00384.
1
1q

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

MULTICOHERENCIA Y COMPACTACIONES PERFECTAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

JAVIER PAEZ CARDENAS.

México, D.F. Marzo, 1984.

INDICE.

0. INTRODUCCION.

En este trabajo estudio algunas relaciones de distingrados de multicoherencia que existen entre un espacio y sus extensiones perfectas (la compactación de Stone-Cech βX de un espacio completamente regular X, siempre es perfecta, ver lema 7 , capítulo VI de [11]).

Entre las formas equivalentes de definir el concepto de compactación perfecta, existe una que involucra la noción de separación. Esto nos hizo pensar que algunas propiedades de conexidad deberían preservarse bajo compactaciones perfectas, lo que nos motivó a investigar aquellas propiedades de multicoherencia invariantes bajo este tipo de compactaciones. Algunas otras preguntas relacionadas con el tema tratado en esta tesis, son abordados en la tesis de Alejandro Illanes M.

El concepto de unicoherencia es definido por C. Kuratowski en [15] y es usado de manera importante en la caracterización topológica de la esfera (S^2). Posteriormente S. Eilenberg generaliza este concepto definiendo la noción de grado de multicoherencia en [6] . Los artículos de S. Eilenberg [6] , A.H. Stone [20], así como el libro de G.T Whyburn [22] resumen algunas propiedades importantes de multicoherencia. Es importante señalar que en todos los trabajos sobre este tema, la hipótesis de que los espacios usados sean localmente conexos, juega un papel muy importante. Esto complica el cálculo del grado de multicoherencia para los espacios que no son localmente conexos.

El concepto de extensión perfecta es definido y desarrollado por E.G. Sklyarenko en [17] y [18]. Algunos resultados relacionados con este tipo de extensiones pueden ser consultados también en [11].

Ahora reseñaré los resultados más importantes de este trabajo.

En el primer capítulo proporciono algunas definiciones de distintos grados de multicoherencia de un espacio X: $r(X)$, $r_D(X)$, $r_A(X)$ y $r_\gamma(X)$. También incluyo la definición y algunas propiedades de extensiones perfectas, así como resultados de carácter general. Algunos de éstos son ampliamente conocidos.

En el segundo capítulo pruebo una caracterización del grado de multicoherencia $r(X)$ de un espacio X. Esta es una generalización, para espacios normales, de la equivalencia entre (i) y (v) del teorema 1 de [19]. Para el caso de unicoherencia ($r(X)=0$), como lo señala A.H. Stone, esta propiedad puede ser considerablemente generalizada. Recientemente J.H.V. Hunt y E.D. Tymchatym en [10] consiguen otra generalización de esta propiedad. Quiero mencionar que el teorema principal de este capítulo fue probado conjuntamente con Alejandro Illanes M., por lo que también aparece en su tesis.

En el tercer capítulo desarrollo resultados que me permiten probar que $r(X) = r(\beta X)$ y $r_A(X) = r_A(\beta X)$ para espacios X conexos, localmente conexos y normales. A pesar de que los espacios de la forma βX solo son localmente conexos en muy pocos casos (ver [9]), estos resultados permiten calcular su grado de multicoherencia. Hasta ahora no se si es indispensable la hipótesis de conexidad local en X para probar la igualdad $r(X) = r(\beta X)$.

La compactación de Freudenthal γX de un espacio X periféricamente compacto (i.e., un espacio que tiene una base de abiertos con frontera compacta), es introducida por Freudenthal en [7] . Esta compactación resultó tener varias propiedades interesantes (que se pueden consultar en [11]); entre otras, es perfecta y tiene residuo cero-dimensional. Esto implica que es menor o igual que todas las compactaciones perfectas y mayor o igual que todas las compactaciones con residuo cero-dimensional (ver [17]).

En el cuarto capítulo pruebo que, si un espacio X es conexo, localmente conexo y localmente compacto, entonces: γX tiene grado de multicoherencia mínimo de entre todas las compactaciones de X y su grado de multicoherencia coincide con el grado débil de multicoherencia $r_D(X)$ y con el grado de γ-multicoherencia $r_\gamma(X)$. Estos resultados son generalizaciones de resultados obtenidos por M.H. Clapp y R.F. Dickman, Jr. en [1] y E. Duda en [4]. Hago notar que no he supuesto que los espacios con los que trabajo en este capítulo, sean metrizables y separables.

Un problema que considero interesante, es el de determinar, si en los resultados de este capítulo se puede sustituir la hipótesis de que X sea localmente compacto por la de que sea periféricamente compacto.

De los teoremas de los capítulos 3 y 4 se puede concluir que si X es un espacio conexo, localmente conexo, localmente compacto y normal, y Z es una compactación perfecta de X, entonces $r(\gamma X) \leq r(Z) \leq r(\beta X)$. Una pregunta que no pude contestar es la siguiente: supongamos que $r(\gamma X) < n < r(\beta X)$, entonces, ¿ existe una compactación perfecta Z de X tal que $r(Z) = n$?. Conjeturo que si.

En los primeros años de la topología general, un problema muy estudiado consistía en caracterizar los espacios topológicos mas conocidos, entre los que no podían faltar las variedades de dimensión dos. Un resumen muy completo de los intentos y resultados de la caracterización de las variedades de dimensión dos, lo constituye el trabajo realizado por E.R. Van Kampen en [21]. En general estas caracterizaciones se refieren al espacio en sí y no al espacio como compactación de otro.

En el último capítulo caracterizo al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ como el único espacio que se puede obtener compactando $\mathbb{R}^2$ por una compactación perfecta, metrizable con residuo no degenerado. Por otra parte, es fácil probar que $[0,1]$ es el único espacio que se puede obtener compactando a $\mathbb{R}$ por una compactación metrizable y perfecta. Este hecho no es cierto para $\mathbb{R}^3$, el cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ no es el único espacio que se puede obtener compactando a $\mathbb{R}^3$ por una compactación metrizable, perfecta, con residuo no degenerado (por ejemplo identificando en el cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ al conjunto $(\{0,1\}\times[0,1]\times\{0\})\cup([0,1]\times\{0,1\}\times\{0\})$ en un punto, obtenemos una compactación metrizable, perfecta, de residuo no degenerado de $\mathbb{R}^3$, la cual no es homeomorfa a $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$). Sería interesante caracterizar al cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ como una compactación de $\mathbb{R}^3$.

Hago notar que a diferencia de los otros capítulos, en éste último no uso el concepto de multicoherencia.

Denotaré por $\mathbb{N}^*$ al conjunto de enteros no negativos y por $\mathbb{N}$ al conjunto de enteros positivos. Si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ denotará al espacio euclideano de dimensión n, y $\bar{n}$ denotará al conjunto $\{1,\ldots,n\}$. Dados $a,b\in\mathbb{R}$, (a,b) ($[a,b]$) denotará al conjunto de números reales x, tales que $a<x<b$ ($a\leq x\leq b$).

Finalmente, quiero mencionar que este trabajo lo realicé siendo becario en la Facultad de Ciencias del P.S.P.A. de la Universidad Nacional Autónoma de México. Así mismo quiero hacer patente mi agradecimiento al Dr. Adalberto García-Máynez C. por la dirección de esta tesis.

1. DEFINICIONES Y PROPOSICIONES PRELIMINARES.

Los conceptos no definidos aquí serán tomados como aparecen en [23]. Todos los espacios considerados en este trabajo, serán espacios de Tychonoff.

1.1. Definición. Si X es un espacio topológico:

i) Una extensión de X, es una pareja (Z,h) donde Z es un espacio topológico y h es un encaje de X en un subespacio denso de Z. Como es usual, no distinguiré entre X y $h(X)$. En este sentido, una extensión de X será simplemente un espacio topológico Z que contenga a X como subespacio denso.

Dados A,B,F subconjuntos de X, se dice que:

ii) A y B están separados en X si $C_X(A) \cap B = \phi$ y $C_X(B) \cap A = \phi$.

iii) F separa a A y B en X si existen C,D subconjuntos de X tales que $A \subset C$, $B \subset D$, $X - F = C \cup D$ y C y D están separados en X.

Si Z es una extensión de X, entonces:

iv) Z es extensión perfecta de X, si dados A,B,F subconjuntos de X tales que F es cerrado en X y F separa a A y B en X, entonces $C_Z(F)$ separa a A y B en Z. Es fácil probar que esta definición coincide con la definición dada por E.G. Sklyarenko en [17]. Si además Z es compacto, se dice que Z es compactación perfecta de X.

v) Si U es un abierto en X, se define el operador $\langle U\rangle_Z = Z - C_Z(X-U)$, el cual denotaré unicamente por $\langle U\rangle$ cuando no exista posibilidad de confusión.

Algunas propiedades elementales del operador definido en 1.1.v, están contenidas en la siguiente proposición.

1.2. Proposición. Si U,V son abiertos en X y Z es una extensión de X, entonces:

i) $\langle U\rangle$ es abierto en Z.

ii) $\langle U\rangle \cap X = U$.

iii) Si W es un abierto en Z tal que $W \cap X = U$, entonces, $W \subset \langle U\rangle$.

iv) $\langle U\rangle \cap \langle V\rangle = \langle U \cap V\rangle$.

Demostración. i). Es inmediato.

ii). Ya que $X - U \subset C_Z(X-U)$ se tiene que $\langle U\rangle = Z - C_Z(X-U) \subset Z - (X-U)$ así que $\langle U\rangle \cap X \subset (Z-(X-U)) \cap X \subset U$ de modo que $\langle U\rangle \cap X \subset U$. Sea ahora un punto $z \in U$ y supóngase que $z \notin \langle U\rangle \cap X$. Entonces $z \in C_Z(X-U)$ y como U es abierto en X, debe de existir V abierto en Z tal que $V \cap X = U$; entonces, ya que $z \in V$, se tiene que $V \cap (X-U) \neq \phi$; pero $V \cap (X-U) \subset U \cap (X-U) = \phi$. Esta contradicción prueba que $U \subset \langle U\rangle \cap X$. Por lo tanto $\langle U\rangle \cap X = U$

iii). Sea W abierto en Z tal que $W \cap X = U$; entonces $W \cap (X - U) = \phi$, así que $X - U \subset Z - W$, de donde $C_Z(X - U) \subset Z - W$. Entonces $\langle U \rangle = Z - C_Z(X - U) \supset W$. Por tanto, $W \subset \langle U \rangle$.

iv). Es inmediata.

1.3. Proposición. Sea Z una extensión de X. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) Z es extensión perfecta de X.

ii) Si A, B son cerrados en X tales que $X = A \cup B$, entonces $C_Z(A \cap B) = C_Z(A) \cap C_Z(B)$.

iii) Si A, B, F son subconjuntos de X tales que, F es cerrado en X y F separa a A y B en X, entonces $C_Z(A) \cap C_Z(B) \subset C_Z(F)$.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Sean A, B cerrados en X tales que $X = A \cup B$. Entonces $(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) = \phi$, así que, por el teorema 1 de [17], $\langle X - A \rangle \cup \langle X - B \rangle = \langle (X - A) \cup (X - B) \rangle$, es decir, $Z - C_Z(X - (X - (A \cap B))) = Z - C_Z(A \cap B) = (Z - C_Z(A)) \cup (Z - C_Z(B)) = Z - (C_Z(A) \cap C_Z(B))$. Por tanto, $C_Z(A \cap B) = C_Z(A) \cap C_Z(B)$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Sean C, D, F subconjuntos de X tales que, F es cerrado en X y F separa a C y D en X. Entonces existen U, V separados en X tales que $X - F = U \cup V$, $C \subset U$ y $D \subset V$, de modo que U, V son abiertos en X. Hagase $A = F \cup U = X - V$ y $B = F \cup V = X - U$. Entonces A, B son cerrados en X y $X = A \cup B$, de manera que $C_Z(A \cap B) = C_Z(A) \cap C_Z(B)$. Esto implica que $C_Z(C) \cap C_Z(D) \subset C_Z(U) \cap C_Z(V) \subset C_Z(A) \cap C_Z(B) = C_Z(A \cap B) = C_Z(F)$. Por tanto, $C_Z(C) \cap C_Z(D) \subset C_Z(F)$.

iii) $\Rightarrow$ i). Sean C, D, F subconjuntos de X tales que, F es cerrado en X y F separa a C y D en X. Entonces existen A, B separados en X tales que $X - F = A \cup B$, $C \subset A$ y $D \subset B$. Tómese $G = C_Z(A) - C_Z(F)$ y $H = C_Z(B) - C_Z(F)$. Como F separa a A y B en X, se tiene que $C_Z(A) \cap C_Z(B) \subset C_Z(F)$, así que $C_Z(G) \cap H =$ $C_Z(C_Z(A) - C_Z(F)) \cap (C_Z(B) - C_Z(F)) \subset C_Z(A) \cap (C_Z(B) - C_Z(F)) =$ $(C_Z(A) \cap C_Z(B)) - C_Z(F) = \phi$, de manera que $C_Z(G) \cap H = \phi$. También es cierto que $G \cap C_Z(H) = \phi$, de modo que G y H están separados en Z; además $Z - C_Z(F) = C_Z(A \cup B \cup F) - C_Z(F) =$ $(C_Z(A) - C_Z(F)) \cup (C_Z(B) - C_Z(F)) = G \cup H$, de donde, $Z - C_Z(F) =$ $G \cup H$. Como F es cerrado en X se tiene que $A \cap C_Z(F) =$ $A \cap X \cap C_Z(F) = A \cap F = \phi$, entonces $C \subset A \subset C_Z(A) - C_Z(F) = G$. De aquí que $C \subset G$. Similarmente se prueba que $D \subset H$. Por tanto, $C_Z(F)$ separa a C y D en Z. Por lo tanto, Z es una extensión perfecta de X.

1.4. Definición. Una región de X es un subconjunto abierto conexo de X.

La siguiente proposición permite identificar algunas extensiones perfectas fácilmente.

1.5. Proposición. Sea Z una extensión de X. Considerense las siguientes tres afirmaciones:

i) Z es extensión perfecta de X.

ii) Z tiene una base de abiertos cuya intersección con X es conexa.
iii) Si W es una región de Z, entonces $W \cap X$ es una región de X.

Entonces, i) implica iii). Si además Z es localmente conexo, entonces i), ii) y iii) son equivalentes.

Demostración. i) $\Rightarrow$ iii). Sea W una región de Z y supóngase que $W \cap X$ no es conexo. Entonces existen U,V abiertos en X, no vacios, tales que $U \cap V = \phi$ y $U \cup V = W \cap X$. Entonces, por la proposición 1.2 y el teorema 1 de [17], $W \subset (U \cup V) = (U) \cup (V)$ y $(U) \cap (V) = \phi$; además $W \cap (U) \neq \phi$ y $W \cap (V) \neq \phi$. Esto prueba que W no es conexo. Esta contradicción demuestra que $W \cap X$ debe ser conexo.

iii) $\Rightarrow$ ii). Es inmediato.

ii) $\Rightarrow$ i). Supóngase que Z no es extensión perfecta de X, entonces existen A,B,F subconjuntos de X tales que, F es cerrado en X, F separa a A y B en X y $C_Z(A) \cap C_Z(B) \not\subset C_Z(F)$ (proposición 1.3). Sean $p \in (C_Z(A) \cap C_Z(B)) - C_Z(F)$ y W una región de Z tales que, $p \in W$, $W \cap F = \phi$ y $W \cap X$ es conexo. Ya que F separa a A y B en X, existen U,V abiertos en X, ajenos, tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $X - F = U \cup V$. Entonces $W \cap X \subset U \cup V$, $\phi \neq W \cap A \subset (W \cap X) \cap U$ y $\phi \neq W \cap B \subset (W \cap X) \cap V$. Esto contradice la conexidad de $W \cap X$. Por tanto, Z es extensión perfecta de X.

1.6. Proposición. Sean X,Y,Z tales que Y es una extensión de X y Z es una extensión de Y. Entonces, Y es extensión perfecta de X y Z es estensión perfecta de Y si y solo si Z es extensión perfecta de X.

Demostración. (Suficiencia). Supóngase que Y es extensión perfecta de X y Z es extensión perfecta de Y. Sean A,B,F subconjuntos de X tales que, F es cerrado en X y F separa a A y B en X. Entonces $C_Y(F)$ separa a A y B en Y, de manera que $C_Z(F) = C_Z(C_Y(F))$ separa a A y B en Z. Por tanto, Z es extensión perfecta de X.

(Necesidad). Ahora supóngase que Z es extensión perfecta de X. Sean A,B,F subconjuntos de X tales que, F es cerrado en X y F separa a A y B en X. Entonces, por la proposición 1.3, $C_Z(A) \cap C_Z(B) \subset C_Z(F)$, así que $C_Z(A) \cap C_Z(B) \cap Y \subset C_Z(F) \cap Y$. De aquí que $C_Y(A) \cap C_Y(B) \subset C_Y(F)$. Usando nuevamente la proposición 1.3, se concluye que Y es extensión perfecta de X.

Para probar que Z es extensión perfecta de Y, usaré la proposición 1.3 nuevamente. Sean A,B,F subconjuntos de Y tales que, F es cerrado en Y y F separa a A y B en Y. Entonces existen U,V abiertos en Y, ajenos, tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $Y - F = U \cup V$. Sean $U_1 = U \cap X$, $V_1 = V \cap X$ y $F_1 = F \cap X$. Entonces F_1 es cerrado en X, U_1, V_1 son abiertos en X, ajenos, y $X - F_1 = U_1 \cup V_1$. Como F_1 separa a U_1 y V_1 en X, y Z es extensión perfecta de X, $C_Z(U_1) \cap C_Z(V_1) \subset C_Z(F_1)$. Pero $C_Z(U_1) = C_Z(U)$ y $C_Z(V_1) = C_Z(V)$, así que $C_Z(A) \cap C_Z(B) \subset C_Z(U) \cap C_Z(V) =$

$C_Z(U_1) \cap C_Z(V_1) \subset C_Z(F_1) \subset C_Z(F)$. De donde $C_Z(A) \cap C_Z(B) \subset C_Z(F)$. Por tanto, Z es extensión perfecta de Y.

Ahora definiré algunos tipos de multicoherencia en un espacio conexo X.

1.7. Definición. Si X es un espacio topológico conexo:

i) Se define $b_0(X)$ = (número de componentes de X) -1, si este número es finito y $b_0(X) = \infty$ en cualquier otro caso.
X es insular si $b_0(X) < \infty$.

ii) Se define el grado de multicoherencia de X como
$r(X) = \max\{ b_0(A \cap B) :$ A,B son subconjuntos cerrados conexos de X y $X = A \cup B \}$.

X es unicoherente si $r(X) = 0$.

iii) Se define el grado abierto de multicoherencia de X, como
$r_A(X) = \max\{ b_0(U \cap V) :$ U,V regiones de X y $X = U \cup V \}$.

X es unicoherente abierto si $r_A(X) = 0$.

iv) Se define el grado débil de multicoherencia de X como
$r_D(X) = \max\{ b_0(A \cap B) :$ A,B son subconjuntos cerrados conexos de X, A compacto y $X = A \cup B \}$.

X es débilmente unicoherente si $r_D(X) = 0$.

v) Se define el grado de γ-multicoherencia de X como
$r_\gamma(X) = \max\{ b_0(A \cap B) :$ A,B son subconjuntos cerrados conexos de X con frontera compacta y $X = A \cup B \}$.

X es γ-unicoherente si $r_\gamma(X) = 0$.

1.8. Proposición. Si X es un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces son equivalentes:

i) $b_0(X) \geq n$.

ii) Existen $C_1, \ldots, C_{n+1}$ subconjuntos cerrados no vacíos de X, ajenos dos a dos, tales que $X = C_1 \cup \ldots \cup C_{n+1}$.

iii) Existen $U_1, \ldots, U_{n+1}$ subconjuntos abiertos no vacíos de X, ajenos dos a dos, tales que $X = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+1}$.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Voy a probar inductivamente que si $k \in \overline{n+1}$, entonces existen $C_1^k, \ldots, C_k^k$ subconjuntos cerrados no vacíos de X, ajenos dos a dos, tales que $X = C_1^k \cup \ldots \cup C_k^k$. Si $k = 1$, basta tomar $C_1^1 = X$. Supóngase que esto es cierto para k y que $k+1 \leq n+1$. Entonces $k < n+1$ y $X = C_1^k \cup \ldots \cup C_k^k$. Como X tiene al menos $n+1$ componentes y $k<n+1$, no es posible que todos los conjuntos $C_1^k, \ldots, C_k^k$ sean conexos. Se puede suponer entonces, sin pérdida de generalidad que C_k^k no es conexo, de manera que existen C_k^{k+1} , C_{k+1}^{k+1} dos cerrados en C_k^k (y por tanto, en X) no vacíos y ajenos dos a dos, tales que $C_k^k = C_k^{k+1} \cup C_{k+1}^{k+1}$. Haciendo $C_1^{k+1} = C_1^k, \ldots, C_{k-1}^{k+1} = C_{k-1}^k$, entonces $C_1^{k+1}, \ldots, C_k^{k+1}, C_{k+1}^{k+1}$ tienen las propiedades requeridas. Esto termina la inducción, y para probar la implicación basta tomar $k = n+1$.

ii) $\Rightarrow$ iii) y iii) $\Rightarrow$ i) son inmediatas.

1.9. Definición. Dados X y Y dos espacios topolgicos:

i) Una función $f: X \to Y$ es monótona, si:

$f^{-1}(y)$ es conexo para cualquier $y \in Y$.

ii) Si A es un subconjunto de X, se dice que A es simple en X si A y $X-A$ son conexos.

1.10. Proposición. Sea $f: X \to Y$ una función: sobre, cerrada y monótona. Si A es un subconjunto conexo de Y, entonces $f^{-1}(A)$ es conexo.

Demostración. Supóngase que A es un subconjunto conexo de Y y que $f^{-1}(A)$ no lo es. Entonces existen B,D cerrados en X tales que $f^{-1}(A) \subset B \cup D$, $f^{-1}(A) \cap B \neq \phi$; $f^{-1}(A) \cap D \neq \phi$ y $f^{-1}(A) \cap B \cap D = \phi$. Entonces $A \subset f(f^{-1}(A)) \subset f(B \cup D) = f(B) \cup f(D)$; además $f(B)$, $f(D)$ son cerrados en Y; $\phi \neq f(f^{-1}(A) \cap B) = A \cap f(B)$ y $\phi \neq f(f^{-1}(A) \cap D) = A \cap f(D)$. Como A es conexo, se tiene que $A \cap f(B) \cap f(D) \neq \phi$; sea $y \in A \cap f(B) \cap f(D)$, entonces $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(A) \subset B \cup D$. Ya que $y \in f(B) \cap f(D)$, se tiene que $f^{-1}(y) \cap B \neq \phi$ y $f^{-1}(y) \cap D \neq \phi$, además $f^{-1}(y) \cap B \cap D \subset f^{-1}(A) \cap B \cap D = \phi$. Esto contradice el hecho de que $f^{-1}(y)$ es conexo. Por tanto, $f^{-1}(A)$ es conexo.

1.11. Proposición. Si $f: X \to Y$ es sobre, monótona, cerrada y continua, entonces $r(Y) \leq r(X)$.

Demostración. Supóngase que $Y = A \cup B$, A,B son subconjuntos cerrados conexos de Y. Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $C_1, \ldots, C_{n+1}$

cerrados en Y, no vacíos y ajenos dos a dos tales que $A \cap B = C_1 \cup \ldots \cup C_{n+1}$. Por la proposición 1.10, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos y como f es continua, también son cerrados en X. Además $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(C_1 \cup \ldots \cup C_{n+1}) = f^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(C_{n+1})$. Como cada C_i es no vacío y f es sobre, se tiene que $f^{-1}(C_i)$ es no vacío. Por otra parte, $f^{-1}(C_1), \ldots, f^{-1}(C_{n+1})$ son cerrados en X y ajenos dos a dos. Por tanto, según la proposición 1.8 $b_0(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) > n$, es decir, $b_0(A \cap B) < b_0(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))$. Por tanto, $r(Y) < r(X)$.

Para finalizar esta sección, enunciaré tres proposiciones conocidas de conexidad, de las cuales sólo probaré la última de ellas.

1.12. Proposición. Si X es un espacio localmente conexo, A un subconjunto de X y D es una componente de A, entonces $Fr_X(D) \subset Fr_X(A)$.

1.13. Proposición. Si X es un espacio conexo y A es un subconjunto conexo de X, entonces cualquier componente de $X - A$ es simple en X. (Teorema 10 de [14]).

1.14. Proposición. Si X es un espacio localmente conexo, U es una región de X y F un conjunto finito contenido en U, entonces existe V una región de X tal que $F \subset V \subset C_X(V) \subset U$.

Demostración. Para cada $x \in U$, sea V_x una región de X tal que $x \in V_x$ y $V_x \subset C_X(V_x) \subset U$. Sean $\mathcal{U} = \{ V_x : x \in U \}$ y $x_0 \in U$ fijo. Supongamos que $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (si F es vacío la demostración es inmediata); de la conexidad de U se tiene que, para cada $i \in \bar{n}$ existen $n_i \in \mathbb{N}$ y $V_1^i, \ldots, V_{n_i}^i$ elementos de $\mathcal{U}$ tales que $x_0 \in V_1^i$, $x_i \in V_{n_i}^i$ y $V_j^i \cap V_{j-1}^i \neq \emptyset$ para cada $j \in \bar{n}_i - \{1\}$ (cuando $1 < n_i$). Si para cada $i \in \bar{n}$ se define $V_i = V_1^i \cup \ldots \cup V_{n_i}^i$, entonces $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ satisface las propiedades requeridas.

2. UNA CARACTERIZACION DE MULTICOHERENCIA.

2.1. Lema. Sean, X un espacio conexo, localmente conexo; U, V abiertos ajenos en X, $p \in U$ y $q \in V$. Entonces existe W abierto en X tal que $p \in W$, $q \in X - C_X(W)$, $Fr_X(W) \subset X - (U \cup V)$ y W es simple en X.

Demostración. Sea D la componente de $X - U$ que contiene a q. Entonces D es cerrado en X y $p \notin D$. Si W es la componente de $X - D$ que contiene a p, entonces W es un abierto simple en X (proposición 1.13), $p \in W$ y $q \notin W$. Por la proposición 1.12, $Fr_X(W) \subset Fr_X(X - D) = Fr_X(D) \subset Fr_X(X - U) = Fr_X(U) \subset X - (U \cup V)$. De aquí que $Fr_X(W) \subset X - (U \cup V)$ y $q \notin Fr_X(W)$. Por tanto, $q \in X - C_X(W)$.

2.2. Lema. Sean, X un espacio conexo, localmente conexo; W una región de X; F un cerrado en X; $w \in W$ y $G = Fr_X(W) - F$, tales que $F \subset X - W$ y $G \neq \phi$. Entonces, existe H un subconjunto cerrado conexo de X tal que $H \subset W \cup G$, $w \in H$ y $H \cap G \neq \phi$.

Demostración. Sean $g \in G$ y U una región de X tales que $g \in U$ y $C_X(U) \cap F = \phi$. Como $g \in Fr_X(W)$ se puede elegir un punto $x \in U \cap W$. Sea V la componente de $U \cap W$ que contiene a x. Se probará que $C_X(V) \cap Fr_X(W) \neq \phi$. De no ser así, $C_X(V) \subset W$ y entonces $C_U(V) = C_X(V) \cap U \subset W \cap U$. Pero $C_U(V)$ es conexo e intersecta a V, de manera que $V = C_U(V)$. Entonces V es abierto y cerrado en U, de manera que $U = V$ y, por tanto, $U \subset W$, lo cual es una contradicción ya que $g \in U \cap Fr_X(W)$. Por tanto, $C_X(V) \cap Fr_X(W) \neq \phi$. Nótese además que $C_X(V)$ es conexo, $C_X(V) \subset W \cup G$ y $C_X(V) \cap G \neq \phi$. Usando la proposición 1.14 se construye L, un subconjunto cerrado conexo de X, tal que $\omega \in L$, $L \cap V \neq \phi$ y $L \subset W$. Claramente $H = L \cup C_X(V)$ satisface las propiedades requeridas.

2.3. Definición. Sean, N un subconjunto de X, $m \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_m \in X$:

i) N parte a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X, si $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset X - N$ y el conjunto $\{p_1, \ldots, p_m\}$ intersecta al menos a dos componentes distintas de $X - N$.

ii) N dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X, si existen $E_1, \ldots, E_m$ componentes de $X - N$, distintas dos a dos, tales que $p_1 \in E_1, \ldots, p_m \in E_m$.

2.4. Lema. Sean, X un espacio conexo, localmente conexo; $m \in \mathbb{N}$; $p_1, \ldots, p_m \in X$ y Q_1, Q_2 subconjuntos cerrados ajeños de X tales que, $r(X) < \infty$ y $Q_1 \cup Q_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X. Supóngase que ninguno de los conjuntos Q_1 y Q_2 parte a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X. Entonces existen N_1, N_2, F_1, F_2 cerrados en X tales que, N_1, N_2 son insulares; $N_1 \subset Q_1$; $N_2 \subset Q_2$; $N_1 \cup N_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X; $N_1 \cup \{p_1, \ldots, p_m\} \subset F_1$; $N_2 \cup \{p_1, \ldots, p_m\} \subset F_2$; F_1, F_2 son conexos; $F_1 \cap N_2 = \phi$ y $F_2 \cap N_1 = \phi$.

Demostración. Como $Q_1 \cup Q_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X, existen componentes $U_1, \ldots, U_m$ de $X - (Q_1 \cup Q_2)$, distintos dos a dos, tales que $p_1 \in U_1; \ldots; p_m \in U_m$. Sea $U = \cup\{ E : E$ es componente de $X - (Q_1 \cup Q_2)$ y $E \notin \{U_1, \ldots, U_m\}\}$. Dados $i, j \in \bar{m}$ tales que $i < j$, aplicando el lema 2.1 a los puntos p_i, p_j y a los abiertos $U \cup U_1 \cup \ldots \cup U_i$, $U_{i+1} \cup \ldots \cup U_m$, se obtiene un conjunto V_{ij} abierto simple en X tal que $p_i \in V_{ij}$, $p_j \in X - C_X(V_{ij})$ y $Fr_X(V_{ij}) \subset X - (U \cup U_1 \cup \ldots \cup U_m)$. Como V_{ij} es simple en X y $r(X) < \infty$, se tiene que $Fr_X(V_{ij})$ es insular.

Dada C componente de $Fr_X(V_{ij})$, se tiene que $C \subset X - (U \cup U_1 \cup \ldots \cup U_m) = Q_1 \cup Q_2$ y como Q_1, Q_2 son subconjuntos cerrados ajenos de X, se tiene que $C \subset Q_1$ ó $C \subset Q_2$. Sean:

$$Q^1_{ij} = \cup \{C : C \text{ es componente de } Fr_X(V_{ij}) \text{ y } C \subset Q_1\} \text{ y}$$

$$Q^2_{ij} = \cup \{C : C \text{ es componente de } Fr_X(V_{ij}) \text{ y } C \subset Q_2\}.$$

Nótese que, Q^1_{ij}, Q^2_{ij} son subconjuntos cerrados insulares de X; $Q^1_{ij} \cup Q^2_{ij} = Fr_X(V_{ij})$ y $Q^1_{ij} \subset Q_1$, $Q^2_{ij} \subset Q_2$.

Defínase $M_1 = \cup \{Q^1_{ij} : i, j \in \bar{m};\ i < j\}$ y $M_2 = \cup \{Q^2_{ij} : i, j \in \bar{m};\ i < j\}$. Entonces M_1, M_2 son subconjuntos cerrados insulares de X; $M_1 \cup M_2 = \cup \{Fr_X(V_{ij}) : i, j \in \bar{m};\ i < j\}$, de manera que $M_1 \cup M_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X;

$M_1 \subset Q_1$; $M_2 \subset Q_2$; $M_1 \cap M_2 = \phi$. Para $k \in \bar{m}$, sea W_k la componente de $X - (M_1 \cup M_2)$ que contiene a p_k. Entonces $W_1, \ldots, W_m$ son distintas dos a dos. Supóngase que $R_1, \ldots, R_r$ son las componentes de M_1 y que $S_1, \ldots, S_s$ son las componentes de M_2.

Definimos $N_1 = \cup \{R_i : i \in \bar{r}$ y $R_i \cap (Fr_X(W_1) \cup \ldots \cup Fr_X(W_m)) \neq \phi\}$ y $N_2 = \cup \{S_i : i \in \bar{s}$ y $S_i \cap (Fr_X(W_1) \cup \ldots \cup Fr_X(W_m)) \neq \phi\}$. Entonces, N_1, N_2 son subconjuntos cerrados ajenos e insulares de X; $N_1 \subset Q_1$ y $N_2 \subset Q_2$. Por la proposición 1.12, se tiene que para $k \in \bar{m}$, $Fr_X(W_k) \subset Fr_X(M_1 \cup M_2) \subset M_1 \cup M_2$; de aquí se deduce que $Fr_X(W_k) \subset N_1 \cup N_2$. Por tanto, $Fr_X(W_1) \cup \ldots \cup Fr_X(W_m) \subset N_1 \cup N_2$. Como $W_1, \ldots, W_m$ son abiertos en X, ajenos dos a dos, y $p_1 \in W_1, \ldots, p_m \in W_m$, se tiene que $Fr_X(W_1) \cup \ldots \cup Fr_X(W_m)$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$; de aquí se obtiene que $N_1 \cup N_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en X.

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $N_1 = R_1 \cup \ldots \cup R_u$ ($u \leq r$) y que $N_2 = S_1 \cup \ldots \cup S_v$ ($v \leq s$). Ya que $M_1 \cap M_2 = \phi$, se tiene que $(N_1 \cup N_2) - R_i$ es cerrado en X para toda $i \in \bar{u}$ y que $(N_1 \cup N_2) - S_i$ es cerrado en X para toda $i \in \bar{v}$.

Para $i \in \bar{u}$, sea $k_i \in \bar{m}$ tal que $R_i \cap Fr_X(W_{k_i}) \neq \phi$. Aplicando el lema 2.2 al abierto en X, W_{k_i}, al punto $p_{k_i} \in W_{k_i}$ y al cerrado en X, $(N_1 \cup N_2) - R_i \subset X - W_{k_i}$ (observando que $Fr_X(W_{k_i}) - ((N_1 \cup N_2) - R_i) = Fr_X(W_{k_i}) \cap R_i \neq \phi$), se tiene que existe H_i un subconjunto cerrado conexo de X, tal que $H_i \subset W_{k_i} \cup R_i$, $p_{k_i} \in H_i$ y $H_i \cap R_i \neq \phi$. Similarmente, para cada $j \in \bar{v}$, existen $l_j \in \bar{m}$ y L_j un subconjunto cerrado conexo de X tal que $p_{l_j} \in L_j$, $L_j \subset W_{l_j} \cup S_j$ y $L_j \cap S_j \neq \phi$.

Como $N_1 \subset Q_1$ y Q_1 no parte a $\{p_1,\ldots,p_m\}$ en X, tampoco N_1 parte a $\{p_1,\ldots,p_m\}$ en X; de aquí que la componente C_1 de $X-N_1$ que contiene a p_1, contiene a todos los puntos $p_1,\ldots,p_m$. Aplicando la proposición 1.14, se obtiene T_1 un subconjunto cerrado conexo de X tal que $\{p_1,\ldots,p_m\} \subset T_1 \subset C_1$. Análogamente, existen C_2, T_2 tales que C_2 es componente de $X-N_2$, T_2 es un subconjunto cerrado conexo de X y $\{p_1,\ldots,p_m\} \subset T_2 \subset C_2$.

Defínase $F_1 = T_2 \cup N_1 \cup (\cup\{H_i : i \in \bar{u}\})$ y $F_2 = T_1 \cup N_2 \cup (\cup\{L_j : j \in \bar{v}\})$. Entonces F_1, F_2 son subconjuntos cerrados conexos de X, $N_1 \cup \{p_1,\ldots,p_m\} \subset N_1 \cup T_2 \subset F_1$; $N_2 \cup \{p_1,\ldots,p_m\} \subset N_2 \cup T_1 \subset F_2$; $F_1 \cap N_2 = \phi$ y $F_2 \cap N_1 = \phi$.

2.5. Teorema. Sea X un espacio conexo, localmente conexo y normal, y sea $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Si Q_1, Q_2 son subconjuntos cerrados ajenos de X y $p_1,\ldots,p_{n+2} \in X$ son tales que, $Q_1 \cup Q_2$ dispersa a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X, entonces Q_i parte a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X para alguna $i \in \bar{2}$.

ii) $r(X) \leq n$.

Demostración. ii) $\Rightarrow$ i). Supóngase que Q_1, Q_2 son subconjuntos cerrados ajenos de X y $p_1,\ldots,p_{n+2} \in X$ son tales que $Q_1 \cup Q_2$ dispersa a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X, y que tanto Q_1 como Q_2 no parte a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X.

Según el lema 2.4, existen N_1, N_2, F_1, F_2 cerrados en X, tales que N_1, N_2 son insulares, $N_1 \subset Q_1$, $N_2 \subset Q_2$, $N_1 \cup N_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ en X, $N_1 \cup \{p_1, \ldots, p_{n+2}\} \subset F_1$, $N_2 \cup \{p_1, \ldots, p_{n+2}\} \subset F_2$, F_1, F_2 son conexos, $F_1 \cap N_2 = \phi$ y $F_2 \cap N_1 = \phi$. Sean $N_1 = R_1 \cup \ldots \cup R_u$ y $N_2 = S_1 \cup \ldots \cup S_v$ las descomposiciones en componentes de N_1 y N_2; como $N_1 \cap N_2 = \phi$, se tiene que los conjuntos $R_1, \ldots, R_u, S_1, \ldots, S_v$ son subconjuntos cerrados conexos de X, ajenos dos a dos.

Dado que X es normal y localmente conexo, y que $N_1 \cap F_2 = \phi$ y $N_2 \cap F_1 = \phi$, existen $W_1, \ldots, W_u, Y_1, \ldots, Y_v$ regiones de X, ajenas dos a dos, tales que $R_1 \subset W_1, \ldots, R_u \subset W_u, S_1 \subset Y_1, \ldots, S_v \subset Y_v$; $F_1 \cap (Y_1 \cup \ldots \cup Y_v) = \phi$ y $F_2 \cap (W_1 \cup \ldots \cup W_u) = \phi$. Sean, $W = W_1 \cup \ldots \cup W_u$; $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_v$; K la componente de $X - W$ que contiene a F_2 y L la componente de $X - Y$ que contiene a F_1. Defínase $K^* = K \cup C_X(\cup\{T : T$ es componente de $X - Y$ y $T \neq L\})$ y $L^* = L \cup C_X(\cup\{T : T$ es componente de $X - W$ y $T \neq K\})$.

Probaré que L^*, K^* son subconjuntos cerrados conexos de X tales que $X = L^* \cup K^*$ y $b_0(L^* \cap K^*) \geq n+1$. Esto será una contradicción, ya que $r(X) \leq n$. Con esto terminará la prueba de que ii) $\Rightarrow$ i).

En primer término, es claro que L^*, K^* son cerrados en X. Ahora mostraré que $Y \subset K$ y $W \subset L$. Dada $i \in \bar{v}$, se tiene que $S_i \subset Y_i \subset X - W$. Además, $S_i \subset N_2 \subset F_2$ y $S_i \neq \phi$, de manera que $F_2 \cup Y_i$ es un subconjunto conexo de $X - W$ y, por tanto, $F_2 \cup Y \subset K$. De aquí se concluye que $Y \subset K$. De manera similar se prueba que $W \subset L$.

Para ver que K^* es conexo, tómese T una componente de

$X-Y$ distinta de L. Entonces $\phi \neq T \neq X$ y como X es conexo, se tiene que $Fr_X(T) \neq \phi$. Usando la proposición 1.12, se tiene que $Fr_X(T) \subset Fr_X(X-Y) = Fr_X(Y) \subset C_X(Y) \subset K$, de manera que $T \cup K$ es conexo. Por tanto, K^* es conexo. De manera análoga se prueba que L^* es conexo.

Tómese $x \in X$; si $x \in Y$, entonces $x \notin W$, así que $x \in K$ ó $x \in L^*$; y si $x \notin Y$, entonces $x \in L$ ó $x \in K^*$. De modo que $X = L^* \cup K^*$.

Si T es una componente de $X-Y$ distinta de L, como $W \subset L$, se tiene que $T \subset X-W$, de manera que $C_X(\cup \{T : T$ es componente de $X-Y$ y $T \neq L\}) \subset X-W$ y, por tanto, $K^* \subset X-W$. En forma análoga se demuestra que $L^* \subset X-Y$. De manera que $L^* \cap K^* \subset (X-W) \cap (X-Y) = X-(W \cup Y)$. Como además $N_1 \cup N_2 \subset Y \cup W$, se tiene que $L^* \cap K^* \subset X-(N_1 \cup N_2)$.

Ya que $N_1 \cup N_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ en X, existen $E_1, \ldots, E_{n+2}$, componentes de $X-(N_1 \cup N_2)$, distintas dos a dos, tales que $p_1 \in E_1, \ldots, p_{n+2} \in E_{n+2}$. Entonces, si $D_1, \ldots, D_{n+2}$ son las componentes de $L^* \cap K^*$ que cumplen la propiedad de que $p_1 \in D_1, \ldots, p_{n+2} \in D_{n+2}$, se tiene que $D_1 \subset E_1, \ldots, D_{n+2} \subset E_{n+2}$, de manera que $D_1, \ldots, D_{n+2}$ son distintas dos a dos. Por tanto $b_0(L^* \cap K^*) \geq n+1$.

i) $\Rightarrow$ ii). Supóngase que no se satisface ii). Entonces existen A,B subconjuntos cerrados conexos de X tales que $X = A \cup B$ y $b_0(A \cap B) \geq n+1$; de acuerdo con la proposición 1.8, existen $C_1, \ldots, C_{n+2}$ subconjuntos cerrados no vacíos de X, ajenos dos a dos, tales que $A \cap B = C_1 \cup \ldots \cup C_{n+2}$.

Usando la normalidad de X, se obtienen $U_1, \ldots, U_{n+2}$

abiertos en X, ajenos dos a dos, tales que $C_1 \subset U_1, \ldots, C_{n+2} \subset U_{n+2}$. Defínase $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+2}$, $Q_1 = A - U$ y $Q_2 = B - U$; y elíjanse puntos $p_1 \in C_1, \ldots, p_{n+2} \in C_{n+2}$. Nótese que $Q_1 \cap Q_2 = \phi$.

Claramente $X - (Q_1 \cup Q_2) = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+2}$; de aquí que $Q_1 \cup Q_2$ dispersa a $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ en X. Sin embargo, $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\} \subset A \subset X - Q_2$; $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\} \subset B \subset X - Q_1$ y A,B son conexos. Esto prueba que ninguno de los conjuntos Q_1, Q_2 parte a $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ en X y en consecuencia, que no se satisface la propiedad i).

Con esto se termina la prueba del teorema.

En el teorema anterior, para el caso n = 0, no es necesario suponer que X sea normal (Ver 3.2, teorema 1 de [19]).

3. GRADO DE MULTICOHERENCIA Y GRADO ABIERTO DE MULTICOHERENCIA DE EXTENSIONES PERFECTAS.

3.1. Lema. Sean, Z una compactación perfecta de X, y A,B,C cerrados en Z tales que, $Z = A \cup B$ y $C = A \cap B$. Supóngase que $L = \cup \{D : D$ es componente de C y $D \cap X \neq \phi\}$ es no vacío y cerrado en Z. Entonces $L = C$.

Demostración. Supóngase que existe una componente C_0 de C que no intersecta a X. Defínase $F = C \cap X = L \cap X$, $U_A = (A - B) \cap X$ y $U_B = (B - A) \cap X$. Entonces F es cerrado en X; $F \subset L$; U_A, U_B son abiertos en X; $U_A \subset A$, $U_B \subset B$; $X = F \cup U_A \cup U_B$; $X - F = U_A \cup U_B$ y $U_A \cap U_B = \phi$. Por el teorema 1 de [17] y la proposición 1.2, se tiene que $Z - C_Z(F) = \langle U_A \rangle \cup \langle U_B \rangle$ y $\langle U_A \rangle \cap \langle U_B \rangle = \phi$. Como $C_Z(F) \subset L$, se tiene que $C_Z(F) \cap C_0 = \phi$, así que $C_0 \subset \langle U_A \rangle \cup \langle U_B \rangle$ y ya que C_0 es conexo, debe ocurrir que $C_0 \subset \langle U_A \rangle$ ó $C_0 \subset \langle U_B \rangle$. Supóngase que $C_0 \subset \langle U_A \rangle$.

Por la normalidad de Z, existe W abierto en Z, tal que $C_0 \subset W \subset C_Z(W) \subset \langle U_A \rangle$. Sea $D = (C \cap (Z - W)) \cup L$. Entonces D es compacto y $D \cap C_0 = \phi$. Ya que C es compacto, se tiene que sus componentes y cuasi-componentes deben coincidir (lema 6.30

de [2]). Por tanto C_0 es una cuasi-componente de C. De aquí que para cada $d \in D \subset C$ existe un conjunto Y_d que es abierto y cerrado en C, tal que $C_0 \subset Y_d$ y $d \in C - Y_d$. Entonces $\{C - Y_d : d \in D\}$ es una cubierta de D constituida por abiertos en C, de manera que existen $m \in \mathbb{N}$ y $d_1, \ldots, d_m \in D$ tales que $D \subset (C - Y_{d_1}) \cup \ldots \cup (C - Y_{d_m}) = C - (Y_{d_1} \cap \ldots \cap Y_{d_m})$.

Defínase $D_1 = C - (Y_{d_1} \cap \ldots \cap Y_{d_m})$, $D_2 = Y_{d_1} \cap \ldots \cap Y_{d_m}$; entonces D_1 y D_2 son cerrados en C (y por tanto en Z); $C_0 \subset D_2$; $L \subset D_1$; $D_1 \cup D_2 = C$; $D_1 \cap D_2 = \emptyset$; además, $D_2 \cap (Z - W) \subset C \cap (Z - W) \subset D \subset D_1$ de aquí que $D_2 \cap (Z - W) = \emptyset$ y $D_2 \subset W$.

Como Z es normal, existen U_1, U_2 abiertos en Z tales que $D_1 \subset U_1$, $D_2 \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Defínase $U = W \cap U_2$; como $C_0 \subset D_2 \subset U_2 \cap W = U$, se tiene que $U \cap B \neq \emptyset$ y ya que $L \subset D \subset D_1 \subset U_1 \subset (Z - U_2) \subset (Z - U)$, se tiene que $B \cap (Z - U) \neq \emptyset$. Dado que B es conexo, podemos asegurar que $B \cap Fr_Z(U) \neq \emptyset$. Tómese un punto $z_0 \in B \cap Fr_Z(U)$. Entonces $z_0 \in C_Z(U) \subset C_Z(W) \subset \langle U_A \rangle \subset C_Z(U_A) \subset C_Z(A) = A$, así que $z_0 \in A \cap B$, de manera que $z_0 \in D_1 \cup D_2$. Como $z_0 \in C_Z(U_2)$, se tiene que $z_0 \notin U_1$ de donde, $z_0 \notin D_1$. Por tanto $z_0 \in D_2 \subset W \cap U_2 = U$. Esto implica que $z_0 \in U$ y $z_0 \in Fr_Z(U)$, lo cual es absurdo. Por tanto, $L = C$.

3.2. Teorema. Sean, X un espacio conexo, localmente conexo y Z una compactación perfecta de X. Entonces:

i) Si X es unicoherente, también Z es unicoherente.

ii) Si X es normal, se tiene que $r(Z) \leq r(X)$.

Demostración. Probaré i) y ii) simultaneamente. Si $r(X) = \infty$, no hay nada que probar. Supóngase entonces que $r(X) = n$, donde $n \in \mathbb{N}^*$. Supóngase también que $r(Z) > n$. Entonces existen A,B subconjuntos cerrados conexos de Z, tales que $Z = A \cup B$ y $b_0(A \cap B) \geq n+1$. Sea $C = A \cap B$.

Supóngase que $C \subset Z - X$; entonces $X \subset Z - C$, así que $(A \cap X) \cap (B \cap X) = \phi$. De la conexidad de X, se deduce que $A \cap X = \phi$ ó $B \cap X = \phi$. Supóngase que $B \cap X = \phi$. Entonces $X \subset A$ y como A es cerrado en Z, tenemos que $A = Z$. De donde, $C = A \cap B = Z \cap B = B$, lo que implica que C es conexo; esto es absurdo ya que $b_0(C) \geq 1$. Esta contradicción prueba que $C \cap X \neq \phi$.

Como C tiene al menos $n+2$ componentes, aplicando el lema 3.1, se deduce que existen $C_1,\ldots,C_{n+2}$ componentes de C que intersectan a X. Como C es compacto sus componentes y cuasi-componentes coinciden. Existen entonces $F_1,\ldots,F_{n+2}$ subconjuntos cerrados de C (y, por tanto, de Z), ajenos dos a dos, tales que $C = F_1 \cup \ldots \cup F_{n+2}$ y $C_1 \subset F_1,\ldots,C_{n+2} \subset F_{n+2}$. Por la normalidad de Z, existen $U_1^*,\ldots,U_{n+2}^*$ abiertos en Z, ajenos dos a dos, tales que $F_1 \subset U_1^*,\ldots,F_{n+2} \subset U_{n+2}^*$.

Defínase $U_1 = U_1^* \cap X,\ldots, U_{n+2} = U_{n+2}^* \cap X$; $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+2}$; $Q_1 = (A \cap X) - U$; $Q_2 = (B \cap X) - U$ y elijanse puntos $p_1 \in C_1 \cap X,\ldots,p_{n+2} \in C_{n+2} \cap X$. Entonces Q_1, Q_2 son subconjuntos cerrados ajenos de X, $X - (Q_1 \cup Q_2) = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+2}$ y $p_1 \in U_1,\ldots,p_{n+2} \in U_{n+2}$, de modo que $Q_1 \cup Q_2$ dispersa a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X. Aplicando el teorema 2.5 (ó la observación posterior, según sea el caso), se tiene que Q_1 separa a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X ó Q_2 separa a $\{p_1,\ldots,p_{n+2}\}$ en X.

Supóngase que Q_1 separa a $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ en X (el caso en que Q_2 separa a $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ en X, se trata de manera similar). Supóngase también, sin pérdida de generalidad, que p_1 y p_2 están en distintas componentes de $X - Q_1$. Sean, D la componente de $X - Q_1$ que contiene a p_1 y $E = \cup \{H : H$ es componente de $X - Q_1$ y $H \neq D\}$.

Dado que X es localmente conexo, se tiene que E y D son abiertos en X. Además, $p_1 \in D$, $p_2 \in E$, $D \cap E = \phi$ y $X - Q_1 = D \cup E$. Del teorema 1 de [17] y la proposición 1.2, se tiene que, $Z - C_Z(Q_1) = \langle D \rangle \cup \langle E \rangle$ y $\langle D \rangle \cap \langle E \rangle = \phi$. Como $p_1 \in \langle D \rangle \cap B$, $p_2 \in \langle E \rangle \cap B$ y B es conexo, se tiene que $B \cap C_Z(Q_1) \neq \phi$. Por otra parte, $Q_1 \subset A$ así que $C_Z(Q_1) \subset C_Z(A) = A$ de donde $B \cap A \cap C_Z(Q_1) \neq \phi$. Pero $Q_1 \subset X - U$, así que $C_Z(Q_1) \subset Z - (U_1^* \cup \ldots \cup U_{n+2}^*) \subset Z - C = Z - (A \cap B)$; esto implica que $C_Z(Q_1) \cap A \cap B = \phi$. Esta contradicción termina la prueba del teorema.

3.3. Teorema. Si X es un espacio normal, entonces $r(X) \leq r(\beta X)$.

Demostración. Sea $r(\beta X) = n \in \mathbb{N}^*$ y supóngase que $r(X) > r(\beta X)$. Entonces existen A, B subconjuntos cerrados conexos de X tales que $X = A \cup B$ y $b_0(A \cap B) \geq n+1$. De la proposición 1.8, se sabe que existen $C_1, \ldots, C_{n+2}$ cerrados en $A \cap B$ (y, por tanto, en X), no vacíos, ajenos dos a dos, tales que $A \cap B = C_1 \cup \ldots \cup C_{n+2}$.

Por otra parte, $\beta X = C_{\beta X}(A) \cup C_{\beta X}(B)$ y $C_{\beta X}(A)$ y $C_{\beta X}(B)$

son subconjuntos cerrados conexos de βX. De la proposición 1.3 y el lema VI.7 de [11], se sabe que $C_{\beta X}(A) \cap C_{\beta X}(B) = C_{\beta X}(A \cap B) = C_{\beta X}(C_1) \cup \ldots \cup C_{\beta X}(C_{n+2})$. Dado que X es normal, se tiene que $C_{\beta X}(C_1), \ldots, C_{\beta X}(C_{n+2})$ son ajenos dos a dos. Además, $C_{\beta X}(C_1), \ldots, C_{\beta X}(C_{n+2})$ son subconjuntos cerrados no vacíos de βX. Usando nuevamente la proposición 1.8, se deduce que $b_0(C_{\beta X}(A) \cap C_{\beta X}(B)) \geq n+1$, lo cual es una contradicción ya que $r(\beta X) = n$. Por tanto, $r(X) \leq r(\beta X)$.

3.4. Corolario. Si X es un espacio conexo, localmente conexo y normal, entonces $r(X) = r(\beta X)$.

3.5. Corolario. Sean, X un espacio conexo, localmente conexo y normal, Z una extensión perfecta de X y Z un espacio normal. Entonces $r(Z) \leq r(X)$.

Demostración. Del teorema 3.3, se tiene que $r(Z) \leq r(\beta Z)$. De la proposición 1.6 y el lema VI.7 de [11], se tiene que βZ es una compactación perfecta de X, así que, por el teorema 3.2, $r(\beta Z) \leq r(X)$.

3.6. Corolario. Sean, X un espacio conexo, localmente conexo y unicoherente, Z una extensión perfecta de X y Z un espacio normal. Entonces Z es unicoherente.

3.7. Teorema. Si Z es una extensión perfecta de X, entonces $r_A(Z) \leq r_A(X)$.

Demostración. Sea $r_A(X) = n \in \mathbb{N}^*$ y supóngase que $r_A(X) < r_A(Z)$. Entonces, existen U, V regiones de Z, tales que $Z = U \cup V$ y $b_0(U \cap V) \geq n+1$, de manera que existen $W_1, \ldots, W_{n+2}$ abiertos en $U \cap V$ (por tanto en Z), ajenos dos a dos, no vacíos, tales que $U \cap V = W_1 \cup \ldots \cup W_{n+2}$ (proposición 1.8).

Defínase $U^* = U \cap X$ y $V^* = V \cap X$. Entonces, por la proposición 1.5, se sabe que U^* y V^* son regiones de X; además, $X = U^* \cup V^*$, $U^* \cap V^* = U \cap V \cap X = (W_1 \cap X) \cup \ldots \cup (W_{n+2} \cap X)$, $W_1 \cap X, \ldots, W_{n+2} \cap X$ son abiertos en X, no vacíos y ajenos dos a dos. De aquí que $b_0(U^* \cap V^*) \geq n+1$ (proposición 1.8), lo cual no es posible ya que $r_A(X) = n$. Por tanto, $r_A(Z) \leq r_A(X)$.

3.8. Teorema. Si X es un espacio normal, entonces $r_A(X) \leq r_A(\beta X)$.

Demostración. Sea $r_A(\beta X) = n \in \mathbb{N}^*$ y supóngase que $r_A(\beta X) < r_A(X)$. Entonces existen U, V regiones de X, tales que $X = U \cup V$ y $b_0(U \cap V) \geq n+1$, de modo que existen $W_1, \ldots, W_{n+2}$ abiertos en $U \cap V$ (y, por tanto, en X), ajenos dos a dos, no vacíos, tales que $U \cap V = W_1 \cup \ldots \cup W_{n+2}$ (proposición 1.8).

Ya que $U \subset \langle U \rangle \subset C_{\beta X}(U)$ y $V \subset \langle V \rangle \subset C_{\beta X}(V)$, tenemos que $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son conexos; además $\langle U \rangle, \langle V \rangle$ son abiertos en βX, y por el teorema 1 de [17] y la proposición 1.2, se tiene que

$\langle U\rangle \cap \langle V\rangle = \langle U\cap V\rangle = \langle W_1 \cup \ldots \cup W_{n+2}\rangle = \langle W_1\rangle \cup \ldots \cup \langle W_{n+2}\rangle$. Claramente $\langle W_1\rangle, \ldots, \langle W_{n+2}\rangle$ son abiertos en βX, no vacíos tales que, si $i \neq j$, entonces $\langle W_i\rangle \cap \langle W_j\rangle = \langle W_i \cap W_j\rangle = \langle \phi\rangle = \phi$. Esto prueba (proposición 1.8) que $b_0(\langle U\rangle \cap \langle V\rangle) \geq n+1$.

Por último, ya que $X-U$ y $X-V$ son subconjuntos cerrados ajenos de X y X es normal, se tiene que $C_{\beta X}(X-U) \cap C_{\beta X}(X-V) = \phi$. De manera que $\langle U\rangle \cup \langle V\rangle = (\beta X - C_{\beta X}(X-U)) \cup (\beta X - C_{\beta X}(X-V)) = \beta X - (C_{\beta X}(X-U) \cap C_{\beta X}(X-V)) = \beta X - \phi = \beta X$. Resumiendo, $\langle U\rangle, \langle V\rangle$ son regiones de βX tales que $\beta X = \langle U\rangle \cup \langle V\rangle$ y $b_0(\langle U\rangle \cap \langle V\rangle) \geq n+1$. Esto contradice el hecho de que $r_\lambda(\beta X) = n$. Por tanto, $r_\lambda(X) \leq r_\lambda(\beta X)$.

3.9. Corolario. Si X es un espacio normal, entonces $r_\lambda(X) = r_\lambda(\beta X)$.

4. MULTICOHERENCIA Y COMPACTACION DE FREUDENTHAL.

A lo largo de esta sección se supondrá que X denota un espacio conexo, localmente conexo y periféricamente-compacto, y que γX es su compactación de Freudenthal [7].

4.1. Lema. γX tiene una base de regiones con frontera contenida en X.

Demostración. En el teorema VI.30 de [11], se prueba que γX tiene una base de abiertos con frontera contenida en X, de aquí que $\gamma X - X$ es totalmente disconexo, así que por el teorema 4.1 de [3], γX es un espacio localmente conexo. Con esto, la demostración de este lema es inmediata.

4.2. Lema. Sea U una región de γX y K un compacto, tales que $K \subset U$. Entonces existe V, una región de γX, tal que $K \subset V \subset U$ y $Fr_{\gamma X}(V) \subset X \cap U$.

Demostración. Según el lema 4.1, para cada $p \in U$, existe V_p una región de γX, tal que $p \in V_p \subset C_{\gamma X}(V_p) \subset U$ y $Fr_{\gamma X}(V_p) \subset X$. Por la compacidad de K, se sabe que existen $m \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_m \in U$ tales que $K \subset V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_m}$. Ya que U es conexo y $\{V_p : p \in U\}$ es una cubierta abierta de U, se tiene que existen $n \in \mathbb{N}$ y $p_{m+1}, \ldots, p_{m+n} \in U$ tales que $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset V_{p_{m+1}} \cup \ldots \cup V_{p_{m+n}}$ y $V_{p_{m+1}} \cap V_{p_{m+2}} \neq \phi, \ldots, V_{p_{m+n-1}} \cap V_{p_{m+n}} \neq \phi$.

Defínase $V = V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_m} \cup V_{p_{m+1}} \cup \ldots \cup V_{p_{m+n}}$, entonces $K \subset V$. Ya que $V_{p_{m+1}} \cup \ldots \cup V_{p_{m+n}}$ es conexo y contiene a $\{p_1, \ldots, p_m\}$, se tiene que V es también conexo. Como $Fr_{\gamma X}(V) \subset Fr_{\gamma X}(V_{p_1}) \cup \ldots \cup Fr_{\gamma X}(V_{p_{m+n}})$, se tiene que $Fr_{\gamma X}(V) \subset X \cap U$. Además, claramente V es abierto en γX.

4.3. Lema. Sean, $n \in \mathbb{N}^*$ y A, B subconjuntos cerrados conexos de γX tales que $\gamma X = A \cup B$ y $b_0(A \cap B) \geq n$. Entonces existen U_A, U_B regiones de γX tales que $A \subset U_A$, $B \subset U_B$, $Fr_{\gamma X}(U_A) \cup Fr_{\gamma X}(U_B) \subset X$ y $b_0(C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B)) \geq n$.

Demostración. Por la proposición 1.8, existen $C_1, \ldots, C_{n+1}$ cerrados en γX, no vacíos y ajenos dos a dos, tales que $A \cap B = C_1 \cup \ldots \cup C_{n+1}$.

De la normalidad de γX, existen $W_1, \ldots, W_{n+1}$ abiertos en γX, ajenos dos a dos, tales que $C_1 \subset W_1, \ldots, C_{n+1} \subset W_{n+1}$. Defínase $W = W_1 \cup \ldots \cup W_{n+1}$, $W_A = A \cup W$ y $W_B = B \cup W$; nótese que W_A y W_B son abiertos en γX, así que las componentes V_A y V_B de W_A y W_B que contienen a A y B respectivamente, son regiones de γX (lema 4.1).

De acuerdo con el lema 4.2, existen U_A, U_B regiones de γX tales que $A \subset U_A \subset V_A$, $B \subset U_B \subset V_B$, $Fr_{\gamma X}(U_A) \subset X \cap V_A$ y $Fr_{\gamma X}(U_B) \subset X \cap V_B$. Para $i \in \overline{n+1}$, defínase $F_i = C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B) \cap W_i$. Como $C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B) \subset V_A \cap V_B \subset W$, se tiene que $C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B) = F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1}$ y que para $i \in \overline{n+1}$, $F_i = C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B) \cap (\gamma X - (\cup \{W_j : j \in \overline{n+1} - \{i\}\}))$, de manera que $F_1, \ldots, F_{n+1}$ son cerrados en γX, no vacíos y ajenos dos a dos. Por tanto, (proposición 1.8) $b_0(C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B)) \geq n$.

4.4. Lema. Sean, A, B subconjuntos cerrados conexos de γX, $n \in \mathbb{N}^*$ y $K \subset \gamma X - X$ tales que, $\gamma X = A \cup B$, $b_0(A \cap B) \geq n$ y K es compacto. Entonces, existen A_*, B_* subconjuntos cerrados conexos de γX tales que; $\gamma X = A_* \cup B_*$, $b_0(A_* \cap B_*) \geq n$ y $K \subset A_* \cap B_*$.

Demostración. Se probará que, existen A_1, B_1 subconjuntos cerrados conexos de γX tales que; $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, $K \subset B_1$ y $b_0(A_1 \cap B_1) \geq n$.

Por el lema 4.3 y la proposición 1.8, se sabe que existen U_A, U_B regiones de γX y $G_1, \ldots, G_{n+1}$ cerrados en γX, no vacíos y ajenos dos a dos, tales que; $A \subset U_A$, $B \subset U_B$, $Fr_{\gamma X}(U_A) \cup Fr_{\gamma X}(U_B) \subset X$ y $C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B) = G_1 \cup \ldots \cup G_{n+1}$.

Sea $K_A = K \cap (\gamma X - U_B)$. Si $K_A = \phi$, entonces $A_1 = C_{\gamma X}(U_A)$ y $B_1 = C_{\gamma X}(U_B)$ satisfacen las propiedades requeridas. Supóngase que $K_A \neq \phi$. Nótese que $K_A \subset \gamma X - C_{\gamma X}(U_B)$. Como K_A es compacto y γX es localmente conexo, existen $r \in \mathbb{N}$ y $O_1, \ldots, O_r$ componentes de $\gamma X - C_{\gamma X}(U_B)$ tales que $K_A \subset O_1 \cup \ldots \cup O_r$ y $K_A \cap O_i \neq \phi$ para cada $i \in \bar{r}$.

Elíjase $i \in \bar{r}$ y sea $K_i = K_A \cap O_i$; entonces K_i es compacto. Por el lema 4.2, se sabe que existe V_i, una región de γX, tal que $K_i \subset V_i \subset C_{\gamma X}(V_i) \subset O_i$ y $Fr_{\gamma X}(V_i) \subset X$.

Ya que $b_0(C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B)) \geq n \geq 0$, se tiene que $U_B \neq \phi$, de modo que $Fr_{\gamma X}(O_i) \neq \phi$. De la proposición 1.12, se tiene que $Fr_{\gamma X}(O_i) \subset Fr_{\gamma X}(\gamma X - C_{\gamma X}(U_B)) = Fr_{\gamma X}(C_{\gamma X}(U_B)) \subset C_{\gamma X}(U_B)$, de donde $Fr_{\gamma X}(O_i) \subset G_1 \cup \ldots \cup G_{n+1}$. Sea $j_i \in \overline{n+1}$ tal que $Fr_{\gamma X}(O_i) \cap G_{j_i} \neq \phi$. Aplicando el lema 2.2 a γX, O_i, $\cup \{G_j : j \in \overline{n+1} - \{j_i\}\} \subset \gamma X - O_i$ (obsérvese que $Fr_{\gamma X}(O_i) - (\cup \{G_j : j \in \overline{n+1} - \{j_i\}\}) = Fr_{\gamma X}(O_i) \cap G_{j_i} \neq \phi$) y a ω_i un punto fijo en K_i, se tiene que existe H_i un subconjunto cerrado conexo de γX tal que $\omega_i \in H_i$, $H_i \cap G_{j_i} \neq \phi$ y $H_i \subset O_i \cup (Fr_{\gamma X}(O_i) \cap G_{j_i})$.

Defínase; $B_1 = C_{\gamma X}(U_B) \cup (H_1 \cup \ldots \cup H_r) \cup C_{\gamma X}(V_1 \cup \ldots \cup V_r)$, $A_1 = C_{\gamma X}(U_A)$ y para cada $j \in \overline{n+1}$, $L_j = G_j \cup (\cup \{H_i \cup C_{\gamma X}(V_i) : i \in \bar{r}$ y $j = j_i\})$. Es fácil probar que B_1 es conexo. Por otra parte, como para cada $i \in \bar{r}$, $H_i \subset C_{\gamma X}(O_i)$ y $C_{\gamma X}(V_i) \subset O_i$, se tiene que $A_1 \cap B_1 = L_1 \cup \ldots \cup L_{n+1}$.

Sean $j,k \in \overline{n+1}$ y supóngase que $L_j \cap L_k \neq \phi$. Si $x \in L_j \cap L_k$ analizamos dos casos:

a) $x \in G_j \cap (H_i \cup C_{\gamma X}(V_i))$ con $i \in \bar{r}$ y $k = j_i$. Como $H_i \cup C_{\gamma X}(V_i) \subset O_i \cup (Fr_{\gamma X}(O_i) \cap G_{j_i})$ y $O_i \cap G_j = \phi$, se tiene que $x \in G_j \cap G_{j_i} = G_j \cap G_k$, de modo que $j = k$.

b) $x \in (H_i \cup C_{\gamma X}(V_i)) \cap (H_l \cup C_{\gamma X}(V_l))$ con $i,l \in \bar{r}$ y $j = j_i$,

$k = j_1$. Entonces $x \in (O_i \cup (Fr_{\gamma X}(O_i) \cap G_{j_i})) \cap (O_l \cup (Fr_{\gamma X}(O_l) \cap G_{j_l})) \subset (O_i \cap O_l) \cup (G_j \cap G_k)$ y por lo tanto $x \in O_i \cap O_l$ ó $x \in G_j \cap G_k$. Esto implica que $j = k$.

Como en ambos casos se deduce que $j = k$, se tiene que $L_1, \ldots, L_{n+1}$ son ajenos dos a dos. Ya que $K_A \subset U_A \cap (K_1 \cup \ldots \cup K_r) \subset C_{\gamma X}(U_A) \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_r) \subset A_1 \cap B_1$, se tiene que $K = K_A \cup (K \cap U_B) \subset B_1$. Por tanto A_1, B_1 tienen las propiedades requeridas.

Siguiendo un procedimiento similar, se encuentran A_*, B_* subconjuntos cerrados conexos de γX tales que, $A_1 \subset A_*$, $B_1 \subset B_*$, $K \subset A_*$ y $b_0(A_* \cap B_*) \geq n$. Con esto se completa la prueba del lema.

4.5. Lema. Sean, U una región de γX; $m \in \mathbb{N}$; $U_1, \ldots, U_m$ regiones de γX, ajenas dos a dos, y $K_1, \ldots, K_m \subset \gamma X - X$ compactos, tales que $K_1 \subset U_1 \subset U, \ldots, K_m \subset U_m \subset U$. Entonces, existen $F \subset U$ conexo y $W_1, \ldots, W_m$ abiertos en γX tales que, $U - F = W_1 \cup \ldots \cup W_m$ y $K_1 \subset W_1 \subset C_{\gamma X}(W_1) \subset U_1, \ldots, K_m \subset W_m \subset C_{\gamma X}(W_m) \subset U_m$.

Demostración. Ya que U es una región de γX y γX es una compactación perfecta de X (Teorema VI.39 de [11]), del teorema 1 de [17] se deduce que $U \cap X$ es conexo. Además $U \cap X \subset U - (K_1 \cup \ldots \cup K_m) \subset C_{\gamma X}(U \cap X)$, así que $U - (K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ es una región de γX.

Del lema 4.2, se sabe que para cada $i \in \bar{m}$, existe V_i una región de γX tal que $K_i \subset V_i \subset U_i$ y $Fr_{\gamma X}(V_i) \subset X \cap U_i$. Entonces $Fr_{\gamma X}(V_1) \cup \ldots \cup Fr_{\gamma X}(V_m) \subset U-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$; nuevamente, por el lema 4.2, existe V una región de γX tal que $Fr_{\gamma X}(V) \subset X \cap (U-(K_1 \cup \ldots \cup K_m))$ y $Fr_{\gamma X}(V_1) \cup \ldots \cup Fr_{\gamma X}(V_m) \subset V \subset U-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$. Nótese que $K_1 \cup \ldots \cup K_m \subset U - C_{\gamma X}(V)$.

Dada $i \in \bar{m}$, defínase $W_i = \cup \{D : D$ es componente de $U - C_{\gamma X}(V)$ y $D \cap K_i \neq \phi\}$. Entonces W_i es abierto en γX y $K_i \subset W_i$. Debe de suceder que $W_i \subset V_i$; de no ser así, existe D una componente de $U - C_{\gamma X}(V)$ tal que $\phi \neq K_i \cap D \subset V_i \cap D$ y $D \cap (\gamma X - V_i) \neq \phi$. De manera que $\phi \neq D \cap Fr_{\gamma X}(V_i) \subset D \cap V$, lo cual es absurdo. Por tanto, $W_i \subset V_i$, de modo que $W_i \subset C_{\gamma X}(W_i) \subset C_{\gamma X}(V_i) \subset U_i$.

Defínase $F = U-(W_1 \cup \ldots \cup W_m)$. Para probar que F es conexo, basta probar que si D es una componente de $U - C_{\gamma X}(V)$ tal que $D \cap (K_1 \cup \ldots \cup K_m) = \phi$, entonces $D \cup C_{\gamma X}(V)$ es conexo. En efecto, si $D = U$, entonces $C_{\gamma X}(V) = \phi$, así que $D \cup C_{\gamma X}(V)$ es conexo. Si $D \neq U$, entonces $\phi \neq Fr_U(D) \subset Fr_U(C_{\gamma X}(V)) \subset C_{\gamma X}(V)$, de manera que $D \cup C_{\gamma X}(V) = C_U(D) \cup C_{\gamma X}(V)$ es conexo.

4.6. Teorema. Supóngase que X es un espacio localmente compacto, que $r(\gamma X)$ es finito y que Y es una compactación de X estrictamente menor que γX. Entonces $r(\gamma X) < r(Y)$.

Demostración. Como Y es una compactación de X estrictamente menor que γX, existe $f: \gamma X \to Y$ continua, no inyectiva, tal que $f|_X$ es la identidad en X. Sean $p, q \in \gamma X$ tales que $f(p) = f(q)$ y $p \neq q$; entonces $p, q \in \gamma X - X$.

Supóngase que $r(\gamma X) = n$. Usando el lema 4.4, se obtienen A,B subconjuntos cerrados conexos de γX tales que $\gamma X = A \cup B$, $b_0(A \cap B) = n$ y $p,q \in A \cap B$. Por el lema 4.3, se sabe que existen V_A, V_B regiones de γX, tales que $b_0(C_{\gamma X}(V_A) \cap C_{\gamma X}(V_B)) = n$, $A \subset V_A$, $B \subset V_B$ y $Fr_{\gamma X}(V_A) \cup Fr_{\gamma X}(V_B) \subset X$. Entonces $p,q \in V_A \cap V_B$.

Sea W un abierto en γX tal que $p \in W$, $q \notin C_{\gamma X}(W)$ y $Fr_{\gamma X}(W) \subset X$ (lema 4.2). Sean $S = Fr_{\gamma X}(W)$ y $K = C_{\gamma X}(V_A) \cap C_{\gamma X}(V_B) \cap (\gamma X - X)$. Nótese que K es compacto y $K \subset V_A \cap V_B \cap (\gamma X - S)$. Como γX es localmente conexo, se tiene que existen $t \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_t$ componentes de $V_A \cap V_B \cap (\gamma X - S)$ tales que $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_t$ y $K \cap U_i \neq \phi$ para cada $i \in \overline{t}$.

Ya que $(U_1 \cup \ldots \cup U_t) \cap S = \phi$, se tiene que, para $i \in \overline{t}$, $U_i \subset W$ ó $U_i \subset \gamma X - C_{\gamma X}(W)$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $U_1 \cup \ldots \cup U_m \subset W$ y que $U_{m+1} \cup \ldots \cup U_t \subset (\gamma X - C_{\gamma X}(W))$. Dado que $p \in K \cap W$ y $q \in K \cap (\gamma X - C_{\gamma X}(W))$, se tiene que $m, t-m$ son mayores ó iguales a uno.

Para $i \in \overline{t}$, defínase $K_i = K \cap U_i$. Aplicando el lema 4.4 a V_A; $U_1, \ldots, U_m$ y $K_1, \ldots, K_m$ se obtiene $F_A \subset V_A$ conexo y $W_1, \ldots, W_m$ abiertos en γX, tales que $K_1 \subset W_1 \subset C_{\gamma X}(W_1) \subset U_1, \ldots, K_m \subset W_m \subset C_{\gamma X}(W_m) \subset U_m$ y $V_A - F_A = W_1 \cup \ldots \cup W_m$. Ahora, aplicando el lema 4.4 a V_B; $U_{m+1}, \ldots, U_t$ y $K_{m+1}, \ldots, K_t$ se obtiene $F_B \subset V_B$ conexo y $W_{m+1}, \ldots, W_t$ abiertos en γX, tales que $K_{m+1} \subset W_{m+1} \subset C_{\gamma X}(W_{m+1}) \subset U_{m+1}, \ldots, K_t \subset W_t \subset C_{\gamma X}(W_t) \subset U_t$ y $V_B - F_B = W_{m+1} \cup \ldots \cup W_t$.

Sean; $A_* = C_{\gamma X}(F_A)$; $B_* = C_{\gamma X}(F_B)$; $D_1, \ldots, D_{n+1}$ las componentes de $C_{\gamma X}(V_A) \cap C_{\gamma X}(V_B)$ y $W_0 = W_1 \cup \ldots \cup W_t$. Entonces A_*, B_* son subconjuntos cerrados conexos de γX. Se probará que $p \in B_*$, $q \in A_*$; $A_* \cup B_* = \gamma X$; $A_* \cap B_* = (D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}) - W_0 \subset X$ y $D_i - W_i \neq \phi$ para cada $i \in \overline{n+1}$.

Como $W_1 \cup \ldots \cup W_m$ es un subconjunto de V_B ajeno a $W_{m+1} \cup \ldots \cup W_t$, se tiene que $W_1 \cup \ldots \cup W_m \subset F_B$; por una razón similar, se tiene que $W_{m+1} \cup \ldots \cup W_t \subset F_A$. De aquí se sigue que $V_A \cup V_B \subset A_* \cup B_*$, de manera que $\gamma X = A_* \cup B_*$.

Claramente $A_* \cap B_* \subset C_{\gamma X}(V_A) \cap C_{\gamma X}(V_B) = D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}$; $A_* \subset \gamma X - (W_1 \cup \ldots \cup W_m)$ y $B_* \subset \gamma X - (W_{m+1} \cup \ldots \cup W_t)$. De manera que $A_* \cap B_* \subset (D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}) - W_0$. Además $p \in K \cap W$ implica que $p \in K_1 \cup \ldots \cup K_m \subset W_1 \cup \ldots \cup W_m$, de donde $p \notin A_*$ y, por tanto, $p \in B_*$. De manera similar se prueba que $q \in A_*$.

Dada $i \in \overline{m}$; $Fr_{\gamma X}(W_i) \subset U_i \subset V_A = F_A \cup (W_1 \cup \ldots \cup W_m)$, de manera que $Fr_{\gamma X}(W_i) \subset F_A$. De aquí que $Fr_{\gamma X}(W_1) \cup \ldots \cup Fr_{\gamma X}(W_m) \subset F_A$; similarmente, $Fr_{\gamma X}(W_{m+1}) \cup \ldots \cup Fr_{\gamma X}(W_t) \subset F_B$. Entonces $(D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}) - W_0 = C_{\gamma X}(V_A) \cap C_{\gamma X}(V_B) - W_0 =$ $(C_{\gamma X}(F_A) \cup C_{\gamma X}(W_1) \cup \ldots \cup C_{\gamma X}(W_m)) \cap (C_{\gamma X}(F_B) \cup C_{\gamma X}(W_{m+1}) \cup \ldots \cup C_{\gamma X}(W_t)) - W_0 = (C_{\gamma X}(F_A) \cup W_1 \cup \ldots \cup W_m) \cap (C_{\gamma X}(F_B) \cup W_{m+1} \cup \ldots \cup W_t) - W_0 \subset C_{\gamma X}(F_A) \cap C_{\gamma X}(F_B) = A_* \cap B_*$. Por tanto, $A_* \cap B_* = (D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}) - W_0$. Además, $(D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}) - W_0 \subset (C_{\gamma X}(V_A) \cap C_{\gamma X}(V_B)) - K \subset X$, de manera que, $(D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}) - W_0 \subset X$.

Sea $i \in \overline{n+1}$. Se mostrará que $D_i - W_0 \neq \phi$. Si ocurriera que $D_i \cap W_0 = \phi$, entonces $D_i - W_0 = D_i \neq \phi$. Supóngase entonces que $D_i \cap W_0 \neq \phi$. Sea $j \in \overline{t}$ tal que $D_i \cap W_j \neq \phi$; entonces $D_i \cap U_j \neq \phi$. Como U_j es conexo y $U_j \subset D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}$, se tiene que $U_j \subset D_i$, de manera que $W_j \subset C_{\gamma X}(W_j) \subset U_j \subset D_i$. Entonces $Fr_{\gamma X}(W_j) \subset D_i - W_0$; así que solo se tendrá que mostrar que $Fr_{\gamma X}(W_j) \neq \phi$. Como $K_j \subset W_j$, se tiene que $W_j \neq \phi$. Si $j \in \overline{m}$, entonces

$W_j \subset U_j \subset W$, así que $q \notin W_j$. Y si $j \in \{m+1,\ldots,t\}$, entonces $p \notin W_j$. De manera que $W_j \neq \gamma X$ y como γX es conexo, se tiene que $Fr_{\gamma X}(W_j) \neq \phi$.

Defínase ahora $A_1 = f(A_*)$ y $B_1 = f(B_*)$. Entonces A_1, B_1 son subconjuntos cerrados conexos de Y y $Y = A_1 \cup B_1$. Nótese que los conjuntos $(Y-X) \cap A_1 \cap B_1$, $f(D_1 - W_0), \ldots, f(D_{n+1} - W_0)$ son cerrados en Y, no vacíos ($f(p) = f(q) \in (Y-X) \cap A_1 \cap B_1$)) y ajenos dos a dos, ya que f es inyectiva en X y $f(X) \subset X$.

Es fácil probar que $A_1 \cap B_1 = ((Y-X) \cap A_1 \cap B_1) \cup f(D_1 - W_0) \cup \ldots \cup f(D_{n+1} - W_0)$, así que, de acuerdo con la proposición 1.8, $b_0(A_1 \cap B_1) \geq n+1$ y, por tanto, $r(Y) \geq n+1$. Esto termina la prueba del teorema.

4.7. Teorema. Sea X un espacio localmente compacto y Z una compactación de X. Si $r(\gamma X)$ es finito, entonces $r(\gamma X) \leq r(Z)$. Además, si $r(Z) = r(\gamma X)$, entonces Z es una compactación de X mayor ó igual que γX.

Demostración. Sea Y el espacio cociente que se obtiene de identificar cada una de las componentes de $Z - X$ en un punto. Entonces Y es un espacio compacto y como X es localmente compacto, se tiene que Y es una compactación (T_2) de X (esto se puede probar usando el lema 6.30 de [2]). Sea $f: Z \to Y$ la proyección natural. Entonces f es monótona, continua, cerrada y sobre.

Ya que $Y - X$ es totalmente disconexo (Teorema 3.4 de

[5]), γX es perfecta (Teorema VI.39 de [11]) y $\gamma X - X$ es totalmente disconexo (lema 4.1), se tiene que $Y < \gamma X$ (Teorema 3 de [17]). Usando el teorema 4.6 se concluye que $r(\gamma X) \leq r(Y)$, dándose la igualdad solo si $\gamma X = Y$. Por la proposición 1.11, $r(Z) \geq r(Y)$. Esto prueba la primera parte del teorema. Ahora, si $r(Z) = r(\gamma X)$ entonces $r(Y) = r(\gamma X)$, de modo que $Y = \gamma X$ y, por tanto, $\gamma X < Z$.

4.8. Lema. Si Z es una extensión de Y, entonces $r_D(Y) \leq r(Z)$.

Demostración. Sean A,B subconjuntos cerrados conexos de Y, tales que $Y = A \cup B$ y A es compacto. Si se define $A_* = C_Z(A) = A$ (ya que A es compacto) y $B_* = C_Z(B)$, entonces A_*,B_* son subconjuntos cerrados conexos de Z tales que $Z = A_* \cup B_*$, además, $A \cap B = A \cap C_Y(B) = A \cap (Y \cap C_Z(B)) = (A \cap Y) \cap C_Z(B) = A \cap C_Z(B) = C_Z(A) \cap C_Z(B)$. De modo que $b_0(A \cap B) = b_0(A_* \cap B_*)$. Por tanto, $r_D(Y) \leq r(Z)$.

4.9. Teorema. Si X es un espacio localmente compacto, entonces $r_D(X) = r(\gamma X)$.

Demostración. Según el lema 4.8, solo es necesario probar que $r(\gamma X) \leq r_D(X)$. Sean A_*,B_* subconjuntos cerrados conexos de γX tales que $b_0(A_* \cap B_*) \geq n$, con $n \in \mathbb{N}^*$, y $\gamma X = A_* \cup B_*$.

La prueba del teorema concluye si se pueden encontrar A_1, B_1 subconjuntos cerrados conexos de X tales que; $X = A_1 \cup B_1$, A_1 es compacto y $b_0(A_1 \cap B_1) \geq n$.

Si $n = 0$, basta tomar $A_1 = \{p\}$ y $B_1 = X$, donde p es cualquier punto de X; y si X es compacto entonces se puede tomar $A_1 = A_*$ y $B_1 = B_*$. Supóngase entonces que $n \geq 1$ y que X no es compacto. Aplicando el lema 4.4, para $K = \gamma X - X$, se tiene que existen A, B subconjuntos cerrados conexos de γX, tales que $b_0(A \cap B) \geq n$, $K \subset A \cap B$ y $\gamma X = A \cup B$.

Según el lema 4.3 y la proposición 1.8, existen U_A, U_B regiones de γX y $D_1, \ldots, D_{n+1}$ cerrados en γX, no vacíos y ajenos dos a dos, tales que $\gamma X = U_A \cup U_B$, $A \subset U_A$, $B \subset U_B$, $Fr_{\gamma X}(U_A) \cup Fr_{\gamma X}(U_B) \subset X$ y $C_{\gamma X}(U_A) \cap C_{\gamma X}(U_B) = D_1 \cup \ldots \cup D_{n+1}$.

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_m$ componentes de $U_A \cap U_B$ tales que $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$ y $K \cap U_i \neq \phi$ para cada $i \in \bar{m}$. Dada $i \in \bar{m}$, sea $K_i = K \cap U_i$. Aplicando el lema 4.5 a U_A, $U_1, \ldots, U_m$ y $K_1, \ldots, K_m$ se obtiene $F \subset U_A$ conexo y $W_1, \ldots, W_m$ abiertos en γX, tales que $U_A - F = W_1 \cup \ldots \cup W_m$ y $K_i \subset W_i \subset C_{\gamma X}(W_i) \subset U_i$ para cada $i \in \bar{m}$.

Defínase $A_1 = C_{\gamma X}(F)$, $B_1 = C_X(U_B \cap X)$, $W = W_1 \cup \ldots \cup W_m$ y $H_i = D_i - W$ para cada $i \in \overline{n+1}$.

Ya que $F \cap W = \phi$, se tiene que $A_1 \subset X$. Como γX es compactación perfecta de X, se tiene que $U_B \cap X$ es conexo, de manera que B_1 es conexo. Dado que $X \subset U_A \cup U_B \subset F \cup W \cup U_B \subset F \cup U_B$, se tiene que $X = A_1 \cup B_1$.

Sea $i \in \overline{n+1}$, se probará que $H_i \neq \phi$. Si $D_i \cap W = \phi$, entonces $H_i = D_i \neq \phi$. Supóngase entonces que $D_i \cap W_j \neq \phi$ para algu na $j \in \bar{m}$. Entonces $D_i \cap U_j \neq \phi$; como $U_j \subset D_1 \cup \dots \cup D_{n+1}$ y U_j es conexo, se tiene que $U_j \subset D_i$. Ya que $n \geq 1$, se tiene que $D_i \neq \gamma X$, así que $W_j \neq \gamma X$; además, $\phi \neq K_j \subset W_j$. Entonces $\phi \neq Fr_{\gamma X}(W_j) \subset U_j - W \subset H_i$. Por tanto $H_i \neq \phi$.

Es fácil probar que $A_1 \cap B_1 = H_1 \cup \dots \cup H_{n+1}$ y que $H_1, \dots, H_{n+1}$ son ajenos dos a dos, de modo que $b_0(A_1 \cap B_1) \geq n$.

En el siguiente corolario se generaliza la primera parte del teorema 4.7.

4.10. Corolario. Si X es un espacio localmente compacto y Z es una extensión de X, entonces $r(\gamma X) \leq r(Z)$.

4.11. Teorema. Si Y es un espacio conexo y periféricamente-compacto, entonces $r_D(Y) \leq r_\gamma(Y) \leq r(\gamma Y)$.

Demostración. Es fácil probar que $r_D(Y) \leq r_\gamma(Y)$. Para probar que $r_\gamma(Y) \leq r(\gamma Y)$, tomense A, B subconjuntos cerrados conexos de Y tales que $Fr_Y(A), Fr_Y(B)$ son compactos y $Y = A \cup B$. Supóngase que $A \cap B = C_1 \cup \dots \cup C_m$, donde $m \in \mathbb{N}$ y $C_1, \dots, C_m$ son cerrados en Y, no vacíos y ajenos dos a dos.

Para $i \in \bar{m}$ se tiene que $Fr_Y(C_i) \subset Fr_Y(A) \cup Fr_Y(B)$, entonces $Fr_Y(C_i)$ es compacto. Sean $i, j \in \bar{m}$ tales que $i \neq j$. Como $Fr_Y(C_i)$ separa a $Int_Y(C_i)$ y $Y - C_i$ en Y, se tiene que $C_{\gamma Y}(Int_Y(C_i)) \cap C_{\gamma Y}(Y - C_i) \subset C_{\gamma Y}(Fr_Y(C_i)) = Fr_Y(C_i)$ (Teorema

VI.39 de [11] y proposición 1.3). De aquí se sigue que $C_{\gamma Y}(C_i) \cap C_{\gamma Y}(C_j) \subset Fr_Y(C_i)$. Similarmente se prueba que $C_{\gamma Y}(C_i) \cap C_{\gamma Y}(C_j) \subset Fr_Y(C_j)$ y por lo tanto $C_{\gamma Y}(C_i) \cap C_{\gamma Y}(C_j) = \phi$. De las proposiciones 1.8 y 1.3, se deduce que $b_0(C_{\gamma Y}(A) \cap C_{\gamma Y}(B)) \geq m - 1$. Por tanto, se tiene que $r_\gamma(Y) \leq r(\gamma Y)$. Con esto termina la prueba del teorema.

4.12. Corolario. Si X es un espacio localmente compacto, entonces $r_D(X) = r_\gamma(X) = r(\gamma X)$.

5. COMPACTACIONES PERFECTAS Y METRIZABLES DE $\mathbb{R}^2$.

Para este capítulo, introduciré algunas convenciones:

i) Si R,S son subespacios de T y U,V son subespacios de X, la notación $(R,S,T) \approx (U,V,X)$ significará que existe $\phi: T \to X$ un homeomorfismo, tal que $\phi(R) = U$ y $\phi(S) = V$.

ii) Sean, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$; $D_* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$; $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$; $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

iii) Si X es un espacio localmente compacto, $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ denotará a su compactación unipuntual.

iv) Si Z es una extensión de X y $p \in Z - X$, se dirá que Z es perfecta en p si $X \cup \{p\}$ es un espacio localmente conexo.

5.1. Lema. Sea $\sigma: (0,1) \to D$ una función continua e inyectiva tal que, si $K \subset D$ es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\sigma((0,\delta) \cup (1-\delta,1)) \subset D - K$. Entonces existen A_σ, B_σ regiones de D, ajenas, tales que $D - \operatorname{Im}\sigma = A_\sigma \cup B_\sigma$ y $(\operatorname{Im}\sigma, A_\sigma, A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) \approx (E, H^+, H)$ y $(\operatorname{Im}\sigma, B_\sigma, B_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) \approx (E, H^+, H)$.

Demostración. Sea $\sigma_*: [0,1] \to D_\infty$ definida por $\sigma_*(0) = \sigma_*(1) = \infty$ y $\sigma_*(t) = \sigma(t)$ para toda $t \in (0,1)$. Entonces σ_* es un arco cerrado en D_∞ (para definición, ver [16]), de manera que, por el teorema de Schoenflies (Teorema 10.3 de [16]) existen A_σ, B_σ regiones de D_∞, ajenas, tales que $D_\infty - \mathrm{Im}\,\sigma_* = A_\sigma \cup B_\sigma$, $(\mathrm{Im}\,\sigma_*, A_\sigma, A_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma_*) \approx (S^1, D, D_*)$ y $(\mathrm{Im}\,\sigma_*, B_\sigma, B_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma_*) \approx (S^1, D, D_*)$.

Entonces $(\mathrm{Im}\,\sigma, A_\sigma, A_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma) \approx (S^1 - \{(1,0)\}, D, D_* - \{(1,0)\}) \approx (E, H^+, H)$ y $(\mathrm{Im}\,\sigma, B_\sigma, B_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma) \approx (S^1 - \{(1,0)\}, D, D_* - \{(1,0)\}) \approx (E, H^+, H)$.

5.2. Lema. Supóngase que Z es una extensión de D y que Z es un espacio métrico completo. Sean $p, q \in Z - D$ tales que Z es perfecta en p y en q. Entonces $D \cup \{p, q\}$ es arco-conexo.

Demostración. Nótese que, como D es localmente compacto y denso en Z, entonces D es abierto en Z, de manera que $D \cup \{p, q\}$ es un G_δ en Z. Aplicando el teorema 4.20 de [8], se tiene que $D \cup \{p, q\}$ es completamente metrizable. Entonces, de acuerdo con el teorema 5.32 de [8] se tiene que $D \cup \{p, q\}$ es arco-conexo.

5.3. Teorema. Sea Z una compactación matrizable y perfecta de D, entonces $Z - D$ es homeomorfo a S^1 ó Z es homeomorfo a D_∞.

Demostración. Supógase que Z no es homeomorfo a D_∞. De acuerdo con el teorema de [12], $Z - D$ es conexo. Entonces $Z - D$ es conexo, compacto, metrizable y con más de un punto. Según el teorema 28.14 de [23], solo hace falta probar que, si $p, q \in Z - D$ y $p \neq q$ entonces $(Z - D) - \{p, q\}$ no es conexo, para concluir que $Z - D$ es homeomorfo a S^1.

Sean $p, q \in Z - D$ tales que $p \neq q$. De la proposición 1.6 se tiene que $D \cup \{p\}$ y $D \cup \{q\}$ son extensiones perfectas de D, entonces por el lema 2 de [13], $D \cup \{p\}$ y $D \cup \{q\}$ son localmente conexos. Entonces Z es perfecta en p y en q.

Según el lema 5.2, existe $\sigma_* : [0,1] \to D \cup \{p,q\}$ inyectiva y continua, tal que $\sigma_*(0) = p$ y $\sigma_*(1) = q$. Sea $\sigma = \sigma_{*|(0,1)}$. Usando el lema 5.1, se tiene que existen A_σ, B_σ regiones de D, ajenas, tales que $D - \operatorname{Im}\sigma = A_\sigma \cup B_\sigma$, $(\operatorname{Im}\sigma, A_\sigma, A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) \approx (E, H^+, H)$ y $(\operatorname{Im}\sigma, B_\sigma, B_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) \approx (E, H^+, H)$.

Entonces $A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma$ es homeomorfo a $D_* - \{(1,0)\}$. Ya que D_* es una compactación perfecta de $D_* - \{(1,0)\}$ (proposición 1.5) y es la compactación unipuntual de $D_* - \{(1,0)\}$, se tiene que todas las compactaciones de $A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma$ tienen residuo conexo (Teorema de [12]); en particular $C_Z(A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) - (A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma)$ es conexo.

Nótese que $C_Z(\sigma_*((0,1))) = C_Z(\operatorname{Im}\sigma) = \operatorname{Im}\sigma \cup \{p,q\}$, de manera que $p, q \in C_Z(A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) - (A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma)$, de aquí que existe $x_0 \in C_Z(A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) - (A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma \cup \{p,q\})$. Del teorema 1 de [17] y la proposición 1.2, se obtiene que $Z - C_Z(\operatorname{Im}\sigma) = \langle A_\sigma \rangle \cup \langle B_\sigma \rangle$ y $\langle A_\sigma \rangle \cap \langle B_\sigma \rangle = \phi$. Como $\langle B_\sigma \rangle \cap (A_\sigma \cup \operatorname{Im}\sigma) = B_\sigma \cap A_\sigma \cap \operatorname{Im}\sigma = \phi$, se tiene que $x_0 \notin \langle B_\sigma \rangle$ y por tanto $x_0 \in \langle A_\sigma \rangle \cap (Z - D)$.

Se ha probado que $\langle A_\varepsilon\rangle \cap (Z - D) \neq \phi$. De igual manera se prueba que $\langle B_\varepsilon\rangle \cap (Z - D) \neq \phi$. Además $(Z - D) - \{p, q\} = (\langle A_\varepsilon\rangle \cap (Z - D)) \cup (\langle B_\varepsilon\rangle \cap (Z - D))$. De aquí se concluye que $(Z - D) - \{p, q\}$ no es conexo.

En [21], E.R. Van Kampen prueba el siguiente teorema:

" Teorema II. (L. Zippin). Un espacio compacto, conexo, metrizable y localmente conexo Z, que contiene a una curva cerrada J y que satisface las siguientes tres propiedades, es homeomorfo a D_*.

II.a. Z contiene un arco que "parte de J".

II.b. Cualquier arco en Z "partiendo de J", separa a Z.

II.c. Ningún subconjunto cerrado propio de un arco en Z que "parte de J", separa a Z."

Se dice que un arco "parte de un conjunto", si los puntos extremos del arco son los únicos puntos que tiene en común con dicho conjunto.

5.4. Teorema. Sea Z una compactación metrizable y perfecta de D. Entonces, Z es homeomorfo a D_∞ ó es homeomorfo a D_*.

Demostración. Supóngase que Z no es homeomorfo a D_∞. Se verificará que Z satisface las hipótesis del Teorema II de [21].

Z es compacto, metrizable (y por tanto separable), conexo y localmente conexo (lema 2 de [13]). Si $J = Z - D$, del teorema 5.3 se tiene que J es homeomorfo a S^1.

Dados $p, q \in J$, tales que $p \neq q$, razonando como en el teorema 5.3, se tiene que existe $\sigma_* : [0,1] \to D \cup \{p,q\}$ continua, inyectiva tal que $\sigma_*(0) = p$ y $\sigma_*(1) = q$. Entonces $\mathrm{Im}\,\sigma_*$ es un arco contenido en Z que "parte de J", de manera que la condición II.a es satisfecha.

Para comprobar II.b y II.c, tómese $\sigma_* : [0,1] \to Z$ un arco que "parte de J". Sean $p = \sigma_*(0)$ y $q = \sigma_*(1)$. Si $\sigma = \sigma_{*|(0,1)} : (0,1) \to D$, aplicando el lema 5.1 se tiene que existen A_σ, B_σ regiones de D, ajenas, tales que $(\mathrm{Im}\,\sigma, A_\sigma, A_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma) \approx (E, H^+, H)$; $(\mathrm{Im}\,\sigma, B_\sigma, B_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma) \approx (E, H^+, H)$ y $D - \mathrm{Im}\,\sigma = A_\sigma \cup B_\sigma$. Del teorema 1 de [17] y la proposición 1.2 se tiene que $Z - C_Z(\mathrm{Im}\,\sigma) = \langle A_\sigma \rangle \cup \langle B_\sigma \rangle$ y $\langle A_\sigma \rangle \cap \langle B_\sigma \rangle = \phi$. Ya que $C_Z(\mathrm{Im}\,\sigma) = \mathrm{Im}\,\sigma_*$, se tiene que $\mathrm{Im}\,\sigma_*$ separa a Z. Por tanto, se satisface II.b.

Sea $C \subset \mathrm{Im}\,\sigma_*$ tal que $C \neq \phi$. Ya que $(\mathrm{Im}\,\sigma, A_\sigma, A_\sigma \cup \mathrm{Im}\,\sigma) \approx (E, H^+, H)$ y $E \subset C_H(H^+)$, se tiene que $\mathrm{Im}\,\sigma \subset C_Z(A_\sigma)$, de manera que $\mathrm{Im}\,\sigma_* \subset C_Z(A_\sigma)$. De aquí que $A_\sigma \subset A_\sigma \cup C \subset C_Z(A_\sigma)$, de modo que $A_\sigma \cup C$ es conexo. De manera similar se prueba que $B_\sigma \cup C$ es conexo. De esto se obtiene que $\langle A_\sigma \rangle \cup C \cup \langle B_\sigma \rangle$ es conexo. Esto prueba que ningún subconjunto propio de $\mathrm{Im}\,\sigma_*$ separa a Z, y en consecuencia, que se satisface II.c.

BIBLIOGRAFIA.

1. M.H. Clapp and R.F. Dickman, Jr., " Unicoherent compactifications ", Pacific J. Math. vol 43, No. 1, (1972), pp. 55-62.
2. R.E. Chandler, " Hausdorff compactifications ", Marcel Dekker, inc., New York and Basel (1976).
3. J. De Groot and R.H. Mc. Dowell, " Locally connected spaces and their compactifications ", Illinois J. Math., 11(1967), pp. 353-364.
4. E. Duda, " Weak-unicoherence ", Pacific J. Math. vol. 56, No. 2, (1975), pp. 423-428.
5. J. Dugundgi, " Topology ", Allyn and Bacon, Boston, (1966).
6. S. Eilenberg, " Transformations continues en circonférence et la topologie du plan ", Fund. Math. vol. 26, (1936), pp. 61-112.
7. H. Freudenthal, " Neuaufbauder Endentheorie ", Ann. of Math. (2) 43 (1942), pp. 261-279.
8. A. García-Máynez, " Introducción a la topología de conjuntos ", Serie Soc. Mat. Mex., Trillas, México (1971).
9. M. Henriksen and J. Isbell, " Local connectedness in the

Stone-Cech compactification ", Illinois J. Math., vol. 1 (1975), pp. 574-582.

10. J.H.V. Hunt and E.D. Tymchatyn, " A theorem on involutions on unicoherent spaces ", Q.J. Math., Oxf.II.Ser.32, (1981), pp. 57-67.

11. J.R. Isbell, " Uniform spaces ", Amer. Math. Soc. Survey, No. 12, Amer. Math. Soc., Providence (1964).

12. C.F.K. Jung, " Locally compact spaces whose Alexandroff one-point compactification are perfect ", Colloq. Math., vol. 27, (1973).

13. A.I. Krivoručko, " Complete extensions of topological spaces ", Mat. Zametki 15, (1974), pp. 509-513. Translation to english: Math. Notes 15(1974), pp. 296-298.

14. B. Knaster and C. Kuratowski, " Sur les ensembles connexes ", Fund. Math. vol. 2(1921), pp. 206-255.

15. C. Kuratowski, " Une caracterisation topologique de la surface de la sphere ", Fund. Math. XIII, 1929, pp. 307-318.

16. E.E. Moise, " Geometric topology in dimension 2 and 3 ", Graduate texts in math. 47, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

17. E.G. Sklyarenko, " On perfect bicompact extensions ", Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 137, (1961), pp. 39-41. Translation: Soviet. Math. Dokl. 2, (1961), pp. 238-240.

18. ——————————, " Perfect bicompact extensions ". Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 146(1946), pp. 1031-1034. Translation: Soviet. Math. Dokl., 3(1962), pp. 1455-1458.

19. A.H. Stone, " Incidence relations in unicoherent spaces " Trans. Amer. Math. Soc., vol. 65, (1949), pp. 427-447.

20. ———, " Incidence relations in multicoherent spaces I ", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 66, (1949), pp. 389-406.

21. E.R. van Kampen, " On some characterizations of 2-dimensional manifolds ", Duke Math. Journal, vol. 1, (1935), pp. 74-93.

22. G.T. Whyburn, " Analytic topology ", Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 28, (1942).

23. S.S. Willard, " General topology ", Addison-Wesley (1970).