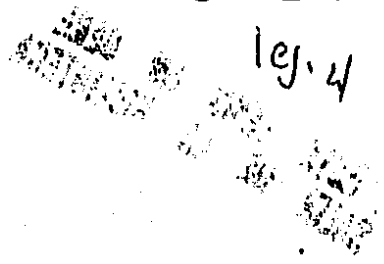


00365

lej. 4



U. N. A. M.

FACULTAD DE CIENCIAS

" CLASES CARACTERISTICAS DE FOLIACIONES "

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

JESUS RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO

MEXICO, D.F.

1985

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

INTRODUCCION	1
NOTACION	4
CAPITULO I	
CLASES CARACTERISTICAS DE FOLIACIONES	
1.- El homomorfismo de Chern Weil.	5
2.- El teorema de anulaci3n de Bott.	11
3.- Clases caracteristicas secundarias.	14
4.- La clase de Godbillon Vey.	18
CAPITULO II	
TEOREMAS DE ANULACION	
1.- Operadores y medidas de Weil.	32
2.- La medida de Godbillon.	40
REFERENCIAS	51

## I N T R O D U C C I O N

Uno de los conceptos más útiles en topología algebraica y geometría diferencial es el concepto de clases características. Hacia 1970 este concepto fué introducido en la teoría de foliaciones por R. Bott.

El proposito del presente trabajo es mostrar algo de lo que se conoce actualmente acerca de la teoría de clases características de foliaciones, para ello se recopilan ideas y resultados de distintos matemáticos.

Dada una foliacion  $F$  de una variedad  $M$ , tiene asociado un haz normal  $N$ , que resulta ser un subhaz del haz tangente de  $M$ . El haz normal de  $F$  tiene a su vez asociadas clases características. Que son clases en la cohomología de Rham de  $M$ . Estas clases miden esencialmente que tan diferente resulta ser el haz de un haz producto. Una de las maneras más sencillas de construir estas clases es siguiendo a S. Chern y A. Weil, los cuales utilizan para ello la curvatura. Esta construcción es presentada en la primera sección del capítulo I.

El hecho de que  $N$  sea el haz normal de una foliación implica, la anulación de ciertas de sus clases características. Este resultado se conoce como el teorema de anulación de Bott y es demostrado en la segunda sección del capítulo I.

Utilizando el teorema de anulación de Bott y la construcción de

Chern y Weil, es posible asociar a  $N$  nuevas clases en la cohomología de  $M$ , llamadas clases características secundarias. Esto se desarrolla en la tercera sección de capítulo I. El problema principal de este trabajo consiste en explorar el significado de estas clases características secundarias con respecto a las propiedades de la foliación ya sea como sistema dinámico o bien con respecto a sus propiedades geométricas. En particular se desarrollan criterios que implican la anulación de algunas de estas clases.

En la cuarta sección del primer capítulo, se estudia la clase de grado más bajo entre las clases características secundarias, la que fué por primera vez estudiada por C. Godbillon y J. Vey. Se construyen ejemplos en los cuales esta clase es no trivial, y se interpreta la no trivialidad de esta clase en términos de la geometría diferencial de la foliación, interpretación que se debe a W. Thurston, B. Reinhart y J. Wood.

Para una foliación dada puede suceder que la no trivialidad de las clases características secundarias se encuentre localizada en la unión de algunas hojas de la foliación. Este fenómeno fué descubierto por G. Duminy. Con el fin de estudiarlo se introducen en la primera sección del capítulo II, las medidas y operadores de Weil y son demostradas además algunas de sus propiedades básicas.

En la segunda sección del capítulo II se demuestran algunos teoremas que afirman la anulación de ciertas clases características secundarias en términos de las propiedades de la foliación como sistema dinámico. Por ejemplo para foliaciones con todas las hojas compactas y sin holonomía ó bien si la foliación es equicontinua (esto es que cualesquiera dos hojas transversalmente cercanas permanezcan siempre cercanas) se tiene la anulación de la clase de Godbillon Vey.

Finalmente quisiera agradecer a todas las personas que de alguna manera me han ayudado a realizar este trabajo. Entre ellas a Xavier

Gómez-Mont, Vlad Serguiescu, Ana Irene Ramírez, especialmente a -  
Socorro Soberón y Alberto Verjovsky sin cuya dirección y paciencia  
no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

Jesús Muciño.

## NOTACION

Sea  $M^m$  una variedad real diferenciable esto siempre significará de clase  $C^\infty$ , donde el índice superior  $m$  indica la dimensión de  $M$ . Se denota por :

$TM$  El haz tangente a  $M$ .

$X(M)$  Los campos vectoriales en  $M$  diferenciables.

$A^n(M)$  Las  $n$ -formas diferenciales en  $M$ .

$d$  La derivada exterior de formas.

$H^n(M)$  El  $n$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham de  $M$ .

$F$  Una foliación en  $M$  diferenciable ( $\star$ ).

$X(F)$  Los campos vectoriales diferenciables y tangentes a las hojas de  $F$ .

( $\star$ ) La hipótesis de  $C^\infty$  puede debilitarse a solo  $C^2$  ya que se utilizará el concepto de curvatura que necesita  $C^2$ , sin embargo para simplificar la exposición se supone  $C^\infty$ .

# CAPITULO I

## CLASES CARACTERISTICAS DE FOLIACIONES

### 1.- El homomorfismo de Chern Weil.

En esta sección se presentan los conceptos necesarios para construir el homomorfismo de Chern Weil con el fin de obtener las clases características asociadas a un haz vectorial.

Sea  $M^m$  una variedad diferenciable, sea  $\Pi: N \longrightarrow M$  un haz vectorial diferenciable sobre  $M$  con fibra  $\mathbb{R}^m$ , se denotará por  $\Gamma(N)$  a sus secciones diferenciables y al haz mismo simplemente por  $N$ . Se introduce ahora una conexión en  $N$ , esto es una aplicación  $V$  tal que

$$\begin{aligned} V : X(M) \times \Gamma(N) &\longrightarrow \Gamma(N) \\ (X, S) &\longrightarrow V_X S \end{aligned}$$

y satisface

- a)  $V$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal
- b)  $V_X fS = fV_X S + X(f)S$
- c)  $V_{fX} S = fV_X S$  con  $f \in A^0(M)$ .

La curvatura de la conexión  $R$  esta definida como sigue

$$R : X(M) \times X(M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Gamma(N), \Gamma(N))$$

donde  $(X, Y) \longrightarrow R(X, Y) = V_X V_Y - V_Y V_X - V_{[X, Y]}$

Si se introduce un marco local para  $N$ , denotado por  $\{S_i\}$  es posible escribir

$$V_X S_i = \sum_j w_{ij}(X) S_j \quad \text{con } w_{ij} \in A^1(M)$$



de donde la conexión queda determinada por una matriz de  $n \times n$ , con entradas dadas por 1-formas. Es posible ahora escribir las 2-formas de curvatura como

$$R_{ij} = dw_{ij} + \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}$$

con lo cual R se expresa como

$$R(X,Y)S_i = \sum_j R_{ij}(X,Y) S_j \quad \text{esto es,}$$

$$R(X,Y) = \begin{bmatrix} R_{11}(X,Y) & \cdot & \cdot & \cdot & R_{1n}(X,Y) \\ \vdots & & & & \vdots \\ R_{n1}(X,Y) & \cdot & \cdot & \cdot & R_{nn}(X,Y) \end{bmatrix},$$

y si se evalúa en  $p \in M$  cada  $R_{ij}(X,Y)$  se transforma en un número. Por esto es posible pensar a R como una 2-forma con valores en  $gl(n)$ , el álgebra de Lie de matrices reales de  $n \times n$ . No es difícil mostrar que R es invariante bajo cambio de marco, de donde R está bien definida como una 2-forma  $gl(n)$ -valuada sobre todo M. La referencia usual para todo lo anterior es [KN] vol I. Una relación de R con la curvatura gaussiana es a veces posible, ver [M], sin embargo esta interpretación no será usada a lo largo de este trabajo.

Sea  $I_n^k$  el conjunto de aplicaciones

$$P : gl(n) \times \dots \times gl(n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

con k factores en  $gl(n)$ , tales que P es simétrica, k-lineal y  $GL(n, \mathbb{R})$ -invariante esto es

$$P(G_1, \dots, G_k) = P(HG_1H^{-1}, \dots, HG_kH^{-1})$$

para toda  $H \in GL(n, \mathbb{R})$ .  $I_n^k$  es espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y si se considera la suma

$$I_n^* = \bigoplus_{k=0} I_n^k,$$

con el siguiente producto, dadas  $P \in I_n^k$ ,  $Q \in I_n^r$

$$(P \cdot Q)(G_1, \dots, G_{k+r}) =$$

$$= \frac{1}{(k+r)!} \sum_S P(G_{S(1)}, \dots, G_{S(k)}) Q(G_{S(k+1)}, \dots, G_{S(k+r)})$$

donde  $s$  varia en las permutaciones de  $k+r$  numeros. Con ello se obtiene que  $I_n^*$  es una álgebra conmutativa sobre  $\mathbb{R}$  (para más detalles y propiedades de  $I_n^*$  ver [KN] vol. II ó [Bl]).

Utilizando la curvatura y estas aplicaciones es posible construir clases en  $H^*(M)$  como sigue.

I.1 Definición. Dados  $P \in I_n^k$  y  $V$  como antes, se define  $P(R) \in \Lambda^{2k}(M)$  como :

$$P(R)(X_1, \dots, X_{2k}) =$$

$$= \frac{1}{(2k)!} \sum_S (-1)^S P(R(X_{S(1)}, X_{S(2)}), \dots, R(X_{S(2k-1)}, X_{S(2k)}))$$

donde  $s$  varia en las permutaciones de  $2k$  números,  $(-1)^S$  es el signo de la permutación, cada  $X_i \in X(M)$  y  $R(X_i, X_j)$  esta en  $gl(n)$ .

Para mostrar que en efecto  $P(R)$  es una  $2k$ -forma se intercambian dos campos  $X_i$  entre sí y se observa que cada sumando cambia de signo. Observese además que la invarianza de  $P$  es necesaria para que  $P(R)$  no dependa del marco con respecto al cual esta expresada la curvatura  $R$ . Estas formas determinan clases en cohomología.

I.2 Lema. Chern - Weil.  $dP(R) = 0$ .

Esbozo de la demostración. Se calcula la derivada exterior de  $P(R)$  utilizando la  $k$ -linealidad de  $P$  y se observa que queda expresada en terminos de  $dR$ , ahora mediante la identidad de Bianchi para la curvatura  $dR=0$  de donde el resultado sigue. Para más detalles ver [KN] vol. II, [GH].

Q. E. D.

La pregunta natural ahora es cómo es la dependencia de  $P(R)$  con respecto a  $V$ .

I.3 Lema. Chern - Weil. La clase  $[P(R)] \in H^*(M)$  no depende de la

conexión elegida.

Demostración. Se desarrollan dos demostraciones diferentes pues las ideas de ambas se utilizarán posteriormente.

Primera demostración. Dado el haz  $N$  se considera un nuevo haz  $N \times \mathbb{R}$  con proyección  $\Pi \times \text{Id.} : N \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ . Dadas  $V^0, V^1$  dos conexiones en  $N$ , se define una nueva conexión  $V^t$  en  $N \times \mathbb{R}$  como

$$V_X^t(S) = tV_X^0(S) - (1-t)V_X^1(S) \quad \text{si } X \text{ es tangente a } M \times \{t\} \quad \text{ó}$$

$$V_Y^t(S) = 0 \quad \text{si } Y \text{ es tangente a } \{p\} \times \mathbb{R},$$

para todo  $p \in M$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

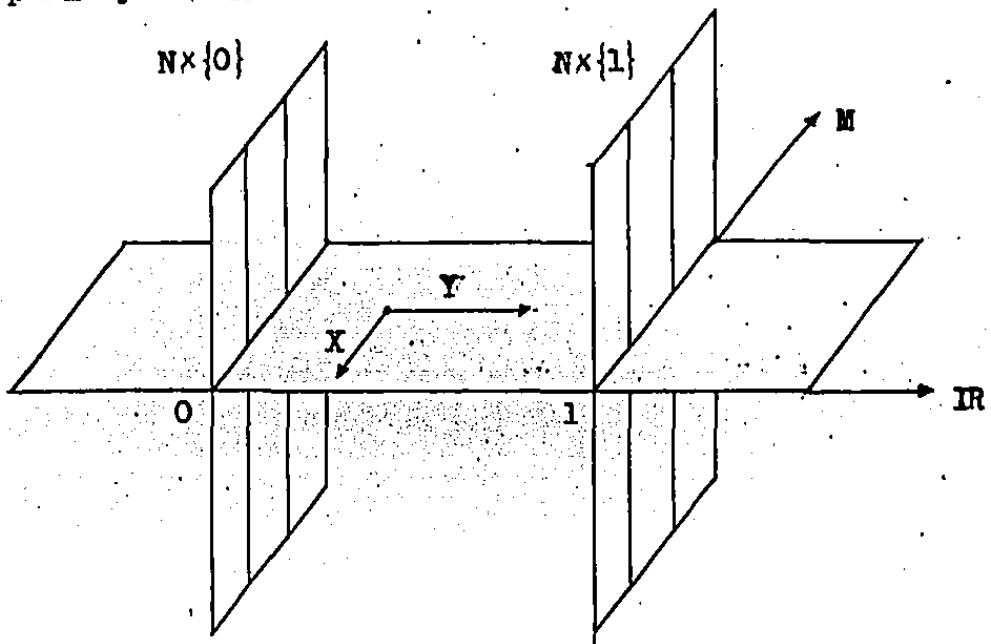


Fig. 1 El haz  $N \times \mathbb{R}$  ..

Obeservese que  $V^t$  tiene la siguientes propiedades :

$V^t$  restringida a  $N \times \{0\}$  es  $V^0$

$V^t$  restringida a  $N \times \{1\}$  es  $V^1$  .

Ahora si  $J_t : N \longrightarrow N \times \mathbb{R}$  es la inclusión natural del haz  $N$  en el haz  $N \times \mathbb{R}$ , esto es  $J_t(p) = (p, t)$ , se tiene el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{J_t} & N \times \mathbb{R} \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \times \text{Id.} \\
 M & \xrightarrow{J_t} & M \times \mathbb{R}
 \end{array}$$

lo que induce isomorfismos en cohomología :

$$J_0^* , J_1^* : H^*(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(M)$$

tales que  $J_0^* = J_1^*$ , con esto

$$J_0^*[P(R^t)] = [P(R^0)] \quad , \quad J_1^*[P(R^t)] = [P(R^1)]$$

donde  $R^t, R^0, R^1$  son las curvaturas asociadas a  $\nabla^t, \nabla^0, \nabla^1$  respectivamente, lo que termina la demostración. Para más detalles ver [E1].

Segunda demostración. Dadas las conexiones  $\nabla^0, \nabla^1$  como antes se considera

$$Q = (w_{ij}^0) - (w_{ij}^1)$$

donde  $(w_{ij}^0), (w_{ij}^1)$  son las matrices de 1-formas asociadas a  $\nabla^0, \nabla^1$  respectivamente; Q puede interpretarse, análogamente como se hizo para R, como una 1-forma  $gl(n)$ -valuada.

I.4 Definición. Dado  $P \in I_n^k$  se construye una  $(2k-1)$ -forma asociada a las conexiones  $\nabla^0, \nabla^1$  llamada la forma de transgresión como

$$P(R^0, R^1) = k \int_0^1 P(Q, R^t, \dots, R^t) dt$$

donde el integrando  $P(Q, R^t, \dots, R^t)$  tiene  $k-1$  factores  $R^t$  y esta definido sumando sobre todas las permutaciones de  $k$  números, como en la definición I.1, este integrando se valua en  $2k-1$  campos vectoriales por lo que se obtiene efectivamente una  $(2k-1)$ -forma. Además cada  $P(Q, R^t, \dots, R^t)$  depende de  $t$  en el sentido de que las matrices de curvatura  $R^t$  están definidas como la curvatura de la conexión  $\nabla^t = t\nabla^0 - (1-t)\nabla^1$  en el haz  $N$ .

Ahora utilizando nuevamente la  $k$ -linealidad de  $P$  se verifica que

$$d(P(R^0, R^1)) = P(R^0) - P(R^1)$$

de donde  $[P(R^1)] = [P(R^0)]$  en cohomología, lo que finaliza la demostración ; para más detalles ver [KN] vol. II. Q: E. D.

Utilizando ahora los Lemas I.2 y I.3 es posible definir el homeomorfismo de Chern Weil como sigue

$$\begin{array}{ccc} \psi: I_n^* & \longrightarrow & H^*(M) \\ P & \longrightarrow & [P(R)] \end{array} .$$

Con el fin de definir las clases de Pontriagin reales de  $N$  se realiza la siguiente construcción algebraica en  $I_n^*$ .

Dado  $G \in gl(n)$  se considera la igualdad

$$\det(\gamma I - G) = \gamma^n + c_1(G) \gamma^{n-1} + \dots + c_n(G)$$

donde  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $I$  la matriz identidad de  $n \times n$  y cada

$$c_k : gl(n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una función polinomial homogénea de grado  $k$  en las entradas de  $G$  más explícitamente,  $c_k$  está definida como

$$c_k(G) = \sum_J \det(G_{JJ})$$

donde  $J$  es un multiíndice de  $k$  números tomados de  $1, \dots, n$  y  $G_{JJ}$  es la matriz de entradas  $(g_{ij})$  para  $i, j \in J$ . En particular se tiene que

$$c_1(G) = \text{traza}(G)$$

$$c_n(G) = \det(G) .$$

Existe además una relación más explícita entre  $c_k$  e  $I_n^k$  como muestra el siguiente lema :

I.5 Lema. A cada elemento  $c_k$  le corresponde un único polinomio

$P_k \in I_n^k$  tal que

$$P_k(G, \dots, G) = c_k(G) \quad \text{para toda } G \in gl(n).$$

Demostración.  $P_k$  se obtiene de  $c_k$  mediante polarización como sigue: para cualesquiera matrices  $G_1, \dots, G_k \in gl(n)$ , sea  $s$  una permutación de  $k$  números y  $J$  un multiíndice de  $k$  números tomados de  $1, \dots, n$ .

Se define

$G_J^s$  = matriz de  $k \times k$  cuyas columnas se obtienen de permutar las columnas de  $G_{JJ}$  según  $s$ .

Ahora se define  $P_k$  como

$$P_k(G_1, \dots, G_k) = \frac{1}{k!} \sum_s \sum_J \det(G_J^s).$$

Basta observar ahora que para cada  $s$  fija la suma sobre  $J$  es precisamente  $c_k$ , de donde se sigue fácilmente que  $P_k \in I_n^k$  y que

$$P_k(G, \dots, G) = c_k(G). \quad \text{Q. E. D.}$$

Utilizando las aplicaciones  $P_k$  elegidas canónicamente según el lema se tiene la siguiente definición.

I.6 Definición. Se definen las clases  $[P_k(R)] \in H^{2k}(M)$ . En particular si  $k$  es par se obtienen las clases de Pontriagin reales del haz  $N$ . Se denotara  $[P_k(R)] = c_k(R)$ .

En general las clases construidas anteriormente reciben el nombre de clases características del haz  $N$ . Ellas miden que tan diferente es el haz  $N$  de un haz producto; una discusión rigurosa de esto puede hallarse en [MS].

## 2.- El teorema de anulación de Bott.

La primera relación conocida entre las clases de Pontriagin de un haz y la existencia de subhaces de  $TM$  integrables fué descubierta.

por R. Bott alrededor de 1970 ,ver [B2]. En esta sección se desarrolla este resultado. La pregunta fundamental es la siguiente :

Dado un subhaz vectorial de  $TM$ . ¿ Bajo que condiciones es  $N$  el haz vectorial normal de una foliación  $F$  en  $M$  ? (es decir cada fibra de  $N$  es el espacio normal de alguna hoja de  $F$ ) .

Supóngase de momento que tal foliación  $F$  existe, sea  $TF$  el haz tangente a las hojas de  $F$  y  $N$  el haz normal correspondiente .  $TM$  puede expresarse entonces como  $TM = TF \oplus N$  . Sea  $\Pi: TM \longrightarrow N$  la proyección sobre  $N$  . Se define ahora una conexión sobre las hojas de  $F$  como sigue ':

$$\begin{aligned} \nabla' : X(F) \times \Gamma(N) &\longrightarrow \Gamma(N) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla'_X V = \Pi[X, \bar{V}] \end{aligned}$$

donde  $[,]$  es el paréntesis de Lie en  $M$  y  $\bar{V} \in X(M)$  es tal que  $\Pi(\bar{V})=V$  .

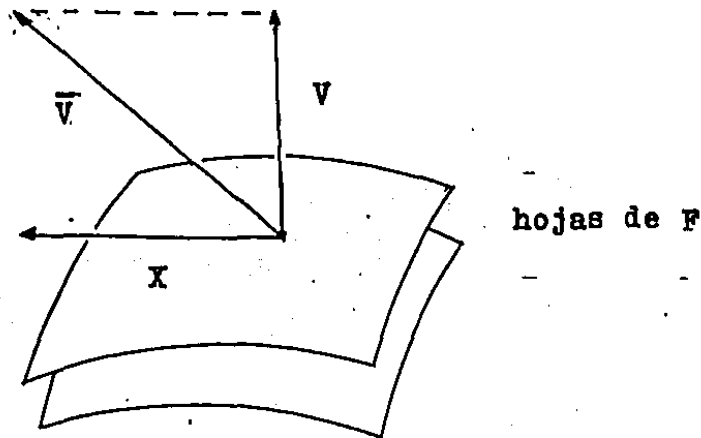


Fig. 2 La conexión  $\nabla'$  .

Para mostrar que  $\nabla'$  no depende de la elección de  $\bar{V}$  considerese  $W \in X(M)$  tal que  $\Pi(W)=V$  entonces

$$\nabla'_X (V-W) = \Pi[X, \bar{V}-W] = 0$$

ya que  $\bar{V}-W \in X(F)$  y por el teorema de integrabilidad de Frobenius  $X(F)$  es cerrado bajo  $[,]$  , de dónde al aplicar la proyección  $\Pi$  el resultado es cero.

Es posible extender  $\nabla'$  a una conexión en  $N$  de la siguiente manera. .

Sea  $\bar{V}$  una conexión en  $N$ . Sea

$$V : X(M) \times \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(N)$$

$$(X, V) \longmapsto V_X V = V'_Z V + V''_Y V$$

donde  $X = Z + Y$  con  $Z \in X(F)$ ,  $Y \in \Gamma(N)$ . Y  $V$  extiende a  $\bar{V}$  sobre  $N$ .

**I.7 Definición.** Una conexión  $V$  construida como antes es llamada una conexión de Bott para el haz  $N$ .

Las conexiones de Bott satisfacen la siguiente propiedad importante con respecto a su curvatura.

**I.8 Lema.** Sea  $R$  la curvatura de una conexión de Bott. Entonces si  $X, Y \in X(F)$  sucede que;

$$R(X, Y)V = 0 \quad \text{para toda } V \in \Gamma(N).$$

Demostración. Sea  $\bar{V}$  una extensión de  $V$  tal que  $\Pi(\bar{V})=V$ . Calculando

$$\begin{aligned} R(X, Y)V &= (V_X V_Y - V_Y V_X - V_{[X, Y]})V \\ &= \Pi[X, [Y, \bar{V}]] - \Pi[Y, [X, \bar{V}]] - \Pi[[X, Y], \bar{V}] = 0 \end{aligned}$$

que es cero por la linealidad de  $\Pi$  y la identidad de Jacobi para el paréntesis de Lie. Q. E. D.

Es posible ahora enunciar el resultado de Bott.

**I.9 Teorema de anulación de Bott.** Sea  $N$  el haz normal de una foliación de codimensión  $n$  en  $M$ . Entonces las clases características de  $N$  satisfacen que

$$[P(R)] = 0 \quad \text{si } P \in I_n^k \text{ con } k > n.$$

Demostración. Sea  $V$  una conexión de Bott para  $N$ . Dado  $P \in I_n^k$  con  $k > n$  sean  $X_1, \dots, X_{2k} \in X(M)$  campos linealmente independientes. Sea  $W$  el subespacio generado por los campos  $X_i$  en  $p \in M$ . Se tiene que

$$\text{dimensión } (W \cap T_p F) \geq 2k - n \geq n + 1.$$

Por lo que es posible encontrar una base  $X'_1, \dots, X'_{2k}$  de  $W$  tal que ;  $X'_1, \dots, X'_{n+1} \in T_p F$ , con la propiedad de que el cambio de base entre  $X_i$  y  $X'_i$  tiene determinante uno.



De donde al valuar substituyendo  $X_i$  por  $X'_i$  ,

$$P(R)(X_1, \dots, X_{2k}) =$$

$$\frac{1}{2k!} \sum_s (-1)^s P(R(X'_s(1), X'_s(2), \dots, X'_s(2k-1), X'_s(2k))) .$$

Observese que siempre hay en cada sumando un elemento de la forma

$$R(X'_i, X'_j) \quad \text{con } 1 \leq i, j \leq n+1 ,$$

de donde por el lema I.8  $R(X'_i, X'_j)=0$  lo que implica que  $P(R)=0$  .

Q. E. D.

El teorema de Bott sólo establece condiciones necesarias para la integrabilidad , en general no se conocen condiciones suficientes.

### 3.- Clases características secundarias.

El teorema de anulación de Bott motivó el descubrimiento de nuevas clases características asociadas a foliaciones por Bott y Haefliger [BH] , Godbillon y Vey [GV] , Kamber y Tondeur [KT] y otros. Una construcción general para estas clases es como sigue.

Dada  $M$  una variedad provista de una foliación  $F$  de codimensión  $n$ , se introduce en  $N$  , el haz normal a  $F$  , una métrica de Riemann  $\langle , \rangle$  . Es posible entonces obtener una conexión riemanniana  $\nabla^r$  en  $N$  que satisface

$$X\langle V, W \rangle = \langle \nabla_X^r V, W \rangle + \langle V, \nabla_X^r W \rangle$$

para todo  $X \in X(M)$  y  $V, W \in \Gamma(N)$ . La existencia y unicidad de la conexi.

-ón  $\nabla^r$  es un teorema básico de geometría diferencial ,ver [KN] vol. I . Esta conexión posee además la propiedad de que su forma de curvatura  $R$  toma valores en las matrices antisimétricas y es decir

$$R + R^t = 0$$

donde  $R^t$  es la matriz traspuesta. Para mostrar esto sea  $\{V_i\}$  un marco ortonormal para  $N$  ,  $L_X$  la derivada de  $L$  en la dirección del campo  $X \in X(M)$ , con lo que

$$\begin{aligned} 0 &= L_X \langle V_i, V_j \rangle = \langle \nabla_X^r V_i, V_j \rangle + \langle V_i, \nabla_X^r V_j \rangle \\ &= w_{ij}(X) + w_{ij}(X) \end{aligned}$$

por la ortonormalidad del marco y donde  $w_{ij}$  son las 1-formas que definen a la conexión, que por la igualdad anterior forman una matriz antisimétrica. Ahora calculando  $R$  a partir de las fórmulas en la primera sección y por la antisimetría de  $(w_{ij})$  se tiene que  $R$  es antisimétrica.

En todo lo que sigue se utilizará la siguiente notación :

$$\begin{array}{ll} \nabla^b & \text{conexión de Bott en } N \quad R^b \text{ su curvatura} \\ \nabla^r & \text{conexión riemanniana en } N \quad R^r \text{ su curvatura} \end{array}$$

La construcción de las clases características secundarias está basada en la forma de transgresión, para ello se construye una familia de conexiones  $\nabla^t$  en  $N$  de la siguiente manera ;

$$\nabla^t = t\nabla^r - (1-t)\nabla^b \quad \text{con } t \in [0,1]$$

Con una familia asociada de curvaturas  $R^t$ , que resultan ser 2-formas  $gl(n)$ -valuadas. Se define

$$Q = (w_{ij}^r) - (w_{ij}^b)$$

donde los términos de la derecha son las matrices de 1-formas de la conexión riemanniana y de la conexión de Bott respectivamente (análogamente a la segunda demostración del lema I.3).  $Q$  resulta ser

una 1-forma  $gl(n)$ -valuada.

Sí  $k-n$  y es impar es posible definir  $(2k-1)$ -formas mediante la forma de transgresión (definición I.4). Sea

$$P_k(R^r, R^b) = k \int_0^1 P_k(Q, R^t; \dots, R^t) dt,$$

las propiedades básicas de estas formas se encuentran en los siguientes dos lemas.

I.10 Lema. La forma anterior define una clase en cohomología.

Demostración. Análogamente a la segunda demostración del lema I.3, se tiene que

$$dP_k(R^r, R^b) = P_k(R^r) - P_k(R^b) = 0.$$

Ya que  $P_k(R^b) = 0$  por el teorema de anulación de Bott y  $P_k(R^r) = 0$  por ser  $R^r$  matriz antisimétrica y  $k$  impar por lo que

$$P_k(R^r, \dots, R^r) = (-1)^k P_k((R^r)^t, \dots, (R^r)^t)$$

donde  $( )^t$  es la matriz transpuesta. Observese que los dos hechos fundamentales en la demostración son el teorema de anulación de Bott y la antisimetría de la curvatura de la conexión riemanniana. Para más comentarios sobre esto ver [L]. Q. E. D.

Además estas clases satisfacen la siguiente propiedad.

I.11 Lema. Las clases  $[P_k(R^r, R^b)] \in H^{2k-1}(M)$  son invariantes de la foliación. Notación; en todo lo que sigue  $\phi(y_k) = [P_k(R^r, R^b)]$ .

Bosquejo de la demostración. Eligiendo dos conexiones de Bott y dos conexiones riemannianas cualesquiera es posible repetir con ellas la idea de homotopía utilizada en la primera demostración del lema I.3 y mostrar que la clase en cohomología no depende de la elección de las conexiones. Los detalles de todo esto pueden consultarse en [B1]. Q. E. D.

Resumiendo se han construido dos tipos de clases:

$$c_k = c_k(R^b) = [P_k(R^b)] \in H^{2k}(M).$$

$$\Phi(y_k) = [P_k(R^r, R^b)] \in H^{2k-1}(M)$$

Es posible ahora construir más clases a partir de  $c_k$  y  $\Phi(y_k)$ .

Sea  $\Lambda(y_1, y_3, \dots, y_r)$  la  $\mathbb{R}$ -álgebra exterior con generadores  $y_i$  (donde  $i$  es impar), con  $r$  el más grande entero impar menor que  $n$ .

Sea  $R[c_1, \dots, c_n]_n$  la  $\mathbb{R}$ -álgebra de polinomios con  $c_i$  como generadores módulo elementos de grado total mayor que  $2n$ .

Considerese ahora el siguiente complejo

$$W_{0n} = \Lambda(y_1, y_3, \dots, y_r) \otimes R[c_1, \dots, c_n]_n$$

con  $d$  definida como sigue ;

$$d(y_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i$$

$$d(1 \otimes c_i) = 0$$

que cumple que  $dd \equiv 0$ . Tiene ahora sentido hablar de  $H^*(W_{0n})$ , que se conoce como la cohomología de Gelfand-Fuks.

Se define una aplicación

$$\Phi: H^*(W_{0n}) \longrightarrow H^*(M) \quad \text{como}$$

$$\Phi(y_i \otimes 1) = \Phi(y_i)$$

$$\Phi(1 \otimes c_i) = c_i(R^b).$$

Que tiene la propiedad de ser un homomorfismo entre álgebras graduadas y que sólo depende de la foliación  $F$ .

I.12 Definición. La imagen de  $\Phi(H^*(W_{0n})) \subset H^*(M)$  son las clases características secundarias de la foliación  $F$ .

Introduciendo multiíndices;  $I = (i_1, \dots, i_r)$  tal que  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq r$  con  $i_s$  impar,  $J = (j_1, \dots, j_n)$  con cada  $j_s \geq 0$  y donde  $|J| = j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n$ . Se tiene la siguiente notación

$$y_I c_J = y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_r} \otimes c_1^{j_1} \dots c_n^{j_n}$$

En grados menores que  $2n+1$   $\Phi(y_I c_J)$  representan el anillo de clases de Pontriagin reales de  $N$ , en grados mayores que  $2n$  reciben diferen-

tes nombres:

$\Phi(y_I \circ_J)$  es residual si  $|J| = n$ .

" con  $|J| = n$  son las clases de Godbillon Vey.

" con  $i_1 = 1$ ,  $|J| = n$  son las clases de Godbillon Vey generalizadas.

"  $\text{grado}(y_I) > 1$ ,  $|J| = n$  son las clases residuales superiores.

" con  $i_1 + |J| > n+1$  son las clases rígidas.

" con  $i_1 + |J| = n+1$  son las clases variables.

Esta clasificación obedece simplemente al comportamiento conocido de estas clases. Una descripción más detallada de lo anterior puede hallarse en [KT] y [HK].

En este punto es natural plantear las siguientes preguntas:

¿ Cuándo son las clases características secundarias de una foliación nulas ?

¿ Qué propiedades del comportamiento de la foliación son reflejadas por las clases características secundarias ?

En todo lo que resta del trabajo se mostrará algo sobre lo que se conoce acerca de las respuestas a estas preguntas.

#### 4.- La clase de Godbillon Vey.

De todas las clases características secundarias la de más bajo grado en  $H^*(M)$ , la primera que se estudió y de la que más se conoce

actualmente es la clase de Godbillon Vey ; ésta fué descubierta por C. Godbillon y J. Vey en 1971 ,ver [GV] .En esta sección se discutirán propiedades y ejemplos de esta clase característica. Se desarrolla la construcción original de esta clase que es como sigue.

Sea  $M$  una variedad real diferenciable con  $F$  una foliación de codimensión uno y tal que su haz normal es orientable. Bajo estas hipótesis  $F$  queda determinada como el núcleo de una 1-forma global  $w$ . Por el teorema de integrabilidad de Frobenius  $dw = v \wedge w$  para alguna  $v \in A^1(M)$  .Se considera ahora una nueva 3-forma

$$v \wedge dv .$$

Para mostrar que esta forma determina una clase en cohomología se enuncia el siguiente lema.

1.13 Lema. La forma  $v \wedge dv$  es cerrada y su clase en cohomología sólo depende de  $F$ . Esta clase se conoce como la clase de Godbillon Vey de  $F$ .

Demostración. Primero se muestra que la forma es cerrada calculando;

$$d(v \wedge dv) = dv \wedge dv + v \wedge d(dv) = 0 .$$

Como las formas  $w$  y  $v$  no están únicamente determinadas por la foliación hay que mostrar que la clase de Godbillon Vey no depende de su elección.

Primero para  $w$ . Sea  $w' = fw$  otra 1-forma que determina a  $F$  , donde  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función diferenciable siempre positiva. Derivando

$$\begin{aligned} dw' &= df \wedge w + f \wedge dw = df \wedge w + fv \wedge w \\ &= \left( \frac{df}{f} + v \right) \wedge w' = (d \log |f| + v) \wedge w' \end{aligned}$$

con lo que se obtiene una 1-forma  $v' = d \log |f| + v$  . Y calculando la forma de Godbillon Vey a partir de  $v'$  ;

$$\begin{aligned} v' \wedge dv' &= (d \log |f| + v) \wedge (d \log |f| + v) + d(d \log |f| + v) \\ &= d(v \wedge d \log |f|) + v \wedge dv \end{aligned}$$

de donde  $v' \wedge dv'$  y  $v \wedge dv$  son formas cohomólogas.

Para mostrar que no depende de la elección de  $v$  si  $dw = v \wedge w$ , donde  $v \in A^1(M)$ . Se cumple que  $(v-v') \wedge w = 0$  y se tiene que  $v-v'$  esta en  $A(M, F)$  el ideal de 1-formas que anulan al haz tangente a la foliación (esto es el ideal generado por  $w$ ). Por lo que es posible escribir

$$v' = v + u \quad \text{para } u \in A(M, F).$$

Calculando ahora la forma de Godbillon Vey a partir de  $v'$ . Utilizando el hecho de que  $dv, du \in A(M, F)$  y que el producto exterior de dos elementos en  $A(M, F)$  es cero, se tiene que ;

$$\begin{aligned} v' \wedge dv' &= (v + u) \wedge d(v + u) \\ &= v \wedge dv + v \wedge du \\ &= v \wedge dv + d(v \wedge u) \end{aligned}$$

con lo que  $v' \wedge dv'$  y  $v \wedge dv$  determinan la misma clase en cohomología .

Q. E. D.

Ahora es posible relacionar la construcción anterior de la clase de Godbillon Vey con la teoría de clases características secundarias de la siguiente manera:

I.14 Lema.  $[v \wedge dv] = \Phi(y_1 \otimes c_1) \in H^3(M)$  .

Demostración. La dificultad principal de la demostración consiste en elegir adecuadamente las conexiones para calcular  $\Phi(y_1 \otimes c_1)$  .

Sea  $N$  el haz normal a  $F$ ,  $Z \in \Gamma(N)$  una sección que trivializa a  $N$  con forma dual  $w$ . Obsérvese que la forma  $w$  define a  $F$  globalmente. Se consideran dos conexiones en  $N$  como sigue:

$$V_X^b Z = v(X)$$

$$V_X^r Z = 0 \quad \text{para todo } X \in X(M)$$

y donde  $v$  es una 1-forma definida como  $dw = v \wedge w$ . Es necesario ahora mostrar que  $V^b$  y  $V^r$  son conexión de Bott y conexión riemanniana respectivamente.

Para mostrar que  $\nabla^b$  es una conexión de Bott se procede de la siguiente manera. Sea  $Y \in \Gamma(N)$  una sección cualquiera y  $u$  la 1-forma asociada a alguna otra conexión de Bott (recuérdese que la conexión de Bott no es única). Se comparan ahora  $u$  y  $v$  :

$$\begin{aligned}
 v(Y) &= -2(w \wedge v)(Y, Z) && \text{por definición de } \wedge \text{ y} \\
 &= -2dw(Y, Z) && \text{que } w(Z)=1 \\
 &= Zv(Y) - Yv(Z) + w([Y, Z]) \\
 &= w([Y, Z]) \\
 &= w(u(Y)Z) && \text{por ser } u \text{ forma asociada} \\
 &= u(Y) && \text{a una conexión de Bott}
 \end{aligned}$$

con lo que  $v$  y  $u$  coinciden al restringirlas a  $\Gamma(N)$  y se tiene que  $v$  es la 1-forma asociada a una conexión de Bott.

Para mostrar que  $\nabla^r$  es una conexión riemanniana se elige una métrica de Riemann tal que el campo  $Z$  sea paralelo y de norma uno.

Obsérvese que  $c_1$  es la función identidad ya que  $c_1(G) = \text{traza}(G)$  y  $G \in \mathfrak{gl}(1)$ , por lo que se tiene que  $P_1$  es también la función identidad. La 2-forma de curvatura para la conexión de Bott es  $R^b = dv$  de acuerdo con las fórmulas para curvatura al principio de la primera sección.

Calculando  $c_1(R^b) = c_1(dv) = dv$  .

Para calcular  $\Phi(y_1)$  se construye la familia de conexiones

$$v^t = tv^r - (1-t)v^b$$

y se tiene que  $Q = 0 - v = -v$  .

Con lo que la forma de transgresión es

$$\begin{aligned}
 \Phi(y_1) &= P_1(R^r, R^b) = \int_0^1 P_1(Q) dt \\
 &= \int_0^1 -v dt = -v
 \end{aligned}$$



Y por las propiedades multiplicativas de las clases se concluye que

$$\Phi(y_1 \otimes c_1) = \Phi(y_1) \wedge c_1(\mathbb{R}^b) = v \wedge dv .$$

Q. E. D.

El problema más inmediato es investigar acerca del significado de la anulaci3n de la clase de Godbillon Vey. Existen algunos criterios sencillos acerca de esto. Por ejemplo si la foliaci3n  $F$  est1 determinada por el n3cleo de  $w$  una 1-forma cerrada se tiene que  $dw=0$  y la clase de Godbillon Vey es nula, tal es el caso de un haz fibrado  $f : M \longrightarrow B$ , sobre  $B = \mathbb{R}^1$  3  $S^1$ , donde  $F$  es la foliaci3n determinada por las fibras del haz, si  $w$  es la forma de volumen usual en  $B$  entonces  $f^*(w)$  determina a  $F$  y es cerrada. A continuaci3n se desarrolla un ejemplo m1s interesante .

1.15 Ejemplo. Roussarie. Sea el grupo de Lie

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{ G \in GL(2, \mathbb{R}) / \det(G)=1 \} .$$

Es posible considerar  $H \subset SL(2, \mathbb{R})$  un subgrupo discreto tal que el cociente

$$M = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{H}$$

resulta ser una variedad diferenciable compacta. Lo que se desea mostrar es que existe una foliaci3n  $F$  de codimensi3n 1 en  $M$  con clase de Godbillon Vey no nula.

Consid3rese el 1gebra de Lie de  $SL(2, \mathbb{R})$  con tres generadores

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sea la distribuci3n determinada por  $X$  y  $Y$ . Como el 1gebra de Lie satisface que :

$$[X, Y] = -2Y , \quad [X, Z] = 2Z , \quad [Y, Z] = -X ,$$

se sigue de la primera igualdad por el teorema de integrabilidad de Frobenius que la distribuci3n es integrable por lo que da lugar a una foliaci3n de  $SL(2, \mathbb{R})$  tal que baja a la variedad cociente  $M$ .

Ahora se calcula la clase de Godbillon Vey.

Sean  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$  las 1-formas que son duales a los campos  $X, Y, Z$  inducidos por los generadores en el álgebra de Lie. Se tiene que  $Z^*$  es una 1-forma que determina a la foliación. Calculando su derivada exterior valuada en dos campos cualesquiera  $V, W \in X(SL(2, \mathbb{R}))$

$$dz^*(V, W) = \frac{1}{2} ( VZ^*(W) - WZ^*(V) - Z^*([V, W]) ) .$$

Para conocer explícitamente esta derivada se evalúa en los campos  $X, Y, Z$ , utilizando las fórmulas del álgebra de Lie para simplificar se obtiene que:

$$dz^*(X, Y) = 0 \quad , \quad dz^*(X, Z) = -1 \quad , \quad dz^*(Y, Z) = 0 \quad ,$$

por lo que necesariamente se concluye que

$$dz^* = Z^* \wedge X^* .$$

Análogamente se puede calcular  $dx^*$ , obteniéndose

$$dx^* = \frac{1}{2} Y^* \wedge Z^* .$$

Con lo que la forma de Godbillon Vey es

$$X^* \wedge dx^* = \frac{1}{2} X^* \wedge Y^* \wedge Z^*$$

que es la forma de volumen con respecto a una métrica de Riemann invariante en  $M$  y se tiene que la clase de Godbillon Vey es no nula, lo que concluye el ejemplo.

Una manera de visualizar la foliación anterior es como sigue. Se identifica  $SL(2, \mathbb{R})$  con el haz de vectores tangentes unitarios del disco de Poincaré  $\mathbb{H}^2$ . Cada hoja de la foliación en  $SL(2, \mathbb{R})$  proviene de un haz de geodésicas asintóticas a un punto al infinito en  $\mathbb{H}^2$  graficando cada geodésica del haz en  $SL(2, \mathbb{R})$ , es decir levantándola como curva del flujo geodésico, como se muestra en la figura 3. Obsérvese que hay una hoja de  $F$  por cada punto al infinito en el disco de Poincaré.

Es posible ahora observar la foliación localmente, ver figura 4,

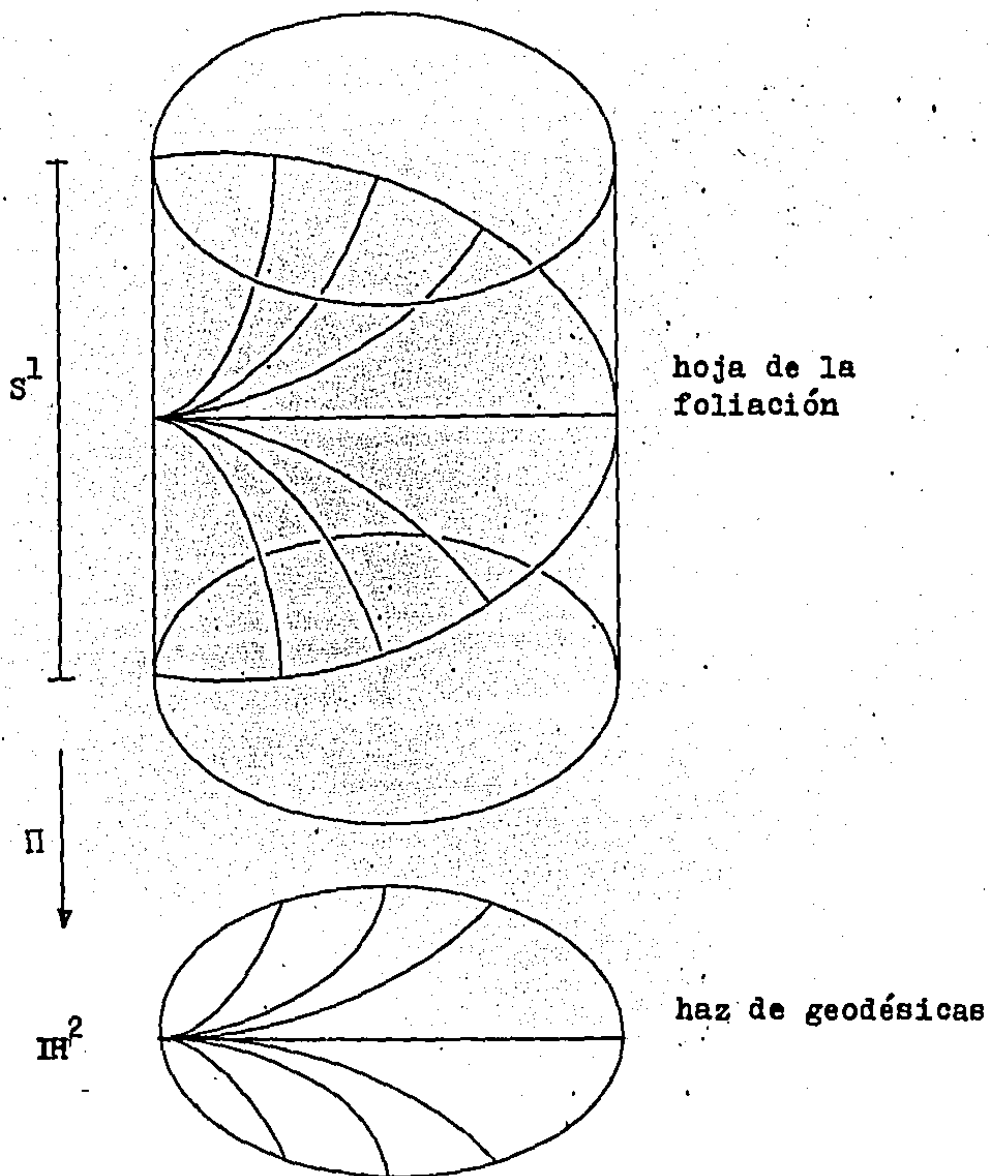


Fig. 3 Una hoja de  $F$  en  $SL(2, \mathbb{R})$  .

observándose un curioso comportamiento de las hojas, este fenómeno fué descubierto por W. Thurston y se conoce como "balanceo helicoidal", ver [T] . Thurston interpretó la existencia global de este comportamiento de las hojas como una condición para la no nulidad de la clase de Godbillon Vey. Con el fin de formalizar esto se realiza la siguiente construcción debida a B. Reinhart y W. Wood , ver [RW] .

Se introduce una métrica de Riemann en  $M^m$  una variedad diferenciable provista de una foliación de codimensión uno. Ello determina

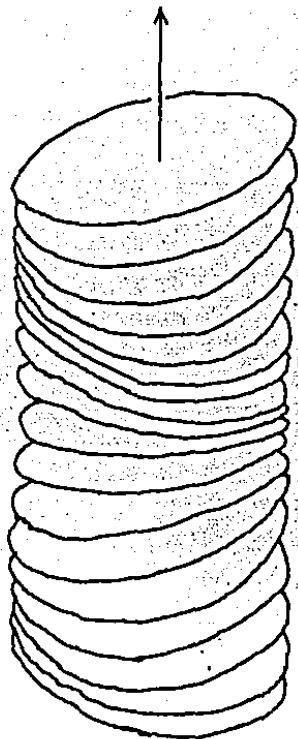


Fig. 4 Balanceo helicoidal de las hojas de una foliación. Los discos tienen ángulo de inclinación constante con respecto al eje central en una dirección que gira a velocidad constante.

curvas normales a las hojas de la foliación. Sea  $Z$  el campo de vectores unitarios y normales a las hojas. Se define la función de curvatura  $k$  asociada a las curvas normales a las hojas como

$$k : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$k(p) = |\nabla_Z Z|$$

donde  $\nabla$  es la conexión riemanniana y  $||$  la norma asociada a la métrica en  $M$ . Sea  $Q$  el campo de vectores normales a las curvas normales a la hojas, este campo está bien definido en los subconjuntos abiertos de  $M$  donde  $k \neq 0$ . Si este es el caso es posible introducir un marco ortonormal

$$\{ Z, Q, T_1, \dots, T_{m-2} \} ,$$

con un marco dual asociado

$$\{ w, v, u_1, \dots, u_{m-2} \} .$$

Con respecto a lo cual las fórmulas de Frenet son :

$$\nabla_Z Z = kQ$$

$$\nabla_Z Q = -kZ + \sum \tau_i T_i$$

$$\nabla_Z T_i = -\tau_i Q + \sum_s f_{is} T_s$$

donde las funciones  $\tau_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  corresponden a la torsión en la dirección de  $T_i$  y las funciones  $f_{is}: M \rightarrow \mathbb{R}$  forman una matriz antisimétrica. Sea  $L_Z$  la segunda forma fundamental de las hojas definida como

$$L_Z(X, Y) = \langle X, \nabla_Y Z \rangle.$$

Con todo lo anterior se tiene el siguiente lema.

I.16 Lema. La clase de Godbillon Vey puede representarse como :

$$\text{a) } \begin{array}{ll} k^2 v \wedge dv & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{array}$$

$$\text{b) } k^2 \sum_j (\tau_j + L_Z(Q, T_j)) w \wedge v \wedge u_j \quad \text{si } k \neq 0.$$

Demostración. Para a) como  $w(X) = \langle Z, X \rangle$  es una 1-forma que define a la foliación se mostrará que  $dw = kw \wedge v$  con lo que a partir de la definición de la clase de Godbillon Vey el resultado sigue. Para hallar  $dw$  se calcula explícitamente con respecto al marco de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (1) \quad dw(Z, Q) &= \frac{1}{2} (Zw(Q) - Qw(Z) - w([Q, Z])) \\ &= -\frac{1}{2} w([Q, Z]) = -\frac{1}{2} w([\nabla_Q Z - \nabla_Z Q]) \\ &\quad \text{(por ser la conexión riemanniana)} \\ &= \frac{1}{2} \langle -Z, \nabla_Z Q \rangle = \frac{1}{2} \langle -Z, -kZ + \sum \tau_i T_i \rangle = \frac{1}{2} k \end{aligned}$$

(por las fórmulas de Frenet y la ortonormalidad del marco) .

$$(2) \quad dw(Z, T) = \frac{1}{2} (Zw(T) - Tw(Z) - w([Z, T]))$$

$$= -\frac{1}{2} w([Z, T]) = -\frac{1}{2} w([\nabla_Z T - \nabla_T Z]) = 0 ,$$

análogamente se tiene que ;

$$(3) \quad dw(Q, Z) = 0$$

$$(4) \quad dw(T_i, T_j) = 0 \quad \text{para todo } i, j .$$

Reuniendo (1), (2), (3), (4) se tiene que necesariamente

$$dw = kw \wedge v .$$

Obsérvese además que por (1) si  $k=0$  se tiene que  $dw=0$  y la clase de Godbillon Vey es nula lo que concluye la demostración de a) .

Para mostrar b) primeramente se encuentra una nueva expresión para  $dv$  de la siguiente manera :

$$dv(T_i, T_j) = -\frac{1}{2} v([T_i, T_j]) = -\frac{1}{2} \langle Q, [T_i, T_j] \rangle = 0$$

por la definición de  $v$  y el hecho de que los campos  $T_i$  son cerrados con respecto al paréntesis de Lie , además

$$\begin{aligned} dv(Z, T_j) &= \frac{1}{2} (\langle Q, \nabla_Z T_j \rangle + \langle Q, \nabla_{T_j} Z \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle Q, -\tau_j Q + \sum f_{js} T_s \rangle + \langle Q, \nabla_{T_j} Z \rangle) \end{aligned}$$

(por las fórmulas de Frenet)

$$= \frac{1}{2} (\tau_j + L_Z(Q, T_j)) .$$

Reuniendo las dos expresiones anteriores para  $dv$  se concluye que

$$dv(V, W) = \sum_j (\tau_j + L_Z(Q, T_j)) w \wedge u_j ,$$

con lo que haciendo  $v = dv$  la fórmula b) sigue.

Q. E. D.

Una observación al lema anterior es la independencia del resultado con respecto a la métrica de Riemann elegida. Es posible construir métricas locales que eliminen el fenómeno de balanceo helicoidal por ejemplo jalando la métrica usual de  $\mathbb{R}^m$  a  $M^m$  de tal forma que

las hojas de la foliación se vean como hiperplanos paralelos. Sin embargo la obstrucción a la existencia de una métrica global con esta propiedad es la nulidad de la clase de Godbillon Vey. Este es un hecho análogo al que se presenta en la esfera  $S^2$ , que localmente admite métricas de curvatura gaussiana cero, sin embargo no existe una métrica global con esta propiedad.

I.17 Ejemplo. Sea  $M = \mathbb{R}^3$  con su métrica de Riemann usual. Considérese una foliación por superficies de revolución con respecto al eje  $z$ , por ejemplo una componente de Reeb en un cilindro con eje  $z$ . Las curvas normales a las hojas están contenidas en planos por el eje  $z$  lo que implica que la torsión  $\tau$  es nula. El campo  $Q$  también está contenido en estos planos y además  $\nabla_T Z$  es tangente a los meridianos de las hojas, ver figura.

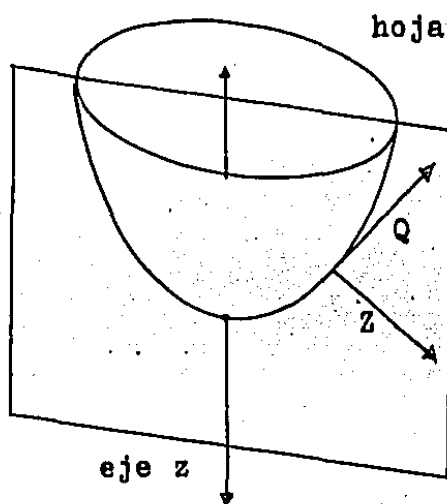


Fig. 5 Componente de Reeb en  $\mathbb{R}^3$ .

Por lo anterior la segunda forma de las hojas cumple que ;

$$L_Z(Q, T) = \langle Q, \nabla_T Z \rangle = 0 .$$

Y calculando la clase de Godbillon Vey según la fórmula b) del Lema I.16 se tiene que la clase es nula. Esta métrica puede llevarse a la componente de Reeb en el toro sólido ya que tanto la foliación como la métrica en  $\mathbb{R}^3$  son invariantes bajo traslaciones a lo largo del

eje  $z$ , lo que muestra que la componente de Reeb en el toro sólido tiene clase de Godbillon Vey nula, esto finaliza el ejemplo.

Utilizando los ejemplos anteriores es posible construir foliaciones de  $S^3$  con clase de Godbillon Vey no nula.

I.18 Ejemplo. Thurston, ver [T]. Sea  $PSL(2, \mathbb{R})$  el haz tangente unitario al disco de Poincaré  $\mathbb{H}^2$ . Considérese en  $PSL(2, \mathbb{R})$  una foliación de codimensión uno construida como en el ejemplo de Roussarie I.15. Sea  $P$  un polígono hiperbólico convexo en  $\mathbb{H}^2$  y  $P'$  el polígono resultante de reflejar sobre alguno de los lados de  $P$ . En  $\Omega = P \cup P'$  se retiran discos abiertos de radio  $e$ , alrededor de cada vértice, la figura obtenida es llamada  $\Omega_e$ , ver figura 6.

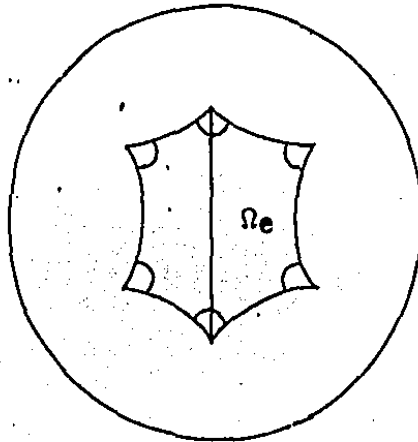


Fig. 6 Polígonos en  $\mathbb{H}^2$ .

Se considera ahora la imagen inversa de  $\Omega_e$  bajo

$$\Pi: PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}^2$$

la proyección del haz unitario, esta imagen inversa es un toro sólido en  $PSL(2, \mathbb{R})$ , provisto de la foliación inducida. Es posible identificar las caras de este toro sólido mediante las isometrías que preservan la orientación e identifican los lados de  $\Omega_e$  de la manera natural (de hecho hay que utilizar las diferenciales de estas isometrías pues ellas actúan en el haz tangente). De esta manera se obtiene una variedad homeomorfa a  $(S^2 - k \text{ puntos}) \times S^1 = M$ , ver figura 7.



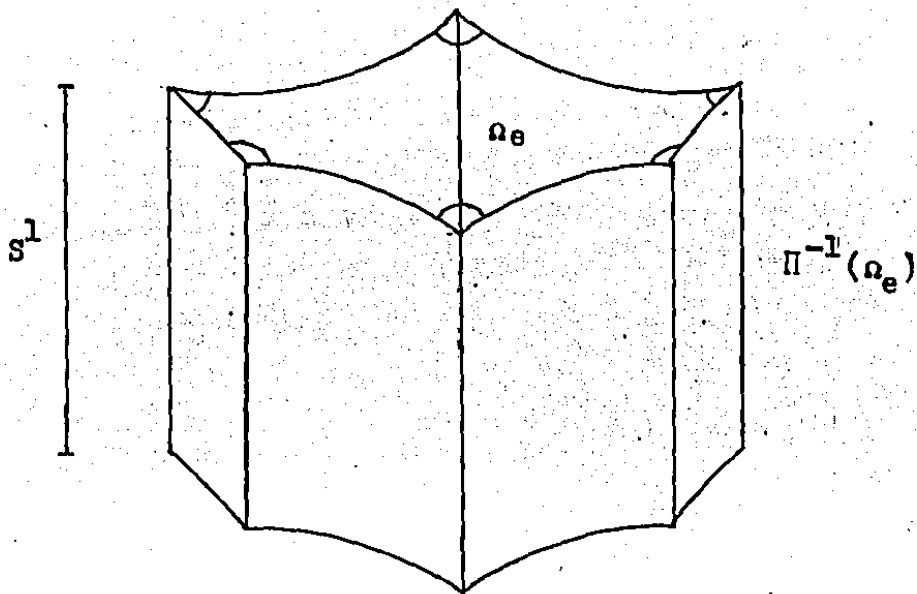


Fig. 7 Se identifican caras y tapas para obtener  $M$ .

Se tiene con ello que las hojas de la foliación en  $M$  son transversales a los toros engendrados por los  $k$  puntos en  $S^2$ . Es posible modificar la foliación localmente en vecindades de estos toros para que ellos sean hojas de una nueva foliación, ver figura 8.

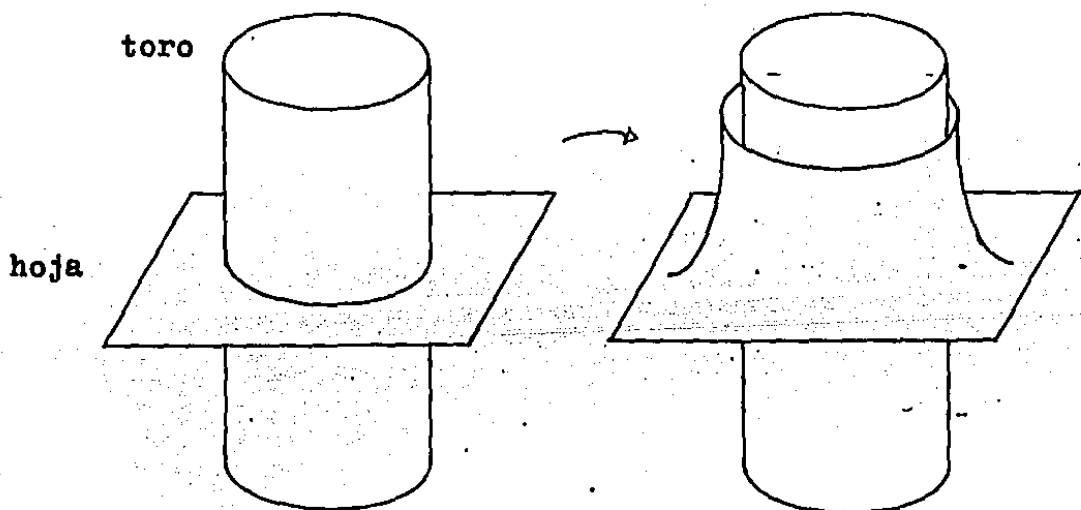


Fig. 8 Modificando la foliación en  $M$ .

Si se introducen componentes de Reeb en cada toro, de la manera usual en  $k-1$  toros y haciendo cirugía en el  $k$ -ésimo toro, se obtie-

ne  $S^3$  a partir de  $M$ . Con ello  $S^3$  queda provista de una foliación diferenciable de codimensión uno. Estas foliaciones tienen la propiedad de que la clase de Godbillon Vey es no nula es abiertos que no contengan a las componentes de Reeb y nula en ellas.

Más propiedades interesantes de este ejemplo pueden hallarse en [T], [P], en esta última referencia hay ejemplos en otras dimensiones de clases características secundarias y generalizaciones del ejemplo de Roussarie.

## C A P I T U L O      I I

### TEOREMAS DE ANULACION

#### 1.- Operadores y medidas de Weil.

En la construcción de las clases características secundarias las formas de transgresión tienen una parte central, sin embargo su uso es en principio sólo para calcular. Con el fin de obtener interpretaciones más claras con respecto a su relación con las propiedades de la foliación de la cual provienen se introducen en esta sección los operadores y medidas de Weil. Estos conceptos fueron inventados por G. Duminy en 1982 para foliaciones de codimensión uno, ver [D] y generalizados posteriormente por J. Heitsch y S. Hurder para foliaciones de cualquier codimensión en [HH] .

Sea  $M^m$  una variedad diferenciable provista de una foliación  $F$  de codimensión  $n$ , tal que su haz normal  $N$  es orientable (este hecho puede siempre obtenerse pasando a una cubierta doble de  $M$  ).

Sea  $A(M, F)$  el ideal de formas diferenciables en  $M$  generado por  $w$  una  $n$ -forma que define a  $F$ . Toda forma  $v \in A^k(M, F)$  puede ser escrita como  $v = v' \wedge w$  donde  $v'$  es una  $(k-n)$ -forma en  $M$ . Por el teorema de integrabilidad de Frobenius el ideal  $A(M, F)$  es cerrado bajo la derivada exterior en  $M$ , por ello es posible dar una estructura de complejo a  $A(M, F)$ . Se define la cohomología con respecto a la foliación  $H^*(M, F)$ , como la cohomología del complejo  $A^*(M, F)$ .

Se denotara por  $H^*(gl(n), O(n))$  a las clases de la forma  $\phi(y \otimes 1) = \phi(y)$ , donde  $y = y_I$  con  $I$  un multiíndice, que con el fin de simplificar algunas veces se omitirá .

Con lo anterior se define para cada  $r \geq 0$  una aplicación

$$\mathcal{E}: H^r(\mathfrak{gl}(n), \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \text{Hom}(H^*(M, F), H^{*+r}(M))$$

tal que a cada  $\Phi(y) \in H^r(\mathfrak{gl}(n), \mathcal{O}(n))$  se le asocia el homomorfismo  $\mathcal{E}(y)$  definido para  $[u] \in H^*(M, F)$  como

$$\mathcal{E}(y)[u] = [\Phi(y) \wedge u]$$

Utilizando las propiedades de  $\Phi$  desarrolladas en la tercera sección del capítulo I se observa que el homomorfismo  $\mathcal{E}(y)$  sólo depende de  $F$ . Además  $\mathcal{E}$  se extiende a todo  $H^*(\mathfrak{gl}(n), \mathcal{O}(n))$  simplemente por linealidad.

II.1 Definición. Para  $\Phi(y) \in H^*(\mathfrak{gl}(n), \mathcal{O}(n))$  la aplicación  $\mathcal{E}(y)$  se conoce como el operador de Weil asociado a  $y$ .

Mediante la topología  $C^\infty$  compacto-abierta en  $A^*(M, F)$  se tiene que cada  $\mathcal{E}(y)$  satisface la siguiente propiedad :

II.2 Lema.  $\mathcal{E}(y)$  es una aplicación continua.

Demostración. Sea el conjunto  $A^*(M, F)$  provisto con la topología  $C^\infty$  compacto-abierta.  $Z^r(M, F) \subset A^r(M, F)$  denota el subespacio cerrado formado por los cociclos y  $\overline{B^r(M, F)}$  la cerradura de  $B^r(M, F)$  las cofronteras. Se define

$$\overline{H^r(M, F)} = \frac{Z^r(M, F)}{B^r(M, F)}$$

el cual tiene estructura de espacio vectorial topológico.

La aplicación natural

$$\Pi: H^r(M, F) \longrightarrow \overline{H^r(M, F)}$$

induce una topología en el espacio de la izquierda. Y se tiene que dada  $u \in Z^r(M, F)$  es posible aproximarla por una sucesión

$$\{dv_i\} \in B^r(M, F) \quad \text{tal que :}$$

$$\mathcal{E}(y)[u] = [\Phi(y) \wedge u] = [\Phi(y) \wedge \lim_{i \rightarrow \infty} dv_i] = \lim_{i \rightarrow \infty} [d(\Phi(y) \wedge v_i)] = 0$$

lo que implica la continuidad de  $\mathcal{E}(y)$  en  $H^*(M, F)$ . Q. E. D.

La aplicación  $\mathcal{E}(y)$  que sólo depende de las formas de transgresión esta relacionada con las clases  $\phi(y_I \otimes c_J)$  de la siguiente manera.

II.3 Lema. Si  $\mathcal{E}(y_I) = 0$  entonces  $\phi(y_I \otimes c_J) = 0$  para todo  $I'$  multiíndice que contiene a  $I$ .

Demostración. Sea  $I'' = I' - I$  la diferencia de multiíndices considerados como conjuntos ordenados. Se tiene que

$$\phi(y_{I'} \otimes c_J) = \mathcal{E}(y_I) [\phi(y_{I''} \otimes c_J)]$$

por las propiedades multiplicativas de las clases  $\phi(y)$ , lo que implica la afirmación del lema. Q. E. D.

Se supondrá ahora y en todo lo que sigue que  $M$  es una variedad compacta, sin frontera, orientable y con una métrica de Riemann cualquiera fija.

Dada  $\phi(y) \in H^r(\mathfrak{gl}(n), \mathcal{O}(n))$  admite una aplicación asociada :

$$\mathcal{E}_M(y) : H^{m-r}(M, F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_M(y)[u] = \int_M \phi(y) \wedge u$$

Esta aplicación esta bien definida ya que si  $u' \in A^{m-r}(M)$  y  $u - u' = dv$  entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M(y)[u - u'] &= \int_M \phi(y) \wedge dv \\ &= \int_M d(\phi(y) \wedge v) = 0 \end{aligned}$$

Esta aplicación determina las clases  $\phi(y)$  en el siguiente sentido.

II.4 Lema.  $\mathcal{E}_M(y) \in \text{Hom}(H^{m-r}(M, F), \mathbb{R}) = H^{m-r}(M, F)^*$  es cero si y sólo si  $\phi(y) = 0$ .

Demostración. Basta aplicar el teorema de dualidad de Poincaré a la

La no trivialidad de las clases características secundarias puede no estar localizada a lo largo de toda la variedad M, como en el ejemplo de Thurston I.18. Duminy ha propuesto una técnica de "localización" de las clases características la cual se desarrolla a continuación.

Sea  $M/F$  el espacio de hojas de la foliación el cual se obtiene a partir de M como un espacio de identificación, tal que dos puntos están identificados si y solo si pertenecen a la misma hoja de F.  $M/F$  es en muchos casos un espacio no Hausdorff con la topología cociente sin embargo esta condición no será requerida aquí.

II.5 Definiciones. Un subconjunto  $B \subset M$  se llama saturado si es unión de hojas de F. Sea  $S(F)$  el conjunto formado por todos los conjuntos saturados y medibles en M, con respecto a la medida de Lebesgue  $\mu$  en M inducida por la métrica de Riemann en M.

Es posible observar que  $S(F)$  tiene de manera natural una estructura de  $\Sigma$ -álgebra, considerando sólo los boreleanos de M que son saturados de F.

II.6 Definición. Dado  $B \subset S(F)$  se define una aplicación

$$\mathcal{E}_B: H^r(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{o}(n)) \longrightarrow H^{m-r}(M, F)^* \quad \text{como}$$

$$\mathcal{E}_B(y)[u] = \int_B \phi(y) \wedge u \quad .$$

Esta aplicación puede interpretarse como una medida valuada en el espacio vectorial  $H^{m-r}(M, F)^*$  y se conoce como la medida de Weil asociada a B.

Algunas propiedades de esta medida son :

- II.7 Lema. a)  $\mathcal{E}_B$  está bien definida. .  
 b) Si  $\mu(B)=0$  entonces  $\mathcal{E}_B=0$  .  
 c) La medida  $\mathcal{E}_B$  es continua.  
 d) La medida  $\mathcal{E}_B$  es numerablemente aditiva.

Demostración. Primeramente se muestra que  $\hat{\mathcal{E}}_B$  está bien definida. Como  $\phi$  sólo depende de  $F$ , basta mostrar que  $\hat{\mathcal{E}}_B$  no depende de la elección de  $u$  en su clase de cohomología. Sea  $u'$  otra forma en la misma clase por lo que se tiene que  $u-u' = dv$  para alguna forma  $v$  en  $A^{n-1}(M, F)$ . Calculando la medida de Weil

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_B(y) [u-u'] &= \int_B \phi(y) \wedge (u-u') \\ &= \int_B \phi(y) \wedge dv. \end{aligned}$$

Como  $\phi(y) \wedge v \in A^*(M, F)$  y  $d(\phi(y) \wedge v) = (\pm)\phi(y) \wedge dv$ , entonces que la integral anterior se anule depende del hecho de que

$$\int_B dw = 0$$

para toda  $w \in A^{m-1}(M, F)$ , este último hecho se conoce como el teorema de Stokes foliado. Antes de demostrarlo es necesario introducir algunos conceptos.

II.8 Definición. Dada una forma  $w \in A^*(M)$  se define  $d_F w$  la derivada exterior foliada, mediante la aplicación de la derivada exterior a la forma  $w$  sólo en la dirección de las hojas de  $F$ . Esto es si

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

donde  $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_{m-n}}$  son 1-formas tangentes a la foliación y  $dx^{i_{m-n+1}}, \dots, dx^{i_m}$  son 1-formas normales a la foliación, entonces

$$d_F w = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left[ \sum_s D_s w_{i_1 \dots i_k} dx^s \right] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

con la suma entre paréntesis corriendo para toda  $s \in 1, \dots, m-n$  y  $D_s$  la derivada parcial en la  $s$ -ésima dirección.

II.9 Definición. Sea  $I_a = (-a, a)$  un intervalo abierto.

$I_a^m = I_a \times \dots \times I_a$  el producto con  $m$  factores. Una carta foliada para  $F$   $(U, f, g)$ , esta formada por un homeomorfismo  $f: U \rightarrow I_a^m$ , con  $U$  un abierto de  $M$ ,  $g: U \rightarrow I_a^n$  una función tal que  $g = \Pi \circ f$ , donde  $\Pi: I_a^m \rightarrow I_a^n$  es la proyección natural de los últimos  $n$  factores.  $g$  tiene la propiedad de aplicar las hojas de  $F$  en puntos de  $I_a^n$ , ver figura.

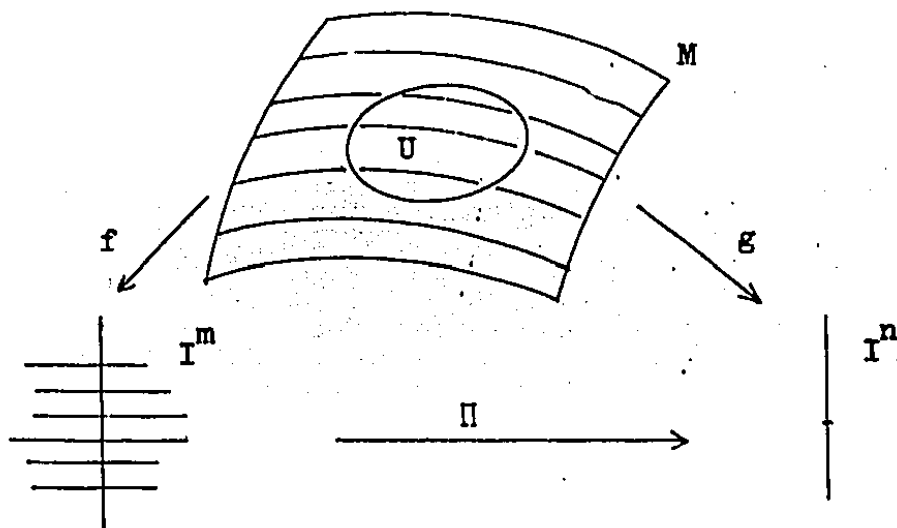


Fig. 9 Una carta foliada.

Se dice que la carta es birregular si existe otra carta coordenada foliada  $(\bar{U}, \bar{f}, \bar{g})$ , tal que  $U \subset \bar{U}$  y  $\bar{f}: \bar{U} \rightarrow I_c^m$  con  $c > a$  y  $\bar{f}|_U = f$ .

De hecho se supondrá adicionalmente que el cambio de coordenadas entre cartas foliadas es diferenciable y que las funciones  $g$  son submersiones diferenciables.

II.10 Teorema de Stokes foliado. Sea  $w \in A^{m-1}(M, F)$ . Entonces para

todo  $B \in S(F)$

$$\int_B d_F w = 0$$

Demostración. Sea una cubierta finita de  $M$  por cartas foliadas

$\{(U_i, f_i, g_i)\}$  y sea  $\{h_i\}$  una partición de la unidad subordinada a la cubierta. La forma  $w$  se decompone con respecto a la cubierta como

$$w = \sum h_i w_i$$

donde cada  $w_i$  es una  $(m-1)$ -forma con soporte en  $U_i$ . Con lo que se



tiene que

$$\int_B d_F w = \sum \int_{B_i} d_F w_i$$

Sea  $dx$  la forma de volumen usual en  $I^n$  y sean las  $n$ -formas  $d\bar{x}_i = g_i^* dx$  que son cerradas en  $A^*(M)$  y tienen soporte en algún  $U_i$ . Mediante la hipótesis de que  $w \in A^*(M, F)$  es posible escribir  $w$  localmente en cada  $U_i$  como  $w = \bar{w}_i \wedge d\bar{x}_i$ , para  $\bar{w}_i$  una  $(m-n-1)$ -forma con soporte en  $U_i$ . Calculando su derivada exterior foliada ;

$$d_F w_i = d_F \bar{w}_i \wedge d\bar{x}_i$$

ya que  $d\bar{x}_i$  es cerrada y en particular  $d_F$ -cerrada. Si  $B_i = g_i(B \cap U_i)$  se tiene que :

$$\int_B d_F w = \int_p B_i \left[ \int_{I_p^{m-n}} d_F \bar{w}_i \right] \cdot d\bar{x}_i$$

$$= \int_p B_i \left[ \int_{\partial I_p^{m-n}} \bar{w}_i \right] \cdot dx$$

$$= \int_{B_i} 0 \cdot dx = 0$$

ya que  $\bar{w}_i / \partial I_p^{m-n} = 0$  y  $I_p^{m-n} = I_a^{m-n}$ . Lo que termina la demostración del teorema de Stokes foliado. Q. E. D.

Ahora para concluir que  $\hat{c}_B$  está bien definido (lema I.7), basta observar que como  $w \in A^*(M, F)$   $dw = d_F w$ .

Las propiedades b), c), d) del lema I.7 siguen ahora de las propiedades usuales de la integración. Por ejemplo para mostrar d) sea  $B = \cup B_i$  unión numerable y disjunta de conjuntos saturados, calculando :

$$\begin{aligned} \hat{c}_B(y)[u] &= \int_B \Phi(y) \wedge u \\ &= \sum_i \int_{B_i} \Phi(y) \wedge u \end{aligned}$$

$$= \sum_i \mathcal{E}_{B_i}(y)[x]$$

por lo que  $\mathcal{E}_B$  es numerablemente aditiva. Esto finaliza la demostración del lema II.7 . Q. E. D.

Una observación interesante es que las hipótesis para el teorema de Stokes foliado y consecuentemente para toda esta teoría pueden ser debilitadas. Por ejemplo para formas con sólo coeficientes medibles el teorema de Stokes foliado se cumple ,aquí con el fin de simplificar se ha supuesto siempre diferenciabilidad. Más detalles sobre esto pueden hallarse en [HH].

Una ventaja importante de las medidas de Weil con respecto a la construcción de las clases características secundarias ,es que las medidas de Weil pueden ser algunas veces calculadas localmente en conjuntos saturados. Esto es mostrado en el siguiente lema :

II.11 Lema. Sea  $F$  una foliación de codimensión uno. Sea  $w$  una 1-forma que define a  $F$ , dual a  $Z$  una sección no nula del haz normal a la foliación. Considerese la 1-forma

$$u = i(Z)dw$$

donde  $i(Z)dw$  es la contracción de  $dw$  con respecto a  $Z$  . Entonces :

$$\mathcal{E}_B(y_1)[\theta] = \int_B u \wedge \theta$$

para todo  $B \in \mathcal{S}(F)$  .

Demostración. Por el teorema de integrabilidad de Frobenius  $dw = v \wedge w$  para  $v$  una 1-forma en  $M$ . Por ello  $i(Z)dw = v$  . Y como  $I(y_1) = v$  por el lema I.14 se tiene que

$$\mathcal{E}_B(y_1)[\theta] = \int_B \mathbb{F}(y_1) \wedge \theta = \int_B v \wedge \theta = \int_B u \wedge \theta .$$

Q. E. D.

Lo que se buscará ahora es dar interpretaciones sobre el comportamiento de las medidas de Weil en terminos de la foliación.

## 2.- La medida de Godbillon.

Dada una foliación la medida de Weil más simple es aquella asociada a  $\Phi(y_1) \in H^*(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{o}(n))$  la cual se conoce como la medida de Godbillon. Ella mide la obstrucción para la existencia de una medida transversa, absolutamente continua casi invariante en la foliación. Esta afirmación será discutida a lo largo de esta sección.

Sea  $F$  una foliación de codimensión uno en  $M^m$  una variedad diferenciable, compacta tal que el haz normal  $N$  a la foliación es orientable. Nota: la hipótesis de codimensión uno puede ser omitida y los resultados aquí expuestos siguen siendo válidos sin embargo con el fin de simplificar la notación se supone codimensión uno.

Sea  $\{(U_i, f_i, g_i)\}$  una cubierta finita de  $M$  por cartas foliadas birregulares con extensiones  $\{(\bar{U}_i, \bar{f}_i, \bar{g}_i)\}$ . Sean

$$T = \bigcup_i I_1, \quad \bar{T} = \bigcup_i I_2$$

las uniones disjuntas de los codominios de  $g_i$  y  $\bar{g}_i$  respectivamente. Es posible definir inmersiones

$$J: T \longrightarrow M, \quad \bar{J}: \bar{T} \longrightarrow M$$

tal que sean transversales a todas las hojas de  $F$ . Se dice que una pareja de índices  $i, j$  es admisible si  $(U_i \cap U_j) := U_{ij} \neq \emptyset$ .

Para todo  $i, j$  admisible se define

$$t_{ij}: \bar{T}_{ij} \longrightarrow \bar{T}_{ji}$$

donde  $\bar{T}_{ij} = \bar{g}_i(\bar{U}_{ij})$ , como

$$t_{ij}(p) = \bar{g}_i \circ \bar{g}_j(p)$$

Esto es  $t_{ij}$  es el cambio de coordenadas entre las transversales, ver figura 10. Como  $N$  es orientable se tiene que toda aplicación  $t_{ij}$  preserva orientación.

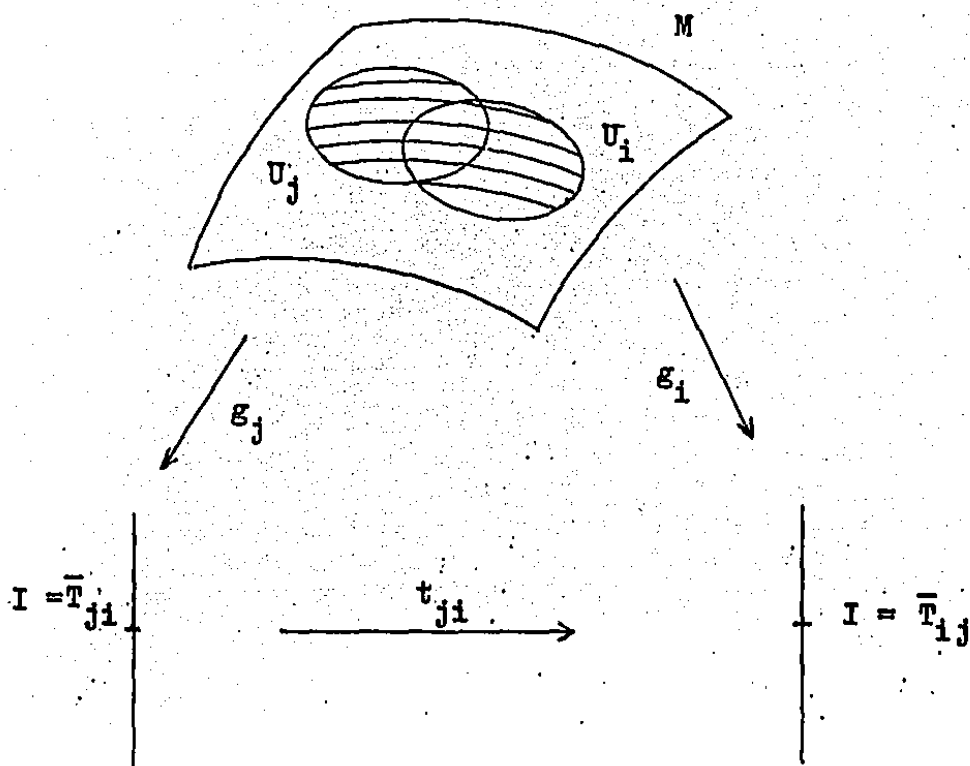


Fig. 10 Cambio de coordenadas transversal.

Sea  $dx$  la forma de volumen usual en  $\mathbb{R}$ . Dadas dos sucesiones de números reales  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  se denotará por  $a_n \sim b_n$  si sucede que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

A continuación se enuncia el lema básico de toda la sección. En el se expone una caracterización técnica de la anulación de la medida de Godbillon. Esta caracterización es la existencia de una sucesión de formas que definen a la foliación tal que la clase característica y la medida de Godbillon asociadas tiendan a cero conforme la sucesión tiende a infinito. Esta idea se debe a G. Duminy. La existencia de tal sucesión de formas está relacionada con otras propiedades más geométricas de la foliación, tales como su holonomía, lo que se vera más adelante.

II.12 Lema. Sea  $B \in S(F)$  un conjunto saturado. Si existe una suce-

-sión de 1-formas  $\{\bar{w}_i^n\}$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i$  variando en los índices de la cubierta por cartas foliadas. Tal que cada  $\bar{w}_i^n$  es una forma de volumen en  $T_i \subset g_i(U_i \cap B)$  y define a la foliación localmente. Satisfaciendo que para todo  $i, j$  admisible

$$t_{ij}^* w_j^n(e)_p \sim \bar{w}_i^n(e)_p \quad (\text{uniformemente})$$

donde  $p \in g_i(U_{ij} \cap B)$  y  $e$  es el campo de vectores tangentes unitarios usual en  $T_i = I_1$ . Entonces  $\mathcal{E}_B(y_1) = 0$ .

Demostración. La idea de la demostración es utilizar el lema II.11 para calcular  $\mathcal{E}_B(y_1)$ .

Sean  $w_i^n = g_i^* \bar{w}_i^n$  y sean  $f_{ij}^n$  funciones real valuadas tales que

$$g_i^* t_{ij}^* \bar{w}_j^n = (\exp f_{ij}^n) w_i^n.$$

Sea  $\{h_i\}$  una partición de la unidad asociada a la cubierta  $\{U_i\}$ . Se consideran 1-formas en  $M$ , que definen a la foliación en  $B$ , dadas como :

$$w^n = \exp\left(\sum_j h_j f_{ij}^n\right) w_i^n.$$

Calculando las correspondientes 1-formas  $u^n$  (según la notación del lema II.11) se tiene

$$u^n = \sum_j dh_j \wedge f_{ij}^n.$$

Además como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{ij}^n(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \frac{t_{ij}^* \bar{w}_j^n(e)_p}{\bar{w}_i^n(e)_p} \right) = 0$$

por la definición de  $f_{ij}^n$  con  $p \in g_i(U_{ij} \cap B)$ .

Lo que implica que las formas  $u^n$  convergen uniformemente a cero, con lo que calculando

$$\mathcal{E}_B(y_1)[v] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u^n \wedge v = 0$$

y se tiene lo que se quería mostrar.

Q. E. D.

Las condiciones bajo las cuales las formas  $\bar{w}_i^1$  existen son hasta aquí oscuras. Con el fin de aclarar bajo que condiciones existen se procede como sigue.

II.13 Definición. Dado  $B \in S(F)$ . Se dice que la foliación  $F$  es equicontinua en  $B$  si existe una cubierta de por cartas foliadas birregulares tales que hay una métrica continua

$$d : \bar{T} \times \bar{T} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que induce la topología usual en  $\bar{T}$  y que cumple que

$$d(p, q) = d(t_{ij}(p), t_{ij}(q))$$

para todos  $p, q \in \bar{G}_i(\bar{U}_{ij} \cap B)$ .

Intuitivamente una foliación es equicontinua si dos hojas transversalmente cercanas permanecen siempre así.

II.14 Ejemplos. Dado un haz fibrado, la foliación en el espacio total determinada por las fibras del haz es una foliación equicontinua, ya que la métrica sobre el espacio base satisface II.13. Dadas  $M^m, N^{m-n}$  variedades diferenciables cerradas y orientables, sea

$$\psi : \Pi_1(N) \longrightarrow \text{Dif}(M)$$

una representación del grupo fundamental de  $N$  en los difeomorfismos de  $M$ .  $\psi$  actúa entonces en  $M$  de manera diferenciable y la foliación producto en  $\bar{N} \times M$  baja a una foliación en el espacio cociente  $(\bar{N} \times M)/\psi$ , donde  $\bar{N}$  denota la cubriente universal de  $N$ . Este tipo de foliaciones son equicontinuas si y solo si  $\psi$  actúa equicontinua en  $M$ . Por ejemplo si  $M$  y  $N$  son variedades riemannianas y la acción está determinada por isometrías de  $M$ , entonces la distancia geodesica en  $M$  inducida por la métrica de Riemann cumple que

$$d(p, q) = d(t_{ij}(p), t_{ij}(q))$$

Utilizando esta técnica es posible hallar foliaciones equicontinuas de toro de dimensión tres. Existen difeomorfismos de clase  $C^1$

$$f, g : S^1 \longrightarrow S^1$$

que dan origen a una representación de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  en  $\text{Dif}^1(S^1)$ , topológicamente conjugados a una rotación (de donde la acción es equicontinua), pero no conjugados en clase  $C^\infty$  a rotaciones, ver [He].

Lo que se mostrará a continuación es que para foliaciones equicontinuas la medida de Godbillon se anula, para ello se prueban antes algunos lemas preliminares.

II.15 Definición. Dado  $\epsilon > 0$ . Una función de núcleo para  $F$  con  $\epsilon$ -soporte, es un conjunto de aplicaciones

$$K_i : \bar{T}_i \times \bar{T}_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde  $\bar{T}_i$  son las transversales asociadas a una cubierta foliada birregular, tales que satisfacen :

- a)  $K_i(p, q) = K_i(q, p)$ .
- b) Para cada  $p \in \bar{T}_i$  fija  $0 < \int_{\bar{T}_i} K_i(p, q) < \infty$ .
- c) El soporte de  $K_i$  en  $\bar{U}_i \times \bar{U}_i$  esta contenido en una  $\epsilon$ -vecindad de la diagonal de  $\bar{T}_i \times \bar{T}_i$ .

Intuitivamente puede decirse que una función de núcleo para  $F$  es casi una métrica para el espacio de hojas. Obsérvese que si  $M/F$  es Hausdorff entonces toda métrica que induce la topología cociente en  $M/F$  es una función de núcleo para  $F$ .

II.16 Definición. Dado  $B \in S(F)$ . Una función de núcleo para  $F$  es  $(c, \epsilon)$ -invariante en  $B$  si :

- a)  $K$  tiene  $\epsilon$ -soporte.
- b) Para todo  $i, j$  admisible si

$$b_{ij} : \bar{T}_{ij} \times \bar{T}_{ij} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{esta definida como}$$

$$b_{ij}(p, q) \cdot K_i(p, q) = K_j \circ (t_{ij} \times t_{ij})(p, q)$$

se cumple que  $|b_{ij}(p,q) - 1| < c$  para todos  $p, q \in \bar{g}_i(\bar{U}_{ij} \cap B)$ . Se dice que  $K$  es invariante en  $B$  si  $b_{ij} \equiv 1$ .

II.17 Lema. Dado  $B \in S(F)$ . Si  $F$  es equicontinua en  $B$  entonces para todo  $\epsilon > 0$  y  $c > 0$  existe una función de núcleo para  $F$  que es  $(c, \epsilon)$ -invariante en  $B$ .

Demostración. Sea  $d : \bar{T} \times \bar{T} \longrightarrow \mathbb{R}$  una función de distancia que hace a  $F$  equicontinua en  $B$ . Considerese la siguiente familia de funciones diferenciables

$$u_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad \text{donde}$$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1/n \\ 0 & \text{si } x \geq 2/n \end{cases} .$$

Sea  $K^n(p, q) = u_n(d(p, q))$ . Cada  $K^n$  es una función de núcleo en  $B$ . Además su soporte tiende uniformemente al aumentar  $n$ , a la diagonal de  $\bar{T} \times \bar{T}$ , por lo que para  $n$  suficientemente grande  $K^n$  es  $(c, \epsilon)$ -invariante en  $B$ . Q. E. D.

Todo lo anterior tiene su utilidad en el siguiente teorema :

II.18 Teorema. Heitsch - Hurder. Dado  $B \in S(F)$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe una función de núcleo que es  $(\epsilon, \epsilon)$ -invariante en  $B$ . Entonces  $\hat{E}_B(y_1) = 0$ .

Demostración. Dado  $n \in \mathbb{N}$  se elige un núcleo  $K^n$  que sea  $(1/n, 1/n)$ -invariante en  $B$ . Se definen funciones

$$f_i^n(q) = \left[ \int_{\bar{T}_i} K_i^n(p, q) dx \right]^{-1}$$

para cada  $\bar{T}_i$  transversal asociada a una carta foliada birregular y donde  $dx$  es la forma de volumen usual en  $\bar{T}_i$ . Estas funciones satisfacen que :

$$f_j^n t_{ij}(q) \sim |t_{ij}|_p^{-1} f_i^n(q)$$



para  $q \in g_i(U_i \cap B)$  y  $|t_{ij}|_p = t_{ij}^* dx(e)_p$  donde  $e$  es el campo de vectores tangentes unitarios usual en el intervalo  $I_1$ . Para mostrar lo anterior observese que el soporte de cada  $K_i^n$  tiende a la diagonal de  $\bar{T}_i \times \bar{T}_i$  y que cada  $\bar{T}_{ij}$  es compacta, por lo que existe un número  $N$  tal que para toda  $n > N$  y  $q_0$  en  $\bar{T}_{ij}$  el

$$\text{soporte}(K_i^n(p, q_0)) \subset \bar{T}_{ij}.$$

Y para  $n > N$  se tiene que :

$$\begin{aligned} f_j^n \circ t_{ij}(q)^{-1} &= \int_{\bar{T}_j} K_j^n(p, t_{ij}(q)) dx \\ &= \int_{\bar{T}_i} K_j^n(t_{ij}(p), t_{ij}(q)) |t_{ij}|_p dx \\ &= \int_{\bar{T}_i} b_{ij}^n(p, q) K_i^n(p, q) |t_{ij}|_p dx \\ &\sim \int_{\bar{T}_i} K_i^n(p, q) |t_{ij}|_p dx \\ &\sim |t_{ij}|_q \int_{\bar{T}_i} K_i^n(p, q) dx \\ &= |t_{ij}|_q [f_i^n(q)]^{-1} \end{aligned}$$

lo que implica la afirmación (1).

Es posible ahora elegir funciones  $\bar{f}_i^n$  diferenciables tales que

$$\bar{f}_i^n \sim f_i^n$$

mediante las cuales se define  $w_i^n = \bar{f}_i^n dx$  en cada  $\bar{T}_i$  y se tiene que :

$$\begin{aligned} t_{ij}^* w_j^n(e)_q &= \bar{f}_j^n \circ t_{ij}(q) |t_{ij}|_q \\ &\sim f_j^n \circ t_{ij}(q) |t_{ij}|_q \end{aligned}$$

$$\sim f_i^n(q) \sim \bar{f}_i^n(q) = w_i^n(e)_q$$

con lo que la sucesión de formas  $\{w_i^n\}$  satisfacen las hipótesis del lema II.12 y se concluye que  $\mathcal{E}_B(y_1) = 0$ . Q. E. D.

Todo el desarrollo anterior puede aplicarse en conjuntos  $B \in S(F)$  tales que  $F$  en  $B$  es sin holonomía y con solo hojas compactas. En este caso  $F$  está definida por una submersión con lo que  $F$  es equicontinua en  $B$ .

II.19 Corolario. Sea  $F$  una foliación de hojas compactas y con codimensión uno. Si el conjunto de hojas con holonomía no trivial es de medida cero. Entonces  $\mathcal{E}_M(y_1) = 0$ .

Demostración.  $M$  se descompone en conjuntos  $B_i$  saturados y sin holonomía. Evaluando la medida de Godbillon en cada  $B_i$  se sigue de las observaciones anteriores que

$$\mathcal{E}_{B_i}(y_1) = 0$$

para toda  $i$ . Como la medida de Godbillon es numerablemente aditiva inciso d) en II.7 y las hojas con holonomía son de medida cero el resultado sigue. Q. E. D.

Este corolario es también cierto en cualquier codimensión y con solo la hipótesis de compacidad de las hojas, ver [H]. Ahora se expone otra condición para la anulación de la medida de Godbillon.

II.20 Definiciones. Una medida finita  $\mu$  en  $\bar{T}$  es buena si todo abierto tiene medida positiva. Es invariante si  $t_{ij}^*(\mu) = \mu$  en cada  $\bar{T}_{ij}$ . Es invariante en  $B \in S(F)$  si  $\mu(t_{ij}(A)) = \mu(A)$  para todo  $A$  en  $\mathcal{G}_i(B \cap \bar{U}_{ij})$  medible. Una medida buena es isotrópica en  $q \in \bar{T}$  si para cualesquiera dos métricas  $r$  y  $r'$  en  $\bar{T}$  sucede que :

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{D(q, e, r)}{D(q, e, r')} = 1$$

donde,  $D(q, e, r) = \frac{\text{medida de la bola de radio } e \text{ en } T}{\text{Volumen euclideo de la bola de radio } e \text{ en } T}$

(donde el radio de la bola está medido con respecto a la métrica  $r$ ), tal que la convergencia en el límite es uniforme.

Intuitivamente la medida es isotrópica en  $q$  si la masa está distribuida uniformemente alrededor de  $q$ .

II.21 Teorema. Heitsch - Hurder . Dado  $B \in S(F)$ . Si  $F$  admite una medida buena  $\mu$  en  $\bar{T}$  e isotrópica con soporte en  $B$ . Entonces  $\mathcal{E}_B(y_1) = 0$ .

Demostración. Primero hay que observar que  $\mu$  está de hecho representada por medidas  $\mu_i$  en cada  $\bar{T}_i$ . Se construye una familia de funciones diferenciables

$$u_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1/n \\ 0 & \text{si } x \geq (n+1)/n^2 \end{cases} .$$

Y sea  $d_i: \bar{T}_i \times \bar{T}_i \longrightarrow \mathbb{R}$  la distancia euclídeana usual. Con lo anterior es posible construir una sucesión de núcleos en cada  $\bar{T}_i$  como

$$K_i^n(p, q) = u_n(d_i(p, q))$$

con la propiedad de que cada  $K_i^n$  es diferenciable. Sean funciones

$$\bar{f}_i^n: \bar{T}_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

dadas como

$$\bar{f}_i^n(q) = \frac{\int_{\bar{T}_i} K_i^n(p, q) \mu_i}{\int_{\bar{T}_i} K_i^n(p, q) dx}$$

que tienen la propiedad de ser funciones positivas.

Si se define una sucesión de formas como

$$w_i^n = \bar{f}_i^n dx .$$

Estas formas definen a la foliación, es necesario mostrar que cumplen con la hipótesis del lema II.12 para de ello concluir la anulación de la medida de Godbillon.

Calculando :

$$t_{ij}^* w_j^n(e)_q = \bar{f}_j^n \circ t_{ij}(q) |t_{ij}|_q$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\int_{\overline{T}_j} K_j^n(p, t_{ij}(q)) |t_{ij}|_q \mu_j}{\int_{\overline{T}_j} K_j^n(p, t_{ij}(q)) dx} \\
 &= \frac{\int_{\overline{T}_i} K_j^n(t_{ij}(p), t_{ij}(q)) |t_{ij}|_q \mu_i}{\int_{\overline{T}_i} K_j^n(t_{ij}(p), t_{ij}(q)) |t_{ij}|_q dx} \quad (1)
 \end{aligned}$$

debido a la invarianza de  $\mu$  bajo  $t_{ij}$ .

Por la definición de  $K_i^n$  y la continuidad de  $|t_{ij}|_p$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\overline{T}_i} K_j^n(t_{ij}(p), t_{ij}(q)) |t_{ij}|_p dx \\
 &\sim |t_{ij}|_q \int_{\overline{T}_i} u_n(d_j(t_{ij}(p), t_{ij}(q))) dx \\
 &\sim |t_{ij}|_q \text{ volumen } B(q, l/n, r') \quad (2)
 \end{aligned}$$

Análogamente se deduce que :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\overline{T}_i} K_j^n(t_{ij}(p), t_{ij}(q)) |t_{ij}|_q \mu_i \\
 &\sim |t_{ij}|_q \mu_i(B(q, l/n, r')) \quad (3)
 \end{aligned}$$

Substituyendo (3) y (2) en (1) se tiene

$$\begin{aligned}
 t_{ij}^* w_j^n(e)_q &\sim \frac{\mu_i(B(q, l/n, r'))}{\text{vol } B(q, l/n, r')} \\
 &\sim \frac{\mu_i(B(q, l/n, r))}{\text{vol } B(q, l/n, r)} \sim w_i^n(e)_q
 \end{aligned}$$

por la hipótesis de que la medida es isotrópica. Esta última afirmación es precisamente la hipótesis del lema II.12 de donde se sigue la nulidad de la medida de Godbillon. Q. E. D.

Resumiendo : la anulación de  $\mathcal{C}_B(y_1)$  implica por los lemas II.4 y II.3 la anulación de las clases

$$\mathfrak{F}(y_1 \otimes c_J) \quad \text{y} \quad \mathfrak{F}(y_1 \wedge y_I \otimes c_J)$$

en B para todos los multiíndices I, J posibles.

Quizá el problema abierto más interesante alrededor de toda esta teoría es hallar condiciones sobre la foliación que sean suficientes para implicar la no trivialidad de las clases características secundarias.

## REFERENCES

- [B1] R. Bott  
Lectures on characteristic classes and foliations.  
S.E.N. Vol. 279 (1972)
- [B2] R. Bott  
On topological obstruction to integrability.  
Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970)
- [BH] R. Bott A. Haefliger  
On characteristic classes of  $\Gamma$ -foliations.  
Bull. of. A.M.S. 78 (1972) 1039-1094
- [D] G. Duminy  
L' invariant de Godbillon-Vey d' un feuilletage se localise  
dans les feuilles ressort. Preprint (1982)
- [GH] P. Griffiths J. Harris  
Principles of Algebraic geometry. Wiley (1978)
- [GV] C. Godbillon J. Vey  
Un invariant des feuilletages de codimension 1.  
C.R. Acad. Sc. Paris t. 273 (1971)
- [He] M. Herman  
Sur la conjugaison Différentiable des difféomorphismes du  
cercle a des rotations.  
I.H.E.S. Publications Mathématiques No. 49 (1979)

- [H] S. Hurder  
Vanishing of secondary classes for compact foliations.  
J. London Math. Soc. (2), 28 (1983)
- [HH] J. Heitsch S. Hurder  
Secondary classes Weil measures and the geometry of foliations . J. Diff. Geom. 4 (1984)
- [HK] S. Hurder A. Katok  
Ergodic Theory and Weil measures for foliations.  
Preprint (1985) .
- [KN] S. Kobayashi K. Nomizu  
Foundations of Differential Geometry Vol. I y II .  
Wiley (1963)
- [KT] F. Kamber P. Tondeur  
Foliated bundles and characteristics classes.  
S.L.N. Vol. 493 (1976)
- [L] B. Lawson  
Quantitative theory of foliations.  
A.M.S. (1974)
- [MS] J. Milnor J. Stasheff  
Characteristic classes.  
Annals of Math. Studies 76 (1974)
- [P] H. Pittie  
Characteristic classes of foliations.  
Pitman (1976)
- [RW] B. Reinhart W. Wood  
A metric formula for the Godbillon-Vey invariant for foliations.

Proc. of the A.M.S. Vol. 38 Number 2 April 1973.

[T] W. Thurston

Noncobordant foliations of  $S^3$ .

Bull. of the A.M.S. Vol. 78 Number 4 July 1972.

