FACULTAD DE CIENCIAS U.N.A.M.

LOS ESPACIOS DE HILBERT EN TERMINOS DE PROBABILIDAD

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

PRESENTA

SAMUEL ESCARELA CORNEJO

MEXICO 1986

PROLOGO

En varias conversaciones he oido de asuntos que se discuten mediante espacios de Hilbert, porque su análisis no tiene cabida satisfactoria en el modelo probabilista de Kolmogorov; es cierto que la teoría de probabilidad tiene limitaciones intrinsecas, pero puedo asegurar que: lo extrínseco del modelo de Kolmogorov, es extrínseco de los espacios de Hilbert - (en otras palabras: lo que no puede producir la teoría de probabilidad, tampoco lo pueden producir los - espacios de Hilbert). Esto se deduce del resultado más importante (según mi parecer) de esta tesis: cualquier espacio de Hilbert (excepto el constituido únicamente por el cero) se realiza mediante un espacio probabilista.

Hay diversas caracterizaciones de los espacios normados que admiten un producto interior compatible con la norma: la ley del paralelogramo se debe a Jordan y Von Neumann (ref. 17, págs. 39 y 40); Day (ref. 4), Lorch (ref. 9), etc. los caracterizan mediante - igualdades o desigualdades relativas a la norma. Mackey y Kakutani (ref. 10) demostraron que un espacio de Banach $\mathcal{H}$ es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, existe una transformación $\perp : \Lambda \to \Lambda$ en el espacio laticial Λ de las variedades lineales M cerradas en $\mathcal{H}$ tal que: a) $M_1 \subset M_2 (M \to M^{\perp}) \Longrightarrow M_2^{\perp} \subset M_1^{\perp}$,

b) $M^{\perp\perp} = M$ y c) $M^{\perp} \cap M = \{0\}$; lo mismo demostraron para una transformación $* : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ en el anillo $B(\mathcal{H})$ de los operadores lineales y acotados $T:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que: a) $T^* T \neq 0 (T \to T^*)$ equivale a $T \neq 0$, b) $(T_1 \; T_2)^* = T_2^* \; T_1^*$ y c) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$. En teoría de la medida, se sabe (ref. 7, pág. 247) que cualquier espacio de Hilbert se realiza como un espacio $L_2(\Omega, a, \mu)$; en esta situación, la medida μ es infinita cuando $\mathcal{H}$ es infinito dimensional (más aún: μ es σ-finita si $\mathcal{H}$ es infinito dimensional y separable; μ es finita si $\mathcal{H}$ es finito dimensional). La realización de los espacios de Hilbert que presento, fue sometida a consulta ante varios matemáticos por M. A. García; P. A. Meyer propuso, según García, otra realización también en términos de probabilidad, pero tomó como conjunto ortonormal completo a un conjunto que ni siquiera es ortogonal; sin embargo, la parte correcta de lo que propuso Meyer figura en esta tesis como caso particular en la construcción de bases.

En esta tesis demuestro que para todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\mathcal{H} \neq \{0\})$, existe un espacio probabilista (Ω, A, P) tal que $\mathcal{H}$ y $L_2(\Omega, A, P)$ son isomorfos; en la demostración para el caso en que $\mathcal{H}$ es infinito -(respectivamente finito) dimensional, proporciono un conjunto ortonomal completo en $L_2(\Omega, A, P)$ compuesto por funciones de Ω en $\{-1, 1\}$(respectivamente $\{0, 1\}$). También aporto un método para construir -

conjuntos ortonormales completos (bases), aplicable cuando $L_2(\Omega,A,P)$ es infinito dimensional; este método proporciona una infinidad de versiones probabilistas de los espacios de Hilbert. Como aplicación de lo anterior, defino un producto tensorial completo para cualquier familia (no necesariamente finita) de espacios de Hilbert y demuestro la consistencia de esta definición.

Puedo decir que el trabajo presente es autocontenido (aunque faltan, por ejemplo, la definición de espacios de Hilbert y el teorema de isomorfismo relativo a conjuntos ortonormales completos), pero no por esta pretensión lo hice tan extenso; presento como novedad la extensión simultánea de medidas (positivas) finitas e integrales de Daniell acotadas, sin usar las medidas exterior e interior ni las integrales superior e inferior; también presento diversas simplificaciones en definiciones y demostraciones. Sobre esto seré más explícito en la siguiente descripción.

La demostración de que la σ-álgebra (de subconjuntos de un conjunto Ω) y la clase monótona generadas por una álgebra son iguales, la presento como contracción de varias demostraciones usuales. Dada una colección de conjuntos G, construyo una semiálgebra S tal que las álgebras generadas por G y S son iguales; con esta construcción simplifico, en el producto de espacios medibles, la demostración de que los rectángulos medibles forman una semiálgebra. Con respecto a una álgebra $\mathcal{B}$, introduzco el concepto de función $\mathcal{B}$-simple (que coincide con el de variable aleatoria simple cuando $\mathcal{B}$ es σ-álgebra); el espacio de estas funciones es denso, según la convergencia en probabilidad (con cualquier probabilidad sobre $\mathcal{B}$), en el espacio de todas las variables aleatorias reales (relativas a la σ-álgebra generada por $\mathcal{B}$) y tiene estructura algebraica de álgebra laticial. Expongo algunas propiedades de los espacios de Riesz $\mathcal{L}$ (constituidos por funciones reales de dominio Ω), las correspondientes a funciones $\mathcal{B}$-simples se refieren a la álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{C} = \{[\mathbf{x} > x] \mid \mathbf{x} \in \mathcal{L}, x \in]-\infty,\infty[\}$ donde $[\mathbf{x} > x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{x}(\omega) > x\}$; por ejemplo, para el caso en que $1 \in \mathcal{L}$ demuestro que: cada función positiva perteneciente a $\mathcal{L}$, es límite puntual de una sucesión creciente de funciones $\mathcal{B}$-simples positivas.

Teniendo un espacio de Riesz $\mathcal{L}$ y una integral de Daniell E en $\mathcal{L}$ tales que $1 \in \mathcal{L}$ y $\mathrm{E}(1) = 1$, es usual (refs. 1,3,13, etc.) definir la σ-álgebra $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{L}$ (que es la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$) y extender E mediante las integrales superior e inferior correspondientes; ya extendida E, se demuestra la existencia y unicidad de una probabilidad P sobre $\mathcal{A}$ tal que E y la integral correspondiente a P son iguales. Por otra parte, teniendo una álgebra $\mathcal{B}$ y una probabilidad P sobre $\mathcal{B}$, es usual (refs. 1, 8, 12, etc.) extender P a la σ-álgebra $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{B}$ mediante las probabilidades exterior e interior correspondientes; ya extendida P, se define la integral de Daniell E correspondiente a P en el espacio (de Riesz) de las funciones A-simples y entonces se extiende E. En la primera de estas dos situaciones, considero la álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\{[x>0]\,|\,x\in\mathcal{L}\}$ ($=C$ puesto que $1\in\mathcal{L}$) y extiendo E teniendo en cuenta que cada función $\mathcal{B}$-simple es límite puntual de una sucesión en $\mathcal{L}$ uniformemente acotada y que el espacio de las funciones $\mathcal{B}$-simples es denso (según la convergencia en probabilidad) en el espacio de todas las variables aleatorias reales en (Ω,A); de esta manera evito el uso de las integrales superior e inferior y hago más expeditos los desarrollos correspondientes a P. En la segunda situación considero el espacio de Riesz $\mathcal{L}$ constituido por las funciones $\mathcal{B}$-simples, la integral de Daniell E en $\mathcal{L}$ correspondiente a P y tomo en cuenta que $\mathcal{B}=C$; de esta manera traslado la segunda a la primera situación. La posibilidad de desarrollar la integral correspondiente a una probabilidad P sobre una álgebra $\mathcal{B}$, sin la previa extensión de P, se puede aprovechar para hacer menos brusco y más natural el salto del modelo probabilista finito (que corresponde al caso en que $\mathcal{B}$ es finita) al modelo probabilista de Kolmogorov.

El fundamento de los resultados que presento sobre espacios de Hilbert, es la existencia del producto (tensorial) de espacios probabilistas; lo denomino producto tensorial, por su íntima relación con el producto tensorial de los espacios L_2 correspondientes. Hay varias demostraciones de la existencia de dicho producto, inclusive con elegancia (ref. 12, pág. 149), todas largas o con antecedentes laboriosos; en cualquier caso, con dificultades de notación que trato de mitigar con este trabajo. La demostración que proporciono tiene rasgos de originalidad, pero seguramente lo que sobresale en este tema es mi formulación del teorema de Fubini.

Doy a conocer mi agradecimiento al Profesor Joaquín Curiel Cañedo por los estímulos y orientaciones que me brindó para desarrollar este trabajo; también manifiesto mi gratitud al Profesor Pablo Barrera Sánchez por las sugerencias que me hizo para ampliar esta tesis; a mis maestros Humberto Cardenas Trigos, Emilio Lluis Riera y Enrique Valle Flores les agradezco su significativa participación en mi formación y su apoyo en mi ejercicio profesional.

CONTENIDO

ESPACIOS DE HILBERT.

ESPACIOS DE VARIABLES ALEATORIAS

(REALES)

I. Colecciones de Conjuntos.

Sean Ω conjunto no vacío y A, B subconjuntos de Ω. Se denota por $A-B$ al conjunto de todos los elementos de A que no están en B; frecuentemente se denota por B^c al conjunto $\Omega - B$ y se dice que B^c es el complemento de B en Ω. Se denota por AB y $A \cup B$ respectivamente a la intersección y unión de A con B; la expresión $A+B$ manifiesta que A, B son ajenos y (en tal caso) denota la unión de A con B.

Sea $\{A_n\}$ sucesión de subconjuntos de Ω. Se dice que $\{A_n\}$ es creciente (respectivamente decreciente) si $A_n \subset A_{n+1}$ (respectivamente $A_n \supset A_{n+1}$) para cada n; se dice que $\{A_n\}$ es monótona cuando es creciente o decreciente. La expresión $A_n \uparrow A$ (respectivamente $A_n \downarrow A$) manifiesta que $\{A_n\}$ es creciente y $A = \cup_n A_n$ (respectivamente decreciente y $A = \cap_n A_n$); si $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$, entonces se dice que $\{A_n\}$ converge a A o que A es el límite de $\{A_n\}$. La expresión $\Sigma_n A_n$ manifiesta que los conjuntos A_n son ajenos (o sea que $A_m A_n = \phi$ si $m \neq n$)

y denote su unión.

Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{S}$ colecciones de subconjuntos de Ω. Se dice que $\mathcal{P}$ es semiálgebra en Ω si: $\phi, \Omega \in \mathcal{P}$; $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow AB \in \mathcal{P}$; $C \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{P}$, $C^c = \sum_1^n C_j$. Se dice que $\mathcal{B}$ es álgebra en Ω si: $\Omega \in \mathcal{B}$; $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$; $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$. Se dice que $\mathcal{Q}$ es σ-álgebra en Ω si $\mathcal{Q}$ es álgebra en Ω tal que: $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{Q}$ para cada $n \Rightarrow A \in \mathcal{Q}$. Se dice que $\mathcal{M}$ es clase monótona si es cerrada bajo la convergencia de sucesiones monótonas (esto es: si $\{A_n\}$ es sucesión monótona en $\mathcal{M}$ que converge a A, entonces $A \in \mathcal{M}$). Se dice que $\mathcal{F}$ es clase σ-aditiva si: $\Omega \in \mathcal{F}$; $A, B \in \mathcal{F}$, $AB = \phi \Rightarrow A + B \in \mathcal{F}$; $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B \Rightarrow B - A \in \mathcal{F}$; $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{F}$ para cada $n \Rightarrow A \in \mathcal{F}$. Se dice que la intersección de todas las álgebras (respectivamente σ-álgebras) en Ω que contienen a $\mathcal{S}$ es la álgebra (respectivamente σ-álgebra) en Ω generada por $\mathcal{S}$; se dice que la intersección de todas las clases monótonas (respectivamente σ-aditivas) que contienen a $\mathcal{S}$ es la clase monótona (respectivamente σ-aditiva) generada por $\mathcal{S}$.

De las leyes de De Morgan se sigue que toda álgebra (respectivamente σ-álgebra) en Ω es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas (respectivamente numerables); por lo tanto, toda σ-álgebra en Ω es clase monótona. Si $\mathcal{B}$ es álgebra en Ω y $\mathcal{B}$ es clase monótona, entonces $\mathcal{B}$ es σ-álgebra en Ω. Por consiguiente, está demostrada la siguiente proposición.

(I.1) Proposición. Una álgebra $\mathcal{B}$ en Ω es σ-álgebra en Ω si, y sólo si, $\mathcal{B}$ es clase monótona.

(I.2) Proposición. Sea $\mathcal{B}$ álgebra en Ω. La σ-álgebra generada en Ω por $\mathcal{B}$ es la clase monótona generada por $\mathcal{B}$.

Demostración. Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{M}$ respectivamente la σ-álgebra en Ω y la clase monótona generadas por $\mathcal{B}$. Puesto que $\mathcal{Q}$ es clase monótona, se tiene $\mathcal{M} \subset \mathcal{Q}$; por lo tanto, de acuerdo con (I.1), basta demostrar que $\mathcal{M}$ es álgebra en Ω.

Para $A \in \mathcal{M}$ considérese $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} \mid AB, A^c B^c \in \mathcal{M}\}$; se tiene $\Omega \in \mathcal{M}_A$ para cada $A \in \mathcal{M}$; si $A \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_A$. Si $\{B_n\}$ es sucesión monótona en $\mathcal{M}_A$ y su límite es B, entonces $\{AB_n\}$ y $\{A^c B_n^c\}$ son sucesiones monótonas en $\mathcal{M}$ y sus respectivos límites son AB y $A^c B^c$; esto demuestra, para cada $A \in \mathcal{M}$, que $\mathcal{M}_A$ es clase monótona. Puesto que $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$ para cada $A \in \mathcal{B}$ y $B \in \mathcal{M}_A$ equivale a $A \in \mathcal{M}_B$, se tiene $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_B$ para cada $B \in \mathcal{M}$; por consiguiente, $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$ para cada $A \in \mathcal{M}$. De acuerdo con lo anterior: $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \phi \in \mathcal{M}_A \Rightarrow A^c = A^c\phi \in \mathcal{M}$; $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow B \in \mathcal{M}_A \Rightarrow AB \in \mathcal{M}$.

(I.3) Proposición. Si $\mathcal{C}$ es semiálgebra en Ω, entonces $\mathcal{B} = \{\Sigma_J C_j \mid J$ conjunto finito, $C_j \in \mathcal{C}$ para cada $j \in J\}$ es la álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}$ (se acepta que $\Sigma_J C_j = \phi$ si $J = \phi$).

Demostración. Es claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Si $\Sigma_J C_j, \Sigma_K C'_k \in \mathcal{B}$, entonces $(\Sigma_J C_j)(\Sigma_K C'_k) = \Sigma_{J\times K} C_j C'_k \in \mathcal{B}$ (se dice que $J\times K = \{(j,k) \mid j \in J, k \in K\}$ es el producto cartesiano de factores primero J y segundo K); esto demuestra que $\mathcal{B}$ es colección cerrada bajo intersecciones finitas. Por la definición de semiálgebra, se tiene $C^c \in \mathcal{B}$ para cada $C \in \mathcal{C}$; por consiguiente: $\Sigma_J C_j \in \mathcal{B} \Rightarrow (\Sigma_J C_j)^c = \cap_J C_j^c \in \mathcal{B}$. Puesto que $\mathcal{B}$ es álgebra en Ω y todos los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{B}$ están en en la álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ es la álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}$.

(I.4) Proposición. Sean $\mathcal{G}$ colección de subconjuntos de Ω y $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{G^c \mid G \in \mathcal{G}\} \cup \{\phi, \Omega\}$. La colección $\mathcal{C} = \{\cap_J G_j \mid J$ conjunto finito, $G_j \in \mathcal{G}'$ para cada $j \in J\}$ es semiálgebra en Ω (se acepta que $\cap_J G_j$

$= \Omega$ si $J = \phi$); la álgebra en Ω generada por $\mathcal{G}$ es la álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}$.

Demostración. Es obvio que $\phi, \Omega \in \mathcal{C}$ y que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intersecciones finitas; si $C \in \mathcal{C}$ y $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}'$ son tales que $C = \bigcap_1^n G_j$, entonces $G_1^c, G_2^c G_1, \ldots, G_n^c G_1 \cdots G_{n-1} \in \mathcal{C}$ y $C^c = G_1^c + G_2^c G_1 + \cdots + G_n^c G_1 \cdots G_{n-1}$. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las álgebras en Ω generadas por $\mathcal{G}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente; puesto que $\mathcal{G}' \subset \mathcal{B}$, se tiene $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, por lo tanto $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$; puesto que $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, se tiene $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

(I.5) *Lema.* Sea $\mathcal{F}$ clase σ-aditiva. $\mathcal{F}$ es σ-álgebra en Ω si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Si $\mathcal{G}$ es subcolección no vacía de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{F} \mid AG \in \mathcal{F}$ para cada $G \in \mathcal{G}\}$ es clase σ-aditiva.

Demostración. Por las propiedades primera y tercera en la definición de clase σ-aditiva, $\mathcal{F}$ es cerrada bajo complementación; por lo tanto, $\mathcal{F}$ es álgebra en Ω si es cerrada bajo intersecciones finitas; por la cuarta propiedad en dicha definición, $\mathcal{F}$ es σ-álgebra en Ω si es álgebra en Ω.

De $\Omega \in \mathcal{F}$ y $\phi \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ se sigue que $\Omega \in \mathcal{F}'$. Sean $A, B \in \mathcal{F}'$ tales que

$AB=\phi$ (respectivamente $A\subset B$); se tiene AG, $BG\in\mathcal{F}$ y $AG\,BG=\phi$ (respectivamente $AG\subset BG$) para cada $G\in\mathcal{G}$; en consecuencia $(A+B)G=AG+BG\in\mathcal{F}$ (respectivamente $(B-A)G=BG-AG\in\mathcal{F}$) para cada $G\in\mathcal{G}$, por lo tanto $A+B\in\mathcal{F}'$ (respectivamente $B-A\in\mathcal{F}'$). Supóngase que $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{F}'$ tal que $A_n\uparrow A$; puesto que $A_nG\uparrow AG\in\mathcal{F}$ para cada $G\in\mathcal{G}$, se tiene $A\in\mathcal{F}'$.

(I.6) Proposición. Sea $\mathcal{G}$ colección no vacía de subconjuntos de Ω. Si $\mathcal{G}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces la clase σ-aditiva generada por $\mathcal{G}$ es la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{G}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la clase σ-aditiva generada por $\mathcal{G}$. Puesto que la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{G}$ es clase σ-aditiva, basta demostrar que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra; por lo tanto, de acuerdo con la primera parte de (I.5), únicamente se tiene por demostrar que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

Considérese la colección $\mathcal{F}''=\{A\in\mathcal{F}\mid AB\in\mathcal{F}$ para cada $B\in\mathcal{F}\}$. Puesto que $\mathcal{G}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, según la segunda parte de (I.5) se tiene $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}'$, por lo tanto $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$; esto significa que $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}''$. Aplicando nuevamente la segunda parte de (I.5), ahora con $\mathcal{F}$ en lugar de $\mathcal{C}$, resulta que $\mathcal{F}''$ es clase σ-aditiva; por la definición de $\mathcal{F}''$, teniendo en cuenta que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}''$ (o sea que $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}$), se concluye que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

II. Funciones Reales.

Sean Ω conjunto no vacío y A subconjunto de Ω. En el espacio de todas las funciones reales de dominio Ω y en subespacios de este, se adoptan las operaciones usuales (suma, producto, máximo y mínimo definidos puntualmente) y el orden parcial puntual. Se define la función real I_A de dominio Ω por

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases};$$

se dice que I_A es el indicador de A.

Sean X función real de dominio Ω, Δ conjunto de reales y a, b reales ($a < b$). Se denota por $X(\Omega)$ al conjunto de todos los valores de X ($x \in X(\Omega) \Leftrightarrow \exists \omega \in \Omega$, $X(\omega) = x$) y se dice que $X(\Omega)$ es la imagen de X. Se dice que X es simple si $X(\Omega)$ es finito; se dice que X es positiva si $X \geq 0$ ($X \geq 0 \Leftrightarrow X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$); las partes positiva X^+ y negativa

X^- de X se definen por $X^+ = \max(X,0)$ y $X^- = -\min(X,0)$. Se denota por $[X \in \Delta]$ al conjunto de todos los elementos $\omega \in \Omega$ tales que $X(\omega) \in \Delta$ y se dice que $[X \in \Delta]$ es la imagen inversa de Δ bajo X; cuando Δ consta de un real x (o sea que $\Delta = \{x\}$), se prefiere la notación $[X = x]$ en lugar de $[X \in \Delta]$; si Δ es el intervalo cerrado $[a,b]$ (respectivamente abierto $]a,b[$), entonces se usa frecuentemente la notación $[a \le X \le b]$ respectivamente $[a < X < b]$) en lugar de $[X \in \Delta]$; análogamente, las imágenes inversas bajo X de los intervalos $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]b,\infty[$ y $[b,\infty[$ con frecuencia se denotan respectivamente por $[X \le a]$, $[X < a]$, $[a < X \le b]$, $[a \le X < b]$, $[b < X]$ y $[b \le X]$.

Sea $\{X_n\}$ sucesión (n enteros positivos) de funciones reales de dominio Ω. La expresión $\lim_n X_n = X$ significa que X es función real de dominio Ω y que $\{X_n\}$ converge puntualmente a X. Se dice que $\{X_n\}$ es creciente (respectivamente decreciente) si $X_n \le X_{n+1}$ (respectivamente $X_n \ge X_{n+1}$) para cada n; la expresión $X_n \uparrow X$ (respectivamente $X_n \downarrow X$) manifiesta que $\{X_n\}$ es creciente (respectivamente decreciente) y que $\lim_n X_n = X$. La expresión $\sup_n X_n = X$ (respectivamente $\inf_n X_n = X$) manifiesta que $\max(X_1,\dots,X_n) \uparrow X$ (respectivamente $\min(X_1,$

$\ldots, X_n) \uparrow X)$, la expresión $\limsup_n X_n = X$ (respectivamente $\liminf_n X_n = X$) manifiesta que X es función real de dominio Ω y que $\inf_n(\sup_{m\geq n} X_m) = X$ (respectivamente $\sup_n(\inf_{m\geq n} X_m) = X$).

(II.1) Proposición. *Sean X, Y, Z funciones reales de dominio Ω. a) Si Y, Z son positivas y $X = Y - Z$, entonces $X^+ \leq Y$ y $X^- \leq Z$. b) Si $X \leq Y$, entonces $X^+ \leq Y^+$ y $Y^- \leq X^-$. c) Si $c<0$, entonces $[cX]^+ = -cX^-$ y $[cX]^- = -cX^+$; si $c \geq 0$, entonces $[cX]^+ = cX^+$ y $[cX]^- = cX^-$.*

Demostración. Supóngase que Y, Z son positivas y que $X = Y-Z$. Si $X^+(\omega) = 0$, entonces $X^+(\omega) \leq Y(\omega)$; si $X^+(\omega) > 0$, entonces $X^+(\omega) = X(\omega) \leq Y(\omega)$. Si $X^-(\omega) = 0$, entonces $X^-(\omega) \leq Z(\omega)$; si $X^-(\omega) > 0$, entonces $X^-(\omega) = -X(\omega) \leq Z(\omega)$.

Si $X \leq Y$, entonces $X^+ = \max(X,0) \leq \max(Y,0) = Y^+$ y $Y^- = -\min(Y,0) \leq -\min(X,0) = X^-$.

Si $c<0$, entonces $[cX]^+ = \max(cX,0) = c\min(X,0) = -cX^-$ y $[cX]^- = -\min(cX,0) = -c\max(X,0) = -cX^+$; si $c \geq 0$, entonces $[cX]^+ = \max(cX, 0) = c\max(X,0) = cX^+$ y $[cX]^- = -\min(cX,0) = -c\min(X,0) = cX^-$.

(II.2) Corolario. *Las desigualdades $[X+Y]^+ \leq X^+ + Y^+$, $[X+Y]^- \leq X^- +$*

Y^- son válidas para funciones reales cualesquiera X, Y de dominio Ω.

Demostración. Puesto que $X+Y=(X^++Y^+)-(X^-+Y^-)$, el corolario se obtiene mediante a) de (II.1).

(II.3) Proposición. Sean X función positiva y acotada de dominio Ω y M cota superior de X; para cada entero positivo n se consideran $A_j^n=[2^{-n}(j-1)M<X\leq 2^{-n}jM]$ $(j=1,\ldots,2^n)$ y $X_n=\Sigma_{j=1}^{2^n}(j-1)2^{-n}M\,I_{A_j^n}$. La sucesión $\{X_n\}$ converge uniformemente a X y es creciente.

Demostración. Puesto que $\Omega-[X=0]=\Sigma_{j=1}^{2^n}A_j^n$ y $X_n(\omega)=(j-1)2^{-n}M<X(\omega)\leq 2^{-n}jM$ si $\omega\in A_j^n$, se tiene $0\leq X-X_n\leq 2^{-n}M$, esto demuestra que $\{X_n\}$ converge uniformemente a X. De $A_j^n=A_{2j-1}^{n+1}+A_{2j}^{n+1}$ se sigue que $X_n\leq X_{n+1}$.

III. Funciones $\mathcal{B}$-simples.

Sean Ω conjunto no vacío, $\mathcal{B}$ álgebra en Ω y X función real de dominio Ω. Se dice que X es $\mathcal{B}$-simple si $X(\Omega)$ es finito y $[X=x]\in\mathcal{B}$ para cada $x\in X(\Omega)$.

Se nota que todas las funciones constantes de dominio Ω son $\mathcal{B}$-simples. Evidentemente el indicador de un subconjunto B

de Ω es función $\mathcal{B}$-simple si, y sólo si, $B \in \mathcal{B}$.

(III.1) Proposición. El espacio de todas las funciones $\mathcal{B}$-simples con las operaciones usuales es álgebra (sobre los reales) laticial.

Demostración. Sean X, Y funciones $\mathcal{B}$-simples y $*$ una de las operaciones usuales (suma, producto, máximo o mínimo); puesto que $[X*Y=u] = \sum_{x*y=u}[X=x][Y=y] \in \mathcal{B}$ para cada real u, $X*Y$ es función $\mathcal{B}$-simple.

(III.2) Corolario. Una función real X de dominio Ω es $\mathcal{B}$-simple si, y sólo si, existen $B_j \in \mathcal{B}$ y $x_j \in]-\infty,\infty[$ $(j=1,\dots,m)$ tales que $X = \sum_1^m x_j I_{B_j}$.

Demostración. $\sum_1^m x_j I_{B_j}$ es función $\mathcal{B}$-simple por (III.1). Si X es $\mathcal{B}$-simple y $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_m\}$, entonces $B_j = [X=x_j] \in \mathcal{B}$ $(j=1,\dots,m)$ y $X = \sum_1^m x_j I_{B_j}$.

IV. Variables Aleatorias.

Sean Ω conjunto no vacío, $\mathcal{Q}$ σ-álgebra en Ω y X función real de dominio Ω. Se dice que $(\Omega,\mathcal{Q})$ es espacio medible; se dice que X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ si $[X\in\Delta] \in \mathcal{Q}$ para todo intervalo Δ.

Si X es función $\mathcal{Q}$-simple y $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_m\}$, entonces $[X\in\Delta]=\sum_{x_j\in\Delta}[X=x_j]\in\mathcal{Q}$ para todo intervalo Δ; por lo tanto, toda función $\mathcal{Q}$-simple es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$.

(II.1) Proposición. Sean X función real de dominio Ω y Q conjunto denso en el sistema de los reales. Las siguientes condiciones son equivalentes: a) $[X<x]\in\mathcal{Q}$ para cada $x\in Q$; b) $[X\le x]\in\mathcal{Q}$ para cada $x\in Q$; c) $[X>x]\in\mathcal{Q}$ para cada $x\in Q$; d) $[X\ge x]\in\mathcal{Q}$ para cada $x\in Q$; e) $[X\in\Delta]\in\mathcal{Q}$ para cada intervalo Δ.

Demostración. La igualdad $[X\le x]=\bigcap_n[X<x_n]$ (respectivamente $[X\ge x]=\bigcap_n[X>x_n]$) es válida para cada real x y cada sucesión $\{x_n\}$ en Q tal que $x_n>x_{n+1}$ (respectivamente $x_n<x_{n+1}$) para cada n y $\lim_n x_n=x$; por lo tanto, a) implica b) y c) implica d); además, por complementación en las igualdades anteriores, resulta que b) implica c) y d) implica a). Supóngase que X satisface a) y que Δ es alguno de los intervalos $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]b,\infty[$, $[b,\infty[$; de acuerdo con lo anterior, considerando que $[a\le X\le b]=[a\le X][X\le b]$, $[a<X<b]=[a<X][X<b]$, $[a<X\le b]=[a<X][X\le b]$ y $[a\le X<b]=[a\le X][X<b]$, se tiene $[X\in\Delta]\in\mathcal{Q}$. Si X satisface e), entonces X satisfa-

c.s.).

(II.2) Corolario. Si X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$, entonces X^+ y X^- son variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{C})$.

Demostración. Si $x \in]-\infty,0[$, entonces $[X^+\leq x]=[X^-\leq x]=\phi$; si $x\in[0,\infty[$, entonces $[X^+\leq x]=[X\leq x]$ y $[X^-\leq x]=[X\geq -x]$.

(II.3) Corolario. Sean X función real de dominio Ω y $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{C})$. a) Si $\sup_n X_n = X$, entonces X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$. b) Si $\inf_n X_n = X$, entonces X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$. c) Si $\limsup_n X_n = X$, entonces X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$. d) Si $\liminf_n X_n = X$, entonces X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$. e) Si $\lim_n X_n = X$, entonces X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$.

Demostración. Las partes a) y b) se obtienen respectivamente de las igualdades $[\sup_n X_n \leq x]=\bigcap_n [X_n\leq x]$ y $[\inf_n X_n < x]=\bigcup_n[X<x]$ válidas para cada $x\in]-\infty,\infty[$; las partes c), d) y e) se obtienen respectivamente de $\limsup_n X_n = \inf_n(\sup_{m\geq n} X_m)$, $\liminf_n X_n = \sup_n(\inf_{m\geq n} X_m)$ y $\lim_n X_n = \limsup_n X_n$ aplicando las partes a) y b).

(II.4) Proposición. a) Toda variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{C})$ positiva y acotada es límite (puntual) uniforme de una sucesión creciente de funciones

$\mathcal{Q}$-simples positivas. b) Toda variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ positiva es límite de una sucesión creciente de funciones $\mathcal{Q}$-simples positivas. c) Toda variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ es límite de una sucesión de funciones $\mathcal{Q}$-simples.

Demostración. Sea X variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$. Puesto que $[a<X\leq b]\in \mathcal{Q}$ $(a<b)$, la parte a) se sigue de (II.3).

Supóngase que X es positiva y para cada entero positivo n considérese $X_n = X\,I_{[X\leq n]}$; es claro que $0\leq X_n \leq n$ y que $X_n \uparrow X$. Puesto que $[X_n \leq x] = [X\leq x]+[X>n]$ si $x\in]-\infty,n]$ y $[X_n\leq x]=\Omega$ si $x\in]n,\infty[$, X_n es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ positiva y acotada. De acuerdo con lo anterior, ahora se considera una función $\mathcal{Q}$-simple positiva Y_n tal que $0\leq X_n - Y_n < n^{-1}$ para cada n; es claro que $\max(Y_1,\dots,Y_n)\uparrow X$, pero $\max(Y_1,\dots,Y_n)$ es función $\mathcal{Q}$-simple (por (II.1)) positiva.

Finalmente, de acuerdo con lo anterior y con (II.2), se consideran sucesiones $\{Y_n\}$ y $\{Z_n\}$ de funciones $\mathcal{Q}$-simples positivas tales que $Y_n\uparrow X^+$ y $Z_n\uparrow X^-$; claramente $\{Y_n - Z_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{Q}$-simples que converge a X.

(II.5) Proposición. El espacio de todas las variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ con las operaciones usuales es álgebra (sobre los reales) laticial.

Demostración. Sean X, Y variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ y $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ sucesiones de funciones $\mathcal{Q}$-simples (de acuerdo con c) de (III.4)) tales que $\lim_n X_n = X$ y $\lim_n Y_n = Y$. Si $*$ es una de las operaciones usuales, entonces $\{X_n * Y_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{Q}$-simples (por (III.1)) que converge a $X*Y$; en consecuencia, $X*Y$ es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ por e) de (III.3).

V. Espacios de Riesz.

Sean Ω conjunto no vacío, $\mathcal{L}$ espacio de funciones reales de dominio Ω, $\mathcal{E}=\{[X>z] \mid X\in\mathcal{L},\ z\in\,]-\infty,\infty[\,\}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$ respectivamente la álgebra y la σ-álgebra generadas en Ω por $\mathcal{E}$. Se dice que $\mathcal{Q}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{L}$; se dice que $\mathcal{L}$ es espacio de Riesz si $\mathcal{L}$ es espacio vectorial tal que $X^+\in\mathcal{L}$ para cada $X\in\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ es espacio de Riesz, entonces se denota por $\mathcal{L}^+$ al espacio de todas las variables aleatorias Y en $(\Omega,\mathcal{Q})$ que además de ser positivas satisfacen la condicion: existe una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $X_n \uparrow Y$.

(V.1) Proposición. Si $\mathcal{L}$ es espacio vectorial, entonces las siguientes condiciones son equivalentes: a) $X^+\in\mathcal{L}$ para cada $X\in\mathcal{L}$; b) $X^-\in\mathcal{L}$ para cada $X\in\mathcal{L}$; c) $\max(X,X')\in\mathcal{L}$ para cualesquiera $X,X'\in\mathcal{L}$; d) $\min(X,X')\in$

$\mathcal{L}$ para cualesquiera $x, x' \in \mathcal{L}$; e) $|x| \in \mathcal{L}$ para cada $x \in \mathcal{L}$.

Demostración. La equivalencia de a) y b) se sigue de $x^+ - x^- = x$; a) implica c) porque $\max(x,x') = (x-x')^+ + x'$ y c) implica a) porque $x^+ = \max(x,0)$; la equivalencia de c) y d) se sigue de $\max(x,x') + \min(x,x') = x + x'$; a) implica e) porque $|x| = x^+ + (-x)^+$ y e) implica a) porque $x^+ = 2^{-1}(|x| + x)$.

(I.8) Proposición. Sea $\mathcal{L}$ espacio de Riesz. a) Si $Y \in \mathcal{L}^+$ y $c \in [0,\infty[$, entonces $cY \in \mathcal{L}^+$. b) Si $Y, Y' \in \mathcal{L}^+$, entonces $Y+Y'$, $\max(Y,Y')$, $\min(Y,Y') \in \mathcal{L}^+$. c) Si $\{Y_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}^+$ tal que $Y_n \uparrow Y$, entonces existe una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $0 \le X_n \le Y_n$ para cada n y $X_n \uparrow Y$ (en consecuencia $Y \in \mathcal{L}^+$).

Demostración. Si $\{X_n\}$, $\{X'_n\}$ son sucesiones en $\mathcal{L}$ tales que $X_n \uparrow Y$ y $X'_n \uparrow Y'$, entonces $\{cX_n\}$, $\{X_n + X'_n\}$, $\{\max(X_n, X'_n)\}$ y $\{\min(X_n, X'_n)\}$ son sucesiones en $\mathcal{L}$ tales que $cX_n \uparrow cY$, $X_n + X'_n \uparrow Y + Y'$, $\max(X_n, X'_n) \uparrow \max(Y,Y')$ y $\min(X_n, X'_n) \uparrow \min(Y,Y')$.

Para cada entero positivo m consideremos una sucesión $\{X^m_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $X^m_n \uparrow Y_m$ $(n \uparrow \infty)$ y $X_m = \max(0, X^1_m, \dots, X^m_m) \in \mathcal{L}$. De $X^n_m \le Y_n$ y $X^n_m \le X^n_{m+1}$ se sigue que $X_m \le \max(Y_1, \dots, Y_m) = Y_m$ y $X_m \le \max(0, X^1_{m+1}, \dots, X^m_{m+1}) \le X_{m+1}$; en consecuencia, teniendo en cuenta que $X^n_m \le X_m$ si $n \le m$, se obtiene $Y_n = \lim_m X^n_m \le \lim_m X_m \le \lim_m Y_m = Y$, por consiguiente $X_m \uparrow Y$.

(II.3) *Proposición. Si $\mathcal{L}$ es espacio vectorial y $1 \in \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{B} = \{[X>0] \mid X \in \mathcal{L}\}$.*

Demostración. Se nota que $1 \in \mathcal{L}$ equivale a $]-\infty,\infty[\subset \mathcal{L}$ y que $[X>0] \in \mathcal{B}$ para cada $X \in \mathcal{L}$; si $X \in \mathcal{L}$ y $z \in]-\infty,\infty[$, entonces $X - z \in \mathcal{L}$ y $[X>z] = [X-z>0]$.

(II.4) *Proposición. Sea $\mathcal{L}$ espacio de Riesz tal que $1 \in \mathcal{L}$. a) Si $Y \in \mathcal{L}^+$ y $y \in]-\infty,\infty[$, entonces $I_{[Y>y]} \in \mathcal{L}^+$. b) Si $B \in \mathcal{B}$, entonces existe una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $\lim_n X_n = I_B$ y $0 \leq X_n \leq 1$ para cada n.*

Demostración. Sea $\{X'_n\}$ sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $X'_n \uparrow Y$; se tiene $[X'_n - y]^+ \in \mathcal{L}$ y $[X'_n - y]^+ \uparrow [Y-y]^+$, en consecuencia $\min(n[Y-y]^+, 1) \in \mathcal{L}^+$ (por a) y b) de (II.2)) para cada entero positivo n. Puesto que $\min(n[Y-y]^+, 1) \uparrow I_{[Y>y]}$, la parte a) se sigue de lo anterior y de c) de (II.2).

Sea $\mathcal{B}'$ la colección de todos los subconjuntos B de Ω que satisfacen la condición: existe una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $\lim_n X_n = I_B$ y $0 \leq X_n \leq 1$ para cada n. Puesto que $I_\Omega = 1 \in \mathcal{L}$, se tiene $\Omega \in \mathcal{B}'$; si $B_j \in \mathcal{B}'$ $(j=1,2)$ y $\{X^j_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $\lim_n X^j_n = I_{B_j}$ y $0 \leq X^j_n \leq 1$ para cada n, entonces $\{1 - X^1_n\}$ y $\{\min(X^1_n, X^2_n)\}$ son sucesiones en $\mathcal{L}$ tales que $\lim_n (1 - X^1_n) = I_{B_1^c}$, $\lim_n \min(X^1_n, X^2_n) = I_{B_1 B_2}$, $0 \leq 1 - X^1_n \leq 1$ y $0 \leq \min(X^1_n, X^2_n) \leq 1$; por consiguiente, $\mathcal{B}'$ es álgebra en Ω. Si $X \in \mathcal{L}$ y $X_n = \min(nX^+, 1)$, entonces $\{X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $X_n \uparrow I_{[X>0]}$ y $0 \leq X_n \leq 1$ para cada n; en consecuencia $\mathcal{E}\subset\mathcal{B}'$ (por (I.3)), por lo tanto $\mathcal{B}\subset\mathcal{B}'$.

(I.5) Corolario. Si $\mathcal{L}$ es espacio de Riesz y $1\in\mathcal{L}$, entonces para cada $B\in\mathcal{B}$ existe una sucesión $\{Y_n\}$ en $\mathcal{L}^+$ tal que $Y_1\leq 1$ y $Y_n\downarrow I_B$.

Demostración. Si $\{X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ (de acuerdo con b) de (I.4)) tal que $\lim_n X_n = I_B$ y $0\leq X_n\leq 1$ para cada n, entonces $Y_n=\sup_{m\geq n} X_m\in \mathcal{L}^+$; $Y_1\leq 1$ y $Y_n\downarrow I_B$.

(I.6) Proposición. a) Toda función positiva y acotada perteneciente a $\mathcal{L}$ es límite (puntual) uniforme de una sucesión creciente de funciones $\mathcal{B}$-simples positivas. b) Si $\mathcal{L}$ es espacio de Riesz y $1\in\mathcal{L}$, entonces toda función positiva perteneciente a $\mathcal{L}$ es límite de una sucesión creciente de funciones $\mathcal{B}$-simples positivas.

Demostración. Supóngase que $0\leq X\in\mathcal{L}$. Puesto que $[a<X\leq b] =[X>b]^c-[X>a]^c\in\mathcal{B}$ $(a<b)$, la parte a) se sigue de (I.3). Para cada entero positivo n considérese $X_n=\min(X,n)$, una función $\mathcal{B}$-simple positiva Y_n (de acuerdo con la parte anterior) tal que $0\leq X_n-Y_n<n^{-1}$ y $Z_n=\max(Y_1,\dots,Y_n)$; $\{Z_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{B}$-simples (por (I.1)) positivas tal que $Z_n\uparrow X$.

INTEGRACION

VI. Integral de Daniell (Generalidades).

Sean Ω conjunto no vacío, $\mathcal{L}$ espacio de Riesz de funciones reales de dominio Ω y E funcional lineal positiva de dominio $\mathcal{L}$ (por la linearidad y positividad de E, se tiene $E(X) \leq E(X')$ si $X, X' \in \mathcal{L}$ son tales que $X \leq X'$; en efecto: $0 \leq X'-X \Rightarrow 0 \leq E(X'-X) = E(X') - E(X)$) que satisface la condición: $E(X_n) \downarrow$ para cada sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $X_n \downarrow 0$. Se dice que E es integral de Daniell en $\mathcal{L}$.

(VI.1) Lema. Sean $X \in \mathcal{L}$ y $\{X_n\}$ sucesión en $\mathcal{L}$. Si $X_n \uparrow X$, entonces $E(X_n) \uparrow E(X)$; si $X_n \downarrow X$, entonces $E(X_n) \downarrow E(X)$.

Demostración. Supóngase que $X_n \uparrow X$; puesto que $\{X - X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $X - X_n \downarrow 0$ y $\{E(X_n)\}$ es creciente y acotada ($E(X)$ es una de sus cotas superiores), se tiene $0 = \lim_n E(X - X_n) = \lim_n [E(X) - E(X_n)]$ $= E(X) - \lim_n E(X_n)$. El caso en que $X_n \downarrow X$ se reduce al anterior ($-X_n \uparrow -X$).

Sean $\mathcal{Q}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^+$ el espacio de todas las variables aleatorias Y en $(\Omega, \mathcal{Q})$ que además de ser positivas satisfacen la condición: existe una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $X_n \uparrow Y$. Si $Y \in \mathcal{L}^+$, entonces se define $E(Y) = \sup\{E(X) \mid X \in \mathcal{L}, X \leq Y\}$.

(II.2) Proposición. a) Si $Y\in\mathcal{L}^+$, entonces $0\le E(Y)\le\infty$. b) Si $Y,Y'\in\mathcal{L}^+$ y $Y\le Y'$, entonces $E(Y)\le E(Y')$. c) Si $Y\in\mathcal{L}^+$ y $\{X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $X_n\uparrow Y$, entonces $E(X_n)\uparrow E(Y)$ (se sobrentiende que $\{E(X_n)\}$ no es acotada si $E(Y)=\infty$). d) Si $Y\in\mathcal{L}^+$ y $c\in[0,\infty[$, entonces $E(cY)=cE(Y)$ (se acepta que $0\infty=0$). e) Si $Y,Y'\in\mathcal{L}^+$, entonces $E(Y+Y')=E(Y)+E(Y')=E(\max(Y,Y'))+E(\min(Y,Y'))$. f) Si $\{Y_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}^+$ tal que $Y_n\uparrow Y$, entonces $E(Y_n)\uparrow E(Y)$. g) Si $X\in\mathcal{L}$, $Y\in\mathcal{L}^+$ y $X\le Y$, entonces $Y-X\in\mathcal{L}^+$ y $E(Y-X)=E(Y)-E(X)$.

Demostración. La parte a) se obtiene de la desigualdad $0\le E(X)$ válida para $X\in\mathcal{L}$ tal que $0\le X\le Y$. La parte b) se obtiene de $\{X\in\mathcal{L}\mid X\le Y\}\subset\{X'\in\mathcal{L}\mid X'\le Y'\}$.

Sean $\{X_n\}$, $\{X'_n\}$ sucesiones en $\mathcal{L}$ tales que $X_n\uparrow Y$, $X'_n\uparrow Y'$; por a) y b) de (I.8) se sabe que cY $(c\ge 0)$, $Y+Y'$, $\max(Y,Y')$ y $\min(Y,Y')$ están en $\mathcal{L}^+$. Supóngase que $E(Y)<\infty$ (respectivamente $E(Y)=\infty$) y para $\varepsilon>0$ considérese $X\in\mathcal{L}$ tal que $X\le Y$ y $E(X)>E(Y)-\varepsilon$ (respectivamente $E(X)>\varepsilon$); puesto que $\min(X_n,X)\in\mathcal{L}$ y $\min(X_n,X)\uparrow X$, aplicando (II.1) se obtiene $E(Y)-\varepsilon<E(X)=\lim_n E(\min(X_n,X))\le\lim_n E(X_n)\le E(Y)$ (respectivamente $E(X_n)>\varepsilon$ para n suficientemente grande), con lo anterior está demostrada la parte c). Puesto que $cX_n\uparrow cY$ y $X_n+X'_n\uparrow Y+Y'$, aplicando c) de (II.2) se obtiene $E(cY)=\lim_n E(cX_n)=\lim_n cE(X_n)=cE(Y)$ y $E(Y+Y')=\lim_n E(X_n+X'_n)$ $=\lim_n[E(X_n)+E(X'_n)]=E(Y)+E(Y')$; puesto que $\max(Y,Y')+\min(Y,Y')=Y+Y'$, de

$E(Y+Y')=E(Y)+E(Y')$ se sigue (con $\max(Y,Y')$ y $\min(Y,Y')$ en lugar de Y y Y' respectivamente) que $E(Y+Y')=E(\max(Y,Y'))+E(\min(Y,Y'))$. La parte f) se sigue de c) de (II.2) y b), c) de (II.2). Finalmente, puesto que $0\leq Y-X$ y $X_n-X\uparrow Y-X$, se tiene $Y-X\in\mathcal{L}^+$ y $E(Y-X)=\lim_n E(X_n-X)=\lim_n[E(X_n)-E(X)]=E(Y)-E(X)$.

Sea $\mathcal{L}^*$ el espacio de todas las variables aleatorias Z en $(\Omega,\mathcal{Q})$ que además de ser positivas satisfacen la condición: existe $Y\in\mathcal{L}^+$ tal que $Z\leq Y$. Si $Z\in\mathcal{L}^*$, entonces se define $E(Z)=\inf\{E(Y)\mid Z\leq Y\in\mathcal{L}^+\}$.

(II.3) Proposición. a) Si $Z\in\mathcal{L}^*$, entonces $0\leq E(Z)\leq\infty$. b) Si $Z, Z'\in\mathcal{L}^*$ y $Z\leq Z'$, $E(Z)\leq E(Z')$. c) Si $Z\in\mathcal{L}^*$ y $c\in[0,\infty[$, entonces $E(cZ)=cE(Z)$. d) Si $Z,Z'\in\mathcal{L}^*$, entonces $E(Z+Z')\leq E(Z)+E(Z')$. e) Si $Z,Z'\in\mathcal{L}^*$ y $\max(E(Z),E(Z'))<\infty$, entonces $|E(Z)-E(Z')|\leq E(|Z-Z'|)$. f) Si $\{Z_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}^*$ tal que $Z_n\uparrow Z\in\mathcal{L}^*$, entonces $E(Z_n)\uparrow E(Z)$.

Demostración. La parte a) se sigue de a) de (II.2). La parte b) se obtiene de $\{Y\in\mathcal{L}^+\mid Z\leq Y\}\supset\{Y'\in\mathcal{L}^+\mid Z'\leq Y'\}$.

Para $Z\in\mathcal{L}^*$ se considera $\mathcal{L}_Z=\{Y\in\mathcal{L}^+\mid Z\leq Y\}$ y se supone que $c>0$ (se nota que $E(0Z)=0=0E(Z)$); es claro que $Y\in\mathcal{L}_Z$ equivale a $cY\in\mathcal{L}_{cZ}$ y que $Y'\in\mathcal{L}_{cZ}$ equivale a $c^{-1}Y'\in\mathcal{L}_Z$. Supóngase que $E(Z)=\infty$; en este caso, mediante d) de (II.2), se obtiene $E(cZ)=\infty=cE(Z)$. Con la hipótesis de que $E(Z)<$

∞ (en este caso, puesto que de $Y \in \mathcal{L}_Z$ y $E(Y)$ se sigue que $cY \in \mathcal{L}_{cZ}$ y $E(cY) = cE(Y) < \infty$, se tiene $E(cZ) < \infty$), para $\varepsilon > 0$ se consideran $Y \in \mathcal{L}_Z$ y $Y' \in \mathcal{L}_{cZ}$ tales que $E(Z) > E(Y) - c^{-1}\varepsilon$ y $E(cZ) > E(Y') - \varepsilon$; puesto que $cE(Z) + \varepsilon > cE(Y) = E(cY) \geq E(cZ) > E(Y') - \varepsilon = cE(c^{-1}Y') - \varepsilon \geq cE(Z) - \varepsilon$ (y depurando estas desigualdades se obtiene $cE(Z) + \varepsilon > E(cZ) > cE(Z) - \varepsilon$), se tiene $|E(cZ) - cE(Z)| < \varepsilon$; en esta forma queda demostrada la parte c).

Supóngase que $\max(E(Z), E(Z')) < \infty$ ($Z, Z' \leq Z+Z'$, $\max(E(Z), E(Z')) = \infty \Rightarrow E(Z+Z') = \infty = E(Z) + E(Z')$) y para $\varepsilon > 0$ considérense $Y, Y' \in \mathcal{L}^+$ tales que $Y \geq Z$, $E(Z) > E(Y) - \varepsilon$, $Y' \geq Z'$ y $E(Z') > E(Y') - \varepsilon$; teniendo en cuenta que $Y + Y' \geq Z + Z'$, mediante e) de (II.2) se obtiene $E(Z) + E(Z') > E(Y+Y') - 2\varepsilon \geq E(Z+Z') - 2\varepsilon$; esto demuestra la parte d). Puesto que $Z \leq |Z-Z'| + Z'$ y $Z' \leq |Z-Z'| + Z$, mediante b) y d) de (II.3) se obtiene $E(Z) \leq E(|Z-Z'|) + E(Z')$ y $E(Z') \leq E(|Z-Z'|) + E(Z)$; estas desigualdades, cuando $E(Z) < \infty$ y $E(Z') < \infty$, equivalen a $|E(Z) - E(Z')| \leq E(|Z-Z'|)$.

Finalmente, con la hipótesis de que $\{E(Z_n)\}$ es acotada (si $E(Z_n) \uparrow \infty$, entonces $E(Z) = \infty$) y $Y \in \mathcal{L}^+$ es tal que $Z \leq Y$, para $\varepsilon > 0$ se consideran sucesiones $\{Y_n\}$ y $\{Y_n'\}$ en $\mathcal{L}^+$ tales que $Z_n \leq Y_n \leq Y$, $E(Y_n) <$

$E(Z_n)+2^{-n}\varepsilon$ y $Y_n'=\max(Y_1,\dots,Y_n)$ para cada n. La desigualdad

$*\quad E(Y_n')<E(Z_n)+(1-2^{-n})\varepsilon$

es válida para $n=1$ y de suponer que es válida para n (hipótesis de inducción finita), teniendo en cuenta que $Z_n\le\min(Y_n',Y_{n+1})\le\max(Y_n',Y_{n+1})=Y_{n+1}'$, de acuerdo con e) de (I.2) resulta que

$$E(Y_{n+1}')=E(\max(Y_n',Y_{n+1}))=E(Y_n')+E(Y_{n+1})-E(\min(Y_n',Y_{n+1}))$$

$$<E(Z_n)+(1-2^{-n})\varepsilon+E(Z_{n+1})+2^{-n-1}\varepsilon-E(Z_n)=E(Z_{n+1})+(1-2^{-n-1})\varepsilon.$$

Puesto que $Z_n\le Y_n'\le Y$ para cada n, existe Y' tal que $Y_n'\uparrow Y'$ y $Z\le Y'$; en consecuencia, mediante f) de (II.2) y $*$ se obtiene $\lim_n E(Z_n)\le E(Z)\le E(Y')$ $=\lim_n E(Y_n')\le\lim_n[E(Z_n)+(1-2^{-n})\varepsilon]=\lim_n E(Z_n)+\varepsilon$.

(II.4) Proposición. Si $\{Y_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}^+$ tal que $E(Y_1)<\infty$ y $Y_n\downarrow X$, entonces $E(Y_n)\downarrow E(X)$.

Demostración. Supóngase que $X=0$ y para $\varepsilon>0$ considérense sucesiones $\{X_n\}$ y $\{X_n'\}$ en $\mathcal{L}$ tales que $0\le X_n\le Y_n$, $E(X_n)>E(Y_n)-2^{-n}\varepsilon$ y $X_n'=\min(X_1,\dots,X_n)$ para cada n. La desigualdad

$**\quad E(X_n')>E(Y_n)-(1-2^{-n})\varepsilon$

es válida para $n=1$ y de suponer que es válida para n (hipótesis de inducción finita), teniendo en cuenta que $Y_n\ge\max(X_n',X_{n+1})\ge\min(X_n',X_{n+1})=$

X'_{n+1}, de acuerdo con e) de (VI.2) resulta que

$$E(X'_{n+1}) = E(\min(X'_n, X_{n+1})) = E(X'_n) + E(X_{n+1}) - E(\max(X'_n, X_{n+1}))$$

$$\geq E(Y_n) - (1-2^{-n})\varepsilon + E(Y_{n+1}) - 2^{-n-1}\varepsilon - E(Y_n) = E(Y_{n+1}) - (1-2^{-n-1})\varepsilon.$$

Puesto que $X'_n \downarrow$, de ** se sigue que $\lim_n E(Y_n) \leq \varepsilon$. Esto demuestra el lema para $X=0$.

Ahora supóngase que $X \in \mathcal{L}^+$ y que $\{X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $X_n \downarrow X$. Puesto que $\{Y_n - X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}^+$ (por g) de (VI.2)) tal que $Y_n - X_n \downarrow 0$ y $E(Y_n - X_n) = E(Y_n) - E(X_n)$, mediante el resultado anterior y c) de (VI.2) se obtiene $0 = \lim_n [E(Y_n) - E(X_n)] = \lim_n E(Y_n) - E(X)$.

Finalmente, para $\varepsilon > 0$ se considera $Y \in \mathcal{L}^+$ tal que $Y \geq X$ y $E(Y) < E(X) + \varepsilon$. Puesto que $Y_n \leq \max(Y_n, Y) \in \mathcal{L}^+$ y $\max(Y_n, Y) \downarrow Y$, mediante el resultado anterior se obtiene $\lim_n E(Y_n) \leq E(Y) < E(X) + \varepsilon$.

VII. Integral de Daniell Acotada.

Sean $\mathcal{L}$ espacio de Riesz de funciones reales de dominio Ω tal que $1 \in \mathcal{L}$, E integral de Daniell en $\mathcal{L}$ tal que $E(1) = 1$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$ respectivamente la álgebra y la σ-álgebra generadas en Ω por $\mathcal{E} = \{[X > x] \mid X \in \mathcal{L}, x \in]-\infty, \infty[\}$. Si X es variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{Q})$ positiva y $X \notin \mathcal{L}^*$ (la definición de $\mathcal{L}^*$ y la definición de $E(Z)$ para $Z \in \mathcal{L}^*$ preceden a (VI.3)), entonces se define $E(X) = \sup\{E(Z) \mid Z \leq X, Z \in \mathcal{L}^*\}$. Se denota por $\mathcal{L}_1(E)$ (respectivamente $\mathcal{L}_1(E)$) al espacio de todas las variables aleatorias X en $(\Omega, \mathcal{Q})$ tales que $\min(E(X^+), E(X^-)) < \infty$ (respectivamente $\max(E(X^+), E(X^-)) < \infty$); si $X \in \mathcal{L}_1(E)$, entonces se define $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$. Se denota por $\mathcal{L}_+$ al espacio de todas las funciones $\mathcal{Q}$-simples positivas.

(VII.1) Lema. Si $x_j \in [0, \infty[$ y $B_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1, \ldots, m)$, entonces $E(\Sigma_1^m x_j I_{B_j}) = \Sigma_1^m x_j E(I_{B_j})$.

Demostración. Para cada j se considera (de acuerdo con (V.5)) una sucesión $\{Y_n^j\}$ en $\mathcal{L}^+$ tal que $Y_1^j \leq 1$ y $Y_n^j \downarrow I_{B_j}$, también se considera $Y_n = \Sigma_1^m x_j Y_n^j$ para cada n; se nota que $E(x) = x$ para cada $x \in]-\infty, \infty[$. Puesto que $\{Y_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}^+$ tal que $E(Y_1) \leq \Sigma_1^m x_j$ (esto se sigue de $Y_1 \leq \Sigma_1^m x_j$ y b) de (VI.2)) y $Y_n \downarrow \Sigma_1^m x_j I_{B_j}$, aplicando (VI.4) y d), e) de (VI.2) se obtiene $E(\Sigma_1^m x_j I_{B_j}) = \lim_n E(\Sigma_1^m x_j Y_n^j) = \lim_n \Sigma_1^m x_j E(Y_n^j) = \Sigma_1^m x_j E(I_{B_j})$.

(VII.2) Lema. a) Si $A \in \mathcal{Q}$, entonces $E(I_A) + E(I_{A^c}) = 1$. b) Si $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{Q}$ tal que $A_n \downarrow \phi$, entonces $E(I_{A_n}) \downarrow 0$. c) Si $A \in \mathcal{Q}$, entonces existe una sucesión $\{B_n\}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\lim_n E(|I_{B_n}-I_A|)=0$.

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los conjuntos $A\in\mathcal{Q}$ tales que $E(I_A)+E(I_{A^c})=1$, por (VI.1) se tiene $\mathcal{B}\subset\mathcal{M}$ (se nota que $1=I_B+I_{B^c}$) y es claro que $A\in\mathcal{M}$ equivale a $A^c\in\mathcal{M}$. Supóngase que $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{M}$ tal que $A_n\uparrow A$, puesto que $1=I_A+I_{A^c}$ y $A_n^c\downarrow A^c$, mediante b), d) y f) de (VI.3) se obtiene $1\le E(I_A)+E(I_{A^c})\le \lim_n E(I_{A_n})+\lim_n E(I_{A_n^c})=\lim_n[E(I_{A_n})+E(I_{A_n^c})]=1$, por lo tanto $A\in\mathcal{M}$. Ahora supóngase que $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{M}$ tal que $A_n\downarrow A$, puesto que $\{A_n^c\}$ es sucesión en $\mathcal{M}$ tal que $A_n^c\uparrow A^c$, se tiene $A^c\in\mathcal{M}$ y en consecuencia $A\in\mathcal{M}$. De lo anterior y de (I.2) se sigue que $\mathcal{M}=\mathcal{Q}$.

La parte b) se sigue de $\lim_n E(I_{A_n^c})=1$ (lo cual se obtiene de $A_n^c\uparrow\Omega$ aplicando f) de (VI.3)) mediante a) de (VI.2), en efecto: $\lim_n E(I_{A_n})=\lim_n[1-E(I_{A_n^c})]=0$.

Sea $\mathfrak{M}$ la colección de todos los conjuntos $A\in\mathcal{Q}$ tales que $\lim_n E(|I_{B_n}-I_A|)=0$ para alguna sucesión $\{B_n\}$ en $\mathcal{B}$, es claro que $\mathcal{B}\subset\mathfrak{M}$. Supóngase que $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathfrak{M}$ tal que $A_n\uparrow A$ (respectivamente $A_n\downarrow A$) y para cada entero positivo n considérese $B_n\in\mathcal{B}$ tal que $E(|I_{B_n}-I_{A_n}|)<n^{-1}$, puesto que $|I_{B_n}-I_A|\le|I_{B_n}-I_{A_n}|+I_{A-A_n}$ y $A-A_n\downarrow\phi$ (res-

pectivamente $|I_{B_n}-I_A|\le|I_{B_n}-I_{A_n}|+I_{A_n-A}$ y $A_n-A\downarrow\emptyset$), aplicando b), d) de (VI.3) y b) de (VII.2) se obtiene $\lim_n E(|I_{B_n}-I_A|)=0$. Por consiguiente, mediante (I.2) se obtiene $\mathcal{M}=\mathcal{Q}$.

(VII.3) Corolario. Si $x_j\in[0,\infty[$ y $A_j\in\mathcal{Q}$ $(j=1,\ldots,m)$, entonces $E(\Sigma_1^m x_j I_{A_j})=\Sigma_1^m x_j E(I_{A_j})$.

Demostración. Sea $Z=\Sigma_1^m x_j I_{A_j}$; para cada j se considera (de acuerdo con c) de (VII.2)) una sucesión $\{B_n^j\}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\lim_n E(|I_{B_n^j}-I_{A_j}|)=0$ y para cada n se considera $Z_n=\Sigma_1^m x_j I_{B_n^j}$. Puesto que $|Z_n-Z|\le\Sigma_1^m x_j|I_{B_n^j}-I_{A_j}|$, mediante b), c) y d) de (VI.3) se obtiene $\lim_n E(|Z_n-Z|)=0$; por consiguiente, aplicando e) de (VI.3) y (VII.1) se obtiene $E(Z)=\lim_n E(Z_n)=\Sigma_1^m x_j \lim_n E(I_{B_n^j})=\Sigma_1^m x_j E(I_{A_j})$.

(VII.4) Lema. Sean X, X_n (n entero positivo) variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$. a) Si $X\ge0$, entonces $E(X)=\sup\{E(Z)|Z\le X, Z\in\mathcal{S}_+\}$. b) Si $X_1\ge0$ y $X_n\uparrow X$, entonces $E(X_n)\uparrow E(X)$.

Demostración. Supóngase que $X\in\mathcal{L}^*$ y considérese, para la parte a), una sucesión $\{Z_n\}$ en $\mathcal{L}_+$ (de acuerdo con b) de (IV.4)) tal que $Z_n\uparrow X$; aplicando f) de (VI.3) resulta que $E(Z_n)\uparrow E(X)$ (de lo cual, mediante b) de (VI.3), se sigue la parte a)) y $E(X_n)\uparrow E(X)$.

Para $X \notin \mathcal{L}^*$ se tiene la parte a) por definición. Suponiendo que $X \in \mathcal{L}^*$ y que $E(X) < \infty$ (respectivamente $E(X) = \infty$), para $\varepsilon > 0$ se considera $Z \in \mathcal{L}_+$ (de acuerdo con a) de (VII.4)) tal que $Z \leq X$ y $E(Z) > E(X) - \varepsilon$ (respectivamente $E(Z) > \varepsilon$); puesto que $\min(X_n, Z), Z \in \mathcal{L}^*$ y $\min(X_n, Z) \uparrow Z$, aplicando f) de (VI.3) se obtiene $E(X) - \varepsilon < E(Z) = \lim_n E(\min(X_n, Z)) \leq \lim_n E(X_n) \leq E(X)$ (respectivamente $E(X_n) > \varepsilon$ para n suficientemente grande).

(VII.5) Lema. Sean Y, Z variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A})$. a) Si Y, Z son positivas, entonces $E(Y+Z) = E(Y) + E(Z)$. b) Si Y, Z son positivas y $\min(E(Y), E(Z)) < \infty$, entonces $Y - Z \in \mathcal{L}_1(E)$ y $E(Y-Z) = E(Y) - E(Z)$.

Demostración. Sean $\{Y_n\}$ y $\{Z_n\}$ sucesiones en $\mathcal{E}_+$ tales que $Y_n \uparrow Y$ y $Z_n \uparrow Z$; por b) de (VII.4), considerando que $Y_n + Z_n \uparrow Y + Z$, se tiene $E(Y_n) \uparrow E(Y)$, $E(Z_n) \uparrow E(Z)$ y $E(Y_n + Z_n) \uparrow E(Y+Z)$; en consecuencia, puesto que $E(Y_n + Z_n) = E(Y_n) + E(Z_n)$ para cada n (por (II.2) y (VII.3)), resulta que $E(Y+Z) = E(Y) + E(Z)$.

Puesto que $[Y-Z]^+ \leq Y$, $[Y-Z]^- \leq Z$ (por a) de (II.1)) y $[Y-Z]^+ + Z = Y + [Y-Z]^-$, mediante a) de (VII.4) y a) de (VII.5) se obtiene respectivamente $\min(E([Y-Z]^+),E([Y-Z]^-))<\infty$ y $E([Y-Z]^+)+E(Z)=E(Y)+E([Y-Z]^-)$; por consiguiente, se tiene $Y-Z\in\mathcal{L}_1(E)$ y $E(Y-Z)=E(Y)-E(Z)$.

(VII.6) Proposición. a) Si $X\in\mathcal{L}_1(E)$, entonces $-\infty\leq E(X)\leq\infty$. b) Si $X\in\mathcal{L}_1(E)$ y $c\in]-\infty,\infty[$, entonces $cX\in\mathcal{L}_1(E)$ y $E(cX)=cE(X)$. c) Si $X,Y\in\mathcal{L}_1(E)$ y $\max(E(X^-),E(Y^-))<\infty$ o $\max(E(X^+),E(Y^+))<\infty$, entonces $X+Y\in\mathcal{L}_1(E)$ y $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. d) Si $X,Y\in\mathcal{L}_1(E)$ y $X\leq Y$, entonces $E(X)\leq E(Y)$. e) Si $X\in\mathcal{L}_1(E)$, entonces $|E(X)|\leq E(|X|)$. f) Si X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$, entonces $X\in\mathcal{L}_1(E)$ equivale a $|X|\in\mathcal{L}_1(E)$. g) Si $\{X_n\}$ es sucesión de variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ tal que $E(X_1^-)<\infty$ y $X_n\uparrow X$ (respectivamente $E(X_1^+)<\infty$ y $X_n\downarrow X$), entonces $X_n, X\in\mathcal{L}_1(E)$ y $E(X_n)\uparrow E(X)$ (respectivamente $E(X_n)\downarrow E(X)$).

Demostración. La parte a) se obtiene de $0\leq\min(E(X^+),E(X^-))<\infty$ y $0\leq\max(E(X^+),E(X^-))\leq\infty$.

Para $X\geq 0$ considérense una sucesión $\{Z_n\}$ en $\mathcal{L}_+$ tal que $Z_n\uparrow X$ y $c\in[0,\infty[$; teniendo en cuenta que $cZ_n\uparrow cX$ y que $E(cZ_n)=cE(Z_n)$ para cada n (por c) de (VI.3)), mediante b) de (VII.4) se obtiene $cE(Z_n)\uparrow cE(X)$ y $cE(Z_n)\uparrow E(cX)$, por lo tanto $E(cX)=cE(X)$. Para

$X \in \mathcal{L}_1(E)$ tal que $E(X^+) < \infty$ y $c \in]-\infty, 0[$ (respectivamente $c \in [0, \infty[$), mediante c) de (II.1) se obtiene $E([cX]^-) = E(-cX^+) = -cE(X^+) < \infty$ y $E(cX) = E(-cX^-) - E(-cX^+) = cE(X^+) - cE(X^-) = cE(X)$ (respectivamente $E([cX]^+) = E(cX^+) = cE(X^+) < \infty$ y $E(cX) = E(cX^+) - E(cX^-)$ $= cE(X^+) - cE(X^-) = cE(X)$); el caso en que $X \in \mathcal{L}_1(E)$ y $E(X^-) < \infty$ se trata como el anterior.

La parte c) se obtiene de $X+Y = (X^+ + Y^+) - (X^- + Y^-)$ mediante (VII.5). La parte d) se obtiene de $X^+ + Y^- \leq Y^+ + X^-$ mediante b) de (II.1), a) de (VII.4) y a) de (VII.5). La parte e) se obtiene de $-|X| \leq X \leq |X|$ mediante b) y d) de (VII.6). La parte f) se obtiene de $|X| = X^+ + X^-$ mediante a de (VII.5).

Supóngase que $E(X_1^-) < \infty$ y que $X_n \uparrow X$; puesto que $X^- \leq X_n^- \leq X_1^-$ para cada entero positivo n (por b) de (II.1)), se tiene $X_n, X \in \mathcal{L}_1(E)$; por consiguiente, teniendo en cuenta que $X_1^- + X_1 = X_1^+ \geq 0$, que $X_1^- + X_n \uparrow X_1^- + X$ y que $[X^-]^- = 0$, mediante b) de (VII.4) y c) de (VII.6) resulta que $E(X_n) \uparrow E(X)$. El caso en que $E(X_1^+) < \infty$ y $X_n \downarrow X$ se reduce al anterior ($-X_n \uparrow -X$ y $[-X_1]^- = X_1^+$) mediante b) de (VII.6).

(VII.7) Corolario (Lema de Fatou-Lebesgue). Sean X_n (n entero positivo), Y y Z variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ tales que $Y \le X_n \le Z$ para cada n. Si $E(Y^-)<\infty$, entonces $E(\liminf_n X_n) \le \liminf_n E(X_n)$; si $E(Z^+)<\infty$, entonces $\limsup_n E(X_n) \le E(\limsup_n X_n)$.

Demostración. Considérense $Y_n = \inf_{m\ge n} X_m$ y $Z_n = \sup_{m\ge n} X_m$; puesto que $Y_1^- \le Y^-$, $Z_1^+ \le Z^+$ (por b) de (II.1)), $Y_n \uparrow \liminf_n X_n$ y $Z_n \downarrow \limsup_n X_n$, el corolario se sigue de d) y g) de (III.6).

(III.8) Corolario. a) Si X es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ y ε es positivo, entonces $E(I_{[|X|\ge\varepsilon]}) \le \varepsilon^{-1}E(|X|)$. b) Si $\{X_n\}$ es sucesión creciente de variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ positivas y $\{E(X_n)\}$ es acotada, entonces $[\sup_n X_n < \infty] \in \mathcal{Q}$ y $E(I_{[\sup_n X_n < \infty]}) = 1$.

Demostración. La parte a) se sigue de $\varepsilon I_{[|X|\ge\varepsilon]} \le |X|$. Supóngase que $E(X_n) \uparrow M \in [0,\infty[$; puesto que $[X_n > k] \uparrow [\sup_n X_n > k]$ ($n\uparrow\infty$, k entero positivo), se tiene $[\sup_n X_n > k] \in \mathcal{Q}$ y del resultado anterior (teniendo en cuenta que $[|X|>\varepsilon] \subset [|X|\ge\varepsilon]$) se sigue que $E(I_{[\sup_n X_n > k]}) \le k^{-1}M$; en consecuencia, teniendo en cuenta que $[\sup_n X_n > k] \downarrow [\sup_n X_n = \infty]$ ($k\uparrow\infty$) resulta que $[\sup_n X_n = \infty] \in \mathcal{Q}$ y $E(I_{[\sup_n X_n = \infty]}) = 0$.

(III.9) Corolario. $\mathcal{L}_1(E)$ es espacio de Riesz y E es integral de Daniell en $\mathcal{L}_1(E)$.

Demostración. Se tiene $-\infty < E(X) < \infty$ para cada $X \in \mathcal{L}_1(E)$ (por definición); si $X \in \mathcal{L}_1(E)$ y $c \in]-\infty,\infty[$, entonces $cX \in \mathcal{L}_1(E)$ y $E(cX) = cE(X)$ (por b) de (VII.6)); si $X, Y \in \mathcal{L}_1(E)$, entonces $X+Y \in \mathcal{L}_1(E)$ y $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (por c) de (VII.6)). De acuerdo con lo anterior, teniendo presentes f), g) de (VII.6) y e) de (V.1), el corolario está demostrado.

VIII. Probabilidad.

Sean Ω conjunto no vacío, $\mathcal{B}$ álgebra en Ω y P función real de dominio $\mathcal{B}$. Se dice que P es aditiva si $P(A+B) = P(A) + P(B)$ para $A, B \in \mathcal{B}$ (tales que $AB = \phi$); se dice que P es σ-aditiva si $P(\Sigma_n A_n) = \Sigma_n P(A_n)$ para cada sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\Sigma_n A_n \in \mathcal{B}$; se dice que P es continua en $A \in \mathcal{B}$ si $\lim_n P(A_n) = P(A)$ para cada sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow A$; se dice que P es probabilidad sobre $\mathcal{B}$ si P es positiva, aditiva, continua en ϕ y $P(\Omega) = 1$. Se dice que $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ es espacio probabilizado si P es probabilidad sobre $\mathcal{B}$; se dice que $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ es espacio probabilista si $\mathcal{B}$ es σ-álgebra en Ω y P es probabilidad sobre $\mathcal{B}$.

(VII.1) Proposición. Si P es aditiva, entonces: a) $P(\phi)=0$, b) $A,B\in\mathcal{B}$ y $A\subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$; c) $A,B\in\mathcal{B} \Rightarrow P(A\cup B)+P(AB)=P(A)+P(B)$.

Demostración. Si $C\in\mathcal{B}$, entonces $P(C)=P(C+\phi)=P(C)+P(\phi)$; por lo tanto $P(\phi)=0$. De la igualdad $A\cup B=A+(B-AB)$ se obtiene b) $(A\subset B \Rightarrow B=A+(B-A))$; también de dicha igualdad, aplicando a) de (VII.1), se obtiene c).

(VII.2) Corolario. Si P es positiva y aditiva, entonces: $A,B\in\mathcal{B}$ y $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$.

Demostración. Puesto que $P(B-A)\geq 0$, el corolario se obtiene de b) de (VII.1).

(VII.3) Proposición. Si P es positiva y aditiva, entonces las siguientes condiciones son equivalentes: a) P es continua en ϕ; b) $\{A_n\}$ sucesión en $\mathcal{B}$, $A_n\uparrow A$ y $A\in\mathcal{B} \Rightarrow P(A_n)\uparrow P(A)$; c) P es continua en cada $A\in\mathcal{B}$.

Demostración. Supóngase que P es continua en ϕ y que $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $A_n\uparrow A\in\mathcal{B}$; puesto que $\{A-A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $A-A_n\downarrow\phi$ y $\{P(A_n)\}$ es creciente y acotada $(P(A_n)\leq P(A_{n+1})\leq P(A)$ por (VII.2)), aplicando b) de (VII.1) se obtiene $0=\lim_n P(A-A_n)=P(A)-\lim_n P(A_n)$; esto demuestra que a) implica b). Supóngase que P satisface b) y que

$\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $A_n \uparrow A \in \mathcal{B}$; puesto que $\{A_n^c\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $A_n^c \downarrow A^c \in \mathcal{B}$ y $P(B)+P(B^c)=P(\Omega)$ para cada $B \in \mathcal{B}$, se tiene $P(A)=P(\Omega)-P(A^c)=P(\Omega)-\lim_n P(A_n^c)=\lim_n[P(\Omega)-P(A_n^c)]=\lim_n P(A_n)$; esto demuestra que b) implica c). Puesto que a) es caso especial de c), la demostración está completa.

(VIII.4) Proposición. Para que P sea probabilidad sobre $\mathcal{B}$, es necesario y suficiente que P sea positiva, σ-aditiva y que $P(\Omega)=1$.

Demostración. Supóngase que P es probabilidad sobre $\mathcal{B}$ y que $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $\sum_n A_n \in \mathcal{B}$; puesto que $\{\sum_1^n A_j\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $\sum_1^n A_j \uparrow \sum_n A_n$, mediante b) de (VIII.3) se obtiene $P(\sum_n A_n)=\lim_n \sum_1^n P(A_j)=\sum_n P(A_n)$.

Ahora supóngase que P es positiva, σ-aditiva y que $P(\Omega)=1$. Sea $\{A_n\}$ la sucesión en $\mathcal{B}$ definida por $A_n=\phi$ para cada n; puesto que $\sum_n A_n=\phi \in \mathcal{B}$, la serie $\sum_n P(A_n)$ converge a $P(\phi)$; esto demuestra que $P(\phi)=0$. Para $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $AB=\phi$, considérese la sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{B}$ definida por $A_1=A$, $A_2=B$ y $A_n=\phi$ si $n>2$; de acuerdo con lo anterior, considerando que $\sum_n A_n=A+B \in \mathcal{B}$, se tiene $P(A+B)=\sum_n P(A_n)=P(A)+P(B)$; esto demuestra que P es aditiva. Sea $\{A_n\}$ sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \phi$; puesto que $\{A_n - A_{n+1}\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $\sum_n^\infty (A_m - A_{m+1}) = A_n \in \mathcal{B}$ para cada n, se tiene $P(A_n) = \sum_n^\infty P(A_m - A_{m+1})$ para cada n; teniendo en cuenta que la serie $\sum_1^\infty P(A_m - A_{m+1})$ es convergente, se concluye que $P(A_n) \downarrow 0$; esto demuestra que P es continua en ϕ.

(III.5) Proposición. Sean $\mathcal{C}$ semiálgebra en Ω, $\mathcal{B}$ la álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}$ y P' función real de dominio $\mathcal{C}$. Si P' es aditiva (o sea que $P'(\sum_1^m C_j) = \sum_1^m P'(C_j)$ si $C_1, \dots, C_m, \sum_1^m C_j \in \mathcal{C}$), entonces existe únicamente una función aditiva P de dominio $\mathcal{B}$ tal que $P(C) = P'(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$.

Demostración. Sea P la función de dominio $\mathcal{B}$ definida por $P(A) = \sum_1^m P'(C_j)$ si $A = \sum_1^m C_j$ y $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}$; es claro que $P(C) = P'(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$, pero se debe demostrar que P está bien definida como función (o sea que $P(A)$ no cambia si cambia la representación de A). Para ver que la definición de P es correcta, supóngase que $C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_n \in \mathcal{C}$ son tales que $\sum_1^m C_i = \sum_1^n D_j$; puesto que $C_i = \sum_{j=1}^n C_i D_j$ $(i = 1, \dots, m)$ y $D_j = \sum_{i=1}^m C_i D_j$ $(j = 1, \dots, n)$, se tiene $\sum_1^m P'(C_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P'(C_i D_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P'(C_i D_j) = \sum_1^n P'(D_j)$.

si A, B son conjuntos ajenos pertenecientes a $\mathcal{B}$ y $C_1, \ldots, C_{m+n} \in \mathcal{C}$ son tales que $A = \Sigma_1^m C_i$ y $B = \Sigma_{m+1}^{m+n} C_i$, entonces $P(A+B) = \Sigma_1^{m+n} P'(C_i) = P(A) + P(B)$; esto demuestra que P es aditiva. Supóngase que Q es función aditiva de dominio $\mathcal{B}$ tal que $Q(C) = P'(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$; si $A \in \mathcal{B}$ y $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{C}$ son tales que $A = \Sigma_1^m C_i$, entonces $Q(A) = \Sigma_1^m Q(C_i) = \Sigma_1^m P'(C_i) = P(A)$; esto demuestra la unicidad de P.

(VIII.6) Proposición. Sea $\mathcal{Q}$ la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{B}$. Si P, P' son probabilidades sobre $\mathcal{Q}$ tales que $P(B) = P'(B)$ para cada $B \in \mathcal{B}$, entonces $P = P'$.

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los conjuntos $A \in \mathcal{Q}$ tales que $P(A) = P'(A)$; puesto que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es clase monótona (por (VIII.3)), se tiene $\mathcal{M} = \mathcal{Q}$ (por (I.2)).

IX. Integración Respecto a una Probabilidad P (y Extensión de P).

Sean $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ espacio probabilizado y $\mathcal{L}$ el espacio de Riesz (por (II.1)) de todas las funciones $\mathcal{B}$-simples. En expresiones de la forma $P([\cdots])$ se eliminan los corchetes rectangulares;

por ejemplo, en lugar de $P([X=x])$ se usa $P(X=x)$. Si $X \in \mathcal{L}$ y $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$, entonces se define $\int X dP = \Sigma_1^m x_i P(X=x_i)$; se dice que $\int X dP$ es la integral de X con respecto a P (o que $\int X dP$ es la esperanza de X relativa a P).

(IX.1) Proposición. La funcional E de dominio $\mathcal{L}$ definida por $E(X) = \int X dP$ para cada $X \in \mathcal{L}$, es la única integral de Daniell en $\mathcal{L}$ tal que $E(I_A) = P(A)$ para cada $A \in \mathcal{B}$. Recíprocamente: si E es integral de Daniell en $\mathcal{L}$ tal que $E(1) = 1$, entonces existe únicamente una probabilidad P sobre $\mathcal{B}$ tal que $E(X) = \int X dP$ para cada $X \in \mathcal{L}$.

Demostración. Para $X, Y \in \mathcal{L}$ se consideran $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Supóngase que c es real distinto de cero; puesto que $\{cx_1, \dots, cx_m\}$ es el conjunto de todos los valores de cX, se tiene $E(cX) = \Sigma_1^m cx_i P(cX = cx_i) = c\,\Sigma_1^m x_i P(X = x_i) = cE(X)$; teniendo en cuenta que $E(0X) = 0 = 0E(X)$, resulta que $E(cX) = cE(X)$ para cada real c. Supóngase que $\{u_1, \dots, u_r\}$ es el conjunto de todos los valores de $X+Y$; teniendo en cuenta que $[X+Y = u_k] = \Sigma_{x_i+y_j=u_k}[X=x_i][Y=y_j]$ y $[X=x_i][Y=y_j] = \phi$ si $x_i + y_j$ no es ulor de X+Y, se obtiene

$$E(X+Y)=\sum_1^r u_k P(X+Y=u_k)=\sum_{k=1}^r u_k \sum_{x_i+y_j=u_k} P([X=x_i][Y=y_j])$$

$$=\sum_{k=1}^r \sum_{x_i+y_j=u_k}(x_i+y_j)P([X=x_i][Y=y_j])$$

$$=\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i+y_j)P([X=x_i][Y=y_j])$$

$$=\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i P([X=x_i][Y=y_j])+\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m y_j P([X=x_i][Y=y_j])$$

$$=\sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n P([X=x_i][Y=y_j])+\sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m P([X=x_i][Y=y_j])$$

$$=\sum_{i=1}^m x_i P(X=x_i)+\sum_{j=1}^n y_j P(Y=y_j)=E(X)+E(Y).$$

Supóngase que $X\geq 0$ (o sea que $x_i\geq 0$ para $i=1,\ldots,m$); puesto que $E(X)$ es igual a una suma de productos cuyos factores son no negativos, se tiene $E(X)\geq 0$. Puesto que $I_A(\Omega)\subset\{0,1\}$ y $[I_A=1]=A$ para cada subconjunto A de Ω, de acuerdo con lo anterior resulta que E es funcional lineal positiva tal que $E(I_A)=P(A)$ para cada $A\in\mathcal{B}$. Considérense una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $X_n\downarrow 0$, el valor máximo M de X_1 y un positivo ε; puesto que $X_n\leq M I_{[X_n\geq\varepsilon]}+\varepsilon I_{[X_n<\varepsilon]}$, mediante la linearidad y positividad de E (teniendo en cuenta que $E(I_A)=P(A)\leq 1$ si $A\in\mathcal{B}$) se obtiene $E(X_n)\leq MP(X_n\geq\varepsilon)+\varepsilon$ y $E(X_{n+1})\leq E(X_n)$ para cada n; en consecuencia, de $[X_n\geq\varepsilon]\downarrow\phi$ se sigue que $\lim_n E(X_n)\leq\varepsilon$; por consiguiente

$E(X_n) \downarrow 0$. Para demostrar la unicidad de E, supóngase que E' es integral de Daniell en $\mathcal{L}$ tal que $E'(I_A) = P(A)$ para cada $A \in \mathcal{B}$; puesto que $X = \sum_1^m x_i I_{[X=x_i]}$, se tiene $E'(X) = \sum_1^m x_i E'(I_{[X=x_i]}) = \sum_1^m x_i P(X=x_i) = E(X)$.

Ahora supóngase que E es integral de Daniell en $\mathcal{L}$ tal que $E(1)=1$ y considérese la función P de dominio $\mathcal{B}$ definida por $P(A)=E(I_A)$ para cada $A \in \mathcal{B}$; es claro que P es positiva y que $P(\Omega)=1$. Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $AB = \phi$, entonces $P(A+B) = E(I_{A+B}) = E(I_A + I_B) = E(I_A) + E(I_B) = P(A) + P(B)$; si $\{A_n\}$ es sucesión en $\mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \phi$, entonces $\{I_{A_n}\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $I_{A_n} \downarrow 0$ y en consecuencia $P(A_n) \downarrow 0$; por consiguiente, P es probabilidad sobre $\mathcal{B}$. Si $X \in \mathcal{L}$ y $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$, entonces $E(X) = E(\sum_1^m x_i I_{[X=x_i]}) = \sum_1^m x_i E(I_{[X=x_i]}) = \sum_1^m x_i P(X=x_i) = \int X dP$. Finalmente, supóngase que P' es probabilidad sobre $\mathcal{B}$ tal que $E(X) = \int X dP'$ para cada $X \in \mathcal{L}$; si $A \in \mathcal{B}$, entonces $P'(A) = \int I_A dP' = E(I_A) = \int I_A dP = P(A)$.

(IX.2) Lema. $\mathcal{B} = \{[X>0] \mid X \in \mathcal{L}\} = \{[X>x] \mid X \in \mathcal{L}, x \in]-\infty, \infty[\}$.

Demostración. Si $X \in \mathcal{L}$ y $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$, entonces $[X>0] = \sum_{x_i>0} [X=x_i] \in \mathcal{B}$; si $B \in \mathcal{B}$, entonces $I_B \in \mathcal{L}$ y $B = [I_B > 0]$. De acuerdo con esto y con (IX.3) el lema está demostrado.

Sean $\mathcal{A}$ la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{B}$ y E la integral de Daniell en $\mathcal{L}$ definida (de acuerdo con (IX.1)) por $E(x)=\int x\,dP$ para cada $x\in\mathcal{L}$; de acuerdo con (IX.2) y la definición que precede a (VII.1), los espacios $\mathscr{L}_1(E)$ y $\mathcal{L}_1(E)$ ahora se denotan respectivamente por $\mathscr{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ y $\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P)$. Si $x\in\mathscr{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P)$, entonces se define $\int x\,dP=E(x)$; se dice que $\int x\,dP$ es la integral de x con respecto a P (o que $\int x\,dP$ es la esperanza de x relativa a P).

(IX.3) Teorema (Extensión de una Probabilidad). Sean $(\Omega,\mathcal{B},P)$ espacio probabilizado y $\mathcal{A}$ la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{B}$. Existe una probabilidad P' sobre $\mathcal{A}$, y sólo una, tal que $P'(B)=P(B)$ para cada $B\in\mathcal{B}$; si x es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{A})$ positiva, entonces $\int x\,dP'=\int x\,dP$ (en consecuencia, $\mathscr{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P')=\mathscr{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ y $\int x\,dP'=\int x\,dP$ para cada $x\in\mathscr{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P')$).

Demostración. Sea P' la función definida por $P'(A)=\int I_A\,dP$ para cada $A\in\mathcal{A}$. Por (IX.1) se tiene $P'(B)=P(B)$ para cada $B\in\mathcal{B}$ (en particular $P'(\Omega)=1$) y por (VII.9) P' es probabilidad sobre $\mathcal{Q}$; la unicidad de P' está en (VIII.6). Si X es función $\mathcal{Q}$-simple positiva y $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_m\}$, entonces $\int X\,dP'=\Sigma_1^m x_j P'(X=x_j)=\Sigma_1^m x_j \int I_{[X=x_j]}\,dP=\int(\Sigma_1^m x_j I_{[X=x_j]})\,dP=\int X\,dP$; si X variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ positiva y $\{X_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{Q}$-simples positivas tal que $X_n\uparrow X$, entonces $\int X\,dP'=\lim_n\int X_n\,dP'=\lim_n\int X_n\,dP=\int X\,dP$.

Sean $(\Omega,\mathcal{Q},P)$ espacio probabilista y X,Y variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$. La expresión $X\overset{P}{=}Y$ significa que $P(|X-Y|>0)=0$ (se nota que $[|X-Y|>0]=[X\neq Y]$); se dice que X es igual a Y según P si $X\overset{P}{=}Y$.

(IX.4) Proposición. a) La igualdad según P es relación de equivalencia. b) Sean X,X',Y,Y' variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ tales que $X\overset{P}{=}X'$ y $Y\overset{P}{=}Y'$; si $*$ es una de las operaciones usuales, entonces $X*Y\overset{P}{=}X'*Y'$. c) Sean X,X_n,Y,Y_n (n entero positivo) variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ tales que $\inf_n X_n=X$ e $\inf_n Y_n=Y$ (o tales que $\sup_n X_n=X$ y $\sup_n Y_n=Y$); si $X_n\overset{P}{=}Y_n$ para cada n, entonces $X\overset{P}{=}Y$. d) Sean X,Y variables aleatorias en $(\Omega,\mathcal{Q})$ tales que $X\overset{P}{=}Y$; si $Y\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$, entonces $X\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ y $\int X\,dP=\int Y\,dP$.

Demostración. La reflexividad, la simetría y la transitividad de la igualdad según P, se siguen respectivamente de $[X \neq X] = \phi$, $[X \neq Y] = [Y \neq X]$ y $[|X-Z|>0] \subset [|X-Y|>0] \cup [|Y-Z|>0]$. Las partes b) y c) se siguen respectivamente de $[X+Y \neq X'+Y'] \subset [X \neq X'] \cup [Y \neq Y']$ y $[\inf_n X_n \neq \inf_n Y_n] \cup [\sup_n X_n \neq \sup_n Y_n] \subset \cup_n [X_n \neq Y_n]$.

Supóngase que $X \stackrel{P}{=} 0$; si $X \geq 0$ y $\{X_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{B}$-simples positivas tal que $X_n \uparrow X$, entonces $\int X dP = \lim_n \int X_n dP = 0$ (para cada n se tiene $\int X_n dP = 0$ porque $P(X_n = z) = 0$ si $z \neq 0$); puesto que $X^+ \stackrel{P}{=} 0$ y $X^- \stackrel{P}{=} 0$ (porque $[X^+>0] \cup [X^->0] \subset [|X|>0]$), se tiene $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ y $\int X dP = 0$. Considérese el caso en que $X \stackrel{P}{=} Y$, $X \geq 0$, $Y \geq 0$ y $\int Y dP < \infty$; puesto que $X - Y \stackrel{P}{=} 0$ (por b) de (IX.4)), teniendo en cuenta que $X^- = 0$ y $(-Y)^- = Y$ mediante b) y c) de (VII.6) se obtiene $0 = \int (X-Y) dP = \int X dP - \int Y dP$. Para el caso en que $X \stackrel{P}{=} Y$, $X \geq 0$, $Y \geq 0$ y $\int Y dP = \infty$, considérense $X_n = X I_{[X \leq n]}$ y $Y_n = Y I_{[Y \leq n]}$ (n entero positivo); puesto que $[I_{[X \leq n]} \neq I_{[Y \leq n]}] = [X \leq n][Y > n] + [Y \leq n][X > n] \subset [X \neq Y]$, de acuerdo con b) de (IX.4) se tiene $X_n \stackrel{P}{=} Y_n$; teniendo en cuenta que $\int X_n dP = \int Y_n dP$ (esto se obtiene de $X_n \stackrel{P}{=} Y_n$ porque X_n, Y_n son positivas y acotadas) y considerando do que $X_n \uparrow X$ y $Y_n \uparrow Y$, mediante q) de (VII.6) se obtiene $\int X dP = \infty$. Finalmente, supóngase que $X \overset{c}{=} Y \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, puesto que $X^+ = \max(X,0) \overset{c}{=} \max(Y,0) = Y^+$ y $X^- = -\min(X,0) \overset{c}{=} -\min(Y,0) = Y^-$, se tiene $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ y $\int X dP = \int Y dP$.

(IX.5) Corolario. a) Si X es variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{Q})$ positiva, entonces $\int X dP = 0$ equivale a $X \overset{c}{=} 0$. b) Si $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ y $A \in \mathcal{Q}$ es tal que $P(A) = 1$, entonces $X I_A \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ y $\int X I_A dP = \int X dP$.

Demostración. Puesto que $[X > n^{-1}] \uparrow [X > 0]$, $P(X > n^{-1}) \leq n \int X dP$ si $X \geq 0$ (por a) de (VII.8)) y $[X I_A \neq X] \subset A^c$, el corolario se sigue de d) de (IX.4).

X. Integral de Daniell Acotada (Conclusión).

(X.1) Proposición. Sean $\mathcal{L}$ espacio de Riesz de funciones reales de dominio Ω tal que $1 \in \mathcal{L}$, E integral de Daniell en $\mathcal{L}$ tal que $E(1) = 1$ y $\mathcal{Q}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{L}$. Existe una probabilidad P sobre $\mathcal{Q}$, y sólo una, tal que $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ y $E(X) = \int X dP$ para cada $X \in \mathcal{L}$.

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ la álgebra en Ω generada por $\{[X > x] \mid X \in \mathcal{L},\ x \in]-\infty, \infty[\}$ y P la función definida (de acuerdo con la definición que precede a (VI.3)) por $P(A) = E(I_A)$ para cada

$A\in\mathcal{Q}$. Claramente $\mathcal{Q}$ es la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{B}$; mediante b) de (VI.2) y (VI.3) se sigue que P es probabilidad sobre $\mathcal{Q}$; de (VI.1) se sigue que $E(X)=\int X dP$ para cada función $\mathcal{B}$-simple positiva X.

Supóngase que $0\le X\in\mathcal{L}$ y que $\{X_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{B}$-simples positivas (de acuerdo con b) de (V.6)) tal que $X_n\uparrow X$; mediante b) de (VI.4) se obtiene $E(X)=\lim_n E(X_n)=\lim_n\int X_n dP=\int X dP$. Si $X\in\mathcal{L}$, entonces $-\infty<E(X)=E(X^+)-E(X^-)<\infty$, $E(X^+)=\int X^+dP$ y $E(X^-)=\int X^- dP$, por consiguiente, $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ y $E(X)=\int X dP$ para cada $X\in\mathcal{L}$.

Supóngase que P' es probabilidad sobre $\mathcal{Q}$ tal que $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P')$ y $E(X)=\int X dP'$ para cada $X\in\mathcal{L}$; de acuerdo con c) de (VI.2), se tiene $E(Y)=\int Y dP'$ para cada $Y\in\mathcal{L}^+$. Para $B\in\mathcal{B}$ considérese una sucesión $\{Y_n\}$ en $\mathcal{L}^+$ (de acuerdo con (V.5)) tal que $Y_1\le 1$ y $Y_n\downarrow I_B$; mediante (V.4) se obtiene $P(B)=\lim_n E(Y_n)=\lim_n\int Y_n dP'=P'(B)$; por lo tanto, de acuerdo con (VIII.6) se tiene $P'=P$.

(X.2) Corolario. Sean $\mathcal{L}$, E, $\mathcal{Q}$, P como en (X.1) y sea $\mathcal{D}$ la colección de todos los subconjuntos D de Ω tales que $I_D \in \mathcal{L}^+$: a) Si $D \in \mathcal{D}$, entonces $P(D) = \sup\{E(X) \mid X \leq I_D, X \in \mathcal{L}\}$; si $A \in \mathcal{Q}$, entonces $P(A) = \inf\{P(D) \mid A \subset D \in \mathcal{D}\}$. b) Si $\mathcal{L}$ es cerrado según la convergencia uniforme de sucesiones, entonces $\mathcal{D} = \{[X > 0] \mid X \in \mathcal{L}\}$.

Demostración. Se tiene $P(A) = E(I_A)$ para cada $A \in \mathcal{Q}$. La primera parte de a) está en la definición que precede a (VI.2); de acuerdo con la definición que precede a (VI.3), se tiene $P(A) = \inf\{E(Y) \mid I_A \leq Y \in \mathcal{L}^+\} \leq \inf\{P(D) \mid A \subset D \in \mathcal{D}\}$ para cada $A \in \mathcal{Q}$. Para $A \in \mathcal{Q}$, $\varepsilon > 0$ y $Y \in \mathcal{L}^+$ tal que $Y \geq I_A$ y $P(A) > E(Y) - \varepsilon$, considérese una sucesión de positivos $\{y_n\}$ tal que $y_n \uparrow 1$; puesto que $\{[Y > y_n]\}$ es sucesión en $\mathcal{D}$ (por a) de (V.4)) tal que $A \subset [Y > y_{n+1}] \subset [Y > y_n]$ y $P(Y > y_n) \leq y_n^{-1} E(Y)$ (por a) de (VII.8)) para cada n, se tiene $P(A) + \varepsilon > E(Y) = \lim_n y_n^{-1} E(Y) \geq \lim_n P(Y > y_n) \geq \inf\{P(D) \mid A \subset D \in \mathcal{D}\}$; en esta forma queda demostrada la segunda parte de a).

Supóngase que $\mathcal{L}$ es cerrado según la convergencia uniforme de sucesiones. Si $X \in \mathcal{L}$ y $X_n = \min(nX^+, 1)$, entonces $\{X_n\}$ es sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $X_n \uparrow I_{[X > 0]}$; por lo tanto $\{[X > 0] \mid X \in \mathcal{L}\}$

$\subset \mathfrak{D}$. Para $D \in \mathfrak{D}$ considérese una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathcal{L}$ tal que $x_n \uparrow I_D$ y $x = \Sigma_n 2^{-n} x_n$; teniendo en cuenta que $\{\Sigma_1^n 2^{-j} x_j\}$ es sucesión creciente en $\mathcal{L}$ que converge uniformemente a x, resulta que $x \in \mathcal{L}$ y $D = [x>0]$, por lo tanto $\mathfrak{D} \subset \{[x>0] \mid x \in \mathcal{L}\}$.

XI. Independencia de σ-álgebras.

Sean $(\Omega,\mathcal{Q},P)$ espacio probabilista y T conjunto no vacío; para cada $t\in T$ se considera una subcolección $\mathcal{C}_t$ de $\mathcal{Q}$. Se dice que $(\mathcal{C}_t, t\in T)$ es independiente según P si para cada subconjunto finito no vacío S de T y conjuntos cualesquiera $A_s\in\mathcal{C}_s$ $(s\in S)$ se tiene $P(\bigcap_S A_s)=\Pi_S P(A_s)$. Se dice que $\mathcal{Q}'$ es σ-subálgebra de $\mathcal{Q}$ si $\mathcal{Q}'$ es σ-álgebra en Ω y $\mathcal{Q}'\subset\mathcal{Q}$.

(XI.1) Lema. Supóngase que T es finito y que $\mathcal{Q}_t$ $(t\in T)$ es σ-subálgebra de $\mathcal{Q}$. Para que $(\mathcal{Q}_t, t\in T)$ sea independiente según P, es necesario y suficiente que $P(\bigcap_T A_t)=\Pi_T P(A_t)$ para cualesquiera $A_t\in\mathcal{Q}_t$ $(t\in T)$.

Demostración. Supóngase que $(\mathcal{Q}_t, t\in T)$ es independiente según P; puesto que T es subconjunto finito de T, se tiene $P(\bigcap_T A_t)=\Pi_T P(A_t)$ si $A_t\in\mathcal{Q}_t$ para cada $t\in T$. Para un subconjunto no vacío S de T, considérense $A_s\in\mathcal{Q}_s$ si $s\in S$ y $A_t=\Omega$ si $t\in T-S$; suponiendo que $P(\bigcap_T A_t)=\Pi_T P(A_t)$ y teniendo en cuenta que $\bigcap_T A_t=\bigcap_S A_s$ y $P(\Omega)=1$, resulta que $P(\bigcap_S A_s)$

$=\Pi_S P(A_s)$.

(XI.2) Proposición. Sea $\mathcal{Q}_t$ la σ-álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}_t$ $(t\in T)$. Si $(\mathcal{C}_t, t\in T)$ es independiente según P y cada $\mathcal{C}_t$ es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces $(\mathcal{Q}_t, t\in T)$ es independiente según P.

Demostración. Sea S subconjunto finito no vacío de T; para $u\in S$ se considera la colección $\mathcal{F}_u$ de todos los conjuntos $A\in\mathcal{Q}$ tales que $P(A\cap\bigcap_{S-\{u\}}A_s)=P(A)\Pi_{S-\{u\}}P(A_s)$ si $A_s\in\mathcal{C}_s$ para cada $s\in S-\{u\}$. Puesto que $(\mathcal{C}_t, t\in T)$ es independiente según P, se tiene $\mathcal{C}_u\subset\mathcal{F}_u$; de $P(\Omega)=1$, la aditividad de P, b) de (III, 1) y b) de (III.3) se sigue que $\mathcal{F}_u$ es clase σ-aditiva; en consecuencia, de acuerdo con (I.6) se tiene $\mathcal{Q}_u\subset\mathcal{F}_u$; por consiguiente, $(\mathcal{Q}_u, \mathcal{C}_s, s\in S-\{u\})$ es independiente según P. Aplicando el argumento anterior a cada $u\in S$ (colocando a $\mathcal{Q}_u$ en lugar de $\mathcal{C}_u$ en cada aplicación), de acuerdo con (XI.1) resulta que $(\mathcal{Q}_s, s\in S)$ es independiente según P. Puesto que $(\mathcal{Q}_s, s\in S)$ es independiente según P para cada subconjunto finito no vacío S de T, $(\mathcal{Q}_t, t\in T)$ es independiente según P.

(XI.3) Corolario. Sean T_γ $(\gamma\in\Gamma)$ subconjunto no vacío de T,

$\mathcal{Q}_t$ $(t \in T)$ σ- subálgebra de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ la σ-álgebra en Ω generada por $\cup_{T_\gamma} \mathcal{Q}_t$. Si $T = \Sigma_\Gamma T_\gamma$ y $(\mathcal{Q}_t, t \in T)$ es independiente según P, entonces $(\mathcal{Q}_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ es Independiente según P.

Demostración. Para cada $\gamma \in \Gamma$ considérese $\mathcal{C}_\gamma = \{\cap_S A_s \mid S$ sub conjunto finito no vacío de T_γ, $A_s \in \mathcal{Q}_s$ $(s \in S)\}$; $(\mathcal{C}_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ es independiente según P, cada $\mathcal{C}_\gamma$ es cerrada bajo intersecciones finitas y $\cup_{T_\gamma} \mathcal{Q}_t \subset \mathcal{C}_\gamma \subset \mathcal{Q}_\gamma$.

XII. Variables Aleatorias Independientes.

Sean $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ espacio probabilista y T conjunto no vacío; si X es variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{Q})$, entonces se denota por $\mathcal{Q}(X)$ a la σ-álgebra en Ω generada por $\{[X > x] \mid x \in]-\infty, \infty[\}$. Si X_t $(t \in T)$ es variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{Q})$ y $(\mathcal{Q}(X_t), t \in T)$ es independiente según P, entonces se dice que $(X_t, t \in T)$ es independiente según P.

(XII.1) Proposición. Supóngase que T es finito y para cada $t \in T$ considérese una σ- subálgebra $\mathcal{Q}_t$ de $\mathcal{Q}$. Para que $(\mathcal{Q}_t, t \in T)$ sea independiente según P, es necesario y suficiente que la igualdad $\int \prod_T X_t \, dP = \prod_T \int X_t \, dP$ sea válida para cualesquiera variables aleatorias X_t $(t \in T)$ en $(\Omega, \mathcal{A})$ positivas y tales que $\mathcal{A}(X_t) \subset \mathcal{A}_t$.

Demostración. Supóngase que $T = \{0, 1\}$ y que $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ es independiente según P. Para una función $\mathcal{A}_0$-simple positiva X y una función $\mathcal{A}_1$-simple positiva Y, considérense $A_i \in \mathcal{A}_0$ $(i = 1, \dots, m)$, $B_j \in \mathcal{A}_1$ $(j = 1, \dots, n)$ y $x_i, y_j \in [0, \infty[$ tales que $X = \sum_i x_i I_{A_i}$ y $Y = \sum_j y_j$; puesto que $XY = \sum_i \sum_j x_i y_j I_{A_i B_j}$, se tiene $\int XY \, dP = \sum_i \sum_j x_i y_j P(A_i) P(B_j) = \sum_i x_i P(A_i) \sum_j y_j P(B_j) = \int X \, dP \int Y \, dP$. Para variables aleatorias X y X en $(\Omega, \mathcal{A})$ positivas tales que $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}(Y) \subset \mathcal{A}_1$, considérense una sucesión $\{X_n\}$ de funciones $\mathcal{A}_0$-simples positivas tal que $X_n \uparrow X$ y una sucesión $\{Y_n\}$ de funciones $\mathcal{A}_1$-simples positivas tal que $Y_n \uparrow Y$; puesto que $\int X_n \, dP \uparrow \int X \, dP$, $\int Y_n \, dP \uparrow \int Y \, dP$, $\int X_n Y_n \, dP \uparrow \int XY \, dP$ y $\int X_n Y_n \, dP = \int X_n \, dP \int Y_n \, dP$ para cada n, se tiene $\int XY \, dP = \int X \, dP \int Y \, dP$.

Ahora supóngase que $T = \{0, 1, \dots, k+1\}$, que $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{k+1})$ es independiente según P y que la igualdad de (XII.1) es cierta para $\{0, 1, \dots, k\}$ en lugar de T (hipótesis de inducción finita).

Para $\Gamma=\{\alpha,\beta\}$ se consideran $T_\alpha=\{0,1,\ldots,k\}$, $T_\beta=\{k+1\}$, la σ-álgebra $\mathcal{Q}_\alpha$ en Ω generada por $\cup_0^k \mathcal{Q}_i$ y $\mathcal{Q}_\beta=\mathcal{Q}_{k+1}$; puesto que $(\mathcal{Q}_\alpha,\mathcal{Q}_\beta)$ es independiente según P (por (XI.3)), de acuerdo con lo anterior se tiene $\int XY\,dP=\int X\,dP\int Y\,dP$ si X (respectivamente Y) es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q})$ positiva tal que $\mathcal{Q}(X)\subset\mathcal{Q}_\alpha$ (respectivamente $\mathcal{Q}(Y)\subset\mathcal{Q}_\beta$). Para variables aleatorias X_t $(t\in T)$ en $(\Omega,\mathcal{Q})$ positivas y tales que $\mathcal{Q}(X_t)\subset\mathcal{Q}_t$, considérense $X=\Pi_{T_\alpha}X_t$ y $Y=X_{k+1}$; puesto que $\mathcal{Q}(X)\subset\mathcal{Q}_\alpha$ (X es variable aleatoria $(\Omega,\mathcal{Q}_\alpha)$ porque X_t es variable aleatoria en $(\Omega,\mathcal{Q}_\alpha)$ para cada $t\in T_\alpha$), $\mathcal{Q}(Y)\subset\mathcal{Q}_\beta$ y $\int X\,dP=\Pi_{T_\alpha}\int X_t\,dP$ (por la hipótesis de inducción finita), se tiene $\int\Pi_T X_t\,dP=\int XY\,dP=\int X\,dP\int Y\,dP=\Pi_T\int X_t\,dP$.

Recíprocamente: la independencia según P de $(\mathcal{Q}_t,t\in T)$ se obtiene de la igualdad de la proposición (si $A_t\in\mathcal{Q}_t$ $(t\in T)$, entonces $\mathcal{Q}(I_{A_t})\subset\mathcal{Q}_t$ y $P(\cap_T A_t)=\int I_{\cap_T A_t}dP=\int\Pi_T I_{A_t}dP=\Pi_T\int I_{A_t}dP=\Pi_T P(A_t)$) y de (XI.1).

(XII.2) Corolario. *Supóngase que T es finito y para cada $t\in T$ considérese una variable aleatoria X_t tal que $\int|X_t|\,dP<\infty$. Si $(X_t,t\in T)$*

es independiente según P, entonces $\int|\Pi_T X_t| dP < \infty$ y $\int \Pi_T X_t dP = \Pi_T \int X_t dP$.

Demostración. Puesto que $(\mathcal{Q}(X_t), t\in T)$ es independiente según P y $\mathcal{Q}(|X_t|)\subset \mathcal{Q}(X_t)$ para cada $t\in T$ (porque X_t^+ y X_t^- son variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{Q}(X_t))$), se tiene $\int|\Pi_T X_t| dP = \Pi_T \int |X_t| dP < \infty$.

Supóngase que $T=\{0,1\}$; puesto que $\mathcal{Q}(X_t^+), \mathcal{Q}(X_t^-)$ son σ-subálgebras de $\mathcal{Q}(X_t)$ y $X_0X_1 = X_0^+X_1^+ - X_0^+X_1^- - X_0^-X_1^+ + X_0^-X_1^-$, se tiene $\int X_0X_1 dP = \int X_0^+dP\int X_1^+dP - \int X_0^+dP\int X_1^-dP - \int X_0^-dP\int X_1^+dP + \int X_0^-dP\int X_1^-dP$ $=(\int X_0^+dP - \int X_0^-dP)(\int X_1^+dP - \int X_1^-dP) = \int X_0dP\int X_1dP$. Ahora supóngase que $T=\{0,1,\dots,k+1\}$ y que $\int \Pi_0^k X_t dP = \Pi_0^k \int X_t dP$ (hipótesis de inducción finita); puesto que $(\mathcal{Q}(\Pi_0^k X_t), \mathcal{Q}_{k+1})$ es independiente según P, se tiene $\int \Pi_0^{k+1} X_t dP = \int \Pi_0^k X_t dP \int X_{k+1} dP = \Pi_0^{k+1}\int X_t dP$.

XIII. Producto de Espacios Medibles.

Sea T conjunto de cardinalidad mayor que 1; para cada $t\in T$ se considera un conjunto no vacío Ω_t. Se denota por Ω_T

al producto cartesiano $\pi_T \Omega_t$ (o sea que Ω_T es el conjunto de todas las funciones ω de dominio T tales que $\omega(t) \in \Omega_t$ para cada $t \in T$); frecuentemente se usa $(\omega_t, t \in T)$ para denotar a la función $\omega \in \Omega_T$ tal que $\omega(t) = \omega_t$ para cada $t \in T$.

Sea C subconjunto de Ω_T. Se dice que C es rectángulo en Ω_T si existen un subconjunto finito S de T y $C_t \subset \Omega_t$ $(t \in T)$ tales que $C = \pi_T C_t$ y $C_t = \Omega_t$ para cada $t \in T - S$ (se nota que Ω_T y ϕ son rectángulos en Ω_T); si $u \in T$ y $C_u \subset \Omega_u$, entonces (ocasionalmente para simplificar la notación) se denota por $C_{(u)}$ al rectángulo $\pi_T C_t$ en Ω_T tal que $C_t = \Omega_t$ para cada $t \in T - \{u\}$ (se nota que $\Omega_{(u)} = \Omega_T$ y $\phi_{(u)} = \phi$ para cada $u \in T$; también es claro que: C es rectángulo en Ω_T si, y sólo si, existen un subconjunto finito no vacío S de T y $C_s \subset \Omega_s$ $(s \in S)$ tales que $C = \bigcap_S C_{(s)}$).

Sea S subconjunto propio de T (o sea que $S \subset T$, $S \neq \phi$ y $S \neq T$). Si $A \subset \Omega_T$ y $\nu = (\nu_s, s \in S) \in \Omega_S = \pi_S \Omega_s$ (con $\nu = \nu_s$ y $\Omega_S = \Omega_s$ si $S = \{s\}$), entonces se define $A_\nu = \{(\nu_t, t \in T-S) \in \Omega_{T-S} \mid (\nu_t, t \in T) \in A\}$; se dice que A_ν es la sección de A en ν (si $A =$

$\pi_T A_t$, entonces $A_\nu = \pi_{T-S} A_t$ para cada $\nu \in \pi_S A$ y $A_\nu = \phi$ para cada $\nu \in \Omega_S - \pi_S A_s$). Si X es función de dominio Ω_T y $\nu = (\nu_s, s \in S) \in \Omega_S$, entonces se define la función X_ν de dominio Ω_{T-S} por $X_\nu(\nu_t, t \in T-S) = X(\nu_t, t \in T)$ para cada $(\nu_t, t \in T-S) \in \Omega_{T-S}$; se dice que X_ν es la sección de X en ν.

Sean A subconjunto de Ω_T y X función de dominio Ω_T. Se dice que A (respectivamente X) depende de $u \in T$ si existen $\nu, \nu' \in \Omega_u$ tales que $A_\nu \neq A_{\nu'}$ (respectivamente $X_\nu \neq X_{\nu'}$); se dice que A (respectivamente X) es independiente de $u \in T$ si A (respectivamente X) no depende de u.

(XIII.1) Proposición. Sea S subconjunto propio de T. a) Si A, B son subconjuntos de Ω_T, entonces $(A-B)_\nu = A_\nu - B_\nu$ para cada $\nu \in \Omega_S$ (en particular $(\Omega_T - B)_\nu = \Omega_{T-S} - B_\nu$). b) Si $A^\gamma \subset \Omega_T$ $(\gamma \in \Gamma)$ y $\nu \in \Omega_S$, entonces $(\bigcap_\Gamma A^\gamma)_\nu = \bigcap_\Gamma A^\gamma_\nu$ y $(\bigcup_\Gamma A^\gamma)_\nu = \bigcup_\Gamma A^\gamma_\nu$. c) Si A es subconjunto de Ω_T independiente de cada $u \in T-S$ y $\nu \in \Omega_S$ es tal que $A_\nu \neq \phi$, entonces $A_\nu = \Omega_{T-S}$.

Demostración. Si $\nu = (\nu_s, s \in S) \in \Omega_S$ y $\mu = (\nu_t, t \in T-S) \in$

Ω_{T-S}, entonces: $\mu \in (A-B)_\nu \Leftrightarrow (\nu_t, t \in T) \in A-B \Leftrightarrow \mu \in A_\nu - B_\nu$; $\mu \in (\bigcap_\Gamma A^\gamma)_\nu \Leftrightarrow (\nu_t, t \in T) \in \bigcap_\Gamma A^\gamma \Leftrightarrow \mu \in \bigcap_\Gamma A^\gamma_\nu$; $\mu \in (\bigcup_\Gamma A^\gamma)_\nu \Leftrightarrow \mu \in \bigcup_\Gamma A^\gamma_\nu$.

Considérense, para demostrar la parte c), $\nu = (\nu_s, s \in S)$ y $\mu = (\nu_t, t \in T-S)$ tales que $\mu \in A_\nu$. Para $(\omega_t, t \in T-S) \in \Omega_{T-S}$ se considera al conjunto S' de todos los elementos $u \in T-S$ tales que la relación $(\nu_t, t \in T-S) \in A_\nu$ es válida con ω_u en lugar de ν_u; puesto que $A_{\nu_u} = A_{\omega_u}$ y $(\nu_t, t \in T-\{u\}) \in A_{\nu_u}$ para cada $u \in T-S$, se tiene $S' = T-S$; esto demuestra que $A_\nu = \Omega_{T-S}$.

Sea $(\Omega_t, \mathcal{Q}_t)$ espacio medible $(t \in T)$. Se dice que un rectángulo $\bigcap_S C_{(s)}$ en Ω_T (S subconjunto finito no vacío de T) es medible si $C_s \in \mathcal{Q}_s$ para cada $s \in S$. Sea $\mathcal{C}_T$ la colección de todos los rectángulos en Ω_T medibles; se denota por $\mathcal{B}_T$ y $\mathcal{Q}_T$ respectivamente a la álgebra y a la σ-álgebra generadas en Ω_T por $\mathcal{C}_T$; se dice que $\mathcal{Q}_T$ es el producto de las σ-álgebras $\mathcal{Q}_t$ $(t \in T)$ y que $(\Omega_T, \mathcal{Q}_T)$ es el producto de los espacios $(\Omega_t, \mathcal{Q}_t)$.

Sea S subconjunto propio de T. Las definiciones anteriores se aplican con S en lugar de T; en esta forma: un rectángulo $\pi_S C_s$ en Ω_S (con $\pi_S C_s = C_s$ si $S=\{s\}$) pertenece a $\mathcal{C}_S$ si, y sólo si, existe un subconjunto finito S' de S tal que $C_u = \Omega_u$ para cada $u \in S-S'$ y $C_s \in \mathcal{Q}_s$ para cada $s \in S'$ (se nota que $\mathcal{C}_S = \mathcal{Q}_s$ si $S=\{s\}$); $\mathcal{B}_S$ y $\mathcal{Q}_S$ son respectivamente la álgebra y la σ-álgebra generadas en Ω_S por $\mathcal{C}_S$. En lo sucesivo $\mathcal{B}_{(S)}$ y $\mathcal{Q}_{(S)}$ (con $\mathcal{B}_{(S)} = \mathcal{Q}_{(S)} = \mathcal{Q}_{(s)}$ si $S=\{s\}$) son respectivamente la álgebra y la σ-álgebra generadas en Ω_T por la colección $\mathcal{C}_{(S)}$ de todos los conjuntos $\pi_T C_t \in \mathcal{C}_T$ tales que $C_t = \Omega_t$ para cada $t \in T-S$ (se nota que $\mathcal{Q}_{(s)} = \{C_{(s)} \mid C_s \in \mathcal{Q}_s\}$ si $S=\{s\}$ y que la correspondencia $C_{(s)} \leftrightarrow C_s$ es un isomorfismo de $\mathcal{Q}_{(s)}$ y $\mathcal{Q}_s$); se definen $\mathcal{S}_T = \cup_T \mathcal{Q}_{(t)}$ y $\mathcal{S}_S = \cup_S \mathcal{Q}_{(s)}$.

(XIII.2) Proposición. Sea S subconjunto propio de T. a) $\mathcal{C}_T$ y $\mathcal{C}_{(S)}$ son semiálgebras en Ω_T; $\mathcal{B}_T$ y $\mathcal{Q}_T$ (respectivamente $\mathcal{B}_{(S)}$ y $\mathcal{Q}_{(S)}$) son la álgebra y la σ-álgebra generadas en Ω_T por $\mathcal{S}_T$ (respectivamente $\mathcal{S}_S$). b) Si $A \in \mathcal{B}_T$ (respectivamente $A \in \mathcal{Q}_T$) y $\nu \in \Omega_S$, entonces $A_\nu \in \mathcal{B}_{T-S}$ (respectivamente $A_\nu \in \mathcal{Q}_{T-S}$). c)

$\mathcal{B}_{(S)}$ (respectivamente $\mathcal{Q}_{(S)}$) es la colección de todos los conjuntos $A \in \mathcal{B}_T$ (respectivamente $A \in \mathcal{Q}_T$) que son independientes de cada $u \in T-S$.

Demostración. Para $\Gamma \in \{S, T\}$ considérese $\mathcal{G}'_\Gamma = \mathcal{G}_\Gamma \cup \{\Omega_T - G \mid G \in \mathcal{G}_\Gamma\} \cup \{\phi, \Omega_T\}$. Puesto que $\Omega_T - C_{(t)} = C'_{(t)}$ si $C'_t = \Omega_t - C_t$ y $\phi = \phi_{(t)}$, $\Omega_T = \Omega_{(t)}$ para cada $t \in T$, se tiene $\mathcal{G}_\Gamma = \mathcal{G}'_\Gamma$; en consecuencia, teniendo en cuenta que $\mathcal{E}_T = \{\bigcap_J G_j \mid J$ conjunto finito, $G_j \in \mathcal{G}_T \ (j \in J)\}$ y $\mathcal{E}_{(S)} = \{\bigcap_J G_j \mid J$ conjunto finito, $G_j \in \mathcal{G}_S \ (j \in J)\}$, la parte a) se sigue de (I.4).

Sea $\mathcal{B}$ (respectivamente $\mathcal{Q}$) la colección de todos los subconjuntos A de Ω_T tales que $A_\nu \in \mathcal{B}_{T-S}$ (respectivamente $A_\nu \in \mathcal{Q}_{T-S}$) para cada $\nu \in \Omega_S$; es claro que $\mathcal{B} \subset \mathcal{Q}$. Puesto que $(\pi_T C_t)_\nu = \pi_{T-S} C_t$ si $\nu \in \pi_S C_s$ y $(\pi_T C_t)_\nu = \phi$ si $\nu \in \Omega_S - \pi_S C_s$, se tiene $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{B}$. Mediante a) y b) de (XIII.1) se sigue que $\mathcal{B}$ es álgebra en Ω_T y $\mathcal{Q}$ es σ-álgebra en Ω_T; por consiguiente, de acuerdo con la segunda parte de a) de (XIII.2), se tiene $\mathcal{B}_T \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{Q}_T \subset \mathcal{Q}$.

Sea $\mathcal{B}'$ (respectivamente $\mathcal{Q}'$) la colección de todos los conjuntos $A \in \mathcal{B}_T$ (respectivamente $A \in \mathcal{Q}_T$) que son independientes de cada $u \in T-S$; es claro que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{Q}'$. Si $s \in S$ y $C_s \subset \Omega_s$, entonces $C_{(s)}$ es independiente de cada $u \in T-S$; por lo tanto, de $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{B}_T$ se sigue que $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{B}'$; mediante a) y b) de (XIII.1), teniendo en cuenta que $\mathcal{B}_T$ es álgebra en Ω_T y $\mathcal{A}_T$ es σ-álgebra en Ω_T, se sigue que $\mathcal{B}'$ es álgebra en Ω_T y $\mathcal{A}'$ es σ-álgebra en Ω_T; por consiguiente, de acuerdo con la segunda parte de a) de (XIII.2), se tiene $\mathcal{B}_{(S)} \subset \mathcal{B}'$ y $\mathcal{A}_{(S)} \subset \mathcal{A}'$. Ahora considérense $\mu \in \Omega_{T-S}$ (μ fijo), $\mathcal{B}'_S = \{A_\mu \mid A \in \mathcal{B}'\}$, $\mathcal{B}''_S = \{A_\mu \mid A \in \mathcal{B}_{(S)}\}$, $\mathcal{A}'_S = \{A_\mu \mid A \in \mathcal{A}'\}$ y $\mathcal{A}''_S = \{A_\mu \mid A \in \mathcal{A}_{(S)}\}$; puesto que $\mathcal{B}_{(S)} \subset \mathcal{A}_{(S)}$, se tiene $\mathcal{B}''_S \subset \mathcal{A}''_S$; de $\mathcal{B}_{(S)} \subset \mathcal{B}'$, $\mathcal{A}_{(S)} \subset \mathcal{A}'$ y b) de (XIII.2) se sigue que $\mathcal{B}''_S \subset \mathcal{B}'_S \subset \mathcal{B}_S$ y $\mathcal{A}''_S \subset \mathcal{A}'_S \subset \mathcal{A}_S$; mediante a) y b) de (XIII.1), teniendo en cuenta que $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}_{(S)}$ son álgebras en Ω_T y $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_{(S)}$ son σ-álgebras en Ω_T, se sigue que $\mathcal{B}'_S$, $\mathcal{B}''_S$ son álgebras en Ω_S y $\mathcal{A}'_S$, $\mathcal{A}''_S$ son σ-álgebras en Ω_S; por consiguiente, de $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{B}''_S$ (si $\pi_S C_s \in \mathcal{C}_S$ y $C_t = \Omega_t$ para cada $t \in T-S$, entonces $\pi_T C_t \in \mathcal{C}_{(S)} \subset \mathcal{B}_{(S)}$ y $(\pi_T C_t)_\mu = \pi_S C_s$) se sigue que $\mathcal{B}''_S = \mathcal{B}'_S = \mathcal{B}_S$ y $\mathcal{A}''_S = \mathcal{A}'_S = \mathcal{A}_S$; esto demuestra que: $A \in \mathcal{B}'$ $(A \in \mathcal{A}') \Rightarrow A_\mu \in \mathcal{B}''_S$ $(A_\mu \in \mathcal{A}''_S) \Rightarrow A \in \mathcal{B}_{(S)}$ $(A \in \mathcal{A}_{(S)})$.

(XIII.3) Corolario. Sea S subconjunto propio de T. Si X es variable aleatoria en $(\Omega_T, \mathcal{A}_T)$ y $\nu \in \Omega_S$, entonces X_ν es variable aleatoria en $(\Omega_{T-S}, \mathcal{Q}_{T-S})$.

Demostración. De acuerdo con b) de (XIII.2), se tiene $[X_y < x] = [X < x]_y \in \mathcal{Q}_{T-S}$ para cada $x \in]-\infty, \infty[$.

(XIII.4) Proposición. *Supóngase que T es infinito. Si $\mathfrak{F}$ (respectivamente $\mathfrak{N}$) es la colección de todos los subconjuntos finitos no vacíos (respectivamente numerables) de T, entonces $\mathcal{B}_T = \cup_{\mathfrak{F}} \mathcal{B}_{(S)}$, $\cup_{\mathfrak{F}} \mathcal{Q}_{(S)}$ es álgebra en Ω_T, $\mathcal{Q}_T$ es la σ-álgebra generada en Ω_T por $\cup_{\mathfrak{F}} \mathcal{Q}_{(S)}$ y $\mathcal{Q}_T = \cup_{\mathfrak{N}} \mathcal{Q}_{(S)}$ (se acepta que $\mathcal{Q}_{(T)} = \mathcal{Q}_T$).*

Demostración. Considérense $\mathcal{B} = \cup_{\mathfrak{F}} \mathcal{B}_{(S)}$, $\mathcal{B}' = \cup_{\mathfrak{F}} \mathcal{Q}_{(S)}$ y $\mathcal{Q} = \cup_{\mathfrak{N}} \mathcal{Q}_{(S)}$. De acuerdo con la segunda parte de a) de (XIII.2), se tiene $\mathcal{S}_S \subset \mathcal{B}_{(S)} \subset \mathcal{B}_{(S')} \subset \mathcal{B}_T$ y $\mathcal{S}_S \subset \mathcal{Q}_{(S)} \subset \mathcal{Q}_{(S')} \subset \mathcal{Q}_T$ si S, S' son subconjuntos no vacíos de T y $S \subset S'$; en consecuencia, teniendo en cuenta que $\mathcal{S}_T = \cup_{\mathfrak{F}} \mathcal{S}_S = \cup_{\mathfrak{N}} \mathcal{S}_S$, resulta que $\mathcal{S}_T \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_T$ y $\mathcal{S}_T \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_T$; por consiguiente, basta demostrar que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son álgebras en Ω_T y que $\mathcal{Q}$ es σ-álgebra en Ω_T.

Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $S, S' \in \mathfrak{F}$ son tales que $A \in \mathcal{B}_{(S)}$ y $B \in \mathcal{B}_{(S')}$, entonces $A, B \in \mathcal{B}_{(S \cup S')}$ y $S \cup S' \in \mathfrak{F}$, en consecuencia $A - B, AB \in \mathcal{B}$; por consiguiente, $\mathcal{B}$ es álgebra en Ω_T. De igual manera se demues tra que $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{Q}$ son álgebras en Ω_T; si $\{A^n\}$ es sucesión en $\mathcal{Q}$, $\{S^n\}$ es sucesión en $\mathfrak{N}$ tal que $A^n \in \mathcal{Q}_{(S^n)}$ y $S = \cup_n S^n$, entonces $\{A^n\}$ es sucesión en $\mathcal{Q}_{(S)}$ y $S \in \mathfrak{N}$, en consecuencia $\cup_n A^n \in \mathcal{Q}$.

(XIII.5) Corolario. Supóngase que T es infinito. a) Si $A \in \mathcal{B}_T$ (respectivamente $A \in \mathcal{Q}_T$), entonces $\{s \in T \mid A \text{ depende de } s\}$ es finito (respectivamente a lo más numerable). b) Si X es variable aleatoria en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_T)$, entonces $\{s \in T \mid X \text{ depende de } s\}$ es a lo más numerable.

Demostración. La parte a) se sigue de las igualdades de (XIII.4) y de c) de (XIII.2). De a) de (XIII.5) y la igualdad $\mathcal{Q}_T = \cup_{\mathfrak{N}} \mathcal{Q}_{(S)}$ se sigue que la parte b) es válida si X es función $\mathcal{Q}_T$-simple; en consecuencia, por dicha igualdad y c) de (IX.4) se tiene la validez de la parte b).

XIV. Producto Tensorial de Espacios Probabilistas.

Sea T conjunto de cardinalidad mayor que 1; para cada $t \in T$ se considera un espacio probabilista $(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$.

(XIV.1) Lema. Existe una función positiva y aditiva P_T

de dominio $\mathcal{B}_T$, y sólo una, tal que $P_T(\cap_S C_{(s)}) = \Pi_S P_s(C_s)$ si S es subconjunto finito no vacío de T y $C_s \in \mathcal{C}_s$ para cada $s \in S$.

Demostración. Si $C = \Pi_T C_t \in \mathcal{C}_T$ y S es subconjunto finito no vacío de T tal que $C_t = \Omega_t$ para cada $t \in T-S$, entonces se define $P_T'(C) = \Pi_S P_s(C_s)$; puesto que $C = \cap_S C_{(s)}$, se tiene $P_T'(\cap_S C_{(s)}) = \Pi_S P_s(C_s)$. Supóngase que S, S' son subconjuntos finitos no vacíos de T y que $C_t, C_t' \in \mathcal{C}_t$ $(t \in T)$ son tales que $\Pi_T C_t = \Pi_T C_t'$, $C_t = \Omega_t$ si $t \in T-S$ y $C_t' = \Omega_t$ si $t \in T-S'$; puesto que $C_s = C_s'$ si $s \in SS'$ (se nota que $SS' = \phi$ equivale a $\Pi_T C_t = \Omega_T$; en este caso se tiene $\Pi_S P_s(C_s) = \Pi_{S'} P_s(C_s') = 1$) y $C_s = C_s' = \Omega_s$ si $s \in (S-S') + (S'-S)$, se tiene $\Pi_S P_s(C_s) = \Pi_{SS'} P_s(C_s) = \Pi_{SS'} P_s(C_s') = \Pi_{S'} P_s(C_s')$; esto demuestra que P_T' es función positiva de dominio $\mathcal{C}_T$. De acuerdo con (I.3), (XIII.5) y la primera parte de a) de (XIII.2), únicamente falta demostrar que P_T' es aditiva.

Considérense $\Pi_T C_t$, $\Pi_T C_t^j \in \mathcal{C}_T$ $(j = 1, \dots, m)$ tales que $\Pi_T C_t = \Sigma_j \Pi_T C_t^j$ y un subconjunto finito no vacío S de T tal que $C_t = C_t^j = \Omega_t$ si $t \in T-S$ (se nota que que $\Pi_T C_t = \cap_S C_{(s)}$ y $\Pi_T C_t^j =$

$\cap_S C^j_{(\Delta)}$). Sean I_Δ, I^j_Δ, $I_{(\Delta)}$ e $I^j_{(\Delta)}$ ($\Delta \in S$) respectivamente los indicadores de C_Δ, C^j_Δ, $C_{(\Delta)}$ y $C^j_{(\Delta)}$ (el dominio de I_Δ e I^j_Δ es Ω_Δ, el dominio de $I_{(\Delta)}$ e $I^j_{(\Delta)}$ es Ω_T); si S' es subconjunto no vacío de S, entonces se definen las funciones $\pi_{S'} I_\Delta$ y $\pi_{S'} I^j_\Delta$ de dominio $\Omega_{S'}$ por $\pi_{S'} I_\Delta(\omega_\Delta, \Delta \in S') = \pi_{S'} I_\Delta(\omega_\Delta)$ y $\pi_{S'} I^j_\Delta(\omega_\Delta, \Delta \in S') = \pi_{S'} I^j_\Delta(\omega_\Delta)$. Puesto que $\cap_S C_{(\Delta)} = \Sigma_j \cap_S C^j_{(\Delta)}$, se tiene $\pi_S I_{(\Delta)} = \Sigma_j \pi_S I^j_{(\Delta)}$; en consecuencia, teniendo en cuenta que $\pi_S C_\Delta = \Sigma_j \pi_S C^j_\Delta$, resulta que $\pi_S I_\Delta = \Sigma_j \pi_S I^j_\Delta$.

Supóngase que $S = \{\Delta\}$; en este caso, puesto que $I_\Delta = \Sigma_j I^j_\Delta$, mediante la definición de P'_T y (IX.1) se obtiene $P'_T(\pi_T C_t) = P_\Delta(C_\Delta) = \Sigma_j P_\Delta(C_j) = \Sigma_j P'_T(\pi_T C^j_t)$. Ahora supóngase que $S = \{\Delta\} + S'$ y que $S' \neq \phi$; de $\pi_S I_t = \Sigma_j \pi_S I^j_t$ se sigue que $[\pi_{S'} I_t(\omega_t)] I_\Delta = \Sigma_j [\pi_{S'} I^j_t(\omega_t)] I^j_\Delta$ para cada $(\omega_t, t \in S') \in \Omega_{S'}$; en consecuencia, mediante (IX.1) se obtiene $[\pi_{S'} I_t(\omega_t)] P_\Delta(C_\Delta) = \Sigma_j [\pi_{S'} I^j_t(\omega_t)] P_\Delta(C^j_\Delta)$ para cada $(\omega_t, t \in S') \in \Omega_{S'}$, por lo tanto $P_\Delta(C_\Delta) \pi_{S'} I_t = \Sigma_j P_\Delta(C^j_\Delta) \pi_{S'} I^j_t$ (en el caso en que $S' = \{u\}$, mediante la definición de P'_T y (IX.1), se sigue que $P'_T(\pi_T C_t) = \Sigma_j P'_T(\pi_T C^j_t)$). Del mismo modo, suponiendo que $S' = \{u\} + S''$ y que $S'' \neq \phi$, de $P_\lambda(C_\lambda)\pi_{S'} I_t = \Sigma_j P_\lambda(C^j_\lambda)\pi_{S'} I^j_t$ se sigue que $P_\lambda(C_\lambda)P_\mu(C_\mu)\pi_{S''} I_t = \Sigma_j P_\lambda(C^j_\lambda)P_\mu(C^j_\mu)\pi_{S''} I^j_t$; en esta forma, puesto que S es finito, se obtiene $P'_T(\pi_T C_t) = \Sigma_j P'_T(\pi_T C^j_t)$.

(XIV.2) Corolario. Sean S y T^j ($j=1,\dots,m$) subconjuntos propios de T. a) Existe una función positiva y aditiva P_S (con $P_S = P_\lambda$ si $S=\{\lambda\}$) de dominio $\mathcal{B}_S$, y sólo una, tal que $P_S(\pi_S C_\lambda) = \pi_{S'} P_\lambda(C_\lambda)$ si S' es subconjunto finito no vacío de S tal que $\pi_{S'} C_\lambda \in \mathcal{C}_{S'}$ y $\pi_{S-S'} C_\lambda = \Omega_{S-S'}$ cuando $S' \neq S$. b) Si $T = \Sigma_j T^j$, entonces $P_T(\pi_T C_t) = \Pi_j P_{T^j}(\pi_{T^j} C_t)$ para cada $\pi_T C_t \in \mathcal{C}_T$. c) Si $A \in \mathcal{B}_T$ y A es independiente de cada $\mu \in T-S$, entonces $P_T(A) = P_S(A_\mu)$ para cada $\mu \in \Omega_{T-S}$.

Demostración. Si S es de cardinalidad mayor que 1, entonces la parte a) es el lema (XIV.1) con S en lugar de T; si $S=\{\lambda\}$, entonces la parte a) se sigue de $\mathcal{C}_S = \mathcal{B}_S = \mathcal{B}_\lambda$. En la parte b) considérense $\pi_T C_t \in \mathcal{C}_T$ y un subconjunto finito no vacío S de T tal que $\pi_{T-S} C_t = \Omega_{T-S}$ si T es infinito ó $S=T$ si T es finito; si $T^j S = \phi$, entonces se define $\pi_{T^j S} P_\lambda(C_\lambda) = 1$; puesto que $S = \Sigma_j T^j S$ y $\pi_{T^j S} C_\lambda \in \mathcal{C}_{T^j S}$, $\pi_{T^j - S} C_t = \Omega_{T^j - S}$ si $T^j - S \neq \phi$ (se nota que $T^j - S = T^j - T^j S$), se tiene $P_T(\pi_T C_t) = \pi_S P_s(C_s) = \pi_j \pi_{T^j S} P_s(C_s) = \pi_j P_{T^j}(\pi_{T^j} C_t)$. Finalmente, de acuerdo con c) de (XIV.2) se consideran $\pi_T C_t^j \in \mathcal{C}_{(S)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ tales que $A = \Sigma_j \pi_T C_t^j$, puesto que $P_T(\pi_T C_t^j) = P_S(\pi_S C_s^j)$ y $A\mu = \Sigma_j \pi_S C_s^j$ si $\mu \in \Omega_{T-S}$, se tiene $P_T(A) = \Sigma_j P_S(\pi_S C_s^j) = P_S(A\mu)$.

(XIV.3) *Lema.* Sean P_T la función de (XIV.1) y $\varepsilon \in]0, 1[$, $A \in \mathcal{B}_T$ tales que $P_T(A) > \varepsilon$; para $s \in T$ se define $A_s = \{\omega \in \Omega_s | P_{T-\{s\}}(A_\omega) > 2^{-1}\varepsilon\}$. Si A depende de s, entonces $A_s \in \mathcal{B}_s$ y $P_s(A_s) > 2^{-1}\varepsilon$.

Demostración. Considérense un conjunto finito no vacío K y $\pi_T C_t^k \in \mathcal{C}_T$ $(k \in K)$ tales que $A = \Sigma_K \pi_T C_t^k$; si J es subconjunto no vacío de K, entonces se define $C_s^J = \bigcap_J C_s^j - \bigcup_{K-J} C_s^k$ (con $C_s^K = \bigcap_K C_s^k$). Sea $\mathbb{K}$ la colección de todos los subconjuntos no vacíos J de K tales que $C_s^J \neq \phi$; si $J \in \mathbb{K}$, entonces se definen $D_s^j = C_s^J$ para cada $j \in J$ (se nota que $D_s^i = D_s^j$ si $i, j \in J$) y $D_t^j = C_t^j$ $(j \in J)$ para cada $t \in T - \{s\}$.

Los rectángulos $\pi_T D_t^j$ $(j \in J)$ son subconjuntos ajenos de A $(\pi_T D_t^j \subset \pi_T C_t^j)$ y pertenecen a $\mathcal{C}_T$ $(C_s^J \in \mathcal{B}_s)$, las uniones

$\Sigma_J \pi_T D_t^j$ $(J \in \mathbb{K})$ son conjuntos ajenos ($\Sigma_J \pi_T D_t^j \subset C_{\{s\}}^J$ y los conjuntos C_s^J son ajenos) y $A = \Sigma_{\mathbb{K}} \Sigma_J \pi_T D_t^j$ ($(\omega_t, t \in T) \in A$, $J = \{j \in \mathbb{K} \mid \omega_s \in C_s^j\} \Rightarrow \omega_s \in C_s^J$ y $(\omega_t, t \in T) \in \pi_T C_t^j$ para algún $j \in J \Rightarrow$ $(\omega_t, t \in T) \in \Sigma_J \pi_T D_t^j$); por lo tanto

$$P_T(A) = \Sigma_{\mathbb{K}} \Sigma_J P_s(D_s^j) P_{T-\{s\}}(\pi_{T-\{s\}} D_t^j)$$
$$= \Sigma_{\mathbb{K}} P_s(C_s^J) \Sigma_J P_{T-\{s\}}(\pi_{T-\{s\}} C_t^j).$$

Para $J \in \mathbb{K}$ los conjuntos $\pi_{T-\{s\}} C_t^j$ $(j \in J)$ son ajenos ($\omega_s \in C_s^J$, $(\omega_t, t \in T-\{s\}) \in \pi_{T-\{s\}} C_t^i C_t^j$ con $i \in J$ y $j \in J-\{i\} \Rightarrow (\omega_t, t \in T)$ $\in \pi_T C_t^i C_t^j = \phi$) y $A_\omega = \Sigma_J \pi_{T-\{s\}} C_t^j$ para cada $\omega \in C_s^J$; en consecuencia, con $\omega^J \in C_s^J$ $(J \in \mathbb{K})$ se tiene

$$P_T(A) = \Sigma_{\mathbb{K}} P_s(C_s^J) P_{T-\{s\}}(A_{\omega^J})$$

lo cual implica que $A_s \neq \phi$ (contrariamente, puesto que los conjuntos C_s^J son ajenos, se tendría $\varepsilon < P_T(A) \leq \Sigma_{\mathbb{K}} P_s(C_s^J) 2^{-1}\varepsilon \leq 2^{-1}\varepsilon$). Por consiguiente, con $\mathbb{K}_1 = \{J \in \mathbb{K} \mid P_{T-\{s\}}(A_{\omega^J}) > 2^{-1}\varepsilon\}$ y $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K} - \mathbb{K}_1$ se tiene $A_s = \Sigma_{\mathbb{K}_1} C_s^J$ y $\Sigma_{\mathbb{K}_2} C_s^J \subset \Omega_s - A_s$; por lo tanto $A_s \in \mathcal{Q}_s$ y

$$\varepsilon < P_T(A) \leq \Sigma_{\mathbb{K}_1} P_s(C_s^J) + 2^{-1}\varepsilon\, \Sigma_{\mathbb{K}_2} P_s(C_s^J)$$
$$\leq P_s(A_s) + 2^{-1}\varepsilon\,[1 - P_s(A_s)]$$

de lo cual se sigue que $P_s(A_s) > 2^{-1}\varepsilon$.

(XIV.4) Proposición. a) Existe una probabilidad P_T sobre $\mathcal{Q}_T$, y sólo una, tal que $P_T(\cap_S C_{(s)}) = \prod_S P_s(C_s)$ si S es subconjunto finito no vacío de T y $C_s \in \mathcal{Q}_s$ para cada $s \in S$; $(\mathcal{Q}_{(t)}, t \in T)$ es independiente según P_T. b) Si P es probabilidad sobre $\mathcal{Q}_T$ tal que $(\mathcal{Q}_{(t)}, t \in T)$ es independiente según P y $P(C_{(t)}) = P_t(C_t)$ para cada $C_t \in \mathcal{Q}_t$ y cada $t \in T$, entonces $P = P_T$.

Demostración. Supóngase que la función P_T de (XIV.1) es es probabilidad sobre $\mathcal{B}_T$ y considérese, de acuerdo con (IX.3), la probabilidad P_T' sobre $\mathcal{Q}_T$ tal que $P_T'(B) = P_T(B)$ para cada $B \in \mathcal{B}_T$; si $A \in \mathcal{Q}_T$ y $A \notin \mathcal{B}_T$, entonces se define $P_T(A) = P_T'(A)$. En consecuencia, por la definición de independencia de $(\mathcal{Q}_{(t)}, t \in T)$ según una probabilidad sobre $\mathcal{Q}_T$, basta demostrar que P_T es continua en ϕ.

Sea $\{A^n\}$ sucesión en $\mathcal{B}_T$ tal que $A^n \downarrow A$; con la hipótesis de que $\lim_n P_T(A^n) \neq 0$, que equivale a la existencia de $\alpha > 0$ tal que $P_T(A^n) > \alpha$ para cada n, se demostrará que $A \neq \phi$. Para cada n se considera $S^n = \{s \in T \mid A^n \text{ depende de } s\}$; se supone que $S = \cup_n S^n$ es no vacío (por c) de (XIII.1) se tiene $A^n = \Omega_T$

si $S^n=\phi$) y se numeran sus elementos (por a) de (XIII.5) cada S^n es finito), en esta forma se tiene $S=\{s_1, s_2, \ldots\}$; para cada entero positivo k (tal que $s_k \in S$ si S es finito) se considera $S_k = \{s_1, \ldots, s_k\}$ y se definen $\Omega_k = \Omega_{s_k}$, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_{s_k}$, $P_k = P_{s_k}$ y $P^k = P_{T-S_k}$ (si $S_k \neq T$).

Considérese $A_1^n = \{\omega \in \Omega_1 \mid P^1(A_\omega^n) > 2^{-1}\alpha\}$; puesto que $A_\omega^n \supset A_\omega^{n+1}$ ($\omega \in \Omega_1$), se tiene $A_1^n \supset A_1^{n+1}$. Si A^n depende de s_1, entonces $A_1^n \in \mathcal{Q}_1$ y $P_1(A_1^n) > 2^{-1}\alpha$ (por (XIV.3)); si A^n es independiente de s_1, entonces $A_1^n = \Omega_1$ (por c) de (XIII.1)) y $P^1(A_\omega^n) > \alpha$ para cada $\omega \in \Omega_1$ (por c) de (XIV.2)); en consecuencia, se tiene $\lim_n P_1(A_1^n) \geq 2^{-1}\alpha$. Teniendo en cuenta que P_1 es probabilidad sobre $\mathcal{Q}_1$, de lo anterior se sigue que $\bigcap_n A_1^n \neq \phi$; por consiguiente, existe $\omega_{s_1}^* = \omega \in \Omega_1$ ($\omega \in \bigcap_n A_1^n$) tal que $P^1(A_\omega^n) > 2^{-m}\alpha$ si $S_1 S^n$ consta de m elementos ($0 \leq m \leq 1$).

Para un entero positivo k supóngase (hipótesis de inducción finita) que $S_k \neq T$ y que existe $\mu_k = (\omega_s^*, s \in S_k) \in \Omega_{S_k}$ tal que $P^k(A_{\mu_k}^n) > 2^{-m}\alpha$ si $S_k S^n$ consta de m elementos ($0 \leq m \leq k$). Si $S_{k+1} = T$, entonces $\{A_{\mu_k}^n\}$ es sucesión en $\mathcal{Q}_{k+1}$ tal que $A_{\mu_k}^n \supset A_{\mu_k}^{n+1}$

y $P_{k+1}(A^n_{\mu_k}) > 2^{-k}\alpha$ para cada n; en este caso, puesto que $\cap_n A^n_{\mu_k} \neq \phi$ (esto se sigue de lo anterior teniendo en cuenta que P_{k+1} es probabilidad sobre $\mathcal{Q}_{k+1}$), existe $\omega^*_{s_{k+1}} \in \Omega_{k+1}$ tal que $(\omega^*_s, s\in T) \in A^n$ para cada n. Para el caso en que $S_{k+1} \neq T$, considérese $A^n_{k+1} = \{\omega \in \Omega_{k+1} \mid P^{k+1}((A^n_{\mu_k})\omega) > 2^{-1}2^{-m}\alpha\}$ donde m es el número de elementos pertenecientes a $S_k S^n$, es claro que $A^n_{k+1} \supset A^{n+1}_{k+1}$; si $A^n_{\mu_k}$ depende de s_{k+1}, entonces $A^n_{k+1} \in \mathcal{Q}_{k+1}$ y $P_{k+1}(A^n_{k+1}) > 2^{-m-1}\alpha$ (por (XII.3)); si $A^n_{\mu_k}$ es independiente de s_{k+1}, entonces $A^n_{k+1} = \Omega_{k+1}$ (por c) de (XIII.1)) y $P^{k+1}((A^n_{\mu_k})\omega) > 2^{-m}\alpha$ para cada $\omega \in \Omega_{k+1}$ (por c) de (XIV.2)); por consiguiente, se concluye (como antes) que existe $\omega^*_{s_{k+1}} \in \Omega_{k+1}$ ($\omega^*_{s_{k+1}} \in \cap_n A^n_{k+1}$) tal que con $\mu_{k+1} = (\omega^*_s, s \in S_{k+1})$ se tiene $P^{k+1}(A^n_{\mu_{k+1}}) > 2^{-m'}\alpha$ si $S_{k+1}S^n$ consta de m' elementos $(0 \leq m' \leq k+1)$.

Lo anterior demuestra la existencia de $\mu = (\omega^*_s, s\in S) \in \Omega_S$ tal que para cada n se tiene: $\mu \in A^n$ si S es finito y $S=T$ (en este caso se tiene k tal que $S_{k+1}=T$); $\mu \in A^n$ si S es numerable y $S=T$ (supóngase que S^n consta de m elementos y considérese k tal que $S^n \subset S_k$; puesto que $P^k(A^n_{\mu_k}) > 2^{-m}\alpha$, por c) de (XIII.1) se tiene $A^n_{\bar\mu_m} = \Omega_{T-S_m}$); $A^n_{\bar\mu} = \Omega_{T-S}$ si $S \neq T$ (como en el caso anterior, mediante c) de (XIX.2) se obtiene $P_{T-S}(A^n_{\bar\mu}) > 2^{-m}\alpha$ y en consecuencia $A^n_{\bar\mu} = \Omega_{T-S}$). Por consiguiente, se tiene $A \neq \phi$.

(XIX.5) Proposición (Teorema de Fubini). Sea S subconjunto propio de T; si $x \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$, entonces se consideran $A_S = \{\nu \in \Omega_S \mid x_\nu \in \mathcal{L}_1(\Omega_{T-S}, \mathcal{B}_{T-S}, P_{T-S})\}$ y la función x_S de dominio Ω_S definida por $x_S(\nu) = \int x_\nu \, dP_{T-S}$ para cada $\nu \in A_S$ y $x_S(\nu) = 0$ para cada $\nu \in \Omega_S - A_S$. Si $x \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$, entonces $A_S \in \mathcal{B}_S$, $P_S(A_S) = 1$, $x_S \in \mathcal{L}_1(\Omega_S, \mathcal{B}_S, P_S)$ y $\int x \, dP_T = \int x_S \, dP_S$.

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ el espacio de todas las variables aleatorias $x \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$ tales que $A_S \in \mathcal{B}_S$, $P_S(A_S) = 1$, $x_S \in \mathcal{L}_1(\Omega_S, \mathcal{B}_S, P_S)$ y $\int x \, dP_T = \int x_S \, dP_S$. Si x es variable aleatoria en $(\Omega_T, \mathcal{B}_T)$ positiva y acotada, entonces $A_S = \Omega_S$; en efecto: x_ν $(\nu \in \Omega_S)$ es variable aleatoria (por (XIX.3)) en $(\Omega_{T-S}, \mathcal{B}_{T-S})$ positiva y acotada.

Supóngase que $x^n \in \mathcal{L}$ (n entero positivo) y que x^n es positiva y acotada. Si $a^j \in [0, \infty[$ $(j = 1, \ldots, m)$, entonces $\sum_j a^j x^j \in \mathcal{L}$, en efecto: de $(\sum_j a^j x^j)_\nu = \sum_j a^j x^j_\nu$ $(\nu \in \Omega_S)$ se sigue que $(\sum_j a^j x^j)_S = \sum_j a^j x^j_S \in \mathcal{L}_1(\Omega_S, \mathcal{B}_S, P_S)$ y $\int (\sum_j a^j x^j) \, dP_T = \sum_j a^j \int x^j_S \, dP_S = \int (\sum_j a^j x^j)_S \, dP_S$.

Si $X^n \uparrow X$, entonces $X \in \mathcal{L}$; en efecto: de $X^n_\nu \uparrow X_\nu$ ($\nu \in \Omega_S$) se sigue que $X^n_S \uparrow X_S$ y $\int X dP_T = \lim_n \int X^n dP_T = \lim_n \int X^n_S dP_S = \int X_S dP_S$. Si $X^n \uparrow X$ y $X \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$, entonces $X \in \mathcal{L}$; en efecto: de $X^n_\nu \uparrow X_\nu$ ($\nu \in \Omega_S$) y $A_S = \{\nu \in \Omega_S \mid X_\nu \in \mathcal{L}_1(\Omega_{T-S}, \mathcal{Q}_{T-S}, P_{T-S})\}$ se sigue que $X^n_S \leq X^{n+1}_S$ y $A_S = [\sup_n X^n_S < \infty]$ (porque $\int X_\nu dP_{T-S} < \infty$ equivale a $\sup_n \int X^n_\nu dP_{T-S} = \sup_n X^n_S(\nu) < \infty$), en consecuencia, mediante $\int X^n_S dP_S = \int X^n dP_T \uparrow \int X dP_T$ y b) de (XII.8) se obtiene $A_S \in \mathcal{Q}_S$ y $P_S(A_S) = 1$; por consiguiente, teniendo en cuenta que $X^n_S I_{A_S} \uparrow X_S$ y que $\int X^n_S I_{A_S} dP_S = \int X^n_S dP_S$ (por b) de (IX.5)), resulta que X_S es variable aleatoria en $(\Omega_S, \mathcal{Q}_S)$ positiva y $\int X dP_T = \int X_S dP_S$.

Sea $\mathcal{Q}$ la colección de todos los conjuntos $A \in \mathcal{Q}_T$ tales que $I_A \in \mathcal{L}$. Considérese el caso en que X es el indicador de $\pi_T C_t \in \mathcal{C}_T$; puesto que X_ν es el indicador de $\pi_{T-S} C_t$ si $\nu \in \pi_S C_s$ y $X_\nu = 0$ si $\nu \in \Omega_S - \pi_S C_s$, se tiene $X_S = P_{T-S}(\pi_{T-S} C_t) I_{\pi_S C_s}$; por lo tanto, X_S es funcion $\mathcal{B}_S$-simple y mediante b) de (XII.2) se obtiene $\int X dP_T = P_{T-S}(\pi_{T-S} C_t) P_S(\pi_S C_s) = \int X_S dP_S$; por consiguiente, se tiene $\mathcal{C}_T \subset \mathcal{Q}$. Puesto que $\mathcal{C}_T \subset \mathcal{Q}$, del párrafo anterior se sigue que $\mathcal{B}_T \subset \mathcal{Q}$ y que $\mathcal{Q}$ es clase monótona; por lo tanto, se tiene $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_T$; aplicando nuevamente el párrafo anterior, resulta que $\mathcal{L}$ contiene al espacio de todas las funciones $\mathcal{Q}_T$-simples positivas; por consiguiente, de dicho párrafo se sigue que $X \in \mathcal{L}$ si $0 \leq X \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$. Para $X \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$, considérense $A_S^+ = \{\nu \in \Omega_S \mid \int X_\nu^+ dP_{T-S} < \infty\}$ y $A_S^- = \{\nu \in \Omega_S \mid \int X_\nu^- dP_{T-S} < \infty\}$; puesto que $X^+, X^- \in \mathcal{L}$, de $X_\nu = X_\nu^+ - X_\nu^-$ $(\nu \in \Omega_S)$ se sigue que $A_S = A_S^+ A_S^-$ y $X_S = (X_S^+ - X_S^-) I_{A_S}$; por consiguiente, de acuerdo con b) de (IX.5) resulta que $A_S \in \mathcal{Q}_S$, $P_S(A_S) = 1$, $X_S \in \mathcal{L}_1(\Omega_S, \mathcal{Q}_S, P_S)$ y $\int X dP_T = \int (X^+ - X^-) dP_T = \int (X_S^+ - X_S^-) dP_S = \int X_S dP_S$.

(IX.6) Corolario. Sean X_Λ $(\Lambda \in T)$ función real de dominio Ω_Λ y X^Λ la función definida en Ω_T por $X^\Lambda(\omega_t, t \in T) = X_\Lambda(\omega_\Lambda)$. a) Para que X^Λ sea variable aleatoria en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_{(\Lambda)})$, es necesario y suficiente que X_Λ sea variable aleatoria en $(\Omega_\Lambda, \mathcal{Q}_\Lambda)$. b) Sean S_λ $(\lambda \in \Delta)$ subconjunto finito no vacío de T y X_Λ variable aleatoria en $(\Omega_\Lambda, \mathcal{Q}_\Lambda)$ para cada $\Lambda \in \bigcup_\Delta S_\lambda$; si $S_\lambda S_{\lambda'} = \phi$ para cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \Delta$ $(\lambda \neq \lambda')$, entonces $(\pi_{S_\lambda} X^\Lambda, \lambda \in \Delta)$ es independiente según P_T. c) Sean S subconjunto finito no vacío de T y X_Λ variable aleatoria en $(\Omega_\Lambda, \mathcal{Q}_\Lambda)$ para cada $\Lambda \in S$; si $P_T(\pi_S X^\Lambda \neq 0) \neq 0$, entonces $\pi_S X^\Lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ equivale a $X_\Lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_\Lambda, \mathcal{Q}_\Lambda, P_\Lambda)$ para cada $\Lambda \in S$;

si $X_s \in \mathcal{L}_1(\Omega_s, \mathcal{Q}_s, P_s)$ para cada $s \in S$, entonces $\int \Pi_S X^s dP_T = \Pi_S \int X_s dP_s$.

Demostración. Cuando X^s es variable aleatoria en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_{(s)})$, por (XIII.3) resulta que $X_s = X^s_\nu$ $(\nu \in \Omega_{T-\{s\}})$ es variable aleatoria en $(\Omega_s, \mathcal{Q}_s)$; cuando X_s es variable aleatoria en $(\Omega_s, \mathcal{Q}_s)$ y Δ es un intervalo, se tiene $[X^s \in \Delta] = [X_s \in \Delta]_{(s)} \in \mathcal{Q}_{(s)}$. Puesto que $(\mathcal{Q}_{(t)}, t \in T)$ es independiente según P_T (por a) de (XIV.4)) y $\Pi_{S_\lambda} X^s$ es variable aleatoria en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_{(S_\lambda)})$, la parte b) se sigue de (XI.3) y a) de (XIII.2).

Para $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega_s, \mathcal{Q}_s, P_s)$, considérese la variable aleatoria X en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_T)$ definida por $X(\omega_t, t \in T) = Y(\omega_s)$; cuando Y es $\mathcal{Q}_s$-simple, teniendo en cuenta que $X(\Omega_T) = Y(\Omega_s)$ y que $[X = x] = [Y = x]_{(s)}$ para cada $x \in]-\infty, \infty[$, resulta que $\int X dP_T = \int Y dP_s$ por a) de (XIV.4); cuando $Y \geq 0$ (que equivale a $X \geq 0$) y $\{Y_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{Q}_s$-simples tal que $Y_n \uparrow Y$, considerando la sucesión $\{X_n\}$ de funciones $\mathcal{Q}_T$-simples definida por $X_n(\omega_t, t \in T) = Y_n(\omega_s)$ y teniendo en cuenta que $X_n \uparrow X$, resulta que $\int X dP_T = \lim_n \int X_n dP_T = \lim_n \int Y_n dP_s = \int Y dP_s$; por consiguiente, teniendo en cuenta que $X^+(\omega_t, t \in T) = Y^+(\omega_s)$ y $X^-(\omega_t, t \in T) = Y^-(\omega_s)$, resulta que $X \in$

$\mathcal{L}_1(\Omega_T,\mathcal{B}_T,P_T)$ y que $\int X\,dP_T = \int Y\,dP_S$. Ahora supóngase que $X_s \in \mathcal{L}_1(\Omega_s,\mathcal{B}_s,P_s)$ para cada $s\in S$; puesto que $X^s\in \mathcal{L}_1(\Omega_T,\mathcal{B}_T,P_T)$, $\int X^s\,dP_T = \int X_s\,dP_s$ y $(X^s, s\in S)$ es independiente según P_T (por la parte b)), de acuerdo con (XII.2) se tiene $\Pi_S X^s \in \mathcal{L}_1(\Omega_T,\mathcal{B}_T,P_T)$ y $\int \Pi_S X^s\,dP_T = \Pi_S \int X_s\,dP_s$.

Con la hipótesis de que $P_T(\Pi_S X^s \neq 0) > 0$ y $\Pi_S X^s \in \mathcal{L}_1(\Omega_T,\mathcal{B}_T,P_T)$, para $\mu\in S$ considérense $T' = T-\{\mu\}$, $S' = S-\{\mu\}$, $A_{T'} = \{\nu\in\Omega_{T'} \mid (\Pi_S X^s)_\nu \in \mathcal{L}_1(\Omega_\mu, \mathcal{B}_\mu, P_\mu)\}$ y la variable aleatoria X en $(\Omega_{T'},\mathcal{B}_{T'})$ definida por $X(\nu) = \Pi_{S'} X_s(\nu_s)$ para cada $\nu = (\nu_t, t\in T') \in \Omega_{T'}$ (con $X=1$ si $S'=\phi$). Puesto que $P_{T'}(A_{T'}) = 1$ (por (XIV.5)), se tiene $P_{T'}(A_{T'}[X\neq 0]) = P_{T'}(X\neq 0)$; en consecuencia, de $P_T(\Pi_S X^s \neq 0) = \Pi_S P_s(X_s\neq 0) = P_{T'}(X\neq 0)P_\mu(X_\mu \neq 0) > 0$ se sigue que $A_{T'}[X\neq 0] \neq \phi$; por consiguiente, de $(\Pi_S X^s)_\nu = X(\nu)X_\mu$ se sigue que $\int |X_\mu|\,dP_\mu = |1/X(\nu)| \int |X(\nu)||X_\mu|\,dP_\mu < \infty$ para cada $\nu \in A_{T'}[X\neq 0]$.

De acuerdo con (XII.4), para distinguir P_T de otras probabilidades sobre $\mathcal{B}_T$ (distinción congruente con el producto tensorial de espacios L_2, mismo que se considera en el siguiente capítulo), se dice que P_T es el producto tensorial de las probabilidades P_t $(t\in T)$; también se dice que $(\Omega_T,\mathcal{B}_T,P_T)$ es el producto tensorial de los espacios $(\Omega_t,\mathcal{B}_t,P_t)$.

ESPACIOS DE HILBERT

XV. Integración de Variables Aleatorias Complejas.

Sean $(\Omega, \mathcal{Q})$ espacio medible, X función compleja de dominio Ω y $\operatorname{Re} X$, $\operatorname{Im} X$ respectivamente las partes real e imaginaria de X; se dice que X es variable aleatoria compleja en $(\Omega, \mathcal{Q})$ si $\operatorname{Re} X$ e $\operatorname{Im} X$ son variables aleatorias (reales) en $(\Omega, \mathcal{Q})$.

(XV.1) Proposición. a) Si X es variable aleatoria compleja en $(\Omega, \mathcal{Q})$, entonces $|X|$ es variable aleatoria (positiva) en $(\Omega, \mathcal{Q})$.
b) El espacio de todas las variables aleatorias complejas en $(\Omega, \mathcal{Q})$, con las operaciones usuales (suma y producto definidos puntualmente), es álgebra sobre los complejos; en particular, dicho espacio es espacio vectorial complejo.

Demostración. Sean Y variable aleatoria positiva en $(\Omega, \mathcal{Q})$ y $Y^{1/2}$ la raíz positiva de Y; cuando Y es $\mathcal{Q}$-simple, puesto que $[Y^{1/2} = y] = [Y = y^2]$ para cada $y \in [0, \infty[$, $Y^{1/2}$ es función $\mathcal{Q}$-simple; si $\{Y_n\}$ es sucesión de funciones $\mathcal{Q}$-simples positivas tal que $Y_n \uparrow Y$, entonces $Y^{1/2} = \lim_n Y_n^{1/2}$ es variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{Q})$. La proposición (XV.1) se obtiene de (IV.5): para a) se considera $Y =$

$|\mathcal{R}e\, X|^2+|\mathcal{I}m\, X|^2$; para b) se consideran las igualdades $\mathcal{R}e\,(X+X')=\mathcal{R}e\,X+\mathcal{R}e\,X'$, $\mathcal{I}m\,(X+X')=\mathcal{I}m\,X+\mathcal{I}m\,X'$, $\mathcal{R}e\,(XX')=\mathcal{R}e\,X\,\mathcal{R}e\,X'-\mathcal{I}m\,X\,\mathcal{I}m\,X'$ e $\mathcal{I}m\,(XX')=\mathcal{R}e\,X\,\mathcal{I}m\,X'+\mathcal{I}m\,X\,\mathcal{R}e\,X'$ válidas para funciones complejas X y X' (posiblemente constantes) de dominio Ω.

Sean $(\Omega,\mathcal{Q},P)$ espacio probabilista, i la unidad imaginaria y X variable aleatoria compleja en $(\Omega,\mathcal{Q})$. Se dice que X es integrable con respecto a P si $\int|\mathcal{R}e\,X|dP<\infty$ y $\int|\mathcal{I}m\,X|dP<\infty$; si X es integrable con respecto a P, entonces se define $\int X dP=\int \mathcal{R}e\,X dP+i\int \mathcal{I}m\,X dP$ y se dice que $\int X dP$ es la integral de X con respecto a P. En lo sucesivo, $\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ es el espacio de todas las variables aleatorias complejas en $(\Omega,\mathcal{Q})$ que son integrables con respecto a P.

(XV.2) Proposición. Sean X,Y variables aleatorias complejas en $(\Omega,\mathcal{Q})$ y α un complejo. Si $X,Y\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$, entonces $X+Y$, $\alpha X\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ y $\int(X+Y)dP=\int XdP+\int YdP$, $\int\alpha XdP=\alpha\int XdP$; por consiguiente, $\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ es espacio vectorial complejo.

Demostración. Puesto que la proposición es válida para variables aleatorias reales, también es válida para variables aleatorias complejas por la definición anterior.

(XV.3) Proposición. Sea X variable aleatoria compleja en $(\Omega,\mathcal{Q})$. Si $X\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$, entonces $|\int X\,dP|\leq\int|X|\,dP$; las relaciones $X\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ y $|X|\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ son equivalentes.

Demostración. Considérese el caso en que $X\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$; la relación $|X|\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ se obtiene de $|X|\leq|\mathrm{Re}\,X|+|\mathrm{Im}\,X|$. Para $\alpha=\int X\,dP$, se supone que $\alpha\neq 0$ ($0\leq\int|X|\,dP$ trivialmente) y que $\theta\in[0,2\pi[$ es tal que $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$; puesto que $|\alpha|=\int e^{-i\theta}X\,dP=\mathrm{Re}\int e^{-i\theta}X\,dP=\int\mathrm{Re}\,(e^{-i\theta}X)\,dP$ y $\mathrm{Re}\,(e^{-i\theta}X)\leq|e^{-i\theta}X|=|X|$, se tiene $|\alpha|\leq\int|X|\,dP$. Cuando $|X|\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$, la relación $X\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ se obtiene de $\max(|\mathrm{Re}\,X|,|\mathrm{Im}\,X|)\leq|X|$.

XVI. El Espacio $L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$.

Sean $(\Omega,\mathcal{Q},P)$ espacio probabilista y $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ el espacio de todas las variables aleatorias complejas X en $(\Omega,\mathcal{Q})$ tales que $X^2\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$; sean φ_1 la funcional positiva definida en $\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ por $\varphi_1(X)=\int|X|\,dP$ y φ_2 la funcional positiva definida en $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ por $\varphi_2(X)=[\varphi_1(X^2)]^{1/2}$.

(XVI.1) Proposición. a) Si $X,Y\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$, entonces $XY\in$

$\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P)$, $2P_1(XY) \le P_2^2(X)+P_2^2(Y)$ y $P_1(XY)\le P_2(X)P_2(Y)$; $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ es espacio vectorial complejo. b) P_j $(j=1,2)$ es seminorma y $\mathcal{L}_j(\Omega,\mathcal{A},P)$ es completo con respecto a P_j.

Demostración. De $2|XY| \le |X|^2+|Y|^2$ se sigue que $XY\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ y que $2P_1(XY)\le P_2^2(X)+P_2^2(Y)$, la segunda desigualdad, excepto para el caso trivial (de acuerdo con b) de (IX.4) y a) de (IX.5)) en que $P_2(X)P_2(Y)=0$, se obtiene de $2|XY|/P_2(X)P_2(Y) \le |X/P_2(X)|^2+|Y/P_2(Y)|^2$; la última parte de a) se sigue de $|\alpha X+\beta Y|^2 \le |\alpha X+\beta Y|^2+|\alpha X-\beta Y|^2 = 2|\alpha X|^2+2|\beta Y|^2$. Es claro que $P_j(\alpha X)=|\alpha|P_j(X)$ y que $P_1(X+Y)\le P_1(X)+P_1(Y)$; puesto que $|X+Y|^2=|X|^2+2\,Re(XY)+|Y|^2\le|X|^2+2|XY|+|Y|^2$, de la segunda desigualdad de a) se sigue que $P_2^2(X+Y)\le P_2^2(X)+2P_2(X)P_2(Y)+P_2^2(Y)=[P_2(X)+P_2(Y)]^2$, en consecuencia $P_2(X+Y)\le P_2(X)+P_2(Y)$.

Sea $\{X_n\}$ sucesión $\mathcal{L}_j(\Omega,\mathcal{A},P)$; se supone que $\{X_n\}$ es de Cauchy con respecto a P_j y que $\{n_k\}$ es sucesión estrictamente creciente de enteros positivos (así que $n_k\ge k$) tal que $P_j(X_m-X_n)<4^{-k}$ si $\min(m,n)\ge k$; para cada k se consideran $Y_k=X_{n_k}$ y $A_k=[|Y_k-Y_{k+1}|>2^{-k}]$, también se considera $A=\bigcap_r\bigcup_{k\ge r}A_k$ (r entero positivo). Puesto que $[|X|>\varepsilon]=[|X|^2>\varepsilon^2]$ si $\varepsilon>0$ y X es variable aleatoria compleja en $(\Omega,\mathcal{Q})$, mediante a) de (VII.8) se obtiene $P(A_k)<2^{-2k}$; en consecuencia, teniendo en cuenta que $\sum_{k\geq 1}2^{-2k}$ es convergente, de $P(\cup_{k\geq r}A_k)\leq\sum_{k\geq r}2^{-k}$ se sigue que $P(\cup_{k\geq r}A_k)\downarrow 0$ $(r\uparrow\infty)$, por lo tanto $P(A)=0$. Ahora considérese $\omega\in A^c$ y r tal que $\omega\in\cap_{k\geq r}A_k^c$; si $k\geq r$, entonces $|Y_k(\omega)-Y_{k+m}(\omega)|\leq\sum_{k'=0}^{m-1}|Y_{k+k'}(\omega)-Y_{k+k'+1}(\omega)|\leq\sum_{k'=0}^{m-1}2^{-k-k'}$; puesto que $\sum_{k\geq 1}2^{-k}$ converge, resulta que $\{Y_k(\omega)\}$ es de Cauchy en los complejos. Sea Y la variable aleatoria compleja en $(\Omega,\mathcal{Q})$ definida por $Y=\lim_k I_{A^c}Y_k$; para $m\geq n_K$ (K entero positivo), mediante (VII.7) y (IX.4) se obtiene

$$\begin{aligned}\int|Y-X_m|^j dP &= \int \liminf_k |I_{A^c}Y_k-X_m|^j dP\\ &\leq \liminf_k\int|Y_k-X_m|^j dP\\ &= \liminf_k P_j^j(X_{n_k}-X_m)\leq 4^{-K};\end{aligned}$$

esto demuestra que $Y=(Y-X_m)+X_m\in\mathcal{L}_j(\Omega,\mathcal{Q},P)$ y que $\lim_m P_j(Y-X_m)=0$.

(XVI.2) Proposición. Sean $\mathcal{C}$ colección de subconjuntos de Ω cerrada bajo intersecciones finitas y $\mathcal{L}$ el espacio vectorial complejo generado por $\{I_C\mid C\in\mathcal{C}\}$. Si $\Omega\in\mathcal{C}$ y $\mathcal{Q}$ es la σ-álgebra generada en Ω por $\mathcal{C}$, entonces

$\mathcal{L}$ es denso en $\mathcal{L}_j(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ con respecto a p_j $(j=1,2)$.

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ la álgebra generada en Ω por $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}'$ la colección de todos los subconjuntos B de Ω tales que $I_B \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_j$ la cerradura de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}_j(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ con respecto a p_j; es claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}'$ y que de $\Omega \in \mathcal{C}$ se sigue que $B^c \in \mathcal{B}'$ para cada $B \in \mathcal{B}'$. Para $A, B \in \mathcal{B}'$, considérense $A_m, B_n \in \mathcal{C}$ $(m=1,\ldots,M,\ n=1,\ldots,N)$ y complejos α_m, β_n tales que $I_A = \Sigma_m \alpha_m I_{A_m}$ e $I_B = \Sigma_n \beta_n I_{B_n}$; puesto que $I_{AB} = \Sigma_m \Sigma_n \alpha_m \beta_n I_{A_m B_n}$, de $A_m B_n \in \mathcal{C}$ se sigue que $AB \in \mathcal{B}'$; por consiguiente, se tiene $I_B \in \mathcal{L}$ para cada $B \in \mathcal{B}$. De acuerdo con c) de (VII.2) y (IX.2), teniendo en cuenta que $|I_B - I_A|^2 = |I_B - I_A|$ sirve para subconjuntos cualesquiera A y B de Ω, resulta que $I_A \in \mathcal{L}_j$ para cada $A \in \mathcal{Q}$. Para $x \in \mathcal{L}_j(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, considérense las partes positiva y negativa x^1 y x^2 de $\mathrm{Re}\, x$ (respectivamente x^3 y x^4 de $\mathrm{Im}\, x$) y sucesiones $\{x^k_n\}$ $(k=1,2,3,4)$ de funciones $\mathcal{Q}$-simples positivas tales que $x^k_n \uparrow x^k$; puesto que $p_j(\Sigma_k [x^k - x^k_n]) \leq \Sigma_k p_j(x^k - x^k_n)$, teniendo en cuenta que $\max_k (x^k - x^k_n) \leq |x|$ y que $\max_k (x^k - x^k_n) \downarrow 0$, mediante g) de (VII.6) se obtiene $\lim_n p_j(x - [x^1_n - x^2_n] - i\,[x^3_n - x^4_n]) = 0$; por consiguiente, se tiene $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_j(\Omega, \mathcal{Q}, P)$.

En lo sucesivo, $L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ es el espacio vectorial factor de $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ módulo el espacio de todas las variables aleatorias complejas en $(\Omega,\mathcal{Q})$ que son iguales a cero según P (para esto y lo que sigue se aplican (IX.4) y (IX.5)); si $X\in L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ y X_1 es variable aleatoria compleja en $(\Omega,\mathcal{Q})$ de la clase X, entonces se define la norma de X por $\|X\| = \mathcal{P}_2(X_1)$.

(XVI.3) Proposición. $L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ con la norma $\|\cdot\|$ es espacio de Hilbert.

Demostración. $L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ es espacio de Banach (por b) de (XVI.1)) y la ley del paralelogramo $\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2 = 2\|X\|^2+2\|Y\|^2$, mediante respectivos representantes X_1 y Y_1 de X y Y, se obtiene de $|X_1+Y_1|^2+|X_1-Y_1|^2 = 2|X_1|^2+2|Y_1|^2$.

En lo sucesivo, $L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ está dotado del producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle X,Y\rangle = 4^{-1}(\|X+Y\|^2-\|X-Y\|^2)+4^{-1}i(\|X+iY\|^2-\|X-iY\|^2).$$

Si Z es función compleja (o un complejo) de dominio Ω, entonces se denota por $\bar{Z}$ al conjugado de Z (o sea que $\bar{Z} = \operatorname{Re} Z - i \operatorname{Im} Z$). Si X_1, Y_1 son respectivos representantes $X, Y \in L_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$, entonces

$\langle X, Y\rangle = \int X_1 \overline{Y}_1 \, dP$; esto se obtiene de

$$|X_1+Y_1|^2 - |X_1-Y_1|^2 + i\,(|X_1+iY_1|^2 - |X_1-iY_1|^2) = 4X_1\overline{Y}_1 .$$

XVII. Los Espacios de Hilbert como Espacios de (Clases de) Variables Aleatorias.

(XVII.1) Lema. Sean Ω conjunto no vacío a lo más numerable, $\mathcal{Q}$ la colección de todos los subconjuntos de Ω y P probabilidad sobre $\mathcal{Q}$ tal que $P(\omega) > 0$ para cada $\omega \in \Omega$ (se acostumbra colocar $P(\omega)$ en lugar de $P(\{\omega\})$. a) Si X es variable aleatoria compleja en $(\Omega, \mathcal{Q})$, entonces $X \overset{P}{=} 0$ equivale a $X = 0$; en consecuencia $L_2(\Omega, \mathcal{Q}, P) = \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$. b) Si I_ω es el indicador de $\{\omega\}$, entonces $\{[I_\omega / P(\omega)]^{1/2} \mid \omega \in \Omega\}$ es conjunto ortonormal completo en $L_2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$.

Demostración. Puesto que $P(\omega) > 0$ $(\omega \in \Omega)$, $P(A) = 0$ equivale a $A = \phi$ $(A \in \mathcal{Q})$; esto demuestra la parte a). Puesto que $I_A = \sum_A I_\omega$, el espacio vectorial complejo generado por $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ es denso en $L_2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$; teniendo en cuenta que $I_\omega^{1/2} = I_\omega$ y que $I_\omega I_{\omega'} = 0$ $(\omega, \omega' \in \Omega,\ \omega \neq \omega')$, resulta que la parte b) está demos trada.

(XVII.2) Lema. Sean T conjunto de cardinalidad mayor que 1, $\mathcal{Q}_t$ $(t\in T)$ la colección de los cuatro subconjuntos de $\Omega_t=\{0,1\}$, P_t la probabilidad sobre $\mathcal{Q}_t$ tal que $P_t(0)=P_t(1)$ y $(\Omega_T,\mathcal{Q}_T,P_T)$ el producto tensorial de los espacios probabilistas $(\Omega_t,\mathcal{Q}_t,P_t)$; para cada $s\in T$, se considera al indicador I^s del rectángulo $\pi_T C_t$ tal que $C_s=\{1\}$ y $C_t=\Omega_t$ para cada $t\in T-\{s\}$; para cada subconjunto finito S de T, se considera la clase X^S de las variables aleatorias complejas en $(\Omega_T,\mathcal{Q}_T)$ que son iguales a $\pi_S(2I^s-1)$ según P_T (se acepta que $\pi_\phi(2I^s-1)=1$). Si $\mathfrak{F}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de T, entonces $\{X^S\mid S\in\mathfrak{F}\}$ es conjunto ortonormal completo en $L_2(\Omega_T,\mathcal{Q}_T,P_T)$.

Demostración. Para cada $s\in T$ y cada $S\in\mathfrak{F}$, se consideran $X^s=2I^s-1$ y $X_S=\pi_S X^s$ (con $X_\phi=1$); puesto que $X^s(\Omega_T)=\{-1,1\}$ y $P_T(X^s=-1)=P_T(X^s=1)$, se tiene $X_S^2=1$, $X_S X_{S'}=X_{(S-S')+(S'-S)}$ y $\int X^s dP_T=0$. Aplicando (XIV.6), con $X_s=2I_{\{1\}}-1$, se obtiene $0=\int X_S dP_T$ para cada $S\in\mathfrak{F}-\{\phi\}$ y en consecuencia $\int X_S X_{S'} dP_T=0$ si $S\neq S'$ (ya que $(S-S')+(S'-S)\neq\phi$ si $S\neq S'$), por consiguiente, $\{X^s \mid s \in \mathcal{F}\}$ es conjunto ortonormal en $L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$.

Sea $\mathcal{C}_T$ la semiálgebra de todos los rectángulos en Ω_T. Para $C \in \mathcal{C}_T - \{\phi, \Omega_T\}$, considérense $s \in \mathcal{F} - \{\phi\}$ y $c_\Delta \in \{\{0\}, \{1\}\}$ tales que $C = \cap_s C_{(\Delta)}$; puesto que el indicador de $C_{(\Delta)}$ es I^Δ (si $c_\Delta = \{1\}$) ó $1 - I^\Delta$ (si $c_\Delta = \{0\}$), de $I^\Delta = 2^{-1}(1 + X^\Delta)$ y $1 - I^\Delta = 2^{-1}(1 - X^\Delta)$ se obtiene $I_C = \Pi_s 2^{-1}(1 \pm X^\Delta)$; por lo tanto, se tienen $s_j \subset s$ $(j = 1, \ldots, m)$ y $\alpha_j \in]-\infty, \infty[$ tales que $I_C = \Sigma_j \alpha_j X^{s_j}$. De acuerdo con (XVI.2), el espacio vectorial complejo generado por $\{I_C \mid C \in \mathcal{C}_T\}$ es denso en $\mathcal{L}_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$; por consiguiente, $\{X^s \mid s \in \mathcal{F}\}$ es conjunto ortonormal completo en $L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$.

(XVII.3) Proposición. Sea H espacio de Hilbert. Si $H \neq \{0\}$, entonces existe un espacio probabilista $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ tal que H y $L_2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ son isomorfos.

Demostración. Sea T conjunto ortonormal completo en H. Cuando T es finito, (XVII.3) se obtiene de (XVII.1) con $\Omega = T$; cuando T es infinito, puesto que en este caso T y la colección $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos finitos de T tienen la misma cardinalidad, (XVII.3) se obtiene de (XVII.2).

XVIII. Construcción de Bases Mediante Productos Tensoriales.

Sean T conjunto de cardinalidad mayor que 1, $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t)$ espacio probabilista para cada $t \in T$ y $(\Omega_T, \mathcal{A}_T, P_T)$ el producto tensorial (conforme a la definición siguiente a la demostración de (XIV.6)) de los espacios $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t)$.

Sea x función compleja de dominio Ω_T. Se dice que x es tensor simple en Ω_T si existen un subconjunto finito no vacío S de T y una función compleja x_s de dominio Ω_s para cada $s \in S$ tales que $x(\omega_t, t \in T) = \Pi_S\, x_s(\omega_s)$ para cada $(\omega_t, t \in T) \in \Omega_T$; se dice que x es tensor en Ω_T si x está en el espacio vectorial complejo generado por el conjunto de todos los tensores simples en Ω_T.

Sean S subconjunto finito no vacío de T, x_s función compleja de dominio Ω_s para cada $s \in S$ y x el tensor simple en Ω_T definido por $x(\omega_t, t \in T) = \Pi_S\, x_s(\omega_s)$. Se dice que x es el producto tensorial en Ω_T de las funciones x_s; en particular, se dice que x es el producto tensorial en Ω_T de x_s si $S = \{s\}$. Frecuentemente se denota por $\otimes_S\, x_s$ al producto tensorial en Ω_T de las funciones x_s; de este modo, se tiene $\otimes_S\, x_s = x$.

(XVIII.1) Lema. Sean X_λ ($\lambda \in T$) función compleja de dominio Ω_λ y X^λ el producto tensorial en Ω_T de X_λ. a) para que X^λ sea variable aleatoria compleja en $(\Omega_T, \mathcal{B}_{(\lambda)})$, es necesario y suficiente que X_λ sea variable aleatoria compleja en $(\Omega_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$. b) Sean S subconjunto finito no vacío de T y X_λ variable aleatoria compleja en $(\Omega_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$ para cada $\lambda \in S$; si $P_T(\otimes_S X_\lambda \neq 0) \neq 0$, entonces $\otimes_S X_\lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$ equivale a $X_\lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, P_\lambda)$ para cada $\lambda \in S$; si $X_\lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, P_\lambda)$ para cada $\lambda \in S$, entonces $\int \otimes_S X_\lambda dP_T = \Pi_S \int X_\lambda dP_\lambda$.

Demostración. Considerando partes reales e imaginarias, a) se obtiene mediante a) de (XIV.6); considerando valores absolutos, la equivalencia correspondiente a b) se obtiene de la equivalencia correspondiente a c) de (XIV.6) mediante (XV.3). Supóngase que $X_\lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, P_\lambda)$; puesto que $\mathcal{Re}\, X^\lambda(\omega_t, t \in T) = \mathcal{Re}\, X_\lambda(\omega_\lambda)$ e $\mathcal{Im}\, X^\lambda(\omega_t, t \in T) = \mathcal{Im}\, X_\lambda(\omega_\lambda)$ para cada $(\omega_t, t \in T) \in \Omega_T$, de acuerdo con c) de (XIV.6) se tiene $\int X^\lambda dP_T = \int X_\lambda dP_\lambda$; esto demuestra la última parte de b) para el caso en que $S = \{\lambda\}$.

Para el caso en que $\mu \in S$ y $S' = S - \{\mu\}$ es no vacío, supóngase (hipótesis de inducción finita) que $\int \otimes_{S'} X_\lambda dP_T = \Pi_{S'} \int X_\lambda dP_\lambda$.

Puesto que $\otimes_{S'} X_\Lambda = \Pi_{S'} X^\Lambda$ (por ser producto de variables aleatorias complejas en $(\Omega_T, \mathcal{C}_{(S')})$) es variable aleatoria compleja en $(\Omega_T, \mathcal{C}_{(S')})$, aplicando b) de (XIV.6) resulta que $(\mathrm{Re}\, X^u, \mathrm{Re} \otimes_{S'} X_\Lambda)$, $(\mathrm{Im}\, X^u, \mathrm{Im} \otimes_{S'} X_\Lambda)$, $(\mathrm{Re}\, X^u, \mathrm{Im} \otimes_{S'} X_\Lambda)$ y $(\mathrm{Im}\, X^u, \mathrm{Re} \otimes_{S'} X_\Lambda)$ son independientes según P_T; por consiguiente, teniendo en cuenta que

$$\alpha\beta = \mathrm{Re}\,\alpha\, \mathrm{Re}\,\beta - \mathrm{Im}\,\alpha\, \mathrm{Im}\,\beta + i(\mathrm{Re}\,\alpha\, \mathrm{Im}\,\beta + \mathrm{Im}\,\alpha\, \mathrm{Re}\,\beta)$$

si α, β son complejos y que $\int \mathrm{Re}\, x\, dP_T = \mathrm{Re} \int x\, dP_T$, $\int \mathrm{Im}\, x\, dP_T = \mathrm{Im} \int x\, dP_T$ si $x \in \mathcal{L}_1(\Omega_T, \mathcal{C}_T, P_T)$, mediante (XII.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\int \otimes_S X_\Lambda dP_T &= \int \mathrm{Re}\, X^u dP_T \int \mathrm{Re} \otimes_{S'} X_\Lambda dP_T - \int \mathrm{Im}\, X^u dP_T \int \mathrm{Im} \otimes_{S'} X_\Lambda dP_T \\ &\quad + i\left(\int \mathrm{Re}\, X^u dP_T \int \mathrm{Im} \otimes_{S'} X_\Lambda dP_T + \int \mathrm{Im}\, X^u dP_T \int \mathrm{Re} \otimes_{S'} X_\Lambda dP_T\right) \\ &= \int X^u dP_T \int \otimes_{S'} X_\Lambda dP_T = \Pi_S \int X_\Lambda dP_\Lambda.\end{aligned}$$

(XVIII.2) Corolario. Sean J conjunto finito no vacío, S_j $(j \in J)$ subconjunto finito no vacío de T y $X_\Lambda \in \mathcal{L}_1(\Omega_\Lambda, \mathcal{C}_\Lambda, P_\Lambda)$ para cada $\Lambda \in \bigcup_J S_j$; si $S_j S_{j'} = \phi$ para cualesquiera $j, j' \in J$ $(j \neq j')$, entonces $\int \otimes_{\Sigma_J S_j} X_\Lambda dP_T = \Pi_J \int \otimes_{S_j} X_\Lambda dP_T$.

Demostración. Aplicando b) de (XVIII.1) se obtiene

$$\int \otimes_{\Sigma_J S_j} X_\Lambda dP_T = \Pi_{\Sigma_J S_j} \int X_\Lambda dP_\Lambda = \Pi_J \Pi_{S_j} \int X_\Lambda dP_\Lambda = \Pi_J \int \otimes_{S_j} X_\Lambda dP_T.$$

Sea $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ espacio probabilista. Ahora se denota por $\mathfrak{q}$ a la seminorma (de acuerdo con b) de (XVI.1) y la definición que le precede) definida en $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ por $q(x)=(\int|x|^2dP)^{1/2}$; en esta forma, q_t $(t\in T)$ y q_T son respectivamente las seminormas correspondientes a $\mathcal{L}_2(\Omega_t,\mathcal{Q}_t,P_t)$ y $\mathcal{L}_2(\Omega_T,\mathcal{Q}_T,P_T)$.

(XVIII.3) Lema. Sea S subconjunto finito no vacío de T; para cada $s\in S$ y cada entero positivo n, considérense $x_s, x_s^n\in\mathcal{L}_2(\Omega_s,\mathcal{Q}_s,P_s)$. Si $\{x_s^n\}$ es tal que $\lim_n q_s(x_s^n-x_s)=0$ para cada $s\in S$, entonces $\lim_n q_T(\otimes_S x_s^n-\otimes_S x_s)=0$.

Demostración. Sea x^u (respectivamente x_n^u) el producto tensorial de x_u (respectivamente x_u^n) en Ω_T para cada $u\in S$. Cuando $S=\{s\}$, puesto que $\otimes_S x_s^n-\otimes_S x_s=x_n^s-x^s\in\mathcal{L}_2(\Omega_T,\mathcal{Q}_T,P_T)$ por b) de (XVIII.1), se tiene $\lim_n q_T(x_n^s-x^s)=\lim_n q_s(x_s^n-x_s)=0$. Para el caso en que $u\in S$ y $S'=S-\{u\}$ es no vacío, supóngase (hipótesis de inducción finita) que $\lim_n q_T(\otimes_{S'}x_s^n-\otimes_{S'}x_s)=0$ y considérese a $M=\sup_n q_T(\otimes_{S'}x_s^n)$; mediante b) de (XVIII.1), teniendo en cuenta que

$$\otimes_S x_s^n-\otimes_S x_s=[x_n^u-x^u]\otimes_{S'}x_s^n+x^u[\otimes_{S'}x_s^n-\otimes_{S'}x_s],$$

se obtiene

$$q_T(\otimes_S X_\Lambda^n - \otimes_S X_\Lambda) \le q_T(\otimes_{S'} X_\Lambda^n) q_\mu (X_\mu^n - X_\mu) + q_\mu(X_\mu) q_T(\otimes_{S'} X_\Lambda^n - \otimes_{S'} X_\Lambda)$$
$$\le M q_\mu (X_\mu^n - X_\mu) + q_\mu(X_\mu) q_T(\otimes_{S'} X_\Lambda^n - \otimes_{S'} X_\Lambda);$$

puesto que $M < \infty$, resulta que $\lim_n q_T(\otimes_S X_\Lambda^n - \otimes_S X_\Lambda) = 0$.

Sea x clase de equivalencia de variables aleatorias complejas en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_T)$ con respecto a la igualdad según P_T. Se dice que x es tensor simple en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ si $x \in L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ y existe un tensor simple en Ω_T de la clase x; se dice que x es tensor en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ si x está en el espacio vectorial complejo generado por el conjunto de todos los tensores simples en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$.

Sea S subconjunto finito no vacío de T; para cada $s \in S$, se consideran $X_s \in L_2(\Omega_s, \mathcal{Q}_s, P_s)$ y una variable aleatoria compleja X'_s en $(\Omega_s, \mathcal{Q}_s)$ de la clase X_s (con respecto a la igualdad según P_s). Sea x la clase correspondiente a $\otimes_S X'_s$ con respecto a la igualdad según P_T; se dice que x es el producto tensorial en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ de las clases X_s; en particular, se dice que x es el producto tensorial en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ de X_s si $S = \{s\}$. Frecuentemente se denota por $\otimes_S X_s$ al producto tensorial en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ de las clases X_s; en esta forma, de acuerdo con b) de (XVIII. 1), se tiene $x =$

$\otimes_s X_s \in L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$.

Sea $\{X_t^n \mid n \in N_t\}$ conjunto ortonormal completo en $L_2(\Omega_t, \mathcal{B}_t, P_t)$; para cada $t \in T$, se acepta que $n = 0$ si $n \in N_t$ y X_t^n es la clase (con respecto a la igualdad según P_t) correspondiente a 1. Sea $\mathcal{W}$ la colección de todos los subconjuntos finitos w del producto cartesiano $T \times (\cup_t N_t - \{0\})$ tales que $n \in N_t$ si $(t, n) \in w$ y $s \neq u$ si (s, m), $(u, n) \in w$ (se acepta que $\phi \in \mathcal{W}$); se denota por X_ϕ a la clase correspondiente a 1 con respecto a la igualdad según P_T; se denota por X_w ($w \in \mathcal{W} - \{\phi\}$) al producto tensorial en $L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$ de las clases X_t^n tales que $(t, n) \in w$.

(XVIII.4) Proposición. Si la clase correspondiente a 1 está en $\{X_t^n \mid n \in N_t\}$ para cada $t \in T$, entonces $\{X_w \mid w \in \mathcal{W}\}$ es conjunto ortonormal completo en $L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$.

Demostración. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interior de $L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$; para cada pareja (t, n) tal que $n \in N_t$, se consideran una variable aleatoria compleja Y_t^n en $(\Omega_t, \mathcal{B}_t)$ de la clase X_t^n y el producto tensorial Y_n^t en Ω_T de Y_t^n (se nota que $Y_n^t \in L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$); para cada $w \in \mathcal{W}$, se considera la variable aleatoria compleja $Y_w = \prod_{(t,n) \in w} Y_n^t$

(con $Y_\phi = 1$) en $(\Omega_T, \mathcal{Q}_T)$ de la clase x_W (se nota que Y_W ($W \in \mathfrak{W}-\{\phi\}$) es el producto tensorial en Ω_T de las funciones Y_t^n tales que $(t,n) \in W$). De acuerdo con b) de (XVIII.1), considerando que $s \neq u$ si (s,m), $(u,n) \in W$ y que $q_t(Y_t^n)=1$ si $(t,n)\in T\times N_t$, se tiene $\langle x_W, x_W\rangle = 1$ para cada $W\in\mathfrak{W}$. Para cada $W \in \mathfrak{W}-\{\phi\}$, teniendo en cuenta que $\int Y_t^n dP_t = 0$ si $n\neq 0$ (ya que $Y_t^0 = 1$ según P_t ($t\in T$)), mediante b) de (XVIII.1) se obtiene $\langle x_W, x_\phi\rangle = \int Y_W dP_T = 0$.

Para $W, W' \in \mathfrak{W}-\{\phi\}$ ($W\neq W'$), considérense $W_1 = \{(s,m)\in W \mid \exists n \ni (s,n) \in W'\}$, $W_1' = \{(u,n)\in W' \mid \exists m \ni (u,m)\in W\}$, $S = \{s\in T\mid \exists m \ni (s,m)\in W\}$, $S' = \{u\in T \mid \exists n\ni (u,n)\in W'\}$ y $S_1 = \{s\in S\mid \exists m \ni (s,m)\in W_1\}$. Es claro que $S_1 = \{u \in S' \mid \exists n \ni (u,n)\in W_1'\}$ y que $S_1, S-S_1, S'-S_1$ son ajenos; en virtud de que $s\neq u$ si $(s,m),(u,n)\in W''\in\mathfrak{W}$, los conjuntos W_1, W_1' y S_1 son equipotentes; en consecuencia, teniendo en cuenta que $Y_W \bar{Y}_{W'} = Y_{W_1}\bar{Y}_{W_1'} Y_{W-W_1}\bar{Y}_{W'-W_1'}$ y que cuando $W_1\neq\phi$ $Y_{W_1}\bar{Y}_{W_1'}$ es el producto tensorial en Ω_T de las funciones $Y_s^m \bar{Y}_s^n$ tales que $(s,m)\in W_1$ y $(s,n)\in W_1'$, mediante (XVIII.2) se obtiene

$$\int Y_W \bar{Y}_{W'} dP_T = \int Y_{W_1}\bar{Y}_{W_1'} dP_T \int Y_{W-W_1} dP_T \int \bar{Y}_{W'-W_1'} dP_T .$$

Cuando $W=W_1$ y $W'=W_1'$, en cuyo caso existen $(s,m)\in W-W'$ y $(s,n)\in$

$w'-w$ (tales que $\int Y_s^m \bar{Y}_s^n \, dP_s = 0$), mediante b) de (XVIII.1) se obtiene $\int Y_{w_1} \bar{Y}_{w_1'} \, dP_T = 0$; puesto que $\int Y_{w''} \, dP_T = 0$ si $w'' \in \mathcal{W} - \{\phi\}$, está demostrado que $\{x_w \mid w \in \mathcal{W}\}$ es ortonormal.

Sea S subconjunto finito no vacío de T; para cada $s \in S$, considérense $C_s \in \mathcal{B}_s$, el indicador I_s de C_s (cuyo dominio es Ω_s) y una sucesión $\{Z_s^n\}$ en el espacio vectorial complejo generado por $\{Y_s^n \mid n \in N_s\}$ tal que $\lim_n q_s(Z_s^n - I_s) = 0$. Puesto que $\otimes_S Z_s^n$ está en el espacio vectorial complejo generado por $\{Y_w \mid w \in \mathcal{W}\}$, considerando que $\otimes_S I_s$ es el indicador de $\cap_S C_{(s)}$ y que $\lim_n q_T(\otimes_S Z_s^n - \otimes_S I_s) = 0$ por (XVIII.3), mediante (XVI.2) resulta que $\{x_w \mid w \in \mathcal{W}\}$ es conjunto ortonormal completo en $L_2(\Omega_T, \mathcal{B}_T, P_T)$.

(XVIII.5) Nota. La condición impuesta en (XVIII.4) es esencialmente inamovible; esto, conforme a la demostración anterior, se deduce de $\langle x_w, x_{w'} \rangle = \int Y_{w_1} \bar{Y}_{w_1'} \, dP_T \int Y_{w-w_1} \, dP_T \int \bar{Y}_{w'-w_1'} \, dP_T$ (que se reduce a $\langle x_w, x_{w'} \rangle = \int Y_s^m \, dP_s \int \bar{Y}_u^n \, dP_u$ cuando $w = \{(s,m)\}$ y $w' = \{(u,n)\}$) y de la necesaria condición $\langle x_w, x_{w'} \rangle = 0$, como se indica a continuación. Para $u \in T$ supóngase que ninguna función del conjunto $\{Y_u^n \mid n \in N_u\}$ es constante (con respecto a la igualdad según P_μ) y que $n \in N_\mu$ es tal que $\int Y_\mu^n dP_\mu \neq 0$ (si $\int Y_\mu^n dP_\mu = 0$ para cada $n \in N_\mu$, entonces la clase correspondiente a 1 está en el complemento ortogonal de $\{X_\mu^n \mid n \in N_\mu\}$), puesto que $\int Y_s^m dP_s \int Y_\mu^n dP_\mu = 0$ si $m \in N_s$ y $s \in T-\{\mu\}$, se tiene $\int Y_s^m dP_s = 0$ para cada $m \in N_s$ ($s \in T-\{\mu\}$); esto significa que $\{X_s^m \mid m \in N_s\}$ es incompleto en $L_2(\Omega_s, \mathcal{Q}_s, P_s)$ para cada $s \in T-\{\mu\}$; por consiguiente, $\{X_w \mid w \in \mathcal{W}\}$ es incompleto en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$.

XIX. Producto Tensorial de Espacios de Hilbert.

Sean T conjunto de cardinalidad mayor que 1 y $\mathcal{H}_t$ $(t \in T)$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ espacios vectoriales complejos. Sea τ función del producto cartesiano $\Pi_T \mathcal{H}_t$ en $\mathcal{H}$; se dice que τ es multilineal si para cualesquiera $\mu \in T$ y $x \in \Pi_{T-\{\mu\}} \mathcal{H}_t$, la sección τ_x (de τ en x) es lineal. Sea τ función multilineal de $\Pi_T \mathcal{H}_t$ en $\mathcal{H}$; se dice que $[\mathcal{H}, \tau]$ es un producto tensorial de los espacios $\mathcal{H}_t$ $(t \in T)$ si: a) $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial complejo generado por $\tau(\Pi_T \mathcal{H}_t)$; b) si τ' es función multilineal de $\Pi_T \mathcal{H}_t$ en $\mathcal{K}$, entonces existe una función lineal φ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ tal que $\tau' = \varphi \circ \tau$.

Supóngase que $[\mathcal{H}, \tau]$ es un producto tensorial de los espacios $\mathcal{H}_t$ y considérense una función multilineal τ' de $\Pi_T \mathcal{H}_t$ en $\mathcal{K}$ y funciones lineales φ, φ' de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ tales que $\tau' = \varphi \circ \tau = \varphi' \circ \tau$. Si $x^j \in \Pi_T \mathcal{H}_t$ y α_j es complejo $(j=1,\ldots,m)$, entonces

$$\varphi'(\Sigma_j \alpha_j \tau(x^j)) = \Sigma_j \alpha_j \varphi'(\tau(x^j)) = \Sigma_j \alpha_j \varphi(\tau(x^j))$$
$$= \varphi(\Sigma_j \alpha_j \tau(x^j));$$

consecuentemente, teniendo en cuenta que $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial complejo generado por $\tau(\Pi_T \mathcal{H}_t)$, resulta que $\varphi' = \varphi$.

(XIX.1) Proposición. Si $[\mathcal{H}, \tau]$ y $[\mathcal{K}, \tau']$ son productos tensoriales de los espacios $\mathcal{H}_t$ $(t \in T)$, entonces existe un isomorfismo φ de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{K}$ tal que $\tau' = \varphi \circ \tau$.

Demostración. Sean φ y φ' respectivamente funciones lineales de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ y de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$ tales que $\tau' = \varphi \circ \tau$ y $\tau = \varphi' \circ \tau'$. En virtud de que $\tau = \varphi' \circ \varphi \circ \tau$, se tiene $\varphi' \circ \varphi(\tau(x)) = \tau(x)$ para cada $x \in \Pi_T \mathcal{H}_t$; en consecuencia, puesto que $\varphi' \circ \varphi$ es función lineal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$, se tiene $\varphi' \circ \varphi(\Sigma_1^m \alpha_j \tau(x^j)) = \Sigma_1^m \alpha_j \tau(x^j)$; por consiguiente, teniendo en cuenta que $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial complejo generado por $\tau(\Pi_T \mathcal{H}_t)$, resulta que $\varphi' \circ \varphi$ es la identidad de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}$ (por lo tanto: $\varphi(x)=\varphi(y) \Rightarrow x=\varphi'(\varphi(x))=\varphi'(\varphi(y))=y$). De igual modo, resulta que $\varphi\circ\varphi'$ es la identidad de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{K}$ (por lo tanto: $y\in\mathcal{K} \Rightarrow y=\varphi(\varphi'(y))$); por consiguiente, φ es isomorfismo de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{K}$ y φ' es el inverso de φ.

(XXX.2) Proposición. Sean $\mathcal{K}_t\ (t\in T)$ espacio vectorial complejo isomorfo a $\mathcal{H}_t$, λ_t isomorfismo de $\mathcal{K}_t$ sobre $\mathcal{H}_t$ y λ la función de $\Pi_T\mathcal{K}_t$ sobre $\Pi_T\mathcal{H}_t$ definida por $\lambda(h_t, t\in T)=(\lambda_t(h_t), t\in T)$. Si $[\mathcal{H},\tau]$ es un producto tensorial de los espacios $\mathcal{H}_t$, entonces $[\mathcal{H},\tau\circ\lambda]$ es un producto tensorial de los espacios $\mathcal{K}_t$.

Demostración. Para $u\in T$, $h=(h_t, t\in T-\{u\})\in\Pi_{T-\{u\}}\mathcal{K}_t$ y $x=(\lambda_t(h_t), t\in T-\{u\})$, se tiene $(\tau\circ\lambda)_h=\tau_x\circ\lambda_u$; por lo tanto, $\tau\circ\lambda$ es multilineal. Puesto que λ es suprayectiva, $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial complejo generado por $\tau\circ\lambda(\Pi_T\mathcal{K}_t)$. Dada una función multilineal τ' de $\Pi_T\mathcal{K}_t$ en $\mathcal{K}$, se define una función lineal φ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ por $\varphi(\Sigma_1^m\alpha_j\,\tau\circ\lambda(h^j))=\Sigma_1^m\alpha_j\,\tau'(h^j)$; es claro que $\tau'=\varphi\circ(\tau\circ\lambda)$.

Sean $\mathcal{K}_t\ (t\in T)$, $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert y τ función multilineal de $\Pi_T\mathcal{K}_t$ en $\mathcal{K}$. Se dice que $[\mathcal{K},\tau]$ es un producto tensorial completo de los espacios $\mathcal{H}_t$ si: a) existe un subespacio vectorial $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ tal que $[\mathcal{H}, \tau]$ es un producto tensorial de los espacios $\mathcal{H}_t$; b) $\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{H}$.

Para cada $t \in T$, en lo sucesivo se supone que $\mathcal{H}_t \neq \{0\}$ y que $(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$ es espacio probabilista (de acuerdo con (XXIX.3)) tal que $\mathcal{H}_t$ y $L_2(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$ son isomorfos; como antes, el espacio probabilista $(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ es el producto tensorial de los espacios $(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$. Para cada $x = (x_t, t \in T) \in \Pi_T L_2(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$, se considera al conjunto S_x de todos los $s \in T$ tales que x_s no es la clase correspondiente a 1 (con respecto a la igualdad según P_s); para un producto finito $\Pi_S \alpha_s$ de complejos, se acepta que $\Pi_S \alpha_s = 1$ si $S = \phi$. En lo sucesivo, $\mathcal{H}$ es el espacio de todos los tensores en $L_2(\Omega_T, \mathcal{Q}_T, P_T)$ y τ es la función multilineal de $\Pi_T L_2(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$ en $\mathcal{H}$ definida por

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } S_x \text{ es infinito} \\ \otimes_{S_x} x_s \text{ si } S_x \text{ es finito.} \end{cases}$$

(XIX.3) Proposición. Si λ_t es isomorfismo de $\mathcal{H}_t$ sobre $L_2(\Omega_t, \mathcal{Q}_t, P_t)$ para cada $t \in T$ y λ es la función de $\Pi_T \mathcal{H}_t$

sobre $\prod_T L_2(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t)$ definida por $\lambda(h_t, t\in T) = (\lambda_t(h_t), t \in T)$, entonces $[L_2(\Omega_T, \mathcal{A}_T, P_T), \tau\circ\lambda]$ es un producto tensorial completo de los espacios H_t.

Demostración. Puesto que la imagen de τ es el conjunto de todos los tensores simples en $L_2(\Omega_T, \mathcal{A}_T, P_T)$, $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial complejo generado por la imagen de τ; dada una función multilineal τ' de $\prod_T L_2(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t)$ en H, considerando la función lineal φ de $\mathcal{H}$ en H definida por $\varphi(\Sigma_1^m \alpha_j \tau(x^j)) = \Sigma_1^m \alpha_j \tau'(x^j)$, resulta que $\tau' = \varphi\circ\tau$; por consiguiente, $[\mathcal{H}, \tau]$ es un producto tensorial de los espacios $L_2(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t)$. Teniendo en cuenta que el indicador de un rectángulo medible es un tensor simple en Ω_T perteneciente a $\mathcal{L}_2(\Omega_T, \mathcal{A}_T, P_T)$, de (XVI.2) se sigue que $\mathcal{H}$ es denso en $L_2(\Omega_T, \mathcal{A}_T, P_T)$; finalmente, ya que $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial complejo generado por la imagen de $\tau\circ\lambda$, de (XIX.2) se sigue que $[L_2(\Omega_T, \mathcal{A}_T, P_T), \tau\circ\lambda]$ es un producto tensorial completo de los espacios H_t.

BIBLIOGRAFIA

1. Ash, R., "Real Analysis and Probability", Academic Press, 1972.
2. Bourbaki, N., "Éléments de Mathématique", - Livre II, Hermann, 1958.
3. Bourbaki, N., "Éléments de Mathématique", Livre VI (deuxième édition), Hermann, 1965.
4. Day, M., "Some Characterizations of Inner-product Spaces". Trans. A.M.S. 62 (1947), 320-337.
5. Dieudonné, J., "Treatise on Analysis", Volume II, Academic Press, 1970.
6. Halmos, P., "Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity", Chelsea, 1957.
7. Hewitt, E., and Stromberg, K., "Real and Abstract Analysis", Springer-Verlag, 1965.
8. Loève, M., "Probability Theory", D. Van Nostrand, 1960.
9. Lorch, E., "The Cauchy-Schwarz Inequality and Self-adjoint Spaces". Ann. Math. 46 (1945), 468-473.
10. Mackey, G., and Kakutani, S., "Ring and Lattice Characterizations of Complex Hilbert Space", Bull, A.M.S. 52 (1946), 727-733.

11. Mutafian, C., "Algebra Multilineal", Instituto Cubano del Libro, 1974.

12. Neveu, J., "Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités", Masson, 1964.

13. Royden, H., "Real Analysis",Macmillan, 1971.

14. Stone, M., "Linear Transformation in Hilbert Space", American Math. Soc., 1932.

15. Taylor, A., "Introduction to Functional Analysis", Wiley, 1958.

16. Weidmann, J., "Linear Operators in Hilbert -- Spaces", Springer-Verlag, 1980.

17. Yosida, K., "Functional Analysis", Springer-Verlag, 1974.

18. Zariski, O., and Samuel, P., "Commutative Algebra", D. Van Nostrand, 1958.