] \arrow[dr, "S_1"'] & & W_1\oplus W_2 \arrow[dl, "{(0,1)}"] \arrow[dr, "{(0,1)}"'] & & W_1 \arrow[ll, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[dl, "S_2"] \\
& W_2 & & W_2 &
\end{tikzcd}
$$

ie, $\varphi = \varphi' + \varphi''$. Pero dado φ', existe $\psi : V \longrightarrow W$ tal que $G\psi = \varphi'$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \overset{T_1}{\underset{T_2}{\rightrightarrows}} & V_2 \\ {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ W_1 & \overset{S_1}{\underset{S_2}{\rightrightarrows}} & W_2 \end{array}$$

$\therefore \quad \varphi = G(\psi) + \varphi''$ donde $(\varphi'')^2 = 0$

Recordemos, de la sección (0.2) que el radical de Jacobson de F es

$$\mathrm{rad}_F(V,W) = \{f \in \mathrm{Hom}_F(V,W) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}(W,V) \; gf \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}\, V)\}$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_F(V,W) \mid \forall h \in \mathrm{Hom}(W,V) \; fh \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}\, W)\}$$

es un ideal de F.

Construyamos la categoria cociente $\widetilde{F} = F / \mathrm{rad}F$

ie, los objetos de $\widetilde{F} = \mathrm{obj}\, F$

y si $V, W \in \mathrm{obj}\, \widetilde{F}$ $\mathrm{Hom}_{\widetilde{F}}(V,W) = \mathrm{Hom}_F(V,W) / \mathrm{rad}_F(V,W)$

El funtor $G : D \longrightarrow F$ induce un funtor $\overline{G} : D \longrightarrow \widetilde{F}$ definido de la siguiente forma : si $V \in \mathrm{obj}\, D$, $\overline{G}V = GV$ y si $V, W \in \mathrm{obj}\, D$ y $f \in \mathrm{Hom}_D(V,W)$ entonces $\overline{G}f = \overline{Gf} \in \mathrm{Hom}_F(GV,GW) \big/ \mathrm{rad}_F(GV,GW)$.

El funtor $\overline{G}$ tiene las siguientes propiedades:

i) $\overline{G}$ es un funtor aditivo

ii) $\overline{G}$ es un funtor pleno

iii) Si $P, Q \in \mathrm{obj}$ en D tales que $\overline{G}P \simeq \overline{G}Q$ entoces $P \simeq Q$

iv) Si M es inescindible en D entonces $\overline{G}M$ es inescindible en $\widetilde{F}$.

Las demostraciones de estas propiedades son triviales. Unicamente demostraremos ii).

Sean $V, W \in \mathrm{obj}\, D$ y sea $\varphi : GV \longrightarrow GW$. Sabemos que $\varphi = G(\psi) + \varphi''$ donde φ'' es 0 en toda las flechas excepto en una en donde es de la forma $\begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si $\varphi'' \notin \mathrm{rad}_F(GV,GW)$ existe $g \in \mathrm{Hom}_F(GW,GV)$ tal que $g\,\varphi'' \notin \mathrm{rad}(\mathrm{End}\, GV)$.

$(g\varphi'')_i = 0$ en todas la flechas excepto en una en donde es de la forma

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{11}h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pero $fg\varphi''$ es cuasi-regular para todo $f \in \mathrm{End}\, GV$ $[(1+fg\varphi'')(1-fg\varphi'')] = 1$. ∇ contradicción

Por lo tanto $\varphi'' \in \mathrm{rad}_F(GV\ GW)$, ie, $\overline{\varphi} = \overline{G(\psi)} = \overline{G}(\psi) \in \widetilde{F}$ ie, $\overline{G}$ es pleno.

Como $\widetilde{F}$ resulta de tipo infinito, F también es, ie, $\xrightarrow{2}$ $\xleftarrow{2}$ es de tipo infinito.

CAPITULO 3

En este capítulo construiremos el carcaj de Auslander-Reiten de los policarcajes de tipo finito que tienen flechas de peso mayor o igual a 2, esto es G_2, F_4, B_1, C_1.

En el capítulo 1 vimos a la categoría de representaciones de un policarcaj como una subcategoría plena de la categoría de representaciones de cierto carcaj con relaciones: (Γ,ρ).

En el capítulo 2 vimos, en la sección 2.2, que ciertas relaciones cero pueden separarse y así se obtiene un carcaj Δ, sin relaciones, que tiene el mismo tipo de representación que (Γ,ρ). En la sección 2.3 vimos que si el policarcaj es un diagrama Dynkin, las relaciones cero que aparecen en el carcaj asociado, se pueden separar y el carcaj que se obtiene al hacerlo es de tipo finito. Por lo tanto la categoría de representaciones de estos policarcajes, por ser una subcategoría de una categoría de tipo finito, es de tipo finito.

Para construir el carcaj de A. R., de un policarcaj de tipo finito, construiremos primero el carcaj de A.R. de Δ por medio del proceso descrito en el capítulo 0. Utilizando los resultados de la sección 2.2, construiremos el carcaj de A.R. de (Γ,ρ). En algunos casos nos resultará útil construir el carcaj de A.R. de Δ' que es la subcategoría plena de representaciones de Δ que se identifica con las representaciones del policarcaj (aunque en esta gráfica no aparecen todos los morfismos irreducibles).

Para construir todas las gráficas de A.R. de cierto policarcaj, fijaremos una orientación, construiremos su gráfica y mediante los funtores de Coxeter parciales descritos en 0.3, construiremos las gráficas asociadas a las distintas orientaciones del policarcaj.

1. <u>Gráfica del Policarcaj</u> G_2: $\xrightarrow{3}$

La categoría de representaciones de este policarcaj es equivalente a la subcategoría plena de representaciones del carcaj Γ :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[ddr, "\theta"'] & j \arrow[d, "\beta"] \\ & k \arrow[d, "\delta"] \\ & l \end{tikzcd}$$

que satisfacen i) $I m\alpha = \operatorname{Ker} \beta$

ii) $I m\gamma = \operatorname{Ker} \delta$

iii) β y δ son epimorfismos

Por la proposición de Ringel sabemos que la categoría de representaciones de Γ con $\delta\gamma = 0$ y $\beta\alpha = 0$ tiene el mismo tipo de representación que la categoría de representaciones de Δ:

$$\begin{tikzcd} & & j' & & & \\ j''' \arrow[r, "\beta''"] & k' & i \arrow[l, "\gamma'"'] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[r, "\theta"] & l & k'' \arrow[l, "\delta'"'] & j^* \arrow[l, "\beta'''"'] \end{tikzcd}$$

y pedir las condiciones i) ii) y iii) es equivalente a pedir que β'', β''' y δ sean isomorfismos y α' y γ' sean epimorfismos.

La gráfica 1.1 es la gráfica de A.R. de Δ .

La gráfica 1.2 es la gráfica de A.R. de Γ con $\delta\gamma = 0$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[rr, "\alpha'"] \arrow[dd, "\theta"'] \arrow[ddrr, "\gamma"] & & j' & \\
& & & j'' \arrow[dl, "\beta'"] \\
l & & k \arrow[ll, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

Esta gráfica la podemos obtener de la gráfica 1.1 identificando $FT_{49} = FP_{k'}$, $FI_{k''} = FP_{j'''}$, $FI_{j'''} = FI_{j*}$.

Los morfismos $P_{k'} \longrightarrow I_{j'''}$ y $T_{49} \longrightarrow I_{k''}$ se identifican con el morfismo (Prop. 2.14)

$FT_{49} = FP_{k'} \longrightarrow FI_{k''} = FP_{j'''}$ y no existe ningún morfismo diferente de 0 de $FI_{k''} \longrightarrow FI_{j*}$, ie, el morfismo $I_{k''} \longrightarrow I_{j*}$ desaparece al aplicar el funtor F.

La gráfica 1.3 es la gráfica de A.R. de Γ con $\beta\alpha = 0$ y $\delta\gamma = 0$. Esta gráfica la podemos obtener de la gráfica 1.2 identificando $F^2P_{j'} = F^2I_{j'''} = F^2I_{j*}$.

Como nos interesa la subcategoría plena de Δ que satisface que β'', β''' y δ sean isomorfismos, esta resulta equivalente a la categoría de representaciones de Δ'

$$\begin{tikzcd} j' & & \\ & i \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r] & 1 \\ k' & & \end{tikzcd}$$

La gráfica 1.4 es la gráfica de A.R. de Δ', está es una gráfica auxiliar que nos permite distinguir los morfismos irreducibles en la subcategoría de Δ que se identifica con las representaciones del policarcaj G_2.

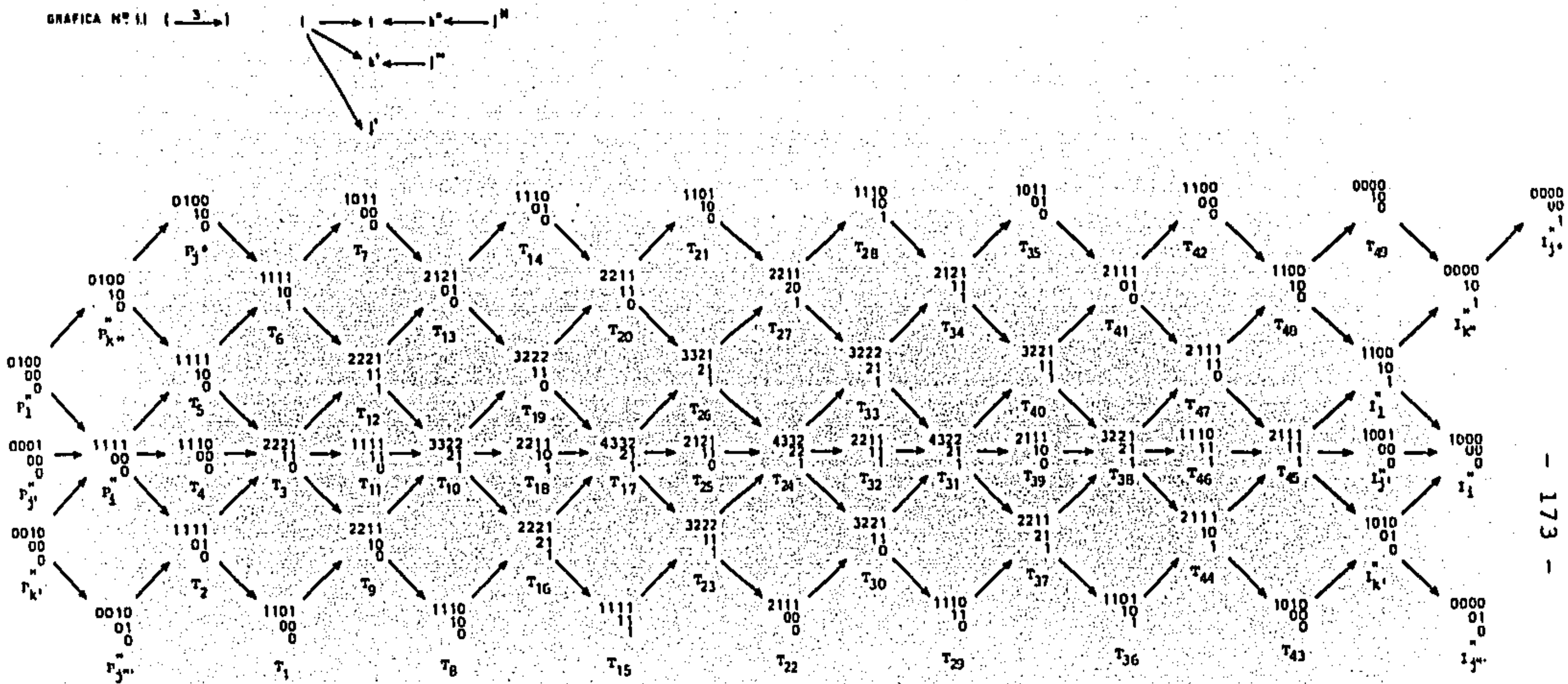
La gráfica 1.5 es la gráfica de A.R. del policarcaj

$G_2 : \xrightarrow{3}$.

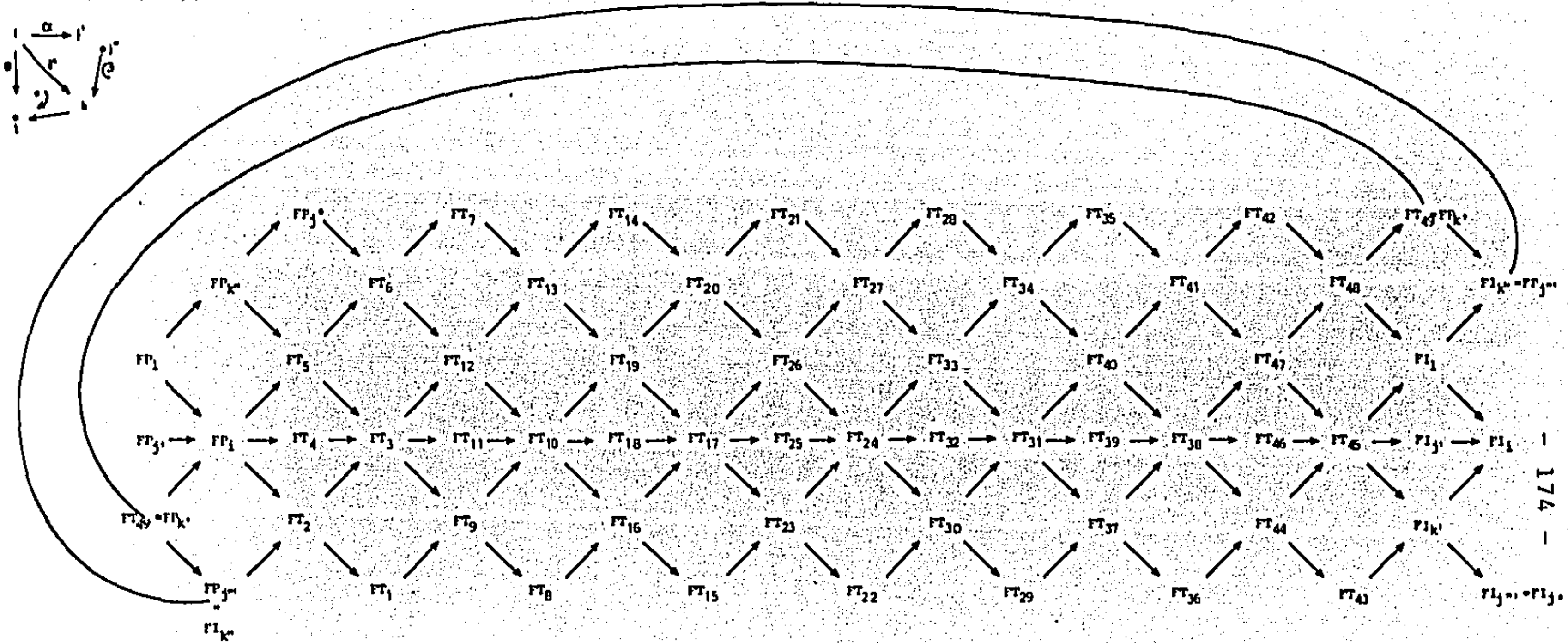
Las representaciones inescindibles proyectivas, es decir, las representaciones que no tienen una sucesión que casi se divide que termine en ellas son: F^2P_{j*}, F^2T_{15}, F^2T_{36} y F^2T_{46}.

Las representaciones inescindibles inyectivas, es decir, las representaciones que no tienen una sucesión que casi se divide que termine en ellas son: F^2I_1, $F^2I_{j'}$, $F^2I_{k'}$ y F^2I_i y aparece un nuevo morfismo irreducible $F^2I_1 \longrightarrow F^2T_{15}$.

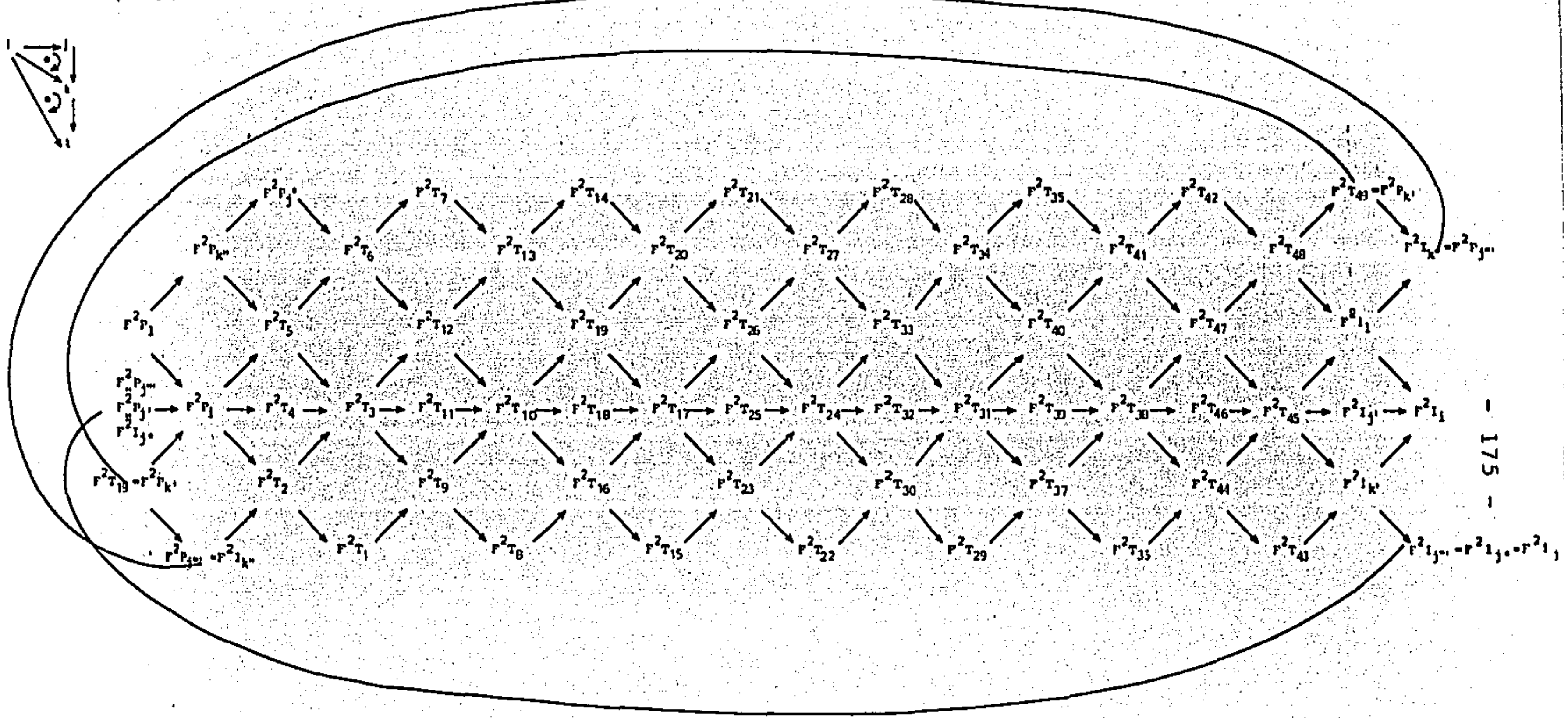
GRAFICA Nº 11



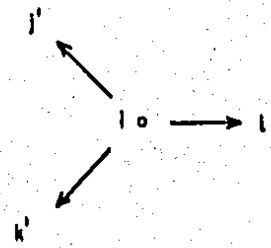
GRAFICA Nº 12 ($\xrightarrow{3}$)

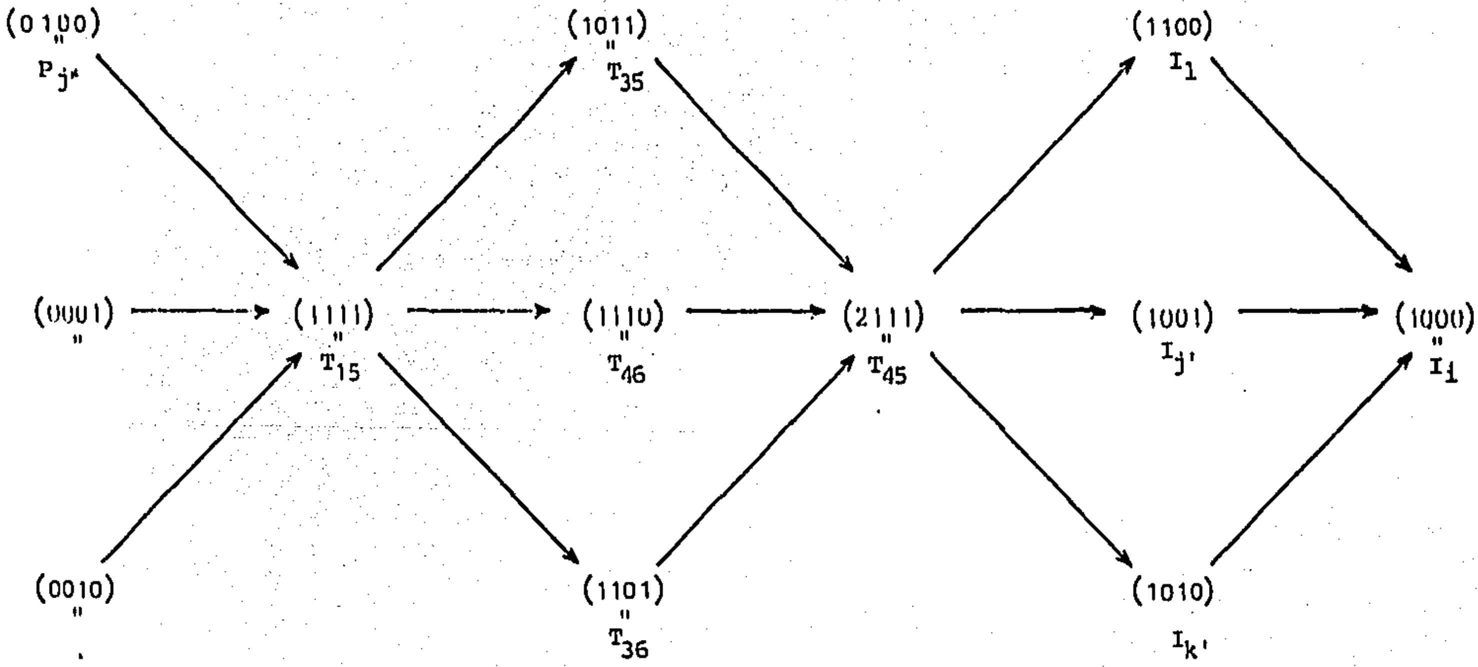


GRAFICA Nº 1.5 (—3→)



GRAFICA Nº 1.4
GRAFICA AUXILIAR
($\xrightarrow{3}$)





GRAFICA Nº 1.5 $\xrightarrow{3}$

$$
\begin{tikzcd}
F^2P_{j*} \arrow[dr] & & F^2T_{35} \arrow[dr] & & F^2I_l \arrow[dr] \arrow[dlll, bend right] & \\
& F^2T_{15} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & F^2T_{46} \arrow[r] & F^2T_{45} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & F^2I_{j'} \arrow[r] & F^2I_i \\
& & F^2T_{36} \arrow[ur] & & F^2T_{k'} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

2. Graficas del Policarcaj $F_4 \; \circ \!-\!\!-\!\!-\! \circ \xrightarrow{\;2\;} \circ \!-\!\!-\!\!-\! \circ$

La categoria de representaciones de este policarcaj es equivalente a la subcategoría plena de representaciones del carcaj Γ:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & 4 \arrow[r, dash] \arrow[d, "\beta"] & 5 \\
 & & 3 &
\end{tikzcd}$$

que satisfacen i) $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$

ii) β es un epimorfismo

Por la proposición Ringel sabemos que la categoría de representaciones de Γ con $\beta\alpha = 0$ tiene el mismo tipo de representación que la categoria de representaciones de Δ:

$$\begin{tikzcd}
1 & & & \\
 & 2 \arrow[ul, dash] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & 3 & \\
5'' \arrow[r, dash] & 4'' & 4' \arrow[u, "\beta'"] \arrow[r, dash] & 5'
\end{tikzcd}$$

y pedir las condiciones i) y ii) es equivalente a pedir que α' sea epimorfismo y β' sea isomorfismo.

<u>Caso 1</u>

$$\overline{F}_4 \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r] & \overset{\circ}{j} \arrow[r, "2"] & \overset{\circ}{k} \arrow[r] & l \end{tikzcd}$$

La gráfica 2.1.1 es la gráfica de A.R. de Δ:

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[dr] & & & \\ & \overset{2}{\circ} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{3}{\circ} & \\ \underset{5''}{\circ} & \underset{4''}{\circ} \arrow[l] & \underset{4'}{\circ} \arrow[u] \arrow[r] & \underset{5'}{\circ} \end{tikzcd}$$

La gráfica 2.1.2 es la gráfica de A.R. de Γ con $\beta\,\alpha = 0$. Esta gráfica la obtenemos de la gráfica anterior identificando $FP_{5''} = FP_{5'}$, $FP_{4''} = FI_{5'}$ y $FI_{4'} = FM_1$.

Los morfismos $P_{4''} \longrightarrow M_1$ y $I_{5'} \longrightarrow I_{4'}$ se identifican con el morfismo $FP_{4''} = FI_5 \longrightarrow FM_1 = FI_{4'}$.

El morfismo $P_{5''} \longrightarrow P_{4''}$ al aplicarle la F, desaparece.

Como nos interesa la subcategoría plena de Δ, que satisface que β' es un isomorfismo, esta resulta equivalente a la categoría de representaciones de

Δ_1^1 :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] & 5' \\ & & 4'' \arrow[r] & 5'' \end{tikzcd}$$

La gráfica 2.1.3 es una gráfica auxiliar que nos permite distinguir, los morfismos irreducibles de esta subcategoria.

La gráfica 2.1.4 es la gráfica de Auslander-Reiten del policarcaj $\overline{F}_4 \quad \longrightarrow \xrightarrow{2} \longrightarrow .$

Las representaciones proyectivas, es decir, las representaciones que no tienen una sucesión que casi se divide que termine en ellas son:

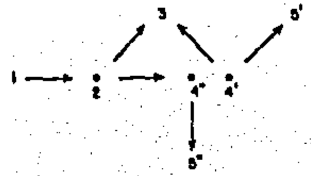
$$FP_{5'} = FP_{5''}, FP_{4'}, FM_4, FM_{15}, FM_{27}$$

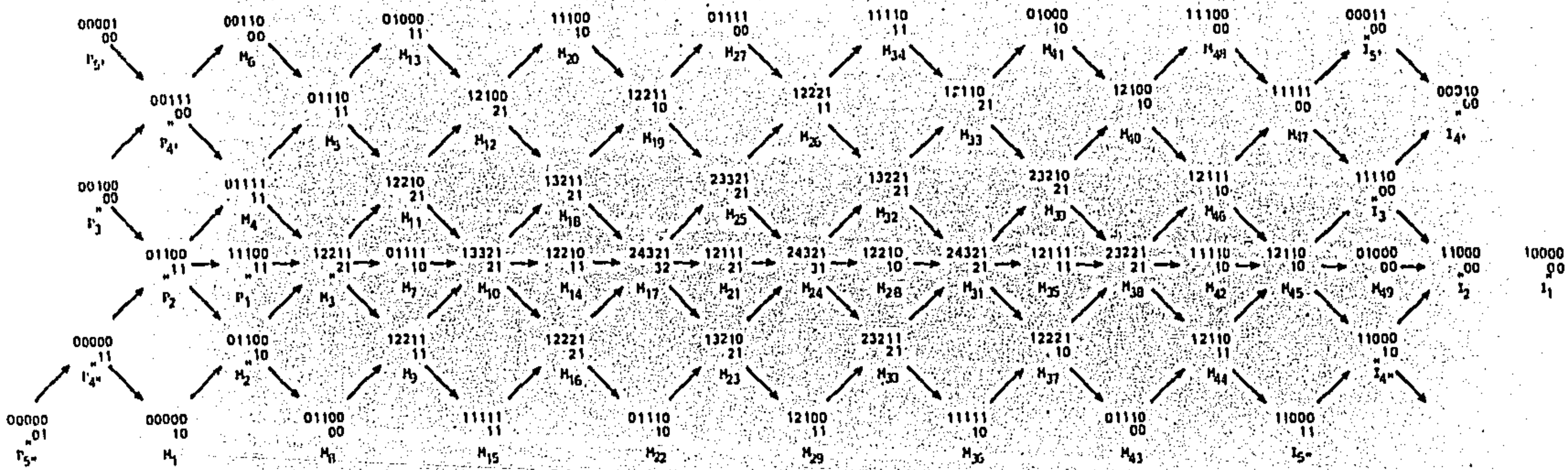
Las representaciones inyectivas, es decir, las representaciones que no tienen una sucesión que casi se divide que empiece en ellas son:

$FI_{5''}$, $FI_{4''}$, FI_2, FI_1, FI_3. Tendremos dos nuevos morfismos irreducibles $FM_{47} \longrightarrow FM_4$ y $FI_3 \longrightarrow FM_7$ y aparece una nueva sucesión que casí se divide.

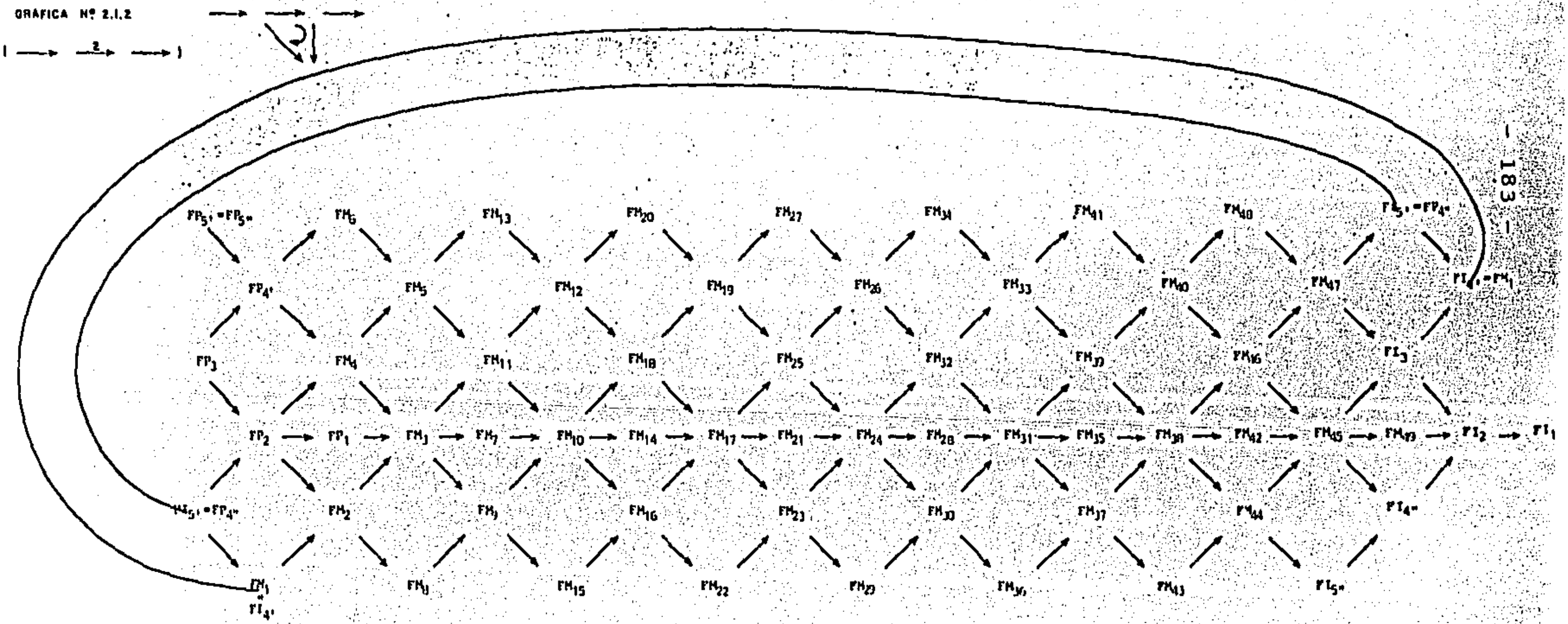
$$\begin{tikzcd}
 & FI_3 \arrow[dr] & \\
FM_{47} \arrow[ur] \arrow[dr] & & FM_7 \\
 & FM_4 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

GRAFICA Nº 2.1.1

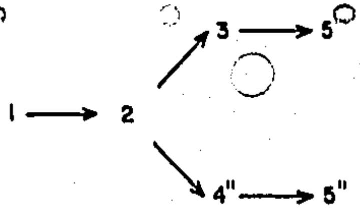




GRAFICA Nº 2.1.2

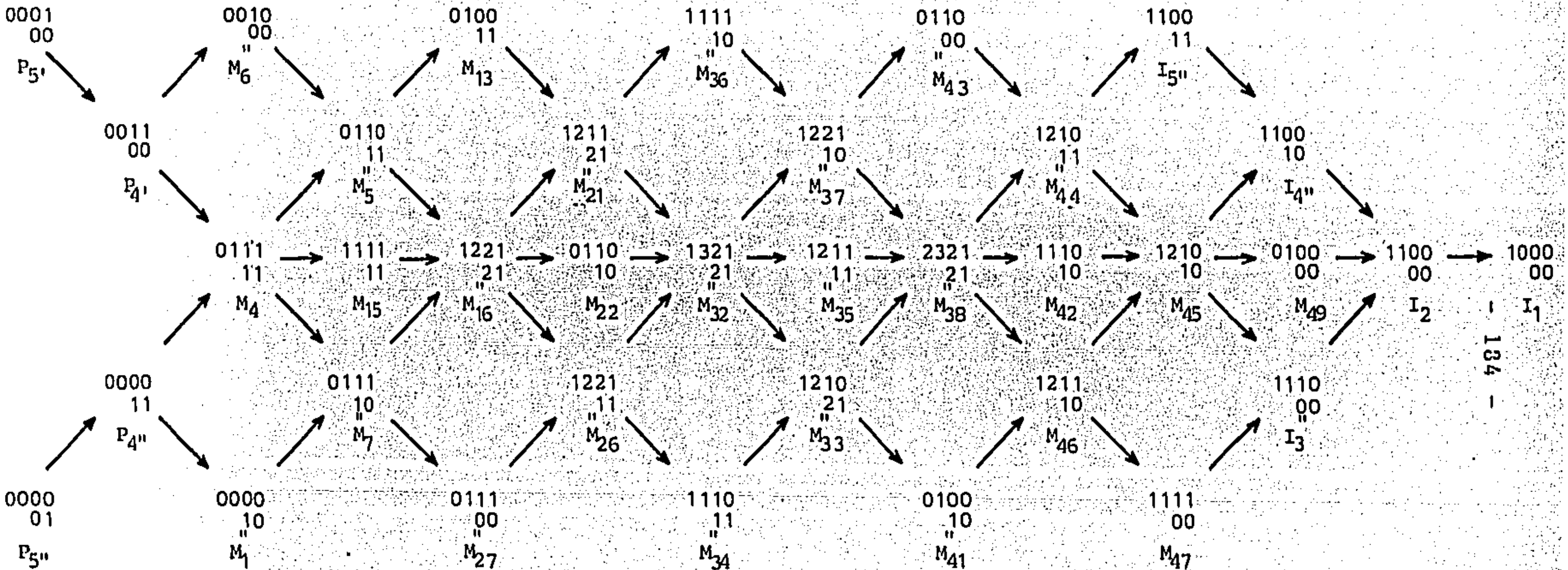


GRAFICA Nº 2.1.3



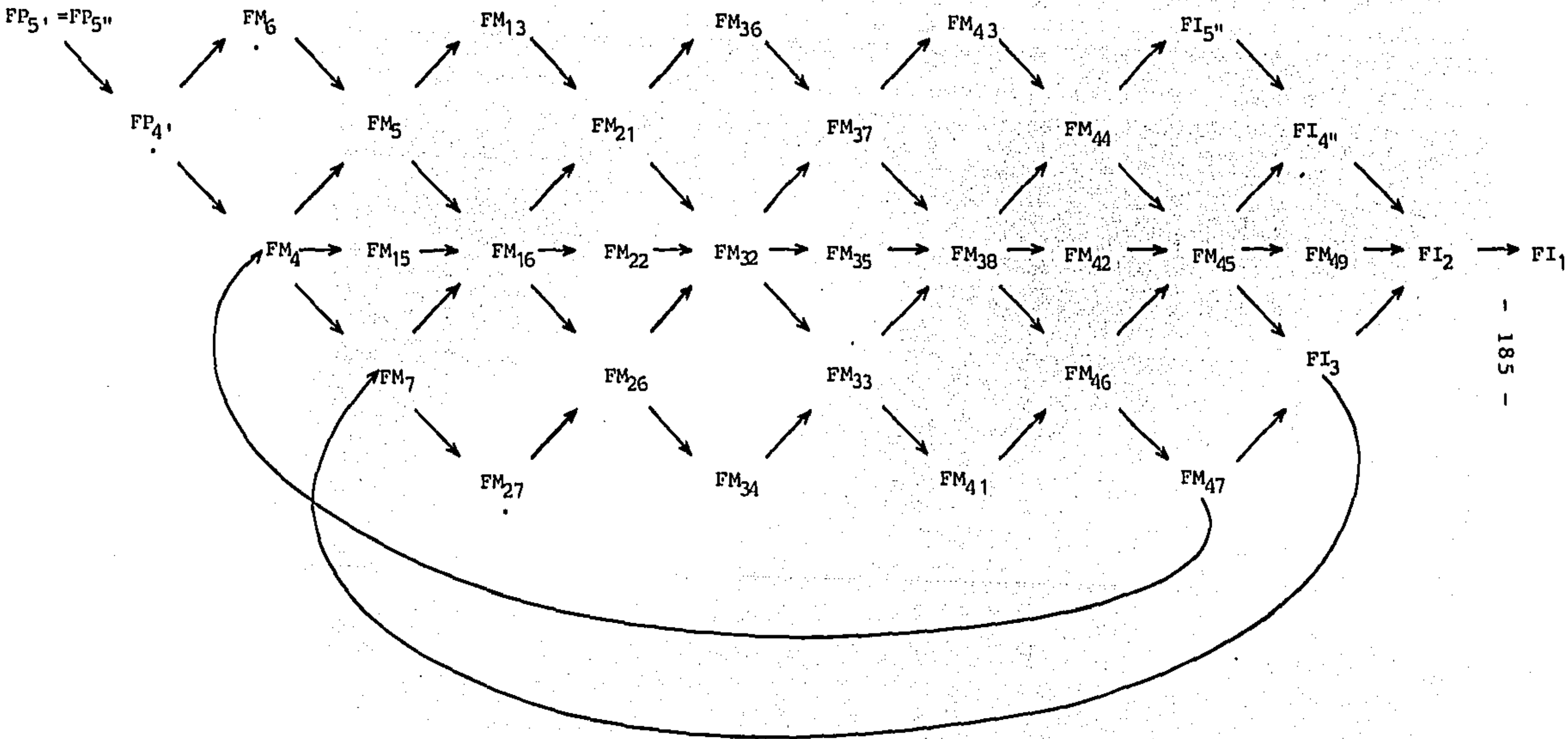
$(\longrightarrow \xrightarrow{2} \longrightarrow)$

GRAFICA AUXILIAR



GRAFICA Nº 2.1.4

$1 \longrightarrow 2 \xrightarrow{2} 3 \longrightarrow 4$



Caso 2

$$i \longrightarrow \underset{j}{\circ} \xrightarrow{2} \underset{k}{\circ} \longleftarrow 1$$

La gráfica de Auslander Reiten de F_4 con esta orientación la podemos obtener aplicando un funtor de Coxeter parcial izquierdo a $\overline{F}_4$.

Observemos que el vértice 1 es un pozo de $\overline{F}_4$, por lo tanto la gráfica de $\sigma_1\overline{F}_4$ la podemos obtener aplicando la técnica descrita en 0.3.

$FP_{5'}$ es un simple proyectivo no inyectivo de $\overline{F}_4$ y $T=(0,0,0,1)$ es un simple inyectivo no proyectivo de $\sigma_1\overline{F}_4$. Entonces tendremos el funtor de Coxeter parcial izquierdo $S_1^+ : \mathrm{mod}\ \overline{F}_4 \longrightarrow \mathrm{mod}\ \sigma_1\overline{F}_4$, donde $S_1^+(FP_5)=0$ y que tiene las siguientes propiedades:

1) $\{S_1^+(\mathrm{tr}\,D\,FP_{5'}) = S_1^+(FM_6),\ S_1^+(FP_{4'}),\ S_1^+(FM_4);\ S_1^+(FM_{15}),$
$S_1^+(FM_{27})\}$.

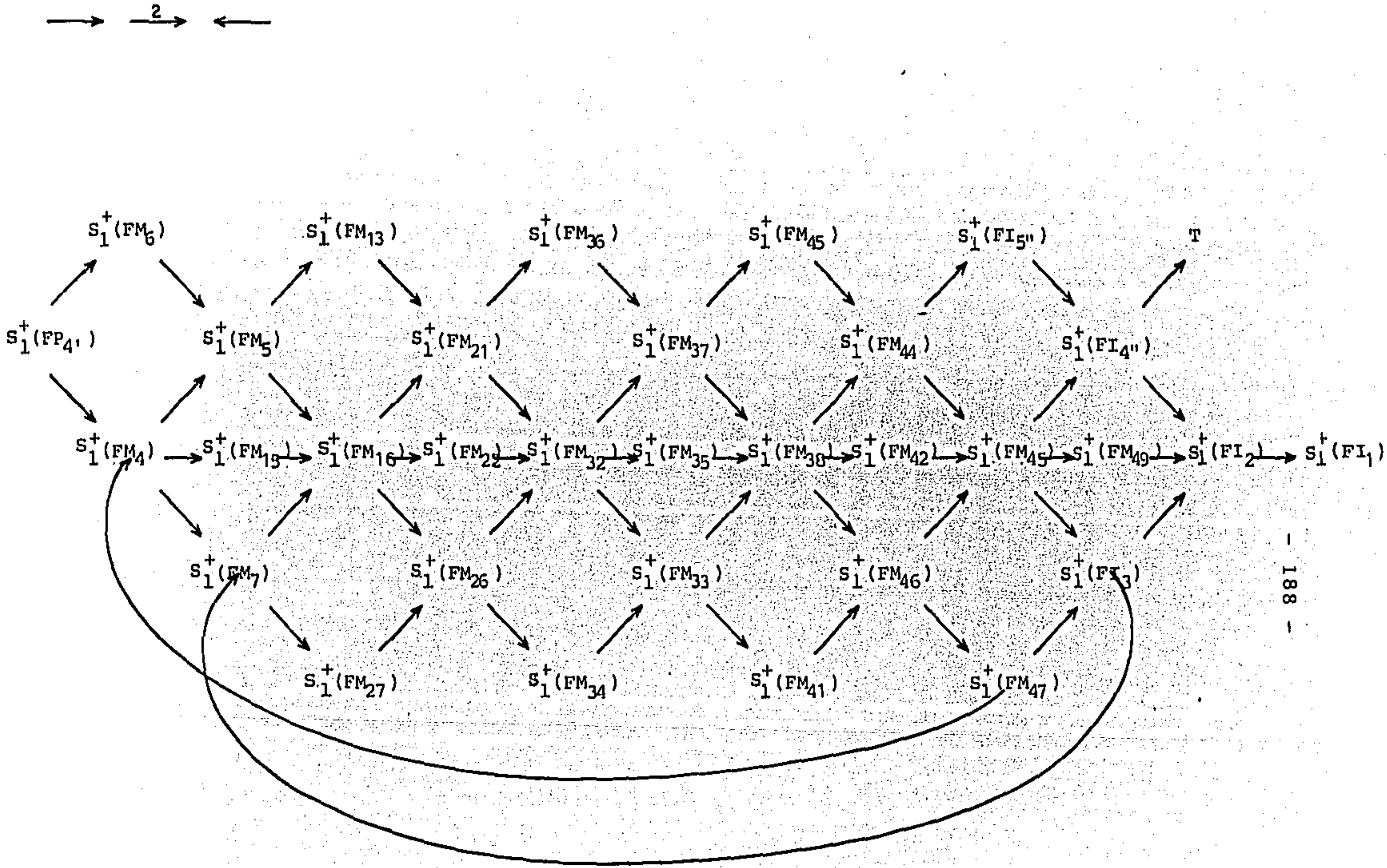
es un conjunto completo de proyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\ \sigma_1\overline{F}_4$.

2) Como $FI_{5''}$ es la envolvente inyectiva de $FP_{5'}$, entonces $\{T, S_1^+(FI_{4''}),\ S_1^+(FI_2),\ S_1^+(FI_1),\ S_1^+(FI_3)\}$

es un conjunto completo de inyectivos inescindibles de mod $\sigma_1\overline{F}_4$ y $S_1^+(FI_{5''}) = D\,tr\,T$

3) Si $A \in \mathrm{mod}\ \overline{F}_4$ es un módulo inescindible no inyectivo y no isomorfo a $FP_{5'}$ y $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander Reiten en mod $\overline{F}_4$ entonces $0 \longrightarrow S_1^+ A \longrightarrow S_1^+ B \longrightarrow S_1^+ C \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander Reiten en mod $\sigma_1\overline{F}_4$.

GRAFICA Nº 2.2.1



Caso 3 $\longleftarrow \circ \xrightarrow{2} \circ \longrightarrow$

La gráfica de A.R. de F_4 con esta orientación la podemos obtener aplicando un funtor de Coxeter parcial derecho a $\overline{F}_4$.

Como el vértice i es una fuente de $\overline{F}_4$, FI_i es un simple inyectivo no proyectivo, $S_i = (1\ 0\ 0\ 0)$ es un simple proyectivo no inyectivo de $\sigma_i \overline{F}_4$. Entonces tendremos un funtor de Coxeter parcial derecho

$S_i^- : \mathrm{mod}\ \overline{F}_4 \longrightarrow \mathrm{mod}\ \sigma_i \overline{F}_4$ tal que $S_i^-(FI_i) = 0$ y que tiene las siguientes propiedades:

1) $\{S_i^-(D\,tr(FI_i)) = S_i^-(FM_{49}),\ S_i^-(FI_{5''}),\ S_i^-(FI_{4''}),$

$S_i^-(FI_2),\ S_i^-(FI_3)\}$

es un conjunto completo de inyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\ \sigma_i \overline{F}_4$

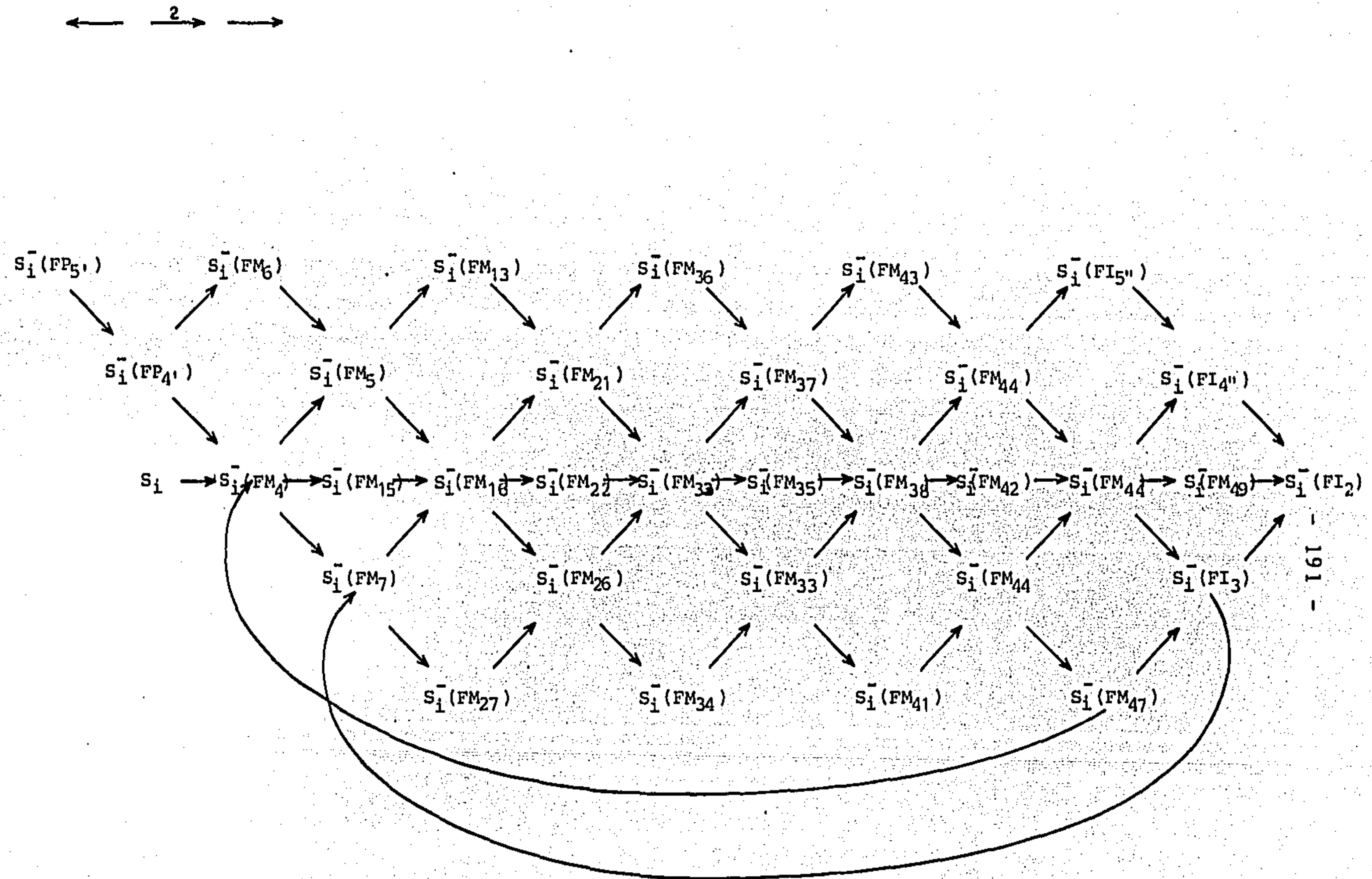
2) Si $C \in \mathrm{mod}\ \overline{F}_4$ es un módulo inescindible no proyectivo y no isomorfo a FI_i y

$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión de A.R. en $\mathrm{mod}\ \overline{F}_4$ entonces

$0 \longrightarrow S_i^- A \longrightarrow S_i^- B \longrightarrow S_i^- C \longrightarrow 0$ es una sucesión de A.R. en $\mathrm{mod}\ \sigma_i \overline{F}_4$.

3) $\{Si, S_i^-(FP_5), S_i^-(FP_4), S_i^-(FM_4), S_i^-(FM_{27})\}$ es un conjunto completo de proyectivos inescindibles de mod $\sigma_i\overline{F}_4$ donde $S_i^-(FM_{15})=tr\,DS_i$.

GRAFICA Nº 2.3.1



<u>Caso 4</u> $\longleftarrow \quad \xrightarrow{2} \quad \longleftarrow$

La gráfica de Auslander-Reiten con esta orientación la podemos obtener aplicando el funtor de Coxeter parcial izquierdo S_1^+ a mod $\sigma_i \overline{F}_4$.

$S_i^-(FP_{5'})$ es un simple proyectivo no inyectivo de mod $\sigma_i \overline{F}_4$ tal que $S_1^+(S_i^-(FP_{5'}))=0$ y $T=(0,0,0,0,1)$ es un simple inyectivo no proyectivo de $\sigma_1\sigma_i\overline{F}_4$ y tendremos que:

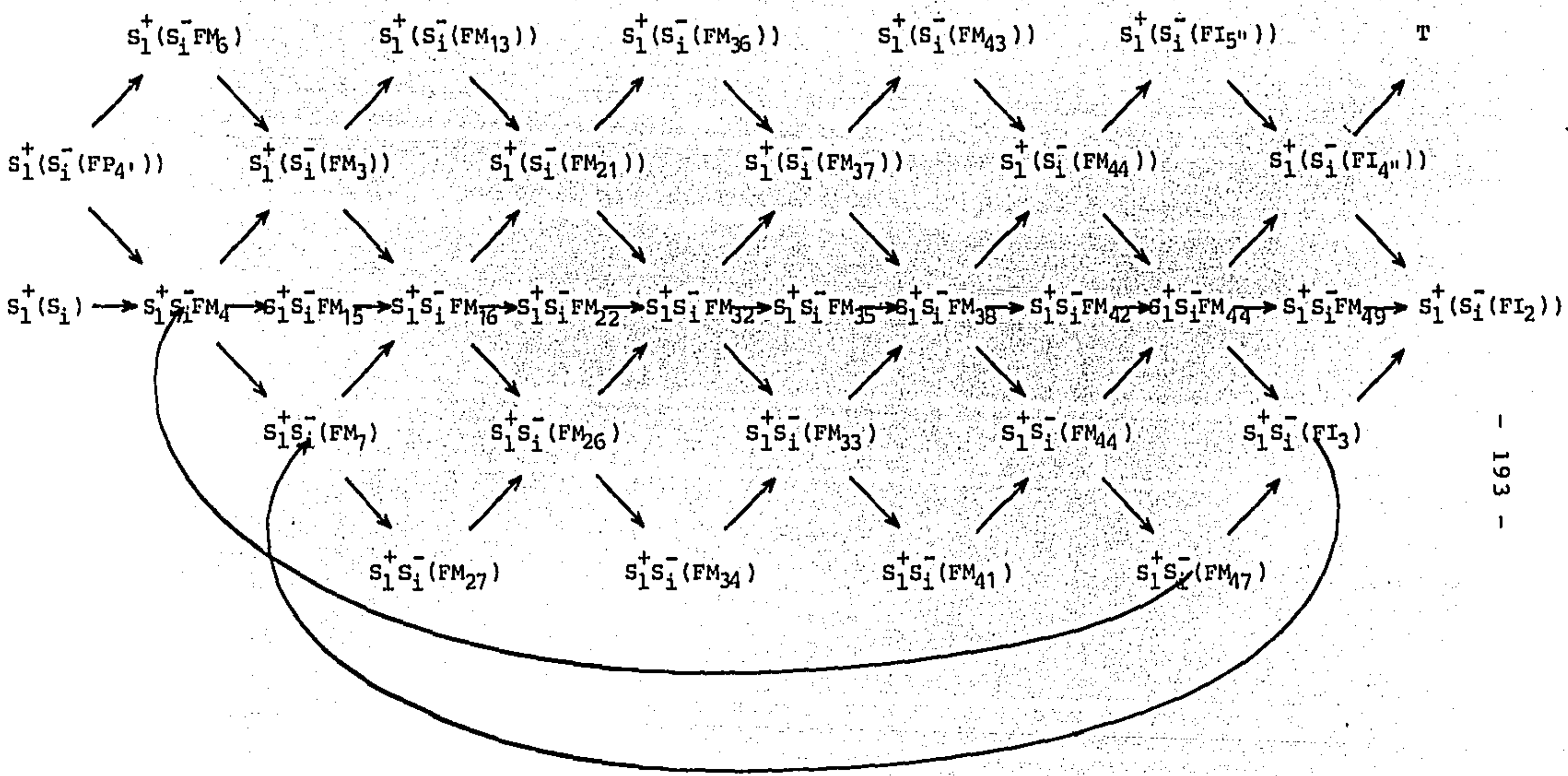
1) $\{S_1^+(\mathrm{tr}\, D S_i^-(FP_{5'})) = S_1^+(S_i^-(FM_6), S_1^+(S_i^-(FP_{4'})),$
$S_1^+(S_i^-(FM_4)), S_1^+(S_i^-(FM_{27})), S_1^+ Si\}$ es un conjunto completo de proyectivos inescindibles de mod $\sigma_1\sigma_i\overline{F}_4$.

2) Como $S_i^-(FI_{5''})$ es la envolvente inyectiva de $S_i^-(FP_{5'})$ entonces $\{T, S_1^+(S_i^- FM_{49}), S_1^+(S_i^-(FI_{4''}),$
$S_1^+(S_i^-(FI_2)), S_1^+(S_i^-(FI_3))\}$ es un conjunto completo de inyectivos inescindibles de $\sigma_1\sigma_i\overline{F}_4$ y $S_1^+(S_i^-(FI_{5''})) = D\mathrm{tr}\, T$.

3) Si $A \in \mathrm{mod}\, \sigma_i\overline{F}$ es un modulo inescindible no inyectivo y no isomorfo a $S_i^-(FP_{5'})$ y
$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten en mod $\sigma_i\overline{F}_4$ entonces
$0 \longrightarrow S_1^+A \longrightarrow S_1^+B \longrightarrow S_1^+C \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander-Reiter en mod $\sigma_1\sigma_i\overline{F}_4$

GRAFICA Nº 2.4.1

$\longleftarrow \circ \xrightarrow{2} \circ \longleftarrow$



3. Gráfica del Policarcaj

$$B_l : \underset{1}{\circ} \overset{\alpha_1}{-\!\!-\!\!-\!\!-} \underset{2}{\circ} \overset{\alpha_2}{-\!\!-\!\!-\!\!-} \circ \cdots \circ \overset{\alpha_{l-2}}{-\!\!-\!\!-\!\!-} \underset{l-1}{\circ} \xrightarrow{\;2\;} \underset{l}{\circ}$$

La categoría de representaciones de este policarcaj es equivalente a la subcategoría plena de representaciones del carcaj Γ :

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, dash] & \underset{2}{\circ} \arrow[r, dash] & \circ \cdots \circ \arrow[r, dash] & \underset{l-1}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & l \arrow[d, "\beta"] \\ & & & & \underset{l+1}{\circ} \end{tikzcd}$$

que satisface i) $I m\alpha = \operatorname{Ker} \beta$

ii) β es un epimorfismo

Por la proposición de Ringel sabemos que la categoría de representaciones de Γ con $\beta\alpha = 0$ tiene el mismo tipo de representación que la categoría de representaciones de

Δ :

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \cdots \circ \arrow[r, dash] & \underset{}{\overset{l-1}{\circ}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"'] & \overset{l+1}{\circ} \\
 & & & \underset{l'}{\circ} & \underset{l''}{\circ} \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Δ, en general, no resulta de tipo finito, pero por las condiciones i), ii) y el lema de la sección 2.3, nos interesa la subcategoría plena de representaciones de Δ en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo, que es equivalente a la categoría de representaciones de Δ':

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \cdots \circ \arrow[r, dash] & \overset{l-1}{\circ} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & \overset{l+1}{\circ} \\
 & & & \underset{l'}{\circ} &
\end{tikzcd}$$

en las que α' es un epimorfismo.

Δ' es un diagrama Dynkin del tipo D_l y es, por lo tanto, de tipo finito.

Para describir la gráfica de B_l escogeremos una orientación Ω para las primeras $(l-2)$ flechas. Describiremos la gráfica de Δ' con esta orientación.

Con un pequeño análisis podremos decir que representaciones de Δ se pegan al aplicar el funtor F y de esta manera podremos determinar que nuevos morfismos irreducibles existen entre las representaciones de Γ con $\beta\alpha = 0$ además de los que se tenian a partir de los de Δ, aplicando los resultados de las proposiciones, 9, 10, 11, 12, 13, 14 del capítulo 2

Con esta información podremos describir la gráfica de A. R. de B_l con la orientación escogida.

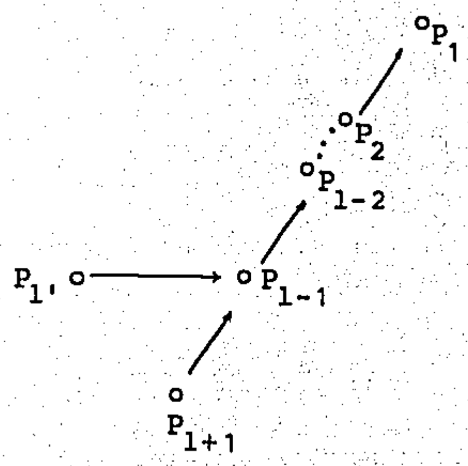
Con la ayuda de los funtores de Coxeter parciales podremos construir la gráfica de B_l con cualquier orientación en las $(l-2)$ flechas de peso 1.

Concluiremos con un ejemplo cuando $l = 5$.

i) <u>Descripción del Carcaj de A.R. de (Δ', Ω)</u>

Sea (Δ', Ω) :
$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[r] & \overset{2}{\circ} \arrow[r] & \overset{3}{\circ} \cdots \overset{l-2}{\circ} \arrow[r] & \overset{l-1}{\circ} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{l+1}{\circ} \\ & & & \underset{l'}{\circ} & \end{tikzcd}$$

La sección de las representaciones proyectivas es:



La transformación de Coxeter $\Phi^{-1} = -C\,C^{-t} = \dim(\operatorname{tr} D)$

donde C es la matriz de $(l+1) \times (l+1)$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ y } C^{-1} = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

queda descrita por:

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $n \leqslant l - 1$ haciendo los cálculos encontramos que $(\Phi^{-1})^n (x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}) = (\omega_1, \ldots, \omega_l, \omega_{l+1})$ donde

$\omega_i = x_{n+i} - x_n$ si $i < l - n$

$\omega_{l-n} = x_{l+1} + x_l - x_n$

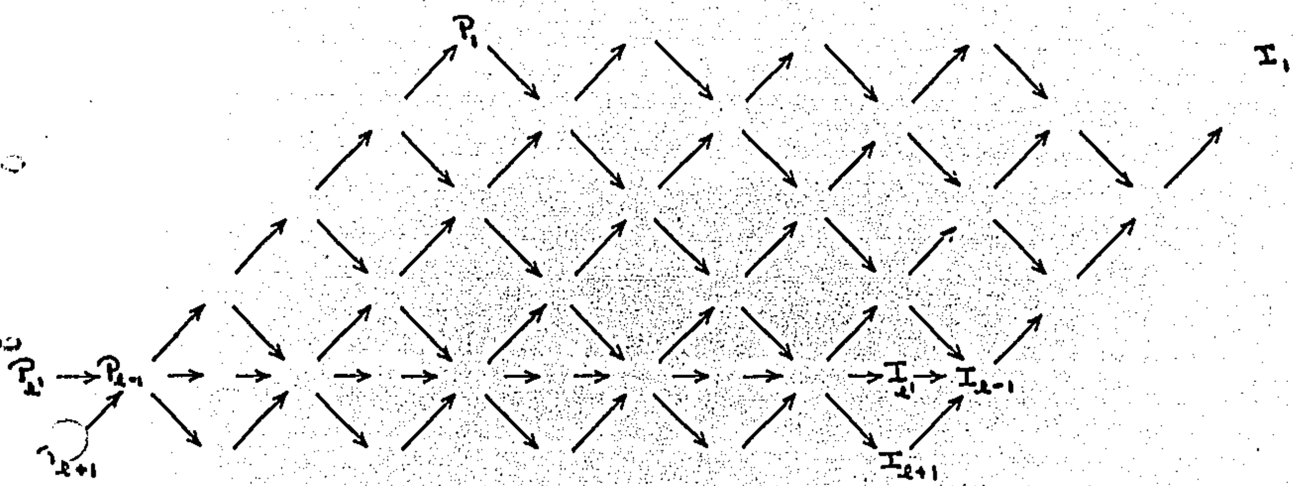
$\omega_{l-n+j} = x_{l+1} + x_l - x_n - x_j$ $\quad 1 \leqslant j \leqslant n - 1$

$$\omega_l = \begin{cases} x_{l+1} - x_n & \text{si } n \text{ es impar} \\ x_l - x_n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\omega_{l+1} = \begin{cases} x_l - x_n & \text{si } n \text{ es impar} \\ x_{l+1} - x_n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

De esta forma podemos comprobar directamente que $(\Phi^{-1})^{l-1} P_j = I_j$ y tendremos $l(l+1)$ representaciones inescindibles.

Por lo tanto el carcaj de A.R. de (Δ',Ω) será de la forma:



Como nos interesan las representaciones de Δ' en las que α' es un epimorfismo, el siguiente lema resultará útil.

Lema

Sea Z una representación inescindible de Δ'

$$
\begin{tikzcd}
\overset{Z_1}{\circ} \arrow[r, "\alpha_1"] & \overset{Z_2}{\circ} \arrow[r, "\alpha_2"] & \circ \cdots \circ \arrow[r] & \overset{Z_{l-1}}{\circ} \arrow[r, "\alpha_{l-1}"] \arrow[d, "\alpha'"'] & \overset{Z_{l+1}}{\circ} \\
& & & \underset{Z_{l'}}{\circ} &
\end{tikzcd}
$$

Si α' no es epimorfismo, $\mathrm{Hom}(Z,P_{l-1}) \neq 0$

Demostración

Si $\alpha' : Z_{l-1} \longrightarrow Z_{l'}$ no es epimorfismo, existe $0 \neq x \in Z_{l'} - \mathrm{Im}\,\alpha'$. Sea $\{a_1, \ldots, a_s\}$ una base de la imagen de α'. Entonces $\{x, a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_r\}$ es parte de una base de $Z_{l'}$. Definamos $\eta_{l'} : Z_{l'} \longrightarrow k$ de la siguiente forma: $\eta_{l'}(x) = 1$ y $\eta_{l'}(a_i) = 0$ $i \in \{1, \ldots, r\}$. Entonces $\eta_{l'} \neq 0$ pero $\eta_{l'}\alpha' = 0$.

$\eta_{l'}$ induce el morfismo no cero $\eta : Z \longrightarrow P_{l-1}$

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r] \arrow[dd, "0"'] & Z_2 \arrow[r] \arrow[dd, "0"] & \cdots & Z_{l-2} \arrow[r] \arrow[dd, "0"] & Z_{l-1} \arrow[rr] \arrow[dd, "0"] \arrow[dr, "\alpha'"] & & Z_{l+1} \arrow[dd, "0"] \\
 & & & & & Z_{l'} \arrow[dd, "\eta_{l'}"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \cdots & 0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & k \\
 & & & & & k &
\end{tikzcd}
$$

□

Pero las únicas representaciones inescindibles Z de Δ' tales que $\mathrm{Hom}(Z,P_{l-1}) \neq 0$ son $P_{l'}$ y P_{l+1}. En P_{l+1} $\alpha' : 0 \longrightarrow 0$ si es epi, de ahí que la única representación inescindible de Δ' en que α' no es epi es $P_{l'}$.

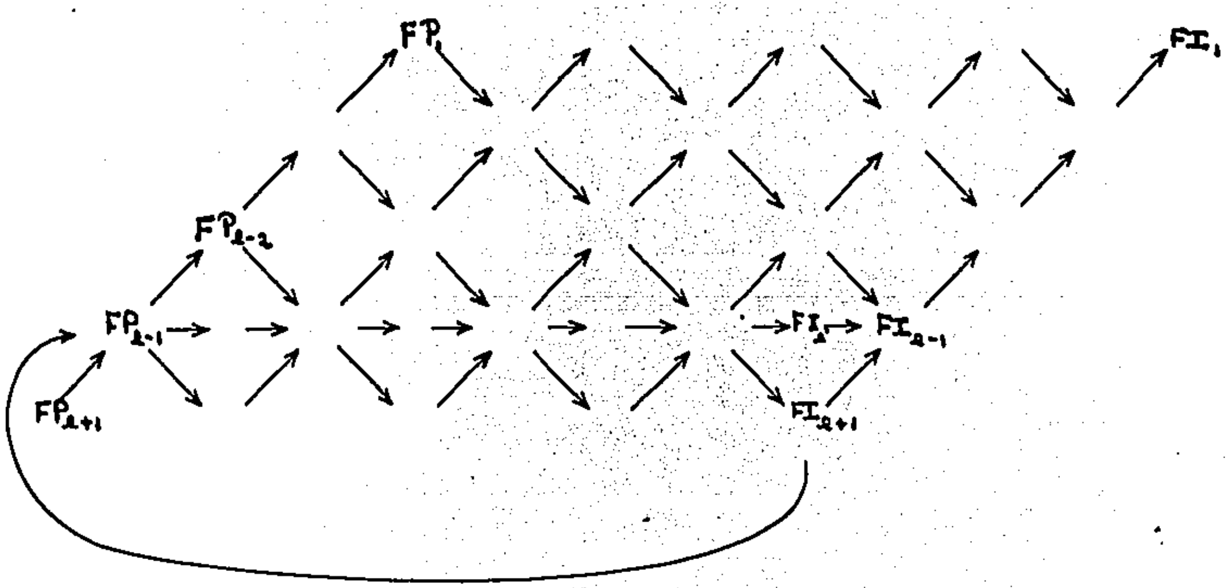
<u>Observaciones</u>

1.- Como l' es un pozo en Δ y l'' es una fuente, el simple en l': $P_{l'}$ es un proyectivo inescindible y el simple en l'': $I_{l''}$ es un inyectivo inescindible que satisfacen que $FP_{l'} = FI_{l''}$ y por la forma de Δ, son las únicas representaciones inescindibles que se identifican al aplicar el funtor F.

2.- Como $P_{l'} \longrightarrow P_{l-1}$ y $I_{l+1} \longrightarrow I_{l''}$ son morfismos irreducibles en Δ, existe un nuevo morfismo irreducible en Γ con $\beta\alpha = 0$

$$FI_{l+1} \longrightarrow FI_{l''} = FP_{l'} \longrightarrow FP_{l-1}$$

De esta manera tendremos que el carcaj de A.R. de (B_l, Ω), $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l-1 \xrightarrow{2} l$ es de la forma



Las representaciones proyectivas de (B_l, Ω) son FP_1, $FP_2 \ldots FP_{l-2}$, FP_{l-1}, FP_{l+1}, $F(\text{tr } DP_l)$

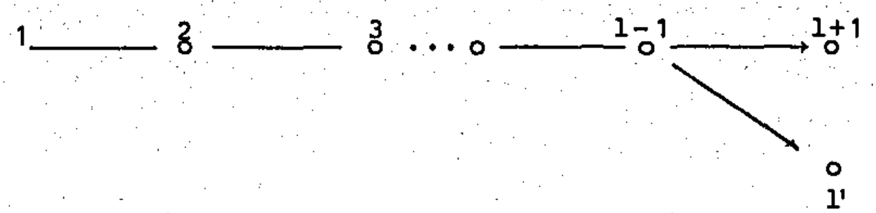
Las representaciones inyectivas de (B_l, Ω) son FI_1, $FI_2, \ldots, FI_{l-1}$, $FI_{l'}$, FI_{l+1}.

<u>Gráfica de B_l</u> (con cualquier orientación)

Para construir el carcaj de A.R. de B_l con cualquier orientación en sus $l-2$ flechas de peso 1, construiremos el carcaj de A.R. de la categoria de representaciones del diagrama Δ' correspondiente a esa orientación.

Observemos que el vértice l' de Δ es un pozo y el vértice l'' una fuente en cualquier orientación de B_l así que tanto el lema 3.1 como las observaciones que le siguen, continuan siendo válidas para cualquier orientación que se considere.

Pero la categoria de representaciones inescindibles de



con cualquier orientación en las aristas indicadas es equivalente a la categoría de representaciones inescindibles de

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{\circ} \arrow[r] & \overset{2}{\circ} \arrow[r] & \circ \cdots \circ \arrow[r] & \overset{l-1}{\circ} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{l+1}{\circ} \\
 & & & & \underset{l'}{\circ}
\end{tikzcd}$$

y esta equivalencia está dada por funtores de Coxeter parciales (izquierdos y derechos).

Demostraremos esta equivalencia por inducción sobre el número de flechas que tienen una orientación diferente a la de (Δ',Ω). Si (Δ',Ω') tiene una flecha con orientación diferente a la de (Δ',Ω), ie (Δ',Ω') es de la forma:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[r] & n & n+1 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & l-1 \arrow[r] \arrow[d] & l+1 \\
 & & & & & & & l' &
\end{tikzcd}$$

En el vértice $n+1$ de (Δ',Ω') tenemos un pozo y aplicando el funtor de Coxeter parcial izquierdo

$S_n^+ : C(\Delta',\Omega') \longrightarrow C(\Delta',\sigma_n \Omega')$ tendremos una equivalencia entre las representaciones inescindibles de (Δ',Ω') y las representaciones inescindibles de $(\Delta',\sigma_n\Omega')$ identificando el simple proyectivo P_n de (Δ',Ω') con el simple inyectivo I_n de $(\Delta',\sigma_n\Omega')$ y los morfismos $P_n \longrightarrow P_{n-1}$ y $P_n \longrightarrow P_{n+1}$ de (Δ',Ω') con los morfismos $I_{n-1} \longrightarrow I_n$ y $I_{n+1} \longrightarrow I_n$ de $(\Delta',\sigma_n\Omega')$.

En el vértice $n-1$ de $(\Delta',\sigma_n\Omega')$ tenemos ahora un pozo y aplicando el funtor de Coxeter parcial izquierdo $S^+_{n-1} : C(\Delta',\sigma_n\Omega') \longrightarrow C(\Delta',\sigma_{n-1}\sigma_n\Omega')$ tendremos de manera análoga, una equivalencia de categorías. Continuando así tendremos que $S_1^+S_2^+ \cdots S^+_{n-1}S^+_n : C(\Delta',\Omega') \longrightarrow C(\Delta',\sigma_1\ldots\sigma_n\Omega')$ induce una equivalencia entre la subcategorías plenas de representaciones inescindibles de ambas categorias. Pero $\sigma_1 \ldots \sigma_n\Omega' = \Omega$.

Supongamos ahora que si (Δ',Ω') tiene m flechas con una orientación diferente a la de (Δ',Ω) entonces la categoría de representaciones inescindibles de (Δ',Ω') es equivalente a la categoría de representaciones inescindibles de (Δ',Ω).

Sea (Δ',Ω'') un carcaj con $m+1$ flechas que tienen una orientación diferente a la de (Δ',Ω) y sea n el primer pozo de (Δ',Ω'') entonces

$S_1^+S_2^+ \cdots S_n^+ : C(\Delta',\Omega'') \longrightarrow C(\Delta',\sigma_1 \ldots \sigma_n\Omega'')$ induce una equivalencia entre las representaciones inescindibles de ambas categorías.

Pero $(\Delta', \sigma_1 \ldots \sigma_n \Omega'')$ tiene m flechas con una orientación diferente a la de (Δ', Ω) y por hipótesis de inducción existe una equivalencia entre las representaciones inescindibles de $(\Delta', \sigma_1 \ldots \sigma_n \Omega'')$ y las de (Δ', Ω) de donde tendremos la equivalencia buscada.

Por lo tanto, para construir el carcaj de Auslander Reiten de B_1 con cualquier orientación, bastará aplicar funtores de Coxeter parciales izquierdos o derechos a la gráfica de (Δ', Ω) y con esta gráfica, construir la de B_1.

La gráfica 3.1 es la gráfica de A.R. de (Δ'_5, Ω)

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[r] & \overset{2}{\circ} \arrow[r] & \overset{3}{\circ} \arrow[r] & \overset{4}{\circ} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{6}{\circ} \\ & & & \underset{5'}{\circ} & \end{tikzcd}$$

La gráfica 3.2 es la gráfica de A.R. de (B_5, Ω)

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r, "2"] & \circ \end{tikzcd}$$

La gráfica 3.3 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_1 \Omega)$

$$\circ \longleftarrow \quad \longrightarrow \circ \longrightarrow \quad \xrightarrow{2} \circ$$

Para obtenerla aplicamos el funtor de Coxeter parcial derecho S_1^- a (Δ_5', Ω) y luego aplicamos el funtor F.

La gráfica 3.4 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_2\sigma_1\Omega)$

$$\longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \xrightarrow{2}$$

y la obtenemos aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_2^- a $(\Delta_5', \sigma_1\Omega)$ y luego aplicando el funtor F.

La gráfica 3.5 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$

$$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \xrightarrow{2}$$

y se obtiene aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_3^- a $(\Delta_5', \sigma_2\sigma_1\Omega)$ y luego aplicando el funtor F.

La gráfica 3.6 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$

$$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \xrightarrow{2}$$

y se obtiene aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_1^- a $(\Delta_5', \sigma_2\sigma_1\Omega)$ y luego aplicando el funtor F.

La gráfica 3.7 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$

$$\longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \xrightarrow{\;2\;}$$

y la obtenemos aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_1^- a $(\Delta_5', \sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$ y luego aplicando el funtor F.

La gráfica 3.8 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$

$$\longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \xrightarrow{\;2\;}$$

y la obtenemos aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_2^- a $(\Delta_5', \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$ y luego aplicando el funtor F.

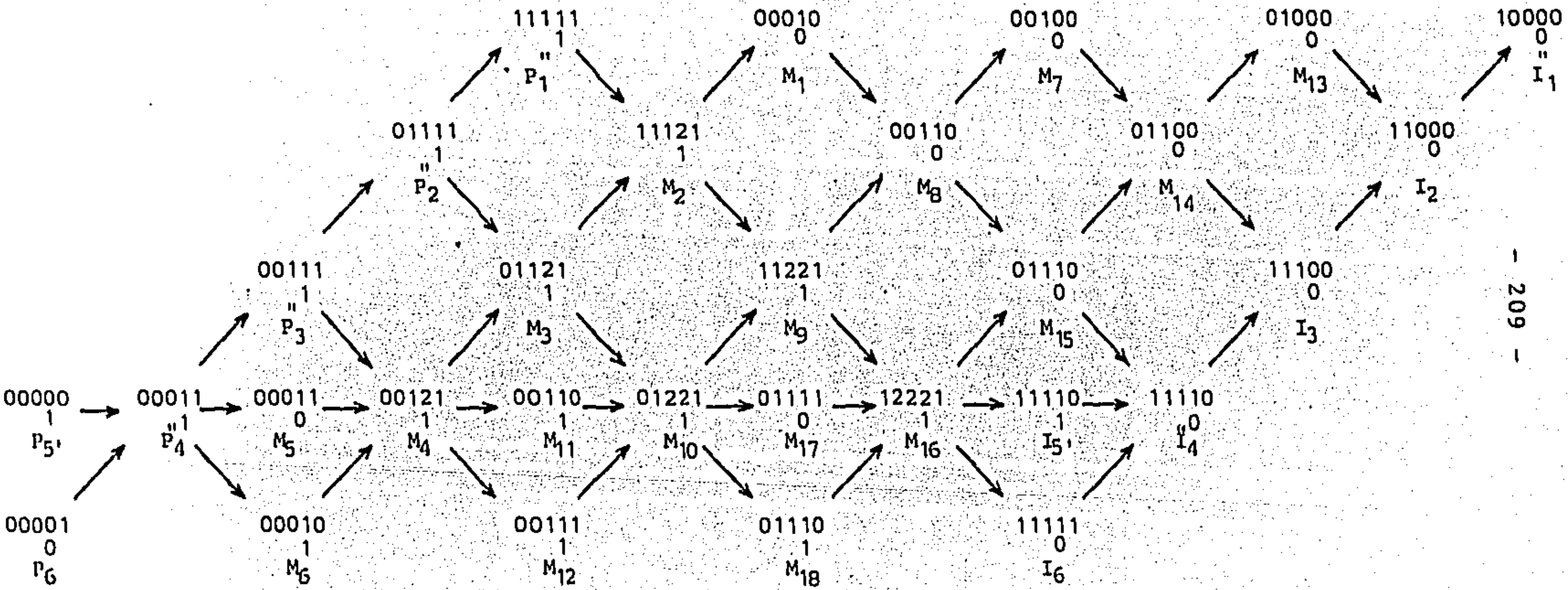
La gráfica 3.9 es la gráfica de A.R. de $(B_5, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$

$$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \xrightarrow{\;2\;}$$

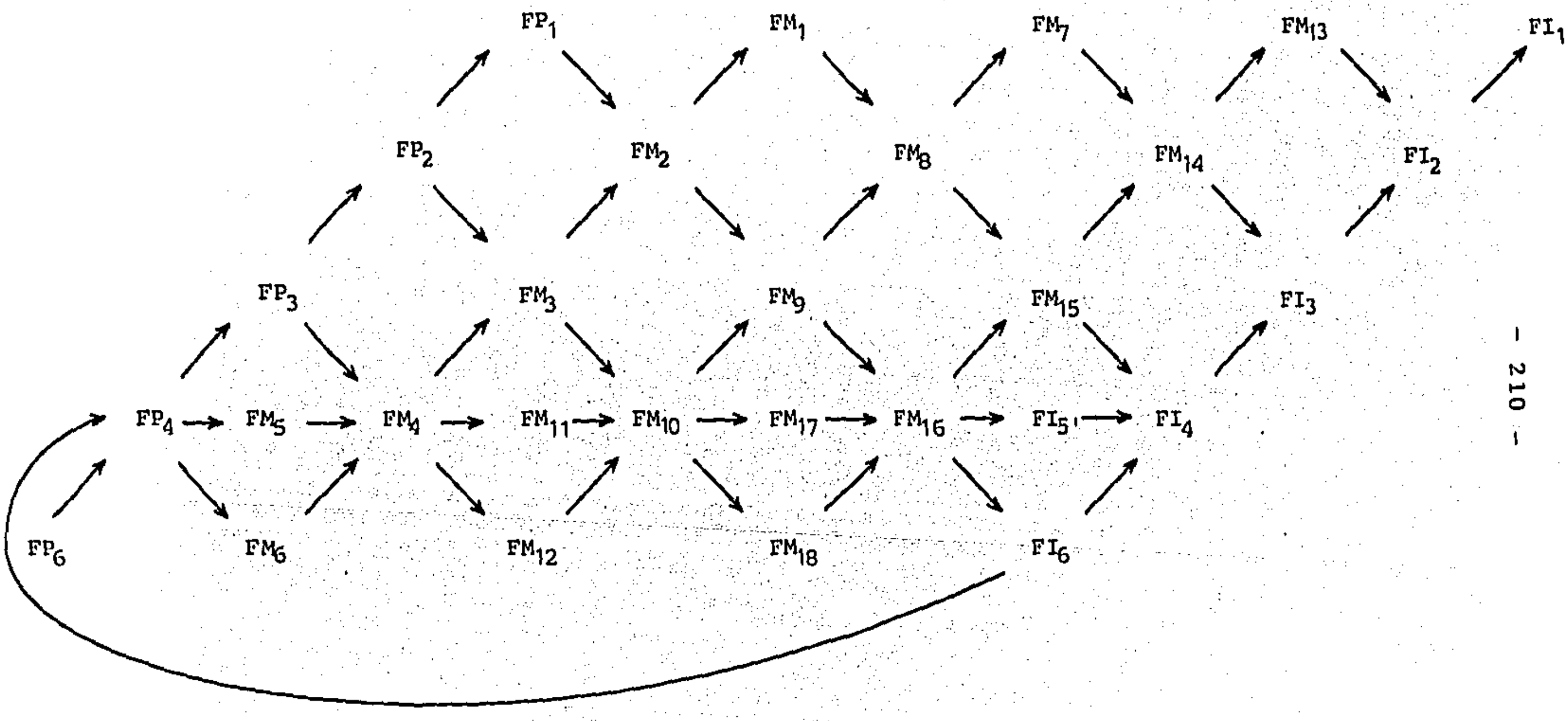
y la obtenemos aplicando el funtor de Coxeter parcial derecho S_1^- a $(\Delta_5', \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\Omega)$ y luego aplicando el funtor F.

GRAFICA Nº 3.1

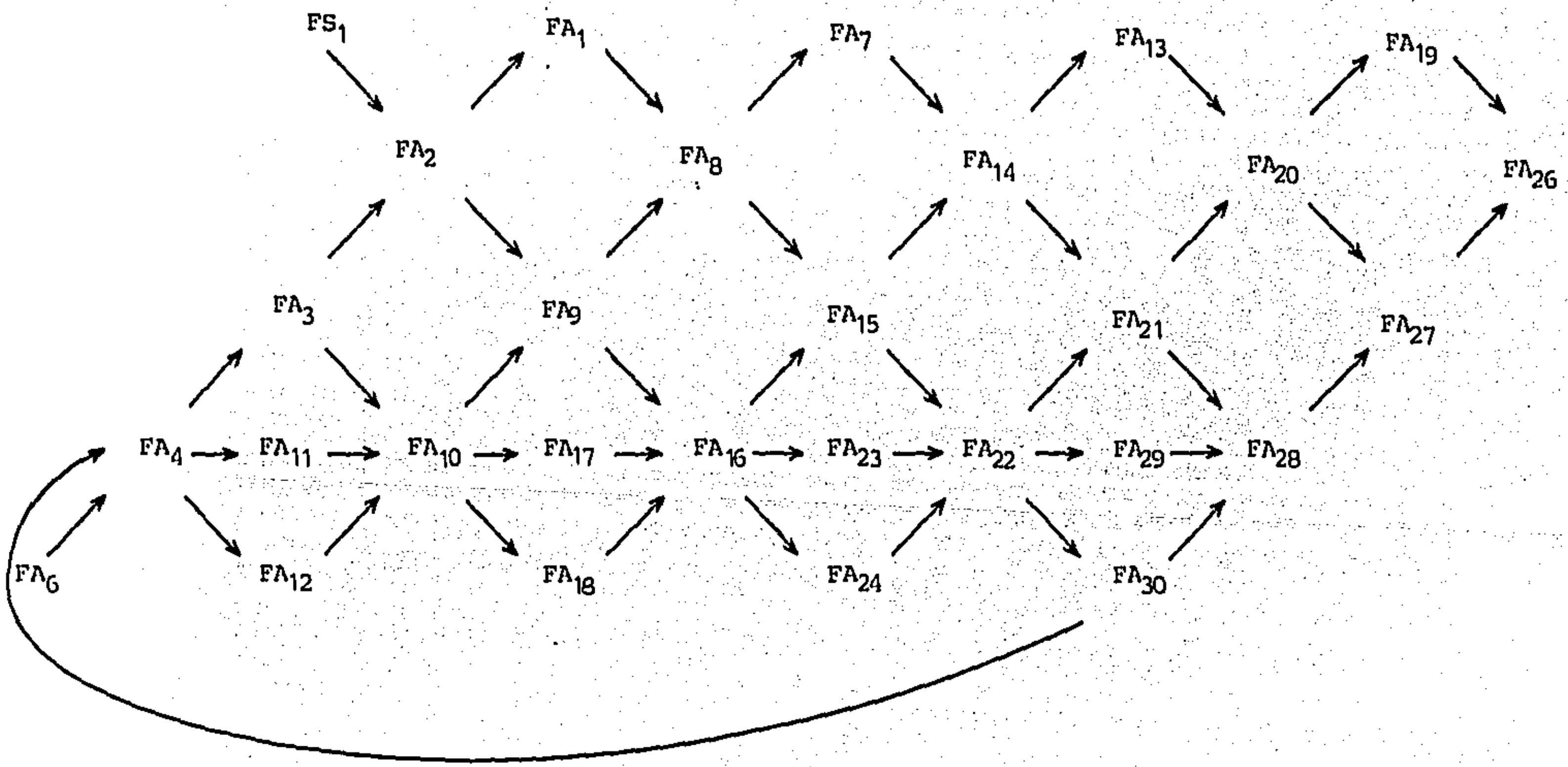
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] \arrow[d] & 6 \\ & & & 5' & \end{tikzcd}$$



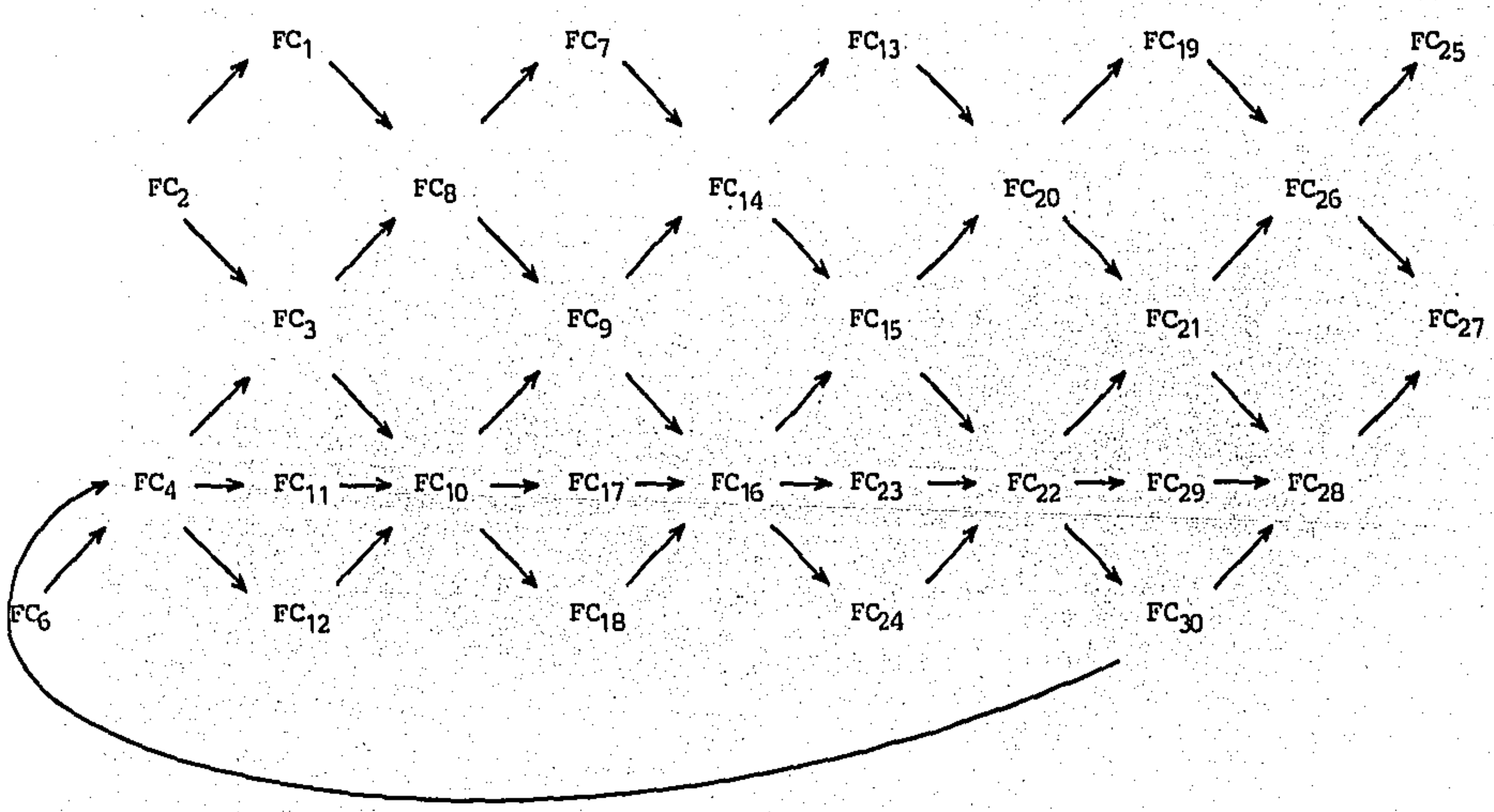
GRAFICA DE B_5 $\circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \xrightarrow{2} \circ$



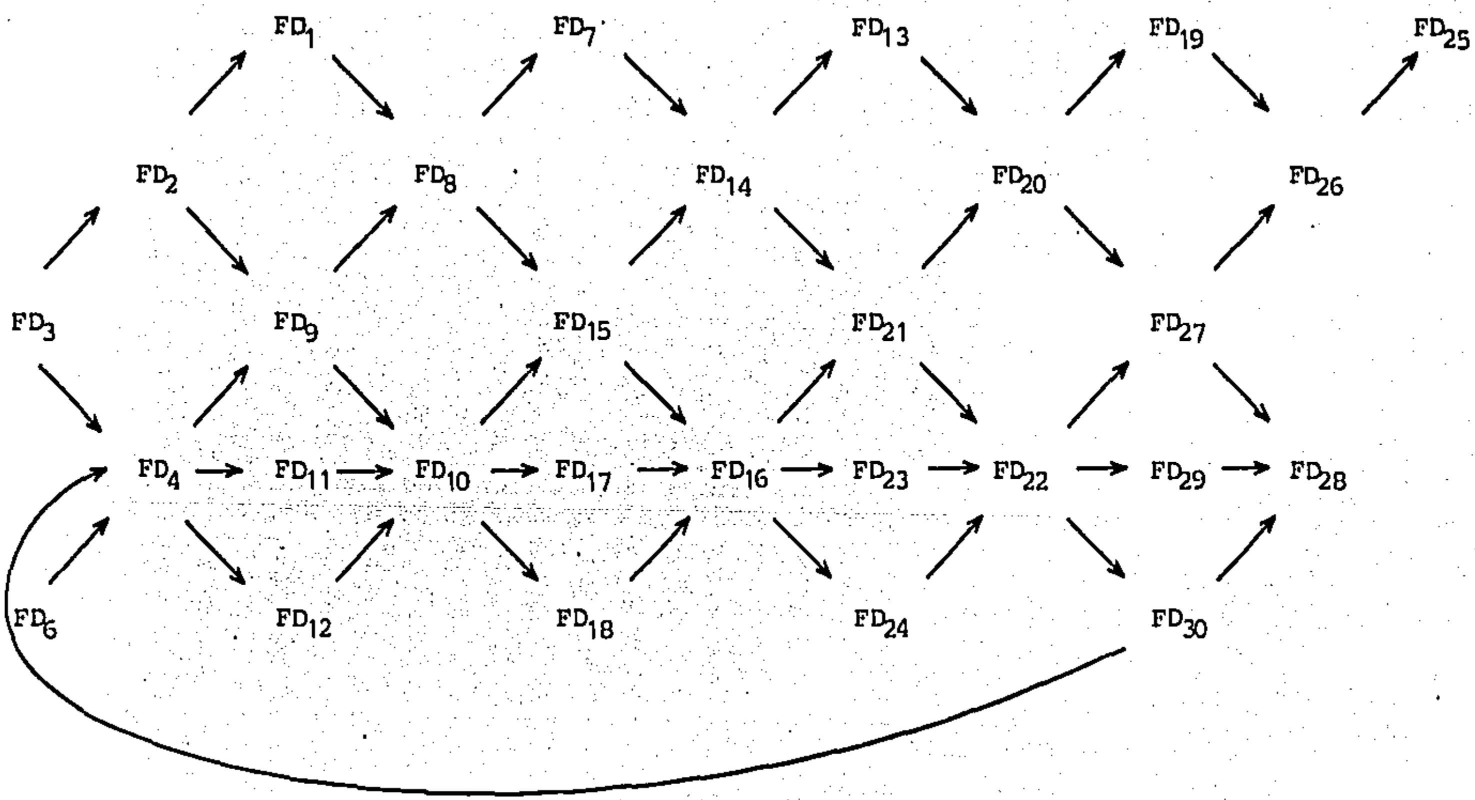
GRAFICA Nº 3.3. $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \xrightarrow{2} 5$



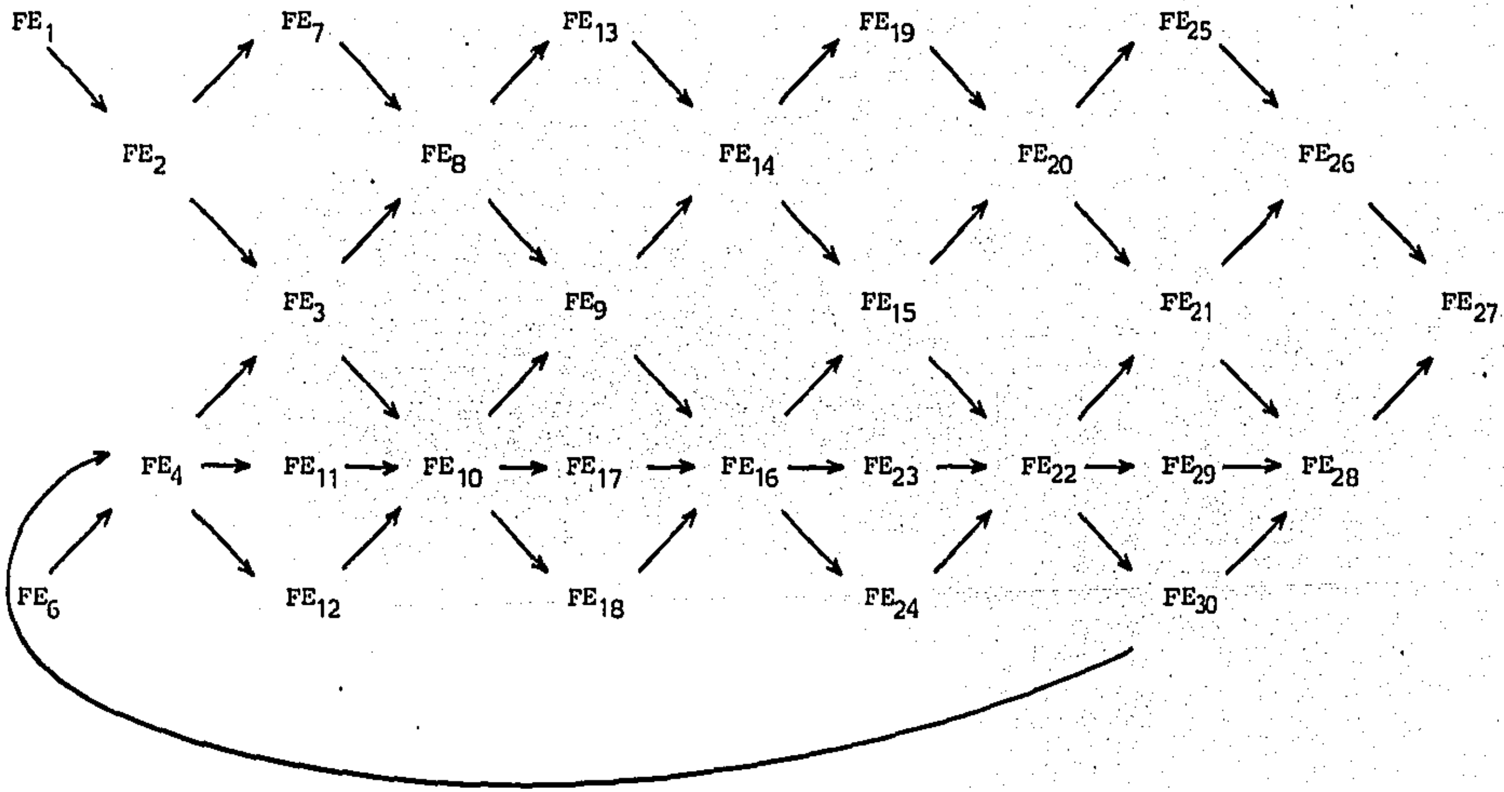
GRAFICA Nº 3.4 $\cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \xrightarrow{2} \cdot$



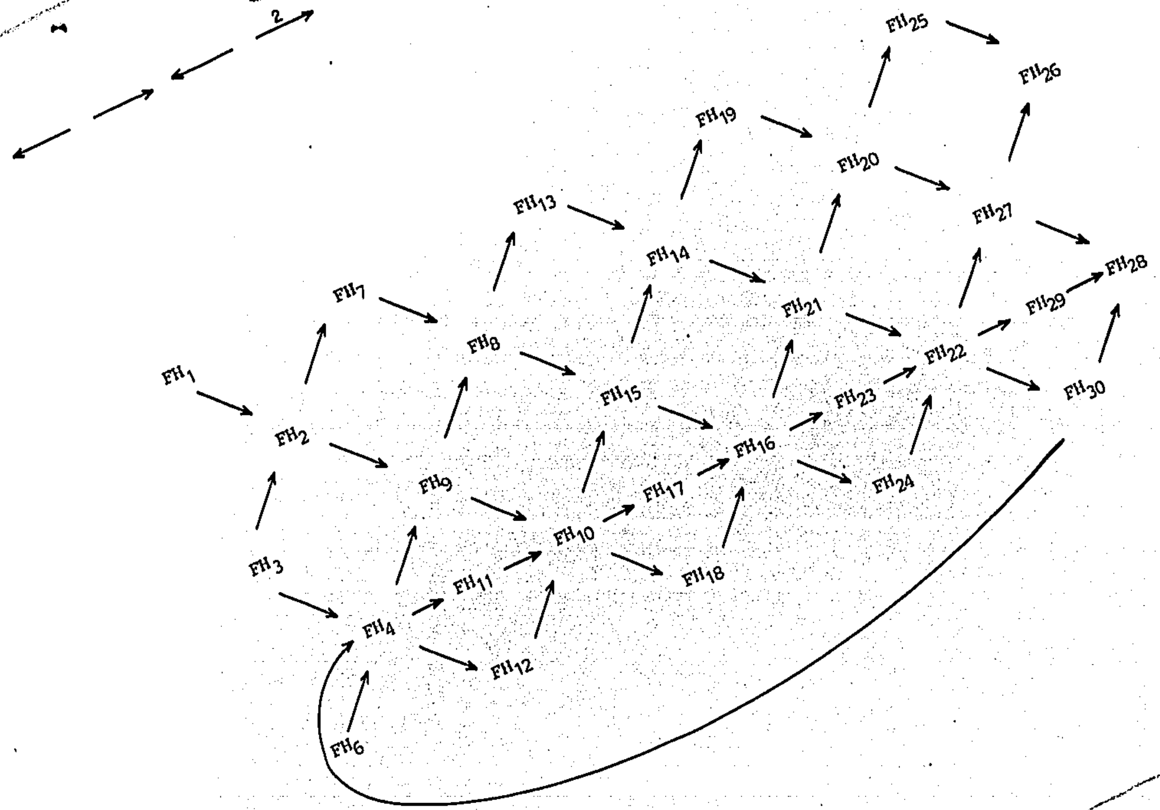
GRAFICA Nº 3.5 $\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \xrightarrow{2} \cdot$



GRAFICA Nº 3.6

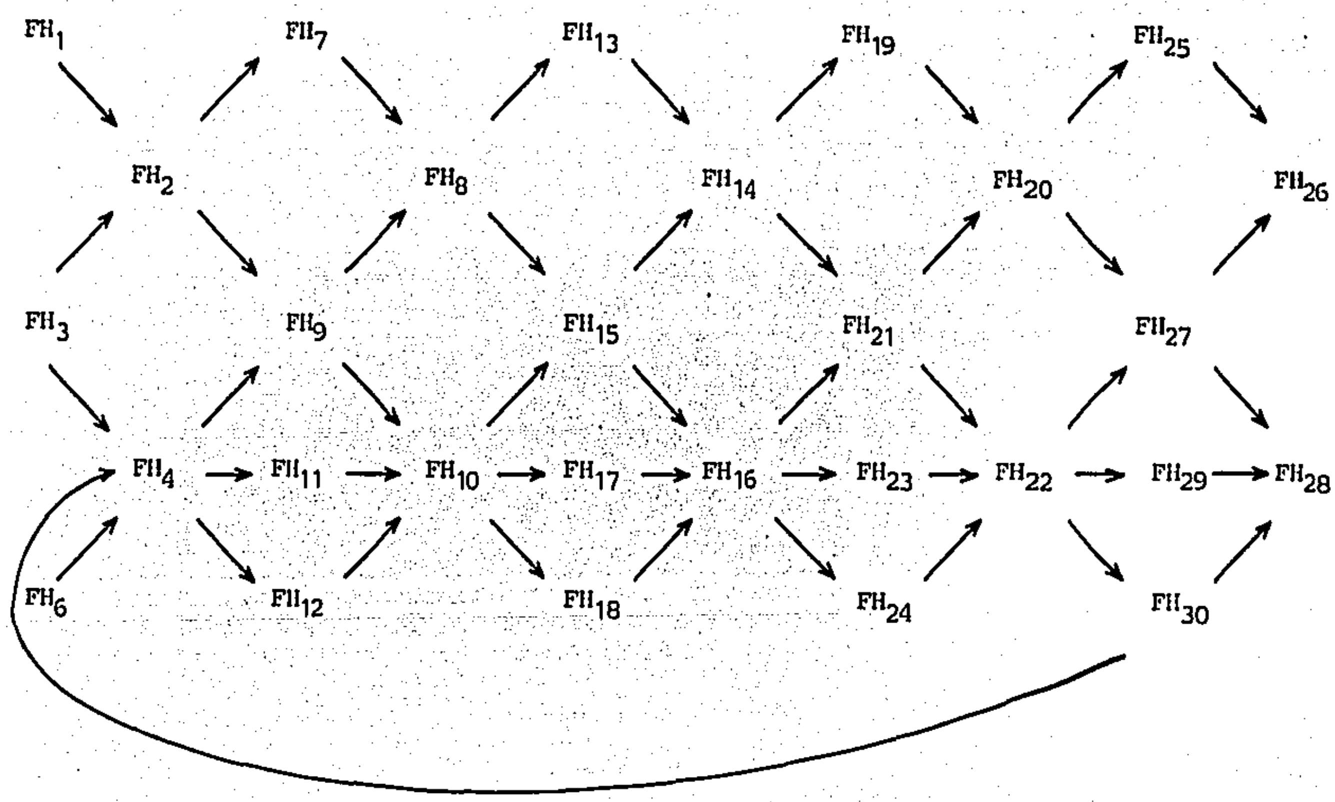


ICA Nº 3.7

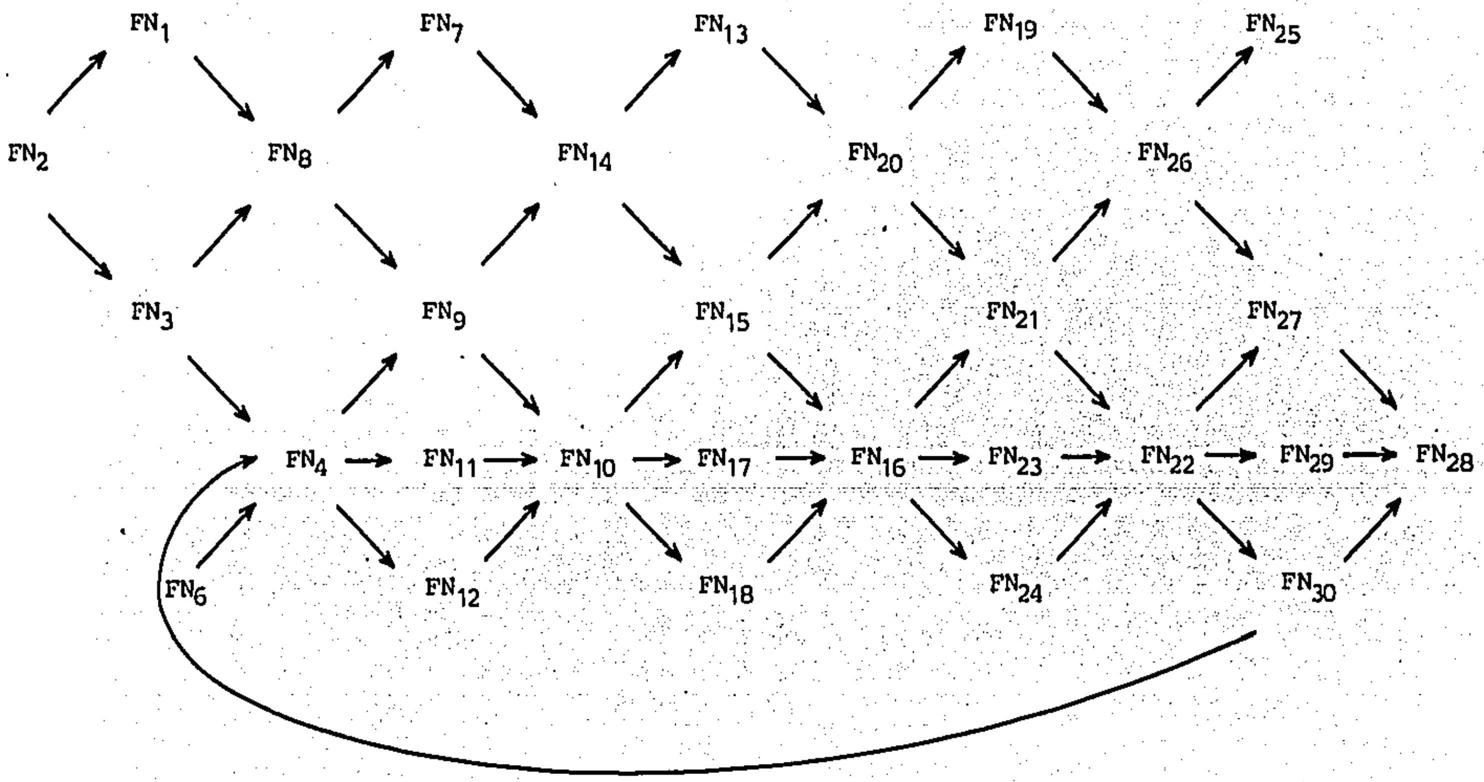


2
FH1
FH2
FH3
FH4
FH6
FH7
FH8
FH9
FH10
FH11
FH12
FH13
FH14
FH15
FH16
FH17
FH18
FH19
FH20
FH21
FH22
FH23
FH24
FH25
FH26
FH27
FH28
FH29
FH30

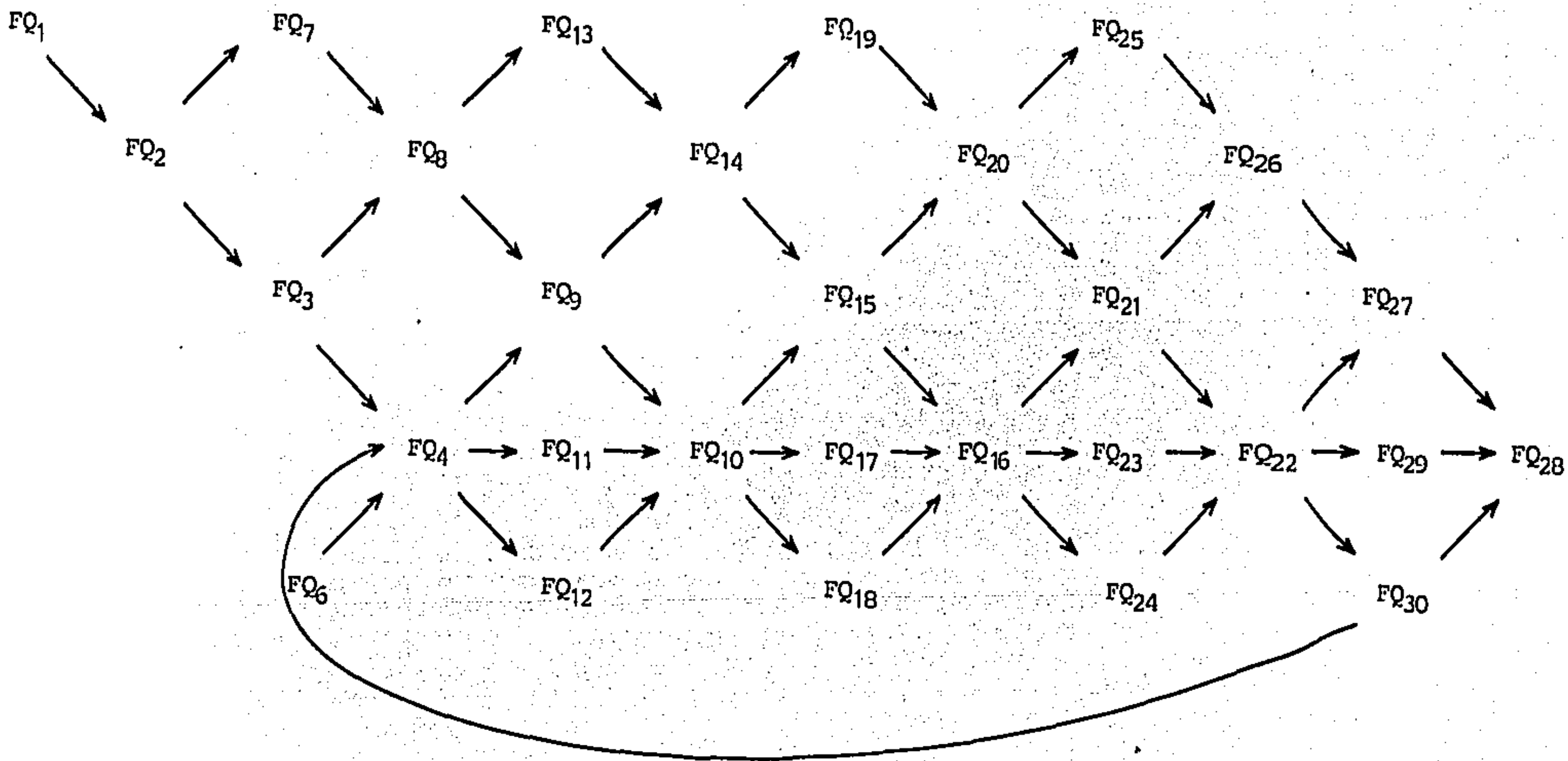
GRAFICA Nº 3.7 $\longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \xrightarrow{2}$



GRAFICA Nº 3.8 $\longrightarrow \longleftarrow \longleftarrow \xrightarrow{2}$



GRAFICA Nº 3.9 ⟵ ⟵ ⟵ $\xrightarrow{2}$



4. Gráfica del policarcaj C_l

$$\circ \xrightarrow{2} \circ - \circ - \circ \cdots \circ - \circ$$

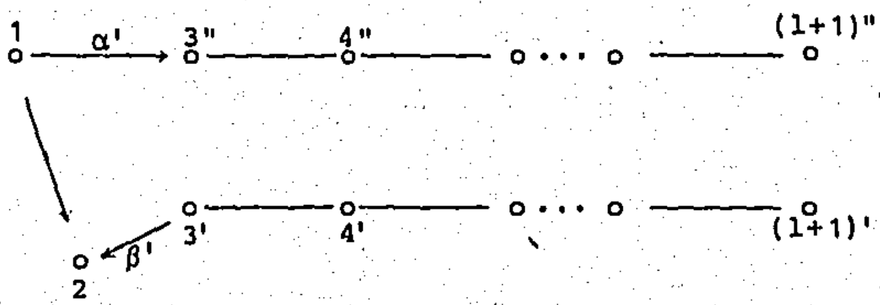
La categoria de representaciones de este policarcaj es equivalente a la subcategoria plena de representaciones del carcaj Γ

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & \overset{3}{\circ} \arrow[d, "\beta"] \arrow[r, dash] & \overset{4}{\circ} \arrow[r, dash] & \circ \cdots \circ \arrow[r, dash] & \overset{l+1}{\circ} \\ & \underset{2}{\circ} & & & \end{tikzcd}$$

que satisfacen: i) $I m\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$

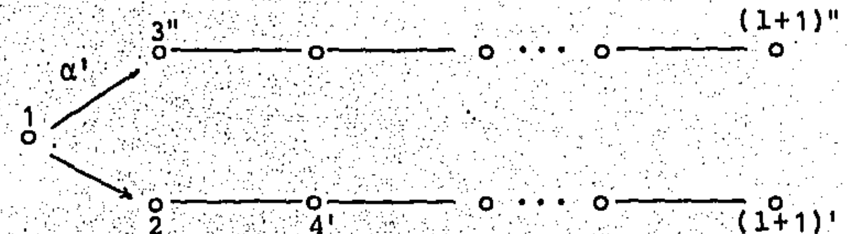
ii) β es un epimorfismo

Por la proposición de Ringel sabemos que la categoría de representaciones de Γ con $\beta\alpha = 0$ tiene el mismo tipo de representación que la categoría de representaciones de Δ:



Por el Lema 2.3, nos interesa la subcategoría plena de representaciones de Δ en las que α' es un epimorfismo y β' un isomorfismo.

La subcategoría plena de representaciones de Δ en las que β' es un isomorfismo es equivalente a la categoria de representaciones de Δ'



Para construir el carcaj de A.R. de C_1 escogeremos una orientación Ω en las $1-2$ flechas de peso 1.

(C_1,Ω): $\xrightarrow{\;2\;}\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow$

Describiremos la gráfica de A.R. del carcaj (Δ,Ω) y veremos que ocurre al aplicar el funtor F, ie, obtendremos el carcaj de A.R. de (Γ,Ω) con $\beta\alpha=0$.

Como nos interesa la subcategoría plena de (Γ,Ω) que satisface i) ii), describiremos el carcaj de A.R. de (Δ',Ω). De esta manera obtendremos los morfismos irreducibles en la subcategoría de representaciones de Δ que satisfacen que β' es un isomorfismo. Tendremos además que describir en que representaciones de Δ', α' es un epimorfismo - con esta información podemos construir el carcaj de A.R. de (C_1,Ω). Aparte de los morfismos irreducibles que aparecen en Δ' tendremos los que se obtienen a través de aquellas representaciones de (Δ,Ω) que se pegan al aplicar el funtor F.

Con la ayuda de los funtores de Coxeter parciales se puede construir la gráfica de A.R. de Δ y Δ' con cualquier orientación, teniendo cuidado de aplicar dos funtores de Coxeter $S_{i'}^{\pm}, S_{i''}^{\pm}$ por cada orientación en Δ distinta a la de (Δ,Ω).

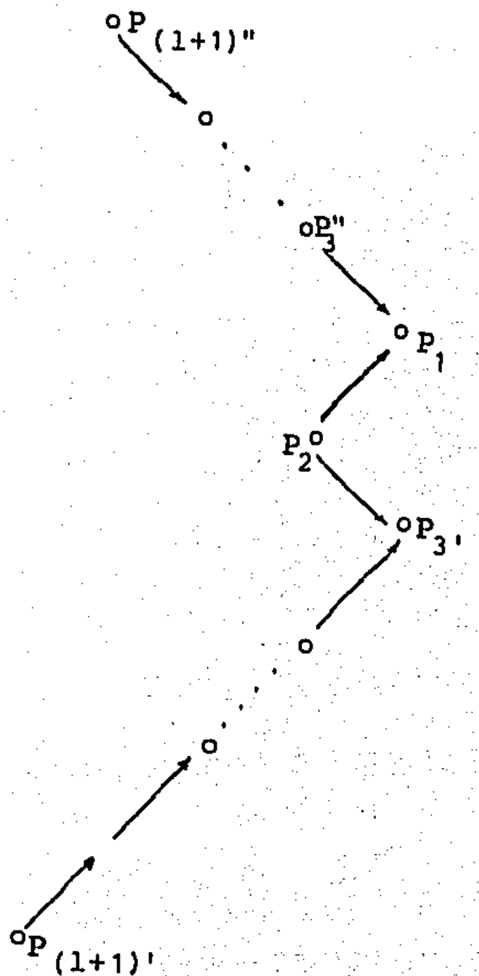
Concluiremos con un ejemplo cuando $l=5$.

<u>Descripción del carcaj de A.R. de Δ</u>

Sea (Δ,Ω) :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & 3'' \arrow[r] & 4'' \cdots \arrow[r] & (l+1)'' \\ 2 & 4' \arrow[l] \arrow[r] & 4' \cdots \arrow[r] & (l+1)' \end{tikzcd}$$

La sección de las representaciones proyectivas de Δ es de la forma:



La transformación de Coxeter $(\Phi^{-1}) = -C\,C^{-t} = \dim(\mathrm{tr}\,D)$ donde C es la matriz de $(2l-2)\times(2l-2)$

$$C = \begin{array}{r|ccccccccccccc|}
 & & & & & & 1' & (l+1)' & 3'' & & & & & (l+1)'' \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1' & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
(l+1)' & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
3'' & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\
(l+1)'' & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

queda descrita por

$$\Phi^{-1} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1' & (l+1)' & 3'' & & & & (l+1)'' \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ 1' \\ (l+1)' \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

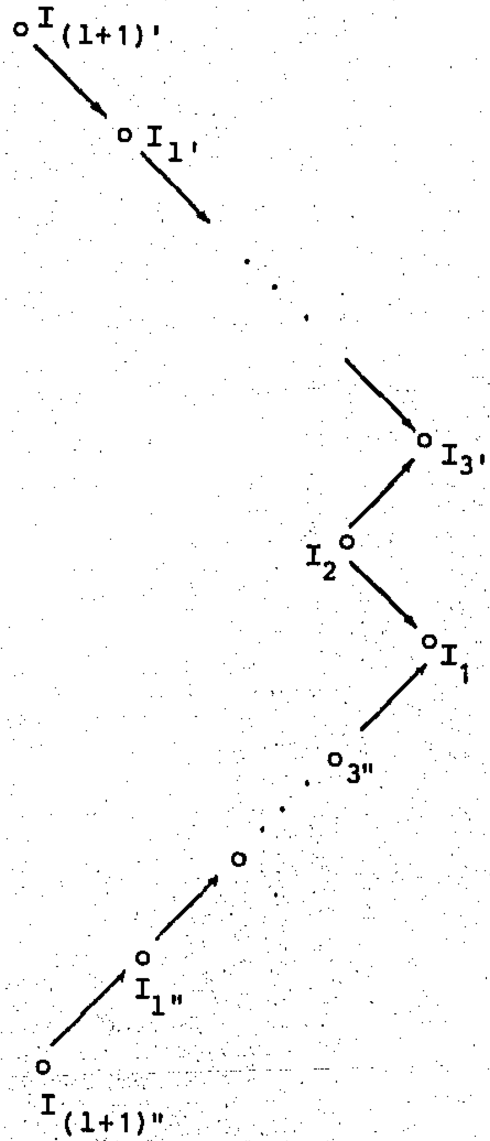
Podemos observar que:

$$(\Phi^{-1})^{n} \; P_{(l+1)''} = S_{(l+1)''-n} \qquad \text{si} \quad n \leqslant l-3$$

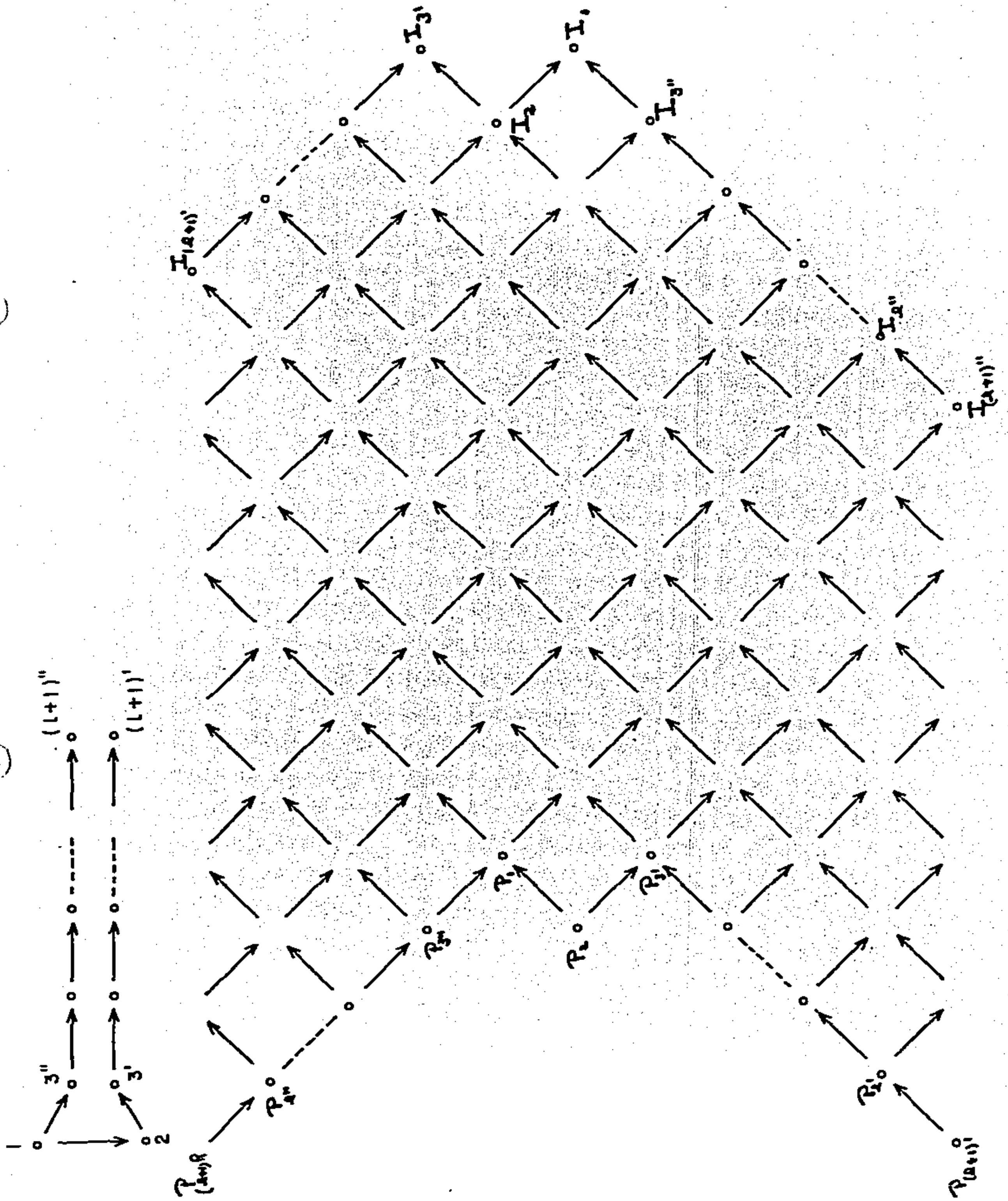
$$(\Phi^{-1})^{l-2} \; P_{(l+1)''} = (1,1,0,\cdots,0)$$

$$(\Phi^{-1})^{l-1} \; P_{(l+1)''} = I_{(l+1)'}$$

y la sección de los inyectivos queda



y un esquema de el carcaj de Auslander Reiten sería:



Descripción del Carcaj de A.R. de Γ con $\beta\alpha=0$

Observemos que el carcaj de A.R. de Δ contiene las subgráficas que corresponden a las álgebras uniseriales

$$\underset{3'}{\circ} \longrightarrow \underset{4'}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)'}{\circ} \qquad A'$$

$$\underset{3''}{\circ} \longrightarrow \underset{4''}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)''}{\circ} \qquad A''$$

La subgráfica que corresponde a A' tiene a su vez la subgráfica que corresponde a

$$\underset{4'}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)'}{\circ} \quad A'_1$$

Los vectores de dimensión de la subgráfica A'_1 tienen 0 en las coordenadas correspondientes a los vértices Δ no involucrados en A'_1 en particular tienen 0 en los vértices 1 y 2.

Los vectores de dimensión de las representaciones de A' que no están en la subgráfica de A'_1 tienen 1 en la coordenada 2 y 0 en las coordenadas de Δ no involucradas en A'.

El número de representaciones de la subgráfica de Δ que corresponde a A' que tiene 1 en el lugar 2 es

$$\frac{(l-1)l}{2} - \frac{(l-2)(l-1)}{2} = l-1$$

Los vectores de dimensión de la subgráfica de A'' tienen 0 en todas las coordenadas no involucradas en A'', en particular, tienen 0 en los vértices 1 y 2.

Esta subgráfica forma parte de la subgráfica que corresponde a A''_1.

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{3''}{\circ} \longrightarrow \underset{4''}{\circ} \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)''}{\circ}$$

Los vectores de dimensión de las representaciones de A''_1, que no están en la subgráfica de A'' tienen 1 en las coordenadas 1 y 2 (por la forma en que se construyen las sucesiones de A.R.).

Los vectores de dimensión de las representaciones inyectivas de Δ que corresponden a los vértices involucrados en A' tienen 0 en todos los vértices excepto en los de A', en particular en los vértices 1 y 2 .

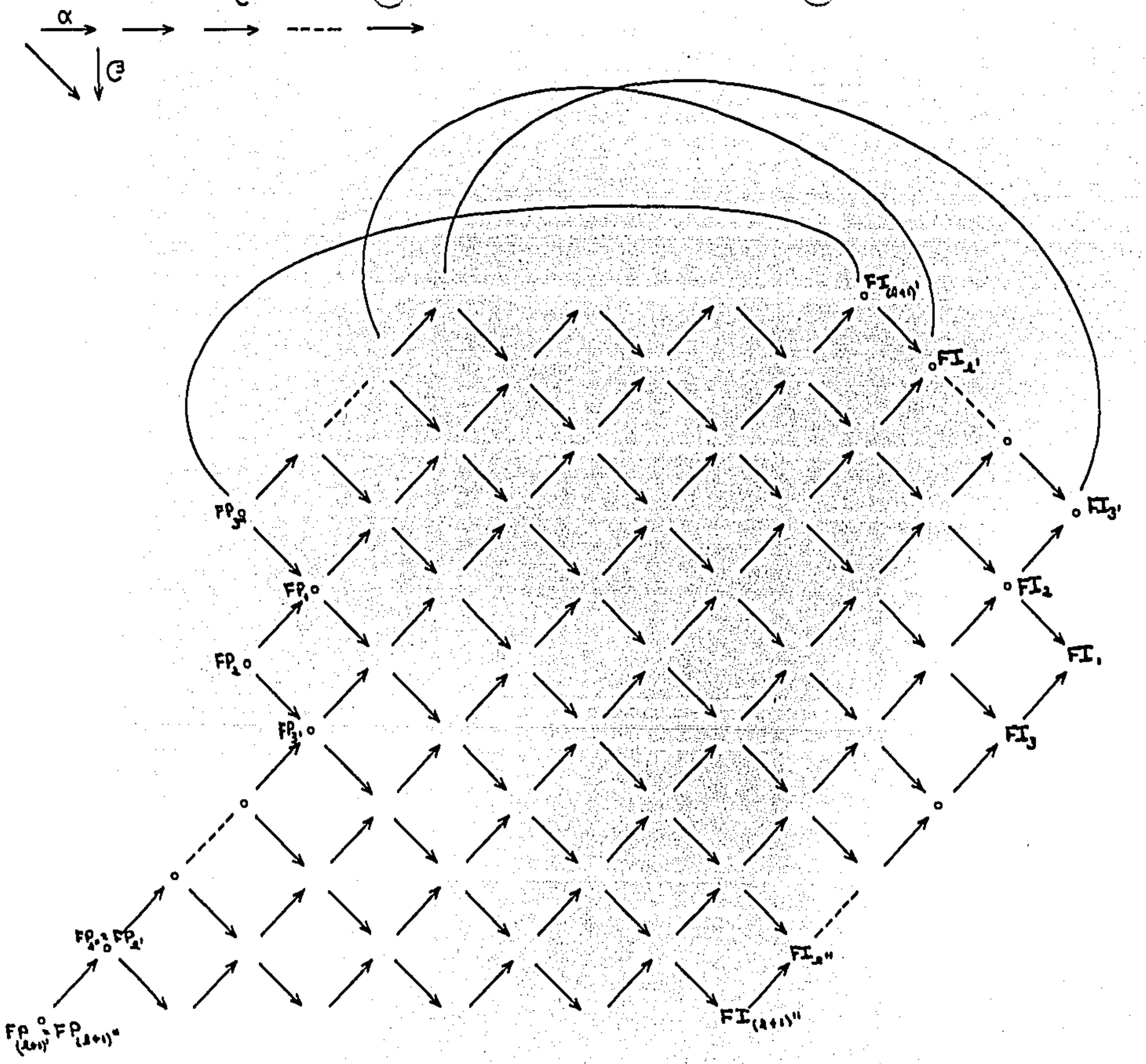
Al aplicar el funtor Γ para construir el carcaj de A.R. de Γ con $\beta\alpha = 0$ tendremos que la subgráfica correspondiente a A'_1, se pega con la subgráfica de A'' correspondiente álgebra:

$$\underset{4''}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)''}{\circ}$$

de A_1''. Los morfismos irreducibles que conectaban A' desaparecen.

La parte de la subgráfica de A'' que no forma parte de la subgráfica de A_1'', pero que sigue teniendo 0 en las coordenadas 1 y 2 se pega con las representaciones inyectivas de Δ que corresponden a los vértices involucrados en A'.

GRAFICA DE Γ CON $\beta\alpha = 0$



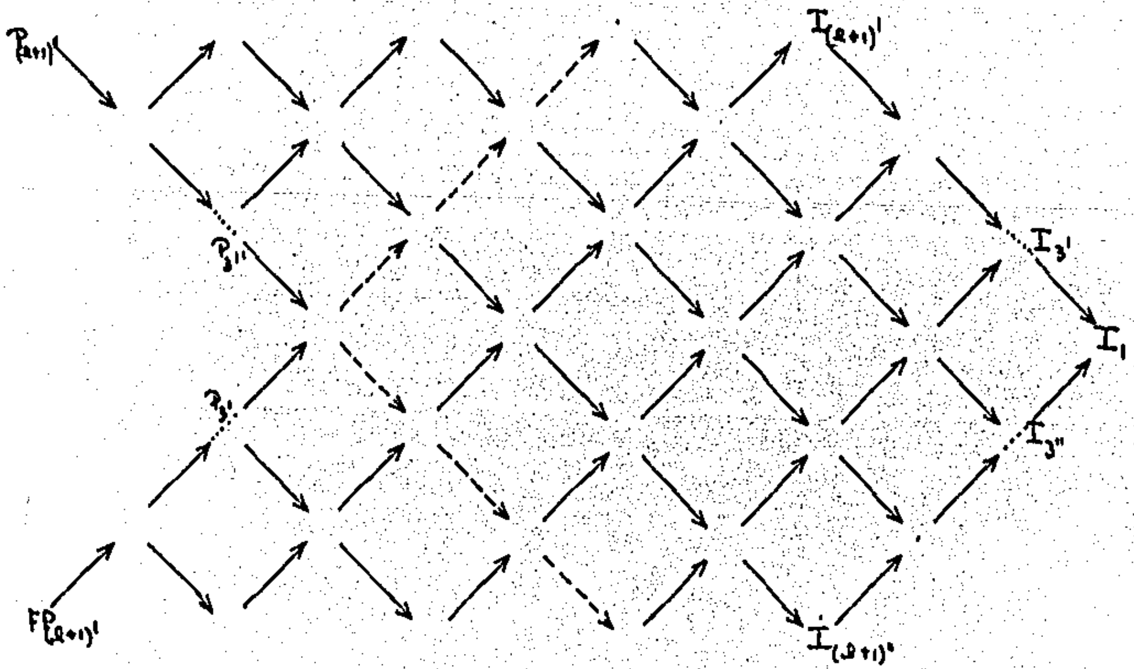
Descripción de la gráfica auxiliar Δ'

La gráfica de A.R. de Δ' contiene las subgráficas que corresponden a las algebras uniseriales

$$\overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{3''}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \overset{(l+1)''}{\circ}$$

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)'}{\circ}$$

La sección de las representaciones proyectivas e inyectivas de Δ' es de la forma



Los vectores de dimensión de la subgráfica que corresponde a

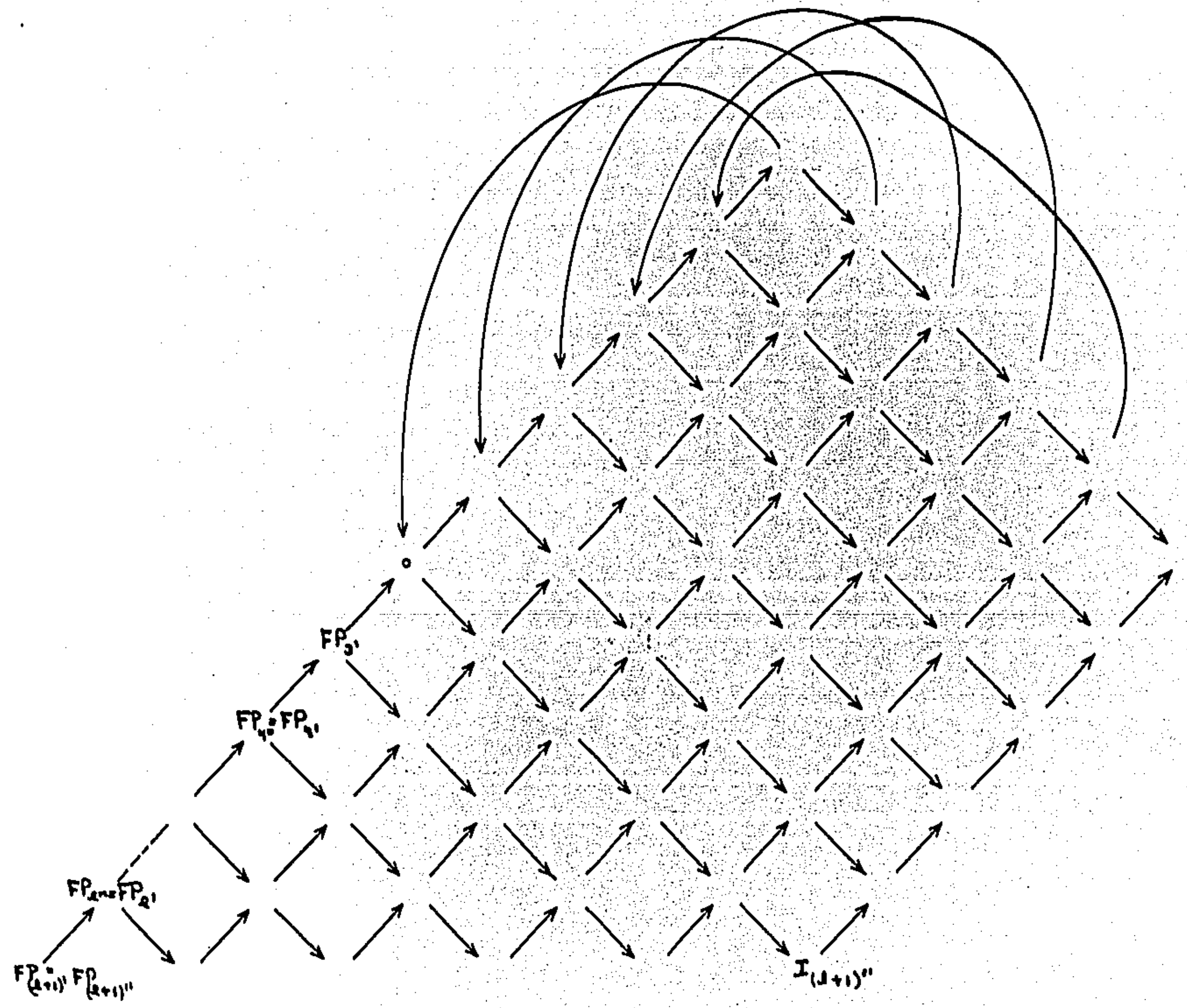
$$\underset{3''}{\circ} \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots \circ \longrightarrow \underset{(l+1)''}{\circ} \quad A''$$

tiene 0 en todas las coordenadas de Δ' excepto en las coordenadas de A" y por la forma que se construyen las sucesiones que casi se dividen las representaciones inyectivas de A" dentro de Δ' tienen 0 en la coordenada 1 y 1 en la coordenada 3", es decir, en esta sección α' no es epimorfismo.

Descripción del carcaj de Auslander Reiten de (C_1,Ω)

Consideremos la subcategoría plena de representaciones de Γ con $\beta\alpha=0$ que corresponden a representaciones de Δ en las que β' es un isomorfismo y α' es un epimorfismo.

Aparecen ahora nuevos morfismos irreducibles que son los que se obtienen al pegar F.


FP3'
FP4=FP4'
FP2n=FP2'
FP(l+1)' FP(l+1)''
I(l+1)''

La gráfica 4.1.1 es la gráfica de A.R. de Δ_5:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1' \arrow[rr] \arrow[d, "\alpha'"'] & & 2' & & & \\
6' & 5' \arrow[l] & 4' \arrow[l] & 3' \arrow[l] & & 3'' \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[r] & 4'' \arrow[r] & 5'' \arrow[r] & 6''
\end{tikzcd}$$

La gráfica 4.1.2 es la gráfica de A.R. de $\frac{\Gamma_5}{\langle\rho\rangle}$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \\
 & 2 & & &
\end{tikzcd}$$

donde $\rho = \beta\alpha = 0$.

La gráfica 4.1.3 es la gráfica auxiliar Δ_5' :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2=3'' \arrow[dr] & & & \\
6' & 5' \arrow[l] & 4' \arrow[l] & 3' \arrow[l] & & 4'' \arrow[r] & 5'' \arrow[r] & 6''
\end{tikzcd}$$

La gráfica 4.1.4 es la gráfica de A.R. de C_5 con la orientación Ω:

$$\xrightarrow{2} \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$$

Las representaciones proyectivas inescindibles son FX_5, $FP_{3''}$, $FP_{4''}$, $FP_{5''}$ y $FP_{6''}$; las representaciones inyectivas inescindibles son: FI_1, FI_2, $FI_{3''}$, $FI_{4''}$, FI_5, y FI_6, y hay tres nuevas sucesiones que casi se dividen.

$$FX_{34} \longrightarrow FX_5 \oplus FX_{33} \longrightarrow FX_6$$

$$FX_{33} \longrightarrow FX_6 \oplus FX_{32} \longrightarrow FX_{17}$$

$$FX_{32} \longrightarrow FX_{17} \oplus FX_2 \longrightarrow FX_{28}$$

La gráfica 4.2 es la gráfica de

$$\xrightarrow{2} \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow$$

La gráfica 4.3 es la gráfica de

$$\xrightarrow{2} \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow$$

La gráfica 4.4 es la gráfica de

$$\xrightarrow{2} \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$$

La gráfica 4.5 es la gráfica de

$$\xrightarrow{\quad 2 \quad} \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$$

La gráfica 4.6 es la gráfica de

$$\xrightarrow{\quad 2 \quad} \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow$$

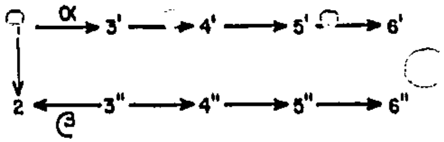
La gráfica 4.7 es la gráfica de

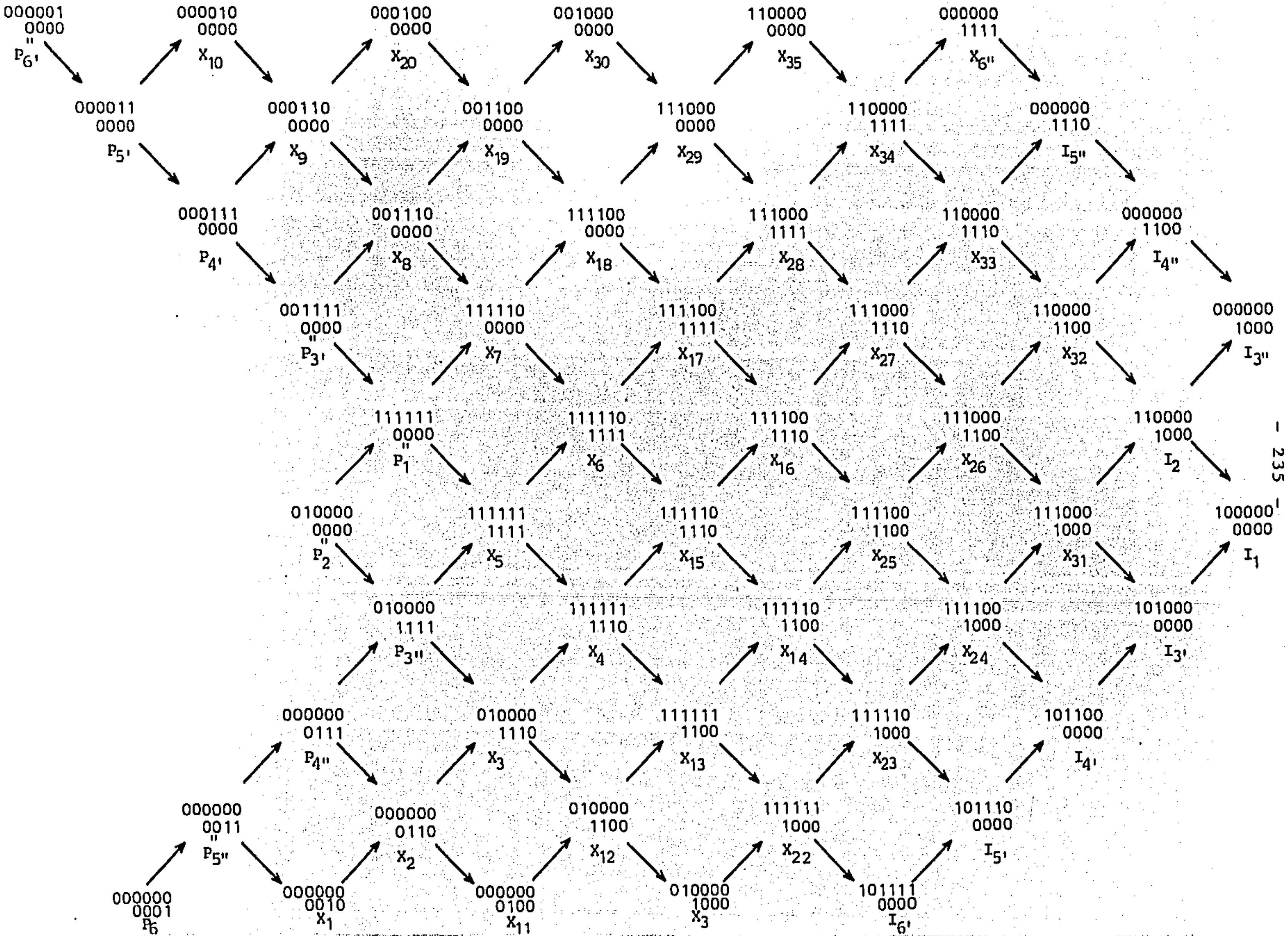
$$\xrightarrow{\quad 2 \quad} \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow$$

La gráfica 4.8 es la gráfica de

$$\xrightarrow{\quad 2 \quad} \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$$

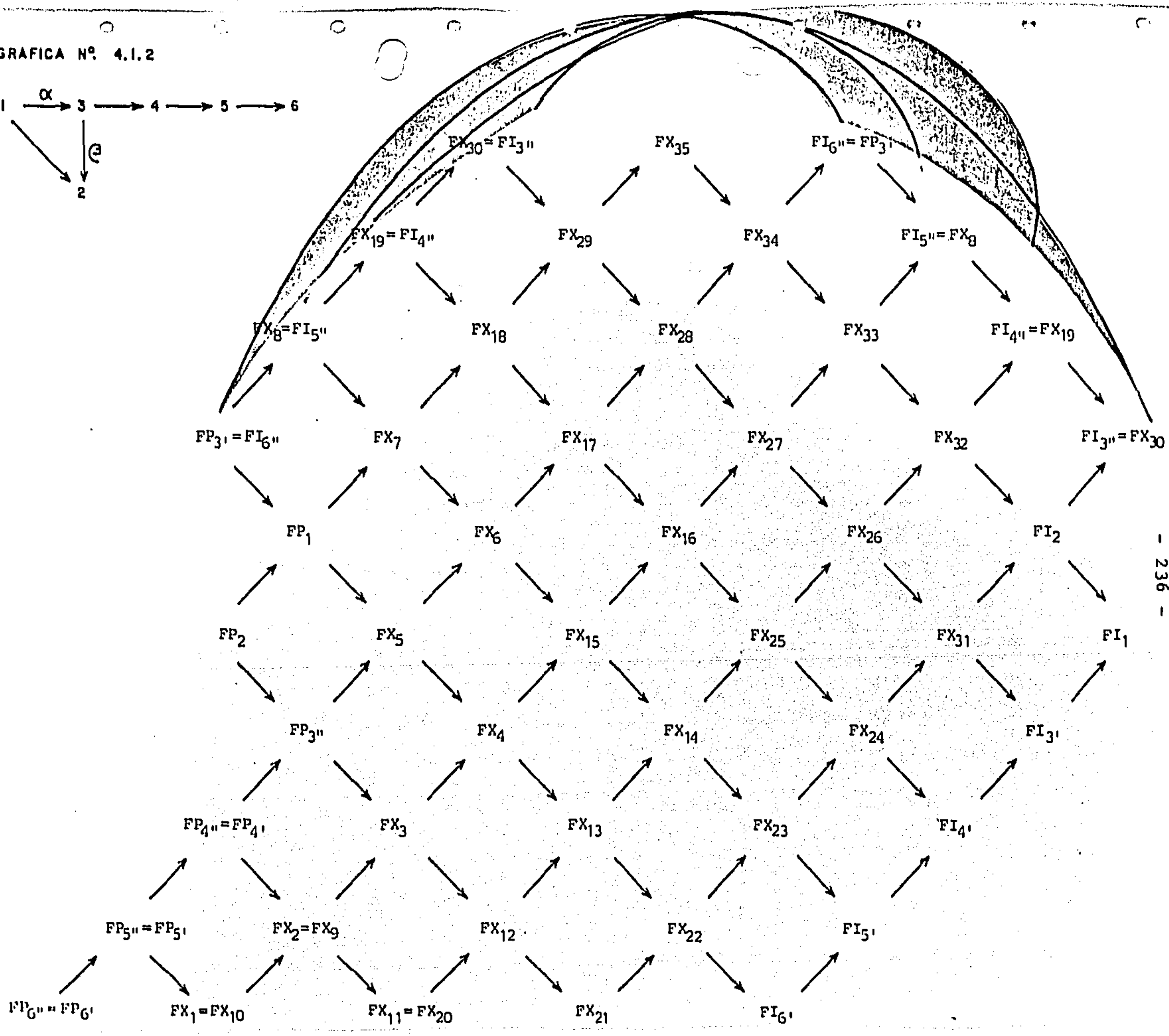
GRAFICA Nº 4.1.1





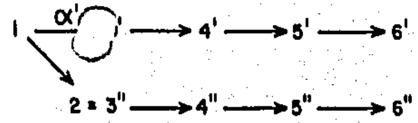
GRAFICA Nº. 4.1.2

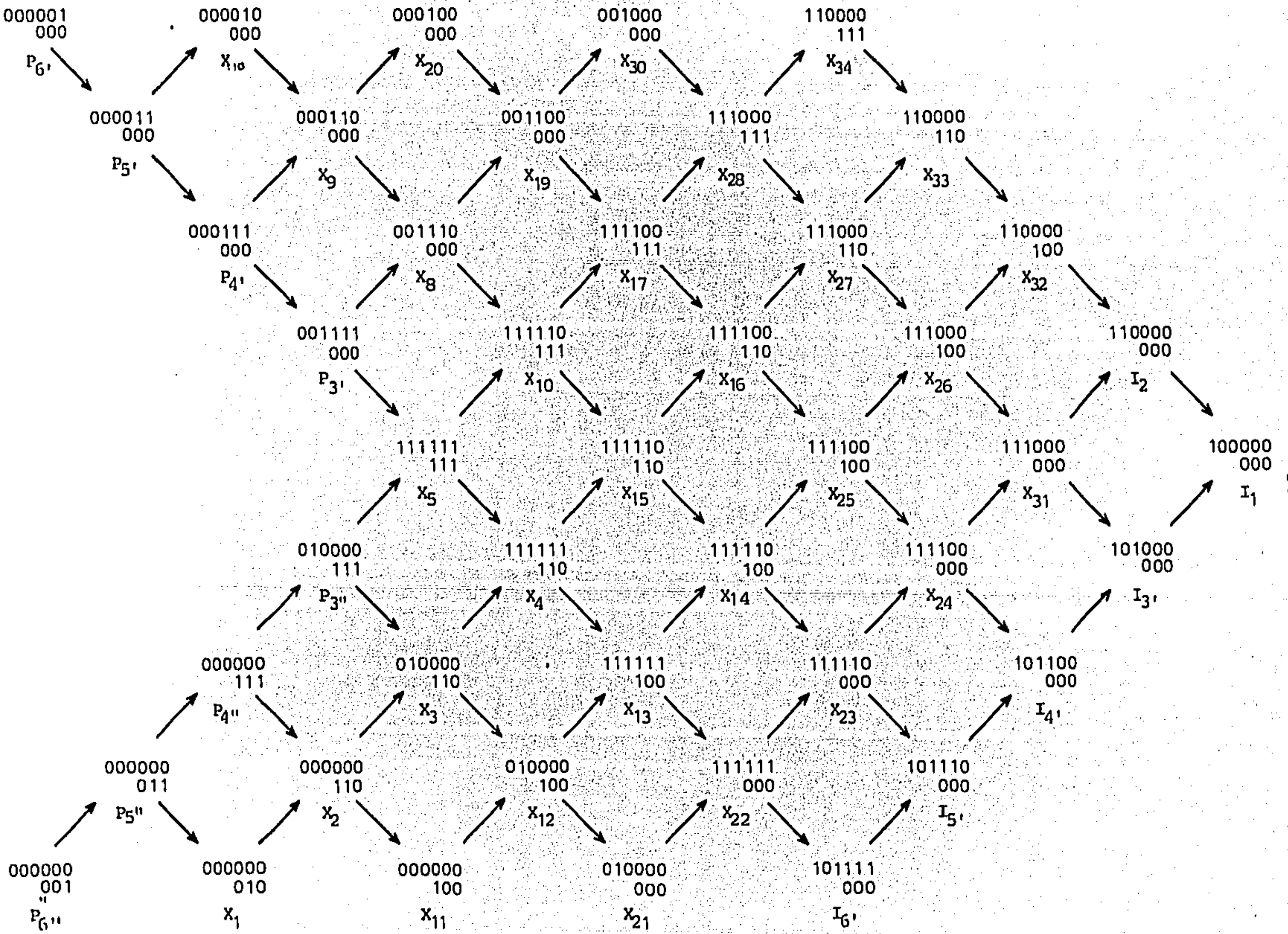
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \\ & 2 & & & \end{tikzcd}$$



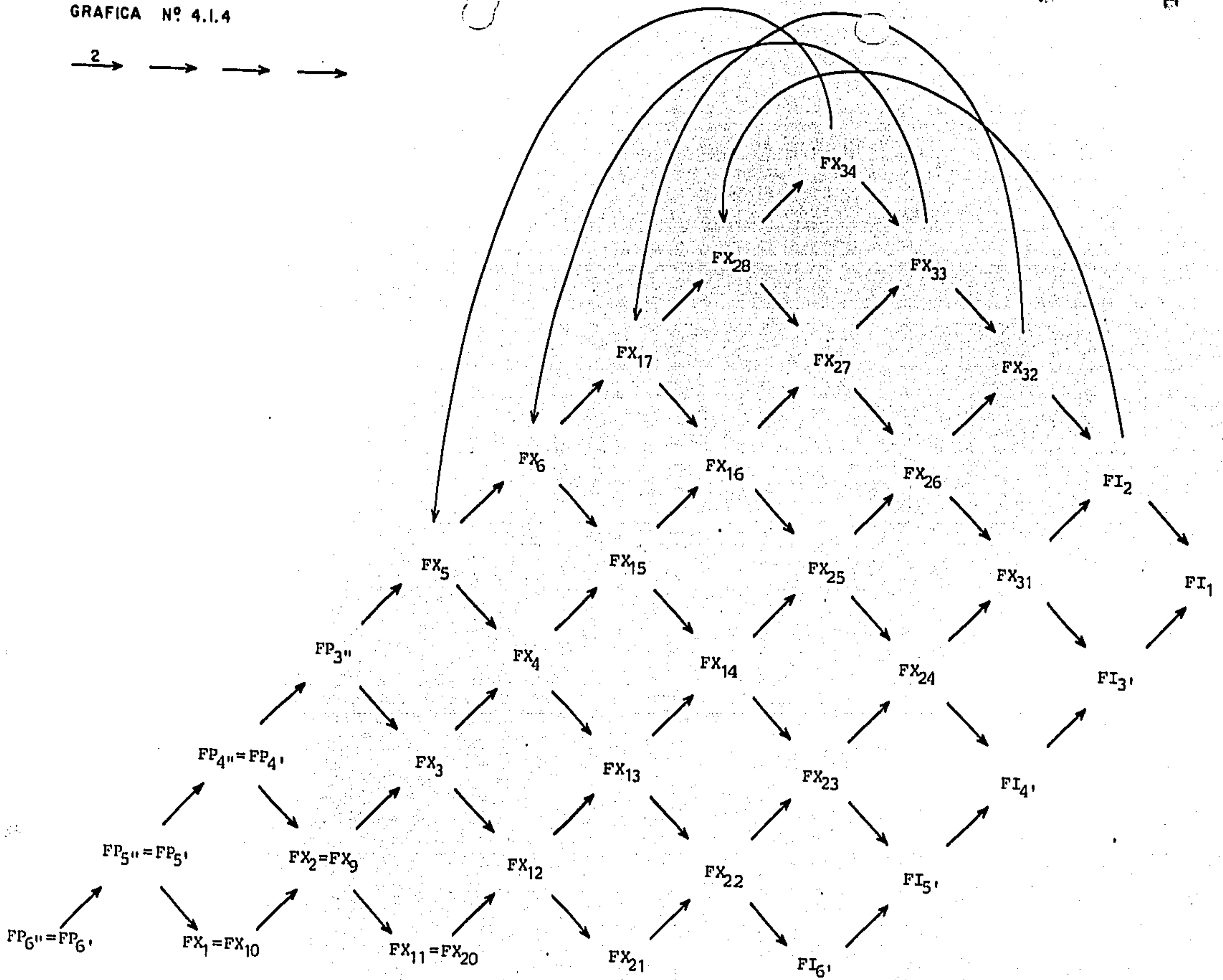
GRAFICA Nº 4.1.3

GRAFICA AUXILIAR

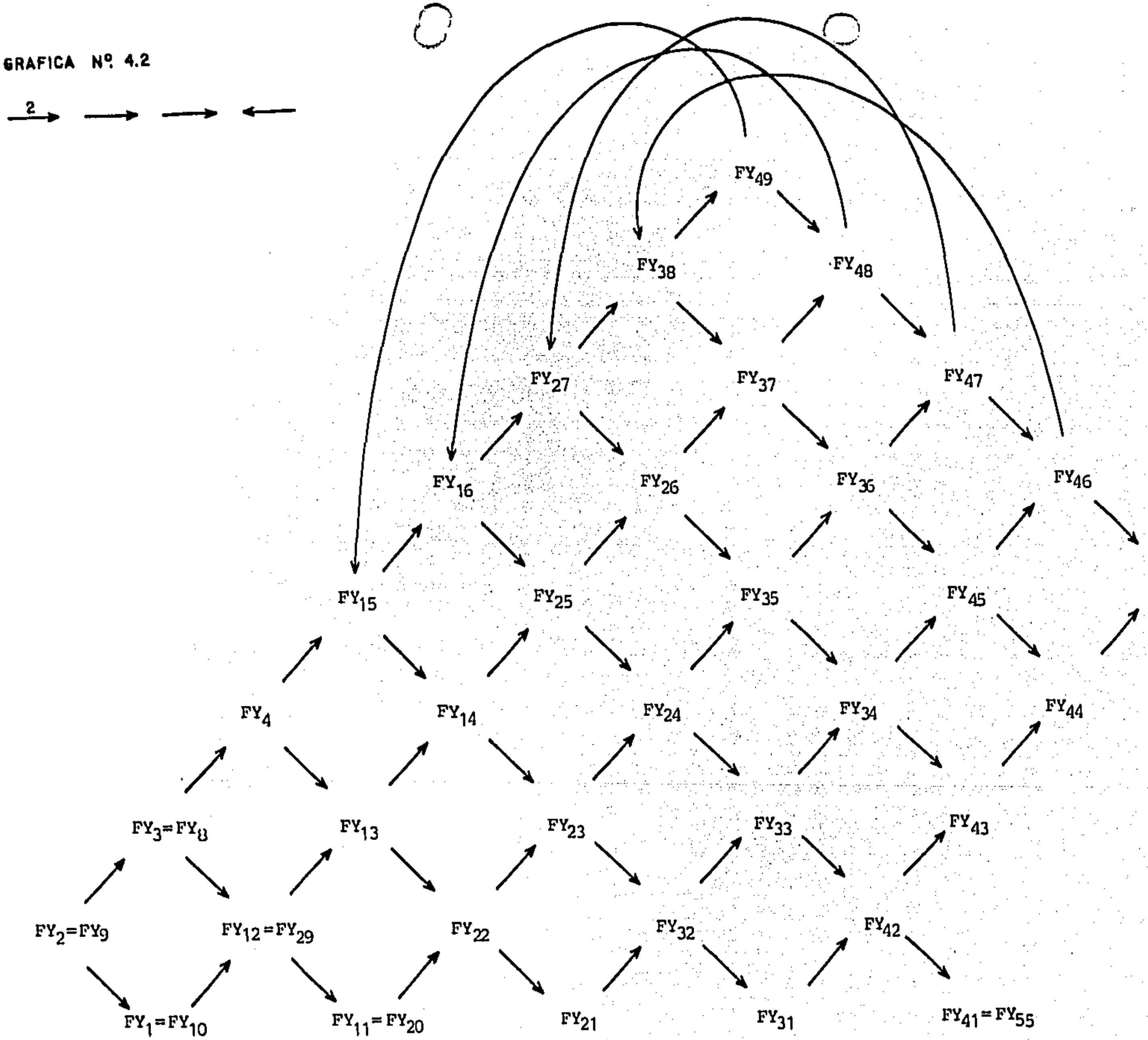




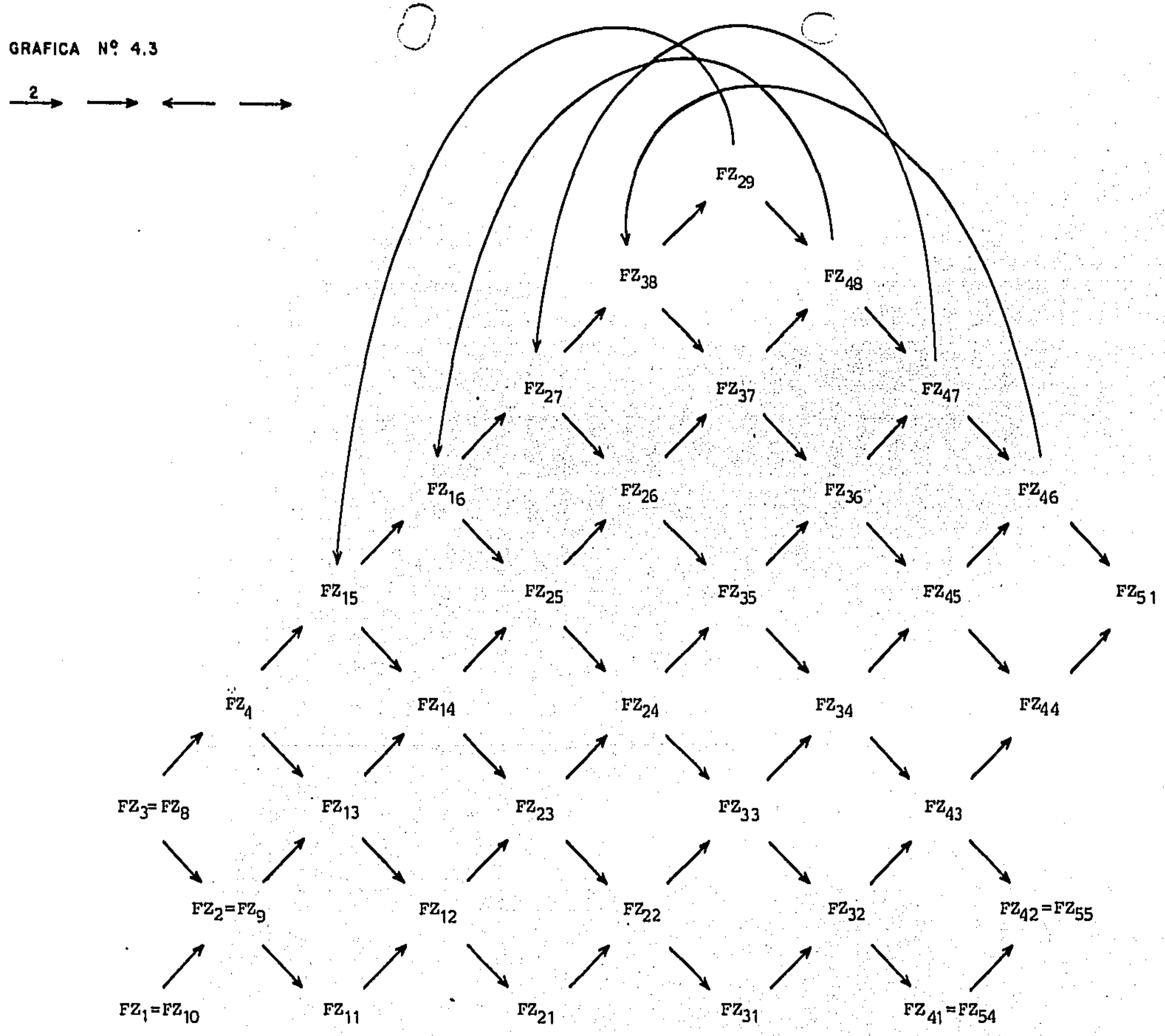
GRAFICA Nº 4.1.4



GRAFICA Nº 4.2

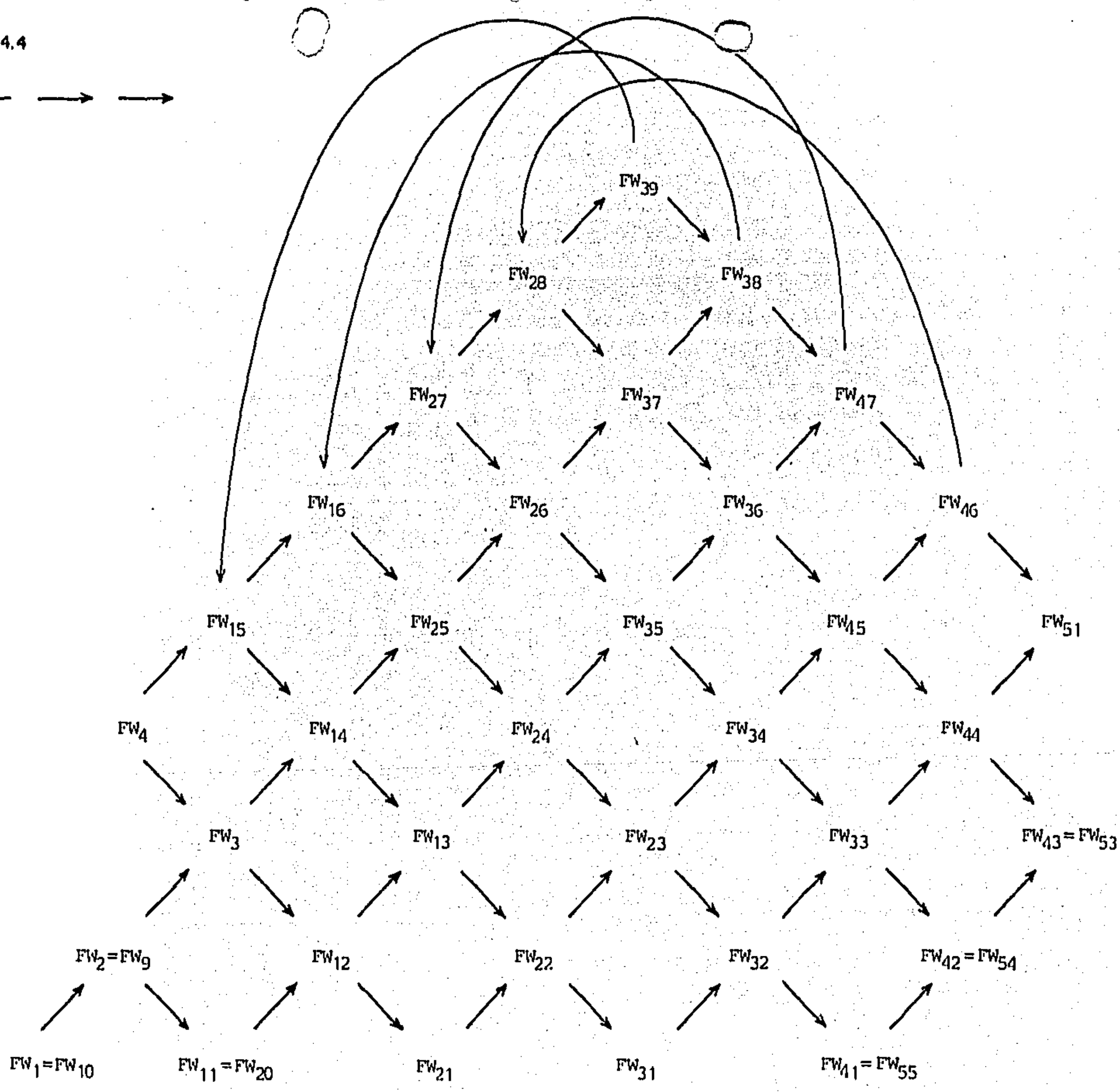


GRAFICA Nº 4.3



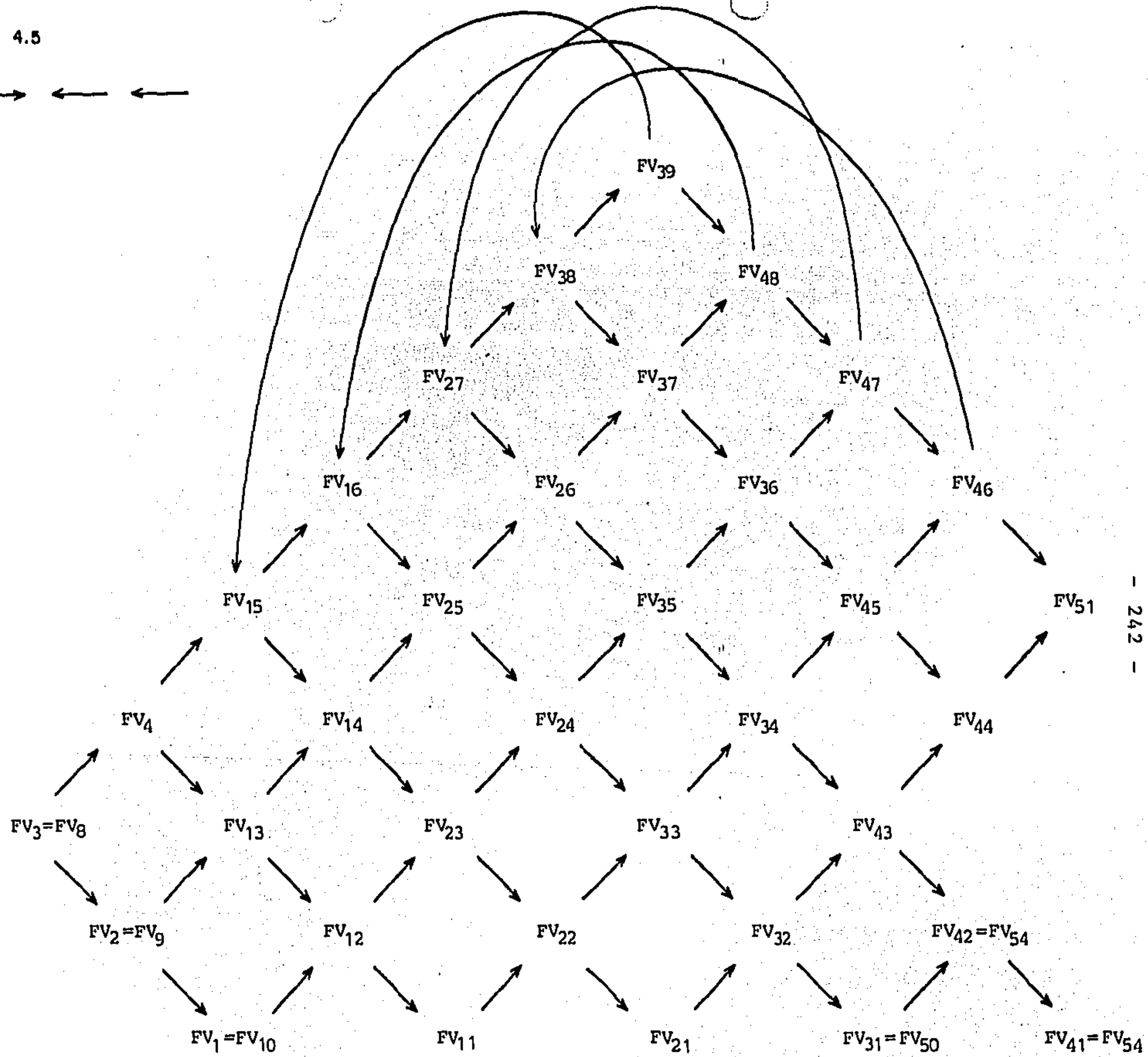
GRAFICA Nº 4.4

$\xrightarrow{2}$ $\longleftarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$

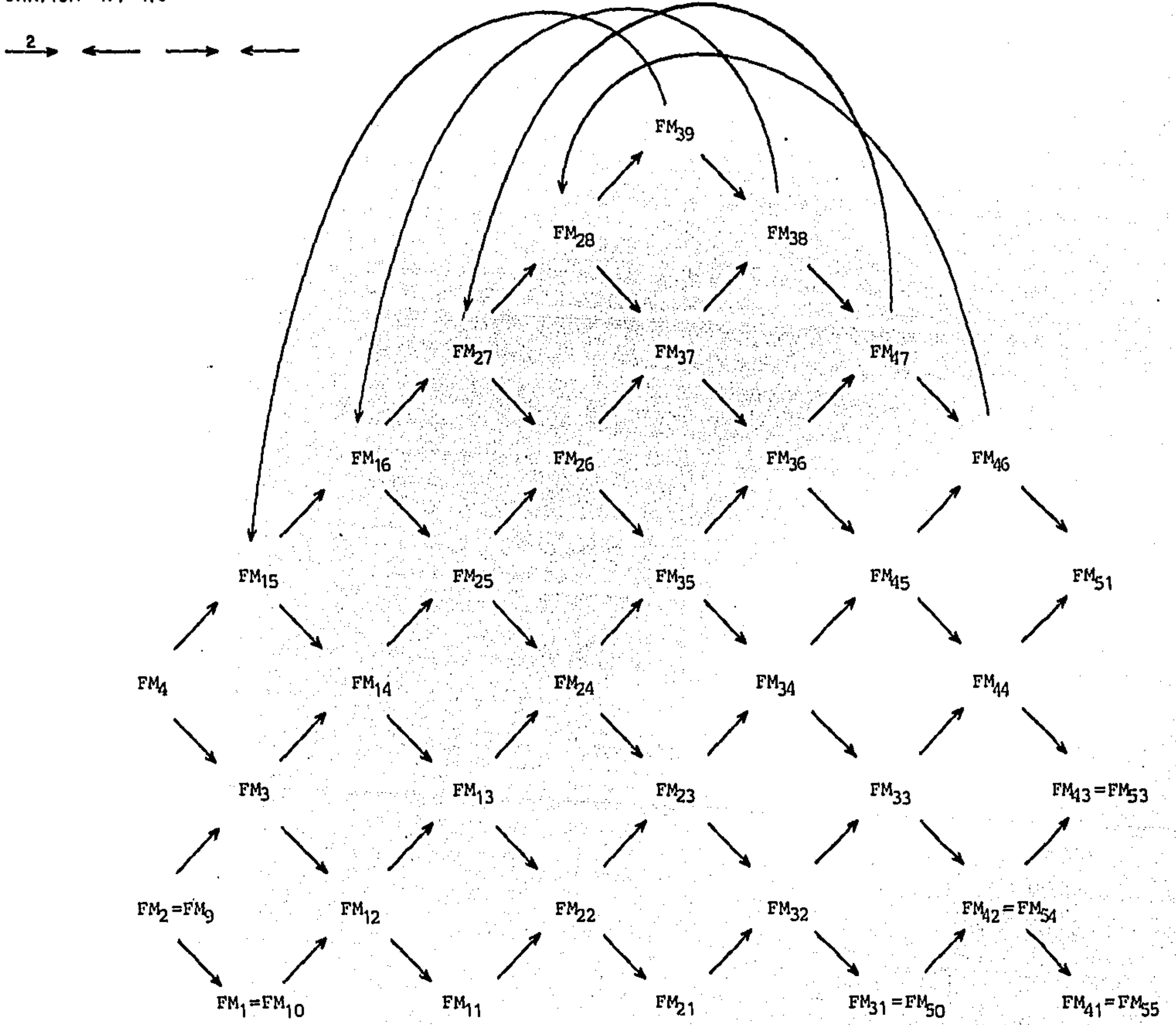


GRAFICA Nº 4.5

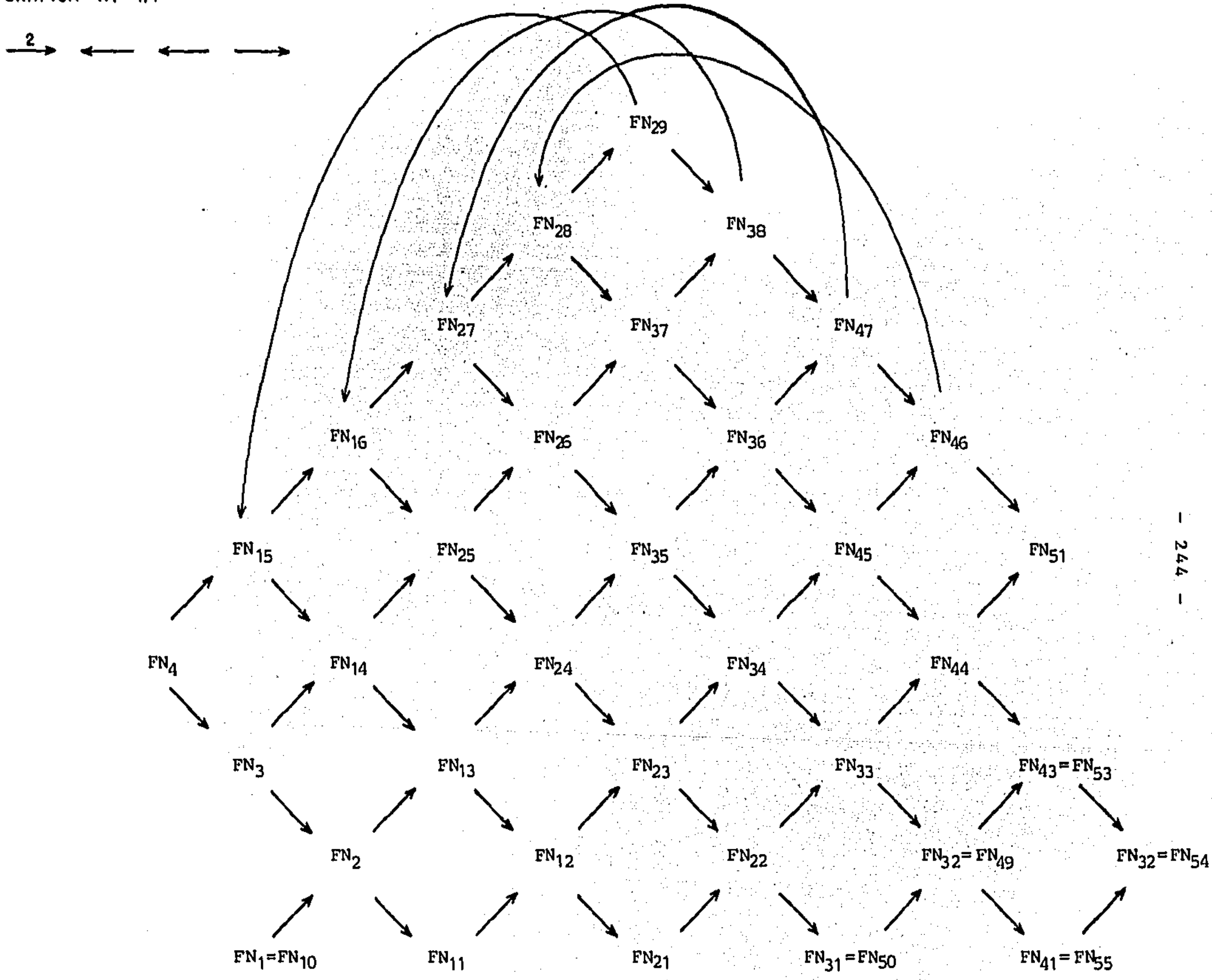
$\xrightarrow{2} \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$



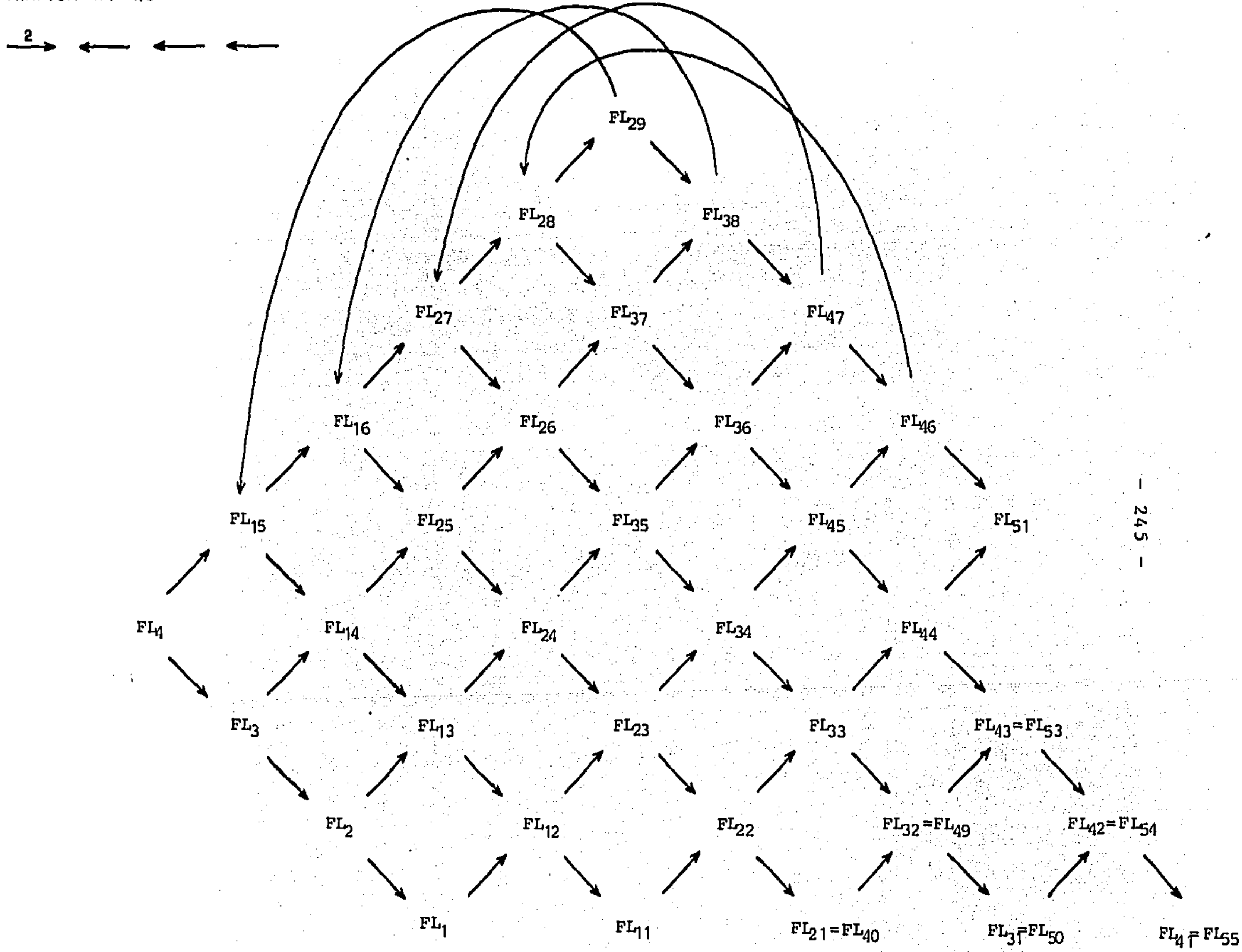
GRAFICA Nº 4.6



GRAFICA Nº 4.7



GRAFICA Nº 4.8



Concluiremos este trabajo mencionando que en [D.R.] Dlab y Ringel clasifican todas las álgebras hereditarias de tipo de representación finita sobre campos no algebraicamente cerrados.

Esta clasificación la hacen asociándole a cada una de estas álgebras un diagrama Dynkin.

Daremos un ejemplo considerando la siguiente álgebra de matrices

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q}\sqrt[3]{2} & \mathbb{Q}\sqrt[3]{2} \end{bmatrix}$$

A esta álgebra le corresponde el diagrama

$$G_2 : \underset{i}{\circ}\xrightarrow{(1,3)}\underset{j}{\circ} \quad \text{donde} \quad 1 = \dim {}_{\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}}\mathbb{Q}\sqrt[3]{2} \quad \text{y} \quad 3 = \dim {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}$$

Una representación de este diagrama es una terna que consta de dos espacios vectoriales $X_{\mathbb{Q}}$ y $Y_{\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}}$ y de una transformación lineal $\varphi : X \otimes_{\mathbb{Q}} M \longrightarrow Y$ donde M es un bimódulo. Se sabe [FGR] que la categoria de estas representaciones es equivalente a la categoria de representaciones de Λ.

Por lo tanto, para encontrar las representaciones inescindibles de G_2, bastará encontrar los módulos inescindibles sobre Λ y estos quedan descritas en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}(1,1)\\ \shortparallel \\ P_1\end{array} \arrow[dr, "{(3,1)}"] & & (2,1) \arrow[dr, "{(3,1)}"] & & (1,0) \\
\begin{array}{c}(0,1)\\ \shortparallel \\ P_j\end{array} \arrow[ur, "{(1,3)}"] & & (3,2) \arrow[ur, "{(1,3)}"] & & (3,1) \arrow[ur, "{(1,3)}"] &
\end{tikzcd}
$$

BIBLIOGRAFIA

[A.F] Anderson F., Fuller K. "Rings and categories of modules" GTM 13 - Springer Verlag 1973.

[A] Auslander M., "Large modules over Artin algebras" Academic Press, 1976.

[APR] Auslander M., Platzeck M.I., Reiten I., "Coxeter functors without diagrams" Trans. American Mathematical Society Vol. 250 1979 [1 - 46].

[AR III] Auslander M., Reiten I., "Representation theory of Artin Algebras III - Comm Alg. 3 (1975) 239 - 294.

[AR IV] Auslander M. Reiten I., "Representation theory of Artin Algebras IV - Comm Alg. 5 (1977) 443 - 518.

[B] Bautista R., "Irreducible morphisms and the radical of a category" Comunicación Interna 3, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.

[BGP] Bernstein I.N., Gelfand I.M. y Ponomarev V.A. "Coxeter functors and Gabriel's theorem" Upsekhi Mat. Nauk 28, 1973 - Traducido al Russian Math. surveys 28, (1973 17 - 32.

[CLS] Cibils C., Larrión F., Salmerón L, "Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones" Monografía del Instituto de Matemáticas 11, U.N.A.M. 1982.

[CR] Curtis Ch, Reiner I., "Methods of Representation Theory with applications to finite groups and orders" - Vol. 1 - Wiley Interscience 1981.

[DR] Dlab V, Ringel C. "Indecomposable representation of graphs and Algebras" M.A.M.S. No. 173 Vol. 6 (1976).

[FGR] Fossum R., Griffith F., Reiten I "The homological algebra of trivial extension of Abelian Categories with applications to ring theory" - Springer Lecture Notes 456 (1975).

[G_1] Gabriel P., "Unzerlegbare Darstellungen I", Manuscripta Math. 6 (1972) 71 - 103.

[G_2] Gabriel P., Representations indécomposable des ensembles ordennés. Seminaire Dubreil (algébre) No. 13 (1972 - 1973) 301 - 304.

[G_n] Gantmacher F.R., "Matrix Theory" Vol. II Chelsea Publ. Co.- New York 1959.

[K] Kleiner, M.M. "Partially ordered sets of finite type" J. Soviet Math. 23 (1975) 607 - 615.

[NR] Nazarova, L.A. Roiter A.V. "Polyquivers and Dynkin Schemes" Funktsionalnyi analiz i ego Prilozheniya, Vol. 7 No. 3 1973.

[C.R.1] Ringel C.M. "On Algorithms for solving vector space problems II. Tame Algebras, Proc. Workshop ICRA II. (Ottawa - 1979). Springer Lecture Notes No. 831, (1980) 137 - 287.

[C.R.2] Ringel C.M. "Tame Algebras and integral quadratic forms". Springer Lecture Notes No. 1099 (1984).