

00381

10/1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MÉTODO DEL PROMEDIO Y ESTABILIDAD
BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES CON APLI
CACIONES A SINCRONIZACION RACIONAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

HUMBERTO CARRILLO CALVET

México, D.F.

Enero, 1984

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN.**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

EL METODO DEL PROMEDIO Y ESTABILIDAD BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES CON APLICACIONES A SINCRONIZACION RACIONAL.

Capítulo I. INTRODUCCION

1. El método del promedio.
2. Estabilidad bajo disturbios persistentes.
3. Vecindades estables.
4. Sincronización racional (phase locking).

Capítulo II. PRELIMINARES.

1. Notación y suposiciones generales.
2. Funciones casi periódicas.
3. Estabilidad de soluciones y órbitas.
4. Funciones generalizadas de Lyapounov.
5. Cambios de variables.
6. Estabilidad bajo disturbios persistentes.
7. Ecuaciones que dependen de un parámetro pequeño.
8. El método del promedio.
9. Teoremas de Bogolyubov sobre la validez del método del promedio.

Capítulo III. VECINDADES ESTABLES.

1. Definición.
2. Vecindades estables y estabilidad bajo disturbios persistentes.
3. Vecindades estables y el método del promedio.

Capítulo IV. VECINDADES ESTABLES PARA ORBITAS.

1. Estabilidad orbital bajo disturbios persistentes.
2. Vecindades orbitalmente estables.
3. El método de la aproximación promedio para las órbitas.

Capítulo V. SINCRONIZACION RACIONAL.

1. Definición.
2. Sistemas acoplados débilmente.
3. Sincronización de relojes biológicos.
4. Sistemas electrónicos de retroalimentación Circuitos sincrónicos.

REFERENCIAS CITADAS.

REFERENCIAS SUPLEMENTARIAS.

INTRODUCCION

La mayoría de las ecuaciones diferenciales no admiten solución exacta ni una descripción cualitativa. La teoría de Perturbaciones ofrece una colección muy útil de métodos para el estudio de ecuaciones cercanas a ecuaciones de una forma específica.

V.I. Arnold.

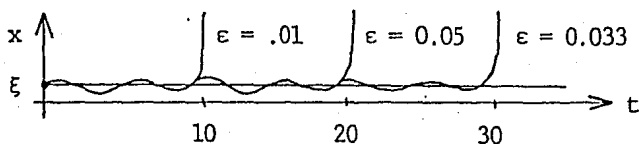
Esta tesis es sobre métodos asintóticos de la teoría de las perturbaciones, especialmente sobre el método del promedio. El asunto de mayor interés es la validez uniforme de las aproximaciones sobre el intervalo $[0, \infty]$. En este respecto los capítulos III y IV contribuyen resultados nuevos a los fundamentos del método del promedio. Estos resultados son para ecuaciones que tienen soluciones con propiedades de estabilidad. Para probarlos el concepto de estabilidad bajo disturbios persistentes juega un papel crucial. El capítulo V contiene aplicaciones al estudio de las propiedades de sincronización de sistemas con un parámetro pequeño. El capítulo II contiene una revisión de material relacionado con los teoremas que se prueban en los capítulos restantes. En el texto se dan referencias precisas para las demostraciones de todos los teoremas que se usan. Solo los resultados nuevos se prueban aquí.

1. EL METODO DEL PROMEDIO.

El método del promedio es uno de los métodos más importantes de la teoría de las perturbaciones. Este se aplica en una variedad de campos incluyendo la mecánica y la teoría de oscilaciones. La idea del método era conocida ya por Gauss, Laplace y Lagrange quienes lo usaron para el estudio del movimiento planetario.

La intuición que respalda al método es muy simple: Un sistema sujeto a una perturbación que oscila muy rápido siente solamente el efecto promedio de la perturbación, a primera aproximación. No obstante, proveer de una base teórica al método ha sido un reto para los matemáticos. Varios físicos matemáticos Soviéticos le han prestado atención a este problema, entre ellos N.M. Krylov y N.N. Bogolyubov fueron pioneros que hicieron muchas contribuciones en las décadas de los treinta, cuarentas y cincuenta. A pesar de todos los avances la justificación matemática del método está lejos de ser completa. Uno de los problemas viejos es el de la validez de la aproximación promedio durante intervalos infinitos de tiempo. Se sabe que para todas las soluciones la aproximación es uniformemente válida sobre intervalos finitos de tiempo de la forma $[0, 1/\epsilon]$ donde ϵ es el parámetro pequeño. Este es un resultado muy fuerte pero tie

ne la siguiente debilidad: Sin importar que tan pequeña tome mos la ϵ , a la larga, la solución aproximada podría alejarse mucho de la solución de la ecuación exacta. La siguiente figura muestra un ejemplo ilustrando este hecho.



En la figura se supone que $x = \xi$ es una solución de la ecuación promediada y que las otras curvas son soluciones de la ecuación exacta para diferentes valores de ϵ .

El ejemplo 6 del capítulo II muestra que efectivamente la aproximación promedio durante lapsos infinitos no es uniformemente válida en general y aún para soluciones Lyapounov-estables puede fallar. Una de las contribuciones principales de este trabajo es probar que para soluciones estables bajo disturbios persistentes la aproximación promedio es uniformemente válida sobre el intervalo $[0, \infty]$.

2, ESTABILIDAD BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES

Hay dos problemas importantes que los matemáticos aplicados deben tener en cuenta:

- (i) El estado de un sistema no puede medirse exactamente y
- (ii) La ecuación diferencial que gobierna la evolución de un sistema dado es en el mejor de los casos una aproximación que resulta de modelar un sistema ideal similar.

El primero es el problema de estabilidad de las soluciones con respecto a cambios en las condiciones iniciales; el segundo es el problema de estabilidad de las soluciones respecto a cambios en la ecuación diferencial (i.e., estabilidad estructural). La propiedad de estabilidad bajo disturbios persistentes (e.d.p.) garantiza la estabilidad de las soluciones en estos dos sentidos y por esto algunos autores la llaman también estabilidad total.

El matemático soviético I.G. Malkin ha hecho las más notables investigaciones sobre e.d.p.. El probó que otras condiciones de estabilidad, aparentemente más débiles, implican e.d.p.. Para obtener esta conclusión Malkin probó primero que la existencia de una función de Lyapounov con derivadas parciales aco-

tadas implica e.d.p.. Este teorema trae la pregunta de cuando los teoremas inversos de Lyapounov son válidos. En este respecto el trabajo de J.L. Massera ha jugado un papel importante. T. Yoshizawa ha hecho también contribuciones relevantes en esta área, que incluyen refinamientos de los teoremas de Malkin y resultados similares para soluciones acotadas bajo disturbios persistentes. En el capítulo IV vamos a introducir el concepto de estabilidad orbital bajo disturbios persistentes y probar un teorema análogo al de Malkin para este nuevo concepto de estabilidad. Otra importante generalización del teorema de Malkin ha sido dada por V.E. Germaidze y N.N. Krasovsky quienes consideraron el caso de perturbaciones acotadas en la media.

3. VECINDADES ESTABLES.

El capítulo III introduce la noción de vecindad estable. Esta noción establece una conexión entre e.d.p. y una clase de métodos asintóticos, incluyendo el método del promedio.

Consideramos la ecuación

$$(E) \quad \dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon)$$

donde f es una función que es 2π -periódica con respecto a t .

Sea $\phi_\epsilon(t)$ una solución de la ecuación promediada.

$$(EP) \quad \dot{x} = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x, 0) dt.$$

Decimos que ϕ_ε tiene una vecindad estable para la ecuación (E) si representa aproximadamente el comportamiento de las soluciones de (E) para valores pequeños de ε . Específicamente esto quiere decir que la diferencia entre $\phi_\varepsilon(t)$ y una solución $x_\varepsilon(t)$ de (E) que satisface $x(t_0) = \phi_\varepsilon(t_0)$ tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente con respecto a $t \in [t_0, \infty)$. Además, quiere decir que las soluciones de (E) que al tiempo, t_0 empiezan cerca de $\phi_\varepsilon(t_0)$, van a permanecer cerca, siempre y cuando el parámetro ε sea pequeño.

Para el método del promedio probaremos en la sección III.2 qué soluciones de e.d.p. de la ecuación (EP) tienen vecindades estables para la ecuación (E). Considerando la misma pregunta desde el punto de vista de las órbitas, el capítulo IV introduce la definición de vecindades orbitalmente estables y prueba que las soluciones de (EP) que son orbitalmente estables bajo disturbios persistentes tienen vecindades orbitalmente estables para la ecuación (E).

4. SINCRONIZACION RACIONAL (PHASE LOCKING)

El comportamiento periódico se observa frecuentemente en los fenómenos naturales. Sistemas que exhiben algún tipo de oscilaciones o ritmos aparecen a todos los niveles: desde el

sistema planetario al núcleo atómico y desde el comportamiento de poblaciones al dominio celular. Un asunto importante para la ciencia proveer un marco teórico para explicar el comportamiento cíclico. En Biología este estudio es la clave para entender cómo los organismos miden el tiempo.

En algunos sistemas pueden identificarse varias componentes oscilatorias que interactúan. Esta interacción puede ser muy complicada, pero generalmente la sincronización juega un papel muy importante. El tipo más general de sincronización es aquella donde las diferentes componentes del sistema tienen frecuencias conmesurables y es llamada sincronización racional.

El fenómeno de sincronización racional es abundante en el campo de la música. Es también conocido, que cuando escuchamos música el latido de nuestro corazón tiende a sincronizarse racionalmente al ritmo de la música. El latido del corazón mismo es causado por la acción sincrónica de un gran número de osciladores individuales a nivel celular. Aparentemente, algunas enfermedades del corazón como extracístole (saltarse un latido) o fibrilación (el corazón deja de latir) son causados por la pérdida de sincronización entre los diferentes centros oscilatorios.

Todos hemos experimentado el fenómeno de sincronización racional cuando caminamos en las montañas o cuando corremos. Ex-

perimentos han demostrado (cf. [15]) maneras en que sincronizamos el movimiento de nuestras piernas con el ritmo respiratorio mientras corremos. Los corredores expertos mantienen perfecta sincronización usando diferentes razones racionales de frecuencia del paso entre frecuencia respiratoria dependiendo de la intensidad del esfuerzo. Así, corriendo en una superficie plana, podríamos mantener una razón de paso entre respiración de 2:1 pero subiendo una pendiente cambiaríamos a una razón 1:1 para satisfacer la mayor demanda de oxígeno. Otras razones como 3:1, 3:2 y 5:3 han sido también observadas.

En el capítulo V se describe matemáticamente el fenómeno de sincronización racional en el contexto de las ecuaciones diferenciales y se prueba un teorema de sincronización para una ecuación perturbada. El capítulo V cierra con un estudio de las propiedades de sincronización de algunos circuitos electrónicos con retroalimentación.

CAPÍTULO II

PRELIMINARES

1. NOTACION Y SUPOSICIONES GENERALES.

Conjuntos y funciones. Las letras \mathbb{Z} , \mathbb{R} y \mathbb{C} van a ser usadas para denotar los conjuntos de los números enteros, reales y complejos, respectivamente. La cerradura topológica de un conjunto X se denota por \bar{X} .

Si X y Y son conjuntos, $f : X \rightarrow Y$ significa que f es una función con dominio X y codominio Y . Cuando f es una función invertible f^{-1} denotará su inversa. La derivada de una función diferenciable, f , se denotará por Df , f' o \dot{f} cuando la variable independiente es t . Para cada subconjunto $X \subset \mathbb{C}^n$ y $Y \subset \mathbb{C}^n$, $C^k(X, Y)$ denotará el conjunto de funciones $f : X \rightarrow Y$ tales que sus derivadas parciales de orden k existen y son continuas. Cuando por el contexto está claro cual es el codominio, se escribe $C^k(X)$ en lugar de $C^k(X, Y)$. Escribimos $f \in C^k$ cuando no es necesario especificar ni el dominio ni el codominio.

Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $C_r(\phi)$ y $C_r^{t_0}(\phi)$ representarán los siguientes "cilindros" alrededor de la gráfica de ϕ :

$$C_r(\phi) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \mid |x - \phi(t)| \leq r\}$$

$$C_r^{t_0}(\phi) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \mid t \geq t_0 \quad |x - \phi(t)| < r\}$$

La distancia entre un punto $x \in \mathbb{C}^n$ y un conjunto $y \subset \mathbb{C}^n$ se denotará por

$$d(x, y) = \inf \{ |x - y| \mid y \in Y \}$$

El problema de Cauchy. Estudiamos ecuaciones diferenciales ordinarias en la forma normal

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x).$$

Aquí t es una variable real y x una función de t que toma valores en \mathbb{C}^n . Suponemos que f es tal que la ecuación tiene solución única correspondiendo a cada condición inicial en algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$. Si (t_0, x_0) está en \mathcal{D} , denotamos por $x(t; t_0, x_0)$ la solución que satisface la condición inicial $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

Ecuaciones con parámetros pequeños. Denotemos por ε un número no negativo del cual depende la ecuación (1). La ecuación

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$$

representa una familia uni-paramétrica de ecuaciones diferenciales de la forma (1). Suponiendo que para cada valor de ε la correspondiente ecuación tiene solución única para el problema de Cauchy, $x_{\varepsilon_0}(t; t_0, x_0)$ denotará la solución de (2) para $\varepsilon = \varepsilon_0$ que satisface $x_{\varepsilon_0}(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

2. FUNCIONES CASI PERIODICAS.

Una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ se llama *casi periódica* (c.p.) si para cualquier $\eta > 0$ existe un número $\ell(\eta)$ tal que todo intervalo cerrado de longitud ℓ contiene un número τ tal que

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \eta \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

El ejemplo clásico de función c.p. es

$$f(t) = \text{sen } at + \text{sen } bt$$

con a y b dos números inconmensurables,

Una función continua $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, con t como primera variable y x como segunda variable se dice que es *casi periódica en t uniformemente con respecto a x en un conjunto compacto K* si para cualquier $\eta > 0$ existe $\ell(\eta)$ tal que cualquier intervalo cerrado de longitud ℓ contiene un número τ tal que

$$|f(t + \tau, x) - f(t, x)| < \eta \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, x \in K.$$

La uniformidad en x resulta porque ℓ y τ son independientes de $x \in K$.

Algunas propiedades básicas de las funciones c.p.

(i) La suma y el producto de funciones c.p. son c.p..

Si $f(t) \geq \rho > 0$ entonces $\frac{1}{f(t)}$ es c.p.

(ii) Si $f(t)$ es c.p. entonces su módulo, $|f(t)|$, y su conjugado, $\bar{f}(t)$, son c.p.. Para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha t + \beta)$ es también c.p..

(iii) Las funciones c.p. son acotadas y uniformemente continuas.

(iv) Si $(f_1(t), \dots, f_n(t)) \in X$ para toda $t \in \mathbb{R}$, todas las funciones $f_i(t)$ son c.p. y $F(x_1, \dots, x_n)$ es uniformemente continua en X , entonces $F(f_1(t), \dots, f_n(t))$ es c.p..

(v) El límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones c.p. es c.p..

(vi) Si f es c.p. y f' es uniformemente continua en \mathbb{R} , entonces f' es c.p..

(vii) Para toda función c.p. el límite

$$M_t[f(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\alpha+T} f(s) ds$$

existe y es independiente de α . Esto es, toda función c.p. tiene un valor medio,

(viii) Si f es c.p., entonces $\int^t f$ es c.p. si y solamente si $M_t[f(t)] = 0$.

(ix) Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ y $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ es uniformemente convergente entonces es c.p..

(x) Sea $w \in \mathbb{C}^m$, $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ y $\{n_k\} \subset \mathbb{C}^m$. Las funciones c.p. de la forma

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i(w \cdot n_k) t} \quad (\text{convergencia uniforme})$$

se llaman *cuasiperiódicas*. El vector w se llama base de frecuencias.

(xi) Para casi todos los números reales, λ , el límite de $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt$ se anula cuando $T \rightarrow \infty$. Existe solamente un conjunto numerable de números λ_n , llamados *exponentes de Fourier*, para los cuales el límite es distinto de cero. Los límites correspondientes

$$a_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda_n t} dt$$

se llaman *coeficientes de Fourier* y la serie

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

se llama *serie generalizada de Fourier* de f .

3. ESTABILIDAD DE SOLUCIONES Y ORBITAS

Aquí recordamos las definiciones de estabilidad y estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov, así como los conceptos

de estabilidad uniforme y estabilidad asintótica uniforme como fueron introducidos por Perdinskii y Malkin, respectivamente. También recordaremos las nociones correspondientes para la estabilidad de órbitas y algunos resultados básicos.

Sea $\dot{x} = f(t, x)$ y $f(t, 0) = 0$ para $t \geq 0$. La solución $x = 0$ se llama:

(i) *Estable*. Si para cualquier $\eta > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta(\eta, t_0) > 0$ tal que $|x_0| < \delta$ implica que $|x(t; t_0, x_0)| < \eta$ para $t \geq t_0$;

(ii) *Asintóticamente estable*. Si es estable y para cualquier $t_0 \geq 0$ existe $h(t_0) > 0$ tal que $|x_0| < h$ implica que $|x(t; t_0, x_0)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$;

(iii) *Uniformemente estable*. Si es estable y δ en (i) puede escogerse independientemente de t_0 ;

(iv) *Uniformemente asintóticamente estable (u.a.e.)*.

Si es uniformemente estable, h en (ii) puede escogerse independientemente de t_0 y dada $\eta > 0$ existe $T(\eta)$ tal que $|x_0| < h$ implica que $|x(t; t_0, x_0)| < \eta$ para $t \geq t_0 + T$. Aquí T es independiente de t_0 y x_0 .

Supongamos que ϕ es solución de $\dot{x} = f(t, x)$ definida para $t \in [0, \infty)$. Decimos que ϕ es estable en cualquiera de los sentidos definidos anteriormente, si la solución cero de

la ecuación

$$\dot{x} = f(t, x + \phi(t)) - f(t, \phi(t))$$

es estable en el sentido correspondiente.

Decimos que la solución $x = 0$ es *exponencialmente estable* para la ecuación autónoma $\dot{x} = f(x)$, si los eigenvalores de la matriz $Df(0)$ tienen parte real negativa. Bajo esta condición las soluciones tienden a cero a una razón exponencial.

Sea ϕ una solución de $\dot{x} = f(t, x)$ definida para $t \in [0, \infty)$ y denotemos por γ la órbita de ϕ en el espacio fase, esto es,

$$\gamma = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x = \phi(t) \text{ para alguna } t \in \mathbb{R}\}.$$

Decimos que ϕ es:

(i)' *Orbitalmente estable (o.e.)*. Si para cualquier $\eta > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta(\eta, t_0)$ tal que la $d(x_0, \gamma) < \delta$ implica que la $d(x(t; t_0, x_0), \gamma) < \eta$ para $t \geq t_0$;

(ii)' *Orbitalmente asintóticamente estable (o.a.e.)* Si ϕ es orbitalmente estable y para toda $t_0 \geq 0$ existe $h(t_0) > 0$ tal que la $d(x_0, \gamma) < h$ implica que la $d(x(t; t_0, x_0), \gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$;

(iii)' *Orbitalmente uniformemente estable (o.u.e.)*. Si ϕ es orbitalmente estable y δ en (i)' puede escogerse inde-

pendientemente de t_0 ;

(iv)' *Orbitalmente uniformemente asintóticamente estable* (o.u.a.e.). Si ϕ es o.u.e., h en (ii)' puede escogerse independientemente de t_0 y dada $\eta > 0$ existe $T(\eta)$ tal que $d(x_0, \gamma) < h$ implica que $d(x(t; t_0, x_0), \gamma) < \eta$ para $t \geq t_0 + T$.

Para soluciones periódicas y particularmente ciclos límite las nociones de estabilidad en el sentido de Lyapunov son muy restrictivas, e.g: Una solución periódica de un sistema autónomo no puede ser asintóticamente estable, y en algunos ejemplos, ciclos límite atractores ni siquiera son Lyapunov-estables. De hecho, esta fué la motivación de Poincaré cuando introdujo el concepto de estabilidad orbital.

La ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x)$$

se dice que es periódica si $f(t, x)$ es periódica en t uniformemente con respecto a x ; i.e., existe un número $T > 0$ tal que $f(t + T, x) = f(t, x)$ para toda t y x .

El siguiente Teorema se debe a J.L. Massera (cf. [1]).

Teorema 1. Para la solución cero de una ecuación periódica, estabilidad implica estabilidad uniforme y estabilidad asintótica implica estabilidad asintótica uniforme.

En particular, el Teorema 1 se aplica a ecuaciones autónomas. Obviamente las afirmaciones que se refieren a estabilidad son también válidas para soluciones constantes y para cualquier solución periódica en el caso de ecuaciones autónomas. Sin embargo, este último hecho no es cierto para soluciones no periódicas arbitrarias.

Ejemplo 1. $\dot{x} = e^{-x}$, Todas las soluciones son asintóticamente estables pero ninguna es uniformemente asintóticamente estable.

El siguiente resultado es una extensión del Teorema 1 al caso de estabilidad orbital (Ref [2]).

Teorema 2. En una ecuación periódica, para soluciones periódicas del mismo período, estabilidad orbital implica estabilidad orbital uniforme y estabilidad orbital asintótica implica estabilidad orbital asintótica uniforme.

4. FUNCIONES DE LYAPOUNOV GENERALIZADAS.

Sea $V : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$, donde X es un conjunto abierto en \mathbb{C}^n , continua y localmente Lipschitz. Tal función será llamada función de Lyapounov. Correspondiendo a V y la ecuación

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

definimos

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x+h\dot{\phi}(t, x)) - V(t, x)]$$

Se sigue (cf. [3]) que:

(i) Si $x(t)$ es solución de (1) entonces

$$\dot{V}_{(1)}(t, x(t)) = \frac{d^+}{dt} V(t, x(t))$$

donde $\frac{d^+}{dt}$ denota la derivada superior por la derecha con respecto a t , i.e.:

$$\frac{d^+}{dt} u(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

(ii) Si $\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq 0$ en $R \times X$ entonces $V(t, x(t))$ es no-creciente como función de t para toda solución $x(t)$ de (1) que está en X .

(iii) Si $x, y : [t_*, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ son diferenciables y $x(t_*) = y(t_*)$, entonces

$$\left. \frac{d^+}{dt} V(t, y(t)) \right|_{t=t_*} \leq \left. \frac{d^+}{dt} V(t, x(t)) \right|_{t=t_*} + L |\dot{y}(t_*) - \dot{x}(t_*)|$$

donde L es una constante de Lipschitz para V en una vecindad del punto $(t_*, x(t_*))$.

En el caso en que $V \in C'(R \times X)$, para cada $(t_0, x_0) \in R \times X$ si $x(t; t_0, x_0)$ es solución de (1) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(1)}(t_0, x_0) &= \left. \frac{d^+}{dt} V(t, x(t)) \right|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} V(t, x(t)) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t_0, x_0) \dot{\phi}_i(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos la definición usual de la derivada de V en la dirección de el campo vectorial f .

5. CAMBIOS DE VARIABLES.

Decimos que $x = h(t, y)$ define un cambio de variables que transforma la ecuación

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

en

$$(3) \quad \dot{y} = g(t, y)$$

en el conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) $h : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase C^1 y para toda $t \in \mathbb{R}$
 $h_t = h(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un difeomorfismo sobre su imagen;

(ii) $g(t, y) = Dh_t^{-1}(h_t(y)) [f(t, h_t(y)) - \frac{\partial h}{\partial t}(t, y)]$.

Bajo estas condiciones, $y(t)$ es solución de (3) y $y(t) \in \Omega$ para toda $t \in \mathbb{R}$ si y solo si $x(t) = h(t, y(t))$ es solución de (1) y $x(t) \in h_t(\Omega)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. También la función

$$H : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \bigcup_{t \in \mathbb{R}} [\{t\} \times h_t(\Omega)] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n,$$

$H(t, x) = (t, h(t, x))$, es un C^1 difeomorfismo que mapea gráficas de soluciones de (3) en gráficas de soluciones de (1).

6. ESTABILIDAD BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES.

Considerese la ecuación

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

y una perturbación de (1)

$$(4) \quad \dot{y} = f(t, y) + g(t, y)$$

Sea ϕ una solución de (1) definida para $t \geq 0$. Decimos que ϕ es estable bajo disturbios persistentes (e.d.p.) si dada $\eta > 0$ existen $\delta_1(\eta)$, $\delta_2(\eta)$, positivas, tales que para cualquier función $g(t, y)$ y $t_0 \geq 0$, $|y_0 - \phi(t_0)| < \delta_1$ y $|g(t, y)| < \delta_2$ para $(t, y) \in C_{\eta}^{t_0}(\phi)$ implica que

$$|y(t; t_0, y_0) - \phi(t)| < \eta \text{ para toda } t \geq t_0.$$

Aquí $y(t; t_0, y_0)$ se refiere a soluciones de (4).

Ejemplo 2. $\dot{x} = -x$. La solución $x = 0$ de esta ecuación es estable bajo disturbios persistentes de la forma $g(t)$. Esto se puede ver inmediatamente de la fórmula de variaciones de constantes para las soluciones de $\dot{x} = -x + g(t)$. A saber,

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}g(s)ds.$$

Ejemplo 3. Aquí analizamos la ecuación autónoma

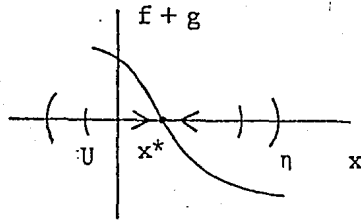
$$(5) \quad \dot{x} = f(x)$$

y una perturbación autónoma suya; esto es, una ecuación de la forma

$$(6) \quad \dot{x} = f(x) + g(x)$$

con f y g funciones de clase C^1 .

Supóngase que $f(0) = 0$ y todos los eigenvalores de $Df(0)$ tienen parte real menor que cero. Entonces (cf. [4]), dada cualquier $\eta > 0$ existen U , una vecindad del origen en \mathbb{C}^n , y V , una vecindad del origen en el espacio de campos



vectoriales sobre \mathbb{C}^n (con la C^1 -norma), tal que: para cada $g \in V$ la ecuación (6) tiene un único equilibrio en U y este equilibrio, x^* , es asintóticamente estable y satisface $|x^*| < \eta$.

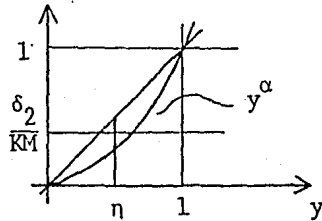
De esto se sigue que $x = 0$ es estable bajo disturbios autónomos persistentes para la ecuación (5).

Ejemplo 4 Sea

$$\dot{y} = f(t, y) + g(t)h(y)$$

donde $|h(y)| \leq K |y|^\alpha$ para $|y| \leq 1$, g es acotada y $x = 0$ es estable bajo disturbios persistentes para $\dot{x} = f(t, x)$. Dado $\eta > 0$ y α suficientemente grande, existe $\delta > 0$ tal que $|y(t_0)| < \delta$ implica que $|y(t)| < \eta$ para toda $t \geq t_0$.

Para probar esto supóngase que $\eta > 1$ está dada y que $\delta_1(\eta)$, $\delta_2(\eta)$ son tales que se cumple lo siguiente: $|y(t)| < \eta$ para $t \geq t_0$ si las condiciones $|y(t_0)| < \delta_1$ y $|g(t)h(y)| < \delta_2$ para $t \in \mathbb{R}$ y $|y| < \eta$ se satisfacen. Sea M tal que $|y| < (\delta_2/KM)^{1/\alpha}$ para $|y| > \eta$ entonces $|g(t)h(y)| < \delta_2$



para $t \in \mathbb{R}$ y $|y| < \eta$. Entonces, tomando $\delta = \delta_1(\eta)$, llegamos a la conclusión deseada.

I.G. Malkin [5] probó el siguiente teorema. Este teorema da condiciones suficientes para tener estabilidad bajo disturbios persistentes y es muy útil porque estas condiciones pueden verificarse fácilmente en muchos ejemplos.

Teorema 3. Supóngase que correspondiendo a cada condición inicial la ecuación (1) tiene solución única. Entonces, todas las soluciones uniformemente asintóticamente estables son estables bajo disturbios persistentes.

El inverso del Teorema 3 es falso. Para un contraejemplo ver Massera [6].

7. ECUACIONES QUE INVOLUCRAN UN PARAMETRO PEQUEÑO

Sea

$$(7) \quad \dot{x} = f(t, x, \epsilon).$$

La ecuación

$$(8) \quad \dot{y} = f(t, y, 0)$$

puede considerarse como una aproximación de la ecuación (7).

De hecho, si f es una función continua, las soluciones de (7) son continuas con respecto a condiciones iniciales y al parámetro ϵ . De esto se sigue que para cada $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, da-

dos dos números $\eta, T > 0$, existe $\varepsilon_0(\eta, T)$ y $\delta(\eta, T)$, positivos, tales que $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ y $|x_0 - y_0| < \delta$ implica que $|x_\varepsilon(t; t_0, x_0) - y(t; t_0, y_0)| < \eta$ para toda $t \in [t_0, t_0 + T]$. En particular esto significa que la diferencia entre soluciones de la ecuación (7) y la ecuación aproximada (8) que satisface la misma condición inicial, converge a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente sobre intervalos compactos de tiempo, i.e.:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [x_\varepsilon(t; t_0, \xi) - y(t; t_0, \xi)] = 0$$

uniformemente para $t \in [t_0, t_0 + T]$.

8. EL METODO DEL PROMEDIO

Este es un método de perturbación usado para aproximar ecuaciones oscilatorias no-autónomas. La forma usual de una ecuación a la cual se aplica el método de promedio es

$$(E) \quad \dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$$

donde f es casi periódica respecto a t uniformemente para x en conjuntos compactos y ε fija. La ecuación aproximada se determina reemplazando $f(t, x, \varepsilon)$ en la ecuación (E) por su valor medio:

$$(EP) \quad \dot{\bar{x}} = \varepsilon \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \bar{x}, 0) dt.$$

Esta ecuación se llama la *ecuación promediada*.

Podemos ver que este es un procedimiento natural introdu-

ciendo una nueva escala de tiempo $\tau = \epsilon t$ en las ecuaciones (E) y (EP) para obtener:

$$(E') \quad y' = f(\tau/\epsilon, y, \epsilon)$$

$$(EP') \quad \bar{y}' = f_0(\bar{y})$$

donde $f_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt$. Ahora es obvio que la ecuación (E') involucra dos escalas de tiempo: y varía de acuerdo a la escala de tiempo en la cual se mide τ , pero el sistema está siendo forzado a una escala más rápida τ/ϵ . Para valores pequeños de ϵ , $f(\tau/\epsilon, y, \epsilon)$ oscila rápidamente cuando τ cambia. Por tanto, es razonable considerar que en cada tiempo τ , la solución y sentirá solamente el efecto promedio del campo vectorial $f(\tau/\epsilon, y, \epsilon)$ en el punto $y(\tau)$, el cual está dado por el valor medio $f_0(y(\tau))$.

Ejemplo 5.

$$(E) \quad \dot{x} = \epsilon f(x) + \epsilon \operatorname{sen} t$$

$$(EP) \quad \dot{\bar{x}} = \epsilon f(\bar{x})$$

$$(E') \quad y' = f(y) + \operatorname{sen}(\tau/\epsilon)$$

$$(EP') \quad \bar{y}' = f(\bar{y})$$

9. TEOREMAS DE BOGOLYUBOV SOBRE LA VALIDEZ DEL METODO DEL PRO-MEDIO.

La ecuación (E) que estamos examinando es singular en $\epsilon = 0$ y no puede considerarse como una perturbación de la ecuación promediada en el sentido clásico. Sin embargo, el físico matemático soviético Bogolyubov demostró que en coordenadas adecuadas la ecuación (E') toma la forma*

$$x' = f_0(x) + g(\tau, x, \epsilon)$$

donde la función g es continua y $g(\tau, x, \epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in R$ y x en conjuntos compactos. De este hecho y la continuidad con respecto a parámetros, se sigue que las soluciones de (E') y (EP') que empiezan con la misma condición inicial, se acercan entre sí cuando $\epsilon \rightarrow 0$ uniformemente en intervalos finitos de tiempo. Ya que el cambio de escala de tiempo $\tau = \epsilon t$ está involucrado, esto implica que la ecuación (EP) aproxima la ecuación (E) uniformemente en intervalos de la forma $[0, \frac{1}{\epsilon}]$, i.e.: dado $\eta > 0$ existe $\epsilon_0(\eta)$ tal que $\epsilon < \epsilon_0$ implica que

$$|x_\epsilon(t; 0, \epsilon) - \bar{x}_\epsilon(t; 0, \epsilon)| < \eta \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{donde}$$

x_ϵ y \bar{x}_ϵ denotan soluciones (E) y (EP) respectivamente .

Aunque este resultado justifica la aplicación del método del

* Ver Lema 1 del Capítulo III.

Promedio bajo un número de circunstancias, tiene una limitación importante: no importa que tan pequeño escojamos ϵ , a la larga las soluciones pueden estar muy alejadas unas de otras.

En relación con este problema, Bogolyubov probó (cf. [7]) que, para equilibrios exponencialmente estables de la ecuación promediada, la aproximación promedio es uniformemente válida sobre el intervalo de tiempo $[0, \infty]$. En el próximo capítulo (Corolario 3) probaremos que este es también el caso para cualquier equilibrio asintóticamente estable. El siguiente ejemplo demuestra que para soluciones estables (no asintóticamente estables), la aproximación puede fallar durante intervalos infinitos de tiempo,

Ejemplo 5. Considérese el sistema

$$(E) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \epsilon x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\epsilon x_1 + \epsilon \Delta \sin \epsilon t, \end{aligned}$$

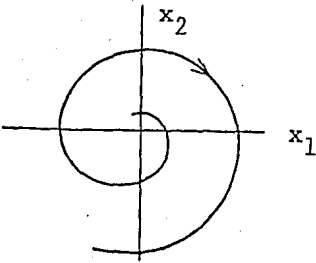
Su sistema promediado correspondiente es

$$(EP) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \epsilon \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\epsilon \bar{x}_1 \end{aligned}$$

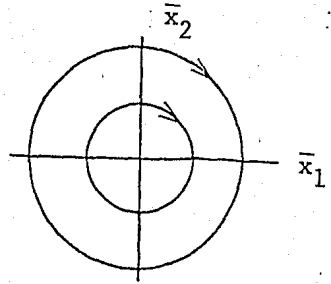
El sistema (E) es equivalente a la ecuación

$$\ddot{x}_1 + \epsilon^2 x_1 = \epsilon^2 \Delta \sin \epsilon t$$

que es la ecuación del oscilador armónico con forzamiento resonante. Los planos fase correspondientes se ven así



Orbitas de (E)



Orbitas de (EP)

El hecho de que para $\epsilon > 0$ las soluciones de la ecuación (E) no son acotadas prueba que una pequeña perturbación aplicada sistemáticamente en los momentos adecuados (con la frecuencia resonante) puede producir un efecto acumulativo muy grande. Puesto que las soluciones de la ecuación (EP) son acotadas, pueden aproximar las soluciones de (E) sólo durante intervalos finitos de tiempo.

CAPÍTULO III

VECINDADES ESTABLES.

1. DEFINICION

Consideremos la ecuación

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$$

y supongamos que

$$(2) \quad \dot{x} = \bar{f}(t, x, \varepsilon)$$

constituye alguna aproximación a la ecuación (1) para ε pequeño, e.g.:

$$[\bar{f}(t, x, \varepsilon) - f(t, x, \varepsilon)] \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Supongamos también que $\phi(t, \varepsilon)$ es solución de (2).

Como motivación para la siguiente definición, es útil tener en mente la siguiente pregunta: ¿Cuándo puede considerarse ϕ una buena aproximación a las soluciones de (1), que empiezan cerca de ϕ para toda t y para valores pequeños de ε ?

Decimos que la función $\phi : \mathbb{R} \times [0, \varepsilon_1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ tiene una *vecindad estable* cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$) para la ecuación (1), si dado $\eta > 0$ existen números positivos $\varepsilon_0(\eta)$, $\delta(\eta)$ tales que si $x_\varepsilon(t)$ es solución de (1), $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ y $|x_\varepsilon(t_0) - \phi(t_0, \varepsilon)| < \delta$ para algún $t_0 \geq 0$, entonces $|x_\varepsilon(t) - \phi(t, \varepsilon)| < \eta$, para toda $t \geq t_0$.

Si $\phi(t, \varepsilon) = x_0$ para $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, \varepsilon_1]$ entonces decimos que el punto x_0 tiene una v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación 1.

Observaciones, Si ϕ tiene una v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para (1), entonces la función $\phi(\cdot, 0)$ es una solución estable para la ecuación

$$\dot{x} = f(t, x, 0)$$

También, ϕ y las soluciones de (1) con condiciones iniciales en la gráfica de ϕ se acercan entre sí uniformemente cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e.:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, \infty)} |x_\varepsilon(t; t_0, \phi(t_0, \varepsilon)) - \phi(t, \varepsilon)| = 0$$

uniformemente para toda $t \in [t_0, \infty)$. Es más, si ϕ tiene una v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces para ε pequeñas las soluciones de (1) que empiezan cerca de ϕ en el tiempo t_0 , permanecen cerca de ϕ uniformemente en todo tiempo futuro.

En el siguiente ejemplo utilizaremos técnicas de linealización para dar condiciones para la existencia de vecindades estables para ecuaciones autónomas.

Ejemplo 1. Considérese la ecuación

$$(3) \quad \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x)$$

donde $f, g \in C^1(\mathbb{C}^n)$. Si $x = 0$ es una solución exponencialmente estable de $\dot{x} = f(x)$, entonces $x = 0$ tiene una v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (3).

Esto es cierto porque el Teorema de la función implícita aplicado a la función

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x)$$

en el punto $(x, \varepsilon) = (0, 0)$, implica la existencia de $\varepsilon_1, \eta > 0$ y $x^* : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{C}^n$ tales que:

(i) Para cada ε en $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, $x^*(\varepsilon)$ es el único equilibrio de la ecuación (3) en $\{x \mid |x| < \eta\}$;

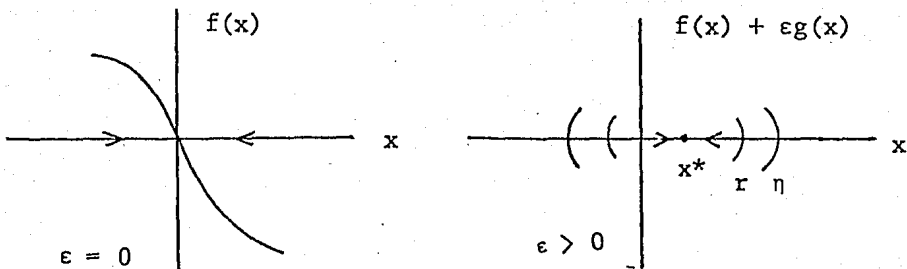
(ii) $x^*(\varepsilon)$ es exponencialmente estable;

(iii) $x^*(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Entonces, dado $\eta > 0$ tomamos $\delta = \min\{\eta, \varepsilon_0\}$ y ε_0 tal que

$|x^*(\varepsilon)| < \eta$ para $\varepsilon < \varepsilon_0$. Esto garantiza que

$|x_\varepsilon(t; t_0, x_0)| < \eta$ si $|x_0| < \delta$ y $t \geq t_0$.



2. VECINDADES ESTABLES Y ESTABILIDAD BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES.

TES.

Aquí consideramos un caso especial de la ecuación (1):

$$(4) \quad \dot{x} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, \varepsilon) f(\alpha(t, \varepsilon), x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \varepsilon) g(t, x, \varepsilon)$$

donde: $\alpha : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada parcial continua y positiva con respecto a t ; $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es continua, tiene derivada parcial continua respecto de x ; $g : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es continua, tiene derivada parcial continua con respecto a x y $g(t, x, \varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente con respecto a $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{C}^n$.

Teorema 1. Sea ϕ una solución de $\dot{x} = f(t, x)$. Si ϕ es estable bajo disturbios persistentes entonces $\phi(\alpha(t, \varepsilon))$ tiene una vecindad estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (4).

Demostración. Por el teorema del valor medio la función α es invertible, esto es, existe $\beta : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha(\beta(t, \varepsilon), \varepsilon) = t = \beta(\alpha(t, \varepsilon), \varepsilon)$. Sea $\tau = \alpha(t, \varepsilon)$ y $y(\tau) = x(\beta(\tau, \varepsilon))$. En términos de estas nuevas variables, la ecuación (4) se convierte en

$$(5) \quad \frac{dy}{d\tau} = f(\tau, y) + g(\beta(\tau, \varepsilon), y, \varepsilon),$$

Por hipótesis $\phi(\tau)$ es e.d.p. para $\frac{dy}{d\tau} = f(\tau, y)$. De ahí que, dado $\eta > 0$ existen $\delta_1(\eta), \delta_2(\eta)$ que satisfacen las

condiciones de la definición de e.d.p.,. También existe $\varepsilon_0(\eta)$ tal que $|g(t, x, \varepsilon)| < \delta_2(\eta)$ para $(t, x, \varepsilon) \in C_\eta^0(\phi) \times (0, \varepsilon_0)$. Sean x y y soluciones de las ecuaciones (4) y (5) respectivamente. Si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$ y $|y_0 - \phi(\tau_0)| < \delta_1(\eta)$ para alguna $\tau_0 \in \mathbb{R}$, entonces $|y(\tau; \tau_0, y_0) - \phi(\tau)| < \eta$ para $\tau \geq \tau_0$.

Por lo tanto, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y $|x_0 - \phi(\alpha(t_0, \varepsilon))| < \delta_1$ la unicidad de soluciones con respecto a condiciones iniciales implica que

$$|x(t; t_0, x_0) - \phi(\alpha(t, \varepsilon))| = |y(\alpha(t, \varepsilon); \alpha(t_0, \varepsilon), x_0) - \phi(\alpha(t, \varepsilon))| < \eta$$

para $t \geq t_0$. Esto completa la demostración del Teorema 1.

Observación. La conclusión del Teorema también es válida si $g(t, x, \varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$ y x en conjuntos compactos, siempre y cuando ϕ sea acotada.

Corolario 1. Supongamos que $f(t, x, \varepsilon) \rightarrow f(t, x, 0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$ y x en conjuntos compactos. Si ϕ es acotada y estable bajo disturbios persistentes para

$$\dot{x} = f(t, x, 0),$$

entonces ϕ tiene una vecindad estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x, \varepsilon).$$

Demostración. Escribimos (1) como

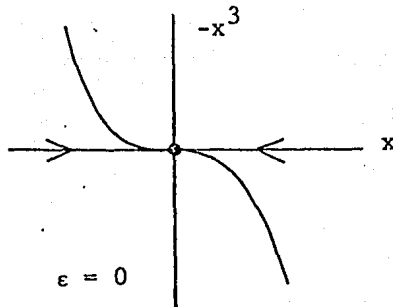
$$\dot{x} = f(t, x, 0) + [f(t, x, \varepsilon) - f(t, x, 0)]$$

y aplicamos el Teorema 1 con $\alpha(t, \varepsilon) = t$.

Ejemplo 2.

$$(6) \quad \dot{x} = -x^3 + \varepsilon x \operatorname{sen} t.$$

En $\varepsilon = 0$ el origen de esta ecuación no es linealmente estable. Sin embargo, por el Teorema 1 y el Teorema 3 del Capítulo II, es e.d.p. para la ecuación $\dot{x} = -x^3$ y por lo tanto, por el Corolario 1, $x = 0$ tiene una v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (6).



3. VECINDADES ESTABLES Y EL METODO DEL PROMEDIO

Consideremos la ecuación

$$(7) \quad \dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}^n$ es continua, tiene derivada parcial continua con respecto a x y es casi periódica en t uniformemente con respecto a (x, ε) en conjuntos compactos.

Sea ϕ una solución de

$$(8) \quad \dot{x} = f_0(x)$$

donde

$$f_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt.$$

Con esto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2. Si ϕ es acotada y estable bajo disturbios persistentes para la ecuación (8), entonces $\phi(\varepsilon t)$ tiene una vecindad estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (7).

Este teorema se demostrará más adelante.

La función $\phi(\varepsilon t)$ es una solución de la ecuación promediada

$$(9) \quad \dot{x} = \varepsilon f_0(x)$$

Entonces, el Teorema 2 implica que soluciones e.d.p. de la ecuación

ción promediada constituyen aproximaciones uniformemente válidos de la ecuación completa sobre intervalos de la forma $[t_0, \infty)$.

El Teorema 1 y el Teorema 3 del Capítulo II implican el siguiente resultado,

Corolario 2. Si ϕ es una solución de $\dot{x} = f_0(x)$ que es acotada y uniformemente asintóticamente estable, entonces $\phi(\varepsilon t)$ tiene una vecindad estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (E).

Corolario 3. Si $x = x_0$ es un equilibrio asintóticamente estable de $\dot{x} = f_0(x)$, entonces x_0 tiene una vecindad estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (E).

Este corolario es una consecuencia del Corolario 2 y el Teorema II,1.

Ejemplo 3.

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon x^3 \cos^2 t + \varepsilon \sin(t+y) \\ \dot{y} &= -\varepsilon y^3 + \varepsilon x \cos t \end{aligned}$$

El sistema promediado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon x^3}{2} \\ \dot{y} &= -\varepsilon y^3 \end{aligned}$$

La solución $x = 0, y = 0$ no es exponencialmente estable. Sin embargo, ya que es asintóticamente estable, se sigue del Corolario 3 que el origen tiene una v.e. $\epsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (10).

Preliminares a la demostración del Teorema 2. La demostración del Teorema 2 requerirá de los siguientes Lemas.

Lema 1. (Bogolyubov - Hale [8]). Dado cualquier conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ existe $\epsilon_0 > 0$ y una función $u(t, x, \epsilon)$ continúa en $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (0, \epsilon_0]$ tal que:

(i) $u(t, x, \epsilon)$ es casi periódica en t uniformemente con respecto a x en conjuntos compactos, para cada ϵ fija:

(ii) $u(t, x, \epsilon)$ tiene derivada continua con respecto a t y derivadas de un orden arbitrario especificado con respecto a x ;

(iii) $\epsilon u(t, x, \epsilon), \epsilon \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, \epsilon)$ tienden a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$ uniformemente respecto a $t \in \mathbb{R}$ y x en conjuntos compactos.

(iv) El cambio de variables

$$y = \begin{cases} x + \epsilon u(t, x, \epsilon) & \text{para } (t, x, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \epsilon_0] \\ x & \text{para } (t, x, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

Transforma la ecuación (7) en

$$\dot{x} = \epsilon f_0(x) + \epsilon g(t, x, \epsilon)$$

Esta función, $g(t, x, \varepsilon)$, es continua, tiene derivada continua con respecto a x en $R \times \Omega \times [0, \varepsilon_0]$ y se acerca a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente con respecto a $t \in R$ y x en conjuntos compactos.

Lema 2. Sea $c_0 : R \times [0, \varepsilon_1] \rightarrow C^n$ continua y acotada; sea $u : R \times C^n \times [0, \varepsilon_1] \rightarrow C^n$ tal que $u(t, x, \varepsilon)$ es de clase $C^1(C^n)$ con respecto a x para (t, ε) fijo y $\varepsilon u(t, x, \varepsilon)$, $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, \varepsilon)$ se acercan a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente con respecto a $t \in R$ y x en conjuntos compactos. Entonces dados $\delta > 0$ y $\rho \in (0, \delta)$ existe $0 < \varepsilon_0(\delta, \rho) < \varepsilon_1$, tales que si $c : R \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow C^n$ satisface $|c(t, \varepsilon) - c_0(t, \varepsilon)| < \rho$ entonces existe $x^* : R \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow C^n$ tal que $|x^*(t, \varepsilon) - c_0(t, \varepsilon)| < \delta$ y $x^*(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, x^*(t, \varepsilon), \varepsilon) = c(t, \varepsilon)$ para $(t, \varepsilon) \in R \times [0, \varepsilon_0]$.

Demostración. Supóngase que δ y ρ están dados. Sea R tal que $C_0(t, \varepsilon) \in B_R(C^n) = \{x \in C^n \mid |x| < R\}$ para $(t, \varepsilon) \in R \times [0, \varepsilon_1]$. Tómese $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ tal que $|\varepsilon u(t, x, \varepsilon)| < \delta - \rho$ y $|\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, \varepsilon)| < \frac{1}{2}$ para $(t, x, \varepsilon) \in R \times \bar{B}_{R+\delta} \times [0, \varepsilon_0]$.

Dada la función $c(t, \varepsilon)$, para cada $(t, \varepsilon) \in R \times [0, \varepsilon_0]$ sea

$$F_{t, \varepsilon} : B_\delta(C^n) \rightarrow C^n$$

definida por

$$F_{t,\varepsilon}(y) = \begin{cases} c(t,\varepsilon) - c_0(t,\varepsilon) - \varepsilon u(t, y + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon), & \text{para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \\ c(t,0) - c_0(t,0), & \text{para } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$(i) \quad |F_{t,\varepsilon}(y)| \leq |c(t,\varepsilon) - c_0(t,\varepsilon)| + |\varepsilon u(t, y + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon)| \\ < \rho + \delta - \rho = \delta$$

(ii) Dados cualesquiera $y_1, y_2 \in B_\delta(\mathbb{C}^n)$, sea

$$g(s) = u(t, y_1 + s(y_2 - y_1) + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon). \text{ Entonces,} \\ |F_{t,\varepsilon}(y_2) - F_{t,\varepsilon}(y_1)| = \varepsilon |u(t, y_2 + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon) - \\ u(t, y_1 + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon)| = \varepsilon |g(1) - g(0)| = \varepsilon \left| \int_0^1 g'(s) ds \right| = \\ \left| \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(t, y_1 + s(y_2 - y_1) + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon) (y_2 - y_1) ds \right| < \\ \frac{1}{2} |y_2 - y_1|.$$

Así pues, por el principio de contracción,

$$F_{t,\varepsilon} : B_\delta(\mathbb{C}^n) \rightarrow B_\delta(\mathbb{C}^n)$$

tiene un punto fijo $y^*(t,\varepsilon)$, para cada $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0]$.

Si definimos $x^*(t,\varepsilon) = y^*(t,\varepsilon) + c_0(t,\varepsilon)$, entonces

$$|x^*(t,\varepsilon) - c_0(t,\varepsilon)| < \delta \quad \text{y} \quad x^*(t,\varepsilon) + \varepsilon u(t, x^*(t,\varepsilon), \varepsilon) - c(t,\varepsilon) =$$

$$y^*(t,\varepsilon) + \varepsilon u(t, y^*(t,\varepsilon) + c_0(t,\varepsilon), \varepsilon) + c_0(t,\varepsilon) - c(t,\varepsilon) = 0$$

para todo $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0]$.

Esto demuestra el Lema 2.

Demostración del Teorema 2. Sea X_r^ε el conjunto de $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ tales que $|x - \phi(\varepsilon t)| < r$. Denotemos por X_ε las soluciones de la ecuación (7). Queremos probar que para $\eta > 0$ dado existen $\varepsilon_0(\eta), \rho(\eta) > 0$ tales que $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0)$ y $(t_0, x_0) \in X_\rho^\varepsilon$ implica que $(t, x_\varepsilon(t; t_0, x_0)) \in X_\eta^\varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Sea Ω el conjunto de $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $|x - \phi(\varepsilon t)| \leq 1$ para alguna $t \in \mathbb{R}$. Por el Lema 1 existen ε_1 y $u(t, x, \varepsilon)$ tales que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \Omega &\xrightarrow{\phi_\varepsilon} \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \\ (t, y) &\longrightarrow (t, x) = (t, y + \varepsilon u(t, y, \varepsilon)) \end{aligned}$$

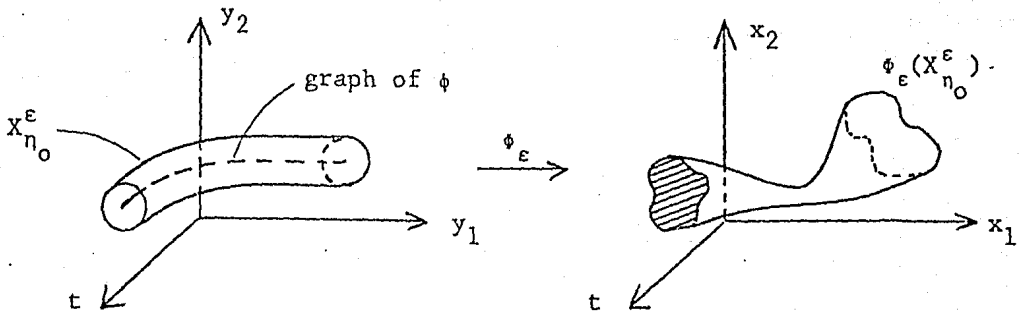
es un difeomorfismo sobre su imagen que transforma la ecuación (7) en

$$(11) \quad \dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon g(t, y, \varepsilon).$$

Supóngase que $\eta < 1$ está dado. Sea η_0 un número positivo menor que η y y_ε una solución de (11). Aplicando el Teorema 1 con $\alpha(t, \varepsilon) = \varepsilon t$, tenemos que existen $\bar{\varepsilon}_0(\eta_0)$ y $\delta(\eta_0) < 1$ tales que $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \bar{\varepsilon}_0)$ y $(t_0, y_0) \in X_{\delta(\eta_0)}^\varepsilon$ implica que $(t, y_\varepsilon(t; t_0, y_0)) \in X_{\eta_0}^\varepsilon$ para $t \leq t_0$. Escogemos ρ positivo menor que $\delta(\eta_0)$. Para

ε suficientemente pequeño, digamos $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, tenemos que $\phi_\varepsilon(X_{\eta_0}^\varepsilon) \in X_\eta^\varepsilon$. Para ver esto, sea ε_2 tal que $|\varepsilon u(t, x, \varepsilon)| < \eta - \eta_0$ para $(t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \varepsilon_2)$ entonces si x es tal que $x = y + \varepsilon u(t, y, \varepsilon)$ con $|y - \phi(\varepsilon t)| < \eta_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} |x - \phi(\varepsilon t)| &\leq |y - \phi(\varepsilon t)| + |\varepsilon u(t, y, \varepsilon)| \\ &< \eta_0 + \eta - \eta_0 = \eta \end{aligned}$$



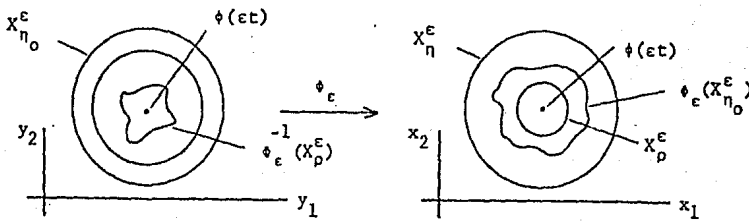
Por el Lema 2. existe ε_3 tal que $X_\rho^\varepsilon \subset \tilde{\Phi}_\varepsilon(X_{\delta(\eta_0)}^\varepsilon)$

para $\varepsilon < \varepsilon_3$; si $\phi(\varepsilon t)$ juega el papel de $c_0(t, \varepsilon)$, y si $(t, c) \in X_\rho^\varepsilon$ entonces $|c - \phi(\varepsilon t)| < \rho$ y entonces existe x^* tal que $c = x^* + \varepsilon u(t, x^*, \varepsilon)$ y $|x^* - \phi(\varepsilon t)| < \delta$, i.e.:

$\phi_\varepsilon(t, x^*) = (t, c)$ y $(t, x^*) \in X_{\delta(\eta_0)}^\varepsilon$. Seleccionamos

$$\varepsilon_0(\eta) = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_0(\eta), \varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

Así, si $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$ y $(t_0, x_0) \in X_\rho^\varepsilon$ entonces
 $(t_0, y_0) = \phi_\varepsilon^{-1}(t_0, x_0) \in X_{\delta(\eta_0)}^\varepsilon$ y por lo tanto
 $(t, y_\varepsilon(t; t_0, y_0)) \in X_{\eta_0}^\varepsilon$ para $t \geq t_0$.



Se sigue de la unicidad de soluciones con respecto a datos
 iniciales que

$(t, x_\varepsilon(t; t_0, x_0)) = \phi_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t; t_0, y_0)) \in \phi_\varepsilon(X_{\eta_0}^\varepsilon) \subset X_\eta^\varepsilon$ para
 $t \geq t_0$.

Esto concluye la demostración del Teorema 2.

CAPÍTULO IV

VECINDADES ESTABLES PARA ÓRBITAS

1. ESTABILIDAD ORBITAL BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES.

Supongase que $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de la ecuación

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

y sea γ su órbita. Sea $g : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ continua y localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable.

Se dice que ϕ es *orbitalmente estable bajo disturbios persistentes* (o.e.d.p.) para la ecuación (1) si para toda $\eta > 0$ existen $\delta_1(\eta), \delta_2(\eta) > 0$ tales que para cualquier $t_0 \geq 0$ las condiciones

$$d(y_0, \gamma) < \delta_1 \quad \text{y}$$

$$|g(t, y)| < \delta_2 \quad \text{para } t \geq t_0 \quad \text{y } y \in \{x \mid d(x, \gamma) < \eta\}$$

implican que la solución $y(t; t_0, y_0)$ de

$$(2) \quad \dot{y} = f(t, y) + g(t, y)$$

satisface

$$d(y(t; t_0, y_0), \gamma) < \eta \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Esta definición, en contraste con la de estabilidad bajo disturbios persistentes, no requiere que las soluciones de la ecuación (1) y su perturbación (2) se muevan en fase unas respecto de las otras.

El siguiente resultado es una nueva extensión del Teorema de Malkin al caso de estabilidad orbital,

Teorema 1. Para soluciones acotadas de la ecuación (1), estabilidad orbital uniformemente asintótica implica estabilidad orbital bajo disturbios persistentes.

En la demostración de este teorema utilizaremos el siguiente lema, que es un resultado inverso sobre estabilidad de las órbitas (Yoshizawa [9]).

Lema 1. Si ϕ es una solución acotada y o.u.a.e. de (1) con órbita γ , entonces existe una función de Lyapunov $V(t, x)$, definida para $t \geq 0$ y x en una vecindad de γ , que satisface:

(i) $\psi_1(d(x, \gamma)) \leq V(t, x) \leq \psi_2(d(x, \gamma))$ con ψ_1 y ψ_2 continuas, crecientes y positivas definidas;

(ii) $|V(t, x) - V(t, x')| \leq L|x - x'|$ con L una constante positiva;

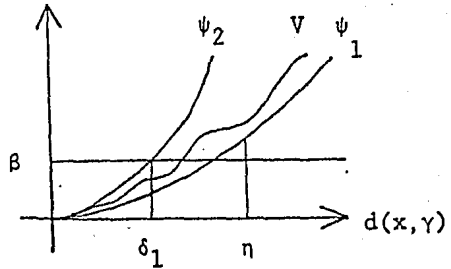
(iii) $\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -c V(t, x)$ para alguna constante positiva c .

Demostración del Teorema 1. Sea ϕ una o.u.a.e. de (1) y sea γ su órbita. Supongamos la existencia de una función V que satisface las condiciones dadas en el Lema 1 con $c=1$. Es suficiente demostrar que dada cualquier $\eta > 0$ existen

números positivos δ_1 , δ_2 y β tales que para toda $t \geq t_0 \geq 0$:

(i) $d(x, \gamma) < \delta_1$ implica $V(t, x) < \beta$;

(ii) $d(x, \gamma) > \eta$ implica $V(t, x) > \beta$;



(iii) $\delta_1 < d(x, \gamma) < \eta$ implica

$$\dot{V}_{(2)}(t, x) \leq 0 \quad \text{si}$$

$$|g(t, x)| < \delta_2 \quad \text{para } t \geq t_0 \text{ y } x \in \{y | d(y, \gamma) < \eta\}.$$

Supongamos que η está dado y sea $\beta < \psi_1(\eta)$ y $\delta_1 = \psi_2^{-1}(\beta)$. Entonces (i) y (ii) se satisfacen. Ahora sea $\delta_2 < \frac{\psi_1(\delta_1)}{L}$ donde L es la constante de Lipschitz de V . Así pues, si $\delta_1 < d(y_*, \gamma) < \eta$, $t_* \geq t_0$ y $x(t) = x(t; t_*, y_*)$, $y(t) = y(t; t_*, y_*)$ son soluciones de (1) y (2) respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(2)}(t_*, y_*) &= \frac{d^+}{dt} V(t, y(t)) \Big|_{t=t_*} \\ &\leq \frac{d^+}{dt} V(t, x(t)) \Big|_{t=t_*} + L |y(t_*) - x(t_*)| \\ &= \dot{V}_{(1)}(t_*, y_*) + L |\delta(t_*, y(t_*)) + g(t_*, y(t_*)) - \delta(t_*, x(t_*))| \\ &\leq -V(t_*, y_*) + L |g(t_*, y_*)| \leq -\psi_1(\delta_1) + L\delta_2 < 0. \end{aligned}$$

Así, el Teorema 1, queda probado.

2. VECINDADES ORBITALMENTE ESTABLES

Consideremos la ecuación

$$(3) \quad \dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es continua y tiene derivada parcial continua con respecto a x , para cada ε . Correspondiendo a cada $\varepsilon > 0$ sea γ_ε un conjunto en \mathbb{C}^n . Decimos que γ_ε tiene una *vecindad orbitalmente estable* cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (v.o.e. $\varepsilon \rightarrow 0$) para la ecuación (3) si dada $\eta > 0$ existen $\varepsilon_0(\eta), \rho(\eta) > 0$ tales que: $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0)$ y $d(x_0, \gamma_\varepsilon) < \rho$ implica que $d(x(t; t_0, x_0), \gamma_\varepsilon) < \eta$ para $t \geq t_0$.

Bajo las condiciones del Teorema 1 del Capítulo III tenemos un teorema análogo para órbitas cuya demostración sigue de la misma manera.

Teorema 2. Sea ϕ una solución de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ con órbita γ . Si ϕ es orbitalmente estable bajo disturbios persistentes, entonces γ tiene una vecindad orbitalmente estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación

$$\dot{x} = \frac{\partial \alpha(t, \varepsilon)}{\partial t} f(\alpha(t, \varepsilon), x) + \frac{\partial \alpha(t, \varepsilon)}{\partial t} g(t, x, \varepsilon).$$

Ahora establecemos algunos corolarios de este resultado.

Corolario 1. Consideremos la ecuación

$$(3) \quad \dot{x} = f(t, x, \varepsilon).$$

Sea ϕ una solución acotada de

$$(4) \quad \dot{x} = f(t, x, 0)$$

con órbita γ . Si ϕ es orbitalmente estable bajo disturbios persistentes para la ecuación (4) y $f(t, x, \varepsilon) \rightarrow f(t, x, 0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$ y x en conjuntos compactos, entonces γ tiene una vecindad orbitalmente estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (3).

En particular esto prueba que γ es una aproximación uniforme para $t \in [0, \infty)$ a la órbita de cualquier solución (3) que en $t = 0$ está sobre γ .

Para demostrar el Corolario 1 escribimos la ecuación (3) como

$$\dot{x} = f(t, x, 0) + [f(t, x, \varepsilon) - f(t, x, 0)]$$

y aplicamos el Teorema 2 con $\alpha(t, \varepsilon) = t$.

Consideraremos ahora perturbaciones no-autónomas de un sistema autónomo.

Corolario 2. Supongamos que $g(t, x, \varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$ y x en conjuntos compactos. Si ϕ es una solución periódica y orbitalmente asintóticamente estable de $\dot{x} = f(x)$, entonces la órbita de ϕ tiene una vecindad orbitalmente estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x, \varepsilon).$$

Demostración. Aplicamos el Teorema II.2, el Teorema 2 y el Corolario 1.

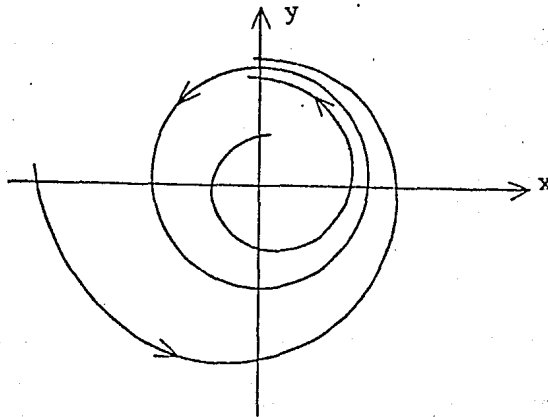
Ejemplo 1. Considérese el sistema

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^3 - xy^2 + \varepsilon \sin t \\ \dot{y} &= x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2y - y^3 - \varepsilon \cos xy. \end{aligned}$$

Escribiendo estas ecuaciones en coordenadas polares, para $\varepsilon = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^2(1 - r) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

Entonces por el Corolario 2 la circunferencia unitaria tiene una v.o.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (5). Así, para valores pequeños de ε , las órbitas que empiezan cerca de esta circunferencia permanecen cerca en todo tiempo futuro.



Plano fase de la ecuación (4) para $\varepsilon = 0$

3. EL METODO DE LA APROXIMACION PROMEDIO PARA ORBITAS

Estudiamos aquí la ecuación

$$(6) \quad \dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$$

donde f satisface las condiciones requeridas en la sección III.3. Lo que nos interesa es la validez de la aproximación promedio, en el sentido orbital, en intervalos infinitos de tiempo.

Sea ϕ una solución de

$$\dot{x} = \varepsilon \phi_0(x)$$

donde

$$\phi_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt.$$

y sea γ la órbita de ϕ .

Teorema 3. Si ϕ es acotada y orbitalmente estable bajo disturbios persistentes, entonces γ tiene una vecindad orbitalmente estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (6).

Este teorema implica que para soluciones o.e.d.p. la aproximación promediada es uniformemente válida en el intervalo $[0, \infty)$, en un sentido orbital.

Corolario 3. Si ϕ es una solución de $\dot{x} = \phi_0(x)$, periódica y orbitalmente asintóticamente estable (i.e., es un ciclo

límite estable), entonces γ tiene una vecindad orbitalmente estable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (6).

Este corolario se sigue del hecho de que en sistemas autónomos o.a.e. implica o.e.d.p. (Teoremas II.2 y IV.1).

La demostración del Teorema 3 es análoga a la del Teorema 2 del Capítulo III. En ésta utilizaremos el siguiente lema.

Lema 2. Sea $u : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (0, \varepsilon_1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $u(t, x, \varepsilon)$ es de clase $C^1(\mathbb{C}^n)$ con respecto a x para (t, ε) fijo y $\varepsilon u(t, x, \varepsilon)$, $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, \varepsilon)$ tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente respecto a $t \in \mathbb{R}$ y x en conjuntos compactos. Sea $\gamma \in \mathbb{C}^n$ un conjunto compacto. Dada $\delta > 0$ y $\rho \in (0, \delta)$ existe $0 < \varepsilon_0(\delta, \rho) < \varepsilon_1$, tal que, si $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0)$ y $d(c, \gamma) < \rho$ entonces existe $x^*(t, \varepsilon)$ tal que $d(x^*, \gamma) < \delta$ y $c = x^* + \varepsilon u(t, x^*, \varepsilon)$.

Demostración. Bajo tales hipótesis, si ε es suficientemente pequeño, la función $x \rightarrow c - \varepsilon u(t, x, \varepsilon)$ es, para cada $t \in \mathbb{R}$, una contracción en el conjunto de $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $d(x, \gamma) < \delta$.

Demostración del Teorema 3. Tomemos por Ω en el Lema III.1 un conjunto compacto que contiene toda $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $d(x, \gamma) < 1$. Entonces bajo el cambio de variables $x = y + \varepsilon u(t, y, \varepsilon)$, con $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, la ecuación (6) se convierte en

$$(7) \quad \dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon g(t, y, \varepsilon).$$

Sean x_ε y y_ε soluciones de las ecuaciones (6) y (7), respectivamente. Queremos demostrar que dada $\eta > 0$ existen $\varepsilon_0(\eta)$, $\rho(\eta) > 0$ tales que $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0)$ y $d(x_0, \gamma) < \rho$ implican que $d(x_\varepsilon(t; t_0, x_0), \gamma) < \eta$ para $t \geq t_0$.

Supongase que $\eta > 1$ está dado. Sea η_0 un número positivo menor que η . Aplicando el Teorema 2 con $\alpha(t, \varepsilon) = \varepsilon t$ tenemos que existen $\bar{\varepsilon}_0(\eta_0)$ y $\delta(\eta_0) < 1$ tales que $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \bar{\varepsilon}_0)$ y $d(y_0, \gamma) < \delta$ implican que $d(y_\varepsilon(t; t_0, y_0), \gamma) < \eta_0$ para $t \geq t_0$. Escogemos $\rho(\eta)$ positivo menor que $\delta(\eta_0)$. Sea ε_2 tal que $|\varepsilon u(t, x, \varepsilon)| < \eta - \eta_0$ para $(t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \varepsilon_2)$. Por el Lema 2 existe ε_3 tal que $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_3)$ y $d(x_0, \gamma) < \rho$ implican la existencia de y_0 tal que $d(y_0, \gamma) < \delta(\eta_0)$ y

$$x_0 = y_0 + \varepsilon u(t_0, y_0, \varepsilon)$$

Finalmente sea $\varepsilon_0(\eta) = \min \{\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_0(\eta_0), \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Ahora si $(t_0, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0(\eta))$ y

$d(x_0, \gamma) < \rho(\eta)$ entonces $x_0 = y_0 + \epsilon u(t_0, y_0, \epsilon)$ con $d(y_0, \gamma) < \rho(\eta_0)$. Así pues, la solución $y_\epsilon(t; t_0, y_0)$ satisface $d(y(t; t_0, y_0), \gamma) < \eta_0$ para $t \geq t_0$.

De la unicidad de soluciones con respecto a condiciones iniciales se sigue que

$$\begin{aligned} d(x_\epsilon(t; t_0, x_0), \gamma) &= d(y_\epsilon(t; t_0, y_0) + \epsilon u(t, y_\epsilon(t; t_0, y_0), \epsilon), \gamma) \\ &\leq |\epsilon u(t, y_\epsilon(t; t_0, y_0), \epsilon)| + d(y_\epsilon(t; t_0, y_0), \gamma) \\ &< \eta - \eta_0 + \eta_0, \text{ para } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del Teorema 3.

Ejemplo 2. La ecuación de Van der Pol con forzamiento y coeficientes que oscilan rápidamente es:

$$(8) \quad \ddot{x} + \mu(t/\epsilon)(x^2 - 1)\dot{x} + w(t/\epsilon)x = g(t/\epsilon, x, \dot{x}).$$

Supongamos que las funciones μ y w son casi periódicas con valores medios positivos $\bar{\mu}$ y \bar{w} , respectivamente. Supongamos también que $g(t, x, y)$ es casi periódica en t uniformemente con respecto a (x, y) en conjuntos compactos y tiene valor medio igual a cero.

Haciendo el cambio de escala de tiempo ($\tau = \epsilon t$) y escribiendo la ecuación (8) como un sistema, tenemos

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon y$$

(9)

$$\frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon \bar{\mu}(\tau)(x^2 - 1)y - \varepsilon \omega(\tau)x + \varepsilon g(\tau, x, y)$$

El sistema promediado correspondiente es

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon y$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon \bar{\omega}x - \varepsilon \bar{\mu}(x^2 - 1).$$

Sea γ el ciclo límite de la ecuación (10). Por el Corolario 3, γ tiene una v.o.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para el sistema (9). Entonces, para ε pequeña, las órbitas del sistema (9) que empiezan cerca de γ permanecen cerca en el futuro.

CAPÍTULO V

SINCRONIZACIÓN RACIONAL

1. DEFINICION

Consideremos la ecuación

$$(1) \quad \dot{\theta} = f(t, \theta)$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n] \in \mathbb{R}^n$ y

$$f(t, \theta_1, \dots, \theta_i + 2\pi, \dots, \theta_n) = f(t, \theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad \text{e } i = 1, \dots, n.$$

Decimos que el sistema (1) tiene la propiedad de sincronización racional si existe $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n] \in \mathbb{Z}^n$ y para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ existe un conjunto abierto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tal que las soluciones $\theta(t)$ de (1) con $\theta(t_0) \in \Gamma$ satisfacen las relaciones

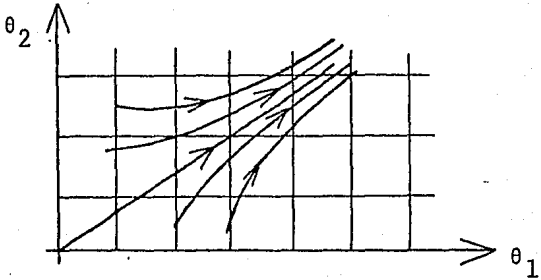
$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1 : \theta_2 : \dots : \theta_n = \omega_1 : \omega_2 : \dots : \omega_n.$$

Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta_i}{\theta_j} = \frac{\omega_i}{\omega_j}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

El vector ω es llamado *vector de rotación*,

Considerando que la ecuación (1) representa una familia uniparamétrica de campos vectoriales en un toro n-dimensional, la condición (2) significa que la órbita de $\theta(t)$ da asintóticamente ω_i vueltas alrededor del eje i de este tono por cada ω_j vueltas alrededor del eje j .



$w = (2, 2)$ es un vector de rotación

2. SISTEMAS ACOPLADOS DEBILMENTE

Aquí estudiaremos un sistema en coordenadas de amplitud (x) y fase (θ) de la forma:

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= G(x, \theta, \epsilon) \\ \dot{\theta} &= \omega + \epsilon F(x, \theta, \epsilon) \end{aligned}$$

donde $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas, 2π -periódicas en cada componente del vector θ , de clase C^1 con respecto a (x, θ) para cada ϵ fijo y F es acotada como función de x para cada (θ, ϵ) fijo.

Supondremos que $\{\omega, \Omega_2, \dots, \Omega_n\} \subset \mathbb{Z}^n$ es una base ortogonal de \mathbb{R}^n y Λ es la matriz de $n \times n$ cuyos renglones son

$\omega, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$, Adoptaremos además la siguiente notación;

$$G_0(x, u) = \frac{1}{\omega \cdot \omega} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G(x, A^{-1}(\frac{v}{u}), 0) dv$$

$$F_0(x, u) = \frac{1}{\omega \cdot \omega} (F_0^2(x, u), \dots, F_0^n(x, u))$$

donde $u \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v \in \mathbb{R}$, el punto es el producto escalar en \mathbb{R}^n y

$$F_0^i(x, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Omega_i F(x, A^{-1}(\frac{u}{v}), 0) dv \quad \text{para } i=2, \dots, n$$

El siguiente teorema da condiciones bajo las cuales las variables angulares del sistema (3) se sincronizan racionalmente para valores pequeños del parámetro ϵ ; generaliza un resultado debido a Hoppensteadt y Keener (Ref. [10])

Teorema 1. Si el sistema auxiliar

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = G_0(x, u)$$

$$\frac{du}{dt} = F_0(x, u)$$

tiene una solución acotada y orbitalmente asintóticamente estable, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ las variables de fase $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ del sistema (3) se sincronizan racionalmente con vector de rotación ω .

Demostración. En las nuevas variables $v = \omega \cdot \theta$ y $u_i = \Omega_i \cdot \theta$ para $i = 2, \dots, n$, la ecuación (3) se convierte en

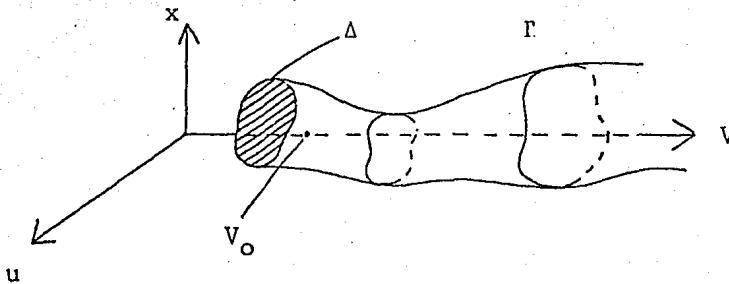
$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \varepsilon G(x, A^{-1}(u), \varepsilon) \\
 (5) \quad \dot{u}_i &= \varepsilon \Omega_i \cdot F(x, A^{-1}(u), \varepsilon) \quad (\text{para } i=2, \dots, n) \\
 \dot{v} &= w \cdot w + \varepsilon w \cdot F(x, A^{-1}(u), \varepsilon).
 \end{aligned}$$

En este caso el punto significa producto escalar en \mathbb{R}^n . Como $F(x, A^{-1}(u), \varepsilon)$ es acotada, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ la componente $v(t)$ de cualquier solución del sistema (5) tiende monótonamente a infinito.

Eliminando el tiempo en (5) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dv} &= \frac{\varepsilon G(x, A^{-1}(u), \varepsilon)}{w \cdot w + \varepsilon w \cdot F(x, A^{-1}(u), \varepsilon)} \\
 \frac{du_i}{dv} &= \frac{\varepsilon \Omega_i \cdot F(x, A^{-1}(u), \varepsilon)}{w \cdot w + \varepsilon w \cdot F(x, A^{-1}(u), \varepsilon)} \quad (\text{para } i=2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

cuya ecuación promediada correspondiente es el sistema auxiliar (4). Como este sistema promediado tiene una solución acotada y o.u.a.e., el Teorema 3 del capítulo IV implica la existencia de $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y $v_0 > 0$ existe un conjunto abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^{m+n-1}$ con la siguiente propiedad: si (x, u) es una solución de (6) y $(x(v_0), u(v_0)) \in \Delta$, entonces (x, u) es acotada para $v > v_0$. Sea Γ el conjunto de (y, z, v) en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tal que $v > v_0$ y $(y, z) = (x(v), u(v))$ con (x, y) una solución de la ecuación (6) que satisface $(x(v_0), u(v_0)) \in \Delta$. Este conjunto, Γ , es



abierto y para $\varepsilon < \varepsilon_0$, si $(x, \theta]$ es una solución de (3) con $(x(t_0), \theta(t_0)) \in \Gamma$, entonces, para $k = 2, \dots, n$, la función $u_k(t) = \Omega_k \cdot \theta(t)$ es acotada para $t > t_0$. De donde,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Omega_k \cdot \theta(t)}{\omega \cdot \theta(t)} = 0$$

De esto se sigue que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{\omega \cdot \theta(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\omega}{\omega \cdot \omega} + \sum_{k=2}^n \frac{\Omega_k \cdot \theta(t)}{\omega \cdot \theta(t)} \frac{\Omega_k}{\Omega_k \cdot \Omega_k} \right] = \frac{\omega}{\omega \cdot \omega}$$

Entonces, para $\varepsilon < \varepsilon_0$, si $(x(t_0), \theta(t_0)) \in \Gamma$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta_i(t)}{\theta_j(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta_i(t)}{\omega \cdot \theta(t)} \cdot \frac{\omega \cdot \theta(t)}{\theta_j(t)} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

Esto demuestra el Teorema 1.

3. SINCRONIZACION DE RELOJES BIOLÓGICOS.

En muchas instancias de ritmos biológicos es posible identificar una variable de estado cíclica que describe el comportamiento del sistema. Naturalmente, el espacio fase asociado es una circunferencia. Biólogos y fisiólogos circadianos se refieren a tales sistemas como relojes simples. Relojes biológicos más complejos pueden considerarse como una colección de relojes simples acoplados. En este caso el plano fase correspondiente es un toro n-dimensional. La evolución de estos sistemas está regida por ecuaciones de la forma*

$$(7) \quad \dot{\theta} = f(t, \theta)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^n$ y f es 2π -periódica en cada componente de θ . Las propiedades de sincronización racional de esta ecuación dan información acerca de la interacción armónica y subarmónica entre las diferentes componentes del sistema.

En este contexto una ecuación de la forma

$$(8) \quad \dot{\theta} = \omega + \epsilon F(\theta, \epsilon)$$

* ver referencia [11] para ejemplos biológicos,

es un modelo de un sistema autónomo débilmente acoplado de relojes simples y el Teorema 1 se aplica para caracterizar una clase de tales sistemas con la propiedad de sincronización racional.

El siguiente ejemplo es para ilustrar la aplicación del Teorema 1 a un sistema de la forma (8).

Ejemplo 1. Vamos a demostrar que $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ es un vector de rotación del sistema

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \frac{\varepsilon}{\omega_2} \operatorname{sen}^3(\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + \frac{\varepsilon}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2)$$

Para encontrar la ecuación auxiliar hacemos el cambio de variables $u = \omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1$, $v = \omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2$, y obtenemos el nuevo sistema

$$\dot{u} = \varepsilon \operatorname{sen} v - \varepsilon \operatorname{sen}^3 u$$

$$\dot{v} = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\varepsilon \omega_1}{\omega_2} \operatorname{sen}^3 u + \frac{\varepsilon \omega_2}{\omega_1} \operatorname{sen} v.$$

La ecuación de las órbitas es

$$\frac{du}{dv} = \frac{[\varepsilon \operatorname{sen} v - \varepsilon \operatorname{sen}^3 u]}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sen}^3 u + \frac{\omega_2}{\omega_1} \operatorname{sen} v \right]}$$

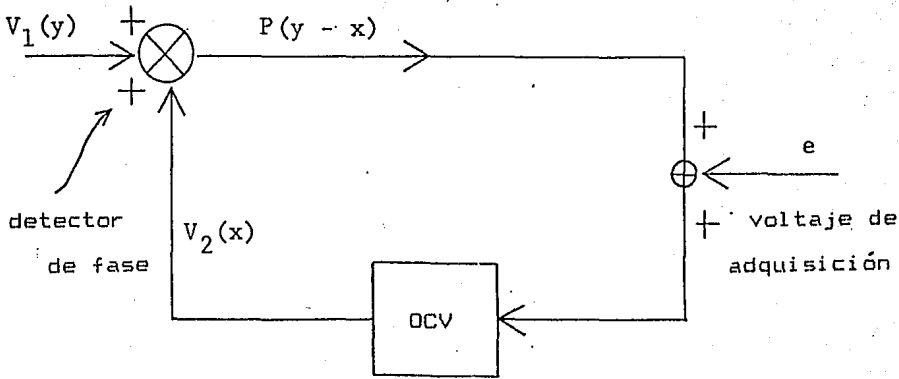
la cual después de ser promediada nos da

$$\frac{du}{dv} = \frac{-\varepsilon \operatorname{sen}^3 u}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

Esta ecuación tiene un equilibrio uniformemente asintóticamente estable en el origen y entonces el Teorema 1 se aplica. Nótese que el equilibrio no es exponencialmente estable y de nuevo, no son aplicables resultados lineales.

4. SISTEMAS ELECTRONICOS CON RETROALIMENTACION. CIRCUITOS SINCRONICOS.

Desarrollos tecnológicos recientes han hecho posible la producción a gran escala de circuitos integrados muy complejos. Los circuitos sincrónicos (C.S.) son un ejemplo de tales circuitos de bloque. Estos son dispositivos análogo-digitales cuya característica esencial es detectar la fase de un voltaje de entrada, $v_1(y(t))$, dado. Para esto el circuito produce un voltaje estimado, $v_2(x(t))$, tal que su fase $x(t)$ se sincroniza con la fase de entrada en el sentido siguiente: $\frac{x}{y} \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.



Circuito de Primer Orden

Los circuitos sincrónicos tienen un espectro muy amplio de aplicaciones que incluyen demodulación FM, multiplicación de frecuencia, regeneración de señales limpias y otros usos en telecomunicaciones y procesamiento de señales (ver [12] y [13]). Los fisiólogos matemáticos han usado los CS para producir modelos que simulan el comportamiento de los músculos, patrones de respiración, mecanismos auditivos y algunas funciones del cerebro humano (c.f.[14]).

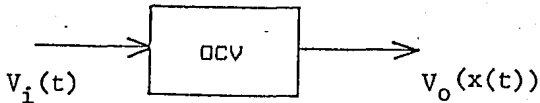
Las componentes básicas de un CS son un detector de fase y un oscilador controlado por voltaje (OCV).

Un *detector de fase* es un circuito que detecta la diferencia de fase entre dos señales dadas $v_1(y)$ y $v_2(x)$ produciendo una salida periódica, P , que es una función de la diferencia de fase $y - x$. Típicamente esta señal de error P

oscila armónicamente con la diferencia de fases; e.g.,

$$P(y-x) = k \operatorname{sen}(y-x)$$

La amplitud k es llamada la sensibilidad del detector de fase



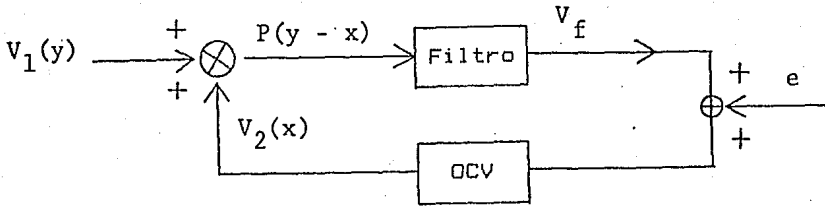
El OCV produce una salida periódica característica, V_o , cuya fase depende del voltaje de entrada V_i . Precisamente

$$s = \omega_0 t + \int^t V_i(s) ds$$

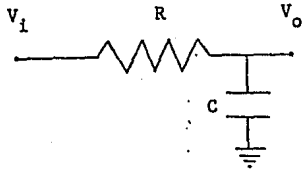
donde ω_0 es la frecuencia del OCV en ausencia de señal de control.

El sistema también usa un voltaje de adquisición, e , para ajustar el circuito de tal manera que el voltaje llegue al OCV en el rango correcto para capturar la fase de la señal entrante.

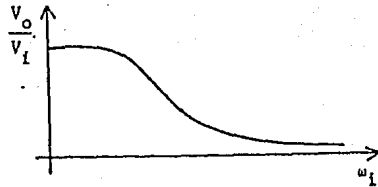
En los circuitos de segundo orden se añade un filtro que deja pasar frecuencias bajas (FFB) para darle más estabilidad y eficiencia al sistema



Circuito de Segundo Orden



Filtro FFB



Curva de respuesta del FFB

Un FFB es un circuito simple con solo una resistencia y un condensador. Su función es filtrar las componentes de alta frecuencia del voltaje de entrada, Por las leyes de Kirchoff el voltaje de salida v_o satisface la ecuación lineal

$$RC \dot{V}_0 + V_0 = V_i$$

De ahí que la relación entre V_0 y V_i esté dada por

$$(9) \quad V_0 = \exp[-t/RC]V_0(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t \exp[(s-t)/RC]V_i(s)ds,$$

Una vez que se conectan el detector de fase, el OCU y el FFB, obtenemos las siguientes ecuaciones para el circuito de segundo orden

$$(10) \quad RC \dot{v}_f + v_f = P[y-x]$$
$$\dot{x} = \omega_0 + e + v_f$$

En el límite cuando $RC \rightarrow 0$, el Kernel de convolución $(1/RC) \exp[-\frac{(s-t)}{RC}]$, en la ecuación (9), actúa como la distribución δ de Dirac y entonces $v_f = P[y-x]$. En consecuencia, las ecuaciones (1) se reducen a la ecuación del circuito de primer orden:

$$(11) \quad \dot{x} = \omega_0 + e + P[y-x]$$

Ahora examinaremos dos ejemplos de circuitos de primer orden y demostraremos que pueden afinarse de tal manera que el circuito se sincronice a una razón 1 a 1.

Ejemplo 2. Supongamos que tenemos en el circuito un detector de fase con sensibilidad pequeña, ϵ , y queremos captar una señal de entrada con fase $y(t) = \mu t$. Para un circuito como es te las ecuaciones son

$$(12) \quad \dot{x} = \omega_0 + e + \epsilon \sin(y-x)$$
$$\dot{y} = \mu$$

Demostraremos que, para ε suficientemente pequeña, si el voltaje de adquisición satisface

$$(13) \quad |e - (\mu - \omega_0)| < \varepsilon$$

entonces el circuito se sincroniza

Cambiando a la nueva escala de tiempo $\tau = \nu t$, con $\nu = \omega_0 + \varepsilon$, obtenemos el sistema

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 + \frac{\varepsilon}{\nu} \operatorname{sen}(y-x)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\mu}{\nu}$$

La condición (13) implica que $\frac{1}{\varepsilon} |\mu - \nu| < 1$ y entonces $\mu/\nu = 1 + \varepsilon\lambda/\nu$ con $|\lambda| < 1$. El sistema

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 + \frac{\varepsilon}{\nu} \operatorname{sen}(y-x)$$

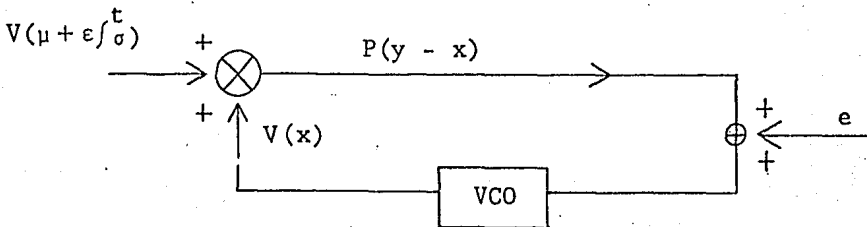
$$\frac{dy}{d\tau} = 1 + \frac{\varepsilon}{\nu} \lambda$$

está en forma adecuada para aplicar el Teorema 1. Para este ejemplo tenemos que $\omega = [1, 1]$, $\Omega_1[-1, 1]$ y la ecuación auxiliar correspondiente es

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{\varepsilon}{\nu} (\lambda - \operatorname{sen} u),$$

Como esta ecuación tiene un equilibrio asintóticamente estable

Ejemplo 3. Aquí consideramos un circuito con una señal de entrada cuya frecuencia tiene variaciones pequeñas alrededor de un valor constante μ ,



Las ecuaciones en este caso son

$$\dot{x} = \omega_0 + e + P[y-x]$$

$$\dot{y} = \mu + \epsilon \sigma(t)$$

donde σ es acotada y P es 2π -periódica. Podemos demostrar que para ϵ pequeña y el voltaje de adquisición en el rango correcto, x se sincroniza con y . Para esto examinamos la ecuación de la diferencia de fases, $u = y - x$:

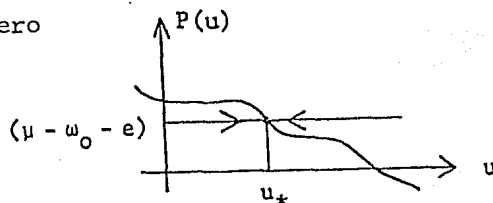
$$(14) \quad \dot{u} = \mu - \omega_0 + e - P(u) + \epsilon \sigma(t).$$

Si e es tal que el número

$(\mu - \omega_0 - e)$ está

en la imagen de P , en

tonces la ecuación



$$\dot{u} = \mu - w - \varepsilon - P(u)$$

tiene un equilibrio asintóticamente estable, u_* . Entonces de los teoremas II.1, II.3 y el Corolario III.1, u_* tiene una v.e. $\varepsilon \rightarrow 0$ para la ecuación (14). De donde, si ε es suficientemente pequeña, para soluciones $u_\varepsilon(t)$ de (14) que empiezan cerca de u_* , tenemos que $k(t) = u_\varepsilon(t) - u_*$ es una función acotada. De esto y del hecho de que $y \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ se sigue que

$$\frac{x}{y} = \frac{y - u_* - k(t)}{y} \rightarrow 1, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

REFERENCIAS SUPLEMENTARIAS

FUNCIONES CASI PERIODICAS

H. Bohr, Almost periodic functions, Chelsea Publishing, Co., N.Y., 1947.

A.S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge University Press, 1932.

ESTABILIDAD BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES

I.G. Malkin, Theory of stability of motion, State Publishing House, Moscow-Leningrad, 1952. Translated by the United States Atomic Energy Commission (AEC-tr-3352).

N.N. Krasovskii, Stability of motion, Stanford University Press, California, 1963.

METODO DEL PROMEDIO

N. Krylov and N.N. Bogolyubov. Introduction to nonlinear mechanics, Princeton Press, N.J., 1942.

V.I. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer-Verlag, N.Y., 1983.

J. Kervorjian and J.D. Cole, Perturbation methods and applied mathematics, Springer-Verlag, N.Y., 1981.

J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, N.Y., 1983.

V.M. Volosov, Averaging in systems of differential equations. Russ. Math. Surveys, Vol. 17, No. 6, 1962.

REFERENCIAS SUPLEMENTARIAS

FUNCIONES CASI PERIODICAS

H. Bohr, Almost periodic functions, Chelsea Publishing, Co., N.Y., 1947.

A.S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge University Press, 1932.

ESTABILIDAD BAJO DISTURBIOS PERSISTENTES

I.G. Malkin, Theory of stability of motion, State Publishing House, Moscow-Leningrad, 1952. Translated by the United States Atomic Energy Commission (AEC-tr-3352).

N.N. Krasovskii, Stability of motion, Stanford University Press, California, 1963.

METODO DEL PROMEDIO

N. Krylov and N.N. Bogolyubov. Introduction to nonlinear mechanics, Princeton Press, N.J., 1942.

V.I. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer-Verlag, N.Y., 1983.

J. Kervorjian and J.D. Cole, Perturbation methods and applied mathematics, Springer-Verlag, N.Y., 1981.

J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, N.Y., 1983.

V.M. Volosov, Averaging in systems of differential equations. Russ. Math. Surveys, Vol. 17, No. 6, 1962.