Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Métodos Categóricos en Problemas Matriciales.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

Leonardo Salmerón Castro

Becario del Instituto de Matemáticas de la UNAM

MEXICO, D. F. ENERO 1980

INDICE.

Introducción.	-9
§1.- Preliminares.	1
§2.- Producto Tensorial.	9
§3.- Bimódulos, sobre categorías, con estructura de Coálgebra (BOCS).	35
§4.- Categorías Graduadas Diferenciales (DGC y ADGC).	48
§5.- Relaciones entre BOCS y DGC.	61
§6.- Operaciones sobre BOCS.	86
Apéndice.	106
Lista de Símbolos.	107
Bibliografía.	109

INTRODUCCION.

Algunas publicaciones de los últimos años, en Teoría de Representaciones, tratan problemas relacionados con la clasificación de módulos inescindibles reduciendolos a ciertos "problemas de matrices". Frecuentemente sucede que el estudio de módulos sobre dos anillos, aparentemente muy distintos, conduce al mismo problema de matrices (vease [6]). Lo anterior y el hecho de que para resolver este tipo de problemas haya sido necesario desarrollar métodos específicos justifican la introducción de una "Teoría de problemas de matrices". Los primeros pasos para la formulación de esta fueron dadas por L.A. Nazarova y A.V. Roiter en [6], y por Drozd en [3].

En la primera conferencia internacional sobre representaciones de álgebras (ICRA I), Roiter y Kleiner presentaron un trabajo ([7]) donde se tratan por primera vez categorías Graduadas Diferenciales (DGC) y sus representaciones. Esto último, con el propósito de interpretar una clase amplia de "problemas de matrices" como problemas de representaciones de DGC's. En la sección 4 de este trabajo presentamos parte del trabajo anterior, detallando un poco mas algunas ideas.

En agosto del año pasado, Roiter expuso en la segunda conferencia internacional de representaciones de álgebras (ICRA II) un nuevo trabajo donde introdujo el concepto de Bimódulo sobre una categoría con estructura de coalgebra (BOCS) así como de sus representaciones, y mencionó las relaciones que existen entre estos nuevos conceptos y los correspondientes para DGC's. Asimismo, presentó una nueva formulación de un algoritmo, ya descrito en otros términos en [7], que permite, cuando el problema inicial es de tipo finito, describir todas las representaciones inescindibles y los morfismos entre ellas, resolviendo así el problema del cual partimos. En este trabajo seguimos el mismo camino (especificamente en las secciones 3,5 y 6) con un enfoque ligeramente distinto y posiblemente un poco mas general que hace necesaria la introducción de las secciones 1 y 2.

En la sección 1 definimos el concepto de Bimódulo sobre una categoría (posiblemente infinita) y mencionamos algunas de sus propiedades; al mismo tiempo se introduce notación que se mantendrá a lo largo de todo el trabajo.

Damos en la sección 2 otra descripción del producto tensorial de funtores que parece más conveniente para el desarrollo de este trabajo que la dada por Auslander en [1]. Tambien se presenta el concepto de producto tensorial de Bimódulos sobre una categoría, y se prueban algunas de sus propiedades básicas.

En el apéndice se discute la relación entre el producto tensorial usual y el que se define aquí: se aclara que el primero es caso particular de el segundo.

Agregamos a continuación algunas observaciones, bajo el título de "Motivación con dos ejemplos", con la intención de destacar algunas de las ideas básicas que llevaron el desarrollo de la teoría en esta dirección.

MOTIVACION CON DOS EJEMPLOS.
([7] y [8])

Un problema de matrices es esencialmente un problema de equivalencia de ciertos conjuntos de matrices bajo un conjunto de transformaciones permitidas. En algunos casos, estos problemas admiten formulaciones naturales y elegantes. El concepto de representación de un quiver (es decir un conjunto de puntos conectados por algunas flechas) es un ejemplo (vease [2]); una representación de un quiver sobre un campo k está dada cuando ha sido asignado a cada punto un k-espacio vectorial de dimensión finita, y a cada flecha una transformación lineal entre los espacios vectoriales correspondientes. Definiendo morfismo de representaciones de quiver de manera natural, se obtiene una categoría abeliana en donde se quisiera clasificar los objetos hasta isomorfismo. El problema anterior puede reformularse en términos de matrices como el problema de reducir un conjunto de matrices $\{A_n\}$ mediante transformaciones de la forma $\bar{A}_n = C_i A_n C_j^{-1}$, donde $\{C_i\}$ es un conjunto apropiado de matrices no singulares. Aquí, las únicas transformaciones permitidas son aquellas de renglones y columnas en cada matriz (algunas de ellas debiendose realizar simultáneamente en varias matrices), pero en otros problemas (vease [6]) uno puede sumar renglones y columnas de alguna matriz a renglones y columnas de otra. En estos casos, las transformaciones pueden considerarse como ciertas transformaciones lineales entre espacios vectoriales dados y entonces podemos asociarles, no ya un quiver, pero sí una bigráfica, es decir una gráfica con dos tipos de flechas. Las matrices que se transforman son asignadas a flechas del primer tipo (que dibujaremos continuas) y las que transforman a flechas del segundo tipo (que dibujaremos punteadas).

Para precisar lo anterior, analizemos dos ejemplos concretos. Supongamos que tenemos dos matrices A y B, $m \times n$ y $m \times l$ respectivamente, con coeficientes en un campo k. Podemos pensar que en realidad tenemos otra matriz $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline\end{array}$ partida en bloques.

<u>Primer problema:</u> Reducir esta nueva

matriz $\boxed{A}\boxed{B}$ a forma canónica utilizando todas las operaciones elementales usuales en renglones, y en columnas solamente aquellas que no "salten" la línea vertical. Entonces, dos matrices $\boxed{A}\boxed{B}$ y $\boxed{\bar{A}}\boxed{\bar{B}}$ serán equivalentes si y sólo si existen matrices no singulares C_1, C_2, C_3 tales que $\begin{cases} \bar{A} = C_1^{-1} A C_2 \\ \bar{B} = C_1^{-1} B C_3 \end{cases}$

[nótese que aquí; las operaciones sobre renglones en A y en B, correspondientes a multiplicar del lado izquierdo por C_1^{-1}, son simultáneas; y las operaciones sobre columnas en A y en B, correspondientes a multiplicar por la derecha por C_2 y C_3 respectivamente, son independientes], ó equivalentemente, tales que:

$$(*): \begin{cases} C_1\bar{A} - A C_2 = 0 \\ C_1\bar{B} - B C_3 = 0 \, . \end{cases}$$

Consideremos ahora el quiver Γ: $\begin{tikzcd} & 1 & \\ 2 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ul, "b"'] \end{tikzcd}$

y observemos que dos representaciones

$$\begin{tikzcd} & V_1 & \\ V_2 \arrow[ur, "A"] & & V_3 \arrow[ul, "B"'] \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} & \bar{V}_1 & \\ \bar{V}_2 \arrow[ur, "\bar{A}"] & & \bar{V}_3 \arrow[ul, "\bar{B}"'] \end{tikzcd}$$

son equivalentes si existen k-isomorfismos C_1, C_2, C_3 tales que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V}_1 & \\
\mathcal{V}_2 \arrow[ur, "A"] & & \mathcal{V}_3 \arrow[ul, "B"'] \\
 & \overline{\mathcal{V}}_1 \arrow[uu, "C_1"'] & \\
\overline{\mathcal{V}}_2 \arrow[uu, "C_2"] \arrow[ur, "\bar{A}"'] & & \overline{\mathcal{V}}_3 \arrow[uu, "C_3"'] \arrow[ul, "\bar{B}"]
\end{tikzcd}$$

es decir, si existen matrices no singulares C_1, C_2, C_3 que satisfacen (*).

<u>Segundo problema</u>: reducir la misma matriz $\boxed{A}\boxed{B}$ pero, esta vez, utilizando todas las operaciones del problema anterior mas aquellas operaciones elementales sobre columnas que salten la línea vertical de izquierda a derecha (por ejemplo, sumar una columna de A a otra de B).

Entonces dos matrices $\boxed{A}\boxed{B}$ y $\boxed{\bar{A}}\boxed{\bar{B}}$ serán equivalentes si y sólo si existen matrices C_1, C_2, C_3, W con C_1, C_2, C_3 no singulares y tales que se verifica:

$$\begin{cases} \bar{A} = C_1^{-1} A C_2 \\ \bar{B} = C_1^{-1} B C_3 + C_1^{-1} A W \end{cases}$$

(por tanto C_1, C_2, C_3, W son matrices de tamaños $m\times m$, $n\times n$, $l\times l$, $n\times l$ respectivamente).

ó equivalentemente

$$(**):\quad \begin{cases} C_1\overline{A} - A\,C_2 = 0 \\ C_1\overline{B} - B\,C_3 = A\,W \end{cases}$$

Podemos pensar estas matrices como transformaciones lineales entre k-espacios vectoriales de dimensión apropiada, y dibujar:

$$(***):\quad \begin{tikzcd}
 & \mathcal{V}_1 & \\
\mathcal{V}_2 \arrow[ur, "A"] & & \mathcal{V}_3 \arrow[ul, "B"'] \\
 & \overline{\mathcal{V}}_1 \arrow[uu, "C_1"] & \\
\overline{\mathcal{V}}_2 \arrow[uu, "C_2"] \arrow[ur, "\overline{A}"'] & & \overline{\mathcal{V}}_3 \arrow[uu, "C_3"'] \arrow[ul, "\overline{B}"] \arrow[uull, bend right, "W"']
\end{tikzcd}$$

Podemos asociar al problema 2 la bigráfica:

$$\mathcal{L}:\quad \begin{tikzcd}
 & 1 & \\
2 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ul, "b"'] \arrow[ll, dashed, "x"']
\end{tikzcd}$$
, y tomando

como representaciones para $\mathcal{L}$ las del quiver subyacente, en este caso Γ, podemos definir un morfismo de representaciones de $\mathcal{L}$ como una familia de morfismos c_1, c_2, c_3, W como en el dibujo (***) que satisfacen el sistema (**).

Aquí podemos observar que en la definición de morfismo de representaciones de quiver (problema 1) tenemos conmutatividades de cuadrados que se expresan en términos de las diferencias:

$$c_1\bar{A} - Ac_2 \quad y \quad c_1\bar{B} - Bc_3$$

pidiendo que se anulen. En el caso de la definición de morfismo de representaciones de bigráfica, los valores de estas mismas diferencias desempeñan también un papel importante; estos valores dependen de cierto operador "diferencial" $\mathcal{D}$ a su vez determinado, al igual que la bigráfica, por el problema de matrices en cuestión. En el caso particular del problema 2, el operador $\mathcal{D}$ es tal que $\mathcal{D}(a) = 0$, $\mathcal{D}(x) = 0$, $\mathcal{D}(b) = ax$.

En general, siendo a una flecha de una bigráfica dada, el valor de la diferencial $\mathcal{D}$ en a estará dado por una combinación k-lineal de las "factorizaciones de a" que sean caminos en los cuales aparece una flecha punteada si a es continua, y dos flechas punteadas en caso de serlo tambien a.

Para definir composición de morfismos de representaciones de bigráfica haremos uso otra vez del operador $\mathcal{D}$, pero esta vez centrando nuestra atención en sus valores para flechas punteadas.

De esta forma, dado un problema de matrices "razonable" es decir tal que el operador diferencial asociado cumple con ciertas restricciones (vease § 4), construimos una nueva categoría de representaciones en donde clasificar los objetos hasta isomorfismo corresponde a resolver el problema de matrices en cuestión.

§ 1.- Preliminares

A lo largo de todo el trabajo supondremos que las categorías que aparecen son esqueléticamente pequeñas, y k denotará un anillo conmutativo.

<u>1-1 DEFINICION.</u>- Una categoría $\mathcal{K}$ es una <u>k-categoría</u> si para cada pareja de objetos K_1, K_2 de $\mathcal{K}$ se tiene que $\mathcal{K}(K_1,K_2)$ es un k-módulo, y $\mathcal{K}(f,K_2)$, $\mathcal{K}(K_1,f)$ son morfismos de k-módulos para cada $\mathcal{K}$-morfismo f. Dadas $\mathcal{K}, \mathcal{V}$ k-categorías, un funtor $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un <u>k-funtor</u> si cada restricción $A: \mathcal{K}(K_1,K_2) \longrightarrow \mathcal{V}(AK_1,AK_2)$ es morfismo de k-módulos, para $K_1, K_2 \in |\mathcal{K}|$.

<u>1-2 DEFINICION.</u>- Un <u>ideal</u> I de una k-categoría $\mathcal{K}$ es un subfuntor de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}$, es decir un funtor $I: \mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Mod}\,k$ tal que para cada pareja $K_1, K_2 \in |\mathcal{K}|$, $I(K_1,K_2)$ es un k-submódulo de $\mathcal{K}(K_1,K_2)$ y la inclusión $I \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}$ es natural. Denotaremos por $\mathcal{K}/I$ la <u>categoría cociente</u> definida por:

$$|\mathcal{K}/I| = |\mathcal{K}|,\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/I}(K_1,K_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K_1,K_2)/I(K_1,K_2)$$

si $K_1, K_2 \in |\mathcal{K}/I|$, y $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{f \circ g}$ para $K_1 \xrightarrow{\bar{g}} K_2 \xrightarrow{\bar{f}} K_3$ en $\mathcal{K}/I$.

<u>1-3 DEFINICION.</u>- Si $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ son k-categorías, un <u>$\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulo</u> $\mathcal{C}$ (denotado por ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2}$) es un funtor $\mathcal{C}: \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ aditivo en cada variable y tal que $\mathcal{C}(f, tg) = \mathcal{C}(tf, g)$ para cada $t \in k$, (f,g) en $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1$. Si ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2}$, ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}_2}$ son Bimódulos, un <u>morfismo de $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$-Bimódulos</u> es una transformación natural $\mathcal{C} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}'$. Denotaremos por ${}_{\mathcal{K}_1}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}_2}$ a <u>la categoría de los $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulos.</u>

<u>1-4 OBSERVACIONES.</u>- (1) Si $A: \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1$, $B: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ son k-funtores y denotamos por ${}^{A}\mathcal{V}^{B}$ la composición $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \xrightarrow{B \times A} \mathcal{L}_2^{op} \times \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\mathcal{V}} Ab$ donde $\mathcal{V}$ es $\mathcal{L}_1$-$\mathcal{L}_2$ Bimódulo, entonces es claro que ${}^{A}\mathcal{V}^{B}$ es $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulo.

(2) Toda k-categoría $\mathcal{K}$ puede pensarse como un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ Bimódulo: Si $(K_2, K_1) \in |\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}|$, entonces $\mathcal{K}(K_2, K_1) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K_2, K_1)$. Si $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un k-funtor, en vista de que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(K_2, K_1) & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathcal{V}(AK_2, AK_1) \\ \downarrow \mathcal{K}(f,g) & & \downarrow \mathcal{V}(Af, Ag) \\ \mathcal{K}(K_2', K_1') & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathcal{V}(AK_2', AK_1') \end{array}$$

conmuta para cada $(f,g):(K_2,K_1)\longrightarrow(K_2',K_1')$ en $\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}$, podemos pensar a A como una transformación natural: $\hat{A}:(\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}\xrightarrow{\mathcal{K}}Ab)\to(\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}\xrightarrow{A\times A}\mathcal{V}^{op}\times\mathcal{V}\xrightarrow{\mathcal{V}}Ab)$ es decir, un morfismo de $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ Bimódulos

$$_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}\xrightarrow{\hat{A}}{}_{\mathcal{K}}\hat{A}\mathcal{V}\hat{A}_{\mathcal{K}}.$$

1-5 NOTACION.- Si $\mathcal{K},\mathcal{V}$ son categorías preaditivas, denotaremos por $(\mathcal{K},\mathcal{V})$ a la categoría de funtores covariantes (aditivos) de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{V}$ (véase [1]); pero si $\mathcal{K},\mathcal{V}$ son k-categorías, denotará la k-categoría de k-funtores covariantes de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{V}$.

1-6 PROPOSICION.- Si $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2$ son k-categorías, entonces:

$$(\mathcal{K}_1,(\mathcal{K}_2^{op},\mathrm{Mod}\,k))\cong{}_{\mathcal{K}_1}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}_2}\cong(\mathcal{K}_2^{op},(\mathcal{K}_1,\mathrm{Mod}\,k)).$$

Demostración: Si $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulo, definiendo en $\mathcal{C}(K_2,K_1)$ la acción:

$tx=\mathcal{C}(t1_{K_2},K_1)$ para $t\in k$, $(K_2,K_1)\in|\mathcal{K}_2^{op}\times\mathcal{K}_1|$, $x\in\mathcal{C}(K_2,K_1)$ se tiene que $\mathcal{C}(K_2,K_1)$ es k-módulo y para cada g en $\mathcal{K}_2^{op}$, $\mathcal{C}(g,K_1)$ es k-lineal. Tambien $\mathcal{C}(-,K_1):\mathcal{K}_2^{op}\longrightarrow\mathrm{Mod}\,k$ es k-funtor y $\mathcal{C}(-,f)$ es transformación de k-funtores para cada f en $\mathcal{K}_1$. Definamos entonces, $\beta: {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2} \longrightarrow (\mathcal{K}_1, (\mathcal{K}_2^{op}, Mod\,k))$ tal que $\beta(\mathcal{C}): \mathcal{K}_1 \longrightarrow (\mathcal{K}_2^{op}, Mod\,k)$ queda determinado por las fórmulas $\beta(\mathcal{C})(K_1) = \mathcal{C}(-, K_1)$ y $\beta(\mathcal{C})(f) = \mathcal{C}(-, f)$ para K_1, f en $\mathcal{K}_1$; y si $\eta: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo de ${}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$, definimos $\beta(\eta)$ tal que $\beta(\eta)_{K_1} = \eta_{(-,K_1)}$ para $K_1 \in |\mathcal{K}_1|$. $\beta(\mathcal{C})$ es claramente un funtor aditivo y, puesto que vale la fórmula $\mathcal{C}(t1, f) = \mathcal{C}(1, tf)$, tambien es un k-funtor. Es fácil verificar, usando la misma fórmula, que β es k-funtor. Consideremos ahora, $\alpha: (\mathcal{K}_1, (\mathcal{K}_2^{op}, Mod\,k)) \longrightarrow {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$ tal que $\alpha(F): \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ está dado por $\alpha(F)(K_2, K_1) = F(K_1)(K_2)$ y $\alpha(F)(f, g) = F(\mathrm{codom}\,g)(f) \circ F(g)(\mathrm{dom}\,f)$ para K_1, g en $\mathcal{K}_1$ y K_2, f en $\mathcal{K}_2^{op}$. Si $\eta: F \longrightarrow G$ es un morfismo en $(\mathcal{K}_1, (\mathcal{K}_2^{op}, Mod\,k))$, definimos $\alpha(\eta): \alpha(F) \longrightarrow \alpha(G)$ tal que $\alpha(\eta)_{(K_2, K_1)} = (\eta_{K_1})_{K_2}$ para $K_2, K_1 \in |\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1|$. Es inmediato que $\alpha(F)$ preserva identidades, veamos que tambien preserva la composición. Consideremos la composición $(f, g) \circ (f', g')$ en $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1$, entonces conmuta el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
F(\mathrm{dom}\, g)(\mathrm{dom} f) \arrow[r, "F(g)(\mathrm{dom} f)"] & F(\mathrm{codom}\, g)(\mathrm{dom} f) \\
F(\mathrm{dom}\, g)(\mathrm{dom} f') \arrow[u, "F(\mathrm{codom}\, g')(f')"] \arrow[r, "F(g)(\mathrm{dom} f')"'] & F(\mathrm{codom}\, g)(\mathrm{dom} f') \arrow[u, "F(\mathrm{codom}\, g)(f')"']
\end{tikzcd}$$

y en consecuencia, $\alpha(F)((f,g)\circ(f',g')) = \alpha(F)(ff',gg') =$
$= F(\mathrm{codom}\, gg')(ff') \circ F(gg')(\mathrm{dom}\, ff') =$
$= F(\mathrm{codom}\, g)(f) \circ F(\mathrm{codom}\, g)(f') \circ F(g)(\mathrm{dom} f') \circ F(g')(\mathrm{dom} f') =$
$= F(\mathrm{codom}\, g)(f) \circ F(g)(\mathrm{dom} f) \circ F(\mathrm{codom}\, g')(f') \circ F(g')(\mathrm{dom} f') =$
$= \alpha(F)(f,g) \circ \alpha(F)(f',g')$, de donde $\alpha(F)$ es funtor.
Puesto que $\alpha(F)(f,tg) = F(\mathrm{codom}\, g)(f) \circ F(tg)(\mathrm{dom} f) =$
$= F(\mathrm{codom}\, g)(f) \circ t\,F(g)(\mathrm{dom} f) = t\,F(\mathrm{codom}\, g)(f) \circ F(g)(\mathrm{dom} f) =$
$= F(\mathrm{codom}\, g)(tf) \circ F(g)(\mathrm{dom} f) = \alpha(F)(tf,g)$, entonces $\alpha(F)$ es un $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulo. Sea $\eta : F \longrightarrow G$ una transformación natural de k-funtores y $(f,g) : (K_2, K_1) \longrightarrow (K_2', K_1')$ en $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1$. En vista de que el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\alpha(F)(K_2,K_1) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[dd, "\alpha(F)(f,g)"'] & F(K_1)(K_2) \arrow[r, "\alpha(\eta)_{(K_2,K_1)} = (\eta_{K_1})_{K_2}"] \arrow[d, "F(g)(K_2)"'] & G(K_1)(K_2) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "G(g)(K_2)"] & \alpha(G)(K_2,K_1) \arrow[dd, "\alpha(G)(f,g)"] \\
 & F(K_1')(K_2) \arrow[r, "(\eta_{K_1'})_{K_2}"] \arrow[d, "F(K_1')(f)"'] & G(K_1')(K_2) \arrow[d, "G(K_1')(f)"] & \\
\alpha(F)(K_2',K_1') \arrow[r, phantom, "="] & F(K_1')(K_2') \arrow[r, "(\eta_{K_1'})_{K_2'} = \alpha(\eta)_{(K_2',K_1')}"'] & G(K_1')(K_2') \arrow[r, phantom, "="] & \alpha(G)(K_2,K_1)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, $\alpha(\eta)$ es transformación natural.

Es fácil ver que α es k-funtor y que $\alpha\beta = 1$, $\beta\alpha = 1$. La construcción del otro isomorfismo es simétrica. ∎

<u>1-7 DEFINICION.</u>- Si $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ son k-categorías, construimos una nueva k-categoría $\mathcal{K} \otimes_k \mathcal{K}'$, <u>el producto tensorial de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ sobre k</u>, como sigue: tomamos $|\mathcal{K} \otimes_k \mathcal{K}'| = |\mathcal{K} \times \mathcal{K}'|$, $\mathcal{K} \otimes_k \mathcal{K}'[(A,A'),(B,B')] = \mathcal{K}(A,B) \otimes_k \mathcal{K}'(A',B')$ para cada (A,A'), (B,B') en $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$, y damos la siguiente regla para efectuar la composición:

$$\mathcal{K}\otimes_k\mathcal{K}'[(B,B'),(C,C')] \times \mathcal{K}\otimes_k\mathcal{K}'[(A,A'),(B,B')] \longrightarrow \mathcal{K}\otimes_k\mathcal{K}'[(A,A'),(C,C')]$$
$$(f\otimes g \,,\, h\otimes t) \longmapsto fh\otimes gt \,.$$

<u>1-8 PROPOSICION.</u>- Si $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ son k-categorías entonces ${}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2} \cong (\mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1, Ab)$

<u>Demostración:</u>

Sea $\beta : {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2} \longrightarrow (\mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1, Ab)$ tal que para un Bimódulo $\mathcal{C} : \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$, $\beta(\mathcal{C}) : \mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ está dado por $\beta(\mathcal{C})(K_2, K_1) = \mathcal{C}(K_2, K_1)$ y $\beta(\mathcal{C})(f\otimes g) = \mathcal{C}(f,g)$ si (K_2, K_1), $f\otimes g$ estan en $\mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1$; si $\eta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo en ${}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$, tomamos $\beta(\eta)$ tal que $\beta(\eta)_{(K_2,K_1)} = \eta_{(K_2,K_1)}$ para $(K_2, K_1) \in |\mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1|$. En vista de que

$\mathscr{C}(-,-) : \mathcal{K}_2^{op}(K_2,K_2') \times \mathcal{K}_1(K_1,K_1') \longrightarrow Ab(\mathscr{C}(K_2,K_1), \mathscr{C}(K_2',K_1'))$
es k-balanceado, entonces
$\beta(\mathscr{C}) : \mathcal{K}_2^{op}(K_2,K_2') \otimes_k \mathcal{K}_1(K_1,K_1') \longrightarrow Ab(\mathscr{C}(K_2,K_1), \mathscr{C}(K_2',K_1'))$
está bien definido y es homomorfismo de grupos. Es fácil ver que $\beta(\mathscr{C})$ es un funtor, y es obvio que β es funtor.

Sea $\alpha : (\mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1, Ab) \longrightarrow {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$ tal que si $F : \mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ es un funtor, tomamos $\alpha(F) : \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ tal que $\alpha(F)(K_2,K_1) = F(K_2,K_1)$ y $\alpha(F)(f,g) = F(f \otimes g)$; y para $\eta : F \longrightarrow F'$ en $(\mathcal{K}_2^{op} \otimes_k \mathcal{K}_1, Ab)$ tomamos $\alpha(\eta)$ tal que $\alpha(\eta)_{(K_2,K_1)} = \eta_{(K_2,K_1)}$. Claramente α es funtor y $\alpha = \beta^{-1}$! ■

<u>1-9 DEFINICION.</u>- Sea $\mathcal{U} : (\mathcal{K}, Ab) \longrightarrow (\mathcal{K}, Set)$ el funtor que olvida. Un funtor (aditivo) $F : \mathcal{K} \to Ab$ es <u>libre</u> si existe un subfuntor $G : \mathcal{K} \longrightarrow Set$ de $\mathcal{U}F : \mathcal{K} \longrightarrow Set$ con la propiedad de que para cada funtor (aditivo) $H : \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ y cada transformación natural $\eta : G \longrightarrow \mathcal{U}H$, existe una única transformación natural $\bar{\eta} : F \to H$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, hook] & \mathcal{U}H \\ \mathcal{U}F \arrow[ur, dashed, "\mathcal{U}\bar{\eta}"'] & \end{tikzcd}$$

; en este

caso, F es <u>$\mathcal{K}$-libre generado por G</u>. Un Bimódulo $\mathcal{C}$ de ${}_{\mathcal{K}_1}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}_2}$ es <u>libre</u> si lo es en $(\mathcal{K}_2^{op} \otimes_{k} \mathcal{K}_1, Ab)$.

§2.- Producto Tensorial

2-1 OBSERVACION-([1]).- Dada una categoría preaditiva $\mathcal{K}$, existe un único (hasta isomorfismo) funtor $\otimes_{\mathcal{K}} : (\mathcal{K}^{op}, Ab) \times (\mathcal{K}, Ab) \longrightarrow Ab$ llamado *producto tensorial*(*) con las siguientes propiedades: Sean $A : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$, $B : \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ funtores aditivos, denotemos por $A \otimes_{\mathcal{K}} B$ a $\otimes_{\mathcal{K}}(A, B)$, entonces

(a) $\left\{ \begin{array}{l} - \otimes_{\mathcal{K}} B : (\mathcal{K}^{op}, Ab) \longrightarrow Ab \\ A \otimes_{\mathcal{K}} - : (\mathcal{K}, Ab) \longrightarrow Ab \end{array} \right.$ son exactos derechos.

(b) $- \otimes_{\mathcal{K}} B$, $A \otimes_{\mathcal{K}} -$ preservan sumas arbitrarias.

(c) $\left\{ \begin{array}{l} A \otimes_{\mathcal{K}} (K, -) = A(K) \\ (-, K) \otimes_{\mathcal{K}} B = B(K) \end{array} \right.$ para cada $K \in |\mathcal{K}|$.

Daremos otra descripción de este producto tensorial en terminos de sus generadores.

(*) Lo que aquí denotamos por $\otimes_{\mathcal{K}}$ corresponde a $\otimes_{\mathcal{K}^{op}}$ en [1].

<u>2-2 DEFINICION.</u>- Sean $A: \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$, $B: \mathcal{K} \to Ab$ funtores aditivos y H un grupo abeliano, entonces una <u>transformación $\mathcal{K}$-balanceada $A \times B \xrightarrow{\nu} H$</u> es una familia de funciones

$$(\nu_K : A(K) \times B(K) \longrightarrow H)_{K \in |\mathcal{K}|}$$

que satisface las condiciones:

(a) ν_K es aditiva en cada variable, para cada $K \in |\mathcal{K}|$

(b)
$$\begin{array}{ccc} A(K') \times B(K) & \xrightarrow{A(f) \times 1} & A(K) \times B(K) \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \times B(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_K} \\ A(K') \times B(K') & \xrightarrow{\nu_{K'}} & H \end{array}$$

conmuta si $K \xrightarrow{f} K'$ es un $\mathcal{K}$-morfismo.

<u>2-3 TEOREMA.</u>-

(I) Si $A: \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$, $B: \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ son funtores aditivos, entonces podemos hallar $\varphi: A \times B \longrightarrow A \otimes_{\mathcal{K}} B$ $\mathcal{K}$-balanceada con la propiedad de que dada cualquier otra $\nu: A \times B \longrightarrow H$ $\mathcal{K}$-balanceada, existe un único morfismo de grupos $\bar{\nu}: A \otimes_{\mathcal{K}} B \longrightarrow H$ tal que

$$\begin{array}{ccc} A(K) \times B(K) & \xrightarrow{\nu_K} & H \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_K} & \nearrow{\scriptstyle \bar{\nu}} & \\ A \otimes_{\mathcal{K}} B & & \end{array}$$

conmuta para cada $K \in |\mathcal{K}|$.

tomando $a \otimes_K b = \varphi_K(a,b)$, se tiene que:

$\{a \otimes_K b / K \in |\mathcal{K}|, a \in A(K), b \in B(K)\}$ genera a $A \otimes_{\mathcal{K}} B$.

(II) Si $A, A' : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$; $B, B' : \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ son funtores aditivos, y $\mu : A \longrightarrow A'$, $\mu' : B \longrightarrow B'$ son transformaciones naturales, entonces $\mu \otimes_{\mathcal{K}} \mu'$ es el único morfismo de grupos tal que, para cada $K \in |\mathcal{K}|$, conmuta

$$\begin{tikzcd}
A(K) \times B(K) \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "\mu_K \times \mu'_K"'] & A \otimes B \arrow[d, "\mu \otimes_{\mathcal{K}} \mu'"] \\
A'(K) \times B'(K) \arrow[r, "\varphi'_K"] & A' \otimes B'
\end{tikzcd}$$

es decir:

$$(\mu \otimes \mu')(a \otimes_K b) = \mu_K(a) \otimes_K \mu'_K(b).$$

Demostración.- Dividiremos la prueba en dos pasos: Paso 1.- demostración de parte del Teorema para el caso $A = \coprod_I (-, K_i)$.

Sea para cada $K \in |\mathcal{K}|$,

$$\theta_K : [\coprod_I (K, K_i)] \times B(K) \longrightarrow [\coprod_I (-, K_i)] \otimes_{\mathcal{K}} B = \bigoplus_I B(K_i)$$

$$(\sum_I f_i, b) \longmapsto \sum_I B(f_i)(b)$$

Afirmación 1.- $\theta : [\coprod_I (-, K_i)] \times B \longrightarrow [\coprod_I (-, K_i)] \otimes_{\mathcal{K}} B$ es transformación $\mathcal{K}$-balanceada.

demostración: Sea $f : K \longrightarrow K'$ en $\mathcal{K}$, entonces

$$\begin{tikzcd}
{[\coprod (K', K_i)] \times B(K)} \arrow[r, "{[\coprod (f, K_i)] \times 1}"'] \arrow[d, "1 \times B(f)"] & {[\coprod (K, K_i)] \times B(K)} \arrow[d, "\theta_K"] \\
{[\coprod (K', K_i)] \times B(K')} \arrow[r, "\theta_{K'}"] & {[\coprod (-, K_i)] \otimes_{\mathcal{K}} B}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo ya que:

$\theta_K \cdot [\amalg(f, K_i)] \times 1 \, (\Sigma f_i, b) = \theta_K(\Sigma f_i \cdot f, b) = \Sigma B(f_i \cdot f)(b) =$
$= \Sigma B(f_i) B(f)(b) = \theta_{K'}(\Sigma f_i, B(f)(b)) =$
$= \theta_{K'} \circ [1 \times B(f)] (\Sigma f_i, b)$, y θ_K es claramente aditiva en cada variable ■

Observemos que para cada $\sum_I b_i \in \bigoplus_I B(K_i)$ se tiene que $\sum_I b_i = \sum_I \theta_{K_i}(1_{K_i}, b_i)$, y en consecuencia

$\{\theta_K(a,b) / K \in |\mathcal{K}|, a \in A(K), b \in B(K)\}$ genera $A \otimes_{\mathcal{K}} B$.

Sea $\sigma : A \times B \longrightarrow H$ una transformación $\mathcal{K}$-balanceada y definamos:

$$\bar{\sigma} : [\coprod_I (-, K_i)] \otimes_{\mathcal{K}} B = \bigoplus_I B(K_i) \longrightarrow H$$
$$\sum_I b_i \longmapsto \sum_I \sigma_{K_i}(1_{K_i}, b_i).$$

$\bar{\sigma}$ es claramente morfismo de grupos y

Afirmación 2.- Para cada $K \in |\mathcal{K}|$, conmuta

$$\begin{array}{ccc} A(K) \times B(K) & \xrightarrow{\sigma_K} & H \\ \downarrow \theta_K & \nearrow_{\bar{\sigma}} & \\ A \otimes_{\mathcal{K}} B & & \end{array}$$

demostración: Sea $(\sum_I g_i, b) \in [\coprod_I (K, K_i)] \times B(K)$; para cada $i_0 \in I$ conmuta:

$$\begin{array}{ccc} [\coprod_I (K_{i_0}, K_i)] \times B(K) & \xrightarrow{[\coprod_I (g_{i_0}, K_i)] \times 1} & [\coprod_I (K, K_i)] \times B(K) \\ {\scriptstyle 1 \times B(g_{i_0})} \downarrow & & \downarrow \sigma_K \\ [\coprod_I (K_{i_0}, K_i)] \times B(K_{i_0}) & \xrightarrow[\sigma_{K_{i_0}}]{} & H \end{array}$$

en particular, $\sigma_{K_{i_0}}(1_{K_{i_0}}, B(g_{i_0})(b)) = \sigma_K(g_{i_0}, b)$ y entonces:

$$\sigma\theta_K(\Sigma g_i, b) = \sigma(\Sigma B(g_i)(b)) = \Sigma\, \sigma_{K_i}(1_{K_i}, B(g_i)(b)) =$$
$$= \Sigma\, \sigma_K(g_i, b) = \sigma_K(\Sigma g_i, b) \quad \blacksquare$$

<u>Afirmación 3.</u>- Supongamos que tenemos transformaciones naturales $\mu: \coprod_I(-,K_i) \longrightarrow \coprod_J(-,K'_j)$ y $\mu': B \longrightarrow B'$, entonces, para cada $K \in |\mathcal{K}|$, conmuta

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_I (K,K_i)\right] \times B(K) \arrow[r, "\theta_K"] \arrow[d, "\mu_K \times \mu'_K"] & \left[\coprod_I (-,K_i)\right] \otimes_K B \arrow[d, "\mu \otimes \mu'"] \\
\left[\coprod_J (K,K'_j)\right] \times B'(K) \arrow[r, "\theta'_K"] & \left[\coprod_J (-,K'_j)\right] \otimes_K B'
\end{tikzcd}$$

<u>demostración:</u> Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_I (K,K_i)\right] \times B(K) \arrow[rrr, "\theta_K"] \arrow[dd, "\mu_K \times \mu'_K"'] \arrow[dr, "\mu_K \times 1"] & & & \left[\coprod_I (-,K_i)\right] \otimes B \arrow[dl, "\mu \otimes 1"'] \arrow[dd, "\mu \otimes \mu'"] \\
① & \left[\coprod_J (K,K'_j)\right] \times B(K) \arrow[r, "\theta''_K"] \arrow[dl, "1 \times \mu'_K"] & \left[\coprod_J (-,K'_j)\right] \otimes B \arrow[dr, "1 \otimes \mu'"] & ③ \\
\left[\coprod_J (K,K'_j)\right] \times B'(K) \arrow[rrr, "\theta'_K"] & & & \left[\coprod_J (-,K'_j)\right] \otimes B'
\end{tikzcd}$$

② ④

Los diagramas ① y ③ son claramente conmutativos. Para ver que ④ conmuta, tomemos $(\sum_J f_j, b) \in \left[\coprod_J (K,K'_j)\right] \times B(K)$. Entonces, para cada $j \in J$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B(K) \arrow[r, "\mu'_K"] \arrow[d, "B(f_j)"] & B'(K) \arrow[d, "B'(f_j)"] \\ B(K'_j) \arrow[r, "\mu'_{K'_j}"] & B'(K'_j) \end{tikzcd}$$

, pero ademas, se tiene que:

$[\coprod_J (-,K'_j)] \otimes B \xrightarrow{1\otimes\mu'} [\coprod_J (-,K'_j)] \otimes B'$ coincide con $\bigoplus_J B(K'_j) \xrightarrow{\oplus \mu'_{K'_j}} \bigoplus_J B'(K'_j)$ y entonces

$$\theta'_K \circ 1 \times \mu'_K (\Sigma f_j, b) = \theta'_K(\Sigma f_j, \mu'_K(b)) = \Sigma B'(f_j) \circ \mu'_K(b) =$$
$$= \Sigma \mu'_{K'_j} \circ B(f_j)(b) = 1 \otimes \mu'(\Sigma B(f_j)(b)) =$$
$$= (1 \otimes \mu') \circ \theta''_K(\Sigma f_j, b),$$ es decir (4) conmuta.

Veamos ahora que tambien (2) conmuta.

Es fácil ver, usando el Lema de Yoneda, que $\mu = [\coprod_I (-,K_i) \xrightarrow{((-,f_{ij}))_{J\times I}} \coprod_J (-,K'_j)]$ para alguna familia $\{f_{ij} : K_i \to K'_j\}_{J\times I}$ de K-morfismos.

Por (b) y (c) de 2-1 (para $-\otimes B$), se tiene que $\mu \otimes B$ coincide con $\bigoplus_I B(K_i) \xrightarrow{(B(f_{ij}))_{J\times I}} \bigoplus_J B(K'_j)$ y entonces, si $(\Sigma_I g_i, b) \in [\coprod_I (K, K_i)] \times B(K)$,

$$\theta''_K \circ (\mu_K \times 1)(\Sigma_I g_i, b) = \theta''_K(((K, f_{ij}))(\Sigma_I g_i), b) =$$
$$= \theta''_K(\Sigma_J(\Sigma_I f_{ij} g_i), b) = \Sigma_J B(\Sigma_I f_{ij} g_i)(b) =$$
$$= \Sigma_J \Sigma_I B(f_{ij} g_i)(b) = (B(f_{ij}))(\Sigma_I B(g_i)(b)) =$$
$$= \mu \otimes B \circ \theta_K(\Sigma_I g_i, b). \quad \blacksquare$$

<u>Paso 2:</u> demostración del teorema para cuando A es arbitrario.

Consideremos $\coprod_{J}(-,K_j') \xrightarrow{\eta'} \coprod_{I}(-,K_i) \xrightarrow{\eta} A \longrightarrow 0$ una presentación de A. Sea $K \in |\mathbb{K}|$.

Si $b \in B(K)$, denotemos por i_b las inclusiones

$$\begin{aligned} \coprod_{J}(K,K_j') &\hookrightarrow \Big[\coprod_{J}(K,K_j')\Big] \times B(K) \\ t &\longmapsto (t,b) \end{aligned}$$

. Puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Big[\coprod_{J}(-,K_j')\Big]\otimes B \arrow[r, "\eta'\otimes B"] & \Big[\coprod_{I}(-,K_i)\Big]\otimes B \\ \Big[\coprod_{J}(K,K_j')\Big]\times B(K) \arrow[u, "\theta_K'"] \arrow[r, "\eta'_K\times 1"] & \Big[\coprod_{I}(K,K_i)\Big]\times B(K) \arrow[u, "\theta_K"'] \\ \coprod_{J}(K,K_j') \arrow[u, "i_b"] \arrow[r, "\eta'_K"] & \coprod_{I}(K,K_i) \arrow[u, "i_b"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, hay un único morfismo de grupos $(\varphi_K)_b$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd} \Big[\coprod_{J}(-,K_j')\Big]\otimes B \arrow[r, "\eta'\otimes B"] & \Big[\coprod_{I}(-,K_i)\Big]\otimes B \arrow[r, "\eta\otimes B"] & A\otimes B \arrow[r] & 0 \\ \coprod_{J}(K,K_j') \arrow[u, "\theta_K' i_b"] \arrow[r, "\eta'_K"] & \coprod_{I}(K,K_i) \arrow[u, "\theta_K i_b"] \arrow[r, "\eta_K"] & A(K) \arrow[u, dashed, "(\varphi_K)_b"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y podemos entonces definir

$$\begin{aligned} \varphi_K : A(K)\times B(K) &\longrightarrow A\otimes B \\ (a,b) &\longmapsto (\varphi_K)_b(a). \end{aligned}$$

<u>Afirmación 4.</u>- $\varphi: A\times B \longrightarrow A\otimes_{\mathcal{K}} B$ es transformación $\mathcal{K}$-balanceada.

<u>demostración:</u> Es inmediato que φ_K es aditiva en cada variable ya que si $(\bar{a},\bar{b}) \in A(K)\times B(K)$, entonces $(\varphi_K)_{\bar{b}}(\bar{a}) = \eta\otimes B\left(\sum_I B(g_i)(\bar{b})\right)$ donde $\sum_I g_i$ es algún elemento de $\eta_K^{-1}(\bar{a})$.

Sean $f: K \longrightarrow K'$ en $\mathcal{K}$ y $(a,b)\in A(K')\times B(K)$; como

$$\begin{array}{ccc} \coprod_I (K,K_i) & \xrightarrow{\eta_K} & A(K) \\ \uparrow{\scriptstyle \coprod(f,K_i)} & & \uparrow{\scriptstyle A(f)} \\ \coprod_I (K',K_i) & \xrightarrow{\eta_{K'}} & A(K') \end{array}$$

es conmutativo, entonces $\sum_I g_i f \in \eta_K^{-1}(A(f)(a))$, en caso de que $\sum_I g_i \in \eta_{K'}^{-1}(a)$. De lo anterior, se sigue que

$$\varphi_{K'}\circ(1\times B(f))(a,b) = \varphi_{K'}(a, B(f)(b)) =$$
$$= \eta\otimes B\left(\sum_I B(g_i)B(f)(b)\right) = \eta\otimes B\left(\sum_I B(g_i f)(b)\right) =$$
$$= \varphi_K(A(f)(a), b) = \varphi_K\circ(A(f)\times 1)(a,b). \blacksquare$$

como $\{\theta_K(a,b) / K\in|\mathcal{K}|, a\in \coprod_I (K,K_i), b\in B(K)\}$ genera a $[\coprod_I(-,K_i)]\otimes B$, entonces

$G = \{a\otimes_K b \,/\, K\in|\mathcal{K}|, a\in A(K), b\in B(K)\}$ genera a $A\otimes B$.

<u>Afirmación 5.</u>- φ no depende de la presentación de A.

<u>demostración:</u> Consideremos

$\coprod_J (-,\overline{K}'_j) \xrightarrow{\overline{\eta}'} \coprod_I (-,\overline{K}_i) \xrightarrow{\overline{\eta}} A \longrightarrow 0$ otra presentación de A, y

$$\begin{tikzcd}
\coprod_J(-,\overline{K}'_j) \arrow[r, "\overline{\eta}'"] \arrow[d, "\rho'"] & \coprod_I(-,\overline{K}_i) \arrow[r, "\overline{\eta}"] \arrow[d, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\coprod_J(-,K'_j) \arrow[r, "\eta'"] & \coprod_I(-,K_i) \arrow[r, "\eta"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un levantamiento de la identidad en A. En el siguiente diagrama $\circledast$ conmuta puesto que el resto del diagrama conmuta y $\overline{\eta}_K\times 1$ es suprayectiva:

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_I(K,\overline{K}_i)\right]\times B(K) \arrow[rrr, "\overline{\eta}_K\times 1"] \arrow[dr, "\overline{\sigma}_K"] \arrow[ddd, "\rho_K\times 1"'] & & & A(K)\times B(K) \arrow[dl, "\psi_K"'] \arrow[ddd, "id\times 1"] \\
& \left[\coprod_I(-,\overline{K}_i)\right]\otimes B \arrow[r, "\overline{\eta}\otimes B"] \arrow[d, "\rho\otimes B"] & A\otimes B \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \\
& \left[\coprod_I(-,K_i)\right]\otimes B \arrow[r, "\eta\otimes B"] & A\otimes B & \\
\left[\coprod_I(K,K_i)\right]\times B(K) \arrow[rrr, "\eta_K\times 1"] \arrow[ur, "\theta_K"] & & & A(K)\times B(K). \arrow[ul, "\psi_K"']
\end{tikzcd}$$ ■

Sea $\nu: A\times B\longrightarrow H$ una transformación $\mathcal{K}$-balanceada. Definamos para cada $K\in|\mathcal{K}|$,

$$\sigma_K = \nu_K\circ(\eta_K\times 1)$$

<u>Afirmación 6.-</u>

$\sigma: \left[\coprod_I(-,K_i)\right]\times B\longrightarrow H$ es $\mathcal{K}$-balanceada

<u>demostración</u>: cada σ_K es claramente aditiva en cada variable. Si $f: K\longrightarrow K'$ es un $\mathcal{K}$-morfismo,

es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & {[\coprod_I (K',K_i)]\times B(K)} \arrow[dlll, "1\times B(f)"'] \arrow[d, "\eta'_K\times 1"] \arrow[drrr, "\amalg(f,K_i)\times 1"] & & & \\
 & & & A(K')\times B(K) \arrow[dl, "1\times B(f)"'] \arrow[dr, "A(f)\times 1"] & & & \\
{[\coprod_I (K',K_i)]\times B(K')} \arrow[rr, "\eta_{K'}\times 1"'] \arrow[drrr, "\sigma_{K'}"'] & & A(K')\times B(K') \arrow[dr, "\nu_{K'}"] & & A(K)\times B(K) \arrow[dl, "\nu_K"'] & & {[\coprod_I (K,K_i)]\times B(K)} \arrow[ll, "\eta_K\times 1"] \arrow[dlll, "\sigma_K"] \\
 & & & H & & &
\end{tikzcd}$$

■

Por el Paso 1, existe $\sigma : [\coprod_I (-,K_i)]\otimes B \longrightarrow H$ morfismo de grupos que cumple con las afirmaciones 2 y 3; y, en consecuencia, si $\theta_K(a,b)$ es un generador de $[\coprod_J (-,K'_j)]\otimes B$,

$$\sigma\, \eta'\otimes B\ \theta_K(a,b) \overset{3}{=} \sigma\, \theta_K(\eta'_K\times 1)(a,b) = \sigma\, \theta_K(\eta'_K(a),b) =$$
$$\overset{2}{=} \sigma_K(\eta'_K(a),b) = \nu_K\circ(\eta_K\times 1)(\eta'_K(a),b) = \nu_K(0,b) = 0$$

y entonces hay un morfismo de grupos $\overline{\nu}$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{[\coprod_J (-,K'_j)]\otimes B} \arrow[r, "\eta'\otimes B"] \arrow[d] & {[\coprod_I (-,K_i)]\otimes B} \arrow[r, "\eta\otimes B"] \arrow[d, "\sigma"] & A\otimes B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\overline{\nu}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, equal] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>Afirmación 7</u>.- $\overline{\nu}$ no depende de la presentación de A.

<u>demostración</u>: Consideremos

$$\coprod_J(-,\bar K_j') \xrightarrow{\bar\eta'} \coprod_I(-,\bar K_i) \xrightarrow{\bar\eta} A \longrightarrow 0$$

otra presentación de A, y

$$\begin{tikzcd}
\coprod_J(-,\bar K_j') \arrow[r, "\bar\eta'"] & \coprod_I(-,\bar K_i) \arrow[r, "\bar\eta"] & A \arrow[r] & 0 \\
\coprod_J(-,K_j') \arrow[r, "\eta'"] \arrow[u, "\rho'"] & \coprod_I(-,K_i) \arrow[r, "\eta"] \arrow[u, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

un levantamiento de la identidad en A. Veamos primero que

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_I(-,K_i)\right]\otimes B \arrow[rr, "\rho\otimes B"] \arrow[dr, "\bar\sigma"'] & & \left[\coprod_I(-,\bar K_i)\right]\otimes B \arrow[dl, "\hat{\bar\sigma}"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $\theta_K(a,b)$ un generador de $\left[\coprod_I(-,K_i)\right]\otimes B$. Puesto que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_I(K,\bar K_i)\right]\times B(K) \arrow[rr, "\hat\theta_K"] \arrow[dr, "\bar\eta_K\times 1"] \arrow[drr, "\hat\sigma_K"] & & \left[\coprod_I(-,\bar K_i)\right]\otimes B \arrow[d, "\hat{\bar\sigma}"] \\
& A(K)\times B(K) \arrow[r, "\gamma_K"] & H \\
\left[\coprod_I(K,K_i)\right]\times B(K) \arrow[uu, "\rho_K\times 1"] \arrow[ur, "\eta_K\times 1"] \arrow[urr, "\sigma_K"'] \arrow[rr, "\theta_K"'] & & \left[\coprod_I(-,K_i)\right]\otimes B \arrow[u, "\bar\sigma"']
\end{tikzcd}$$

tenemos: $\bar\sigma\,\theta_K(a,b) = \hat{\bar\sigma}\,\hat\theta_K(\rho_K\times 1)(a,b) =$
$\overset{3}{=} \hat{\bar\sigma}\cdot\rho\otimes B\;\theta_K(a,b)$, y entonces $\bar\sigma = \hat{\bar\sigma}\,\rho\otimes B$.

La afirmación se sigue de la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_{I}(-,K_i)\right]\otimes B \arrow[rrr, "\eta\otimes B"] \arrow[dr, "\bar{\sigma}"] \arrow[dd, "\rho\otimes B"'] & & & A\otimes_K B \arrow[dl, "\bar{\gamma}"'] \arrow[dd, equal] \\
& H \arrow[r, equal] & H & \\
\left[\coprod_{\bar{I}}(-,\bar{K}_i)\right]\otimes B \arrow[rrr, "\bar{\eta}\otimes B"'] \arrow[ur, "\bar{\xi}"'] & & & A\otimes_K B \arrow[ul, "\bar{\zeta}"]
\end{tikzcd}$$

■

La conmutatividad del diagrama que aparece en la parte (I) del enunciado del teorema se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama y del hecho de que $\eta_K\times 1$ es supráyectiva:

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_{I}(K,K_i)\right]\times B(K) \arrow[rr, "\eta_K\times 1"] \arrow[dr, "\sigma_K"] \arrow[dd, "\theta_K"'] & & A(K)\times B(K) \arrow[dl, "\gamma_K"'] \arrow[dd, "\psi_K"] \\
& H & \\
\left[\coprod_{I}(-,K_i)\right]\otimes B \arrow[rr, "\eta\otimes B"'] \arrow[ur, "\bar{\sigma}"] & & A\otimes_K B \arrow[ul, "\bar{\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

, y la unicidad de $\bar{\gamma}$ se sigue del hecho de que G genera a $A\otimes_K B$.

Para probar la parte (II) del teorema, tomemos $A, A' : K^{op}\longrightarrow Ab$; $B, B' : K\longrightarrow Ab$ funtores aditivos, y $\mu : A\longrightarrow A'$, $\mu' : B\longrightarrow B'$ transformaciones naturales. Consideremos presentaciones de A y A', y el consiguiente levantamiento de μ:

$$\begin{array}{ccccccc}
\coprod_J(-,\bar{K}_j) & \longrightarrow & \coprod_I(-,K_i) & \xrightarrow{\eta} & A & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \\
\coprod_{J'}(-,\bar{K}'_j) & \longrightarrow & \coprod_{I'}(-,K'_i) & \xrightarrow{\eta'} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}.$$

Obviamente $\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{1} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \mu'} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'} \\ B' & \xleftarrow{1} & B' \end{array}$ tambien conmuta, y

puesto que $-\otimes-$ es funtor,

$$\begin{array}{ccc}
\left[\coprod_I(-,K_i)\right]\otimes B & \xrightarrow{\eta\otimes B} & A\otimes B \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}\otimes\mu'} & & \downarrow{\scriptstyle \mu\otimes\mu'} \\
\left[\coprod_{I'}(-,K'_i)\right]\otimes B' & \xrightarrow{\eta'\otimes B'} & A'\otimes B'
\end{array} \quad \text{conmuta.}$$

Consideremos ahora el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left[\coprod_I(K,K_i)\right]\times B(K) \arrow[rrr, "\theta_K"] \arrow[dr, "\eta_K\times 1"] \arrow[ddd, "\bar{\mu}_K\times\mu'_K"'] & & & \left[\coprod_I(-,K_i)\right]\otimes B \arrow[dl, "\eta\otimes B"'] \arrow[ddd, "\bar{\mu}\otimes\mu'"] \\
& A(K)\times B(K) \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "\mu_K\times\mu'_K"] & A\otimes B \arrow[d, "\mu\otimes\mu'"] & \\
& A'(K)\times B'(K) \arrow[r, "\varphi'_K"] & A'\otimes B' & \\
\left[\coprod_{I'}(K,K'_i)\right]\times B(K) \arrow[rrr, "\theta'_K"] \arrow[ur, "\eta'_K\times 1"] & & & \left[\coprod_{I'}(-,K'_i)\right]\otimes B \arrow[ul, "\eta'\otimes B'"']
\end{tikzcd};$$

el cuadrado central es conmutativo ya que, siendo conmutativo el resto del diagrama, $\eta_K\times 1$

es supreyectiva.

Definamos para cada $K \in |\mathcal{K}|$, $\gamma_K = \varphi'_K \circ (\mu_K \times \mu'_K)$; por un argumento totalmente análogo al de la demostración de la afirmación 6, se tiene que $\gamma : A \times B \longrightarrow A' \otimes_{\mathcal{K}} B'$ es $\mathcal{K}$-balanceada, y por la parte (I) del teorema, se tiene la unicidad de $\mu \otimes \mu'$ en la parte (II). ■

<u>2-4 DEFINICION-PROPOSICION.</u>- Dadas $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}, \mathcal{K}_2$ k-categorías, podemos construir un funtor $_{\mathcal{K}_1}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}} \times {}_{\mathcal{K}}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}_2} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}_1}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}_2}$ aditivo en cada variable, que denotaremos tambien por $- \otimes_{\mathcal{K}} -$ (<u>el producto tensorial de Bimódulos</u>), como sigue: Si $_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, $_{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}_2}$ son Bimódulos, entonces $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}' : \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ queda definido por las fórmulas:

$$(\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}')(K_2, K_1) = \mathcal{C}(-, K_1) \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}'(K_2, -)$$
$$(\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}')(f, g) = \mathcal{C}(-, g) \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}'(f, -)$$

y si tengo morfismos de Bimódulos:

$$_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\eta} {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{D}_{\mathcal{K}} \ , \quad _{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\eta'} {}_{\mathcal{K}}\mathcal{D}'_{\mathcal{K}_2} \ ,$$

para definir $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}' \xrightarrow{\eta \otimes_{\mathcal{K}} \eta'} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{D}'$,

observemos que para cada $(K_2, K_1) \in |\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1|$,

$$\begin{cases} \mathscr{C}(-,K_1) \xrightarrow[\eta_{(-,K_1)}]{} \mathscr{D}(-,K_1) \\ \mathscr{C}'(K_2,-) \xrightarrow[\eta'_{(K_2,-)}]{} \mathscr{D}'(K_2,-) \end{cases}$$ son transformaciones naturales

y entonces podemos tomar:

$$(\eta \otimes_k \eta')(K_2,K_1) = \eta_{(-,K_1)} \otimes_k \eta'_{(K_2,-)}$$

<u>Demostración:</u> Veamos primero que $\mathscr{C}\otimes_k \mathscr{C}'$ es efectivamente un $\mathscr{K}_1$-$\mathscr{K}_2$ Bimódulo.

Como $\mathscr{C}\otimes_k\mathscr{C}'(1,1) = \mathscr{C}(-,1)\otimes_k \mathscr{C}'(1,-) = 1\otimes_k 1 = 1$ y

$\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'[(f,g)\cdot(f',g')] = \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(ff',gg') = \mathscr{C}(-,gg')\otimes\mathscr{C}(ff',-) =$

$= [\mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{C}(f,-)]\circ[\mathscr{C}(-,g')\otimes\mathscr{C}(f',-)] =$

$= \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(f,g)\cdot\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(f',g')$, $\mathscr{C}\otimes_k\mathscr{C}'$ es funtor.

Además,

$\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(f+h,g) = \mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{C}'(f+h,-) = \mathscr{C}(-,g)\otimes[\mathscr{C}'(f,-)+\mathscr{C}'(h,-)] =$

$= \mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{C}'(f,-) + \mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{C}'(h,-) =$

$= \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(f,g) + \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(h,g)$; es decir $\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'$ es aditivo en la primera variable; similarmente, es aditivo en la segunda.

Sean $g: K_1 \longrightarrow \bar{K}_1$ en $\mathscr{K}_1$, $f: K_2 \longrightarrow \bar{K}_2$ en $\mathscr{K}_2^{op}$ y $t\in k$. Veamos que $\mathscr{C}(-,tg)\otimes_k\mathscr{C}'(f,-) = \mathscr{C}(-,g)\otimes_k\mathscr{C}'(tf,-)$.

Sea $x\otimes_k y$ un generador de $\mathscr{C}(-,K_1)\otimes_k\mathscr{C}'(K_2,-)$, entonces, usando el teorema anterior, tenemos:

$[\mathscr{C}(-,tg)\otimes\mathscr{C}'(f,-)](x\otimes_k y) = \mathscr{C}(K,tg)(x)\otimes_k\mathscr{C}'(f,K)(y) =$

$= \mathscr{C}(1,tg)(x)\otimes_k\mathscr{C}'(f,1)(y) = \mathscr{C}(t1,g)(x)\otimes_k\mathscr{C}'(f,1)(y) =$

$$= \mathscr{C}(t1,1)\,\mathscr{C}(1,g)(x) \otimes_K \mathscr{C}'(f,1)(y) =$$
$$= \mathscr{C}(1,g)(x) \otimes_K \mathscr{C}'(1,t1)\,\mathscr{C}'(f,1)(y) =$$
$$= \mathscr{C}(1,g)(x) \otimes_K \mathscr{C}'(f,t1)(y) = \mathscr{C}(1,g)(x) \otimes_K \mathscr{C}'(tf,1)(y) =$$
$$= \mathscr{C}(K,g)(x) \otimes_K \mathscr{C}'(tf,K)(y) = [\mathscr{C}(-,g) \otimes \mathscr{C}'(tf,-)](x \otimes_K y).$$

Hemos probado que $\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(f,tg) = \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'(tf,g)$ y entonces, $\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'$ es un $\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2$ Bimódulo.

Veamos ahora que:

$$(\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}'} Ab) \xrightarrow{\eta\otimes\eta'} (\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\mathscr{D}\otimes\mathscr{D}'} Ab)$$

es transformación natural:

Sea $(f,g) : (K_2, K_1) \longrightarrow (\bar{K}_2, \bar{K}_1)$ en $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1$; puesto que $(\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\mathscr{C}} Ab) \xrightarrow{\eta} (\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\mathscr{D}} Ab)$, $(\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K} \xrightarrow{\mathscr{C}'} Ab) \xrightarrow{\eta'} (\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K} \xrightarrow{\mathscr{D}'} Ab)$ son transformaciones naturales, conmuta en $(\mathcal{K}^{op}, Ab) \times (\mathcal{K}, Ab)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C}(-,K_1), \mathscr{C}'(K_2,-)) \arrow[r, "(\eta_{(-,K_1)}\,,\,\eta'_{(K_2,-)})"] \arrow[d, "(\mathscr{C}(-,g)\,,\,\mathscr{C}'(f,-))"'] & (\mathscr{D}(-,K_1), \mathscr{D}'(K_2,-)) \arrow[d, "(\mathscr{D}(-,g)\,,\,\mathscr{D}'(f,-))"] \\
(\mathscr{C}(-,\bar{K}_1), \mathscr{C}'(\bar{K}_2,-)) \arrow[r, "(\eta_{(-,\bar{K}_1)}\,,\,\eta'_{(\bar{K}_2,-)})"] & (\mathscr{D}(-,\bar{K}_1), \mathscr{D}'(\bar{K}_2,-))
\end{tikzcd}$$

ya que lo hace en cada variable. Aplicando, ahora, el funtor $-\otimes_{\mathcal{K}}-$, se obtiene el cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(-,K_1) \otimes_{\mathcal{K}} \mathscr{C}'(K_2,-) \arrow[r, "\eta_{(-,K_1)} \otimes \eta'_{(K_2,-)}"] \arrow[d, "\mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{C}'(f,-)"'] & \mathscr{D}(-,K_1) \otimes_{\mathcal{K}} \mathscr{D}'(K_2,-) \arrow[d, "\mathscr{D}(-,g)\otimes\mathscr{D}'(f,-)"] \\
\mathscr{C}(-,\bar{K}_1) \otimes_{\mathcal{K}} \mathscr{C}'(\bar{K}_2,-) \arrow[r, "\eta_{(-,\bar{K}_1)} \otimes \eta'_{(\bar{K}_2,-)}"] & \mathscr{D}(-,\bar{K}_1) \otimes_{\mathcal{K}} \mathscr{D}'(\bar{K}_2,-)
\end{tikzcd}$$

de donde, $\eta \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta'$ es natural.

La propiedad de $\otimes_{\mathcal{K}} : {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}} \times {}_{\mathcal{K}}Bim_{\mathcal{K}_2} \to {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$ de ser funtor aditivo en cada variable, la hereda trivialmente de la misma propiedad para $\otimes_{\mathcal{K}} : (\mathcal{K}^{op}, Ab) \times (\mathcal{K}, Ab) \longrightarrow Ab$ ■

<u>2-5 LEMA.</u>- Dado un Bimódulo ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2}$, hay isomorfismos naturales de Bimódulos:

$$ {}_{\mathcal{K}_1}(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}_2}{\otimes} \mathcal{K}_2)_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\ \sigma\ } {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2} $$

y

$$ {}_{\mathcal{K}_1}(\mathcal{K}_1 \underset{\mathcal{K}_1}{\otimes} \mathcal{C})_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\ \overline{\sigma}\ } {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2} $$, es decir

tales que si $\mathcal{C} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}'$ es un morfismo de Bimódulos, entonces conmutan:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{C} \arrow[r, "\overline{\sigma}"] \arrow[d, "1\otimes\eta"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\eta"] & \mathcal{C}\otimes\mathcal{K}_2 \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\eta\otimes 1"] \\ \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{C}' \arrow[r, "\overline{\sigma}"] & \mathcal{C}' & \mathcal{C}'\otimes\mathcal{K}_2 \arrow[l, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Además, en generadores se calculan mediante las fórmulas: (suponiendo que $c \in \mathcal{C}(K_2, K_1)$).

$$\begin{cases} \sigma(c \otimes_{K_2} h) = \mathcal{C}(h, K_1)(c) \ , & \sigma^{-1}(c) = c \otimes_{K_2} 1 \\ \overline{\sigma}(g \otimes_{K_1} c) = \mathcal{C}(K_2, g)(c) \ , & \overline{\sigma}^{-1}(c) = 1 \otimes_{K_1} c \end{cases}$$

<u>Demostración:</u> Sea $(K_2, K_1) \in |\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1|$, Considero $\sigma_{(K_2,K_1)} : \mathcal{C}(-, K_1) \otimes \mathcal{K}_2(K_2, -) \longrightarrow \mathcal{C}(K_2, K_1)$ el morfismo de grupos definido por la transfor-

mación $\mathcal{K}_2$-balanceada:

$$\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)} : \mathcal{C}(-,K_1)\times \mathcal{K}_2(K_2,-) \longrightarrow \mathcal{C}(K_2,K_1)$$

donde si $\overline{K}_2 \in |\mathcal{K}_2|$,

$$\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{K}_2}} : \mathcal{C}(\overline{K}_2,K_1)\times \mathcal{K}_2(K_2,\overline{K}_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_2,K_1)$$
$$(c\,,\,h) \longmapsto \mathcal{C}(h,K_1)(c).$$

Veamos primero que $\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)}$ es efectivamente una transformación $\mathcal{K}_2$-balanceada:
claramente, $\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{K}_2}}$ es aditivo en cada variable, y si $f: \overline{K}_2 \longrightarrow \overline{\overline{K}}_2$ en $\mathcal{K}_2$, entonces conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\overline{\overline{K}}_2,K_1)\times \mathcal{K}_2(K_2,\overline{K}_2) \arrow[r, "\mathcal{C}(f,K_1)\times 1"] \arrow[d, "1\times\mathcal{K}_2(K_2,f)"'] & \mathcal{C}(\overline{K}_2,K_1)\times \mathcal{K}_2(K_2,\overline{K}_2) \arrow[d, "\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{K}_2}}"] \\
\mathcal{C}(\overline{\overline{K}}_2,K_1)\times \mathcal{K}_2(K_2,\overline{\overline{K}}_2) \arrow[r, "\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{\overline{K}}_2}}"'] & \mathcal{C}(K_2,K_1)
\end{tikzcd}$$

ya que:

$$\mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{K}_2}}(\mathcal{C}(f,K_1)\times 1)(c,h) = \mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{K}_2}}(\mathcal{C}(f,K_1)(c),h) =$$
$$= \mathcal{C}(h,K_1)\,\mathcal{C}(f,K_1)(c) = \mathcal{C}(f\circ h,K_1)(c) = \mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{\overline{K}}_2}}(c,f\circ h) =$$
$$= \mathcal{Y}'_{(K_2,K_1)_{\overline{\overline{K}}_2}}(1\times \mathcal{K}_2(K_2,f))(c,h).$$

Verifiquemos ahora que $\sigma: \mathcal{C}\otimes\mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{C}$ es morfismo de Bimódulos:

Sea $(f,g): (K_2,K_1) \longrightarrow (K_2',K_1')$ en $\mathcal{K}_2^{op}\times\mathcal{K}_1$.

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(-,K_1)\otimes \mathscr{K}_2(K_2,-) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{K}_2(f,-)"'] & \mathscr{C}(K_2,K_1) \arrow[d, "\mathscr{C}(f,g)"] \\
\mathscr{C}(-,K_1')\otimes \mathscr{K}_2(K_2',-) \arrow[r, "\sigma"] & \mathscr{C}(K_2',K_1')
\end{tikzcd}$$

puesto que si $c\otimes_{\bar{K}_2} h$ es un generador de $\mathscr{C}(-,K_1)\otimes\mathscr{K}_2(K_2,-)$, entonces:

$$\sigma\cdot(\mathscr{C}(-,g)\otimes\mathscr{K}_2(f,-))(c\otimes_{\bar{K}_2}h)=\sigma(\mathscr{C}(\bar{K}_1,g)(c)\otimes_{\bar{K}_2}\mathscr{K}_2(f,\bar{K}_2)(h))=$$
$$=\sigma(\mathscr{C}(\bar{K}_2,g)(c)\otimes_{\bar{K}_2} h\cdot f)=\mathscr{C}(h\cdot f,K_1')\,\mathscr{C}(\bar{K}_2,g)(c)=$$
$$=\mathscr{C}(f,g)\,\mathscr{C}(h,K_1)(c)=\mathscr{C}(f,g)\,\sigma(c\otimes_{\bar{K}_2}h).$$

Comprobemos ahora que cada $\sigma_{(K_2,K_1)}$ es isomorfismo: Sea $\tau:\mathscr{C}(K_2,K_1)\longrightarrow \mathscr{C}(-,K_1)\otimes\mathscr{K}_2(K_2,-)$

$$c \longmapsto c\otimes_{K_2}1 \quad .$$

Como $\sigma\tau(c)=\sigma(c\otimes_{K_2}1)=\mathscr{C}(1,K_1)(c)=1(c)=c$, entonces $\sigma\tau=1$. Por otro lado, si $c\otimes_{\bar{K}_2}h$ es un generador de $\mathscr{C}(-,K_1)\otimes\mathscr{K}_2(K_2,-)$, entonces

$$\tau\sigma(c\otimes_{\bar{K}_2}h)=\tau(\mathscr{C}(h,K_1)(c))=\mathscr{C}(h,K_1)(c)\otimes_{K_2}1=$$
$$=c\otimes_{\bar{K}_2}\mathscr{K}_2(K_2,h)(1)=c\otimes_{\bar{K}_2}h$$ y por lo tanto, $\tau\sigma=1$. Hemos probado que $\tau=\sigma^{-1}$!

La verificación de que σ es natural es inmediata, y la construcción de $\bar{\sigma}$ es totalmente análoga. ■

<u>2-6 LEMA.</u>- Si ${}_{\mathscr{K}}\mathscr{C}_{\mathscr{K}_1}$, ${}_{\mathscr{K}_1}\mathscr{C}'_{\mathscr{K}_2}$, ${}_{\mathscr{K}_2}\mathscr{C}''_{\mathscr{H}}$ son Bimódulos, entonces hay un isomorfismo natural

de Bimódulos:

$$\delta : (\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}_1} \mathcal{C}') \otimes_{\mathcal{K}_2} \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}_1} (\mathcal{C}' \otimes_{\mathcal{K}_2} \mathcal{C}'')$$, es

decir tal que si

$$_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_1} \xrightarrow{\eta} {}_{\mathcal{K}}\mathcal{V}_{\mathcal{K}_1}, \ {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\eta'} {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{V}'_{\mathcal{K}_2}, \ {}_{\mathcal{K}_2}\mathcal{C}''_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\eta''} {}_{\mathcal{K}_2}\mathcal{V}''_{\mathcal{H}}$$

son morfismos de Bimódulos, entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\otimes(\mathcal{C}'\otimes\mathcal{C}'') & \xrightarrow{\eta\otimes(\eta'\otimes\eta'')} & \mathcal{V}\otimes(\mathcal{V}'\otimes\mathcal{V}'') \\ \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\ (\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')\otimes\mathcal{C}'' & \xrightarrow{(\eta\otimes\eta')\otimes\eta''} & (\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}')\otimes\mathcal{V}'' \end{array}$$

<u>Demostración</u>: Sean $(H,K) \in |\mathcal{H}^{op} \times \mathcal{K}|$, $K_1 \in |\mathcal{K}_1|$, $K_2 \in |\mathcal{K}_2|$.

Tenemos:

$G' = (\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')\otimes\mathcal{C}''(H,K)$	$G = \mathcal{C}\otimes(\mathcal{C}'\otimes\mathcal{C}'')(H,K)$
$\Vert$	$\Vert$
$[\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'(?,K)]\otimes\mathcal{C}''(H,?)$	$\mathcal{C}(?,K)\otimes[\mathcal{C}'\otimes\mathcal{C}''(H,?)]$
$\Vert$	$\Vert$
$[\mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(?,-)]\otimes\mathcal{C}''(H,?)$	$\mathcal{C}(?,K)\otimes[\mathcal{C}'(-,?)\otimes\mathcal{C}''(H,-)]$
$\uparrow \varphi_{K_2}$	$\uparrow \varphi_{K_1}$
$[\mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(K_2,-)]\times\mathcal{C}''(H,K_2)$	$\mathcal{C}(K_1,K)\times[\mathcal{C}'(-,K_1)\otimes\mathcal{C}''(H,-)]$
$\uparrow \varphi_{K_1}\times 1$	$\uparrow 1\times\varphi_{K_2}$
$[\mathcal{C}(K_1,K)\times\mathcal{C}'(K_2,K_1)]\times\mathcal{C}''(H,K_2)$	$\mathcal{C}(K_1,K)\times[\mathcal{C}'(K_2,K_1)\times\mathcal{C}''(H,K_2)]$

Sea para cada $c \in \mathcal{C}''(H,K_2)$, $K_1 \in |\mathcal{K}_1|$

$$(\phi_c)_{K_1} : \mathcal{C}(K_1,K)\times\mathcal{C}'(K_2,K_1) \longrightarrow G$$
$$(a,b) \longmapsto a\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2} c)$$

<u>Afirmación 1.-</u> $\beta_c : \mathcal{C}(-,K)\times\mathcal{C}'(K_2,-)\longrightarrow G$ es transformación $\mathcal{K}_1$-balanceada.

<u>demostración:</u> $(\beta_c)_{K_1}$ es claramente aditiva en cada variable. Sea $f: K_1 \longrightarrow K_1'$ en $\mathcal{K}_1$, veamos que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(K_1',K)\times\mathcal{C}'(K_2,K_1) \arrow[r, "\mathcal{C}(f,K)\times 1"] \arrow[d, "1\times\mathcal{C}'(K_2,f)"] & \mathcal{C}(K_1,K)\times\mathcal{C}'(K_2,K_1) \arrow[d, "(\beta_c)_{K_1}"] \\
\mathcal{C}(K_1',K)\times\mathcal{C}'(K_2,K_1') \arrow[r, "(\beta_c)_{K_1'}"] & G
\end{tikzcd}$$

Recordemos que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(K_1',K)\times[\mathcal{C}'(-,K_1)\otimes\mathcal{C}''(H,-)] \arrow[r, "\mathcal{C}(f,K)\times 1"'] \arrow[d, "1\times[\mathcal{C}'(-,f)\otimes\mathcal{C}''(H,-)]"] & \mathcal{C}(K_1,K)\times[\mathcal{C}'(-,K_1)\otimes\mathcal{C}''(H,-)] \arrow[d, "\varphi_{K_1}"] \\
\mathcal{C}(K_1',K)\times[\mathcal{C}'(-,K_1')\otimes\mathcal{C}''(H,-)] \arrow[r, "\varphi_{K_1'}"] & G
\end{tikzcd}$$

y entonces, si $(a,b)\in\mathcal{C}(K_1',K)\times\mathcal{C}'(K_2,K_1)$,

$$\begin{aligned}
(\beta_c)_{K_1}\circ(\mathcal{C}(f,K)\times 1)(a,b) &= (\beta_c)_{K_1}(\mathcal{C}(f,K)(a),b) = \\
&= \mathcal{C}(f,K)(a)\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2}c) = \varphi_{K_1}(\mathcal{C}(f,K)(a),\, b\otimes_{K_2}c) = \\
&= \varphi_{K_1}\circ(\mathcal{C}(f,K)\times 1)(a,\, b\otimes_{K_2}c) = \\
&= \varphi_{K_1'}\circ(1\times[\mathcal{C}'(-,f)\otimes\mathcal{C}''(H,-)])(a,\, b\otimes_{K_2}c) = \\
&= \varphi_{K_1'}(a,\, \mathcal{C}'(K_2,f)(b)\otimes_{K_2}c) = a\otimes_{K_1'}(\mathcal{C}'(K_2,f)(b)\otimes_{K_2}c) = \\
&= (\beta_c)_{K_1'}(a,\mathcal{C}'(K_2,f)(b)) = (\beta_c)_{K_1'}(1\times\mathcal{C}'(K_2,f))(a,b) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Existe $\bar{\beta}_c : \mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(K_2,-)\longrightarrow G$ morfismo de grupos único tal que $\beta_c(a,b) = \bar{\beta}_c(a\otimes_{K_1} b)$

para cada $K_1 \in |\mathcal{K}_1|$, $(a,b) \in \mathcal{C}(K_1,K) \times \mathcal{C}'(K_2,K_1)$.

Sea $\omega : [\mathcal{C}(-,K) \otimes \mathcal{C}'(?,-)] \times \mathcal{C}''(H,?) \longrightarrow G$

tal que si $K_2 \in |\mathcal{K}_2|$,

$$\begin{aligned} \omega_{K_2} : [\mathcal{C}(-,K)\otimes \mathcal{C}'(K_2,-)] \times \mathcal{C}''(H,K_2) &\longrightarrow G \\ (t,\ c) &\longmapsto \bar{\beta}_c(t) \end{aligned}$$

<u>Afirmacion 2º</u> ω es $\mathcal{K}_2$-balanceada

<u>demostración:</u> ω_{K_2} es obviamente aditiva en la primera variable, veamos que tambien es aditiva en la segunda:

Sean $c, c' \in \mathcal{C}''(H,K_2)$, $(a,b) \in \mathcal{C}(K_1,K) \times \mathcal{C}'(K_2,K_1)$

entonces $\beta_c + \beta_{c'}(a \otimes_{K_1} b) = \beta_c(a\otimes_{K_1} b) + \beta_{c'}(a \otimes_{K_1} b) =$

$= a \otimes_{K_1} (b \otimes_{K_2} c) + a \otimes_{K_1} (b \otimes_{K_2} c') = a \otimes_{K_1} (b \otimes_{K_2} (c+c')) =$

$= \beta_{c+c'}(a \otimes_{K_1} b)$ y por tanto, $\bar{\beta}_{c+c'} = \bar{\beta}_c + \bar{\beta}_{c'}$.

Sea $f : K_2 \longrightarrow K_2'$ en $\mathcal{K}_2$, veamos que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(K_2',-)] \times \mathcal{C}''(H,K_2)} \arrow[r, "{[\mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(f,-)]\times 1}"] \arrow[d, "{1\times\mathcal{C}''(H,f)}"'] & {[\mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(K_2,-)]\times\mathcal{C}''(H,K_2)} \arrow[d, "\omega_{K_2}"] \\
{[\mathcal{C}(-,K)\otimes\mathcal{C}'(K_2',-)]\times\mathcal{C}''(H,K_2')} \arrow[r, "\omega_{K_2'}"] & G
\end{tikzcd} ;$$

recordemos que si $K_1 \in |\mathcal{K}_1|$, entonces conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}'(K_2',K_1)\times\mathcal{C}''(H,K_2) \arrow[r, "{\mathcal{C}'(f,K_1)\times 1}"'] \arrow[d, "{1\times\mathcal{C}''(H,f)}"] & \mathcal{C}'(K_2,K_1)\times\mathcal{C}''(H,K_2) \arrow[d, "\varphi_{K_2}"] \\
\mathcal{C}'(K_2',K_1)\times\mathcal{C}''(H,K_2') \arrow[r, "\varphi_{K_2'}"] & \mathcal{C}'(-,K_1)\otimes\mathcal{C}''(H,-)
\end{tikzcd}$$

Sean $(a,b)\in \mathscr{C}(K_1,K)\times\mathscr{C}'(K_2',K_1)$ y $c\in\mathscr{C}''(H,K_2)$, entonces:

$$\begin{aligned}
&w_{K_2}\circ([\mathscr{C}(-,K)\otimes\mathscr{C}'(f,-)]\times 1)(a\otimes_{K_1} b,c)= w_{K_2}(a\otimes_{K_1}\mathscr{C}'(f,K_1)(b),c)=\\
&=\bar{\beta}_c(a\otimes_{K_1}\mathscr{C}'(f,K_1)(b))= a\otimes_{K_1}(\mathscr{C}'(f,K_1)(b)\otimes_{K_2} c)=\\
&= a\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2'}\mathscr{C}''(H,f)(c))=\bar{\beta}_{\mathscr{C}''(H,f)(c)}(a\otimes_{K_1} b)=\\
&= w_{K_2'}(a\otimes_{K_1} b,\mathscr{C}''(H,f)(c))= w_{K_2'}\circ(1\times\mathscr{C}''(H,f))(a\otimes_{K_1} b,c) \blacksquare
\end{aligned}$$

Por lo anterior, existe un único morfismo de grupos $\delta_{(H,K)}: G'\longrightarrow G$ tal que:

$$\delta_{(H,K)}((a\otimes_{K_1} b)\otimes_{K_2} c)= w_{K_2}(a\otimes_{K_1} b,c)=\bar{\beta}_c(a\otimes_{K_1} b)= a\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2} c).$$

Similarmente, para cada $(H,K)\in|\mathscr{H}^{op}\times\mathscr{K}|$, existen morfismos de grupos $\delta'_{(H,K)}: G\longrightarrow G'$ tales que $\delta'_{(H,K)}(a\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2} c))=(a\otimes_{K_1} b)\otimes_{K_2} c$ y en consecuencia, cada $\delta_{(H,K)}$ es isomorfismo de grupos.

<u>Afirmación 3</u>.- $(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}')\otimes\mathscr{C}''\xrightarrow{\ \delta\ }\mathscr{C}\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')$ es morfismo de $\mathscr{K}$-$\mathscr{H}$ Bimódulos.

<u>demostración:</u> Sea $(h,g):(H,K)\longrightarrow(H',K')$ en $\mathscr{H}^{op}\times\mathscr{K}$, queremos ver que conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}')\otimes\mathscr{C}''(H,K) & \xrightarrow{\quad\delta\quad} & \mathscr{C}\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(H,K)\\
\downarrow{\scriptstyle(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}')\otimes\mathscr{C}''(h,g)} & & \downarrow{\scriptstyle\mathscr{C}\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(h,g)}\\
(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}')\otimes\mathscr{C}''(H',K') & \xrightarrow{\quad\delta\quad} & \mathscr{C}\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(H',K')
\end{array}$$

y basta verificarlo en los generadores $(a\otimes_{K_1} b)\otimes_{K_2} c$:

$$\mathscr{C}\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(h,g)\delta((a\otimes_{K_1} b)\otimes_{K_2} c)=\mathscr{C}\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(h,g)(a\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2} c))=$$

$$= \mathscr{C}(-,g)\otimes(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(h,-)(a\otimes_{K_1}(b\otimes_{K_2}c)) =$$
$$= \mathscr{C}(K_1,g)(a)\otimes_{K_1}[(\mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}'')(h,K_1)(b\otimes_{K_2}c)] =$$
$$= \mathscr{C}(K_1,g)(a)\otimes_{K_1}[\mathscr{C}'(-,K_1)\otimes\mathscr{C}''(h,-)(b\otimes_{K_2}c)] =$$
$$= \mathscr{C}(K_1,g)(a)\otimes_{K_1}[\mathscr{C}'(K_2,K_1)(b)\otimes_{K_2}\mathscr{C}''(h,K_2)(c)] =$$
$$= \delta[\mathscr{C}(K_1,g)(a)\otimes_{K_1}\mathscr{C}'(K_2,K_1)(b)]\otimes_{K_2}\mathscr{C}''(h,K_2)(c) =$$
$$= \delta[(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}')\otimes\mathscr{C}''(h,g)]((a\otimes_{K_1}b)\otimes_{K_2}c). \blacksquare$$

Por último, faltaría verificar que el cuadro que aparece en el enunciado del Lema es conmutativo, pero, como antes, basta hacerlo para los generadores, donde la comprobación es inmediata. $\blacksquare$

<u>2-7 DEFINICION-PROPOSICION.</u>- Si $A:\mathscr{K}_1\longrightarrow\mathscr{V}$, $B:\mathscr{K}\longrightarrow\mathscr{V}$, $C:\mathscr{K}_2\longrightarrow\mathscr{V}$ son k-funtores, entonces podemos definir un morfismo de Bimódulos

$$ {}_{K_1}^{A}\mathscr{V}_{K}^{B}\otimes_{K}{}_{K}^{B}\mathscr{V}_{K_2}^{C}\xrightarrow{\ \Pi\ }{}_{K_1}^{A}\mathscr{V}_{K_2}^{C}$$

que llamaremos <u>morfismo composición</u> puesto que en generadores se calcula mediante la fórmula:

$$\Pi(h\otimes_K t)=h\cdot t$$

y que tiene la propiedad de que si $D:\mathscr{K}_3\longrightarrow\mathscr{V}$ es otro k-funtor, entonces resulta conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\overset{A\ B}{\vartheta} \otimes \left(\overset{B\ C}{\vartheta} \otimes \overset{C\ D}{\vartheta} \right) \arrow[r, "1\otimes\pi"] & \overset{A\ B}{\vartheta} \otimes \overset{B\ D}{\vartheta} \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & \overset{A\ D}{\vartheta} \\
\left(\overset{A\ B}{\vartheta} \otimes \overset{B\ C}{\vartheta} \right) \otimes \overset{C\ D}{\vartheta} \arrow[uu, "\delta"', "\cong"] \arrow[r, "\pi\otimes 1"] & \overset{A\ C}{\vartheta} \otimes \overset{C\ D}{\vartheta} \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

en vista de lo cual, denotaremos también por π a la composición: $\overset{A\ B}{\vartheta} \otimes \overset{B\ C}{\vartheta} \otimes \overset{C\ D}{\vartheta} \xrightarrow{\pi} \overset{A\ D}{\vartheta}$.

<u>Demostración:</u> Sea $(K_2, K_1) \in |\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1|$; considero:

$\pi_{(K_2,K_1)} : \vartheta(B(-), A(K_1)) \otimes_{\mathcal{K}} \vartheta(C(K_2), B(-)) \longrightarrow \vartheta(C(K_2), A(K_1))$

el morfismo de grupos definido por la transformación $\mathcal{K}$-balanceada.

$\gamma_{(K_2,K_1)} : \vartheta(B(-), A(K_1)) \times \vartheta(C(K_2), B(-)) \longrightarrow \vartheta(C(K_2), A(K_1))$

donde si $K \in |\mathcal{K}|$,

$$\gamma_{(K_2,K_1)_K} : \vartheta(B(K), A(K_1)) \times \vartheta(C(K_2), B(K)) \longrightarrow \vartheta(C(K_2), A(K_1))$$
$$(h, t) \longmapsto h \cdot t .$$

Para ver que $\gamma_{(K_2,K_1)}$ es efectivamente una transformación $\mathcal{K}$-balanceada, tomemos $K \xrightarrow{f} K'$ en $\mathcal{K}$. Entonces conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\vartheta(B(K'), A(K_1)) \times \vartheta(C(K_2), B(K)) \arrow[d, "1\times\vartheta(C(K_2), B(f))"'] \arrow[r, "\vartheta(B(f), A(K_1))\times 1"] & \vartheta(B(K), A(K_1)) \times \vartheta(C(K_2), B(K)) \arrow[d, "\gamma_{(K_2,K_1)_K}"] \\
\vartheta(B(K'), A(K_1)) \times \vartheta(C(K_2), B(K')) \arrow[r, "\gamma_{(K_2,K_1)_{K'}}"'] & \vartheta(C(K_2), A(K_1))
\end{tikzcd}$$

ya que si $(h,t) \in \vartheta(B(K'), A(K_1)) \times \vartheta(C(K_2), B(K))$, entonces:

$$\gamma_{(K_2,K_1)_{K'}}\cdot(1\times\mathcal{V}(C(K_2),B(f)))(h,t)=\gamma_{(K_2,K_1)_{K'}}(h,B(f)t)=$$
$$=hB(f)t=\gamma_{(K_2,K_1)_K}(hB(f),t)=$$
$$=\gamma_{(K_2,K_1)_K}\cdot(\mathcal{V}(B(f),A(K_1))\times 1)(h,t).$$

Verifiquemos, ahora, que π es morfismo de Bimódulos; sea $(f,g):(K_2,K_1)\longrightarrow(K_2',K_1')$ en $\mathcal{K}_2^{op}\times\mathcal{K}_1$, es fácil ver que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}(B(-),A(K_1))\otimes\mathcal{V}(C(K_2),B(-)) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathcal{V}(B(-),A(g))\otimes\mathcal{V}(C(f),B(-))"'] & \mathcal{V}(C(K_2),A(K_1)) \arrow[d, "\mathcal{V}(C(f),A(g))"] \\
\mathcal{V}(B(-),A(K_1'))\otimes\mathcal{V}(C(K_2'),B(-)) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{V}(C(K_2'),A(K_2'))
\end{tikzcd}$$

pues la verificación para los generadores es inmediata. Con esta misma técnica, es muy fácil ver que el diagrama del enunciado conmuta. ■

§ 3.- Bimódulos, sobre categorías, con estructura de Coálgebra (BOCS).

3-1 DEFINICION.- Dada una k-categoría $\mathcal{K}$, un Bimódulo ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ es un BOCS si existen morfismos de Bimódulos:

$$\begin{cases} \mathcal{C} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} & \text{(comultiplicación)} \\ \mathcal{C} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathcal{K} & \text{(counidad)} \end{cases}$$

tales que conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
\mathcal{K} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[r, "\cong", "\sigma"'] & \mathcal{C} & \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K} \arrow[l, "\cong"', "\sigma"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} & \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[l, "1\otimes\psi"'] \\
\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[u, "\psi\otimes 1"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}.$$

Un morfismo de BOCS $\beta : ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \psi, \varepsilon) \to ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}}, \psi', \varepsilon')$ es un morfismo de Bimódulos $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[d, "\beta\otimes\beta"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{K} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}' \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C}' & \mathcal{C}' \arrow[l, "\psi'"'] \arrow[r, "\varepsilon'"] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

3-2 DEFINICION.- Si $\mathcal{V}$ es una k-categoría, La categoría de $\mathcal{V}$-Representaciones del BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, que denotaremos por $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$, tiene por objetos k-funtores $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$; si A, B son k-funtores, los morfismos de A en B estan dados por:

$$\mathcal{R}(A,B) = \left\{ \eta \,/\, {}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\ \eta\ } {}^{B}_{\mathcal{K}}\mathcal{V}^{A}_{\mathcal{K}} \text{ es morfismo de Bimódulos.} \right\},$$

y la composición: $\mathcal{R}(B,C) \times \mathcal{R}(A,B) \longrightarrow \mathcal{R}(A,C)$

$$(\eta', \eta) \longmapsto \eta' \circ \eta$$

queda definida por la composición de morfismos de Bimódulos siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C} \arrow[r, "\eta' \otimes \eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{B} \otimes_{\mathcal{K}} {}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\eta' \circ \eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{A}
\end{tikzcd}$$

3-3 PROPOSICION.-

$\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ es k-categoría.

Demostración: Sea $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ un objeto de $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$, es decir un k-funtor. Sea E la siguiente composición:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\ E\ } \mathcal{K} \xrightarrow{\ \hat{A}\ } {}^{A}\mathcal{V}^{A}$$

Es claro que $E \in \mathcal{R}(A,A)$. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{\ \eta\ } {}^{A}\mathcal{V}^{C}$ un elemento de $\mathcal{R}(C,A)$; en el siguiente diagrama, la conmutatividad de ⊛ se sigue de la conmutatividad del resto del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[rrr, "E\otimes\eta"] \arrow[dr, "E\otimes 1"] & & & {}^{A}\mathcal{V}^{A}\otimes{}^{A}\mathcal{V}^{C} \\
& \mathcal{K}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "1\otimes\eta"] \arrow[d, "\nabla"] & \mathcal{K}\otimes{}^{A}\mathcal{V}^{C} \arrow[ur, "\hat{A}\otimes 1"] \arrow[d, "\nabla"'] & \\
& \mathcal{C} \arrow[uul, "\psi"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "E\circ\eta"'] & {}^{A}\mathcal{V}^{C} \arrow[d, equal] & \\
& & {}^{A}\mathcal{V}^{C} \arrow[uuur, "\pi"'] \arrow[ul, phantom, "\otimes"] &
\end{tikzcd}$$

Hemos visto que $E\circ\eta=\eta$; similarmente se prueba que si $\eta'\in\mathcal{R}(A,B)$, entonces $\eta'\circ E=\eta'$ y entonces, $E=1_A$.

Para verificar que $\circ$ es asociativa en $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}},\mathcal{V})$, tomamos $A,B,C,D:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{V}$ k-funtores y morfismos $A\xrightarrow{\eta''}B\xrightarrow{\eta'}C\xrightarrow{\eta}D$, y observamos que, en el siguiente diagrama, la conmutatividad de la parte exterior se sigue de la misma propiedad para el resto del diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "1\otimes\psi"] & \mathcal{C}\otimes(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}) \arrow[r, "\eta\otimes(\eta'\otimes\eta'')"] & {}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes({}^{B}\mathcal{V}^{C}\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D}) \arrow[r, "1\otimes\pi"] & {}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{D} \arrow[dr, "\pi"] & \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[rrrrr, bend left=60, "\eta\circ(\eta'\circ\eta'')"] \arrow[rrrrr, bend right=60, "(\eta\circ\eta')\circ\eta''"'] & & & & & {}^{A}\mathcal{V}^{D} \\
& \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "\psi\otimes 1"] & (\mathcal{C}\otimes\mathcal{C})\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "(\eta\otimes\eta')\otimes\eta''"] \arrow[uu, "\delta", "\cong"'] & ({}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{C})\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D} \arrow[r, "\pi\otimes 1"] \arrow[uu, "\delta", "\cong"'] & {}^{A}\mathcal{V}^{C}\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D} \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior, sabemos que $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ es una categoría. Es claro que:
$\mathcal{R}(A,B) = \text{transf. nat.}[(\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K} \xrightarrow{\mathcal{C}} Ab), (\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K} \xrightarrow{{}^{B}\mathcal{V}^{A}} Ab)]$
es un k-módulo. Para ver que la composición es k-lineal en cada variable, tomemos $\eta', \eta'' \in \mathcal{R}(A,B)$ y $\eta \in \mathcal{R}(B,C)$, $t \in k$, entonces:

$$\eta\circ(t\eta'+\eta'') = \pi\circ\eta\otimes(t\eta'+\eta'')\circ\psi = \pi\circ[t(\eta\otimes\eta')+(\eta\otimes\eta'')]\circ\psi =$$
$$= t(\pi\circ\eta\otimes\eta'\circ\psi) + \pi\circ\eta\otimes\eta''\circ\psi = t\,\eta\circ\eta' + \eta\circ\eta'',$$

y análogamente es k-lineal en la otra variable. ■

3-4 PROPOSICION.-

(I) Dada una k-categoría $\mathcal{V}$, cada morfismo de BOCS $\beta: ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \psi, \varepsilon) \longrightarrow ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}}, \psi', \varepsilon')$ induce un k-funtor $\beta^*: \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$.

(II) Dado un BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, cada k-funtor $F: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ induce otro k-funtor:

$$F_*: \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{W}).$$

Demostración:

Sea $\beta^*: \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ tal que si $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un k-funtor, entonces $\beta^*(A) = A$; y si $\mathcal{C}' \xrightarrow{\eta} {}^{B}\mathcal{V}^{A} \in \mathcal{R}'(A,B)$, tomamos
$\beta^*(\eta) := [\mathcal{C} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}' \xrightarrow{\eta} {}^{B}\mathcal{V}^{A}] \in \mathcal{R}(A,B)$.

Sea $A \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{\eta'} C$ en $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}'_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$, puesto que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \arrow[drr, "\beta^*(\eta')\otimes\beta^*(\eta)"] \arrow[dr, "\beta\otimes\beta"'] & & \\
& \mathscr{C}'\otimes\mathscr{C}' \arrow[r, "\eta'\otimes\eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathscr{C}' \arrow[u, "\psi'"] \arrow[r, "\eta'\circ\eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{A} \\
\mathscr{C} \arrow[uuu, "\psi"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[urr, "\beta^*(\eta'\circ\eta)"'] & &
\end{tikzcd}$$

se tiene que β^* preserva composición; y tambien preserva identidades, pues para cada k-funtor $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}^{c}$, conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "\hat{A}"] \\
\mathscr{C}' \arrow[ur, "\varepsilon'"] \arrow[r, "1_A"] & {}^{A}\mathcal{V}^{A}.
\end{tikzcd}$$

Tambien vale: $\beta^*(t\eta) = (t\eta)\beta = t(\eta\beta) = t\beta^*(\eta)$ para $t \in k$ y en consecuencia, β^* es k-funtor.

Para verificar la parte (II), tomemos:
$F_* : \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathscr{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathscr{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{W})$ tal que si $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un k-funtor, $F_*(A) = FA$; y si $\eta : \mathscr{C} \longrightarrow {}^{B}\mathcal{V}^{A} \in \mathcal{R}(A,B)$, definimos

$$F_*(\eta) = [\, \mathscr{C} \xrightarrow{\eta} {}^{B}\mathcal{V}^{A} \xrightarrow{F} {}^{FB}\mathcal{W}^{FA} \,] \in \mathcal{R}(FA, FB).$$

Sea $A \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{\eta'} C$ en $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathscr{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$; puesto que el siguiente diagrama conmuta, se tiene que F_* preserva composición:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "\eta'\otimes\eta"] \arrow[rr, bend left, "F_*(\eta')\otimes F_*(\eta)"] & {}^{C}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[r, "F\otimes F"] \arrow[d, "\pi"] & {}^{FC}\mathcal{W}^{FB}\otimes{}^{FB}\mathcal{W}^{FA} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\eta'\cdot\eta"] \arrow[rr, bend right, "F_*(\eta'\cdot\eta)"'] & {}^{C}\mathcal{V}^{A} \arrow[r, "F"] & {}^{FC}\mathcal{W}^{FA}
\end{tikzcd}$$
;

pero tambien preserva identidades ya que es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathcal{K} \arrow[r, "\hat{A}"'] \arrow[dr, "\widehat{FA}"'] & {}^{A}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "F"] \\
& & {}^{FA}\mathcal{W}^{FA}
\end{tikzcd}$$
.

Tambien vale $F_*(t\eta) = Ft\eta = tF\eta = tF_*(\eta)$ para $t \in k$ y en consecuencia, F_* es k-funtor. ■

<u>3-5 OBSERVACION.</u>- Toda k-categoría $\mathcal{K}$ es de manera natural un BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}$ cuya comultiplicación es $\sigma^{-1}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{K}$, y cuya counidad es $1_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Ademas, dado cualquier BOCS $({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \psi, \varepsilon)$, la counidad ε resulta un morfismo de BOCS

$$({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \psi, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon} ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}, \sigma^{-1}, 1_{\mathcal{K}})$$

<u>Demostración:</u> en vista de que conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}\otimes\mathcal{K} \arrow[rr, "1\otimes\sigma^{-1}"] & & \mathcal{K}\otimes(\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}) \\
\mathcal{K} \arrow[u, "\sigma^{-1}"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"'] & & \\
\mathcal{K}\otimes\mathcal{K} \arrow[rr, "\sigma^{-1}\otimes 1"] & & (\mathcal{K}\otimes\mathcal{K})\otimes\mathcal{K} \arrow[uu, "\delta"']
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{K}\otimes\mathcal{K} \arrow[d, "1\otimes 1"] & \mathcal{K} \arrow[l, "\sigma^{-1}"'] \arrow[r, "\sigma^{-1}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{K}\otimes\mathcal{K} \arrow[d, "1\otimes 1"'] \\
\mathcal{K}\otimes\mathcal{K} \arrow[r, "\sigma"'] & \mathcal{K} & \mathcal{K}\otimes\mathcal{K} \arrow[l, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

$({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}, \sigma^{-1}, 1_{\mathcal{K}})$ resulta un BOCS, y como tambien conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[dr, "1\otimes\varepsilon"] \arrow[dd, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & & \mathcal{C} \arrow[ll, "\Psi"'] \arrow[dl, "\sigma^{-1}"] \arrow[dd, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathcal{K} \arrow[dd, equal] \\
& \mathcal{C}\otimes\mathcal{K} \arrow[dl, "\varepsilon\otimes 1"] & & \\
\mathcal{K}\otimes\mathcal{K} & & \mathcal{K} \arrow[ll, "\sigma^{-1}"'] \arrow[r, "1_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

, entonces ε es morfismo de BOCS ■

<u>3-6 PROPOSICION.</u>- Si $\mathcal{K}, \mathcal{V}$ son k-categorías, entonces $(\mathcal{K}, \mathcal{V}) \cong \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$

<u>Demostración:</u>

definamos $E : \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{K}, \mathcal{V})$ tal que si A es un objeto de $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$, entonces $E(A) = A$; y si $\eta \in \mathcal{R}(A, B)$, sea $E(\eta) : A \longrightarrow B$ tal que para cada $K \in |\mathcal{K}|$,

$$\left[E(\eta)_K : A(K) \longrightarrow B(K)\right] = \eta_{(K,K)}(1_K).$$

<u>Afirmación 1.</u>- $E(\eta): A \longrightarrow B$ es transformación natural.

<u>demostración:</u> la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} AK \arrow[r, "E(\eta)_K"'] \arrow[d, "Af"'] & BK \arrow[d, "Bf"'] \\ A\bar{K} \arrow[r, "E(\eta)_{\bar{K}}"] & B\bar{K} \end{tikzcd}$$

para cada $f: K \longrightarrow \bar{K}$ en $\mathcal{K}$,

se sigue de la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} 1_K \arrow[d, mapsto] \arrow[rrrr, bend left, mapsto] & \mathcal{K}(K,K) \arrow[r, "\eta_{(K,K)}"'] \arrow[d, "\mathcal{K}(K,f)"] & \mathcal{V}(AK,BK) \arrow[d, "\mathcal{V}(AK,Bf)"] & & E(\eta)_K \arrow[d, mapsto] \\ f & \mathcal{K}(K,\bar{K}) \arrow[r, "\eta_{(K,\bar{K})}"'] & \mathcal{V}(AK,B\bar{K}) & & B(f)E(\eta)_K = E(\eta)_{\bar{K}}A(f) \\ 1_{\bar{K}} \arrow[u, mapsto] \arrow[rrrr, bend right, mapsto] & \mathcal{K}(\bar{K},\bar{K}) \arrow[r, "\eta_{(\bar{K},\bar{K})}"'] \arrow[u, "\mathcal{K}(f,\bar{K})"'] & \mathcal{V}(A\bar{K},B\bar{K}) \arrow[u, "\mathcal{V}(Af,B\bar{K})"'] & & E(\eta)_{\bar{K}} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

. ■

<u>Afirmación 2.</u>- E es k-funtor.

<u>demostración:</u> Sean $\eta \in \mathcal{R}(B,C)$, $\eta' \in \mathcal{R}(A,B)$ y $K \in |\mathcal{K}|$, entonces:

$$E(\eta \cdot \eta')_K = (\eta \cdot \eta')_{(K,K)}(1_K) = (\pi \cdot \eta \otimes \eta' \cdot \psi)_{(K,K)}(1_K) =$$
$$= (\pi \cdot \eta \otimes \eta')_{(K,K)}(1_K \otimes_k 1_K) = \pi_{(K,K)}(\eta_{(K,K)}(1_K) \otimes_k \eta'_{(K,K)}(1_K)) =$$
$$= \eta_{(K,K)}(1_K) \cdot \eta'_{(K,K)}(1_K) = E(\eta)_K \cdot E(\eta')_K = (E(\eta) \cdot E(\eta'))_K,$$

de donde $E(\eta' \circ \eta) = E(\eta) \circ E(\eta')$.

Dado $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ un k-funtor, sabemos que $1_A = \hat{A} \circ E = \hat{A} \cdot 1_{\mathcal{K}} = \hat{A}$; sea $K \in |\mathcal{K}|$, entonces

$E(1_A)_K = E(\hat{A})_K = \hat{A}_{(K,K)}(1_K) = A(1_K) = 1_{A(K)}$ y en consecuencia, $E(1_A) = 1_A$. ■

Definamos, ahora, $E' : (\mathcal{K}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ tal que si $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un k-funtor, $E'(A) = A$; y si $\Delta : A \longrightarrow B$ es una transformación natural, entonces $E'(\Delta) : \mathcal{K} \longrightarrow {}^{B}\mathcal{V}^{A}$ es tal que para cada $(K, \bar{K}) \in |\mathcal{K}^{op}_{x}\mathcal{K}|$,

$$E'(\Delta)_{(K,\bar{K})} : \mathcal{K}(K,\bar{K}) \longrightarrow \mathcal{V}(AK, B\bar{K})$$
$$h \longmapsto B(h)\Delta_K = \Delta_{\bar{K}} A(h).$$

<u>Afirmación 3</u>.- $E'(\Delta) : \mathcal{K} \longrightarrow {}^{B}\mathcal{V}^{A}$ es un morfismo de Bimódulos.

<u>demostración</u>: Sea $(f,g) : (K,\bar{K}) \longrightarrow (K',\bar{K}')$ en $\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}$; tenemos que $\Delta_K A(f) = B(f)\Delta_{K'}$, y si $h \in \mathcal{K}(K,\bar{K})$ entonces:

$$\mathcal{V}(Af, Bg) \cdot E'(\Delta)_{(K,\bar{K})}(h) = \mathcal{V}(Af, Bg)(B(h)_{\Delta_K}) =$$
$$= B(g) \cdot (B(h) \cdot \Delta_K) \cdot A(f) = B(g) \cdot B(h) \cdot B(f) \cdot \Delta_{K'} =$$
$$= B(ghf)\Delta_{K'} = E'(\Delta)_{(K',\bar{K}')}(ghf) =$$
$$= E'(\Delta)_{(K',\bar{K}')}\,\mathcal{K}(f,g)(h),$$ es decir conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}(K,\bar{K}) \arrow[r, "E'(\Delta)_{(K,\bar{K})}"] \arrow[d, "\mathcal{K}(f,g)"] & \mathcal{V}(AK, B\bar{K}) \arrow[d, "\mathcal{V}(Af, Bg)"] \\ \mathcal{K}(K',\bar{K}') \arrow[r, "E'(\Delta)_{(K',\bar{K}')}"] & \mathcal{V}(AK', B\bar{K}') \end{tikzcd}$$

■

<u>Afirmación 4.</u>- E' es k-funtor.

<u>demostración:</u> Sean $A \xrightarrow{\Delta} B \xrightarrow{\Delta'} C$ transformaciones naturales entre objetos de $(\mathcal{K},\mathcal{V})$; Sean $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}|$ y $h \in \mathcal{K}(K,\bar{K})$, entonces:

$$E'(\Delta'\circ\Delta)_{(K,\bar{K})}(h) = C(h)(\Delta'\circ\Delta)_K = C(h)\Delta'_K\Delta_K =$$

$$= \pi_{(K,\bar{K})}(C(h)\Delta'_K \otimes_K \Delta_K) = \pi_{(K,\bar{K})}(C(h)\Delta'_K \otimes_K B(1_K)\Delta_K) =$$

$$= \pi_{(K,\bar{K})}(E'(\Delta')_{(K,\bar{K})}(h) \otimes_K E'(\Delta)_{(K,K)}(1_K)) =$$

$$= \pi_{(K,\bar{K})}\circ(E'(\Delta')_{(-,\bar{K})} \otimes E'(\Delta)_{(K,-)})(h\otimes_K 1_K) =$$

$$= [\pi\circ E'(\Delta')\otimes E'(\Delta)\circ\psi]_{(K,\bar{K})}(h) = [E'(\Delta')\circ E'(\Delta)]_{(K,\bar{K})}(h),$$

por tanto $E'(\Delta'\circ\Delta) = E'(\Delta')\circ E'(\Delta)$.

Si $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un k-funtor, y 1_A es la transformación natural idéntica, entonces:

$$E'(1_A)_{(K,\bar{K})}(h) = A(h)\circ(1_A)_K = A(h) = \hat{A}_{(K,\bar{K})}(h) = (1_{E'A})_{(K,\bar{K})}(h)$$

y por tanto, $E'(1_A) = 1_{E'A}$.

Es inmediato que $E'(t\Delta) = tE'(\Delta)$ para $t\in k$ ∎

Para ver que $E'E = 1$, tomemos $\eta \in \mathcal{R}(A,B)$, $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}|$ y $h \in \mathcal{K}(K,\bar{K})$, entonces:

$$E'(E(\eta))_{(K,\bar{K})}(h) = B(h)\circ E(\eta)_K = B(h)\circ\eta_{(K,K)}(1_K) = \eta_{(K,\bar{K})}(h)$$

ya que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(K,\bar{K}) \arrow[r, "\eta_{(K,\bar{K})}"] & \mathcal{V}(AK,B\bar{K}) \\
\mathcal{K}(K,K) \arrow[u, "\mathcal{K}(K,h)"] \arrow[r, "\eta_{(K,K)}"] & \mathcal{V}(AK,BK) \arrow[u, "\mathcal{V}(AK,Bh)"']
\end{tikzcd}.$$

Por otro lado, si $\Delta: A \longrightarrow B$ es transformación natural y $K \in |\mathcal{K}|$, se tiene que:

$$E(E'(\Delta))_K = E'(\Delta)_{(K,K)}(1_K) = B(1_K)\cdot \Delta_K = 1_{B(K)}\cdot \Delta_K = \Delta_K$$

y entonces $EE' = 1$, de donde E es isomorfismo con inversa E' ■

<u>3-7 COROLARIO</u>.- Si $\mathcal{V}$ es una k-categoría y ${}_K\mathcal{C}_K$ es un BOCS cuya counidad $\mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon} K$ es epimorfismo de Bimódulos, entonces esta última induce una k-inmersión:

$$\mathcal{R}({}_K\mathcal{K}_K, \mathcal{V}) \xhookrightarrow{\varepsilon^*} \mathcal{R}({}_K\mathcal{C}_K, \mathcal{V})$$

y por tanto, hay otra k-inmersión:

$$(\mathcal{K}, \mathcal{V}) \hookrightarrow \mathcal{R}({}_K\mathcal{C}_K, \mathcal{V})$$

<u>Demostración</u>: en 3-4 se define el funtor ε^* de tal forma que resulta inyectivo en los objetos; y como ε es epi, ε^* resulta fiel y por tanto es una k-inmersión ■

<u>3-8 PROPOSICION</u>.- Si $\mathcal{V}$ es una k-categoría aditiva y ${}_K\mathcal{C}_K$ es un BOCS, entonces $\mathcal{R}({}_K\mathcal{C}_K, \mathcal{V})$ es aditiva. Mas precisamente, por ser $\mathcal{V}$ aditiva, tambien lo es $(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ (y por tanto $\mathcal{R}({}_K\mathcal{K}_K, \mathcal{V})$); y, si $A, B: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ son k-funtores cuya suma

en $(\mathcal{K},\mathcal{V})$ es $(A\amalg B,\sigma_1,\sigma_2)$, y en $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}},\mathcal{V})$ es $(A\amalg B,\overline{\sigma_1},\overline{\sigma_2})$, entonces en $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}},\mathcal{V})$ la suma es $(A\amalg B,\overline{\sigma_1}\varepsilon,\overline{\sigma_2}\varepsilon)$, donde ε es la counidad del BOCS.

<u>Demostración</u>: Sea $(C, A\xrightarrow{\alpha_1}C, B\xrightarrow{\alpha_2}C)$ otro pozo en $\mathcal{R}({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}},\mathcal{V})$. Sea para cada $(K,\overline{K})\in|\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}|$, $\alpha_{(K,\overline{K})}:\mathcal{C}(K,\overline{K})\longrightarrow\mathcal{V}((A\amalg B)(K),C(\overline{K}))$ tal que si $c\in\mathcal{C}(K,\overline{K})$, $\alpha(c)$ es el único morfismo que hace conmutar:

$$\begin{tikzcd} A(K) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[dr, "\alpha_1(c)"'] & A(K)\amalg B(K) = (A\amalg B)(K) \arrow[d, "\alpha(c)"] & B(K) \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "\alpha_2(c)"] \\ & C(\overline{K}) & \end{tikzcd}$$

<u>Afirmación 1.-</u> $\alpha:\mathcal{C}\longrightarrow {}^{C}\mathcal{V}^{A\amalg B}$ es morfismo de Bimódulos.

<u>demostración</u>: Sea $(f,g):(K,\overline{K})\longrightarrow(K',\overline{K}')$ en $|\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}|$, veamos que conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(K,\overline{K}) \arrow[r, "\alpha_{(K,\overline{K})}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f,g)"'] & \mathcal{V}((A\amalg B)(K),C(\overline{K})) \arrow[d, "\mathcal{V}((A\amalg B)(f),C(g))"] \\ \mathcal{C}(K',\overline{K}') \arrow[r, "\alpha_{(K',\overline{K}')}"] & \mathcal{V}((A\amalg B)(K'),C(\overline{K}')) \end{tikzcd}$$

Sea $c\in\mathcal{C}(K,\overline{K})$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A(K') \amalg B(K') \arrow[d, "A(f)\amalg B(f)"] & & B(K') \arrow[ll, "\overline{\sigma_2}_{K'}"'] \arrow[dl, "B(f)"'] \arrow[dddll, "\alpha_2(\mathcal{C}(f,g)(C))"] \\
A(K) \amalg B(K) \arrow[d, "\alpha(C)"] & B(K) \arrow[l, "\overline{\sigma_2}_{K}"'] \arrow[dl, "\alpha_2(C)"] & \\
C(\overline{K}) \arrow[d, "C(g)"] & & \\
C(\overline{K'}) & &
\end{tikzcd}$$

ya que α_2 es morfismo de Bimódulos y entonces conmuta la parte exterior del diagrama; Análogamente para el diagrama simétrico, correspondiente a α_1, y en consecuencia:

$$\alpha(\mathcal{C}(f,g)(C)) = C(g)\circ\alpha(C)\circ A(f)\amalg B(f) = \mathcal{V}((A\amalg B)(f), C(g))(\alpha(C)).$$ ■

<u>Afirmación 2.-</u>

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\overline{\sigma_1}\varepsilon"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & A\amalg B \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, "\overline{\sigma_2}\varepsilon"'] \arrow[dl, "\alpha_2"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{R}({}_K{}^{\mathcal{C}}{}_K, \mathcal{V})$.

<u>demostración</u>: Veamos por ejemplo que el triángulo de la derecha conmuta. Consideremos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[rr, "\alpha\otimes\overline{\sigma_2}\varepsilon"] \arrow[dr, "1\otimes\varepsilon"] & & {}^{C}\mathcal{V}^{A\amalg B} \otimes {}^{A\amalg B}\mathcal{V}^{B} \arrow[dd, "\pi"] \\
& \mathcal{C}\otimes K \arrow[ur, "\alpha\otimes\overline{\sigma_2}"'] & \\
\mathcal{C} \arrow[uu, "\psi"] \arrow[ur, "\cong", "\sigma^{-1}"'] \arrow[rr, "\alpha_2"] & & {}^{C}\mathcal{V}^{B}
\end{tikzcd}$$

como los diagramas interiores conmutan, tambien lo hace el exterior. ∎

La verificación de la unicidad de α es inmediata. ∎

§ 4.- Categorías Graduadas Diferenciales (DGC y QDGC).

4-1 DEFINICIONES.- Una categoría pequeña $\mathcal{U}$ es una categoría k-Graduada (k-GC) si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(A) $Hom_{\mathcal{U}}(K,\bar{K}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Hom_i(K,\bar{K})$ en donde $\{Hom_i(K,\bar{K})\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia de k-módulos para cada $K,\bar{K} \in |\mathcal{U}|$.

(B) la composición de $\mathcal{U}$ induce para cada i,j un morfismo $Hom_j(\bar{K},\bar{\bar{K}}) \otimes_k Hom_i(K,\bar{K}) \longrightarrow Hom_{i+j}(K,\bar{\bar{K}})$ de k-módulos.

Si $f: K \longrightarrow \bar{K}$ es un morfismo de una k-GC $\mathcal{U}$, diremos que f tiene grado n (grad f = n) en caso de que $f \in Hom_n(K,\bar{K})$.

Si $\mathcal{U},\mathcal{V}$ son k-GC, entonces un k-GC funtor $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un funtor que preserva el grado, y la restricción $F: Hom_i(K,\bar{K}) \longrightarrow Hom_i(FK,F\bar{K})$ es morfismo de k-módulos para cada $K,\bar{K} \in |\mathcal{U}|$, $i \geq 0$.

4-2 EJEMPLOS.-

(I) Sea Γ una gráfica orientada, y sea $\mathcal{U}(\Gamma,k)$ la k-categoría cuyos objetos son los vértices de Γ, si i, j son vértices de Γ, entonces $\mathrm{Hom}(i,j)$ es el k-módulo libre generado por los caminos de i en j (incluyendo el camino trivial en i, en caso de que $i=j$), y con composición definida de manera natural ("pegando caminos"). $\mathcal{U}(\Gamma, k)$ se llama <u>la k-categoría libre generada por Γ</u>. Nótese que $\mathcal{U}(\Gamma, k)$ tiene la propiedad de que cada función $F: \Gamma \longrightarrow \mathcal{V}$ de Γ en una k-categoría $\mathcal{V}$ que manda vértices en objetos de $\mathcal{V}$, flechas en $\mathcal{V}$-morfismos, y preserva dominios y codominios, puede ser extendida a un k-funtor $\bar{F}: \mathcal{U}(\Gamma, k) \longrightarrow \mathcal{V}$ de manera única.

La categoría $\mathcal{U}(\Gamma, k)$ puede ser graduada de varias maneras, asignando a cada flecha de Γ un entero no negativo (un grado); las flechas triviales, que son los morfismos identidades, deben tener grado 0.

(II) Sea $\mathcal{L}$ una <u>bigráfica</u> (es decir una gráfica orientada en donde se distinguen dos tipos de flechas: <u>continuas</u> y <u>punteadas</u>). Denotaremos por $\mathcal{U}(\mathcal{L}, k)$ a la k-categoría libre generada por la gráfica orientada subyacente de $\mathcal{L}$ (es decir, considerando los

dos tipos de flechas) con la graduación que se obtiene al asignar grado 0 a las flechas continuas y grado 1 a las punteadas.
Diremos que $\mathcal{U}(\mathcal{L}_S, k)$ es <u>la k-GC libre generada por $\mathcal{L}_S$.</u>

<u>4-3 NOTACION.</u>- Los conceptos de ideal y categoría cociente se transfieren de manera obvia a categorías graduadas. Denotemos por I_i ($i \geq 0$) al ideal de una k-GC $\mathcal{U}$ que consiste de todos los morfismos de grado $> i$, y denotemos por $\mathcal{U}_i$ a la categoría cociente $\mathcal{U}/I_i$ que es claramente una k-GC. Nótese que $\mathcal{U}_0$ resulta k-categoría, y ademas es isomorfa a la subcategoría de $\mathcal{U}$ que consiste de todos los morfismos de grado 0 (que tambien denotaremos por $\mathcal{U}_0$).

<u>4-4 DEFINICION.</u>- Una k-GC $\mathcal{U}$ se llama <u>semilibre sobre $\mathcal{U}_n$</u> si para cada k-GC $\mathcal{V}$, cada k-GC funtor $F_n : \mathcal{U}_n \longrightarrow \mathcal{V}_n$ se extiende de manera única a un k-GC funtor $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$. Una k-GC $\mathcal{U}$ se llama <u>semilibre</u> si es semilibre sobre $\mathcal{U}_1$.

<u>4-5 OBSERVACIONES.</u>- (I) $\mathcal{U}$ es k-GC semilibre sobre $\mathcal{U}_0$ si y sólo si $\mathcal{U}=\mathcal{U}_0$, ya que $1_{\mathcal{U}_0}$ puede extenderse al menos de dos maneras: $1_{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0 \hookrightarrow \mathcal{U}$.

(II) Si $\mathcal{U}$ es una k-GC, entonces cada Hom_i es de manera natural un $\mathcal{U}_0$-Bimódulo:
$Hom_i : \mathcal{U}_0^{op} \times \mathcal{U}_0 \longrightarrow Ab$ tal que $Hom_i(f,g)(h) = ghf$.

(III) Dada una k-categoría $\mathcal{U}_0$ y un $\mathcal{U}_0$-Bimódulo $\mathcal{V}$, podemos construir una k-GC semilibre $\mathcal{U}$ como sigue: tomamos $|\mathcal{U}|=|\mathcal{U}_0|$,

$$Hom_{\mathcal{U}}(K,\bar{K}) = \biguplus_{i=0}^{\infty} Hom_i(K,\bar{K})$$

donde:
$$Hom_0 = \mathcal{U}_0,$$
$$Hom_1 = \mathcal{V} \quad \text{y para } i>1,$$
$$Hom_i = (\underbrace{\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{U}_0} \cdots \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathcal{V}}_{i \text{ veces}}) \quad ;$$

y la composición
$$\circ : Hom_{\mathcal{U}}(\bar{K},\bar{\bar{K}}) \times Hom_{\mathcal{U}}(K,\bar{K}) \longrightarrow Hom_{\mathcal{U}}(K,\bar{\bar{K}})$$
$$(f,g) \longmapsto f\circ g$$

dada por:

$$f\circ g = \begin{cases} f\circ g & \text{si } \operatorname{grad} f = 0 = \operatorname{grad} g \\ Hom_n(K,f)(g) & \text{si } \operatorname{grad} f = 0,\ \operatorname{grad} g = n>0 \\ Hom_n(g,\bar{\bar{K}})(f) & \text{si } \operatorname{grad} g = 0,\ \operatorname{grad} f = n>0 \\ f \otimes_{\bar{K}} g & \text{si } \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g > 0 \end{cases}$$

Diremos que la k-GC que acabamos de construir es <u>la k-GC semilibre generada por $\mathcal{U}_0$ y $\mathcal{V}$.</u>

(IV) Si $\mathcal{U}$ es una k-GC semilibre y construimos $\mathcal{U}'$ la k-GC semilibre generada por $\mathcal{U}_0$ y Hom_1, entonces $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}'$. De aquí en adelante supondremos que $\mathcal{U}=\mathcal{U}'$.

<u>4-6 LEMA.-</u> Sean $\mathcal{K}$ una k-categoría y $\mathcal{V} \xrightarrow{\eta} \mathcal{V}'$ un morfismo de $\mathcal{K}$-Bimódulos tal que: $\mathcal{V}(-,\bar{K}) \xrightarrow[\eta_{(-,\bar{K})}]{} \mathcal{V}'(-,\bar{K})$, $\mathcal{V}(K,-) \xrightarrow[\eta_{(K,-)}]{} \mathcal{V}'(K,-)$ son secciones para cada $K,\bar{K} \in |\mathcal{K}|$. Sean $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ las k-GC semilibres asociadas a $\mathcal{V}, \mathcal{K}$, y $\mathcal{V}', \mathcal{K}$ respectivamente. Entonces hay una k-GC-inmersión $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}'$.

<u>Demostración:</u> Tenemos que $\mathcal{U}_0 = \mathcal{K} = \mathcal{U}_0'$, y $\mathrm{Hom}_1 = \mathcal{V} \rightarrowtail{\eta} \mathcal{V}' = \mathrm{Hom}_1'$. Como $-\otimes \mathcal{V}(K,-)$ es un funtor, entonces:

$$\mathcal{V}(-,\bar{K}) \otimes \mathcal{V}(K,-) \xrightarrow[\eta_{(-,\bar{K})}]{\eta \otimes 1} \mathcal{V}'(-,\bar{K}) \otimes \mathcal{V}(K,-) \text{ es sección;}$$

Similarmente, $\mathcal{V}'(-,\bar{K}) \otimes \mathcal{V}(K,-) \xrightarrow[\eta_{(K,-)}]{1\otimes \eta} \mathcal{V}'(-,\bar{K}) \otimes \mathcal{V}'(K,-)$ es sección y por tanto, la composición:

$$\eta_{(-,\bar{K})} \otimes \eta_{(K,-)} : \mathcal{V}(-,\bar{K}) \otimes \mathcal{V}(K,-) \longrightarrow \mathcal{V}'(-,\bar{K}) \otimes \mathcal{V}'(K,-)$$

es sección. Como $K,\bar{K}$ son objetos arbitrarios de

$\mathcal{K}$, tenemos que: $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V} \xrightarrow{\eta\otimes\eta} \mathcal{V}'\otimes\mathcal{V}'$ es una sección.

Supongamos que $\overbrace{\eta\otimes\cdots\otimes\eta}^{n-1 \text{ veces}}$ es sección.

Como $-\otimes\mathcal{V}(K,-)$ es funtor,

$$(\underbrace{\mathcal{V}\otimes\cdots\otimes\mathcal{V}}_{n-1 \text{ veces}})(-,\bar{K})\otimes\mathcal{V}(K,-) \xrightarrow[(-,\bar{K})]{(\eta\otimes\cdots\otimes\eta)\otimes 1} (\underbrace{\mathcal{V}'\otimes\cdots\otimes\mathcal{V}'}_{n-1 \text{ veces}})(-,\bar{K})\otimes\mathcal{V}(K,-)$$

es sección; y puesto que $\mathcal{V}(K,-) \xrightarrow[(K,-)]{\eta} \mathcal{V}'(K,-)$ es sección, tambien es sección:

$$(\mathcal{V}'\otimes\cdots\otimes\mathcal{V}')(-,\bar{K})\otimes\mathcal{V}(K,-) \xrightarrow[(K,-)]{1\otimes\eta} (\mathcal{V}'\otimes\cdots\otimes\mathcal{V}')(-,\bar{K})\otimes\mathcal{V}'(K,-);$$

la composición de los morfismos anteriores resulta sección:

$$(\mathcal{V}\otimes\cdots\otimes\mathcal{V})(K,\bar{K}) \xrightarrow[(K,\bar{K})]{(\eta\otimes\cdots\otimes\eta)} (\mathcal{V}'\otimes\cdots\otimes\mathcal{V}')(K,\bar{K})$$

para cada $K,\bar{K} \in |\mathcal{K}|$, y entonces

$$Hom_n = \mathcal{V}\otimes\cdots\otimes\mathcal{V} \xrightarrow{\eta\otimes\cdots\otimes\eta} \mathcal{V}'\otimes\cdots\otimes\mathcal{V}' = Hom'_n$$

tambien es una sección. El lema es consecuencia inmediata de lo anterior. ■

<u>4-7 DEFINICIONES.</u>- Sea $\mathcal{U}$ una k-GC y $s \geq 1$, entonces una <u>diferencial $\mathcal{D}$ de grado s en $\mathcal{U}$</u> es una función $\mathcal{D}: Mor\,\mathcal{U} \longrightarrow Mor\,\mathcal{U}$ tal que:

(I) $\mathcal{D}: Hom_i(K,\bar{K}) \longrightarrow Hom_{i+s}(K,\bar{K})$ es k-lineal para cada $K,\bar{K} \in |\mathcal{U}|$, $i \geq 0$.

(II) $\mathcal{D}$ satisface la <u>fórmula de Leibnitz</u>:

$$\mathcal{D}(a\cdot b) = a\cdot\mathcal{D}(b) + (-1)^{s\,\mathrm{grad}\,b}\,\mathcal{D}(a)\cdot b .$$

Si $\mathcal{D}$ es una diferencial de grado s en $\mathcal{U}$, diremos que <u>$\mathcal{D}$ es interna</u> si podemos hallar una colección de morfismos $\{h_K\}_{K\in|\mathcal{U}|}$ tal que: para cada $K\in|\mathcal{U}|$, $h_K\in \mathrm{Hom}_s(K,K)$; y si $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(K,\bar{K})$, la diferencial se calcula mediante la fórmula: $\mathcal{D}(f) = f h_K - (-1)^{s\,\mathrm{grad} f} h_{\bar{K}} f$. En este caso, diremos que <u>$\mathcal{D}$ es generada por la familia $\{h_K\}$.</u>

<u>NOTA.</u>- Si $\mathcal{D}$ es diferencial de grado impar s, entonces $\mathcal{D}^2$ es diferencial de grado $2s$. Además, si $\mathcal{D}^2=0$ y tomamos $h_K=\mathcal{D}^2(1_K)\in \mathrm{Hom}_{2s}(K,K)$ para cada $K\in|\mathcal{U}|$, entonces $\mathcal{D}^2$ es interna generada por $\{h_K\}$; nótese que $\mathcal{D}(h_K)=0$.

<u>4-8 DEFINICIONES.</u>- Una k-GC $\mathcal{U}$ es una <u>QDGC</u> si hay una diferencial $\mathcal{D}$ de grado 1 en $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{D}^2$ es interna generada por una familia de morfismos $\{h_K\}_{K\in|\mathcal{U}|}$ donde $\mathcal{D}(h_K)=0$ para cada K. Una k-GC es una <u>DGC</u> si hay una diferencial $\mathcal{D}$ de grado 1 en $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{D}^2=0$. Un k-GC funtor entre las (Q)DGC

$\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ se llama <u>(Q)DGC funtor</u> si conmuta con las diferenciales.

<u>4-9 CONSTRUCCION DE $\hat{\mathcal{U}}$.</u>- Dada una QDGC semilibre $\mathcal{U}$, construiremos una DGC semilibre $\hat{\mathcal{U}}$ con los mismos objetos. "Agregamos una colección $\{dx\}_{x\in|\mathcal{U}|}$ de nuevos morfismos de grado 1 y generamos $\hat{\mathcal{U}}$ libremente con la ayuda de $\mathcal{U}$ y $\{dx\}$" es decir: definimos $\hat{\mathcal{U}}_0 = \mathcal{U}_0$, y si $K, \bar{K} \in |\mathcal{U}|$,

$$\widehat{Hom}_1(K,\bar{K}) = Hom_1(K,\bar{K}) \oplus \left(\bigoplus_{X\in|\mathcal{U}|} \mathcal{T}_X(K,\bar{K})\right)$$

donde para cada $X \in |\mathcal{U}|$, $\mathcal{T}_X$ es el $\mathcal{U}_0$-Bimódulo tal que:

$$\mathcal{T}_X(K,\bar{K}) = \mathcal{U}_0(X,\bar{K}) \underset{\mathcal{U}_0(X,X)}{\otimes} [\mathcal{U}_0(X,X) \underset{k}{\otimes} \mathcal{U}_0(X,X)] \underset{\mathcal{U}_0(X,X)}{\otimes} \mathcal{U}_0(K,X) \cong$$

$$\cong \mathcal{U}_0(X,\bar{K}) \underset{k}{\otimes} \mathcal{U}_0(K,X)$$

(notación: $dx = 1_X \otimes 1_X$, $g_1 dx f_1 = g_1 \otimes dx \otimes f_1$, $g_1 dx = g_1 \otimes dx \otimes 1_X$ y $dx f_1 = 1_X \otimes d_X \otimes f_1$),

y si $(f,g) : (K,\bar{K}) \longrightarrow (K',\bar{K}')$ en $\mathcal{U}_0^{op} \times \mathcal{U}_0$,

$$\mathcal{T}_X(f,g) = \mathcal{U}_0(X,g) \underset{k}{\otimes} \mathcal{U}_0(f,X) : \mathcal{T}_X(K,\bar{K}) \longrightarrow \mathcal{T}_X(K',\bar{K}')$$

por tanto, $\mathcal{T}_X(f,g)(g_1 dx f_1) = (gg_1)\, dx\, (f_1 f)$.

Consideremos ahora la k-GC semilibre $\hat{\mathcal{U}}$ generada por $\hat{\mathcal{U}}_0$ y $\widehat{Hom}_1$. Por el Lema anterior, se tiene una k-GC inclusión $\mathcal{U} \hookrightarrow \hat{\mathcal{U}}$. Si $\mathcal{D}$ es la diferencial en $\mathcal{U}$, definimos en $\hat{\mathcal{U}}$:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{D}}(d_x) = d_x^2 - h_x \\ \hat{\mathcal{D}}(x) = \mathcal{D}(x) + x d_K - (-1)^{\text{grad}\, x} d_{\bar{K}} x \end{cases}$$

donde $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(K,\bar{K})$ y $\{h_x\}$ genera a $\mathcal{D}^2$; extendemos $\hat{\mathcal{D}}$ al resto de los morfismos mediante la fórmula de Leibnitz, y k-linealmente en cada $\widehat{\mathrm{Hom}}_i(K,\bar{K})$.

<u>Afirmación.</u>- $\hat{\mathcal{D}}$ es diferencial de grado 1 y $\hat{\mathcal{D}}^2 = 0$.

<u>demostración:</u> como $\mathcal{D} : \mathrm{Hom}_i(K,\bar{K}) \to \mathrm{Hom}_{i+1}(K,\bar{K})$ es k-lineal, entonces $\hat{\mathcal{D}} : \widehat{\mathrm{Hom}}_i(K,\bar{K}) \to \widehat{\mathrm{Hom}}_{i+1}(K,\bar{K})$ tambien es k-lineal. Para ver que $\hat{\mathcal{D}}$ satisface la fórmula de Leibnite, basta ver que la satisface para $x \in \mathrm{Hom}_i(\bar{K},\bar{\bar{K}})$, $y \in \mathrm{Hom}_j(K,\bar{K})$ (en $\mathcal{U}$) puesto que en el resto de las composiciones en $\hat{\mathcal{U}}$, se ha definido $\hat{\mathcal{D}}$ de modo que esta fórmula valga;

$$\hat{\mathcal{D}}(xy) = \mathcal{D}(xy) + xy\, d_K - (-1)^{\text{grad}\, xy} d_{\bar{\bar{K}}}\, xy =$$

$$= (x\mathcal{D}(y) + (-1)^{\text{grad}\, y}\mathcal{D}(x)y) + xy\, d_K - (-1)^{\text{grad}\, xy} d_{\bar{\bar{K}}}\, xy =$$

$$= x[\mathcal{D}(y) + y\, d_K - (-1)^{\text{grad}\, y} d_{\bar{K}}\, y] + (-1)^{\text{grad}\, y}[\mathcal{D}(x) + x d_{\bar{K}} - (-1)^{\text{grad}\, x} d_{\bar{\bar{K}}}\, x]y =$$

$$= x\hat{\mathcal{D}}(y) + (-1)^{\text{grad}\, y}\hat{\mathcal{D}}(x)y.$$

Para ver que $\hat{\mathcal{D}}^2=0$, basta verificarlo en los generadores:

$$\hat{\mathcal{D}}^2(d_K)=\hat{\mathcal{D}}(d_K^2-h_K)=\hat{\mathcal{D}}(d_Kd_K)-\hat{\mathcal{D}}(h_K)=$$
$$=[d_K\hat{\mathcal{D}}(d_K)-\hat{\mathcal{D}}(d_K)d_K]-[\mathcal{D}(h_K)+h_Kd_K-d_Kh_K]=$$
$$=[d_K(d_K^2-h_K)-(d_K^2-h_K)d_K]-\mathcal{D}(h_K)-h_Kd_K+d_Kh_K=$$
$$=-\mathcal{D}(h_K)=0$$

$$\hat{\mathcal{D}}^2(x)=\hat{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(x)+xd_K-(-1)^{\text{grad}\,x}d_K\,x)=$$
$$=\hat{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(x))+\hat{\mathcal{D}}(xd_K)-(-1)^{\text{grad}\,x}\hat{\mathcal{D}}(d_{\bar{K}}\,x)=$$
$$=[\mathcal{D}^2(x)+\mathcal{D}(x)d_K-(-1)^{\text{grad}\,\mathcal{D}(x)}d_{\bar{K}}\mathcal{D}(x)]+$$
$$+[x\hat{\mathcal{D}}(d_K)+(-1)^{\text{grad}\,d_K}\hat{\mathcal{D}}(x)d_K]+$$
$$-(-1)^{\text{grad}\,x}[d_{\bar{K}}\hat{\mathcal{D}}(x)+(-1)^{\text{grad}\,x}\hat{\mathcal{D}}(d_{\bar{K}})x]=$$
$$=[(xh_K-(-1)^{2\text{grad}\,x}h_{\bar{K}}x)+\mathcal{D}(x)d_K-(-1)^{\text{grad}\,x+1}d_{\bar{K}}\mathcal{D}(x)]+$$
$$+[x\hat{\mathcal{D}}(d_K)-(\mathcal{D}(x)+xd_A-(-1)^{\text{grad}\,x}d_{\bar{K}}\,x)d_K]+$$
$$-(-1)^{\text{grad}\,x}[d_{\bar{K}}(\mathcal{D}(x)+xd_K-(-1)^{\text{grad}\,x}d_{\bar{K}}\,x)+(-1)^{\text{grad}\,x}\hat{\mathcal{D}}(d_{\bar{K}})x]=$$
$$=[(xh_K-(-1)^{2\text{grad}\,x}h_{\bar{K}}x)-(-1)^{\text{grad}\,x+1}d_{\bar{K}}\mathcal{D}(x)]+$$
$$+[x(d_K^2-h_K)-(xd_K-(-1)^{\text{grad}\,x}d_{\bar{K}}\,x)d_K]+$$
$$-(-1)^{\text{grad}\,x}[d_{\bar{K}}(\mathcal{D}(x)+xd_K-(-1)^{\text{grad}\,x}d_{\bar{K}}\,x)+(-1)^{\text{grad}\,x}(d_{\bar{K}}^2-h_{\bar{K}})x]=$$
$$=0. \quad \blacksquare$$

<u>4-10 CONSTRUCCION DE $\mathcal{V}^{(2)}$</u>.- Dada una k-categoría $\mathcal{V}$, construiremos una DGC $\mathcal{V}^{(2)}$ como sigue: Denotemos por $\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}$ la categoría (<u>de</u>

<u>matrices triangulares</u>) cuyos objetos son parejas (A_1, A_2) con $A_i \in |\mathcal{V}|$, cuyos morfismos de $\bar{A}=(A_1,A_2)$ en $\bar{B}=(B_1,B_2)$ están dados por:

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(\bar{A},\bar{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} / \ e_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(A_i, B_j) \right\},$$

y la composición es la multiplicación de matrices. Definamos ahora $\mathcal{V}^{(2)}$ con los mismos objetos que $\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}$ y con morfismos $\mathrm{Hom}_0^{(2)}(\bar{A},\bar{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} e_{11} & 0 \\ 0 & e_{22} \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{Hom}_1^{(2)}(\bar{A},\bar{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{Hom}_j^{(2)}(\bar{A},\bar{B}) = 0$ si $j \geq 2$. (Nótese que hemos eliminado algunos morfismos de $\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(\bar{A},\bar{B})$). La composición en $\mathcal{V}^{(2)}$ es la restricción de la composición de $\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}$. Definimos la diferencial en $\mathcal{V}^{(2)}$ tal que $D(x)=0$ para cada x, y $\mathcal{V}^{(2)}$ resulta DGC.

<u>4-11 DEFINICION.</u>- Si $\mathcal{V}$ es una k-categoría, <u>La categoría de $\mathcal{V}$-representaciones de la QDGC semilibre $\mathcal{U}$</u>, que denotaremos por $\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, tendrá por objetos k-funtores $A: \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{V}$; y por morfismos DGC-funtores $\varphi: \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$.

Si $\varphi: \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$ es un DGC-funtor y a es un morfismo de $\mathcal{U}_0$, entonces $\varphi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(a) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(a) \end{pmatrix}$ donde $\varphi_{11}(a)$, $\varphi_{22}(a)$ son morfismos de $\mathcal{V}$; es claro que podemos pensar φ_{11}, φ_{22} como k-funtores $\mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{V}$.

Si $A, B : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{V}$ son k-funtores, el conjunto de $\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$-morfismos de A en B es:

$\overline{\mathcal{R}}(A,B) = \{ \varphi : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$ DGC-funtor$/ \varphi_{11}=A,\ \varphi_{22}=B \}$ y la composición

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{R}}(B,C) \times \overline{\mathcal{R}}(A,B) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{R}}(A,C) \\ (\varphi', \varphi) & \longmapsto & \varphi' \circ \varphi \end{array}$$

queda definida por:

para a tal que $\operatorname{grad}(a)=0$,

$(\varphi'\circ\varphi)(a) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(a) & 0 \\ 0 & \varphi'_{22}(a) \end{pmatrix}$ si $\varphi'(a) = \begin{pmatrix} \varphi'_{11}(a) & 0 \\ 0 & \varphi'_{22}(a) \end{pmatrix}$, $\varphi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(a) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(a) \end{pmatrix}$;

y si $\operatorname{grad}(x)=1$,

se tiene $\mathcal{D}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ con a_i, b_i de grado 1,

y $\varphi'(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi'_{21}(a_i) & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(b_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{21}(b_i) & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$(\varphi'\circ\varphi)(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\varphi'\circ\varphi)_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} \text{ donde } (\varphi'\circ\varphi)_{21}(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi'_{21}(a_i)\varphi_{21}(b_i).$$

<u>4-12 PROPOSICION.</u>- $\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ es k-categoría. Si $A : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{V}$ es un objeto de $\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, entonces el morfismo identidad de A es el funtor $\overline{A} : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$ tal que:

si $\operatorname{grad}(a)=0$, $\overline{A}(a) = \begin{pmatrix} A(a) & 0 \\ 0 & A(a) \end{pmatrix}$; $\overline{A}(d_X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{AX} & 0 \end{pmatrix}$ para cada $X \in |\mathcal{U}|$; y $\overline{A}(x) = 0$ si x es un morfismo de grado 1 de $\mathcal{U}$.

<u>NOTA</u>: la demostración de esta proposición

la omitimos aquí pues en la siguiente sección se prueba que $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es lo mismo que la categoría de representaciones de un cierto BOCS, de donde se sigue 4-12.

§5.- Relaciones entre BOCS y DGC.

5-1 LEMA.- Sea $\mathcal{U}$ DGC semilibre con diferencial $\mathcal{D}$ y sea para cada $A, C \in |\mathcal{U}_0|$,
$d(A,C) = \{\sum_1^n f_i \mathcal{D}(h_i) \,/\, h_i \in \mathcal{U}_0(A,B_i),\ f_i \in \mathcal{U}_0(B_i,C)\} \subset Hom_1(A,C)$
entonces:

i) d es $\mathcal{U}_0$-subBimódulo de Hom_1.

ii) existe un morfismo de grupos, que denotaremos con la misma letra $\mathcal{D}$, que hace conmutar:

$$\begin{tikzcd}
Hom_1(A,C) \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & Hom_1 \otimes_{\mathcal{U}_0} Hom_1(A,C) \arrow[r, "\nu\otimes\nu"] & Hom_1/d \otimes_{\mathcal{U}_0} Hom_1/d\,(A,C) \\
Hom_1/d\,(A,C) \arrow[urr, dashed, "\mathcal{D}"] & &
\end{tikzcd}$$

donde ν es la proyección natural.

iii) $Hom_1/d \xrightarrow{\mathcal{D}} Hom_1/d \otimes_{\mathcal{U}_0} Hom_1/d$ es morfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos.

iv) conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom_1/d \otimes Hom_1/d \arrow[r, "1\otimes\mathcal{D}"] & Hom_1/d \otimes Hom_1/d \otimes Hom_1/d \\
Hom_1/d \arrow[u, "\mathcal{D}"] \arrow[r, "\mathcal{D}"] & Hom_1/d \otimes Hom_1/d \arrow[u, "\mathcal{D}\otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

Demostración: "i)" claramente, $d(A,C)$ es subgrupo de $Hom_1(A,C)$. Queremos ver que cada $(A,C) \xrightarrow{(f,g)} (\bar{A},\bar{C})$ en $\mathcal{U}_0^{op} \times \mathcal{U}_0$ induce $d(f,g)$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd} d(A,C) \arrow[r, hook] \arrow[d, "d(f,g)"] & Hom_1(A,C) \arrow[d, "Hom_1(f,g)"] \\ d(\bar{A},\bar{C}) \arrow[r, hook] & Hom_1(\bar{A},\bar{C}) \end{tikzcd} .$$

si $x = \sum_1^n f_i \mathcal{D}(h_i) \in d(A,C)$, entonces para cada i,
$\mathcal{D}(h_i f) = h_i \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(h_i) f$, es decir:
$\mathcal{D}(h_i) f = \mathcal{D}(h_i f) - h_i \mathcal{D}(f)$ y, por tanto,
$Hom_1(f,g)(x) = g x f = g [\sum_1^n f_i \mathcal{D}(h_i)] f =$
$= \sum_1^n g f_i (\mathcal{D}(h_i f) - h_i \mathcal{D}(f)) \in d(\bar{A},\bar{C})$.

"<u>ii)</u>" basta ver que $d(A,C) \subset \ker \nu\otimes\nu\mathcal{D}$.
si $x = \sum_1^n f_i \mathcal{D}(h_i) \in d(A,C)$, entonces
$\nu\otimes\nu\mathcal{D}(x) = \nu\otimes\nu\mathcal{D}(\Sigma f_i \mathcal{D}(h_i)) = \Sigma \nu\otimes\nu\mathcal{D}(f_i \mathcal{D}(h_i)) =$
$= -\Sigma \nu\otimes\nu(\mathcal{D}(f_i)\mathcal{D}(h_i)) = 0$.

"<u>iii)</u>" veamos que si $(f,g): (A,C) \longrightarrow (\bar{A},\bar{C})$ en $\mathcal{U}_0^{op}\times\mathcal{U}_0$, entonces conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_1/d(A,C) \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "Hom_1/d(f,g)"'] & Hom_1/d(-,C)\otimes Hom_1/d(A,-) \arrow[d, "Hom_1/d(-,g)\otimes Hom_1/d(f,-)"'] \\ Hom_1/d(\bar{A},\bar{C}) \arrow[r, "\mathcal{D}"] & Hom_1/d(-,\bar{C})\otimes Hom_1/d(\bar{A},-) \end{tikzcd} .$$

Para $\nu(x) \in Hom_1/d(A,C)$ tenemos:
$\mathcal{D}\, Hom_{1/d}(f,g)\nu(x) = \mathcal{D}\nu(gxf) = \nu\otimes\nu\mathcal{D}(gxf) =$
$= \nu\otimes\nu(g\mathcal{D}(xf) - \mathcal{D}(g)xf) = \nu\otimes\nu[g(x\mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(x)f) - \mathcal{D}(g)xf] =$
$= \nu\otimes\nu(g\mathcal{D}(x)f) + \nu\otimes\nu(gx\mathcal{D}(f) - \mathcal{D}(g)xf) =$

$$= \gamma\otimes\gamma\,(\mathrm{Hom}_1(-,g)\otimes \mathrm{Hom}_1(f,-))\,(\partial(x)) + 0 =$$
$$= \mathrm{Hom}_1/d\,(-,g)\otimes \mathrm{Hom}_1/d\,(f,-)\ \gamma\otimes\gamma\,\partial(x) =$$
$$= \mathrm{Hom}_1/d\,(-,g)\otimes \mathrm{Hom}_1/d\,(f,-)\ \partial\,\gamma(x).$$

"$\underline{iv)}$" Sea $x \in \mathrm{Hom}_1(A,C)$ y supongamos que $\partial(x) = \sum a_i\otimes b_i$, entonces:

$$0 = \partial^2(x) = \partial\left(\sum a_i\otimes b_i\right) = \sum \partial(a_i b_i) = \sum(a_i\partial(b_i) - \partial(a_i)b_i)$$
$$= \sum a_i\otimes\partial(b_i) - \sum\partial(a_i)\otimes b_i$$ y entonces
$$[(1\otimes\partial)\partial]_{(A,C)}(x) = (1\otimes\partial)_{(A,C)}\left(\sum a_i\otimes b_i\right) =$$
$$= \sum a_i\otimes\partial(b_i) = \sum\partial(a_i)\otimes b_i = [(\partial\otimes 1)\partial]_{(A,C)}(x)$$
y en consecuencia $(1\otimes\partial)\partial = (\partial\otimes 1)\partial$.

Para terminar, basta observar que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_1\otimes\mathrm{Hom}_1 \arrow[rr, "1\otimes\partial"] \arrow[dr, "\gamma\otimes\gamma"] & & \mathrm{Hom}_1\otimes\mathrm{Hom}_1\otimes\mathrm{Hom}_1 \arrow[d, "\gamma\otimes\gamma\otimes\gamma"] \\
& \mathrm{Hom}_1/d\otimes\mathrm{Hom}_1/d \arrow[r, "1\otimes\partial"] & \mathrm{Hom}_1/d\otimes\mathrm{Hom}_1/d\otimes\mathrm{Hom}_1/d \\
& \mathrm{Hom}_1/d \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{Hom}_1/d\otimes\mathrm{Hom}_1/d \arrow[u, "\partial\otimes 1"] \\
\mathrm{Hom}_1 \arrow[uuu, "\partial"] \arrow[ur, two heads, "\gamma"] \arrow[rr, "\partial"] & & \mathrm{Hom}_1\otimes\mathrm{Hom}_1 . \arrow[u, "\gamma\otimes\gamma"] \arrow[uuu, bend right, "\partial\otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

■

<u>5-2 LEMA.-</u> Sea $\mathcal{U}$ DGC semilibre con diferencial $\mathcal{D}$ y $\varphi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}^{(2)}$ un DGC-funtor. Recordemos que si a tiene grado 0, $\varphi(a)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(a) & 0\\ 0 & \varphi_{22}(a)\end{pmatrix}$ y $\varphi_{11},\varphi_{22}:\mathcal{U}_0\longrightarrow\mathcal{V}$ son k-funtores. Ademas, si $x:A\longrightarrow C$ tiene grado 1, $\varphi(x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varphi_{21}(x) & 0\end{pmatrix}$ y resulta $\varphi_{21}:\mathrm{Hom}_1(A,C)\longrightarrow\mathcal{V}(\varphi_{11}(A),\varphi_{22}(C))$ morfismo de grupos. Tenemos ademas:

i) existe un morfismo de grupos, que denotaremos tambien por φ_{21}, que hace conmutar:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_1(A,C) \arrow[r, "\varphi_{21}"] \arrow[d, "\nu"] & \mathcal{V}(\varphi_{11}(A),\varphi_{22}(C)) \\
\mathrm{Hom}_1/d\,(A,C) \arrow[ur, dashed, "\varphi_{21}"'] &
\end{tikzcd}$$

ii) $\mathrm{Hom}_1/d \xrightarrow{\varphi_{21}} {}^{\varphi_{22}}\mathcal{V}^{\varphi_{11}}$ es morfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos.

iii) si $\varphi':\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}^{(2)}$ es otro DGC-funtor tal que $\varphi'_{11}=\varphi_{22}$, entonces resulta conmutativo el siguiente diagrama de morfismos de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos ($(\varphi'\circ\varphi)_{21}$ definido como en 4-11):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_1/d \otimes_{\mathcal{U}_0} \mathrm{Hom}_1/d \arrow[r, "\varphi'_{21}\otimes\varphi_{21}"] & {}^{\varphi'_{22}}\mathcal{V}^{\varphi'_{11}} \otimes_{\mathcal{U}_0} {}^{\varphi_{22}}\mathcal{V}^{\varphi_{11}} \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathrm{Hom}_1/d \arrow[u, "\mathcal{D}"] & \\
\mathrm{Hom}_1 \arrow[u, "\nu"] \arrow[r, "(\varphi'\circ\varphi)_{21}"] & {}^{\varphi'_{22}}\mathcal{V}^{\varphi_{11}}
\end{tikzcd}$$

En particular, lo anterior muestra que $(\varphi^! \varphi)_{21}$ está bien definido (en 4-11).

<u>Demostración:</u> "i)" Sabemos que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Hom_0(A,C) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{V}_0^{(2)}(\varphi A, \varphi C) \\ \mathcal{D}\downarrow & & \downarrow \mathcal{D}=0 \\ Hom_1(A,C) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{V}_1^{(2)}(\varphi A, \varphi C) \end{array}$$

para cada $A, C \in |\mathcal{U}_0|$, es decir, para cada h con grado 0 se tiene que $\varphi_{21}(\mathcal{D}(h)) = 0$. Por otro lado, si consideramos gxf con g, f de grado 0 y x de grado 1, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{21}(gxf) & 0 \end{pmatrix} = \varphi(gxf) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(f) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(g) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(f) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(f) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{22}(g)\varphi_{21}(x)\varphi_{11}(f) & 0 \end{pmatrix}$$ y por tanto:

(*): $\varphi_{21}(gxf) = \varphi_{22}(g)\varphi_{21}(x)\varphi_{11}(f)$. De lo anterior deducimos que si $x = \sum f_i \mathcal{D}(h_i) \in d(A,C)$, entonces:

$\varphi_{21}(x) = \sum \varphi_{21}(f_i \mathcal{D}(h_i)) = \sum \varphi_{22}(f_i)\varphi_{21}(\mathcal{D}(h_i)) = 0$, y en consecuencia, $d(A,C) \subset \ker \varphi_{21}$.

"ii)" Sea $(f,g): (A,C) \longrightarrow (\bar{A}, \bar{C})$ en $\mathcal{U}_0^{op} \times \mathcal{U}_0$,

$$\begin{array}{ccc} Hom_1/d(A,C) & \xrightarrow{\varphi_{21}} & \mathcal{V}(\varphi_{11}(A), \varphi_{22}(C)) \\ \downarrow Hom_1/d(f,g) & & \downarrow \mathcal{V}(\varphi_{11}(f), \varphi_{22}(g)) \\ Hom_1/d(\bar{A},\bar{C}) & \xrightarrow{\varphi_{21}} & \mathcal{V}(\varphi_{11}(\bar{A}), \varphi_{22}(\bar{C})) \end{array}$$

resulta

conmutativo, ya que si $\gamma(x) \in \mathrm{Hom}_1/d\,(A,C)$ entonces:

$$\varphi_{21}\,\mathrm{Hom}_1/d\,(f,g)\gamma(x) = \varphi_{21}\,\gamma\,\mathrm{Hom}_1(f,g)(x) = \varphi_{21}\,(gxf) =$$
$$= \varphi_{22}(g)\,\varphi_{21}(x)\,\varphi_{11}(f) = \vartheta(\varphi_{11}(f), \varphi_{22}(g))\,\varphi_{21}(x) =$$
$$= \vartheta(\varphi_{11}(f), \varphi_{22}(g))\,\varphi_{21}\,\gamma(x).$$

"iii)" El diagrama conmuta puesto que si $A, C \in |\mathcal{U}_0|$, $x \in \mathrm{Hom}_1(A,C)$ y $\mathcal{D}(x) = \sum a_i b_i$, entonces

$$\pi\,\varphi'_{21} \otimes \varphi_{21}\,\mathcal{D}\gamma(x) = \pi\,\varphi'_{21} \otimes \varphi_{21}\,\gamma \otimes \gamma\,\mathcal{D}(x) =$$
$$= \pi\,\varphi'_{21} \otimes \varphi_{21}\,(\sum a_i b_i) = \pi \sum \varphi'_{21}(a_i)\,\varphi_{21}(b_i) =$$
$$= \sum \varphi'_{21}(a_i)\,\varphi_{21}(a_i) = (\varphi' \circ \varphi)_{21}(x). \quad \blacksquare$$

5-3 LEMA.- Sea $\mathcal{U}$ QDGC semilibre con diferencial $\mathcal{D}$, y sea para cada $A, C \in |\mathcal{U}_0|$, $\varepsilon : \widehat{\mathrm{Hom}}_1(A,C) \longrightarrow \mathcal{U}_0(A,C)$ tal que:
$\varepsilon(f d_x g) = fg$ si f, g tienen grado 0; y $\varepsilon(x) = 0$ si $x \in \mathrm{Hom}_1(A,C)$. Se tiene entonces:

i) existe un único morfismo de grupos, que denotamos con la misma letra ε, que hace conmutar

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{Hom}}_1(A,C) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{U}_0(A,C) \\
\widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d}\,(A,C) \arrow[ur, dashed, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

ii) $\mathcal{E} : \widehat{Hom}_1/\hat{d} \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0$ es epimorfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos.

iii) conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{Hom}_1/\hat{d} \underset{\mathcal{U}_0}{\otimes} \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[d, "\mathcal{E}\otimes 1"] & \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[l, "\hat{\mathcal{D}}"'] \arrow[r, "\hat{\mathcal{D}}"] \arrow[d, equal] & \widehat{Hom}_1/\hat{d} \underset{\mathcal{U}_0}{\otimes} \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[d, "1\otimes\mathcal{E}"'] \\
\mathcal{U}_0 \underset{\mathcal{U}_0}{\otimes} \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[r, "\cong", "\sigma"'] & \widehat{Hom}_1/\hat{d} & \widehat{Hom}_1/\hat{d} \underset{\mathcal{U}_0}{\otimes} \mathcal{U}_0 \arrow[l, "\cong"', "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>: "i)" si $x = \sum f_i \hat{\mathcal{D}}(h_i) \in \hat{d}(A,C)$,

$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(\sum f_i \hat{\mathcal{D}}(h_i)) = \mathcal{E}(\sum f_i [\mathcal{D}(h_i) + h_i d_A - (-1)^{grad h_i} d_{B_i} h_i]) =$

$= \sum \mathcal{E}(f_i \mathcal{D}(h_i)) + \mathcal{E}(h_i d_A) - \mathcal{E}(d_{B_i} h_i) = \sum 0 + h_i - h_i = 0$

de donde, $\hat{d}(A,C) \subset \ker \mathcal{E}$.

"ii)" Sean $(f,g) : (A,C) \to (\bar{A},\bar{C})$ en $\mathcal{U}_0^{op} \times \mathcal{U}_0$, veamos que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(A,C) \arrow[r, "\mathcal{E}"] \arrow[d, "\widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(f,g)"] & \mathcal{U}_0(A,C) \arrow[d, "\mathcal{U}_0(f,g)"] \\
\widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(\bar{A},\bar{C}) \arrow[r, "\mathcal{E}"] & \mathcal{U}_0(\bar{A},\bar{C})
\end{tikzcd}$$

basta verificarlo en los generadores donde es inmediato.

"iii)" veamos por ejemplo que el cuadrado de la izquierda conmuta (en los generadores):

Sea $x \in Hom_1(A,C)$ y supongamos $\mathcal{D}(x) = \sum a_i b_i$,

$\bar{\sigma}\, \mathcal{E}\otimes 1\, \hat{\mathcal{D}}\, \nu(x) = \bar{\sigma}\, \mathcal{E}\otimes 1\, \nu\otimes\nu\, \hat{\mathcal{D}}(x) =$

$= \bar{\sigma}(\mathcal{E}\nu \otimes \nu)[\mathcal{D}(x) + x d_A - (-1)^{grad x} d_C x] =$

$= \sigma (\mathcal{E}\otimes\mathcal{V})[\sum a_i b_i + x d_A + d_C x] =$

$= \sigma [\sum \mathcal{E}(a_i)\mathcal{V}(b_i) + \mathcal{E}(x)\mathcal{V}(d_A) + \mathcal{E}(d_c)\mathcal{V}(x)] =$

$= \sigma (0 + 0 + 1_c \mathcal{V}(x)) = \mathcal{V}(x)$

y si $x = g d_X f$ con g, f de grado 0,

$\sigma\, \mathcal{E}\otimes 1\, \hat{\partial}\, \mathcal{V}(x) = \sigma (\mathcal{E}\otimes\mathcal{V})[\hat{\partial}(g d_X f)] =$

$= \sigma(\mathcal{E}\otimes\mathcal{V})[g\hat{\partial}(d_X) f] = \sigma(\mathcal{E}\otimes\mathcal{V})[g(d_X^2 - h_X)f] =$

$= \sigma[g\mathcal{E}(d_X)\mathcal{V}(d_X)f - g\,\mathcal{E}\otimes\mathcal{V}(h_X)f] =$

$= \sigma[g\mathcal{V}(d_X)f - 0] = \mathcal{V}(g d_X f) = \mathcal{V}(x)$ ■

<u>5-4 TEOREMA.-</u> Si $\mathcal{U}$ es una QDGC semilibre, entonces $B(\mathcal{U}) = ({}_{\mathcal{U}_0}\widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{\mathscr{A}}\,\mathcal{U}_0, \hat{\partial}, \mathcal{E})$ es un BOCS. Ademas, si $\mathcal{V}$ es una k-categoría, se tiene que:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \cong \mathcal{R}(B(\mathcal{U}), \mathcal{V})$$

<u>Demostración:</u> Por 5-1 y 5-3, $B(\mathcal{U})$ es un BOCS. Sea $F: \mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}(B(\mathcal{U}),\mathcal{V})$ tal que si A es un objeto de $\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, entonces $F(A) = A$; y si $\varphi \in \bar{\mathcal{R}}(A,B)$, sea $F(\varphi) = \varphi_{21}: \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{\mathscr{A}} \to {}^B\mathcal{V}^A$. Hemos visto que $F(\varphi) \in \mathcal{R}(A,B)$.

<u>Afirmación 1.-</u> F es k-funtor.

<u>demostración:</u> Sea $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\varphi'} C$ en $\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. En vista de que, por 5-2, es conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widehat{Hom}_1/\hat{d} \otimes \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[r, "\varphi'_{21} \otimes \varphi_{21}"] & {}^{C}\mathcal{V}^{B} \otimes {}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[u, "\widehat{\mathcal{D}}"] \arrow[r, "(\varphi' \circ \varphi)_{21}"] & {}^{C}\mathcal{V}^{A} \end{tikzcd},$$

entonces $F(\varphi' \circ \varphi) = (\varphi' \circ \varphi)_{21} = \varphi'_{21} \circ \varphi_{21} = F(\varphi') \circ F(\varphi)$.

Sea $A : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{V}$ un k-funtor, sabemos que $1_A = \bar{A} : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$ es tal que:

$\bar{A}_{21}(\gamma(x)) = 0$ si x está en $\mathcal{U}$ y tiene grado 1, y $\bar{A}_{21}(\gamma(x)) = A(g) 1_{A(x)} A(f) = A(gf)$ si $x = g\, d_x f$ para algunos $x \in |\mathcal{U}_0|$ y g, f de grado 0; de donde, en cualquiera de los dos casos,

$$\bar{A}_{21}(\gamma(x)) = \hat{A}\varepsilon(\gamma(x))$$

y entonces $F(1_A) = \bar{A}_{21} = \hat{A}\varepsilon = 1_{FA}$ ■

Sea $F' : \mathcal{R}(B(\mathcal{U}), \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ tal que si A es un objeto de $\mathcal{R}(B(\mathcal{U}), \mathcal{V})$, $F'(A) = A$; y para $\eta \in \mathcal{R}(A, B)$, sea $F'(\eta) : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$ tal que si $a \in \mathcal{U}_0$, $F'(\eta)(a) = \begin{pmatrix} A(a) & 0 \\ 0 & B(a) \end{pmatrix}$, y si $x \in Hom_1(T, \bar{T})$, $F'(\eta)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F'(\eta)_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}$ donde: $F'(\eta)_{21} = [\widehat{Hom}_1 \xrightarrow{\gamma} \widehat{Hom}_1/\hat{d} \xrightarrow{\eta} {}^{B}\mathcal{V}^{A}]$.

<u>Afirmación 2.-</u> $F'(\eta) : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$ es DGC-funtor.
<u>demostración:</u> se tiene:

$$F'(\eta)(gf) = \begin{pmatrix} A(gf) & 0 \\ 0 & B(gf) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(g)A(f) & 0 \\ 0 & B(g)B(f) \end{pmatrix} = F'(\eta)(g) F'(\eta)(f),$$

y tambien:

$$F'(\eta)(gxf) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F'(\eta)_{21}(gxf) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B(g)F'(\eta)_{21}(x)A(f) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F'(\eta)_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(f) & 0 \\ 0 & B(f) \end{pmatrix} =$$

$= F'(\eta)(g)\, F'(\eta)(x)\, F'(\eta)(f)$ donde f, g tienen grado 0 y x tiene grado 1 en $\hat{\mathcal{U}}$. Por tanto, $F'(\eta)$ preserva composición y entonces ya es claro que es k-GC funtor.

Ademas, si grad $f = 0$, entonces $F'(\eta)(\hat{\mathcal{D}}(f)) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F'(\eta)_{21}\hat{\mathcal{D}}(f) & 0 \end{pmatrix} = 0$; por tanto

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{U}} & \xrightarrow{F'(\eta)} & \mathcal{V}^{(2)} \\ \mathcal{D}\downarrow & & \downarrow 0 \\ \hat{\mathcal{U}} & \xrightarrow{F'(\eta)} & \mathcal{V}^{(2)} \end{array}$$

conmuta, y $F'(\eta)$ es DGC-funtor. ■

<u>Afirmación 2.-</u> F' es k-funtor.

<u>demostración:</u> Sea $A \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{\eta'} C$ en $\mathcal{R}(\mathcal{B}(\mathcal{U}), \mathcal{V})$, queremos ver que los funtores $F'(\eta' \circ \eta)$, $F'(\eta') \circ F'(\eta)$ coinciden en morfismos de grado 0 y 1 de $\hat{\mathcal{U}}$:

si grad $(a) = 0$, $F'(\eta' \circ \eta)(a) = \begin{pmatrix} A(a) & 0 \\ 0 & C(a) \end{pmatrix} = [F'(\eta') \circ F'(\eta)](a)$.

si grad $(x) = 1$,

$$F'(\eta' \circ \eta)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F'(\eta' \circ \eta)_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [F'(\eta') \circ F'(\eta)]_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$= F'(\eta') \circ F'(\eta)(x)$ ya que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{Hom}_1/\hat{d} \otimes \widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[rr, "\eta'\otimes\eta"] & & {}^{C}\mathcal{V}^{B} \otimes {}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "\pi"] \\
\widehat{Hom}_1/\hat{d} \arrow[u, "\hat{\mathcal{D}}"] \arrow[rr, "\eta'\circ\eta"] & & {}^{C}\mathcal{V}^{A} \\
\widehat{Hom}_1 \arrow[u, "\nu"] \arrow[urr, "F'(\eta'\circ\eta)_{21}"'] & &
\end{tikzcd}$$

.

Hemos probado que $F'(\eta'\circ\eta) = F'(\eta')\circ F'(\eta)$.

Sea $A : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{V}$ un k-funtor, sabemos que $1_A = \hat{A}\mathcal{E} : \widehat{Hom}_1/\hat{d} \longrightarrow {}^{A}\mathcal{V}^{A}$ y queremos ver que $F'(\hat{A}\mathcal{E}) = \bar{A} : \hat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}^{(2)}$;

si $grad(a) = 0$, $F'(\hat{A}\mathcal{E})(a) = \begin{pmatrix} A(a) & 0 \\ 0 & A(a) \end{pmatrix} = \bar{A}(a)$

si $grad(x) = 1$, $F'(\hat{A}\mathcal{E})(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F'(\hat{A}\mathcal{E})_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} = \bar{A}(x)$

puesto que si $x \in Hom_1(T,\bar{T})$, $F'(\hat{A}\mathcal{E})_{21}(x) = \hat{A}\mathcal{E}\nu(x) = 0$ y si $x = g d_T f$, $F'(\hat{A}\mathcal{E})_{21}(x) = \hat{A}\mathcal{E}\nu(g d_T f) = \hat{A}(gf) =$
$= A(gf)$;

y entonces $F'(1_A) = 1_{F'(A)}$ ■

Es inmediato que F', F son inversos, uno del otro, y por tanto isomorfismos. ■

<u>5-5 LEMA</u>.- Sea $\mathcal{U}$ QDGC semilibre con diferencial $\mathcal{D}$, entonces:

i) $j = (Hom_1(A,C) \hookrightarrow \widehat{Hom}_1(A,C) \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(A,C))$

es monomorfismo de grupos para cada $A, C \in |\mathcal{U}_0|$.

ii) $\mathrm{Hom}_1 \xrightarrow{\mathfrak{I}} \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d}$ es monomorfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos.

iii) $(\mathrm{Hom}_1, \mathfrak{I}) = \mathrm{Ker}(\widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{U}_0)$

<u>Demostración:</u>

"<u>i)</u>" Bastará ver que $\mathrm{Hom}_1(A,C) \cap \hat{d}(A,C) = 0$.

Sea $x \in \mathrm{Hom}_1(A,C) \cap \hat{d}(A,C)$, entonces:

$$x = \sum_1^n f_i\, \hat{\mathcal{D}}(h_i) = \sum_1^n f_i\,[\mathcal{D}(h_i) + h_i d_A - d_{B_i} h_i] =$$
$$= \sum_1^n f_i\, \mathcal{D}(h_i) + \sum_1^n (f_i h_i d_A - f_i d_{B_i} h_i),$$

pero $\widehat{\mathrm{Hom}}_1(A,C) = \mathrm{Hom}_1(A,C) \oplus \left(\bigoplus_{X \in |\mathcal{U}_0|} \mathcal{T}_X(A,C) \right)$

y entonces:

$$x = \sum_1^n f_i\, \mathcal{D}(h_i) \quad y \quad \sum_1^n (f_i h_i d_A - f_i d_{B_i} h_i) = 0.$$

Podemos suponer que $\sum_1^n (f_i h_i d_A - f_i d_{B_i} h_i) = \sum_0^r x_j$

donde:

$$\begin{cases} x_0 = \sum_1^n f_i h_i d_A - \sum_{\mathcal{J}_0} f_i d_A h_i & \in \mathcal{T}_A(A,C) \\ x_1 = \sum_{\mathcal{J}_1} f_i d_{A_1} h_i & \in \mathcal{T}_{A_1}(A,C) \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ x_r = \sum_{\mathcal{J}_r} f_i d_{A_r} h_i & \in \mathcal{T}_{A_r}(A,C) \end{cases}$$

y $\{1, \dots, n\} = \mathcal{J}_0 \dot{\cup} \mathcal{J}_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} \mathcal{J}_r$;

(hemos tomado $\mathcal{J}_j$ tal que $B_i = A$ para cada

$i\in \mathcal{J}_0$; y $B_i = A_j$ para cada $i\in \mathcal{J}_j$ (si $j\neq 0$)).

Recordemos que, puesto que $\mathcal{U}$ es k-GC, la composición induce morfismos de k-módulos:

$$Hom_i(X,C)\otimes_k Hom_j(A,X) \xrightarrow{\psi} Hom_{i+j}(A,C)$$

y también tenemos morfismos:

$$\mathcal{U}_0(X,C)\otimes_k \mathcal{U}_0(A,X) \xrightarrow{1\otimes \mathcal{D}} \mathcal{U}_0(X,C)\otimes_k Hom_1(A,X)$$

ya que $\mathcal{D}$ es k-lineal.

se tiene: $0 = -x_0 + \sum_1^r x_j \in \bigoplus_{X\in|\mathcal{U}_0|} \mathcal{U}_0(X,C)\otimes_k \mathcal{U}_0(A,X)$

$$\begin{array}{c} \bigoplus_{X\in|\mathcal{U}_0|} \mathcal{U}_0(X,C)\otimes_k \mathcal{U}_0(A,X) \\ \Big\downarrow \oplus(1\otimes\mathcal{D}) \\ \bigoplus_{X\in|\mathcal{U}_0|} \mathcal{U}_0(X,C)\otimes_k Hom_1(A,X) \\ \Big\downarrow \psi \\ Hom_1(A,C) \end{array}$$

de donde:

$$0 = \psi(\oplus(1\otimes\mathcal{D})(-x_0 + \sum_1^r x_j)) =$$

$$= \psi\left(1\otimes\mathcal{D}(-x_0) + \sum_1^r 1\otimes\mathcal{D}(x_j)\right) =$$

$$= \psi\left(1\otimes\mathcal{D}\left(\sum_{\mathcal{J}_0} f_i\otimes h_i - \sum_1^n f_ih_i\otimes 1\right) + \sum_{j=1}^r 1\otimes\mathcal{D}\left(\sum_{\mathcal{J}_j} f_i\otimes h_i\right)\right) =$$

$$= \psi\left(\sum_{\mathcal{J}_0} f_i\otimes\mathcal{D}(h_i) - \sum_1^n f_ih_i\otimes\mathcal{D}(1) + \sum_{j=1}^r\sum_{\mathcal{J}_j} f_i\otimes\mathcal{D}(h_i)\right) =$$

$$= \sum_{\mathcal{J}_0} f_i\mathcal{D}(h_i) - 0 + \sum_{j=1}^r\sum_{\mathcal{J}_j} f_i\mathcal{D}(h_i) = \sum_1^n f_i\mathcal{D}(h_i) = x.$$

"<u>ii)</u>" Es claro, pues δ es composición de morfismos de Bimódulos, y cada $j_{(A,C)}$ es mono.

"<u>iii)</u>" Es claro que $\varepsilon j = 0$; y por otro lado, si $\bar{x} = x + \sum f_i d_{B_i} h_i \in \ker \varepsilon \subset \widehat{Hom}_1(A,C)$, se tiene que $\sum f_i h_i = \varepsilon(\bar{x}) = 0$. Por tanto, $\sum f_i d_{B_i} h_i = \sum f_i d_{B_i} h_i - \sum f_i h_i d_B = \sum f_i \partial(h_i) - \sum f_i \hat{\partial}(h_i)$ y entonces $\bar{x} \in Hom_1(A,C) \oplus \hat{d}(A,C)$, de donde $\gamma(\bar{x}) \in Im\, j$. Hemos probado que

$$(Hom, j) = Ker(\widehat{Hom}_1/\hat{d} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{U}_0) \;\blacksquare$$

<u>5-6 TEOREMA.</u>- Sea $\mathcal{C} = ({}_K\mathcal{C}_K, \psi, \varepsilon)$ un BOCS tal que su counidad ε es epimorfismo de Bimódulos. Entonces podemos asociar a $\mathcal{C}$ una QDGC semilibre $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ como sigue:

Consideremos la sucesión exacta de Bimódulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$$

Sean $\mathcal{U}_0 = K$, $Hom_1 = \mathcal{V}$, y $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ la k-GC semilibre generada por K y $\mathcal{V}$. Elijamos, para cada $A \in |\mathcal{U}_0|$, $w_A \in \mathcal{C}(A,A)$ tal que $\varepsilon(w_A) = 1_A$; y definamos ∂ en $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ tal que:

si $grad(A \xrightarrow{f} B) = 0$, $\partial(f) = \mathcal{C}(f,B)(w_B) - \mathcal{C}(A,f)(w_A)$

si $grad(B \xrightarrow{x} \bar{B}) = 1$, $\partial(x) = \psi(x) - w_{\bar{B}} \otimes x - x \otimes w_B$

y en el resto de los morfismos de $\mathcal{U}(\mathcal{C})$, ∂ se define con la ayuda de la fórmula de

Leibnitz. Entonces $\mathcal{D}$ es una diferencial de grado 1 en $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{D}^2$ es interna generada por la familia $\{h_A\}_{A\in|\mathcal{U}_0|}$, donde cada $h_A = w_A \otimes w_A - \psi(w_A)$.

<u>Demostración:</u> Introduzcamos una k-GC semilibre auxiliar $\hat{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$ tal que $\hat{\mathcal{U}}_0 = \mathcal{K}$ y $\widehat{Hom}_1 = \mathcal{C}$. Puesto que es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K} \longrightarrow 0,$$

tambien son exactas:

$$\begin{cases} (1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{V}(T,-) \hookrightarrow \mathcal{C}(T,-) \xrightarrow{\varepsilon} (T,-) \longrightarrow 0 \\ (2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{V}(-,T') \hookrightarrow \mathcal{C}(-,T) \xrightarrow{\varepsilon} (-,T') \longrightarrow 0 \end{cases}$$

pero $(T,-), (-,T')$ son proyectivas, y por tanto (1), (2) se dividen; y, en particular, son secciones $\mathcal{V}(T,-) \hookrightarrow \mathcal{C}(T,-)$ y $\mathcal{V}(-,T') \hookrightarrow \mathcal{C}(-,T')$. Por el Lema 4-6, $\mathcal{U}(\mathcal{C}) \subset \hat{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$.

Definamos $\hat{\mathcal{D}}$ en $\hat{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$ como antes: si $\operatorname{grad}(A \xrightarrow{f} B) = 0$, $\hat{\mathcal{D}}(f) = w_B f - f w_A$, si $\operatorname{grad}(B \xrightarrow{x} \bar{B}) = 1$, $\hat{\mathcal{D}}(x) = \psi(x) - w_B x - x w_B$, y $\hat{\mathcal{D}}$ se define en el resto de los morfismos de $\hat{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$ con la ayuda de la fórmula de Leibnitz.

Probaremos lo siguiente:

a) $\hat{\hat{\mathcal{D}}}$ es una diferencial de grado 1 en $\hat{\hat{\mathcal{U}}}(\mathcal{C})$.
b) $\hat{\hat{\mathcal{D}}}^2$ es interna generada por $\{h_A\}$.
c) cada $h_A \in \mathcal{V} \underset{\mathcal{U}_0}{\otimes} \mathcal{V}(A,A)$.
d) Podemos restringir $\hat{\hat{\mathcal{D}}}$ a $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ y su restricción coincide con $\mathcal{D}$; por tanto, $\mathcal{D}$ es diferencial de grado 1 en $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{D}^2$ es interna generada por $\{h_A\}$.

"$\underline{a)}$" Sea $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ en $\hat{\hat{\mathcal{U}}}(\mathcal{C})$ con f, g de grado 0,

$$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(fg) = w_C fg - fg w_A = f(w_B g - g w_A) + (w_C f - f w_B) g$$
$$= f\,\hat{\hat{\mathcal{D}}}(g) + \hat{\hat{\mathcal{D}}}(f) g.$$

Sea $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{x} B' \xrightarrow{f} C$ en $\hat{\hat{\mathcal{U}}}(\mathcal{C})$ con f, g de grado 0 y x de grado 1,

$$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(fxg) = \Psi(fxg) - w_C fxg - fxg w_A =$$
$$= fx w_B g - fxg w_A + f\Psi(x) g - f w_{B'} x g - fx w_B g - w_C f x g +$$
$$+ f w_{B'} x g =$$
$$= fx[w_B g - g w_A] + f[\Psi(x) - w_{B'} x - x w_B] g +$$
$$- [w_C f - f w_{B'}] x g =$$
$$= fx\,\hat{\hat{\mathcal{D}}}(g) + f\,\hat{\hat{\mathcal{D}}}(x) g - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(f) x g.$$

Con lo anterior basta pues $\hat{\hat{\mathcal{U}}}(\mathcal{C})$ es semilibre y $\hat{\hat{\mathcal{D}}}$ se ha definido en el resto de los morfismos de manera que la fórmula de Leibnitz se cumpla.

"$\underline{b)}$" Observemos primero que:

<u>Afirmación 1.-</u> Si $\mathrm{grad}(B \xrightarrow{x} B') = 1$,

$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(x)) - w_{B'}\psi(x) + \psi(x) w_B = 0$

<u>demostración:</u> sabemos que conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[d, "\psi\otimes 1"] \\ \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "1\otimes\psi"] & \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Supongamos que $\psi(x) = \sum a_i b_i$, entonces:

$\sum \psi(a_i) b_i = \psi\otimes 1 (\sum a_i b_i) = (\psi\otimes 1)\,\psi(x) =$

$= (1\otimes\psi)\,\psi(x) = 1\otimes\psi(\sum a_i b_i) = \sum a_i \psi(b_i)$

de donde:

$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(x)) = \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\sum a_i b_i) = \sum a_i \hat{\hat{\mathcal{D}}}(b_i) - \sum \hat{\hat{\mathcal{D}}}(a_i) b_i =$

$= \sum a_i [\psi(b_i) - w_{B_i} b_i - b_i w_B] +$

$- \sum [\psi(a_i) - w_{B'} a_i - a_i w_{B_i}] b_i =$

$= \sum a_i \psi(b_i) - \sum a_i b_i w_B - \sum \psi(a_i) b_i + \sum w_{B'} a_i b_i =$

$= -[\sum a_i b_i w_B - \sum w_{B'} a_i b_i] = -[\psi(x) w_B - w_{B'}\psi(x)]$. ∎

Si $\mathrm{grad}(A \xrightarrow{f} B) = 0$,

$\hat{\hat{\mathcal{D}}}^2(f) = \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_B f - f w_A) =$

$= w_B \hat{\hat{\mathcal{D}}}(f) + \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_B) f - f \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_A) + \hat{\hat{\mathcal{D}}}(f) w_A =$

$= w_B (w_B f - f w_A) + (\psi(w_B) - w_B^2 - w_B^2) f +$

$- f (\psi(w_A) - w_A^2 - w_A^2) + (w_B f - f w_A) w_A =$

$$= w_B^2 f - w_B f w_A + \psi(w_B) f - w_B^2 f - w_B^2 f +$$
$$- f\,\psi(w_A) + f w_A^2 + f w_A^2 + w_B f w_A - f w_A^2 =$$
$$= f w_A^2 - f\psi(w_A) - w_B^2 f + \psi(w_B) f = f h_A - h_B f =$$
$$= f h_A - (-1)^{2\,\mathrm{grad} f} h_B f = \begin{pmatrix}\text{diferencial interna}\\ \text{generada por } \{h_A\}\end{pmatrix}(f).$$

Si $\mathrm{grad}\,(B \xrightarrow{x} B') = 1$,

$$\hat{\hat{\mathcal{D}}}^2(x) = \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\,\psi(x) - w_{B'} x - x w_B) =$$
$$= \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(x)) - [w_{B'} \hat{\hat{\mathcal{D}}}(x) - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_{B'}) x] - [x \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_B) - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(x) w_B] =$$
$$= \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(x)) - w_{B'} \hat{\hat{\mathcal{D}}}(x) + \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_{B'}) x - x \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_B) + \hat{\hat{\mathcal{D}}}(x) w_B =$$
$$= \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(x)) - w_{B'}[\psi(x) - w_{B'} x - x w_B] + [\psi(w_{B'}) - w_{B'}^2 - w_{B'}^2] x +$$
$$- x[\psi(w_B) - w_B^2 - w_B^2] + [\psi(x) - w_{B'} x - x w_B] w_B =$$
$$= \left[\hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(x)) - w_{B'}\psi(x) + \psi(x) w_B\right] + x w_B^2 - x\psi(w_B) +$$
$$- w_{B'}^2 x + \psi(w_{B'}) x =$$
$$\underset{(1)}{=} x\,[w_B^2 - \psi(w_B)] - [w_{B'}^2 - \psi(w_{B'})] x =$$
$$= x h_B - h_{B'} x = x h_B - (-1)^{2\,\mathrm{grad}\, x} h_{B'} x =$$
$$= \begin{pmatrix}\text{diferencial interna}\\ \text{generada por } \{h_A\}\end{pmatrix}(x).$$

y tambien:

$$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(h_A) = \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_A^2 - \psi(w_A)) = w_A \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_A) - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(w_A) w_A - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(w_A)) =$$
$$= w_A[\psi(w_A) - w_A^2 - w_A^2] - [\psi(w_A) - w_A^2 - w_A^2] w_A - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(w_A)) =$$
$$= w_A\,\psi(w_A) - \psi(w_A) w_A - \hat{\hat{\mathcal{D}}}(\psi(w_A)) \underset{(1)}{=} 0 \quad .$$

Para probar c) y d), conviene tener:

Afirmación 2.- si $x \in \mathcal{C}(B,B')$ y $\psi(x)=\sum a_i b_i$, entonces:

$$\sum (a_i - w_{B'}\varepsilon(a_i))(b_i-\varepsilon(b_i)w_B) = \psi(x) - x w_B - w_{B'} x + w_{B'}\varepsilon(x) w_B$$

demostración:

Sabemos que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
K\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "\cong", "\sigma"'] & \mathcal{C} & \mathcal{C}\otimes K \arrow[l, "\cong"', "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

por tanto,

$$x = \sigma\, 1\otimes\varepsilon\, \psi(x) = \sigma\, 1\otimes\varepsilon\left(\sum a_i b_i\right) = \sum a_i \varepsilon(b_i)$$

y similarmente, $x = \sum \varepsilon(a_i) b_i$. Entonces:

$$\sum (a_i - w_{B'}\varepsilon(a_i))(b_i - \varepsilon(b_i) w_B) =$$
$$= \sum a_i (b_i - \varepsilon(b_i) w_B) - \sum w_{B'}\varepsilon(a_i)(b_i - \varepsilon(b_i) w_B) =$$
$$= \sum a_i b_i - \sum a_i \varepsilon(b_i) w_B - \sum w_{B'}\varepsilon(a_i) b_i + w_{B'}\varepsilon\left(\sum a_i \varepsilon(b_i)\right) w_B$$
$$= \psi(x) - x w_B - w_{B'} x + w_{B'}\varepsilon(x) w_B . \blacksquare$$

"c)" por (2), si $\psi(w_A) = \sum a_i b_i$,

$$h_A = w_A^2 - \psi(w_A) = -[\psi(w_A) - w_A^2 - w_A^2 + w_A 1_A w_A] =$$
$$= -[\psi(w_A) - w_A^2 - w_A^2 + w_A \varepsilon(w_A) w_A] =$$
$$= -\sum (a_i - w_A\varepsilon(a_i))(b_i - \varepsilon(b_i) w_A) \in \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}(A,A).$$

"d)" Si $x \in \mathcal{V}(B,B')$, entonces $\varepsilon(x)=0$ y por tanto, suponiendo que $\psi(x) = \sum a_i b_i$ y usando nuevamente (2),

$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(x) = \psi(x) - x w_B - w_{B'} x + w_{B'} \varepsilon(x) w_B =$

$= \sum (a_i - w_{B'} \varepsilon(a_i))(b_i - \varepsilon(b_i) w_B) \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}(B,B')$.

Por otro lado, para $f: A \longrightarrow B$ en $\mathcal{U}_0$,

$\varepsilon(\hat{\hat{\mathcal{D}}}(f)) = \varepsilon(w_B f - f w_A) = f - f = 0$ y entonces,

$\hat{\hat{\mathcal{D}}}(f) \in \mathcal{V}(A,B)$.

Hemos probado que podemos restringir $\hat{\hat{\mathcal{D}}}$ a $\mathcal{U}(\mathcal{C})$, y es claro que su restricción es $\mathcal{D}$. ∎

<u>5-7 PROPOSICION.</u>- Sean $\mathcal{U}$ QDGC semilibre, $\nu: \mathrm{Hom}_1 \longrightarrow \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d}$ la proyección natural y $\varepsilon: \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \longrightarrow \mathcal{U}_0$ la counidad de $B(\mathcal{U})$ (por tanto $\varepsilon(\nu(d_A)) = 1_A$ para $A \in |\mathcal{U}_0|$). Entonces, eligiendo $w_A = \nu(d_A)$ para cada $A \in |\mathcal{U}_0|$, hay un isomorfismo de QDGC:

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{U}(B(\mathcal{U})).$$

<u>Demostración.</u>- Sea $\mathcal{U}' = \mathcal{U}(B(\mathcal{U}))$, por tanto: $\mathcal{U}_0' = \mathcal{U}_0$ y $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_1' \hookrightarrow \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \longrightarrow \mathcal{U}_0 \longrightarrow 0$ es exacta. Por el Lema 5-5, es claro que:

$\mathrm{Hom}_1 \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_1' \subset \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d}$ es isomorfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos y entonces induce un k-GC isomorfismo $\varphi: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}'$.

Veamos que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U}' \\ \mathcal{D}\downarrow & & \downarrow\mathcal{D}' \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U}' \end{array}$$

, para lo cual basta ver que $\varphi\mathcal{D} = \mathcal{D}'\varphi$ se cumple en morfismos de grado 0 y 1 de $\mathcal{U}$,

Si $\operatorname{grad}(A \xrightarrow{f} B) = 0$,

$$\mathcal{D}'\varphi(f) = \mathcal{D}'(f) = w_B f - f w_A = \gamma(d_B)f - f\gamma(d_A) =$$
$$= j(\hat{\mathcal{D}}(f) - f d_A + d_B f) = j(\mathcal{D}(f)) = \varphi\mathcal{D}(f).$$

Si $\operatorname{grad}(B \xrightarrow{x} B') = 1$,

$$\mathcal{D}'\varphi(x) = \mathcal{D}'j(x) = \hat{\mathcal{D}}j(x) - w_{B'}j(x) - j(x)w_B =$$
$$= \gamma\otimes\gamma\,\hat{\mathcal{D}}(x) - \gamma(d_{B'})\gamma(x) - \gamma(x)\gamma(d_B) =$$
$$= \varphi[\hat{\mathcal{D}}(x) - d_{B'}x - x d_B] = \varphi\mathcal{D}(x) \quad \blacksquare$$

<u>5-8 PROPOSICION.-</u> Sea $\mathcal{C} = ({}_K\mathcal{C}_K, \psi, \bar{E})$ un BOCS con counidad $\bar{E}$ epimorfismo. Entonces existe un isomorfismo de BOCS:

$$\mathcal{C} \cong B(\mathcal{U}(\mathcal{C}))$$

<u>Demostración:</u> Tenemos la sucesion exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_1 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\bar{E}} \mathcal{U}_0 = K \longrightarrow 0\,;\quad \mathcal{U}(\mathcal{C})$$

dada por $\mathcal{U}_0$, Hom_1, una elección de una familia de morfismos de grado 1 : $\{w_A\}_{A\in|\mathcal{U}_0|}$ tal que $\bar{E}(w_A) = 1_A$, y con diferencial $\mathcal{D}$. Tambien tenemos $\widehat{\mathcal{U}(\mathcal{C})}$ dada por $\mathcal{U}_0$, $\widehat{\mathrm{Hom}_1}$

y $\hat{\mathcal{D}}$; donde hemos introducido una nueva familia de morfismos $\{d_A\}_{A\in|\mathcal{U}_0|}$ de grado 1.

<u>Afirmación 1.-</u> Si $y \in \widehat{Hom}_1/\hat{d}(T,T')$, entonces existen $x\in Hom_1(T,T')$ y $f\in \mathcal{U}_0(T,T')$ únicos tales que $y = \gamma(x+fd_T)$.

<u>demostración:</u> como $\varepsilon(y-\varepsilon(y)d_T)=0$, $y-\varepsilon(y)d_T =: x \in \ker\varepsilon = Hom_1(T,T')$ y por tanto: $y = x+\varepsilon(y)d_T$. Si $y = x'+gd_T$ con $x'\in Hom_1(T,T')$ y $g\in\mathcal{U}_0(T,T')$, tenemos que:
$\varepsilon(y) = \varepsilon(x')+g\varepsilon(d_T)=g$; y entonces también $x=x'$ ■

definamos $\theta : \widehat{Hom}_1/\hat{d} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada $T,T'\in|\mathcal{U}_0|$, $\theta : \widehat{Hom}_1/\hat{d}(T,T') \longrightarrow \mathcal{C}(T,T')$ está dado por: $\theta(\gamma(x+fd_T)) = x+\mathcal{C}(T,f)(w_T)$.

<u>Afirmación 2.-</u> θ es morfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos.

<u>demostración:</u> Es claro que cada $\theta_{(T,T')}$ es morfismo de grupos. Observemos que si $grad(T'\xrightarrow{h}T)=0=grad(T\xrightarrow{h'}T'')$, entonces se cumple la fórmula (*): $\gamma(h'd_Th)=\gamma(h'\mathcal{D}(h)+h'hd_{T'})$ pues $\hat{\mathcal{D}}(h)=\mathcal{D}(h)+hd_{T'}-d_Th$ y por tanto, $-h'\hat{\mathcal{D}}(h)=-h'\mathcal{D}(h)-h'hd_{T'}+h'd_Th \in \hat{d}(T',T'')$.

Sean $(f,g):(T,T')\longrightarrow(\bar{T},\bar{T}')$ en $\mathcal{U}_0^{op}\times\mathcal{U}_0$, queremos

ver que conmuta:
$$\begin{array}{ccc} \widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(T,T') & \xrightarrow{\theta} & \mathscr{C}(T,T') \\ \downarrow \widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(f,g) & & \downarrow \mathscr{C}(f,g) \\ \widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(\overline{T},\overline{T}') & \xrightarrow{\theta} & \mathscr{C}(\overline{T},\overline{T}') \end{array}.$$

Sea $\nu(x+hd_T) \in \widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(T,T')$, entonces:

$$\theta\,\widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(f,g)(\nu(x+hd_T)) = \theta\,\nu\,(gxf+ghd_Tf) =$$
$$= \theta\nu(gxf) + \theta\nu(ghd_Tf) =$$
$$\overset{(*)}{=} gxf + \theta\nu[gh\mathscr{D}(f) + ghf\,d_{\overline{T}}] =$$
$$= gxf + gh\mathscr{D}(f) + \mathscr{C}(\overline{T},ghf)(w_{\overline{T}}) =$$
$$= Hom_1(f,g)(x) + Hom_1(\overline{T},gh)(\mathscr{D}(f)) + \mathscr{C}(\overline{T},gh)\mathscr{C}(\overline{T},f)(w_T) =$$
$$= \mathscr{C}(f,g)(x) + \mathscr{C}(\overline{T},gh)(\mathscr{D}(f)) + \mathscr{C}(\overline{T},gh)\,\mathscr{C}(\overline{T},f)(w_T) =$$
$$= \mathscr{C}(f,g)(x) + \mathscr{C}(\overline{T},gh)\,(\mathscr{D}(f) + \mathscr{C}(\overline{T},f)(w_T)) =$$
$$= \mathscr{C}(f,g)(x) + \mathscr{C}(\overline{T},gh)\,\mathscr{C}(f,T)(w_T) =$$
$$= \mathscr{C}(f,g)(x) + \mathscr{C}(f,g)\,\mathscr{C}(T,h)(w_T) =$$
$$= \mathscr{C}(f,g)(x + \mathscr{C}(T,h)(w_T)) = \mathscr{C}(f,g)\,\theta(\nu(x+hd_T)) \qquad \blacksquare$$

Tambien se tiene que si $y \in \mathscr{C}(T,T')$, entonces existen $x \in Hom_1(T,T')$ y $h \in \mathcal{U}_0(T,T')$ únicos tales que $y = x + \mathscr{C}(T,h)(w_T)$; y entonces, cada $\theta: \widehat{Hom}_1/\hat{d}\,(T,T') \longrightarrow \mathscr{C}(T,T')$ resulta biyectiva, y en consecuencia, θ es isomorfismo de $\mathcal{U}_0$-Bimódulos.

<u>Afirmación 3.-</u> θ es morfismo de BOCS.

<u>demostración:</u> Veamos primero que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\bar{\mathcal{E}}"] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, equal] \\
\widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\mathcal{E}"] & \mathcal{U}_0
\end{tikzcd}$$

. Sea $\mathcal{Y}(x+hd_T) \in \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d}\,(T,T')$, entonces:

$$\mathcal{E}\,\mathcal{Y}(x+hd_T) = h = \mathcal{U}_0(T,h)(1_T) = \mathcal{U}_0(T,h)\,\bar{\mathcal{E}}(w_T) =$$
$$= 0 + \bar{\mathcal{E}}\,\mathcal{C}(T,h)(w_T) = \bar{\mathcal{E}}(x+\mathcal{C}(T,h)(w_T)) =$$
$$= \bar{\mathcal{E}}\,\theta\,\mathcal{Y}(x+hd_T).$$

Para verificar que también conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \otimes \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \arrow[d, "\theta\otimes\theta"'] & \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d} \arrow[l, "\hat{\mathcal{D}}"'] \arrow[d, "\theta"] \\
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} & \mathcal{C} \arrow[l, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

tomemos $\mathcal{Y}(x+hd_T) \in \widehat{\mathrm{Hom}}_1/\hat{d}\,(T,T')$, entonces:

$$\theta\otimes\theta\,\hat{\mathcal{D}}\,\mathcal{Y}(x+hd_T) = \theta\otimes\theta\;\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}\;\mathcal{D}(x+hd_T) =$$
$$= \theta\otimes\theta\;\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}\,(\mathcal{D}(x)+xd_T+d_{T'}x+hd_T^2-hh_T) =$$
$$= \theta\otimes\theta\;\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}\,(\mathcal{D}(x)-hh_T)+\theta\otimes\theta\;\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}\,(xd_T+d_{T'}x+hd_Td_T) =$$
$$= \mathcal{D}(x)-hh_T \quad + \quad " \quad =$$
$$= \psi(x)-x\otimes w_T-w_{T'}\otimes x-h(w_T\otimes w_T-\psi(w_T)) + \quad " \quad =$$
$$= \psi(x)-x\otimes w_T-w_{T'}\otimes x-\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}(T,h)(w_T\otimes w_T) + \quad " \quad +$$
$$+\ \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}(T,h)(\psi(w_T)) =$$
$$= \psi(x)+\psi(\mathcal{C}(T,h)(w_T))-x\otimes w_T-w_{T'}\otimes x + \quad " \quad +$$
$$-\ \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}(T,h)(w_T\otimes w_T) =$$
$$= \psi(x+\mathcal{C}(T,h)(w_T))+0 = \psi\,\theta\,\mathcal{Y}(x+hd_T) \quad \blacksquare$$

<u>5-9 COROLARIO.</u>- Si $\mathscr{C}$ es un BOCS con counidad epi y $\mathcal{V}$ es una k-categoría, entonces:

$$\begin{array}{c} \mathcal{R}(B(\mathcal{U}(\mathscr{C})), \mathcal{V}) \cong \mathcal{R}(\mathscr{C}, \mathcal{V}) \\ \cong \\ \mathcal{R}(\mathcal{U}(\mathscr{C}), \mathcal{V}) \end{array}$$

de donde, tambien se tiene:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}(B(\mathcal{U})), \mathcal{V}) \cong \mathcal{R}(B(\mathcal{U}), \mathcal{V}) \cong \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$$

(sin importar la elección de la familia $\{w_A\}$ que se considere.)

§ 6.– Operaciones sobre BOCS.

En esta sección, supondremos que $\mathcal{V}$ es una k-categoría tal que cada $\mathcal{V}$-morfismo $T \xrightarrow{a} T'$ tiene un <u>pseudoinverso</u> a^*, es decir que en $\mathcal{V}$ hay otro morfismo $T' \xrightarrow{a^*} T$ tal que $aa^*a=a$ y $a^*aa^*=a^*$; por ejemplo, la categoría de todos los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo k.

<u>6-1 CONSTRUCCION DE $\mathcal{K}(a^*)$</u>.– Dada una k-categoría $\mathcal{K}$ y un morfismo $a: T \longrightarrow T'$ en $\mathcal{K}$, construiremos otra k-categoría $\mathcal{K}(a^*)$ con los mismos objetos que $\mathcal{K}$; "agregamos un nuevo morfismo $a^*: T' \longrightarrow T$, generamos libremente una categoría $\mathcal{K}\langle a^* \rangle$ con la ayuda de $\mathcal{K}$ y a^*, y por medio de un cociente, haciendo valer las relaciones $a^*aa^*=a^*$ y $aa^*a=a$, obtenemos $\mathcal{K}(a^*)$". Mas precisamente:

Sea $|\mathcal{K}\langle a^* \rangle| = \mathcal{K}$. Para $T_1, T_2 \in |\mathcal{K}|$, sea $S_0(T_1,T_2) = \mathcal{K}(T_1,T_2)$, por tanto tenemos:

$$\begin{array}{ccc} & S_0(T_1,T_2) & \\ \mathcal{K}(T_2,T_2) & & \mathcal{K}(T_1,T_1) \end{array}$$

. Supongamos

que hemos definido $\mathcal{S}_0(T_1,T_2),\ldots,\mathcal{S}_{n-1}(T_1,T_2)$ para cada $T_1,T_2\in|\mathcal{K}|$ de tal forma que cada $\mathcal{S}_i(T_1,T_2)$ es $\mathcal{K}(T_2,T_2)$-$\mathcal{K}(T_1,T_1)$ bimódulo, y definamos:

$$\mathcal{S}_n(T_1,T_2)=[\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}}\mathcal{S}_i(T,T_2)]\underset{\mathcal{K}(T,T)}{\otimes}[\mathcal{K}(T,T)\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}(T',T')]\underset{\mathcal{K}(T',T')}{\otimes}[\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}}\mathcal{S}_i(T_1,T')]$$
$$\cong[\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}}\mathcal{S}_i(T,T_2)]\underset{k}{\otimes}[\overset{n-1}{\underset{0}{\oplus}}\mathcal{S}(T',T_1)]$$

por tanto, cada $\mathcal{S}_n(T_1,T_2)$ es $\mathcal{K}(T_2,T_2)$-$\mathcal{K}(T_1,T_1)$ bimódulo, y puesto que $\otimes$ preserva secciones, $\mathcal{S}_{n-1}(T_1,T_2)$ está "contenido" en $\mathcal{S}_n(T_1,T_2)$ si $n>1$.

Definamos ahora,

$$\mathcal{S}(T_1,T_2)=\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}}\mathcal{S}_n(T_1,T_2)\quad(=\varinjlim\mathcal{S}_n(T_1,T_2)).$$

[<u>Notación</u>: $\alpha^*=1_T\otimes 1_{T'}$ en $\mathcal{K}(T,T)\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}(T',T')$; $g\alpha^*=g\otimes\alpha^*\otimes 1_{T'}$ en $\mathcal{S}_n(T',T_2)$; $\alpha^*f=1_T\otimes\alpha^*\otimes f$ en $\mathcal{S}_n(T_1,T)$; y si $n>0$, $s'\alpha^*s=s'\otimes\alpha^*\otimes s$ en $\mathcal{S}_n(T_1,T_2)$.]

Definiendo $\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle(T_1,T_2)=\mathcal{K}(T_1,T_2)\oplus\mathcal{S}(T_1,T_2)$ y la composición:

$$\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle(T_2,T_3)\times\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle(T_1,T_2)\longrightarrow\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle(T_1,T_3)$$
$$(f'+s',\ f+s)\longmapsto f'f+(f's+s'f+s's)$$

Obtenemos una k-categoría $\mathcal{K}\langle a^*\rangle$.

Consideremos, ahora, el ideal I de $\mathcal{K}\langle a^*\rangle$ generado por $\{a^*aa^*-a^*,\ aa^*a-a\}$, es decir tal que si $T_1, T_2 \in |\mathcal{K}|$,

$$I(T_1,T_2)=\left\{\sum_1^t [g_i(a^*aa^*-a^*)f_i+g_i'(aa^*a-a)f_i'] \;\middle/\; \begin{tikzcd}[row sep=small] & T \arrow[dr, "g_i"] & \\ T_1 \arrow[ur, "f_i'"] \arrow[dr, "f_i"'] & & T_2 \\ & T' \arrow[ur, "g_i'"'] & \end{tikzcd} \text{ en } \mathcal{K}\langle a^*\rangle \text{ y } t\in\mathbb{N}\right\}$$

y definamos:

$$\mathcal{K}(a^*)=\mathcal{K}\langle a^*\rangle/I \quad , \quad \begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, hook] \arrow[rr, hook, bend right, "i"'] & \mathcal{K}\langle a^*\rangle \arrow[r] & \mathcal{K}(a^*). \end{tikzcd}$$

<u>6-2 PROPOSICION</u>.- Cada k-funtor $A:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{V}$ se extiende a otro k-funtor $\bar{A}:\mathcal{K}(a^*)\longrightarrow\mathcal{V}$, es decir, tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "A"'] & \mathcal{K}(a^*) \arrow[d, dashed, "\bar{A}"] \\ & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

(y por tanto, son morfismos de Bimódulos $\bar{A}:\mathcal{K}(a^*)\longrightarrow {}_{\bar{A}}\mathcal{V}^{A}$, $\bar{A}:\mathcal{K}(a^*)\longrightarrow {}_{A}\mathcal{V}^{\bar{A}}$).

<u>Demostración</u>: Elijamos $\bar{A}(a^*):A(T')\longrightarrow A(T)$ en $\mathcal{V}$ tal que $\bar{A}(a^*)$ es un pseudoinverso de $A(a)$.
Para $T_1,T_2\in|\mathcal{K}|$, sea A_1 la siguiente composición:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_1(T_1,T_2)\cong\mathcal{K}(T,T_2)\otimes_k\mathcal{K}(T_1,T') \arrow[r, "A\otimes_k A"'] & \mathcal{V}(AT,AT_2)\otimes_k\mathcal{V}(AT_1,AT') \arrow[d, "\circ"] \\ & \mathcal{V}(AT_1,AT_2) \end{tikzcd}$$

donde τ está dado por la fórmula:

$$\tau(g\otimes f) = g\,\bar{A}(\alpha^*)f\ ,$$

por tanto A_1 es k-lineal. Supongamos que hemos construido $A_1,\cdots,A_{n-1}$ k-morfismos de $\mathcal{S}_i(T_1,T_2)$ en $\mathcal{V}(AT_1,AT_2)$ respectivamente, para cada $T_1,T_2\in|\mathcal{K}|$, y tales que cada $A_i|_{\mathcal{S}_{i-1}(T_1,T_2)}=A_{i-1}$.

Definamos:

$$A_n=\Big(\mathcal{S}_n(T_1,T_2)\cong\Big[\bigoplus_0^{n-1}\mathcal{S}_i(T,T_2)\Big]\underset{k}{\otimes}\Big[\bigoplus_0^{n-1}\mathcal{S}_i(T',T_1)\Big] \xrightarrow{(\Sigma A_i)\otimes(\Sigma A_i)} \mathcal{V}(AT,AT_2)\underset{k}{\otimes}\mathcal{V}(AT',AT_1)\xrightarrow{\ \tau\ }\mathcal{V}(AT_1,AT_2)\Big),$$

entonces A_n es k-lineal y $A_n|_{\mathcal{S}_{n-1}(T_1,T_2)}=A_{n-1}$.

Tomemos $A_\infty=\varinjlim A_i : \mathcal{S}(T_1,T_2)\longrightarrow\mathcal{V}(T_1,T_2)$.

Sea $\bar{A}:\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle\longrightarrow\mathcal{V}$ tal que si $T_1\in|\mathcal{K}|$, $\bar{A}(T_1)=A(T_1)$ y la regla de asociación en morfismos está dada por:

$$\bar{A}=\Big(\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle(T_1,T_2)=\mathcal{K}(T_1,T_2)\oplus\mathcal{S}(T_1,T_2)\longrightarrow\mathcal{V}(AT_1,AT_2)\Big)$$
$$f+s\longmapsto A(f)+A_\infty(s).$$

Es fácil ver que $\bar{A}$ es funtor y, por la forma en que se ha elejido $\bar{A}(\alpha^*)$, se tiene que $\bar{A}(I)=0$ y entonces existe un único funtor, que denotamos tambien por $\bar{A}$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{K}\langle\alpha^*\rangle & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathcal{V}\\ \downarrow & \nearrow_{\bar{A}} & \\ \mathcal{K}(\alpha^*) & & \end{array}$$ y portanto, $$\begin{array}{ccc}\mathcal{K} & \hookrightarrow & \mathcal{K}(\alpha^*)\\ {\scriptstyle A}\downarrow & \swarrow_{\bar{A}} & \\ \mathcal{V} & & \end{array}$$

tambien conmuta. ■

<u>6-3 PROPOSICION.</u>- Sea ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ un BOCS con counidad $\varepsilon: \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ y comultiplicación $\psi: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}$, entonces:

$\mathcal{C}(\alpha^*) = \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*)$ es un BOCS sobre $\mathcal{K}(\alpha^*)$

con counidad:

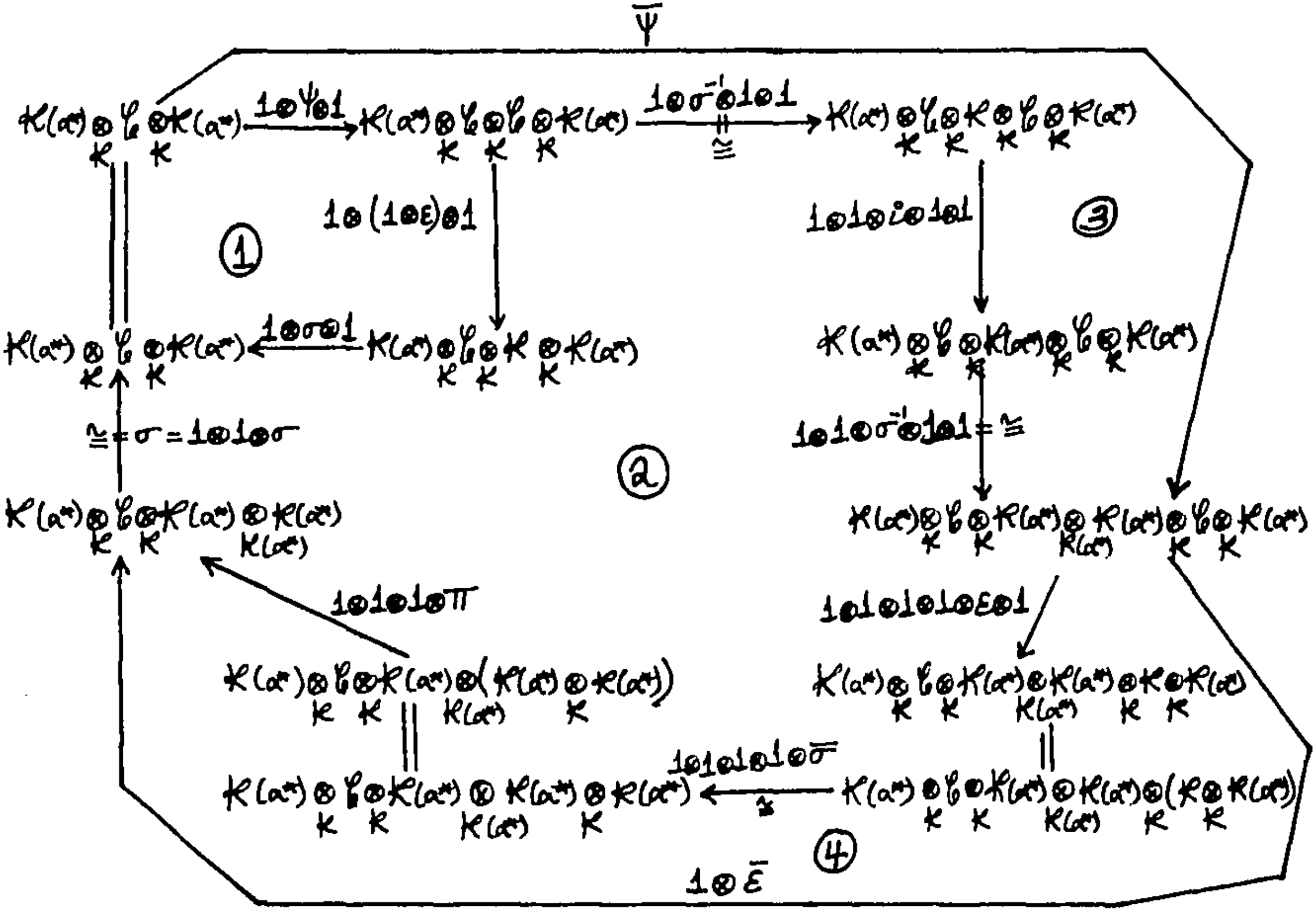
$$\bar{\varepsilon} = \Big(\mathcal{C}(\alpha^*) \xrightarrow{1\otimes\varepsilon\otimes 1} \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*) \cong \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \overset{i}{}\mathcal{K}(\alpha^*) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{K}(\alpha^*)\Big)$$

y comultiplicación:

$$\begin{aligned}\bar{\psi} = \Big(\mathcal{C}(\alpha^*) &\xrightarrow{1\otimes\psi\otimes 1} \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*) \cong \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*)\\ &\qquad\qquad \downarrow 1\otimes i\otimes 1\\ \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*) &\underset{\mathcal{K}(\alpha^*)}{\otimes} \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*) \cong \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*) \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{C} \overset{i}{\underset{\mathcal{K}}{\otimes}} \mathcal{K}(\alpha^*)\\ &\| \\ \mathcal{C}(\alpha^*) &\underset{\mathcal{K}(\alpha^*)}{\otimes} \mathcal{C}(\alpha^*)\Big)\end{aligned}$$

(A menudo olvidaremos el superíndice i, pues es claro por el contexto).

<u>Demostración:</u> Para ver que $\bar{\varepsilon}$ es counidad, consideremos el siguiente diagrama:



$\overline{\Psi}$
$1\otimes\psi\otimes 1$
$1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1$
$1\otimes(1\otimes\varepsilon)\otimes 1$
$1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1$
$1\otimes\sigma\otimes 1$
$\cong = \sigma = 1\otimes 1\otimes\sigma$
$1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1 = \cong$
$1\otimes 1\otimes 1\otimes\pi$
$1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes\varepsilon\otimes 1$
$1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes\overline{\sigma}$
$1\otimes\overline{\varepsilon}$
1
2
3
4

91

En el diagrama anterior conmutan ③ y ④ por definición de $\bar{\Psi}$ y $\bar{E}$ respectivamente, y conmuta ① puesto que ε es counidad. Veamos que tambien ② conmuta:

Sean $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}(\alpha^*) \overset{\alpha}{\times} \mathcal{K}(\alpha^*)|$, $K_1, K_2, K_3 \in |\mathcal{K}|$, y $(\alpha, c, c', \beta) \in \mathcal{K}(\alpha^*)(K_1, K) \times \mathcal{C}(K_2, K_1) \times \mathcal{C}(K_3, K_2) \times \mathcal{K}(\alpha^*)(\bar{K}, K_3)$, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
\alpha\otimes c\otimes c'\otimes\beta \arrow[r, mapsto, "1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] \arrow[d, mapsto, "1\otimes(1\otimes E)\otimes 1"] & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes\beta \arrow[r, mapsto, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"] & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] \\
\alpha\otimes c\otimes E(c')\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes\sigma\otimes 1"] & & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes c'\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes E\otimes 1"'] \\
\alpha\otimes \mathcal{C}(E(c'),1)(c)\otimes\beta \arrow[d, equal] & & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes E(c')\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes\sigma"'] \\
\alpha\otimes c\otimes \mathcal{K}(\alpha^*)(1,E(c'))(\beta) \arrow[d, equal] & & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes \mathcal{K}(\alpha^*)(1,E(c'))(\beta) \arrow[dl, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes\pi"] \\
\alpha\otimes c\otimes \mathcal{K}(\alpha^*)(\mathcal{K}(\alpha^*)(1,E(c'))(\beta),1)(1) & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes \mathcal{K}(\alpha^*)(1,E(c'))(\beta) \arrow[l, mapsto, "1\otimes 1\otimes\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

Hemos probado que $\sigma(1\otimes E)\bar{\Psi} = 1$. Similarmente se tiene que $\sigma(E\otimes 1)\bar{\Psi} = 1$ y portanto $\bar{E}$ es counidad.

Para ver que $\bar{\Psi}$ es comultiplicación, consideremos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[dr, "\cong\, =\, 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] & & & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[lll, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes \psi\otimes 1"'] \arrow[dddlll, bend right=40, "1\otimes \bar{\psi}"'] \\
2 & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[d, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"] & & \\
 & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[dl, "\cong\, =\, 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[uur, "1\otimes 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1\, =\, \cong"] & \\
K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) & & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[u, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"] & 3 \\
 & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[ul, "\cong\, =\, 1\otimes 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] & 4 & \\
 & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[u, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"] & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[dl, "1\otimes 1\otimes \psi\otimes 1"'] \arrow[uu, "\cong\, =\, 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] & \\
5 & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[u, "1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\otimes \sigma^{-1}\otimes 1\, =\, \cong"] & 1 & \\
K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \otimes_{K(\alpha^*)} K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[uuuu, "\bar{\psi}\otimes 1"] & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[u, "1\otimes \psi\otimes 1\otimes 1"'] & & K(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K K(\alpha^*) \arrow[ll, "1\otimes \psi\otimes 1"'] \arrow[uul, "1\otimes \psi\otimes 1"] \arrow[uuuuuuu, "\bar{\psi}"'] \arrow[lll, bend left=30, "\bar{\psi}"]
\end{tikzcd}
$$

93

En el diagrama anterior conmutan ② y ③ por definición de $\overline{\Psi}$, y conmuta ① puesto que ψ es comultiplicación. Veamos que ④ conmuta (la conmutatividad de ⑤ se sigue de la de los diagramas análogos a ②, ③ y ④).

Sean $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}(a^*)^{op} \times \mathcal{K}(a^*)|$, $K_1, K_2, K_3 \in |\mathcal{K}|$, y $(\alpha, c, c', \beta) \in \mathcal{K}(a^*)(K_1,K) \times \mathcal{C}(K_2,K_1) \times \mathcal{C}(K_3,K_2) \times \mathcal{K}(a^*)(\bar{K},K_3)$; Supongamos que $\psi(c') = \sum_i a_i \otimes b_i$, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
\alpha\otimes c\otimes c'\otimes\beta \arrow[r, mapsto, "1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes\psi\otimes 1"] & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"] \\
\alpha\otimes c\otimes(\sum a_i\otimes b_i)\otimes\beta \arrow[d, equal] & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] \\
\sum \alpha\otimes c\otimes a_i\otimes b_i\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1"] & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes c'\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes\psi\otimes 1"'] \\
\sum \alpha\otimes c\otimes 1\otimes a_i\otimes 1\otimes b_i\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"] & \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes(\sum a_i\otimes b_i)\otimes\beta \arrow[d, equal] \\
\sum \alpha\otimes c\otimes 1\otimes a_i\otimes 1\otimes b_i\otimes\beta \arrow[ddd, mapsto, "1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] & \sum \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes a_i\otimes b_i\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] \\
 & \sum \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes a_i\otimes 1\otimes b_i\otimes\beta \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"'] \\
 & \sum \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes a_i\otimes 1\otimes b_i\otimes\beta \arrow[d, phantom] \\
\sum \alpha\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes a_i\otimes 1\otimes 1\otimes b_i\otimes\beta & \arrow[l, mapsto, "1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"]
\end{tikzcd}
$$

De lo anterior se sigue que $(\overline{\Psi}\otimes 1)\overline{\Psi} = (1\otimes\overline{\Psi})\overline{\Psi}$ y por tanto, ${}_{\mathcal{K}(a^*)}\mathcal{C}(a^*)_{\mathcal{K}(a^*)}$, $\bar{E}$, $\overline{\Psi}$ es un BOCS. ■

6-4 PROPOSICION.- Sea $\mathcal{C}=({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}},\Psi,E)$ un Bocs y $\mathcal{C}(a^*)=({}_{\mathcal{K}(a^*)}\mathcal{C}(a^*)_{\mathcal{K}(a^*)},\bar{\Psi},\bar{E})$ como en 6-3.

Sea $F:\mathcal{R}(\mathcal{C}(a^*),\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{R}(\mathcal{C},\mathcal{V})$ tal que si $A:\mathcal{K}(a^*)\longrightarrow\mathcal{V}$ es un k-funtor, entonces $F(A)=(\mathcal{K}\xhookrightarrow{i}\mathcal{K}(a^*)\xrightarrow{A}\mathcal{V})$, y si $\eta:\mathcal{C}(a^*)\longrightarrow{}^{B}\mathcal{V}^{A}$ es un elemento de $\mathcal{R}(A,B)$, entonces:

$$F(\eta)=(\mathcal{C}\cong\mathcal{K}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{K}\xrightarrow{i\otimes1\otimes i}\mathcal{K}(a^*)\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{K}(a^*)={}^{i}\mathcal{C}(a^*)^{i}\xrightarrow{\eta}{}^{i}({}^{B}\mathcal{V}^{A})^{i}={}^{Bi}\mathcal{V}^{Ai}).$$

Entonces F es un k-funtor.

Demostración: Veamos que $F(1_A)=1_{F(A)}=1_{Ai}$, es decir que:

$$F(\mathcal{C}(a^*)\xrightarrow{\bar{E}}\mathcal{K}(a^*)\xrightarrow{\hat{A}}{}^{A}\mathcal{V}^{A})=(\mathcal{C}\xrightarrow{E}\mathcal{K}\xrightarrow{\widehat{Ai}}{}^{Ai}\mathcal{V}^{Ai}).$$

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{K} \arrow[dr, "i\otimes1\otimes i"] & & \textcircled{2} & {}^{Ai}\mathcal{V}^{Ai} \\
& \mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[r, "\bar{E}"] \arrow[d, "1\otimes E\otimes 1"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{1}"] & \mathcal{K}(a^*) \arrow[ur, "\hat{A}"] & \\
& \mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[r, "\cong"'] & \mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[u, "\pi"] \arrow[d, phantom, "\textcircled{3}"] & \\
\mathcal{C} \arrow[uuu, "\cong"] \arrow[rrr, "E"] \arrow[uuurrr, bend left=60, "F(1_A)"] & & & \mathcal{K} \arrow[uuu, "\widehat{Ai}"']
\end{tikzcd}$$

Los diagramas ① y ② conmutan por definición de $\bar{E}$ y $F(1_A)$ respetivamente. Veamos que ③ conmuta:

Sean $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}|$ y $c \in \mathcal{C}(K,\bar{K})$, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "\varepsilon"'] & 1\otimes c\otimes 1 \arrow[r, mapsto, "i\otimes 1\otimes i"] & 1\otimes c\otimes 1 \arrow[r, mapsto, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] & 1\otimes \varepsilon(c)\otimes 1 \arrow[d, mapsto, "\sigma\otimes 1"', "\cong"] \\
\varepsilon(c) \arrow[r, mapsto, "\widehat{Ai}"] & A(\varepsilon(c)) & \varepsilon(c) \arrow[l, mapsto, "\hat{A}"'] & \varepsilon(c)\otimes 1 \arrow[l, mapsto, "\pi"']
\end{tikzcd}
.
$$

Veamos ahora que $F(\eta'\circ\eta) = F(\eta')\circ F(\eta)$; para lo cual, consideramos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\cong"] \arrow[ddddd, "\psi"'] \arrow[rrrr, bend left, "F(\eta'\circ\eta)"] \arrow[rrrr, bend right=90, looseness=1.5, "F(\eta')\circ F(\eta)"'] & \mathcal{K}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K} \arrow[r, "i\otimes 1\otimes i"] & \mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*) \arrow[rr, "\eta'\circ\eta"] \arrow[dl, "1\otimes\psi\otimes 1"'] \arrow[dd, "\bar{\Psi}"] \arrow[ddrr, phantom, "1"] & & {}^{ci}\mathcal{D}^{Ai} \\
 & \mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*) \arrow[dd, "1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"', "\cong"] \arrow[r, phantom, "3"] & {} & & \\
 & & \mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}(\alpha^*)}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*) \arrow[rr, "\eta'\otimes\eta"] \arrow[ddr, phantom, "4"] & & {}^{c}\mathcal{D}^{B}\underset{\mathcal{K}(\alpha^*)}{\otimes}{}^{B}\mathcal{D}^{A} \arrow[uu, "\pi"'] \\
 & \mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*) \arrow[dr, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"'] & & & \\
 & & \mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\alpha^*) \arrow[uu, "1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] & & \\
\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{C} \arrow[rrr, "F(\eta')\otimes F(\eta)"] \arrow[rrr, phantom, bend right, "2"'] & & & {}^{ci}\mathcal{D}^{Bi}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}{}^{Bi}\mathcal{D}^{Ai} \arrow[uuuuur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

En el diagrama anterior conmutan ① y ② por la definición de composición en $\mathcal{R}(\mathcal{C}(\alpha^*),\mathcal{V})$ y $\mathcal{R}(\mathcal{C},\mathcal{V})$ respectivamente; conmuta ③ por la definición de $\overline{\Psi}$, y ⑤ por la definición de F. Veamos que tambien ④ conmuta: Sean $(K,\bar{K})\in|\mathcal{K}^{op}\times\mathcal{K}|$ y $c\in\mathcal{C}(K,\bar{K})$; supongamos que $\psi(c)=\sum_i a_i\otimes b_i$, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "\psi"] & 1\otimes c\otimes 1 \arrow[r, mapsto, "i\otimes 1\otimes i"] & 1\otimes c\otimes 1 \arrow[d, mapsto, "1\otimes\psi\otimes 1"'] \\
\sum_i a_i\otimes b_i \arrow[dd, mapsto, "F(\eta')\otimes F(\eta)"] & & 1\otimes\left(\sum(a_i\otimes b_i)\right)\otimes 1 \arrow[d, equal] \\
 & & \sum_i 1\otimes a_i\otimes b_i\otimes 1 \arrow[d, mapsto, "1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] \\
\sum_i \eta'(1\otimes a_i\otimes 1)\otimes\eta(1\otimes b_i\otimes 1) \arrow[d, mapsto, "\pi"] & & \sum_i 1\otimes a_i\otimes 1\otimes b_i\otimes 1 \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"'] \\
\sum_i \eta'(1\otimes a_i\otimes 1)\eta(1\otimes b_i\otimes 1) & & \sum_i 1\otimes a_i\otimes 1\otimes b_i\otimes 1 \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] \\
\sum_i \eta'(1\otimes a_i\otimes 1)\otimes\eta(1\otimes b_i\otimes 1) \arrow[u, mapsto, "\pi"] & & \sum_i 1\otimes a_i\otimes 1\otimes 1\otimes b_i\otimes 1 . \arrow[ll, mapsto, "\eta'\otimes\eta"]
\end{tikzcd}
$$

Ademas, es claro que $F(\lambda\eta+\bar{\eta})=\lambda F(\eta)+\bar{\eta}$ si $\lambda\in k$; y por tanto, F es k-funtor. ∎

<u>6-5 PROPOSICION.</u>- Sea $\mathcal{C} = ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \Psi, \mathcal{E})$ un BDCS y $\mathcal{C}(a^*) = ({}_{\mathcal{K}(a^*)}\mathcal{C}(a^*)_{\mathcal{K}(a^*)}, \bar{\Psi}, \bar{\mathcal{E}})$ como en 6-3. Sea $G : \mathcal{R}(\mathcal{C}, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C}(a^*), \mathcal{V})$ tal que si $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un k-funtor, entonces elejimos una extensión $G(A) = \bar{A} : \mathcal{K}(a^*) \longrightarrow \mathcal{V}$, y si $\eta : \mathcal{C} \longrightarrow {}^{B}\mathcal{V}^{A} \in \mathcal{R}(A,B)$, entonces:

$$G(\eta) = \left(\mathcal{K}(a^*) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}(a^*) \xrightarrow{\bar{B}\otimes\eta\otimes\bar{A}} {}^{\bar{B}}\mathcal{V}^{B} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} {}^{B}\mathcal{V}^{A} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} {}^{A}\mathcal{V}^{\bar{A}} \xrightarrow{\pi} {}^{\bar{B}}\mathcal{V}^{\bar{A}}\right).$$

Entonces, G es un k-funtor.

<u>Demostración:</u> Veamos que $G(1_A) = 1_{G(A)} = 1_{\bar{A}}$, es decir que:

$$G(\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{K} \xrightarrow{\hat{A}} {}^{A}\mathcal{V}^{A}) = (\mathcal{C}(a^*) \xrightarrow{\bar{\mathcal{E}}} \mathcal{K}(a^*) \xrightarrow{\hat{\bar{A}}} {}^{\bar{A}}\mathcal{V}^{\bar{A}}).$$

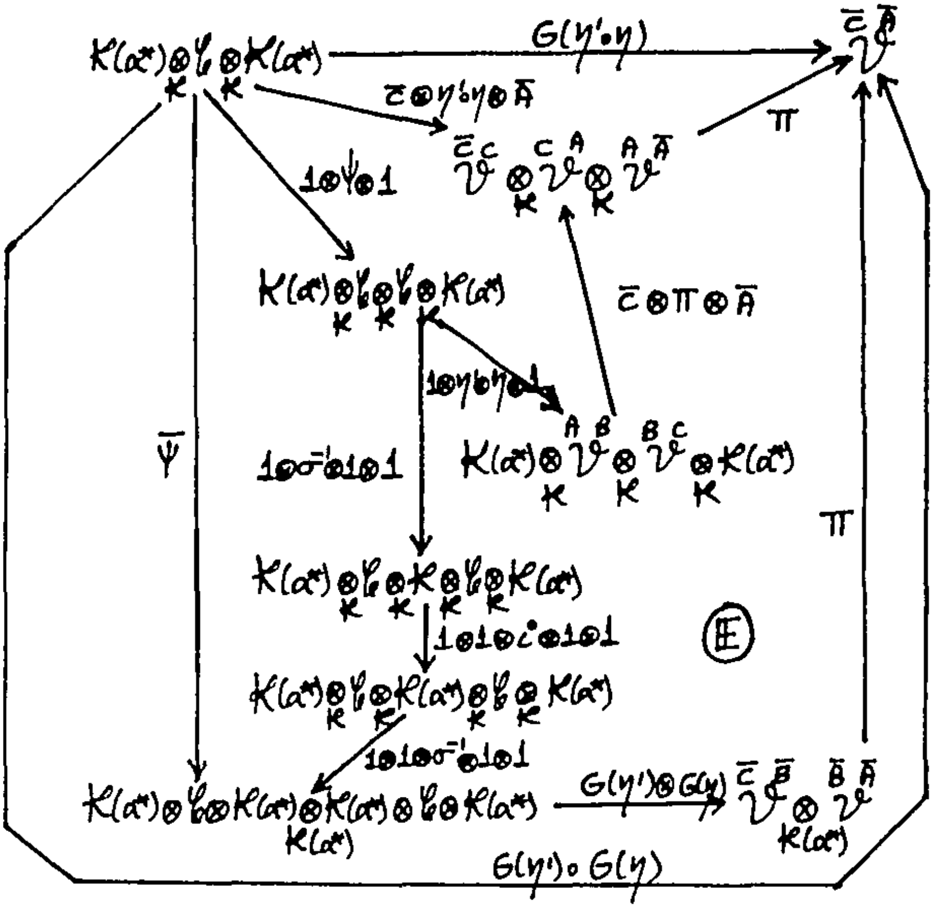
Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[rrr, "\bar{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "1\otimes\mathcal{E}\otimes 1"] \arrow[dd, "\bar{A}\otimes\hat{A}\mathcal{E}\otimes\bar{A}"'] & & & \mathcal{K}(a^*) \arrow[dd, "\hat{\bar{A}}"] \\
& \mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[r, "1\otimes\bar{\sigma}"] & \mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[ur, "\pi"] & \\
{}^{\bar{A}}\mathcal{V}^{A}\otimes{}^{A}\mathcal{V}^{A}\otimes{}^{A}\mathcal{V}^{\bar{A}} \arrow[rrr, "\pi"] & & & {}^{\bar{A}}\mathcal{V}^{\bar{A}}
\end{tikzcd}$$

que resulta conmutativo, ya que si $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K} \overset{\varphi}{\times} \mathcal{K}|$, $K_1, K_2 \in |\mathcal{K}|$ y $(f,c,g) \in \mathcal{K}(a^*)(K_1,K) \times \mathcal{C}(K_2,K_1) \times \mathcal{K}(a^*)(\bar{K},K_2)$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
f\otimes c\otimes g \arrow[r, mapsto, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] \arrow[d, mapsto, "\bar{A}\otimes\hat{A}\varepsilon\otimes\bar{A}"'] & f\otimes\varepsilon(c)\otimes g \arrow[r, mapsto, "1\otimes\sigma"] & f\otimes\varepsilon(c)g \arrow[r, mapsto, "\pi"] & f\varepsilon(c)g \arrow[d, mapsto, "\hat{A}"] \\
\bar{A}(f)\otimes A(\varepsilon(c))\otimes\bar{A}(g) \arrow[rrr, mapsto, "\pi"] & & & \bar{A}(f)A(\varepsilon(c))\bar{A}(g)
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora que $G(\eta'\circ\eta) = G(\eta')\circ G(\eta)$; para lo cual consideramos el diagrama:



Sean $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}(a^*)^{op} \times \mathcal{K}(a^*)|$, $K_1, K_2, K_3 \in |\mathcal{K}|$ y $(f,c,c',g) \in \mathcal{K}(a^*)(K_1,K) \times \mathcal{C}(K_2,K_1) \times \mathcal{C}(K_3,K_2) \times \mathcal{K}(a^*)(\bar{K},K_3)$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
f\otimes c\otimes c'\otimes g \arrow[r, mapsto, "1\otimes\eta'\otimes\eta\otimes 1"] \arrow[d, mapsto, "1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] & f\otimes\eta'(c)\otimes\eta(c')\otimes g \arrow[d, mapsto, "\bar{C}\otimes\pi\otimes\bar{A}"'] \\
f\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes i^\circ\otimes 1\otimes 1"] & \bar{C}(f)\otimes\eta'(c)\eta(c')\otimes\bar{A}(g) \arrow[d, mapsto, "\pi"'] \\
f\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1\otimes 1"] & \bar{C}(f)\eta'(c)\eta(c')\bar{A}(g) \\
f\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "G(\eta')\otimes G(\eta)"] & \bar{C}(f)\eta'(c)\otimes\eta(c')\bar{A}(g) \arrow[u, mapsto, "\pi"] \arrow[d, equal] \\
G(\eta')(f\otimes c\otimes 1)\otimes G(\eta)(1\otimes c'\otimes g) & = \pi(\bar{C}(f)\otimes\eta'(c)\otimes\bar{B}(1))\otimes\pi(\bar{B}(1)\otimes\eta(c')\otimes\bar{A}(g))
\end{tikzcd}$$

Ahora, ya es fácil ver que G es k-funtor ■

<u>6-6 OBSERVACION.-</u> $FG = 1_{\mathcal{R}(\mathcal{C},\mathcal{V})}$

<u>Demostración.</u> Claramente $FG = 1$ en los objetos. El hecho de que lo mismo vale para los morfismos se sigue de que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{K}(a^*) \arrow[rr, "\bar{B}\otimes\eta\otimes\bar{A}"] & & {}^{\bar{B}}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{A}\otimes{}^{A}\mathcal{V}^{\bar{A}} \arrow[dd, "\pi"] \\
K\otimes\mathcal{C}\otimes K \arrow[ur, "i^\circ\otimes 1\otimes i^\circ"'] & & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, phantom, "\wr\wr"] \arrow[rr, "\eta"] & & {}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[r, equal] & {}^{\bar{B}i}\mathcal{V}^{\bar{A}i}
\end{tikzcd}$$

■

6-7 LEMA.- Si $A,B:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{V}$ son k-funtores y $\bar A,\bar B:\mathcal{K}(a^*)\longrightarrow\mathcal{V}$ son extensiones de A y B respectivamente, entonces:

$$-:\mathcal{R}(A,B)\longrightarrow\mathcal{R}(\bar A,\bar B)$$

$$\eta\longmapsto\bar\eta=\left[\mathcal{C}(a^*)\xrightarrow{\bar B\otimes\eta\otimes\bar A}{}^{\bar B}\mathcal{V}^{B}\otimes_{K}{}^{B}\mathcal{V}^{A}\otimes_{K}{}^{A}\mathcal{V}^{\bar A}\xrightarrow{\pi}{}^{\bar B}\mathcal{V}^{\bar A}\right]$$

es un k-isomorfismo con inversa F.

__Demostración:__ sabemos que $(\mathcal{R}(\bar A,\bar B)\xrightarrow{F}\mathcal{R}(A,B))\circ - = 1$, veamos que tambien $-\circ F=1$.

Sea $\eta:\mathcal{C}(a^*)\longrightarrow{}^{\bar B}\mathcal{V}^{\bar A}\in\mathcal{R}(\bar A,\bar B)$, recordemos que:

$$F\eta=\left[\mathcal{C}\cong\mathcal{K}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{K}\xrightarrow{i\otimes 1\otimes i}\mathcal{K}(a^*)\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{K}(a^*)\xrightarrow{\eta}{}^{B}\mathcal{V}^{A}\right]$$

y entonces:

$$\overline{F\eta}=\left[\mathcal{C}(a^*)\xrightarrow{\bar B\otimes F\eta\otimes\bar A}{}^{\bar B}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{A}\otimes{}^{A}\mathcal{V}^{\bar A}\xrightarrow{\pi}{}^{\bar B}\mathcal{V}^{\bar A}\right].$$

Sea $f\otimes c\otimes g$ un generador de $\mathcal{C}(a^*)(K,\bar K)$, donde $(K,\bar K)\in|\mathcal{K}^{op}(a^*)\times\mathcal{K}(a^*)|$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
f\otimes c\otimes g \arrow[r, mapsto, "\eta"] \arrow[d, "\bar B\otimes F\eta\otimes\bar A"] & \eta(f\otimes c\otimes g) \arrow[dd, equal] \\
\bar B(f)\otimes F\eta(c)\otimes\bar A(g) \arrow[d, equal] & \\
\bar B(f)\otimes\eta(1\otimes c\otimes 1)\otimes\bar A(g) \arrow[r, mapsto, "\pi"] & \bar B(f)\,\eta(1\otimes c\otimes 1)\,\bar A(f)
\end{tikzcd};$$

por tanto $\overline{F\eta}=\eta$, y $-\circ F=1$ ∎

<u>6-8 LEMA.</u>- Dado $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ k-funtor, la extensión $\bar{A} : \mathcal{K}(\alpha^*) \longrightarrow \mathcal{V}$ (en la PROP. 6-2) es única hasta isomorfismo de representaciones del BOCS ${}_{\mathcal{K}(\alpha^*)}\mathcal{C}(\alpha^*)_{\mathcal{K}(\alpha^*)}$.

<u>Demostración.</u> Dadas $\bar{A}, \bar{\bar{A}}$ dos extensiones de A, definamos:

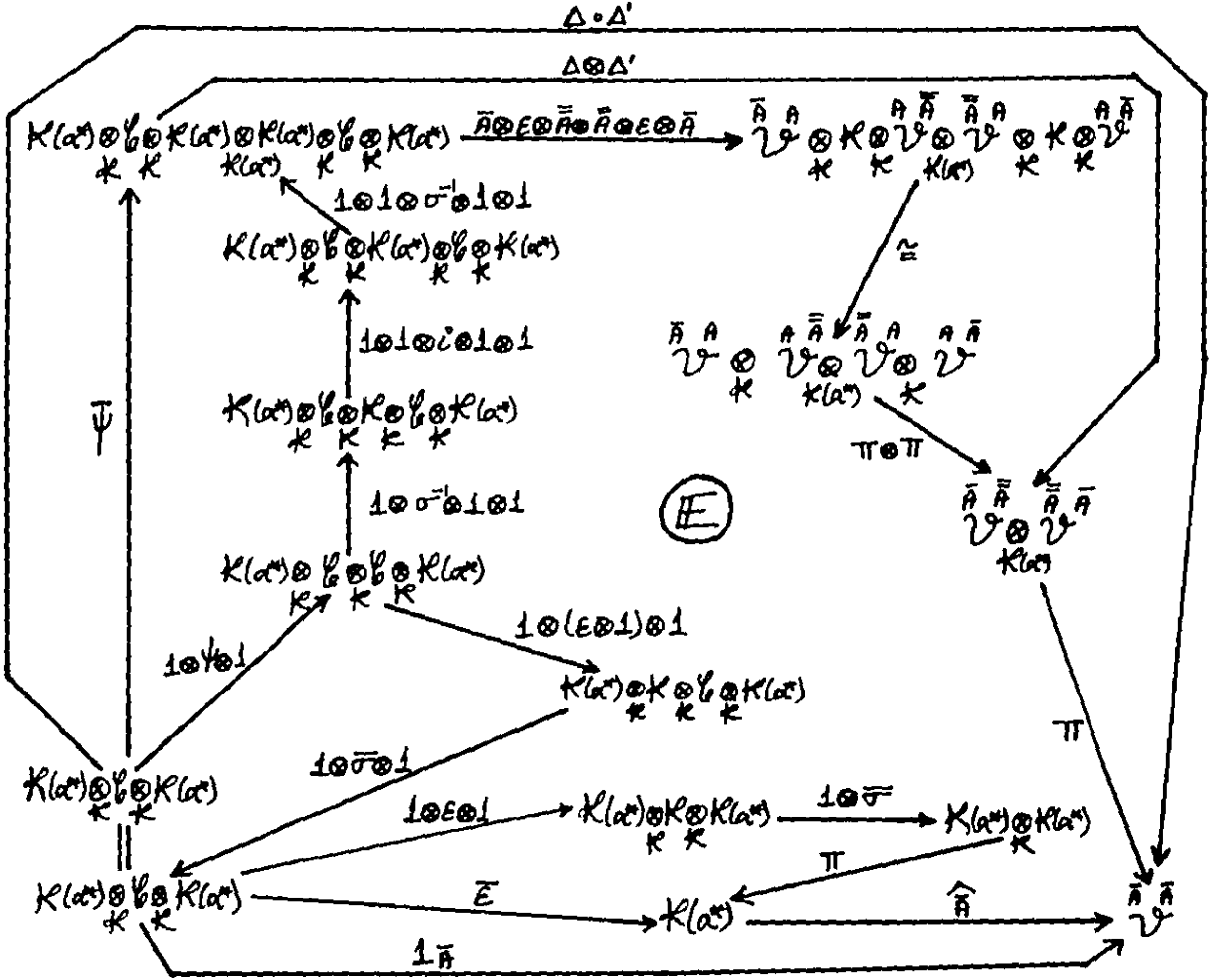
$$\Delta_{\bar{\bar{A}},\bar{A}} = \left(\mathcal{C}(\alpha^*) = \mathcal{K}(\alpha^*) \otimes_K \mathcal{C} \otimes_K \mathcal{K}(\alpha^*) \xrightarrow{\bar{A} \otimes E \otimes \bar{\bar{A}}} {}^{\bar{A}}\mathcal{V}^{A} \otimes_K \mathcal{K} \otimes_K {}^{A}\mathcal{V}^{\bar{\bar{A}}} \cong {}^{\bar{A}}\mathcal{V}^{A} \otimes_K {}^{A}\mathcal{V}^{\bar{\bar{A}}} \xrightarrow{\pi} {}^{\bar{A}}\mathcal{V}^{\bar{\bar{A}}}\right),$$

y tomemos $\Delta = \Delta_{\bar{\bar{A}},\bar{A}}$ y $\Delta' = \Delta_{\bar{A},\bar{\bar{A}}}$.

Veremos que $\Delta \circ \Delta' = 1_{\bar{A}}$ y, por simetría, se tendrá que $\Delta' \circ \Delta = 1_{\bar{\bar{A}}}$ y entonces Δ será isomorfismo en $\mathcal{R}(\mathcal{C}(\alpha^*), \mathcal{V})$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$\longrightarrow$


Δ∘Δ'
Δ⊗Δ'
1⊗1⊗σ⁻¹⊗1⊗1
1⊗1⊗i⊗1⊗1
1⊗σ⁻¹⊗1⊗1
1⊗(ε⊗1)⊗1
1⊗ψ⊗1
ψ̄
≅
π⊗π
E
π
1⊗σ̄⊗1
1⊗ε⊗1
1⊗σ̄
π
Ē
Â
1_Ā

Veamos que (E) conmuta:

Sean $(K,\bar{K}) \in |\mathcal{K}(a^*)^{op} \times \mathcal{K}(a^*)|$, $K_1, K_2, K_3 \in |\mathcal{K}|$, y
$(\alpha, c, c', \beta) \in \mathcal{K}(a^*)(K_1,K) \times \mathcal{C}(K_0,K_1) \times \mathcal{C}(K_0,K_2) \times \mathcal{K}(a^*)(\bar{K},K_3)$,
entonces:

$$
\begin{tikzcd}
f\otimes c\otimes c'\otimes g \arrow[r, mapsto, "1\otimes\bar{\sigma}^{-1}\otimes 1\otimes 1"] \arrow[d, mapsto, "1\otimes(\varepsilon\otimes 1)\otimes 1"] & f\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes i\otimes 1\otimes 1"'] \\
f\otimes E(c)\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes\bar{\sigma}\otimes 1"] & f\otimes c\otimes 1\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes 1\otimes\bar{\sigma}^{-1}\otimes 1\otimes 1"'] \\
f\otimes \mathcal{C}(1,E(c))(c')\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] & f\otimes c\otimes 1\otimes 1\otimes c'\otimes g \arrow[d, mapsto, "\bar{A}\otimes\varepsilon\otimes\bar{\bar{A}}\otimes\bar{\bar{\bar{A}}}\otimes\varepsilon\otimes\bar{A}"'] \\
f\otimes \varepsilon\,\mathcal{C}(1,E(c))(c')\otimes g \arrow[d, equal] & \bar{A}(f)\otimes E(c)\otimes\bar{\bar{A}}(1)\otimes\bar{\bar{\bar{A}}}(1)\otimes E(c')\otimes\bar{A}(g) \arrow[d, equal] \\
f\otimes E(c)E(c')\otimes g \arrow[d, mapsto, "1\otimes\bar{\sigma}"] & \bar{A}(f)\otimes E(c)\otimes 1\otimes 1\otimes E(c')\otimes\bar{A}(g) \arrow[d, mapsto, "\cong\, =\, 1\otimes\bar{\sigma}\otimes\sigma\otimes 1"'] \\
f\otimes E(c)E(c')g \arrow[d, mapsto, "\pi"] & \bar{A}(f)\otimes AE(c)\otimes AE(c')\otimes\bar{A}(g) \arrow[d, mapsto, "\pi\otimes\pi"'] \\
f\,E(c)E(c')g \arrow[d, mapsto, "\hat{\bar{A}}"] & \bar{A}(f)A(E(c))\otimes A(E(c'))\bar{A}(g) \arrow[d, mapsto, "\pi"'] \\
\bar{A}(f E(c) E(c') g) \arrow[r, equal] & \bar{A}(f)A(E(c))\,A(E(c'))\bar{A}(g)
\end{tikzcd}
$$

de donde, $\Delta\circ\Delta' = 1_{\bar{A}}$ ∎

6-9 TEOREMA.-

$$\mathcal{R}({}_{K}\mathcal{C}_{K}, \mathcal{V}) \simeq \mathcal{R}({}_{K(a^*)}\mathcal{C}(a^*)_{K(a^*)}, \mathcal{V})$$

(y G, F son equivalencias).

Demostración: Observemos que si $H: K(a^*) \to \mathcal{V}$ es un k-funtor, entonces $H(a^*)$ es pseudoinverso de $H(a)$ (pues $H(a^*)H(a)H(a^*) = H(a^*aa^*) = H(a^*)$ y $H(a)H(a^*)H(a) = H(a)$) ; por tanto, H es una extensión $\bar{A}$ de $A = Hi$.

Por el Lema 6-7, G es fiel y pleno ; y por el lema 6-8 y la observación anterior, G es denso. F es supráyectiva en los objetos, y por 6-7, F es fiel y pleno. Entonces G, F son equivalencias de categorías. ∎

APENDICE.

OBSERVACION.-(I) si K, K' son anillos, denotaremos por ${}_K\mathrm{bim}_{K'}$ la categoría de bimódulos (usuales) de la forma ${}_K M_{K'}$, donde los morfismos ${}_K M_{K'} \xrightarrow{f} {}_K M'_{K'}$ son morfismos de grupos $M \xrightarrow{f} M'$ tales que si $k \in K$, $k' \in K'$ y $x \in M$, entonces, $f(kxk') = kf(x)k'$

(II) si $\mathcal{K}$ es una categoría finita con objetos $\{1, \dots, n\}$, entonces:

$$\bar{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(1,1) & \cdots & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(n,1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(1,n) & \cdots & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(n,n) \end{pmatrix}$$

con la multiplicación matricial es un anillo.

PROPOSICION.- Si $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ son categorías finitas, entonces hay un isomorfismo:

$$E : {}_{\bar{\mathcal{K}}}\mathrm{bim}_{\bar{\mathcal{K}}'} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}'}$$

tal que:

(a) si $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$, $E(\bar{\mathcal{K}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}$

(b) si $\mathcal{K}''$ es otra categoría finita, entonces:

$$\begin{tikzcd}
{}_{\bar{\mathcal{K}}}\mathrm{bim}_{\bar{\mathcal{K}}'} \times {}_{\bar{\mathcal{K}}'}\mathrm{bim}_{\bar{\mathcal{K}}''} \arrow[r, "E \times E"] \arrow[d, "- \otimes_{\bar{\mathcal{K}}'} -"'] & {}_{\mathcal{K}}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}'} \times {}_{\mathcal{K}'}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}''} \arrow[d, "- \otimes_{\mathcal{K}'} -"] \\
{}_{\bar{\mathcal{K}}}\mathrm{bim}_{\bar{\mathcal{K}}''} \arrow[r, "E"] \arrow[ur, phantom, "\wr"] & {}_{\mathcal{K}}\mathrm{Bim}_{\mathcal{K}''}
\end{tikzcd}$$

donde $- \otimes_{\bar{\mathcal{K}}} -$ es el producto tensorial usual.

Lista de Símbolos:

$\mathcal{K}^{op}$	La categoría opuesta de $\mathcal{K}$.
$\lvert\mathcal{K}\rvert$	La clase de los objetos de $\mathcal{K}$.
$\mathcal{K}/I$	La categoría cociente de $\mathcal{K}$ por el ideal I (vease 1-2).
$\mathcal{A}b$	La categoría de grupos abelianos.
$\mathcal{S}et$	La categoría de conjuntos.
${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2}$	Un $\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2$ Bimódulo (vease 1-3).
${}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$	La categoría de $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulos.
${}^{A}\mathcal{V}^{B}$	(vease 1-4(1)).
$\hat{A}$	(vease 1-4(2)).
$(\mathcal{K}, \mathcal{V})$	La categoría de funtores de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{V}$ (vease 1-5).
Mod k	La categoría de k-módulos.
dom f, codom f	dominio y codominio del morfismo f.
$\mathcal{K} \otimes_k \mathcal{K}'$	El producto tensorial de las k-categorías $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ sobre k (vease 1-7).
$A \otimes_{\mathcal{K}} B$	El producto tensorial de los funtores A y B sobre la categoría preaditiva $\mathcal{K}$ (vease 2-1).
$\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C}'$	El producto tensorial de los Bimódulos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ sobre la k-categoría $\mathcal{K}$ (vease 2-4).
π	El morfismo composición (vease 2-7).

$\mathcal{U}_n$	(vease 4-3).
$\hat{\mathcal{U}}$	La DGC auxiliar asociada a la QDGC semilibre $\mathcal{U}$ (vease 4-9).
$\mathcal{V}^{(2)}$	(vease 4-10).
$\mathcal{R}(\mathcal{U},\mathcal{V})$	La categoría de $\mathcal{V}$-representaciones de la QDGC semilibre $\mathcal{U}$ (vease 4-1).
$\mathcal{R}({}_K\mathcal{C}_K,\mathcal{V})$	La categoría de $\mathcal{V}$-representaciones del BOCS ${}_K\mathcal{C}_K$ (vease 3-2).
$\mathcal{B}(\mathcal{U})$	BOCS asociado a la QDGC semilibre $\mathcal{U}$ (vease 5-4).
$\mathcal{U}(\mathcal{C})$	QDGC semilibre asociada al BOCS ${}_K\mathcal{C}_K$ (vease 5-6).
a^*	un pseudoinverso del morfismo a, (vease § 6).
$K(a^*)$	(vease 6-1).
$\mathcal{C}(a^*)$	(vease 6-3).
■	final de demostración.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Auslander; Representation Theory of Artin Algebras I, Comm. Algebra (1974), 177-268.

[2] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev; Coxeter Functors and Gabriel Theorem, Uspechi Mat. Nauk. 28 (1973); traducido en Russian Math. Surveys 28 (1973), 17-32.

[3] Yu. A. Drozd; Matrix problems and categories of matrices, Zap. Naučh. Sem. LOMI 28 (1972), 144-153.

[4] Yu. A. Drozd; Coxeter transformations and representations of partially ordered sets, Funkcional. Anal. i Priložen. 8 (1974), 34-42.

[5] M.M. Kleiner; Partially ordered sets of finite type, Zap. Naučh. Sem. LOMI 28(1972), 42-60.

[6] L. A. Nazarova and A. V. Roiter, Representations of partially ordered sets, Zap. Naučh. Sem. LOMI 28 (1972), 5-31.

[7] A. V. Roiter, M. M. Kleiner, Representations of Diferential Graded Categories. Proc. ICRA I 1974, Springer Lecture Notes No. 488, 316-339.

[8] A. V. Roiter; Bocs y sus representaciones, proc. ICRA II, por aparecer.

[9] Kleiner; BOCS y DGC. Pláticas dadas en la Universidad de Brandeis. Septiembre 1979.