CONVOLUCION DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Ciencias (Matemáticas), presenta

ENRIQUETA RODRIGUEZ CARRINGTON

1980.

Indice General.

Introducción.

§1. Propósito de este Trabajo.

Se han hecho extensos estudios (véase por ejemplo [3], [5]) sobre la noción de la convolución de dos medidas de Radon acotadas sobre un grupo localmente compacto G, o la convolución de una medida tal con un función $\mathcal{L}^\alpha$, i.e. una función $G \to \mathbb{R}$ o $G \to \mathbb{C}$ cuya potencia α-ésima es integrable.

El propósito de este trabajo es extender la teoría de la convolución a las funciones de potencia α-ésima integrable, con valores en un espacio localmente convexo (completo y de Hausdorff) V.

Se recuperan la mayoría de las propiedades de la convolución de funciones numéricas, aunque para muchas de estas propiedades es necesario pedir que V sea un espacio de Fréchet, y para otras es necesario que, además, V tenga un producto continuo, (cf. Cap. III §6 para la definición exacta).

Aún en el caso de que las funciones tomen valores en

$\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, no es fácil demostrar la útil igualdad

$$(f * g)(y) = \left(\int_G l(x) \cdot f \, d\lambda(x)\right)(y)$$

$$= \int_G l(x) \cdot f(y) \, d\lambda(x) \, ,$$

por lo que aquí se da una demostración unificada, es decir válida tanto para $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ como para el caso general.

Dicha demostración se basa en un teorema sobre la unicidad de la extensión de una representación equicontinua de G a una representación del álgebra M^1 de las medidas de Radon acotadas sobre G (teor. 1.1 y cor. 1.2). Este teorema resulta, pues, ser esencial para la construcción de toda la teoría de la convolución. Se trata de una variación del teorema , que presenté en [8].

Por ello, el capítulo I de este trabajo está dedicado al estudio de las extensiones de una representación equicontinua.

En [4], Grothendieck menciona ya el espacio $\mathcal{L}^1_V$

de funciones integrables de X en V.

Sin embargo, Bourbaki [2], al estudiar los espacios $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$ se restringe al caso en que V es un espacio de Banach. Hasta donde hemos podido averiguar, en ningún lugar hay una exposición de las propiedades de los espacios $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$, donde V es un espacio localmente convexo.

En el capítulo II del presente trabajo, se estudian dichos espacios $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$, con V localmente convexo. Muchos de los resultados de dicho capítulo se encuen-

-tran, para el caso de los espacios de Banach, en la obra de Bourbaki, [2].

El capítulo II es independiente del I. En el capítulo III se utilizan los resultados de los dos primeros para poder definir y estudiar la convolución de las funciones con valores en V y de potencia α-ésima integrable.

E. R. C.

Agosto, 1980.

§ 2. Observaciones sobre prerrequisitos y notación.

Supondremos que el lector está familiarizado con las propiedades de los espacios $\mathcal{L}^{\alpha}$ de funciones con valores numéricos, así como de la convolución de dichas funciones (como está expuesto, por ejemplo, en [6]) y de los espacios localmente convexos, (como se estudian, por ejemplo, en [9]).

Al principio de cada capítulo o § se fijan las hipótesis sobre los espacios que van a estudiarse.

Se denotará con $f, g, \ldots$ a funciones con valores en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y con $\varphi, \psi, \ldots$ a funciones con valores en otro espacio localmente convexo.

Las definiciones que se presentan por primera vez en este trabajo están numeradas, mientras que las definiciones tomadas de otras fuentes no se numeran. Sólo se subraya el término que se está definiendo.

I.1 Extensiones de una Representación Equicontinua.

§0. Notación y Prerrequisitos.

En este capítulo, G denotará siempre un grupo localmente compacto, escrito multiplicativamente. Se denotará con dx una medida de Haar izquierda, fija, sobre G ; con $M^1(G)$, o simplemente M^1, el álgebra de convolución de las medidas acotadas sobre G. Consideraremos siempre a $M^1(G)$ como dotada de la topología que define la norma:

$$\|\mu\| = |\mu|(G) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{K}(G) \\ |f| \leq 1}} |\mu(f)| \qquad (\mu \in M^1).$$

El álgebra normada $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(G)$ de las funciones integrables sobre G se identifica de la manera usual con una subálgebra de M^1: cada $f \in \mathcal{L}^1$ se identifica con la medida $f\,dx$, la cual está definida por

$$g \longmapsto \int_G f(x)\, g(x)\, dx \qquad (g \in \mathcal{K}(G)).$$

Se denotará con V un espacio localmente convexo, casi completo y de Hausdorff, y con S_V a la familia completa de seminormas de V.

Recordamos que se dice que una sucesión $\{f_j\}$ de funciones continuas sobre G es una <u>sucesión de Dirac</u> si se satisfacen las tres condiciones:

(a) $f_j(x) \geqslant 0 \qquad (x \in G,\ j \in \mathbb{N})$

(b) $\operatorname{Sop} f_j \longrightarrow \{e\}$, donde e es el elemento unitario de G, y

(c) $\displaystyle\int_G f_j(x)\, dx = 1 \qquad (j \in \mathbb{N}).$

También necesitaremos recordar algunos hechos básicos, referentes a las representaciones de G. Una representación continua (π, V) de G sobre V es un homomorfismo

$$\pi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$$

de G en el grupo $\mathrm{Aut}(V)$ de los automorfismos continuos de V, tal que el mapeo asociado $G \times V \longrightarrow V$ definido por $(x, v) \longmapsto \pi(x) \cdot v$ es continuo.

Se dice que la representación es equicontinua si, además, el conjunto de operadores

$$\{\pi(x) \mid x \in G\} \subset \mathrm{Aut}(V)$$

es equicontinuo. Esta propiedad de equicontinuidad se traduce al lenguaje de seminormas, diciendo que para toda seminorma continua $p \in S_V$, existe una $q \in S_V$ tal que

$$p(\pi(x)\cdot v) \leq q(v) \qquad (v \in V,\ x \in G). \quad (1)$$

Cuando consideramos que el álgebra $End(V)$ de los endomorfismos continuos de V lleva la topología de la convergencia uniforme sobre cada subconjunto acotado de V (topología de la convergencia acotada), la denotaremos con $End_b(V)$.

§1. Teoremas de Extensión.

Es sabido que (generalizando una idea de Segal) cada representación equicontinua (π, V) de G puede extenderse a un homomorfismo de álgebras $M^1 \longrightarrow End(V)$. (Cf. [1], los detalles se pueden encontrar en [8]). Es usual denotar este homomorfismo también por π. Está definido por la fórmula

$$\pi(\mu).v = \int_G \pi(x).v \, d\mu(x) \qquad (2)$$

$(\mu \in M^1, \; v \in V)$.

Se trata de la integral de una función $G \to V$; es, pues, una integral de Bochner-Bourbaki.

Si a cada punto $x \in G$, se le asocia la medida de Dirac ε_x en el mismo, se tiene un monomorfismo de grupos $G \to M^1(G)$ (claro está que éste no es continuo, a menos que G sea discreto). Así pues, el homomorfismo definido por (a) "extiende" a la representación dada de G en el sentido de que

$$\pi(\varepsilon_x) = \pi(x) \qquad (x \in G).$$

Como una variante del teorema 1, §3 de [8], se demostrará el siguiente resultado.

1.1 <u>Teorema</u> Sea (π, V) una representación equicontinua de G. Entonces, el homomorfismo definido por (a) es continuo cuando $\mathrm{End}(V)$ tiene la topología de la convergencia acotada. Más aún éste es el único homomorfismo continuo de álgebras que extiende a la representación dada de G.

Demostración. Para comprobar que el homomorfismo

$$\pi : M^1(G) \longrightarrow \mathrm{End}_b(V)$$

definido por (2) es continuo, consideremos una red $\{\mu_j\} \subset M^1$ que converge a cero, es decir que $\|\mu_j\| \to 0$ en $\mathbb{R}$.

Sea $p \in S_V$, entonces

$$p(\pi(\mu_j)\cdot v) = p\left[\int_G \pi(x)\cdot v \; d\mu_j(x)\right] \leq$$

$$\leq \int_G p[\pi(x)\cdot v] \; d|\mu_j|(x).$$

(Cf. [2], Chap. III, § 3, nº 3, prop. 6).

Puesto que la representación es equicontinua, existe una $q \in S_V$ que cumple con p la relación (1). Entonces

$$\int_G p(\pi(x)\cdot v)\, d|\mu_j|(x) \leq$$

$$\leq \int_G q(v)\, d|\mu_j|(x) = q(v)\,\|\mu_j\| .$$

Obsérvese que esta seminorma q depende sólo de p, y no de la medida μ_j.

Tomemos ahora un conjunto acotado $B \subset V$. Se sabe que existe un número real $k \geq 0$ tal que

$$q(v) \leq k \qquad (v \in B).$$

Así, tenemos que

$$p(\pi(\mu_j)\cdot v) \leq k\,\|\mu_j\| \quad (v \in B).$$

Esto significa que $\pi(\mu_j) \longrightarrow 0$ uniformemente sobre B. Como B se escogió arbitrariamente, esto demuestra la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que

$$\tilde{\pi} : M^1 \longrightarrow \mathrm{End}_b(V)$$

es un homomorfismo continuo de álgebras que extiende a la representación (π, V) de G:

$$\tilde{\pi}(\varepsilon_x) = \pi(x) \qquad (x \in G).$$

La inmersión $\mathcal{L}^1 \hookrightarrow M^1$ permite definir de manera natural $\tilde{\pi}(f) \in \mathrm{End}(V)$, para cada $f \in \mathcal{L}^1$.

Sea $\{f_j\} \subset \mathcal{L}^1$ una sucesión de Dirac. Por la continuidad de $\tilde{\pi}$, tenemos que

$$\tilde{\pi}(f_j) \longrightarrow \tilde{\pi}(\varepsilon_e) = \mathrm{id}_V .$$

De manera que, para toda $v \in V$,

$\tilde{\pi}(f_j) \cdot v \longrightarrow v$, y el conjunto

$$S := \{\tilde{\pi}(f) \cdot v \mid f \in \mathcal{L}^1, v \in V\}$$

es denso en V.

Tomemos ahora $\mu \in M^1$, $f \in \mathcal{L}^1$, $v \in V$. Entonces

$$\tilde{\pi}(\mu) \cdot (\tilde{\pi}(f) \cdot v) = \tilde{\pi}(\mu * f) \cdot v =$$

$$= \tilde{\pi}\left[\int_G \varepsilon_x * f \, d\mu(x)\right] \cdot v.$$

Puesto que la topología de la convergencia puntual es menos fina que la topología de la convergencia acotada, vemos que

$$\tilde{\pi} : M^1 \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

es continua cuando $\mathrm{End}(V)$ tiene la topología de la convergencia puntual. En otras palabras, que para $v \in V$ la aplicación $M^1 \longrightarrow V$ definida por $\mu \longmapsto \tilde{\pi}(\mu) \cdot v$, es continua. También es lineal, por hipótesis.

Esto nos permite aplicar el lema (2) de [8], concluyendo que

$$\tilde{\pi}\left[\int_G \varepsilon_x * f \, d\mu(x)\right] \cdot v =$$

$$= \int_G \tilde{\pi}(\varepsilon_x * f) \cdot v \, d\mu(x).$$

Pero por hipótesis $\tilde{\pi}(\varepsilon_x) = \pi(x)$, así pues

$$\int_G \tilde{\pi}(\varepsilon_x * f)\cdot v \; d\mu(x) =$$

$$= \int_G \tilde{\pi}(\varepsilon_x)\cdot \tilde{\pi}(f)\cdot v \; d\mu(x) =$$

$$= \int_G \pi(x)\cdot\left(\tilde{\pi}(f)\cdot v\right) d\mu(x).$$

De acuerdo con la expresión (2), esto último es igual a

$$\pi(\mu)\cdot\left(\tilde{\pi}(f)\cdot v\right).$$

Hemos obtenido así que

$\tilde{\pi}(\mu) = \pi(\mu)$ sobre S. Pero S es denso en V, y tanto $\pi(\mu)$ como $\tilde{\pi}(\mu)$ son continuas. Luego $\pi(\mu) =$

$\tilde{\pi}(\mu)$ sobre V, y $\pi = \tilde{\pi}$. ///

De esta demostración se sigue de inmediato el corolario.

1.2 <u>Corolario</u>. Sea (π, V) una representación equicontinua de G, y sea

$$\tilde{\pi} : M^1 \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

un homomorfismo de álgebras que extiende a (π, V). Si para toda $v \in V$ la aplicación $G \longrightarrow V$ definida por $\mu \mapsto \tilde{\pi}(\mu) \cdot v$ es continua, entonces $\tilde{\pi}$ es continua para la topología de la convergencia acotada sobre $\mathrm{End}(V)$, y $\pi = \tilde{\pi}$.

///

Si la representación de G no es necesariamente equicontinua, entonces debemos exigir que G sea σ-compacto, obteniendo así el siguiente teorema, donde se denota con $\mathscr{C}'(G)$ al álgebra de las medidas sobre G, con soporte compacto. Recuérdese que la topología usual de $\mathscr{C}'(G)$ es la topología límite inductivo de los espacios de medidas $M_K(G) := \{\mu \in \mathscr{C}'(G) \mid \mathrm{Sop}(\mu) \subset K\}$, donde K corre sobre la familia de subconjuntos compacto de G:

$$\mathscr{C}'(G) = \varinjlim M_K(G)$$

3 <u>Teorema.</u> Si (π, V) es una representación continua de G, y si G es σ-compacto, entonces existe un único homomorfismo continuo de álgebras

$$\pi : \mathcal{C}'(G) \longrightarrow \mathrm{End}_b(V)$$

que extiende a la representación (π, V) de G.

Se dió una demostración de este teorema en [8]. Se obtiene otra, más económica, adaptando la demostración del teorema 1.1, como se bosqueja a continuación.

Demostración. Puesto que G es σ-compacto, existe una sucesión $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de G, tales que cada uno está contenido en el interior del siguiente:

$$K_j \subset \mathring{K}_{j+1} \qquad (j\in\mathbb{N}),$$

y de tal manera que todo subconjunto compacto de G está contenido en algún K_j. Se sabe que entonces la topología usual de $\mathcal{C}'(G)$ es la misma que la topología límite inductivo estricto de los espacios $M_{K_j}(G)$:

$$\mathcal{C}'(G) = \varinjlim M_{K_j}(G)$$

Para demostrar que una función definida sobre $\mathcal{E}'(G)$ es continua, es suficiente, pues, con demostrar que la función restringida a $\mathcal{M}_{K_j}(G)$ es continua, para toda j.

La fórmula de Segal:

$$\pi(\mu)\cdot v = \int_G \pi(x)\cdot v \, d\mu(x) \qquad (\mu \in \mathcal{E}'(G), \; v \in V)$$

(cf. [1], o con más detalles [8]) define un homomorfismo de álgebras

$$\pi : \mathcal{E}'(G) \longrightarrow \mathrm{End}_b(V).$$

Para demostrar que $\pi | \mathcal{M}_{K_j}(G)$

es continuo, úsese el argumento de la demostración de 1.1. Así se obtiene que π es continuo sobre $\mathcal{E}'(G)$.

Para demostrar la unicidad, obsérvese que el espacio $\mathcal{K}(G)$ de las funciones de G en $\mathbb{K}$, continuas y de soporte compacto, contiene una sucesión de Dirac, y que $\mathcal{K}(G)$ se sumerje continuamente en $\mathcal{E}'(G)$.

La demostración de la unicidad en el teorema anterior puede entonces adaptarse a este caso, usando aquí $\mathcal{K}(G)$ donde allí aparece $\mathcal{L}^1$.

///

Esta demostración tiene un corolario semejante al de la anterior.

.4 Corolario. Sea (π, V) una representación continua de un grupo σ-compacto G, y sea

$$\tilde{\pi} : \mathcal{C}'(G) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

un homomorfismo de álgebras, continuo para la topología de la convergencia puntual sobre $\mathrm{End}(V)$. Entonces $\tilde{\pi}$ es también continuo para la topología de la convergencia acotada sobre $\mathrm{End}(V)$ y $\tilde{\pi} = \pi$.

///

CAPITULO II

Los Espacios $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$ $(1 \leq \alpha \leq \infty)$.

En este capítulo se denotará con V un espacio localmente convexo sobre un campo $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Con S_V se denotará a la familia completa de seminormas continuas sobre V.

§ 1. Los Espacios $\mathcal{F}^{\alpha}_{V}$, asociados a un Espacio Localmente Compacto X.

Definición. Sea X un espacio localmente compacto. Fijos un número real $\alpha \geqslant 1$ y una medida de Radon λ sobre X, sea $\mathcal{F}^{\alpha}_{V} = \mathcal{F}^{\alpha}_{V}(X, \lambda)$ el conjunto de todas las funciones $\varphi : X \longrightarrow V$ tales que, para toda $p \in S_{\mathbb{V}}$, la integral

$$\int_X [p \circ \varphi(x)]^\alpha \, d\lambda(x)$$

existe y es finita.

Es claro que $\mathbb{F}_{\mathbb{V}}^{\alpha}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sobre este espacio vectorial definimos, para cada $p \in S_{\mathbb{V}}$ la funcional $\varphi \mapsto \|\varphi\|_{p,\alpha}$ como sigue:

$$\|\varphi\|_{p,\alpha} := \left(\int_X [p \circ \varphi(x)]^\alpha \, d\lambda(x) \right)^{1/\alpha} \tag{3}$$

Cuando $\mathbb{V} = \mathbb{C}$, el espacio $\mathbb{F}_{\mathbb{V}}^{\alpha}$ no es otro que el clásico espacio $\mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{C}}(X, \lambda)$ de las funciones $X \to \mathbb{C}$, de potencia α-ésima integrable, y la funcional definida por (3) resulta ser la seminorma $\|\cdot\|_\alpha$ de $\mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{C}}$.

Los siguientes lemas son bastante obvios, pero resultan útiles.

2.2 <u>Lema</u>. Para toda $\varphi \in \mathcal{F}^\alpha_V$ y toda $p \in S_V$, se cumple la igualdad

$$\|\varphi\|_{p,\alpha} = \|p \circ \varphi\|_\alpha$$

///

2.3 Lema. Una función $\varphi : X \to \mathbb{V}$ pertenece a $\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbb{V}}$ si y sólo si para toda $p \in S_{\mathbb{V}}$ la función $p \circ \varphi : X \to \mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{L}^{\alpha}_{C}$.

///

2.4 Proposición. Para toda $p \in S_{\mathbb{V}}$, la funcional $\|.\|_{p,\alpha} : \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbb{V}} \to \mathbb{R}$ es una seminorma.

Demostración. Se deben demostrar los tres hechos siguientes, para cada $p \in S_{\mathbb{V}}$:

(a) $\|\varphi + \psi\|_{p,\alpha} \leq \|\varphi\|_{p,\alpha} + \|\psi\|_{p,\alpha}$
$(\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbb{V}})$,

(b) $\|k\varphi\|_{p,\alpha} = |k| \, \|\varphi\|_{p,\alpha}$
$(k \in \mathbb{K}, \varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbb{V}})$,

(c) $\|0\|_{p,\alpha} = 0$.

Una propiedad elemental de una medida de Radon λ es que si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ son dos funciones con $f \geq g$, entonces

$$\int_X f \, d\lambda \geq \int_X g \, d\lambda .$$

Puesto que p es una seminorma, se tiene que para toda $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_V^\alpha$

$$[p\circ(\varphi+\psi)](x) = p\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) \leq$$

$$\leq p\circ\varphi(x) + p\circ\psi(x) \qquad (x\in X),$$

es decir que

$$p\circ(\varphi+\psi) \leq p\circ\varphi + p\circ\psi .$$

Así, utilizando el lema 2.2 y la desigualdad de Minkowski para funciones reales ([6] teor. 13.7), se obtiene que

$$\|\varphi+\psi\|_{p,\alpha} = \|p\circ(\varphi+\psi)\|_{\alpha}$$

$$= \left(\int_X (p\circ[\varphi+\psi])^{\alpha}\, d\lambda\right)^{1/\alpha}$$

$$\leq \left(\int_X (p\circ\varphi)^{\alpha}\, d\lambda\right)^{1/\alpha} + \left(\int_X (p\circ\psi)^{\alpha}\, d\lambda\right)^{1/\alpha}$$

$$= \|\varphi\|_{p,\alpha} + \|\psi\|_{p,\alpha} .$$

Esto demuestra (a).

Sean $k \in \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{V}$. Entonces

$$\|k\varphi\|_{p,\alpha} = \|p\circ k\varphi\|_{\alpha} = \|\,|k|\, p\circ\varphi\|_{\alpha}$$

$$= |k|\, \|\varphi\|_{p,\alpha}$$

lo cual demuestra (b).

En cuanto a la función cero, vemos que

$$\| 0 \|_{p,\alpha} = \| p \cdot 0 \|_{\alpha} = \| 0 \|_{\alpha} = 0 .$$

//

2.5 <u>Definición</u>. La topología localmente convexa sobre $\mathcal{F}_{V}^{\alpha}$ definida por la familia de seminormas

$$\{ \| . \|_{p,\alpha} \mid p \in S_{V} \}$$

se llama la <u>topología de la convergencia en la media de orden α</u>.

Consideraremos siempre a $\mathcal{F}_{V}^{\alpha}$ como dotado de esta topología. En otras palabras, $\mathcal{F}_{V}^{\alpha}$ estará dotado de la más fina de las topologías que vuelven continuas a todas estas seminormas $\| \cdot \|_{p,\alpha}$.

Se sabe que entonces cada semibola unitaria abierta

$$\mathring{U}_p = \{ \varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{V} \mid \|\varphi\|_{p,\alpha} < 1 \}$$

es una vecindad abierta del cero en $\mathcal{F}^{\alpha}_{V}$ y que la familia

$$\{ \mathring{U}_p \mid p \in S_V \}$$

es una sub-base del filtro de vecindades del cero en $\mathcal{F}^{\alpha}_{V}$. Veremos que en realidad se trata de una base de dicho filtro.

2.6 Lema. La familia de semi-bolas abiertas $\{\dot{U}_p \mid p \in S_V\}$ es una base del filtro de vecindades de cero en $\mathcal{F}_V^\alpha$.

Demostración. Dadas $p, q \in S_V$, sea $r \in S_V$ la seminorma continua sobre V definida por

$$r = \max\{p, q\}.$$

Se demostrará que entonces

$$\dot{U}_r \subset \dot{U}_p \cap \dot{U}_q.$$

Para ello, considérese una función $\varphi \in \dot{U}_r$; tenemos que

$$r(\varphi(x)) \geq p(\varphi(x)) \qquad (x \in X),$$

es decir que $r\circ\varphi \geq p\circ\varphi$. Se sigue que

$$\|\varphi\|_{p,\alpha} = \left(\int_X (p\circ\varphi)^\alpha \, d\lambda\right)^{1/\alpha} \leq \left(\int_X (r\circ\varphi)^\alpha \, d\lambda\right)^{1/\alpha}$$

$= \|\varphi\|_{r,\alpha} < 1$, y por tanto que $\varphi \in \mathring{U}_p$. Análogamente se obtiene que $\|\varphi\|_{q,\alpha} < 1$ y así

$\varphi \in \mathring{U}_p \cap \mathring{U}_q$.

///

2.7 <u>Proposición</u>. Si $T \subset S_V$ es una base de seminormas continuas para V, entonces el conjunto

$$\{\|\cdot\|_{q,\alpha} \mid q \in T\}$$

es una base de seminormas continuas para $\mathcal{F}_V^\alpha$.

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una seminorma continua sobre $\mathcal{F}_V^\alpha$. Por el lema 2.6, existen una $p \in S_V$ y una constante $C_1 > 0$, talas que

$$\|\varphi\| \leq C_1 \|\varphi\|_{p,\alpha} \quad (\varphi \in \mathcal{F}_V^\alpha) \tag{i}$$

Por hipótesis, existen una $q \in T$ y una constante $C_2 > 0$, tales que

$$p(v) \leq C_2\, q(v) \qquad (v \in V).$$

Tenemos entonces que

$$(p \circ \varphi)(x) \leq C_2 (q \circ \varphi)(x) \quad (x \in X, \varphi \in \mathcal{F}_V^\alpha).$$

Así pues,

$$\int_X (p \circ \varphi)^\alpha \, d\lambda \leq C_2 \int_X (q \circ \varphi)^\alpha \, d\lambda$$

y

$$\|\varphi\|_{p,\alpha} \leq C_2 \|\varphi\|_{q,\alpha} \tag{ii}$$

De (i) y (ii) obtenemos inmediatamente que

$$\|\varphi\| \leq C_3 \|\varphi\|_{q,\alpha} \qquad (\varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{V})$$

donde $C_3 = C_1 C_2$ es una constante positiva.

///

§2 Espacios F^{α}_{V}.

2.8 Definición. Se denotará con F^{α}_{V} al espacio de Hausdorff asociado a $\mathcal{F}^{\alpha}_{V}$. En otras palabras F^{α}_{V} es igual a $\mathcal{F}^{\alpha}_{V}$ módulo la adherencia del cero:

$$F^{\alpha}_{V} := \mathcal{F}^{\alpha}_{V} \big/ \overline{\{0\}}$$

Se denotará con $\dot{\varphi}$ a la clase de la función $\varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{V}$, en F^{α}_{V}.

Recuérdese que se dice que dos funciones definidas sobre X son iguales <u>λ-casi dondequiera</u> (abreviado λ-c.d.) cuando existe un conjunto $N \subset X$, con $\lambda(N) = 0$ tal que $\varphi(x) = \psi(x)$ $(x \in N^c)$.

2.9 <u>Teorema</u>. Si V es metrizable, y $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_V^\alpha$, entonces son equivalentes:

(i) $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$,

(ii) $\varphi(x) = \psi(x)$ λ-c.d.

<u>Demostración</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$, entonces $\dot{\varphi} - \dot{\psi} = \dot{0}$, y recíprocamente. Por tanto, es suficiente demostrar que $\dot{\varphi} = \dot{0} \Rightarrow \varphi = 0$ λ-c.d.

Sea $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de seminormas continuas para V. Según el resultado 2.7, $\{\|\cdot\|_{p_i,\alpha}\}$ es una base de seminormas continuas para $\mathcal{F}_V^\alpha$. Se sigue que $\dot{\varphi}=\dot{0}$ si y sólo si $\|\varphi\|_{p_i,\alpha}=0$ $(i\in\mathbb{N})$:

$$\int_X (p_i\circ\varphi)^\alpha \, d\lambda = 0 \qquad (i\in\mathbb{N}).$$

Esto significa que para cada índice i, existe un conjunto N_i de medida cero, tal que

$$(p_i\circ\varphi)^\alpha(x)=0 \qquad (x\in N_i^c)$$

Por tanto

$$(p_i\circ\varphi)^\alpha(x)=0 \qquad \left(i\in\mathbb{N},\ x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(N_i^c)\right)$$

Puesto que la unión de una familia numerable de conjuntos de medida cero, tiene medida cero, hemos encontrado un conjunto $N = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$, con $\lambda(N) = 0$ y tal que

$$(p_i \circ \varphi)^{\alpha}(x) = 0 \qquad (i \in \mathbb{N},\ x \in N^c).$$

Luego

$$\|\varphi\|^{\alpha}_{p_i,\alpha} = \int_X (p_i \circ \varphi)^{\alpha}(x) = 0 \qquad (i \in \mathbb{N},\ x \in N^c)$$

y $\varphi = 0$ λ-c.d.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\varphi = 0$ λ-c.d. implica que $p_i \circ \varphi = 0$ λ-c.d. y por tanto que

$$\|\varphi\|^{\alpha}_{p_i,\alpha} = \int_X (p_i \circ \varphi)^{\alpha}\, d\lambda = 0 \qquad (i \in \mathbb{N})$$

y que $\dot{\varphi} = \dot{0}$.

////

El teorema 2.9 nos dice que, para $\mathbb{V}$ metrizable, podemos escribir

$$F^{\alpha}_{\mathbb{V}} = \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbb{V}} / \sim ,$$ siendo $\sim$ la relación de equivalencia:

$$\varphi \sim \psi \iff \varphi = \psi \quad \lambda\text{-c.d.}$$

Para $\mathbb{V}$ arbitrario, tenemos que

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} \iff \|\varphi\|_{p,\alpha} = \|\psi\|_{p,\alpha} \quad (p \in S_{\mathbb{V}}).$$

Por tanto, podemos definir una seminorma $\|.\|_{p,\alpha} : F^{\alpha}_{\mathbb{V}} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(p \in S_{\mathbb{V}})$ como

$$\|\dot{\varphi}\|_{p,\alpha} = \|\varphi\|_{p,\alpha} .$$

En seguida veremos una generalización del teorema Fischer-Riesz ([10], teor. 11.7), al caso en que $\mathbb{V}$

es metrizable y completo (i.e. un espacio de Fréchet). Para ello, necesitaremos algunos resultados preliminares, entre ellos la generalización del Teorema de la Convexidad Numerable, que aparece en [2] Cap IV, §3, nº2, teor. 1, para el caso en que $V = \mathbb{R}$; aquí se demostrará para V cualquier espacio localmente convexo.

2.10 <u>Teorema</u> (<u>Teorema de la Convexidad Numerable</u>). Sea $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_V^\alpha$. Para $1 \leq \alpha < \infty$, se tiene que

$$\|\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i\|_{p,\alpha} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\varphi_i\|_{p,\alpha} \quad (p\in S_V).$$

<u>Demostración</u>. $\|\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\|_{p,\alpha} = \|p\circ(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i)\|_\alpha$

$= \|p\circ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\|_\alpha$.

Por la continuidad de p, esto último es igual a

$$\| \lim_{n\to\infty} p\circ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \|_\alpha$$

y puesto que p es una seminorma, esta expresión se convierte en

$$\| \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p\circ\varphi_i \|_\alpha = \| \sum_{i=1}^{\infty} p\circ\varphi_i \|_\alpha$$

Como $p\circ\varphi_i$ es una función de X en $\mathbb{R}^+$, podemos utilizar el Teorema de la Convexidad Numerable para funciones reales positivas [7] Cap IV, §3, nº 2, teor 1., obteniendo que

$$\| \sum_{i=1}^{\infty} p\circ\varphi_i \|_\alpha \leq \sum_{i=1}^{\infty} \| p\circ\varphi_i \|_\alpha$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\alpha} \,.$$

///

2.11 <u>Teorema</u>. Sea V un espacio metrizable, y sea $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_V^\alpha$ una sucesión tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\alpha} < \infty$ para toda p en una base T de seminormas continuas de V. Entonces

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} p\circ\varphi_i(x) < \infty$ λ-c.d. en X, para toda $p\in S_V$.

Además, si se define

$$\varphi(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) & \text{si (i) se cumple para } x \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

entonces

(ii) $\varphi \in \mathcal{F}_V^\alpha$, y

(iii) $\|\varphi - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\|_{p,\alpha} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\alpha}$

$(p\in S_V)$; i.e. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi$ en $\mathcal{F}_V^\alpha$.

Demostración. Utilizando el Teorema de la Convexidad Numerable, se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} p \circ \varphi_i \right\|_{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\alpha} < \infty$$

para toda $p \in T$, y por tanto para toda $p \in S_{\mathcal{V}}$. De esto se sigue inmediatamente (i).

Para demostrar (ii), obsérvese que, aplicando 2.10, se tiene que

$$\left(\int_X (p \circ \varphi)^{\alpha} \, d\lambda \right)^{1/\alpha} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\alpha} < \infty$$

y $\varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{V}}$.

En cuanto a (iii), se tiene que $\varphi \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)$, de lo cual se sigue

$$\| \varphi - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \|_{p,\alpha} \leq \| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \|_{p,\alpha}$$

$$= \| \sum_{i=n+1}^{\infty} \varphi_i \|_{p,\alpha} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \| \varphi_i \|_{p,\alpha} .$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{n+1}^{\infty} \| \varphi_i \|_{p,\alpha} = 0$, esto significa que φ es la suma de la serie de término general φ_i, para la topología de la convergencia en la media de orden α. //

2.12 <u>Teorema</u> (<u>Teorema de Fischer-Riesz generalizado</u>). Si V es un espacio de Fréchet, entonces también F_V^α es de Fréchet.

Demostración. Sea $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una base de seminormas continuas para V.

Por la prop. 2.7, $\{\|\cdot\|_{p_j,\alpha}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de seminormas continuas para la topología de F_V^α, y como éste es por definición un espacio de Hausdorff, se sigue que es metrizable.

Sólo resta demostrar que F_V^α es completo. Es suficiente demostrar que es sucesionalmente completo (i.e. que toda sucesión de Cauchy en F_V^α tiene límite en F_V^α), según se sigue de [10], prop. 8.2.

Podemos suponer que la sucesión $\{p_j\}$ es no decreciente:

$$p_j(v) \leq p_{j+1}(v) \qquad (j\in\mathbb{N}, v\in V)$$

y por tanto que $\{\|\cdot\|_{p_j,\alpha}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es no decreciente:

$$\|\dot{\varphi}\|_{p_j,\alpha} \leq \|\dot{\varphi}\|_{p_{j+1},\alpha} \quad (j\in\mathbb{N},\ \dot{\varphi}\in F^{\alpha}_{\nabla}).$$

Consideremos ahora una sucesión de Cauchy $\{\dot{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F^{\alpha}_{\nabla}$.

Para cada $j\in\mathbb{N}$, existe un índice n_j tal que

$$\|\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n\|_{p_j,\alpha} < 2^{-j} \quad (n,m \geq n_j).$$

Sea $\dot{\psi}_j := \dot{\varphi}_{n_{j+1}} - \dot{\varphi}_{n_j}$. Entonces

$$\|\dot{\psi}_j\|_{p_i,\alpha} < 2^{-i} \qquad (i \leq j), \text{ y}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_i(\dot{\psi}_j) < \sum_{j=1}^{i-1} p_i(\dot{\psi}_j) + \sum_{j=i}^{\infty} 2^{-i} < \infty$$

$(i\in\mathbb{N})$.

Se sigue ahora de 2.11 que

existe una $\dot{\psi} \in F^{\alpha}_{\mathbb{V}}$ que es la suma de la serie de término general $\dot{\psi}_j$, y $\dot{\varphi} := \dot{\psi} + \dot{\varphi}_{n_1}$ será límite de la sucesión $\{\dot{\varphi}_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Así $\dot{\varphi}$ es punto de acumulación de $\{\dot{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y como esta sucesión es de Cauchy, $\dot{\varphi} = \lim_{n \to \infty} \dot{\varphi}_n$. ///

§3. <u>Funciones definidas casi dondequiera</u>.

Si una función φ que toma valores en $\mathbb{V}$ está definida λ-c.d. sobre X (i.e. si existe un conjunto medible $Y \subset X$, con $\lambda(Y^c)=0$, tal que $\varphi : Y \to \mathbb{V}$ está definida), entonces, para cada $p \in S_{\mathbb{V}}$, la composición $p \circ \varphi$ está definida

λ-c.d. sobre X. Por tanto, tiene sentido preguntarse si

$$\int_X (p \circ \varphi)^\alpha \, d\lambda < \infty \qquad (4)$$

(por ejemplo, definiendo $p \circ \varphi(x) = 0$ para $x \in Y^c$).

En caso de que se cumpla (4) para toda seminorma continua $p \in S_V$, podemos considerar a φ como elemento de F_V^α. Si se procede así, entonces F_V^α no resulta ser un espacio vectorial, puesto que el inverso aditivo de una función que no está definida sobre todo X, no está bien definido.

Sin embargo, F_V^α sí es un

espacio vectorial. Este espacio $\mathcal{F}^{\alpha}_{\nabla}$ resulta ser el mismo, ya sea que se considere que una función definida λ- c.d. (pero no donde quiera) sobre X puede pertenecer a $\mathcal{F}^{\alpha}_{\nabla}$, o no.

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{\nabla}$, $\varphi = \psi$ c.d., es claro que $\|\varphi\|_{p,\alpha} = \|\psi\|_{p,\alpha}$ $(p \in S_{\nabla}, 1 \leq \alpha < \infty)$ (Cf. la demostración de 2.9). Por ello, se obtiene esencialmente la misma teoría, incluyendo a las funciones definidas sólo λ-c.d, que excluyéndolas. Esta posibilidad no debe, pues, causar ninguna confusión.

§4. Espacios $\mathcal{L}^\alpha_V$.

Denotaremos con $\mathcal{K}_V = \mathcal{K}_V(X)$ al conjunto de funciones $X \to V$ continuas de soporte compacto.

2.13 Teorema. $\mathcal{K}_V \subset \mathcal{F}^\alpha_V$ $(1 \leq \alpha < \infty)$.

Demostración. Sea $p \in S_V$, y sea $\varphi \in \mathcal{K}_V$. La función $p \circ \varphi : X \to \mathbb{R}$ es composición de dos aplicaciones continuas y como tal es continua.

Si $\varphi = 0$, entonces $p \circ \varphi = 0$, por tanto $\mathrm{Sop}(p \circ \varphi) \subset \mathrm{Sop}(\varphi)$ y el soporte de $p \circ \varphi$ es compacto.

Así pues, $p \circ \varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Pero $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}}$

Por 2.3, tenemos entonces que $p \circ \varphi \in \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}}$ y $\varphi \in \mathcal{F}^\alpha_V$.

///

2.14 <u>Definición</u>. El <u>espacio</u> <u>de</u> <u>las</u> <u>funciones</u> <u>de</u> <u>potencia</u> <u>α-ésima</u> <u>integrable</u> <u>de</u> <u>X</u> <u>en</u> <u>V</u>, denotado $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}(X,\lambda)$ o simplemente $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$ es la cerradura en $\mathcal{F}^{\alpha}_{V}$ de $\mathcal{K}_{V}$.

2.15 <u>Lema</u>. Si V es de Fréchet, entonces $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$ es la completación de $\mathcal{K}_{V}$ para la topología de la convergencia en la media de orden α.

<u>Demostración</u>. Se sigue inmediatamente de la definición y el teorema 2.12.

////

2.16 <u>Definición</u>. Se denotará con $L^{\alpha}_{V} = L^{\alpha}_{V}(X,\lambda)$ al espacio de Hausdorff asociado a $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$.

Si $\varphi \in \mathcal{L}^{\alpha}_{V}$, $\dot{\varphi}$ denotará la clase de φ en L^{α}_{V}.

2.16 Teorema. Para $1 \leq \alpha < \infty$, se satisfacen:

(i) $\{\|.\|_{p,\alpha} \mid p \in S_V\}$ es una base de seminormas continuas para $\mathcal{L}^{\alpha}_V$.

(ii) Si $T \subset S_V$ es una base de seminormas continuas para V, entonces $\{\|.\|_{p,\alpha} \mid p \in T\}$ es una base de seminormas continuas para $\mathcal{L}^{\alpha}_V$.

(iii) Si V es metrizable, entonces L^{α}_V es metrizable.

(iv) Si V es espacio de Fréchet, entonces L^{α}_V es también de Fréchet.

Demostración. (i) y (ii) se siguen inmediatamente de 2.6 y 2.7 y el hecho de que $\mathcal{L}^{\alpha}_V$ es un subespacio vectorial de F^{α}_V.

Puesto que $\mathcal{L}^{\alpha}_V$ es cerrado en

F_V^α, tenemos que L_V^α es cerrado en F_V^α. Esto, junto con 2.12 da de inmediato (iii) y (iv).

///

Se dice que una función $\varphi : X \to V$ es una <u>función escalonada</u> si tiene la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{Y_i} \cdot v_i$$

donde $\chi_{Y_i} : X \to \mathbb{R}$ es la función característica de un conjunto relativamente compacto $Y_i \subset X$, y $v_i \in V$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Se denotará con $\Sigma_V = \Sigma_V(X)$ al conjunto de todas las funciones escalonadas de X en V.

Se sabe ([5] teor. 13.23)

que $\Sigma_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{K}}$ $(1 \leq \alpha < \infty)$ y además $\Sigma_{\mathbb{K}}$ es denso en $\mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{K}}$.

Nuestro siguiente resultado es una generalización de este teorema clásico.

2.17 Teorema. Sea V un espacio de Fréchet. Entonces para cada α, $1 \leq \alpha < \infty$, Σ_V es un subespacio denso de $\mathcal{L}^{\alpha}_V$.

Demostración. Sean $\varphi \in \Sigma_V$, $p \in S_V$. Si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{Y_i} \cdot v_i$ entonces $p \circ \varphi \leq \sum_{i=1}^{n} p(v_i) \cdot \chi_{Y_i}$.

Por tanto $p \circ \varphi \in \Sigma_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{R}}$ y $\varphi \in \mathcal{L}^{\alpha}_V$.

Así pues, $\bar{\Sigma}_V \subset \mathcal{L}^\alpha_V$.

Si consideramos a $\bar{\Sigma}_V$, $\bar{\Sigma}_{\mathbb{K}}$ como dotados de la topología de la convergencia en la media de orden α, evidentemente

$$\bar{\Sigma}_{\mathbb{K}} \otimes V \cong \bar{\Sigma}_V$$

como espacios de Fréchet, donde $\bar{\Sigma}_{\mathbb{K}} \otimes V$ tiene la topología proyectiva del producto tensorial (Grothendieck [4], Cap. I, def. 2). Siguiendo la notación de Grothendieck, denotaremos con $\bar{\Sigma}_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} V$ a la completación de $\bar{\Sigma}_{\mathbb{K}} \otimes V$ respecto a la topología mencionada.

Es bien conocido que toda función $\varphi \in \mathcal{K}_V$ puede aproximarse uniformemente por combinaciones lineales de funciones $f_i \cdot v_i$ $(f_i \in \mathcal{K}(X, \mathbb{K})$, $v_i \in V)$ donde los soportes de las f_i están todos contenidos en un compacto fijo.

Puesto que, sobre el conjunto de funciones en $\mathcal{K}(X, \mathbb{K})$ con soporte en un compacto fijo, la topología de la convergencia uniforme es más fina que la topología de la convergencia en la media de orden α ([2] Cap. IV, §3, nº3, Prop. 4), se sigue que toda $\varphi \in \mathcal{K}_V$ puede aproximarse, para la topología de la convergencia en la media de orden α, por funciones de la forma $f_i \cdot v_i$, i.e. por funciones pertenecientes a $\mathcal{K}_{\mathbb{K}} \otimes V$.

Por tanto el producto tensorial proyectivo $\mathcal{K}_{\mathbb{K}} \otimes V$ es denso en $\mathcal{K}_V$, y por tanto en $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$.

Aplicando ahora la proposición 3, inciso (a) de [4] para el caso de espacios metrizables, obtenemos que

$$\overline{\mathcal{K}}_V = \mathcal{K}_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} V = \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} V$$

$$= \Sigma_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} V = \overline{\Sigma}_V . ///$$

.18 Corolario. El producto tensorial proyectivo $\mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{K}} \otimes V$ es denso en $\mathcal{L}^{\alpha}_{V}$.

§ 5. El Espacio Λ^1_V de Grothendieck.

En [4], Cap. 1, §2, nº 2, A. Grothendieck introduce el espacio $\Lambda^1_V = \Lambda^1_V(\lambda)$ que llama el espacio de las funciones absolutamente sumables (respecto a λ) de X en V. (Daremos su definición en seguida). Grothendieck denota con L^1_V al completado de Λ^1_V. El propósito de este § es hacer ver que el espacio

$\mathcal{L}^1_V$ de Grothendieck es el mismo que nuestro espacio $\mathbb{L}^1_V$.

Sea V un espacio localmente convexo, $S_V = \{p_\iota\}_{\iota \in I}$ la familia de las seminormas continuas sobre V.

Sea E_ι el espacio de Banach completado del espacio cociente de V por el subespacio $N_\iota :=$ $\{v \in V \mid p_\iota(v) = 0\}$; E_ι estará dotado de la norma que se obtiene de p_ι por paso al cociente. Esta norma se escribirá también p_ι. Sea $u_\iota : V \longrightarrow E_\iota$ la aplicación canónica.

Una aplicación $\varphi : X \to V$ se llama <u>absolutamente sumable</u>

si para toda $z \in I$, $u_z \circ \varphi$ es una aplicación absolutamente sumable de X en el espacio de Banach E_z.

Al espacio de funciones absolutamente sumablales de X en V lo dota Grothendieck de la topología que define la familia de seminormas

$$\| \varphi \|_{p_z, 1} = \int_X p_z(\varphi(x)) \, d\lambda(x) .$$

Al espacio localmente convexo de Hausdorff asociado a este espacio lo denota con Λ^1_V. Con L^1_V denota al completado de Λ^1_V.

Es fácil ver que, como observa el mismo Grothendieck, las funciones continuas de soporte compacto de X en V forman un subespacio denso de $\mathcal{L}^1_V$, y por tanto de L^1_V.

Así pues, L^1_V en la definición de Grothendieck puede considerarse como el espacio de Hausdorff asociado a la completación de $\mathcal{K}_V$ respecto a la topología definida por la familia de seminormas $\|\cdot\|_{p_2,1}$. Es decir que su definición coincide con la que hemos dado aquí.

CAPITULO III

Convolución.

§0. Introducción.

En este capítulo veremos que el clásico producto de convolución $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \times \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{K}}$ puede considerarse como caso particular de un producto $\mathcal{F}^1_V \times \mathcal{F}^\alpha_V \longrightarrow \mathcal{F}^\alpha_V$, o bien de $\mathcal{L}^1_V \times \mathcal{L}^\alpha_V \longrightarrow \mathcal{L}^\alpha_V$, donde V es un espacio localmente convexo arbitrario. Esta concepción más general conserva muchas de las propiedades que se dan en el caso clásico de las funciones numéricas. Otras propiedades de la convolución requieren de la hipótesis de que V es un espacio de Fréchet.

En este capítulo, E denotará siempre a un espacio de Fréchet, mientras que V denotará a un espacio localmente convexo sin hipótesis adicionales. Con S_E (resp. S_V) se denotará la familia completa de seminormas continuas de E (resp. V).

Como en el Capítulo I, G denotará aquí un grupo localmente compacto; $\mathcal{L}_V^\alpha$, $\mathcal{F}_V^\alpha$, L_V^α, F_V^α serán siempre los espacios asociados a G, respecto a una medida de Haar λ, izquierda fija.

Se denotará con l (resp. r) a la representación regular izquierda (resp. derecha) de G

sobre un espacio localmente convexo $\mathcal{S}$ cuyos elementos son funciones definidas λ-c.d. sobre G (o bien clases de equivalencia de tales funciones).

Más específicamente, l es un homomorfismo de grupos

$$l : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$$

de G en el grupo de automorfismos continuos de $\mathcal{S}$, homomorfismo definido por

$$(l(x)\cdot\varphi)(y) := \varphi(x^{-1}y)$$

$(x, y \in G, \ \varphi \in \mathcal{S})$.

Análogamente, el homomorfismo

$$r : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$$

está definido por

$$(r(x)\cdot\varphi)(y) := \varphi(yx)$$

$(x, y \in G, \quad \varphi \in \mathcal{S})$.

Si $(\pi, \mathcal{S})$ es una representación de G, escribiremos $\pi(x)\cdot\varphi(y)$ en lugar de $(\pi(x)\cdot\varphi)(y)$. Así, por ejemplo

$$l(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y).$$

§1. Definición del Producto de Convolución. Propiedades Básicas.

Los resultados sobre la representación regular izquierda que a continuación se presentan tienen sus análogos para la representación regular derecha. Dejamos al lector la tarea de formularlos explícitamente.

3:1 <u>Proposición</u>. La representación regular izquierda l de G sobre $\mathcal{F}^{\alpha}_{E}$ (resp. F^{α}_{E}) es equicontinua. El subespacio $\mathcal{L}^{\alpha}_{E}$ (resp. L^{α}_{E}) de $\mathcal{F}^{\alpha}_{E}$ (resp. F^{α}_{E}) es invariante bajo l.

<u>Demostración</u>. Consideremos el caso de $\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbf{E}}$. Para demostrar que $(l, \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathbf{E}})$ es equicontinua debemos hacer ver que

(i) Para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{E}$, la aplicación $x \longmapsto l(x)\cdot\varphi$ de G en $\mathcal{F}^{\alpha}_{E}$ es continua, y

(ii) El conjunto de operadores $\{l(x) \mid x \in G\} \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{F}^{\alpha}_{E})$ es equicontinuo.

El teor. 20.4 (i) de [5] afirma que para cada $f \in \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{R}}$, la aplicación $G \longrightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{R}}$ dada por $x \mapsto l(x) \cdot f$ es continua.

Sea $p \in S_E$, y sea $\varphi \in \mathcal{F}^{\alpha}_{E}$, entonces

$$\| l(x) \cdot \varphi - l(y) \cdot \varphi \|_{p,\alpha} =$$

$$= \| p \circ (l(x) \cdot \varphi - l(y) \cdot \varphi) \|_{\alpha}$$

$$= \| l(x) \cdot (p \circ \varphi) - l(y)(p \circ \varphi) \|_{\alpha}$$

Puesto que $p \circ \varphi \in \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{R}}$ (lema 2.3), tenemos que

$$\| l(x) \cdot (p \circ \varphi) - l(y)(p \circ \varphi) \|_{\alpha} \longrightarrow 0$$

en $\mathbb{R}$, cuando $x \longrightarrow y$ en G. Puesto que esto se cumple para toda $p \in S_E$, tenemos que

$l(x)\cdot\varphi \longrightarrow l(y)\cdot\varphi$ para cada $\varphi\in\mathcal{F}_E^\alpha$ fija, siempre que $x\to y$ en G, y se ha demostrado (i).

Para demostrar (ii) observemos que para cada $p\in S_E$ y cada $\varphi\in\mathcal{F}_E^\alpha$ tenemos que

$$\|\varphi\|_{p,\alpha}^\alpha = \int_G (p\circ\varphi(y))^\alpha\, d\lambda(y)$$

$$= \int_G (p\circ\varphi(x^{-1}y))^\alpha\, d\lambda(y)$$

$$= \int_G (p\circ l(x)\cdot\varphi(y))^\alpha\, d\lambda(y)$$

$$= \| l(x)\cdot\varphi\|_{p,\alpha}.$$

De manera que $l(x)$ conserva cada seminorma continua de $\mathcal{F}_E^\alpha$, por tanto, se satisface la relación (1) p. 12 y el conjunto de operadores $\{ l(x) \mid x \in G \}$ es equicontinuo.

Esto demuestra que la representación regular izquierda de G sobre $\mathcal{F}^{\alpha}_{E}$ es continua, y más aún, equicontinua.

Sea $\varphi : G \to E$ una función continua de soporte compacto: $\varphi \in \mathcal{K}_{E}$, y sea $x \in G$, entonces la función $l(x)\cdot\varphi : G \to E$ es la composición de las funciones continuas

$$y \longmapsto x^{-1}y \quad , \quad y \longmapsto \varphi(y)$$

y como tal es continua.

Sea $K = \operatorname{Sop} \varphi$. Entonces

$\varphi(y) = 0 \quad (y \in K^c)$, luego

$\varphi(x^{-1}y) = 0 \quad (x^{-1}y \in K^c)$, es decir que

$l(x)\cdot\varphi(y) = 0 \quad (y \in (xK)^c)$, y el

compacto xK contiene al soporte

de $l(x)\cdot\varphi$ (de hecho, _es_ el soporte de φ). Por tanto $l(x)\cdot\varphi \in \mathcal{K}_E$

i.e. $\quad l(x)\cdot\mathcal{K}_E \subset \mathcal{K}_E \quad (x \in G)$

y $\mathcal{K}_E$ es invariante bajo l.

Puesto que $\mathcal{K}_E$ es denso en

$\mathcal{L}^\alpha_E$, y cada operador $l(x)$ es

continuo, se sigue que

$$l(x)\cdot\mathcal{L}^\alpha_E \subset \mathcal{L}^\alpha_E \quad (x \in G),$$

es decir que $\mathcal{L}^\alpha_E$ es invariante

bajo la representación regular

izquierda.

Sean $\varphi, \psi \in F_V^\alpha$. Es claro que $\varphi = \psi$ λ-c.d. $\Longleftrightarrow l(x)\cdot\varphi = l(x)\cdot\psi$ λ-c.d. $(x \in G)$.

Por el teorema 2.9, tenemos entonces que la clase de $l(x)\cdot\varphi$ en F_V^α no depende sino de la clase de φ en F_E^α:

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} \Longleftrightarrow l(x)\dot{\varphi} = l(x)\dot{\psi}$$

y podemos considerar a l como una representación de G sobre el espacio de Hausdorff F_E^α.

Que $l(x)\mathcal{L}_E^\alpha \subset \mathcal{L}_E^\alpha$ $(x \in G)$ se sigue inmediatamente de la invariancia de $\mathcal{L}_E^\alpha$ bajo l.

///

Puesto que F_E^α y L_E^α son espacios de Fréchet, y las representaciones (l, F_E^α), (l, L_E^α) de G son equicontinuas (cf. teoremas 2.12, 2.16 y proposición 3.1) se cumplen para dichas representaciones todas las hipótesis del teorema 1.1, el cual aplicaremos obteniendo un homomorfismo de álgebras

$$l: M^1 \longrightarrow \mathrm{End}\,(F_E^\alpha)$$

(resp. $l: M^1 \longrightarrow \mathrm{End}\,(L_E^\alpha)$),

del álgebra M^1 de las medidas acotadas sobre G en el álgebra de los endomorfismos continuos de F_E^α (resp. L_E^α). Este homomorfismo es continuo cuando $\mathrm{End}(F^{\alpha}_{E})$ (resp. $\mathrm{End}(L^{\alpha}_{E})$) está dotada de la topología de la convergencia acotada. Recuérdese que escribimos entonces $\mathrm{End}_b(F^{\alpha}_{E})$ (resp. $\mathrm{End}_b(L^{\alpha}_{E})$).

3.2 <u>Definición</u>. El <u>producto de convolución</u>, o la <u>convolución</u> de una medida acotada μ sobre G y una función $\varphi \in F^{\alpha}_{E}$, denotado por $\mu * \varphi$, está dado por

$$\mu * \varphi := l(\mu)\cdot\varphi = \int_G l(x)\cdot\varphi \, d\mu(x)$$

donde se trata de la integral de una función $G \to F^{\alpha}_{E}$, i.e. de una integral Bochner-Bourbaki.

Como se observó en el Capítulo I, $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ puede identificarse con una subálgebra de M^1, lo cual nos da por restricción un homomorfismo continuo de álgebras

$$l : \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathrm{End}_b(F^\alpha_E)$$

$$(\text{resp. } l : \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathrm{End}_b(L^\alpha_E)),$$

de manera que podemos definir

3.3 <u>Definición</u>

$$f * \dot{\varphi} := l(f)\cdot\dot{\varphi} = \int_G f(x)\, l(x)\cdot\dot{\varphi}\, d\lambda(x)$$

$(f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}, \ \dot{\varphi} \in F^\alpha_E)$.

Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ son

$\dot{f} = \dot{g}$ en $L^1_{\mathbb{K}}$, entonces

$f = g$ λ-c.d. y entonces

para cada $\dot{\varphi} \in F^{\alpha}_{E}$,

$$f * \dot{\varphi} = \int_G f(x)\, l(x) \cdot \dot{\varphi}\, d\lambda(x)$$

$$= \int_G g(x)\, l(x) \cdot \dot{\varphi}\, d\lambda(x) = g * \dot{\varphi}.$$

Esto nos permite la

siguiente definición

3.4 <u>Definición</u>.

$$\dot{f} * \dot{\varphi} := f * \dot{\varphi}$$

$$(\dot{f} \in L^1_{\mathbb{K}},\ \dot{\varphi} \in F^{\alpha}_{E})$$

También llamamos a esta operación '$*$' la <u>convolución</u>

$l(\mu)\cdot\dot{\varphi} \in F_E^\alpha$. En otras palabras,

$$\mu * \dot{\varphi} = \int_G l(x)\cdot\dot{\varphi}\, d\mu(x) \in F_E^\alpha$$

$(\mu \in M^1,\ \dot{\varphi} \in F_E^\alpha)$ y (i) ~~está~~ demostrado. ///

3.6 Teorema. Las aplicaciones

(i) $M^1 \times F_E^\alpha \longrightarrow F_E^\alpha$

(ii) $M^1 \times L_E^\alpha \longrightarrow L_E^\alpha$

definidas por $(\mu, \dot{\varphi}) \mapsto \mu * \dot{\varphi}$;

(iii) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \times F_E^\alpha \longrightarrow F_E^\alpha$

(iv) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \times L_E^\alpha \longrightarrow L_E^\alpha$

definidas por $(f, \dot{\varphi}) \mapsto f * \dot{\varphi}$;

(v) $L^1_K \times F_E^\alpha \longrightarrow F_E^\alpha$

(vi) $L^1_K \times L_E^\alpha \longrightarrow L_E^\alpha$

definidas por $(\dot{f}, \varphi) \mapsto \dot{f} * \varphi$, son todas continuas.

<u>Demostración</u>. (i) es consecuencia inmediata del teorema 1.1. En efecto, el homomorfismo

$$l : M^1 \longrightarrow \mathrm{End}(F^\alpha_E)$$

es continuo para la topología de la convergencia acotada en $\mathrm{End}(F^\alpha_E)$. Por tanto l es también continuo si consideramos a $\mathrm{End}(F^\alpha_E)$ como dotada de la topología de la convergencia simple, o puntual. Es decir que la aplicación

$$M^1 \times F^\alpha_E \longrightarrow F'^\alpha_E$$

$$(\mu, \varphi) \mapsto l(\mu) \cdot \varphi = \mu * \varphi$$

es separadamente continua. Como

se trata de una aplicación bilineal, M^1 es de Banach y F_E^α es de Fréchet, se sigue del corolario al teorema 34.1 de [10] que la aplicación

$$(\mu, \varphi) \longmapsto \mu * \varphi$$

es continua.

Los incisos (ii) — (vi) pueden demostrarse análogamente, o bien obtenerse como consecuencias del (i). ////

§2. Una forma alternativa de escribir la convolución.

Aún en el caso en que $V = \mathbb{R}$, no es fácil demostrar que

$$\int_G l(x)\, f(y)\, d\mu(x) =$$

$$= \left(\int_G l(x)\cdot f \, d\mu(x) \right)(y),$$

i.e. que da lo mismo aplicar primero $l(x)\cdot f$ a un punto $y \in G$ y después integrar la función $G \to \mathbb{R}$ que así resulta, que integrar primero la función $x \mapsto l(x)\cdot f$, $G \to \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{R}}$ y después aplicar la integral al punto y.

Aquí daremos una demostración de este hecho, demostración que es válida para funciones reales y para funciones con valores en cualquier espacio de Fréchet.

3.7 <u>Def.</u> En esta § (y sólo en ésta) denotaremos con $\hat{*}$ la aplicación $\mathcal{M}^1 \times \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}} \to \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}}$

dada por

$$(\mu, f) \mapsto \mu \hat{*} f := \int_G l(x) \cdot f(y) \, d\mu(x)$$

$$= \int_G f(x^{-1}y) \, d\mu(x) \qquad (\mu \in \mathcal{M}^1, f \in \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}}).$$

(Veremos que $\hat{*} = *$).

Que esta aplicación $\mathcal{M}^1 \times \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}} \to \mathcal{L}^\alpha_{R}$ está bien definida y es continua es bien conocido. Una demostración (con la notación $*$) se encuentra en [5] Cap. V, § 20.

3.8 <u>Teorema</u>. Para toda $\mu \in M^1$, $\dot{\varphi} \in F_E^\alpha$, $y \in G$, se cumple:

$$\left(\int_G l(x) \cdot \dot{\varphi} \, d\mu(x) \right)(y) =$$

$$= \int_G l(x) \cdot \varphi(y) \, d\mu(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x^{-1}y) \, d\mu(x).$$

<u>Demostración</u>. Demostraremos que existe un homomorfismo continuo de álgebras

$$\hat{l} : M^1 \longrightarrow End_s(F_V^\alpha)$$

dado por la regla de correspondencia

$$\tilde{l}(\mu) \cdot \dot{\varphi}\,(y) = \int_G \varphi(x^{-1}y) \, d\mu(x)$$

y tal que $\tilde{l}$ extiende a la representación (l, F_E^α) de G.

Entonces 3.8 se seguirá inmediatamente del Corolario 1.2.

Para ello debemos demostrar que

(a) $\tilde{l}(\mu)\cdot\varphi \in F_E^\alpha \quad (\mu \in M^1, \varphi \in F_E^\alpha)$,

(b) la aplicación $F_E^\alpha \to F_E^\alpha$ dada por $\varphi \mapsto \tilde{l}(\mu)\cdot\varphi$ es un endomorfismo continuo $(\mu \in M^1)$,

(c) la aplicación $\mu \mapsto \tilde{l}(\mu)$ es continua,

(d) $\tilde{l}$ es $\mathbb{K}$-lineal y

$\tilde{l}(\mu * \mu') = \tilde{l}(\mu)\circ\tilde{l}(\mu') \quad (\mu, \mu' \in M^1)$

y

(e) $\tilde{l}(\varepsilon_x) = l(x) \quad (x \in G)$

donde $\varepsilon_x \in M^1$ es la medida de Dirac en x.

Sean $\mu \in M^1$, $\varphi \in \mathcal{F}_E^\alpha$, $p \in S_E$.

Entonces

$$\int_G \left[p\cdot(\tilde{\ell}(\mu)\cdot\varphi)\right]^\alpha d\lambda =$$

$$= \int_G \left(p\left[\int_G \varphi(x^{-1}y)\, d\mu(x)\right]\right)^\alpha d\lambda(y)$$

$$\leq \int_G \left(\int_G p\circ\varphi(x^{-1}y)\, d\mu(x)\right)^\alpha d\lambda(y)$$

(Cf. [2], Chap. III, §3, nº3, prop. 6).

Como $p\circ\varphi \in \mathcal{L}^\alpha_{\mathbb{R}}$, tenemos que esta última expresión es igual a

$$\int_G \left[\mu \hat{*} (p\circ\varphi)\right]^\alpha d\lambda$$

la cual a su vez ([6] teor. 20.12)

es menor o igual a

$$\|\mu\|^\alpha \|p\circ\varphi\|_\alpha^\alpha = \|\mu\|^\alpha \|\dot\varphi\|_{p,\alpha}^\alpha .$$

Así pues,

$$\int_G [p\circ(\tilde{l}(\mu)\cdot\dot\varphi)]^\alpha \, d\lambda \leq \|\mu\|^\alpha \|\dot\varphi\|_{p,\alpha}^\alpha < \infty$$

y (a) está demostrado.

Además hemos obtenido la desigualdad

$$\|\tilde{l}(\mu)\cdot\dot\varphi\|_{p,\alpha} \leq \|\mu\| \, \|\dot\varphi\|_{p,\alpha} \qquad (5)$$

la cual nos dice que la aplicación $M^1 \times F_E^\alpha \to F_E^\alpha$ es continua. Puesto que la aplicación es claramente K-bilineal, quedan demostrados (b) y (c).

Sean $\mu, \mu' \in M^1$, entonces para cada e' en el dual topológico E' de E, cada $\varphi \in F_E^\alpha$ y cada $y \in G$,

$$\langle \tilde{l}(\mu * \mu') \cdot \varphi(y), e' \rangle$$

$$= \left\langle \int_G l(x) \cdot \varphi(y) \, d(\mu * \mu')(x), e' \right\rangle$$

$$= \int_G \langle l(x) \cdot \varphi(y), e' \rangle \, d(\mu * \mu')(x)$$

$$= \iint_{G\,G} \langle l(x) \cdot l(z) \cdot \varphi(y), e' \rangle \, d\mu(x) \, d\mu'(z)$$

$$= \int_G \left\langle \int_G l(x) \cdot l(z) \cdot \varphi(y) \, d\mu(x), e' \right\rangle d\mu'(z)$$

$$= \int_G \langle \tilde{l}(\mu) \cdot l(z) \cdot \varphi(y), e' \rangle \, d\mu'(z)$$

$$= \int_G \langle l(z) \cdot \varphi(y), {}^t\tilde{l}(\mu) \cdot e' \rangle \, d\mu'(z)$$

$$= \left\langle \int_G l(z)\cdot\varphi(y)\, d\mu'(z),\ {}^t\tilde{l}(\mu)\cdot e' \right\rangle$$

$$= \left\langle \tilde{l}(\mu')\cdot\varphi(y),\ {}^t\tilde{l}(\mu)\cdot e' \right\rangle$$

$$= \left\langle \tilde{l}(\mu)\circ\tilde{l}(\mu')\cdot\varphi(y)\ ,\ e' \right\rangle$$

y puesto que E' separa los puntos de E, (d) queda demostrado.

Si en la expresión

$\int_G \varphi(x^{-1}y)\, d\mu(x)$ tomamos

$\mu = \varepsilon_z$, obtenemos $\varphi(z^{-1}y)$

$= l(z)\cdot\varphi(y)$. Esto demuestra

(e), y termina la demostración del teorema.

////

3.9 Teorema. Para toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ y toda $\varphi \in F^\alpha_E$,

$$(\dot{f} * \varphi)(y) = (f * \varphi)(y)$$

$$= \left(\int_G f(x)\, l(x) \cdot \varphi \, d\lambda(x) \right)(y)$$

$$= \int_G f(x)\, \varphi(x^{-1}y)\, d\lambda(x).$$

Demostración. La aplicación $\tilde{l} : M^1 \longrightarrow End(F^\alpha_E)$ coincide con l. Por tanto su restricción a $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ coincide con la restricción de l a la misma subálgebra.

//

3.10 Corolario. Para toda $\mu \in M^1$, toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$ y toda $g \in \mathcal{L}^{\alpha}_{\mathbb{R}}$,

(i) $\mu * g = \mu \hat{*} g$

(ii) $f * g = f \hat{*} g$. ///

§4. Otras Propiedades de la Convolución.

La relación (5) obtenida durante la demostración de 3.8, p. 88, nos permite dar mayor exactitud a la conclusión del teorema 3.6, obteniendo el siguiente

3.11 Teorema. Para toda $\mu \in M^1$, toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ y toda $\varphi \in F^{\alpha}_{E}$

(i) $\|\mu * \dot{\varphi}\|_{p,\alpha} \leq \|\mu\| \, \|\dot{\varphi}\|_{p,\alpha}$

(ii) $\|f * \dot{\varphi}\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_1 \, \|\dot{\varphi}\|_{p,\alpha}$. ///

3.12 Proposición. Para toda $f \in \mathcal{L}^1_K$, $x, y \in G$, $\dot{\varphi} \in F^\alpha_E$,

(i) $(\ell(x) \cdot f) * \dot{\varphi}(y)$

$$= f * \dot{\varphi}(x^{-1}y) = \ell(x) \cdot (f * \dot{\varphi})(y)$$

(ii) $(f * r(x) \cdot \dot{\varphi})(y)$

$$= f * \dot{\varphi}(y(x)) = r(x) \cdot (f * \dot{\varphi})(y).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 3.9. ///

§ 5. El Caso de un Espacio Localmente Convexo Arbitrario.

Si V es un espacio localmente convexo (sin hipótesis adicionales), es posible definir una "convolución" $M^1 \times F^\alpha_V \longrightarrow F^\alpha_V$, pero esta "convolución" carecerá de muchas de las propiedades que surgen en el caso de los espacios de Fréchet.

3.13 <u>Definición</u>. La convolución '$*$' está dada por

$$(\mu * \dot{\varphi})(y) = \int_G \varphi(x^{-1}y)\, d\mu(x)$$

$$f * \dot{\varphi}(y) = \int_G f(x)\, l(x)\, \varphi(y)\, d\lambda(x)$$

donde φ es cualquier ~~repre~~ sentante de $\dot{\varphi}$. ($\mu \in M^1$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$, $\dot{\varphi} \in F^\alpha_V$)

3.14 <u>Proposición</u>. Si V es un espacio localmente convexo de Hausdorff, entonces la convolución $M^1 \times F^\alpha_V \to F^\alpha_V$ es continua, y $\|\mu * \dot{\varphi}\|_{p,\alpha} \le \|\mu\|\,\|\dot{\varphi}\|_{p,\alpha}$.

<u>Demostración</u>. Si V es Hausdorff, entonces su dual topológico V'

separa los puntos de V. Esto permite adaptar a este caso la demostración del teorema 3.8, obteniendo que

$$\tilde{l} : M^1 \longrightarrow End_s(F_V^{\alpha})$$

es un homomorfismo de álgebras ($\tilde{l}$, por supuesto, es como en la demostración de 3.8). La definición 3.13 puede escribirse como

$$\mu * \varphi := \tilde{l}(\mu) \cdot \varphi$$

y por tanto la convolución es continua; la desigualdad

$$\| \mu * \varphi \|_{p,\alpha} \leq \| \mu \| \; \| \varphi \|_{p,\alpha}$$

no es entonces otra cosa que (5) p. 88. ///

Problemas. (1) ¿Será verdad entonces que $M^1 * L^\alpha_V \subset L^\alpha_V$?

No es posible adaptar a este caso la demostración que dimos para el caso de los espacios de Fréchet.

(2) ¿Se cumplirá la igualdad

$$\int \varphi(x^{-1}y)\, d\mu(x) =$$

$$= \left(\int l(x)\cdot \varphi \, d\mu(x)\right)(y) \; ?$$

(Me imagino que no.)

La proposición 3.14 tiene el siguiente corolario:

3.15 <u>Corolario</u>. Si V es de Hausdorff, entonces la convolución $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \times F^\alpha_V \to F^\alpha_V$ es continua. Más aún,

$$\|f * \varphi\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_1 \; \|\varphi\|_{p,\alpha} \qquad ///$$

§6. Convolución de dos funciones con valores en una B_0-álgebra.

En esta § se denotará con A un álgebra (= álgebra asociativa) localmente convexa, completa y de Hausdorff.

En primer lugar, recordaremos algunos de los términos que suelen aparecer en la teoría de tales álgebras.

Una B_0-álgebra es un álgebra localmente convexa, metrizable y completa.

Se sabe ([10] teor. 24.) que si A es una B_0-álgebra, entonces existe una base numerable $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ para la familia S_A de las seminormas continuas sobre A, tal que

(i) $p_j(a) \geq p_{j+1}(a)$ $\quad (j \in \mathbb{N},\ a \in A)$ y

(ii) $p_j(ab) \leq p_{j+1}(a)\, p_{j+1}(b)$

$(j \in \mathbb{N};\ a, b \in A)$.

(Es obvio que, recíprocamente, la existencia de una base de S_A que cumpla (i) y (ii) implica que A es una B_0-álgebra.)

Si, para la B_0-álgebra A, (ii) puede fortalecerse a la condición

(ii') $p_j(ab) \leq p_j(a)\, p_j(b)$

$(j \in \mathbb{N};\ a, b \in A)$,

entonces se dice que A es una $\tilde{F}$-álgebra (Cf. [7], def. 4.1) (*)

Si se tienen un álgebra <u>localmente convexa</u> A, una

(*) Siempre que se de una base de S_A, con A una B_0-álgebra (resp. $\tilde{F}$-álgebra) se supondrá que la base cumple (i) y (ii), ((i) y (ii')) función $\varphi : G \longrightarrow A$, y $a \in A$, entonces se denota con $\varphi \cdot a$ la función $G \longrightarrow A$ dada por

$$\varphi \cdot a\,(x) = \varphi(x) \cdot a \qquad (x \in G).$$

Evidentemente, si $\varphi = \psi$ λ-c.d., entonces $\varphi \cdot a = \psi \cdot a$ λ-c.d. $(a \in A)$. Por tanto, si $\dot{\varphi} \in F^{\alpha}_{A}$ $(= F^{\alpha}_{A}(G, \lambda))$, podemos escribir $\dot{\varphi} \cdot a \in F^{\alpha}_{A}$ y esta función $\dot{\varphi} \cdot a$ estará bien definida.

3.16 <u>Proposición</u>. Sea A un álgebra localmente convexa, completa, de Hausdorff. La aplicación

$$a \longmapsto \rho(a)$$

donde $\rho(a)\cdot\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\cdot a \quad (\dot{\varphi} \in F^\alpha_A)$

define un homomorfismo continuo de álgebras

$$\rho : A \longrightarrow End_b(F^\alpha_A).$$

Demostración. Sean $a \in A$, $\dot{\varphi} \in F^\alpha_A$.

Para cada seminorma continua p sobre A, tenemos que (por la continuidad del producto en A), existen seminormas continuas q, r sobre A tales que

$$\int_G [p\circ(\varphi\cdot a)(x)]^\alpha \, d\lambda(x)$$

$$\leq \int_G [q\circ\varphi(x)\cdot r(a)]^\alpha \, d\lambda(x)$$

$$= \int_G [r(a)]^\alpha \, [q \cdot \varphi(x)]^\alpha \, d\lambda(x)$$

$$= r(a)^\alpha \, \|\varphi\|_{q,\alpha}^\alpha < \infty .$$

Esto significa que $\varphi \cdot a \in F_A^\alpha$

y que

$$\|\varphi \cdot a\|_{p,\alpha} \leq r(a) \, \|\varphi\|_{q,\alpha} \qquad (6).$$

Sea $\mathcal{B} \subset F_A^\alpha$ un conjunto acotado. Entonces existe un real $k > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{q,\alpha} \leq k \qquad (\varphi \in \mathcal{B}).$$

Luego si $a_i \to 0$ en A,

$$\|\varphi \cdot a_i\|_{p,\alpha} \leq r(a_i)\, k \to 0$$

en $\mathbb{R}$. Como esto es válido para toda seminorma continua

p, tenemos que $i_j \cdot a_i \to 0$ uniformemente sobre $\mathcal{B}$.

Por tanto la aplicación

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_b(F^\alpha_A)$$

es continua. Que ρ es homomorfismo de las estructuras algebraicas, es obvio. ///

3.17 <u>Proposición</u>. Sea A como en 3.16. Entonces la aplicación $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_b(\mathcal{L}^\alpha_A)$ está bien definida y es un homomorfismo continuo de álgebras.

<u>Demostración</u>. En virtud de la proposición 3.16, es suficiente demostrar que $\rho(a)\mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$

para toda $a \in A$.

Sea $\varphi \in \mathcal{K}_A$. Entonces

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \cdot a = 0.$$ Por tanto

$$\mathrm{Sop}\,(\varphi . a) \subset \mathrm{Sop}\,(\varphi).$$

Además la continuidad del producto en A nos asegura que $\varphi . a$ es continua. Así pues,

$$\varphi \cdot a \in \mathcal{K}_A$$

y $$\rho(a) \cdot \mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}_A \qquad (a \in A).$$

Puesto que $\mathcal{K}_A$ es denso en $\mathcal{L}^2_A$, y ρ es continua, tenemos que

$$\rho(a) \cdot \mathcal{L}^2_A \subset \mathcal{L}^2_A \qquad (a \in A).$$

///

3.18 Teorema. Sea A una $\mathcal{B}_0$-álgebra (resp. $\mathcal{F}$-álgebra), y sea ρ como en 3.16. Entonces

$$\|\dot{\varphi} \cdot a\|_{p_j,\alpha} \leq p_{j+1}(a) \, \|\dot{\varphi}\|_{p_{j+1},\alpha}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \|\dot{\varphi} a\|_{p_j,\alpha} \leq p_j(a) \, \|\dot{\varphi}\|_{p_j,\alpha}\right)$$

para toda $a \in A$ y toda $\dot{\varphi} \in F_A^\alpha$.

Demostración. Si en la demostración de 3.16 sustituímos p por p_j, q por p_{j+1}, y r por p_{j+1}, tendremos la demostración de 3.18 para el caso de $\mathcal{B}_0$-álgebras.

El caso de las $\mathcal{F}$-álgebras se demuestra análogamente. ///

Sea $\pi : G \to \mathrm{Aut}(F_A^\alpha)$ una representación equicontinua de G (véase la p. 11). Entonces la aplicación $(\pi \times \rho) : \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \times A \to \mathrm{End}_b(F^\alpha_A)$

definida por

$$(\pi \times \rho)(\dot{f}, a) := \pi(\dot{f}) \circ \rho(a)$$

es claramente un homomorfismo continuo de álgebras. En particular es una aplicación $\mathbb{K}$-bilineal y continua.

Considerando a $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ y a A como espacios vectoriales, localmente convexos, se obtiene su producto tensorial proyectivo completado $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} A$, según la def. 2, del capítulo 1, [4].

Entonces (Op. Cit. capítulo 1, teor 2) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} A \cong \mathcal{L}^1_A$ como espacios vectoriales topológicos. (El § 5 del Cap. II nos permite aplicar este teorema.)

Si V es cualquier espacio localmente convexo, se sabe [Op. cit, cap. 1, prop. 5] que a cada aplicación bilineal y continua

$$\Phi : \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \times A \longrightarrow V'$$

le corresponde una única aplicación lineal y continua

$$\Phi' : \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} A \longrightarrow V'$$

tal que

$$\Phi'(f \otimes a) = \Phi(f, a)$$

$(f \in \mathcal{L}^1_K, \ a \in A)$.

3.19 Def. Si $(\pi, \mathcal{F}^{\alpha}_{A})$ es una representación equicontinua de G, donde A es una B_0-álgebra. Se denotará entonces

$$\hat{\pi} : \mathcal{L}^1_A \longrightarrow \mathrm{End}_b(\mathcal{F}^\alpha_A)$$

a la única aplicación $\mathbb{K}$-lineal y continua de $\mathcal{L}^1_A$ en $\mathrm{End}_b(\mathcal{F}^\alpha_A)$ tal que

$$\hat{\pi}(\dot{f} \otimes a) = (\pi \times \rho)(\dot{f}, a)$$

$(\dot{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}, \; a \in A)$.

. Aplicando esta definición al caso en que π es igual a la representación regular izquierda l, obtendremos la convolución entre elementos de $\mathcal{L}^1_A$, como veremos en seguida.

3.20 <u>Definición</u>. Para $\dot{\varphi} \in \mathcal{L}^1_A$, $\dot{\psi} \in \mathcal{F}^\alpha_A$, definimos la convolución $\dot{\varphi} * \dot{\psi}$

como

$$\dot{\varphi} * \dot{\psi} := \hat{l}(\dot{\varphi}) \cdot \dot{\psi}$$

3.21 <u>Teorema.</u> Para toda B_0-álgebra A y toda $1 \leq \alpha < \infty$, se tiene que

(i) $\mathcal{L}^1_A * \mathcal{F}^\alpha_A \subset \mathcal{F}^\alpha_A$

(ii) $\mathcal{L}^1_A * \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$

(iii) $k(\dot{\varphi} * \dot{\psi}) = (k\dot{\varphi}) * \dot{\psi} = \dot{\varphi} * k\dot{\psi}$

$(k \in \mathbb{K},\ \dot{\varphi} \in \mathcal{L}^1_A,\ \dot{\psi} \in \mathcal{F}^\alpha_A)$

(iv) $(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) * \dot{\psi} = \dot{\varphi}_1 * \dot{\psi} + \dot{\varphi}_2 * \dot{\psi}$

$(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \in \mathcal{L}^1_A,\ \dot{\psi} \in \mathcal{F}^\alpha_A)$

(v) $\dot{\varphi} * \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = \dot{\varphi} * \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} * \dot{\psi}_2$

$(\dot{\varphi} \in \mathcal{L}^1_A,\ \dot{\psi} \in \mathcal{F}^\alpha_A)$

(vi) $\| \dot{\varphi} * \dot{\psi} \|_{p_j, \alpha} \leq \| \dot{\varphi} \|_{p_{j+1}, 1} \ \| \dot{\psi} \|_{p_{j+1}, \alpha}$

$(\dot{\varphi} \in \mathcal{L}^1_A \,,\ \dot{\psi} \in \mathcal{F}^\alpha_A \,,\ j \in \mathbb{N})$

(vii) Si A es $\mathcal{F}$-álgebra, entonces

$$\| \dot{\varphi} * \dot{\psi} \|_{p_j, \alpha} \leq \| \dot{\varphi} \|_{p_j, 1} \; \| \dot{\psi} \|_{p_j, \alpha}$$

(viii) $\dot{f} \cdot a * \dot{\psi} = \dot{f} * a \dot{\psi} \quad (f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}, a \in A, \dot{\psi} \in \mathcal{F}^\alpha_A)$.

<u>Demostración</u>. Las proposiciones (i), (iii), (iv) y (v) se siguen inmediatamente de la definición.

Para obtener (ii), recuérdese que $l(x) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$ (prop. 3.1) y por tanto $l(\dot{f}) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$ $(\dot{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}})$. También $\rho(a) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$ (prop. 3.17).

Luego

$$(l \times \rho)(f, a) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$$

y

$$\hat{l}(f \otimes a) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A$$

$(\dot f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$, $a \in A)$, i.e. (por linealidad),

$$\hat{l}(\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \otimes A) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A .$$

Pero $\mathcal{L}^\alpha_A$ es completo, y $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \hat{\otimes} A \cong \mathcal{L}^1_A$ es la completación de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \otimes A$ (para la topología proyectiva del producto tensorial, la misma topología para la cual $\hat{l}$ es continua). Por tanto

$$\hat{l}(\mathcal{L}^1_A) \cdot \mathcal{L}^\alpha_A \subset \mathcal{L}^\alpha_A .$$

Esto demuestra (ii).

Para cada $\dot f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ y cada $a \in A$, se tiene, dada $\dot\psi \in \mathcal{F}^\alpha_A$,

$$\dot f \cdot a * \dot\psi(y) = \int_G (\dot f(x)\, a)\, \dot\psi(x^{-1}y)\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_G \dot f(x)\cdot\left(a\,\dot\psi\,(x^{-1}y)\right)\, d\lambda\,(y)$$

$= \dot f * a\dot\psi\,(y)$. Así, (viii) queda demostrada. Aplicando ahora 3.18, tenemos que

$$\|\dot f\cdot a * \dot\psi\|_{p_j,\alpha} = \|\dot f * a\dot\psi\|_{p_j,\alpha}$$

$$\leq \|\dot f\|_1 \; p_j(a)\, \|\dot\psi\|_{p_{j+1},\alpha}$$

$$= \|\dot f\cdot a\|_{p_j,1}\, \|\dot\psi\|_{p_{j+1},\alpha}.$$ Así, hemos demostrado (vi) para el caso de las funciones de la forma $\dot\varphi = \dot f\cdot a$ con $\dot f \in L^1_{\mathbb{K}}$, $a \in A$. Como estas funciones constituyen un subespacio denso de L^1_A (Cf. 2.18), (vi) queda

demostrada. La demostración de (vii) es análoga a la de (vi).

////

§ 7. $\mathcal{L}^1_A$ como Algebra de Convolución.

En esta §, como en el anterior, A denotará un álgebra localmente convexa, completa y de Hausdorff.

En el § 6, encontramos una aplicación $\mathbb{K}$-bilineal y continua

$$\mathcal{L}^1_A \times F^\alpha_A \to F^\alpha_A \qquad (1 \leq \alpha < \infty).$$

Se demostró que esta aplicación, que llamamos "convolución", cuando se restringe a $\mathcal{L}^1_A \times \mathcal{L}^\alpha_A$, toma valores en $\mathcal{L}^\alpha_A$:

$$L^1_A * L^\alpha_A \subset L^\alpha_A .$$

(Para A una B_0- álgebra).

En el presente § restringiremos nuestra atención al caso $\alpha = 1$; estudiaremos a L^1_A como álgebra, donde el producto es la convolución. Puesto que por "álgebra" entendemos "álgebra asociativa", primero demostraremos que el producto de convolución en L^1_A es asociativo.

3.22 <u>Proposición</u>. Para toda terna de funciones $\dot\varphi, \dot\psi, \dot\chi \in L^1_A$, se cumple la igualdad

(i) $\quad \dot\varphi * (\dot\psi * \dot\chi) = (\dot\varphi * \dot\psi) * \dot\chi .$

<u>Demostración</u>. Usando el hecho de que la convolución es $\mathbb{K}$-bilineal y continua (teor. 3.21) y 2.18, vemos que es suficiente demostrar (i) para el caso en que

$$\dot{\varphi} = \dot{f}\cdot a \quad , \quad \dot{\psi} = \dot{g}\cdot b \quad , \text{ con}$$

$$\dot{f}, \dot{g} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \; ; \quad a, b \in A .$$

Consideremos, pues, dicho caso:

$$(\dot{f}\cdot a) * ((\dot{g}\cdot b) * \dot{\chi}) =$$

$$= \hat{\ell}(\dot{f}\cdot a)\cdot(\hat{\ell}(\dot{g}\cdot b)\cdot\dot{\chi})$$

$$= \left[\ell(\dot{f})\circ\rho(a)\circ\ell(\dot{g})\circ\rho(b)\right]\cdot\dot{\chi} .$$

Aplicando 3.21, (viii) esto se convierte en

$$\left[\ell(\dot{f})\circ\dot{\ell}(\dot{g})\circ\rho(a)\circ\rho(b)\right]\cdot\dot{\chi}$$

y como ℓ, ρ son ambos homomofismos de álgebras, tenemos que

$$\left[\ell(\dot{f})\circ \ell(\dot{g})\circ\rho(a)\circ\rho(b)\right]\cdot\dot{\chi}$$

$$=\left[\ell(\dot{f*g})\circ\rho(ab)\right]\cdot\dot{\chi}$$

$$=\hat{\ell}\left((\dot{f}*\dot{g})\cdot(ab)\right)\cdot\dot{\chi}$$

$$=\hat{\ell}\left((\dot{f}\cdot a)*(\dot{g}\cdot b)\right)\cdot\hat{\chi}$$

$$=\left((\dot{f}\cdot a)*(\dot{g}\cdot b)\right)*\dot{\chi}\,. \qquad ////$$

Esta proposición 3.22 nos da los elementos que faltaban para obtener el siguiente teorema.

3.23 <u>Teorema</u>. $\mathcal{L}^1_A$ es un álgebra topológica, completa, de Hausdorff, localmente convexa. ///

3.24 Teorema. Sea A una B_0-álgebra (resp. $\mathcal{F}$-álgebra, álgebra de Banach). Entonces L^1_A es una B_0-álgebra (resp. $\mathcal{F}$-álgebra, álgebra de Banach).

Demostración. Si A es una B_0-álgebra, consideremos una base de seminormas continuas $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que satisfaga las condiciones (i) y (ii), p. 98.

Entonces, por 2.7, $\{\|\cdot\|_{p_j,1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de seminormas continuas para L^1_A. Es claro que

$$\|\dot{\varphi}\|_{p_j,1} \geq \|\dot{\varphi}\|_{p_{j+1},1}$$

$(j \in \mathbb{N}, \dot{\varphi} \in L_A^1)$.

Por el teorema 3.21, (vi), se tiene que

$$\|\dot{\varphi} * \dot{\psi}\|_{p_j,1} \leq \|\dot{\varphi}\|_{p_{j+1},1} \|\dot{\psi}\|_{p_{j+1},1}$$

$(j \in \mathbb{N}, \dot{\varphi}, \dot{\psi} \in L_A^1)$.

Se sigue que L_A^1 es una B_0-álgebra.

El caso de una F-álgebra puede demostrarse análogamente.

Puesto que un álgebra de Banach es una F-álgebra cuya topología está definida por una sola seminorma, el caso de un álgebra de Banach se obtiene como corolario.

////

Obsérvese que sobre un subespacio denso de L^1_A, el producto de convolución tiene la forma

$$(\dot{\varphi} * \dot{\psi})(y) = \left(\int \dot{\varphi}(x)\, l(x) \cdot \dot{\psi}\, d\lambda(x) \right)(y)$$

$$= \int \dot{\varphi}(x) \cdot \dot{\psi}(x^{-1}y)\, d\lambda(x).$$

Bibliografía.

[1] A. Borel, Représentations de Groupes Localement Compacts, Lecture Notes in Math., 276, Springer-Verlag (1972).

[2] N. Bourbaki, Intégration, chaps. I - IV, Act. Sci. Ind. 1175 (1963).

[3] N. Bourbaki, Intégration, chaps. VII, VIII, Act. Sci. Ind. 1306 (1963).

[4] A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques, et Espaces Nucléaires, Mem. Am. Math Soc. 16 (1955).

[5] E. Hewitt & K.A. Ross,
Abstract Harmonic Analysis, V. 1
(1963).

[6] E. Hewitt & K. Stromberg,
Real and Abstract Analysis,
Springer - Verlag (1965).

[7] E.A. Michael, Locally Multiplicatively - Convex Topological Algebras, Mem. Am. Math. Soc., 11, (1952).

[8] E. Rodríguez Carrington, Representaciones de Grupos Localmente Compactos, Tesis de Licenciatura (1979)

[9] ~~Zarenko~~ W. Żelazko, On the locally bounded and m-convex topological algebras, Stud. Math. T. XIX, (1960).