2ej
9

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HOMOLOGIA : ALGUNAS APLICACIONES A LA TOPOLOGIA

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

DANIEL JUAN PINEDA

octubre de 1987

INTRODUCCION

Esta tesis fué concebida tratando de hacer un trabajo sobre geometría y topología algebráica, en particular, sobre teoría de homología.

Con tal fin empecé estudiando el artículo de *Chung Yao Yang* titulado "On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani, Yamabe, Yujobô and Dyson I ". Este artículo trata una variante del conocido teorema de *Borsuk-Ulam*, teorema que fué planteado por *Ulam* y resuelto por *Borsuk* en [1]. El teorema de *Borsuk-Ulam* establece que para toda función continua $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, existen dos puntos antípodas de $\mathbb{S}^n$ que van a dar al mismo punto bajo f. En el primer capítulo de ésta tesis se desarrollan las ideas fundamentales, en cuanto a homología se refiere, del artículo anteriormente citado. Cabe resaltar que el artículo de *Yang* es importante porque da las ideas importantes para el desarrollo posterior de la teoría de homología equivariante.

En el artículo de *Yang*, se prueba que si el codominio es $\mathbb{R}$, entonces f no sólo manda dos puntos antípodas al mismo sino que manda $2n$ puntos de $\mathbb{S}^n$, que son los extremos de n diámetros de $\mathbb{S}^n$ que se intersectan mutuamente en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, al mismo punto.

Estudiando este artículo nos planteamos la siguiente pregunta:

$$\text{Sea} \quad f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{una función continua.}$$

¿ Los puntos que pega f, necesariamente son antípodas ?.

La respuesta es que ¡no!. ¡El ser antípodas lo puedo generalizar y pedir que los puntos tengan distancia arbitraria entre 0 y π !. Es decir; Si $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y θ es un número real positivo menor que π. Entonces existen dos puntos x, y en $\mathbb{S}^n$ tales que :

$$\begin{aligned} &i) d(x,y) = \theta \quad y \\ &ii) f(x) = f(y). \end{aligned}$$

Doy respuesta afirmativa a esta pregunta para todo entero par. En el segundo capítulo de esta tesis escribo la prueba que obtuve utilizando algunas ideas desarrolladas en el primer capítulo.

Al investigar el caso general del problema planteado encontré que *Hopf* había abordado el problema. *Hopf* resuelve el problema en una forma más general:

Cambió $\mathbb{S}^n$ por cualquier variedad riemanniana M, compacta conexa y de dimensión n; y la condición para los puntos es que tengan distancia menor que el radio de inyectividad de la función exponencial de M. Al final del segundo capítulo doy la prueba de *Hopf* para $M = \mathbb{S}^n$, prueba que esencialmente sigue las ideas que yo estaba desarrollando.

Al resolver este problema, *Hopf* se planteó la siguiente pregunta: Si cambio el codominio de f por $\mathbb{S}^n$ y agrego la condición de que el grado de f sea distinto de cero. Entonces si θ es cualquier número positivo menor que el radio de inyectividad de la función exponencial. ¿existen $x, y \in M$ tales que i) la distancia entre x y y sea θ y ii) $f(x) = f(y)$?.

Esta pregunta de *Hopf* quedó abierta por varios años, y no es hasta 1980 que *Wille*[17] la probó. En el apéndice de esta tesis enuncio el teorema y conjetura de *Hopf* . También en el apéndice escribo como fué, históricamente, resuelta la conjetura de *Hopf* .

Aprovecho estas últimas líneas para agradecer al *Dr. Luis Montejano Peimbert* la dirección de ésta tesis, así como sus atinados consejos durante mi desarrollo profesional. Tambien quiero agradecer a mis maestros el haberme introducido en éste mágico mundo de la ciencia: *La Matemática.*

Daniel Juan Pineda

octubre 1987

INDICE

CAPITULO I

El Teorema de *Borsuk-Ulam*

1. Teorema de Borsuk-Ulam

En 1933 *Borsuk* [1] formula un teorema que afirma que toda función continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, manda dos puntos antípodas de $\mathbb{S}^n$ al mismo. En esta primera sección se da esta formulación del teorema de *Borsuk-Ulam* , se da una prueba para los casos $n = 1, 2$ y se mencionan las dificultades que presenta el caso $n > 2$.

Teorema de Borsuk-Ulam. (1) *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua entonces existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que*

$$f(x) = f(-x).$$

Esta formulación es equivalente a la siguiente:

(2). *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $-f(x) = f(-x)$,(es decir, f es una función que conmuta con la antípoda de $\mathbb{S}^n$) entonces existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que*

$$f(x) = 0.$$

Demostración. *(de la equivalencia de* **(1)** *con* **(2)***).*

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $-f(x) = f(-x)$.

Sea $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como $g(x) = f(x) - f(-x)$. Como **(1)** es válido entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(x_0) = g(-x_0)$.

Por tanto

$$f(x_0) - f(-x_0) = f(-x_0) - f(x_0)$$

de donde se obtiene que

$$2f(x_0) = 2f(-x_0)$$

y como $f(-x_0) = -f(x_0)$ se sigue que $f(x_0) = -f(x_0)$. Por lo tanto $f(x_0) = 0$. $\square$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua arbitraria.

Sea $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como $g(x) = f(x) - f(-x)$.

La función g satisface la condición $-g(x) = g(-x)$ y como **(2)** es válido existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(x_0) = 0$. Como $0 = g(x_0) = f(x_0) - f(-x_0)$, se sigue que $f(x_0) = f(-x_0)$. $\square$

Ya teniendo las equivalencias del teorema de *Borsuk-Ulam* , bastará probar cualquiera de ellas. Probaremos la versión **(2)**, puesto que es la idea que servirá para hacer una generalización del teorema.

Teorema. *Borsuk -Ulam, caso* $n = 1$.

Demostración.

Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $-f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Sea $x_0 \in \mathbb{S}^1$. Si $f(x_0) = 0$ hemos terminado. Si $f(x_0) > 0$(el caso menor que cero es análogo), la condición $-f(x_0) = f(-x_0)$ nos dice que $f(-x_0) < 0$; ahora bien, $\mathbb{S}^1$ es conexo y compacto, por tanto $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}$ es conexo y compacto, de modo que $f(\mathbb{S}^1)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$ y como $f(x_0) > 0$ y $f(-x_0) < 0$ se sigue que $f(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{S}^1$. $\square$

Notemos que en este caso estamos haciendo uso esencial del orden de $\mathbb{R}$. Esta propiedad de $\mathbb{R}$ la perdemos para el caso $n = 2$. Para este caso utilizo otra herramienta que resuelve el problema: *Espacios cubrientes.*

Teorema. *de Borsuk-Ulam, caso* $n = 2$.

Demostración.

Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua tal que $-f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Hay que demostrar que existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = 0$.

Demostración. *(por contradicción):.*

Supongamos que no existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = 0$. Esto define una función continua $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$, $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$, que está bien definida pues $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{S}^2$.

Además g tiene la propiedad $-g(x) = g(-x)$, por lo tanto g es una función de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{S}^1$ que manda puntos antípodas de $\mathbb{S}^2$ en puntos antípodas de $\mathbb{S}^1$. La pregunta obligada es: ¿ existe tal g ?. La respuesta nos la dá el siguiente lema :

Lema 1 *No existe $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ que mande puntos antípodas en puntos antípodas, esto es, tal que $-h(x) = h(-x)$.*

Demostración.

Supongo que tal h existe, la condición $-h(x) = h(-x)$ define una función continua $\overline{h} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{R}P^2 \arrow[r, "\overline{h}"] & \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

donde p, q son las proyecciones de $\mathbb{S}^i \to \mathbb{R}P^i (i = 1, 2)$. Recordemos que p y q son aplicaciones cubrientes [9] .

Ahora bien,

$$\overline{h}_* : \Pi_1(\mathbb{R}P^2) \to \Pi_1(\mathbb{R}P^1)$$

es trivial pues $\Pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$, $\Pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ y todo homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$ es trivial. Por lo tanto $\overline{h}_*$ se puede levantar a un homomorfismo $h' : \Pi_1(\mathbb{R}P^2) \to \Pi_1(\mathbb{S}^1)$ que claramente es tambien trivial.

Como q es una función cubriente y $\overline{h}_*$ se puede levantar en los grupos fundamentales [11] entonces $\overline{h}$ se puede levantar en los espacios topológicos; esto es, existe $h' : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{S}^1$ tal que $qh' = \overline{h}$; es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{R}P^2 \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[ur] & \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

de donde se obtiene que

$$qh'p = \overline{h}p = qh.$$

De aquí obtenemos que

$$qh'p = qh.$$

Esto quiere decir que tanto $h'p$ como h son levantamientos de la misma función. Además, como $q(h'p) = qh$ esto implica que $h'p(x) = h(x)$ o bien $h'p(-x) = h(x)$, pero $p(x) = p(-x)$. En cualquier caso h y $h'p$ coinciden en un punto y por la propiedad de levantamientos en espacios cubrientes [11], se tiene que $h(x) = h'(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.

Esto es imposible pues $h'p$ manda puntos antípodas en uno solo y h manda puntos antípodas en puntos antípodas, por tanto tal h no puede existir, quedando así probado el lema. □

Con esto, también queda probado el teorema de *Borsuk-Ulam* para el caso $n = 2$.

Observemos que lo esencial de esta prueba radica en la no existencia de funciones antípodas $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$. La demostración del teorema se podría generalizar paso a paso para $n > 2$ si pudiésemos generalizar el lema 1. Esto es:

¿existen funciones continuas $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ que conmuten con la antípoda?.

Para $n = 1$ el lema es obvio. Para n=2 lo probamos usando el hecho de que $\Pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\Pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$. Sin embargo como $\Pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ si $n > 1$. La argumentación hecha en el lema ya no se puede repetir y se tiene que recurrir a métodos más sofisticados; por ejemplo se podría probar la no existencia de funciones antípodas utilizando la estructura multiplicativa de la cohomología de $\mathbb{R}P^n$ [11].

En las siguientes secciones se desarrolla una teoría que dá herramientas necesarias para poder generalizar el lema 1, dando así una prueba para el caso general del teorema de *Borsuk-Ulam* .

2.T-Espacios

En las siguientes secciones desarrollaremos un invariante para espacios topológicos X en los cuales se tiene definida una función antípoda, es decir una involución $T : X \to X$ sin puntos fijos [18]. Dicho invariante nos servirá en parte para dar una prueba sencilla de teorema de *Borsuk-Ulam* en el caso general, además proporciona un camino para generalizar este teorema.

Los objetos con los que vamos a trabajar son parejas (X, T) donde X es un espacio topológico compacto, Hausdorff y $T : X \to X$ es una involución sin puntos fijos.

Los morfismos entre estos objetos son funciones continuas $f : X \to Y$ tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

En adelante llamaremos a estos morfismos *funciones antípodas.*

Esta condición es la análoga a que $-f(x) = f(-x)$ para $X = \mathbb{S}^n$ y T la función antípoda de $\mathbb{S}^n$.

Nótese que: si $f : (X, T) \to (Y, T)$ y $g : (Y, T) \to (Z, T)$ son morfismos antípodas entonces $g \circ f : (X, T) \to (Z, T)$ es un morfismo antípoda; $1_X : X \to X$ la identidad es un morfismo antípoda y satisface $1_X \circ f = f$, $g \circ 1_X = g$, con f y g morfismos antípodas. Esto define una categoría C con objetos (X, T) y morfismos las funciones antípodas.

3.Homología para T-Espacios

En esta sección supondremos que el lector está familiarizado con la teoría de Homología.

Primero vamos a trabajar con ternas (X, A, T) con X un complejo simplicial finito, $A \subset X$ un subcomplejo y $T : X \to X$ una involución simplicial sin puntos fijos tal que T conmuta los simplejos de X y $T(A) \subset A$.

Una función $f : (X, A, T) \to (Y, B, T)$ será un morfismo antípoda si f es simplicial, $f(A) \subset B$ y $fT = Tf$.

Es claro que la composición de morfismos antípodas es antípoda y la identidad de X es un morfismo antípoda.

Sea $(X, A, T) \times I = (X \times I, A \times I, T)$ con $T(x, t) = (T(x), t), I = [0, 1]$. Diremos que

$$f_0 \quad \text{y} \quad f_1 \quad \text{son homotópicas si existe}$$

$$H : (X, A, T) \times I \to (Y, B, T)$$

tal que

$$H_0 = f_0 \quad \text{y}$$

$$H_1 = f_1.$$

El espacio (Y, B, T) es un retracto de (X, A, T) si existe una retracción antípoda r, es decir, si existe $r : (X, A, T) \to (Y, B, T)$ tal que la composición ri es la identidad, donde $i : (Y, B, T) \hookrightarrow (X, A, T)$ es la inclusión.

4. Complejos de Cadenas para T-Espacios

En adelante trabajeremos con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$.

Una p-cadena c, es una (T,p)-cadena, denotada por, $c \in C_p(X,A,T)$ si :

$$Tc = c.$$

Las cadenas de dimensión p de (X,A,T) serán las cadenas de $C_p(X,A)$ que son invariantes bajo T (voy a denotar tambien por T al inducido por T en homología).

El siguiente lema nos caracteriza las (T,p)-cadenas:

Lema 2 *$c \in C_p(X,A)$ es una (T,p)-cadena si y sólo si $c = \alpha + T\alpha$ para alguna p-cadena α.*

Demostración.

$(\Leftarrow)$ Si $c = \alpha + T\alpha$, esto implica

$$T(c) = T\alpha + TT\alpha = T\alpha + \alpha = c$$

por tanto c es una p-cadena.

$(\Rightarrow)$ Sea $c = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ donde α_i es un p-simplejo de (X,A) y supongamos que $Tc = c$.

Como T no tiene puntos fijos esto implica que $T\alpha_i \neq \alpha_i$ para † todo $1 \leq i \leq k$. Por tanto $k = 2n$ para algún $n > 0$. La demostración se hará por inducción sobre n.

† Esto es consecuencia del teorema de punto fijo de *Brouwer*

Si $n = 1$ entonces

$$c = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{como} \quad Tc = c$$

esto implica que

$$T(c) = T\alpha_1 + T\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

pero $\quad T\alpha_1 \neq \alpha_1$

de modo que

$$\alpha_2 = T\alpha_1$$

y por lo tanto

$$c = \alpha_1 + T\alpha_1.$$

Supongo ahora cierto el resultado para $n - 1$ con $n > 1$.

Sea $c = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n}$. Considero α_{2n} y $T\alpha_{2n}$. Como $\alpha_{2n} \neq T\alpha_{2n}$ se sigue que $T\alpha_{2n} = \alpha_j$ para algún $1 \leq j \leq n - 1$. Sin perder generalidad puedo suponer que $j = 2n - 1$. Entonces

$$c = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n-2}) + (\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n})$$

sea $\sigma = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n-2})$, como los coeficientes son $\mathbb{Z}_2$ entonces

$$c + (\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}) = \sigma.$$

Primero probaremos que σ es una $(T,p) - \textit{cadena}$ de longitud $2(n-1)$:

$$\begin{aligned} T(c + (\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n})) &= T\sigma \\ \text{pero} \quad T(c + (\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n})) &= Tc + T\alpha_{2n-1} + T\alpha_{2n} \\ &= Tc + TT\alpha_{2n} + T\alpha_{2n} \\ &= c + \alpha_{2n} + \alpha_{2n-1} \\ &= \sigma. \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $\sigma = \alpha + T\alpha$ para algún $\alpha \in C_p(X, A)$. Por tanto

$$c + T\alpha_{2n} + \alpha_{2n} = \alpha + T\alpha$$

$$\begin{aligned} c &= \alpha + T\alpha + T\alpha_{2n} + \alpha_{2n} \\ &= (\alpha + \alpha_{2n}) + T(\alpha + \alpha_{2n}) \end{aligned}$$

quedando así probado el lema. □

5.Homología de T-Espacios

Ya teniendo el complejo de cadenas para un T-Espacio, el operador frontera

$$\partial_p : C_p(X, A, T) \to C_{p-1}(X, A, T)$$

lo defino como el operador frontera de

$$C_p(X, A) \to C_{p-1}(X, A)$$

restringido a $C_p(X, A, T)$.

Este esta bien definido pues T es simplicial y T conmuta con ∂ :

es decir si

$$c = \alpha + T\alpha$$

entonces

$$\begin{aligned} \partial c &= \partial\alpha + \partial T\alpha \\ &= \partial\alpha + T\partial\alpha \in C_{p-1}(X, A, T). \end{aligned}$$

Análogamente si $f : (X, A, T) \to (Y, B, T)$ es una función antípoda entonces $f_* : C_p(X, A, T) \to (Y, B, T)$ se define como la restricción de

$$f_* : C_p(X, A) \to C_{p-1}(X, A)$$

a $C_p(X, A, T)$. Está bien definido porque f es simplicial y conmuta con T.

Como siempre sea

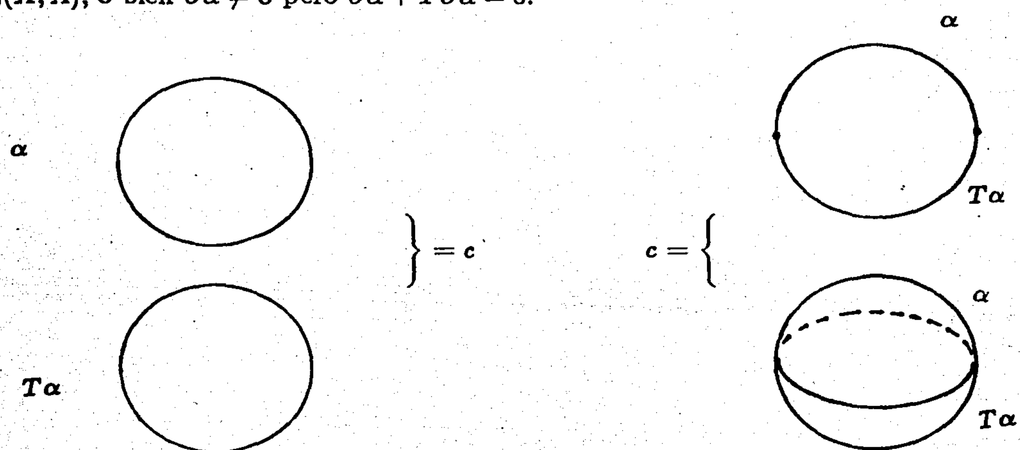
$$
\begin{aligned}
Z_p(X,A,T) &= \{z \in C_p(X,A,T) | \partial z = 0\} \\
B_p(X,A,T) &= \{z \in C_p(X,A,T) | \partial c = z, c \in C_{p+1}(X,A,T)\}\,. \\
H_p(X,A,T) &= \frac{Z_p(X,A,T)}{B_p(X,A,T)}
\end{aligned}
$$

Esta será la homología para nuestros espacios (X, A, T)

Observaciones:

Intuitivamente los ciclos de $Z_p(X, A, T)$ se ven :

si $c = \alpha + T\alpha$ y $\partial c = 0$ entonces o bien $\partial\alpha = 0$, esto es, α es un ciclo en $C_p(X, A)$, o bien $\partial\alpha \neq 0$ pero $\partial\alpha + T\partial\alpha = 0$.



6. Cálculo de la Homología

Supongamos que (X, A, T) es propia, es decir, para cada vértice $\mu \in X$ la estrella de μ no intersecta la estrella de $T(\mu)$. †

Sea (X', A') el complejo simplicial que se obtiene de (X, A) identificando x con $T(x)$.

Sea $\gamma : (X, A) \to (X', A')$ la funcion natural definida por la identificación mencionada. La función γ es claramente simplicial y si σ es un simplejo de X, $\gamma(\sigma)$ es el simplejo de (X', A') obtenido al identificar σ con $T(\sigma)$.

Sea $\gamma_* : C_p(X, A, T) \to C_p(X', A')$ definida como

$$\gamma_*(\alpha + T(\alpha)) = \gamma(\alpha) = \gamma(T\alpha).$$

Notemos que γ_* está bien definida pues si $c = \alpha + T\alpha$ y $c = \alpha' + T\alpha', \alpha, \alpha' \in C_p(X, A)$, entonces es fácil ver que α' se obtiene de α haciendo una permutación entre los simplejos que definen a α y sus imágenes. Ahora el resultado se sigue debido a que para todo simplejo de $X, \gamma(\sigma) = \gamma T(\sigma)$.

Es fácil verificar las siguientes propiedades de γ_* [18] :

- γ_* es un morfismo de cadenas.
- γ_* conmuta con f_* y ∂. Es decir γ_* es una transformación natural de

$$C_*(X, A, T) \quad \text{en} \quad C_*(X', A')$$

- por lo anterior, γ_* induce un homomorfismo $\gamma_\sim : H_p(X, A, T) \to H_p(X', A')$ que satisface:

---

† Esta condición siempre la puedo suponer si T es simplicial y sin puntos fijos, utilizando una subdivisión baricéntrica de X suficientemente fina. [11]

Teorema. *El morfismo $\gamma_\sim$ es un isomorfismo natural entre*

$$H_*(X,A,T) \quad y \quad H_*(X',A').$$

Con este último resultado obtenemos que si $X = \mathbb{S}^n$ y T la función antípoda de $\mathbb{S}^n$ entonces

$$H_p(\mathbb{S}^n,T) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{Si } 0 \leq p \leq n; \\ 0, & \text{Si } p > n. \end{cases}$$

Observaciones

Hemos definido unos grupos de Homología para T-Espacios (X,A,T) y resulta que esta Homología es la misma que la del espacio obtenido al identificar x con $T(x)$. Probablemente nos imaginábamos que esto debería suceder y, aparentemente, sólo sofisticamos el problema sin razón. En la sección que sigue veremos que el pensar en (X,A,T), sí es en realidad ventajoso y se puede obtener información que, en $H_*(X',A')$ resulta difícil de descubrir.

7. Indice de un T-Espacio

En esta sección definiremos un homomorfismo $in\ : H_p(X,A,T) \to \mathbb{Z}_2$ que "mide el grado de complejidad" de un elemento de $H_p(X,A,T)$. Con este homomorfismo mediremos el "grado de complejidad" de un T-Espacio. Es decir, este homomorfismo será una vía para definir un invariante para los T-Espacios. Este invariante será un número entero no negativo, con la propiedad de que si

$$invariante\ ((X,T)) > invariante\ ((Y,T))$$

entonces, no solamente son distintos como espacios topológicos, sino, más aún, no existen morfismos antípodas de (X,T) en (Y,T).

Definición Sea c una 0-cadena de X, donde X un complejo simplicial.

$$\text{Sea} \quad c = v_1 + \cdots + v_k, \quad \text{donde} \quad v_i \quad \text{es un vértice de} \quad X, i = 1 \cdots k.$$

Defino el *índice*, $in\ : C_0(X) \to \mathbb{Z}_2$ como el homomorfismo definido por

$$in\ (c) = k \bmod 2$$

Sea ahora $c \in H_p(X,A,T)$. Se define inductivamente $in\ : H_p(X,A,T) \to \mathbb{Z}_2$ como

$$in\ (c) = in\ (\partial\alpha), \quad \text{si} \quad p > 0 \quad \text{y} \quad c = \alpha + T\alpha.$$

El siguiente lema no se hace esperar:

Lema 3. *$in\ : H_p(X,A,T) \to \mathbb{Z}_2$ está bien definido.:*

Demostración. *(inducción sobre p).*

$$\text{Si} \quad p = 0 \quad \text{y} \quad c = \alpha' + T\alpha'$$

$$\text{entonces} \quad \alpha - \alpha' = T(\alpha - \alpha') = 0$$

$$\text{por tanto} \quad in\ (\alpha) - in\ (\alpha') = in\ (\alpha - \alpha')$$

es decir in está bien definido para $p = 0$.

Además si $z = \partial(\alpha + T\alpha)$ esto implica que

$$in\ (z) = in\ (\partial\alpha) = 0.$$

por lo tanto

$$in\ (B_0(X, A, T)) = 0.$$

Supóngamos ahora que in está bien definido para $Z_{p-1}(X, A, T)$ y que

$$in\ B_0(X, A, T) = 0 \quad \text{con} \quad p > 0.$$

$$\text{Supongamos que} \quad z = \alpha + T\alpha$$
$$= \alpha' + T\alpha'$$

son dos representaciones para $z \in Z_p(X, A, T)$. Entonces es fácil ver que z se puede representar como

$$z = \alpha_1 + \alpha_2 + T\alpha_1 + T\alpha_2$$

con

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{y} \quad \alpha' = \alpha_1 + T\alpha_2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} in\ (\partial\alpha) - in\ (\partial\alpha') &= in\ (\partial\alpha - \partial\alpha') \\ &= in\ (\partial(\alpha - \alpha')). \\ &in\ (\partial(\alpha_2 - T\alpha_2)) \end{aligned}$$

Como $\partial(\alpha_2 + T\alpha_2) \in B_{p-1}(X, A, T)$ por hipótesis de inducción se sigue que

$$in\ (\partial\alpha) = in\ (\partial\alpha').$$

Por lo tanto in está bien definido en $Z_p(X, A, T)$.

Por otro lado si $z \in B_p(X,A,T)$ y $z = \partial(\partial + T\alpha)$. Entonces

$$in\ (z) = \begin{cases} in\ (\partial\partial\alpha), & \text{si } p > 0\ ; \\ in\ (in\ \partial\alpha), & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto $in\ B_p(X,A,T) = 0$.

Esto permite definir

$$in\ : H_p(X,A,T) \to \mathbb{Z}_2 \quad \text{como :}$$

$in\ ([z]) = in\ (z)$.

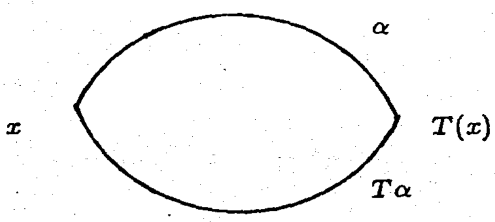
De todo lo anterior se sigue que el homomorfismo está bien definido. □

Intuitivamente los p ciclos de índice 1 se construyen de la siguiente manera:

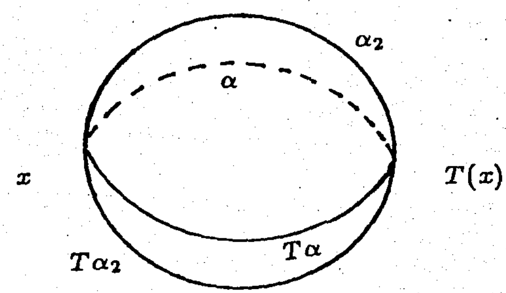
Comienzo con 2 vértices x y Tx .

$x\ \bullet \qquad\qquad\qquad\qquad \bullet T(x)$

Ahora consigo una 1-cadena tal que $\partial\alpha = x + Tx$ y $\alpha + T\alpha$ sea un $T-1$ ciclo .



nuevamente busco ahora una 2-cadena α_2 tal que $\partial\alpha_2 = \alpha + T\alpha$ y $\alpha_2 + T\alpha_2$ sea un $T-2$ ciclo.



y así sucesivamente me consigo una p-cadena α_p tal que $\partial\alpha_p = \alpha_{p-1} + T\alpha_{p-1}$ y $\alpha_p + T\alpha_p$ sea un $T-p$ ciclo.

El siguiente lema será importante.

Lema 4. *Sea $f : (X,T) \to (Y,T)$ una función simplicial antípoda. Entonces si $\xi \in H_p(X,T)$*

$$in\ (f_*\xi) = in\ (\xi).$$

(esto quiere decir que las funciones antípodas respetan el índice)

Demostración.

Puesto que $in\ : H_p(X,T) \to \mathbb{Z}_2$ está definido en términos de un representante para $\xi \in H_p(X,T)$. Basta probar la afirmación para $z \in Z_p(X,T)$. La afirmación es trivial para $p = 0$ pues si $z \in Z_0(X,T)$ entonces

$$z = v_1 + \cdots + v_k$$

y por lo tanto

$$f_*(z) = f_*v_1 + \cdots + f_*v_k$$

como estamos trabajando con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, entonces se respeta la paridad de k y, por lo tanto

$$in\ f_*\xi = in\ \xi.$$

Ahora, si $p > 0, z \in Z_p(X,T)$ y $z = \alpha + T\alpha$. Entonces

$$in\ (z) = in\ (\partial\alpha)$$

$$\text{por tanto}\quad in\ (f(z)) = in\ (\partial f\alpha)$$

$$= in\ (f\partial\alpha)$$

y como $\partial\alpha \in Z_{p-1}(X,T)$, por hipótesis de inducción se tiene

$$in\ (f\partial\alpha) = in\ (\partial\alpha) = in\ (z).$$

Con lo que queda probado nuestro lema. □

Corolario 1 (teorema de *Borsuk [1]*). *Si in* $(X,T) > 0$, *entonces para toda función antípoda* $f : (X,T) \to (Y,T)$ *y todo* T*-espacio* (Y,T).

$$f_* \neq 0.$$

Lema 5. *Sea* (X,T) *un* T*-espacio, Sea* $F \subset X$ *un cerrado tal que*

$$F \cup T(F) = X \quad y$$

$$A = F \cap T(F).$$

Entonces existe un homomorfismo

$$\Delta : H_p(X,T) \to H_{p-1}(A,T), \qquad p > 0$$

tal que in $(\xi) = in\ (\Delta\xi)$, *para toda* $\xi \in H_p(X,T)$.

Demostración.

Si $\xi \in H_p(X,T)$, donde $\xi = [z] \quad z = \alpha + T\alpha$ y $\overline{\alpha} \in F$. Entonces

$$\partial\alpha \in Z_{p-1}(A,T)$$

por lo tanto defino $\Delta\xi = [\partial\alpha]$.

Por demostrar que Δ está bien definido, es decir, que Δ no depende ni de α, ni de z.

No depende de α :

$$\text{porque si} \quad z = \alpha_1 + \alpha_2 + T(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \alpha_1 + T\alpha_2 + T(\alpha_1 + T\alpha_2)$$

$$\text{además como} \quad \partial\alpha_i = T\partial\alpha_i = \partial T\alpha_i, i = 1,2$$

$$\text{entonces} \quad \partial(\alpha_1 + \alpha_2) = \partial(\alpha_1 + T\alpha_2)$$

por lo tanto Δ no depende de α.

Sea ahora $z \in B_p(X,T)$. Entonces $z = \mu$ para algún $\mu \in C_{p+1}(X,T)$, por lo tanto $z = \partial\mu_1 + T\partial\mu_1$ y $\Delta z = \partial(\partial\mu_1 + T\partial\mu_1) = 0$.

Por tanto $\partial\partial\mu_1 = \partial T\partial\mu_1$ y como $\partial\mu_1 \in B_{p-1}(X,T)$ se sigue que

$$\partial\mu_1 \in Z_p(X,T).$$

Esto implica que $\Delta z = \partial(T\partial\mu_1)$.

Esto es $\Delta z \in B_{p-1}(X,T)$,

por lo tanto

$$\Delta(B_p(X,T)) \subset B_{p-1}(X,T).$$

Esto prueba que Δ está bien definida y, ademas que

$$in \ (\xi) = in \ (z) = in \ (\partial c) = in \ [\Delta\xi].$$

$\square$

Corolario 2. *Si in* $(H_n(X,T)) = \mathbb{Z}_2$. *Entonces*

$$in \ (H_p(X,T)) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{para} \quad 0 \leq p \leq n.$$

Corolario 3. *Para cualquier T-Espacio existe un entero n tal que*

$$in \ (H_p(X,T)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & si \ p = 0, \cdots, n\ ; \\ 0, & si \ p > n. \end{cases}$$

Demostración.

Por el Corolario 1 basta probar que $in \ H_p(X,T) = 0$ para algún entero p. Pero es obvio que si $p-1$ es la dimensión de X entonces $H_p(X,T) = 0$.

Definición El entero n mencionado en el Corolario 2 se define como el ***índice*** de (X,T) y se denota por $in \ (X,T)$.

En esta parte final del capítulo obtendremos frutos de los que hemos sembrado hasta ahora.

Teorema.

$$in\ \ (H_p(\mathbb{S}^n, T)) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{para} \quad p = 0, 1, \ldots, n$$

y por lo tanto

$$in\ \ (\mathbb{S}^n, T) = n.$$

Demostración. *(inducción sobre n). Si $n = 0$, la demostración es trivial pues $\mathbb{S}^0$ consiste de dos puntos y existe sólo un ciclo invariante $x + Tx$, por lo tanto*

$$in\ \ (x + Tx) = 0.$$

Supongamos ahora que $in\ \ (H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}, T)) = \mathbb{Z}_2$, considero

$$\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{como} \quad \{\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \qquad \|\overline{x}\| = 1\}$$

y sea T la funión antípoda de $\mathbb{S}^n$.

Sea $F = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n | x_n \geq 0\}$

$$\text{entonces} \quad F \cup T(F) = \mathbb{S}^n$$
$$\text{y} \quad F \cap T(F) = \mathbb{S}^{n-1}.$$

Sea $\Delta : H_n(\mathbb{S}^n, T) \to H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}, T)$ el homomorfismo del lema3, es fácil ver que en este caso, Δ es isomorfismo y por lo tanto

$$in\ \ (H_n(\mathbb{S}^n, T)) = in\ \ (H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}, T))$$
$$= \mathbb{Z}_2.$$

$\square$

El siguiente lema nos dá una condición necesaria y suficiente para que $\xi \in H_p(X,T)$ tenga *índice* distinto de cero, además esta caracterización será importante mas adelante.

Lema 6. *Sea* $\xi \in H_p(X,T)$. *Entonces in* $(\xi) \neq 0$ *si y sólo si* $f_*(\xi) \neq 0$ *para toda función antípoda*

$$f : (X,T) \to (Y,T)$$

y todo T-Espacio (Y,T) .

Demostración.

Si $in\ (\xi) \neq 0$ entonces para cualquier función antípoda $f : (X,T) \to (Y,T)$,

$$in\ (f_*\xi) = in\ (\xi) \neq 0,$$

por lo tanto $f_*(\xi) \neq 0$.

Inversamente supongamos que $in\ (\xi) \neq 0$

Sea λ una cubierta de (X,T) con elementos

$$U_0, \cdots, U_r, T(U_0), \cdots, T(U_r).$$

Sea $\{\phi_i\}_i$ una partición de la unidad [9] subordinada a λ.

$$Sea \quad f_i = \sqrt{\phi_i} : U_i \to [0,1], i = 0, \ldots, r$$

$$g_i = \sqrt{f_i T} : TU_i \to [0,1], i = 0, \ldots, r$$

Es fácil ver que estas funciones satisfacen las siguientes propiedades

$$(i) f_i(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in X - U_i,$$

$$(ii) g_i(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in X - TU_i,$$

$$(iii) \sum_{i=0}^{r} f_i^2 + g_i^2 = 1.$$

Esto define una función $f : (X,T) \to (\mathbb{S}^r, T)$ como

$$f(x) = (f_0(x) - g_0(x), \ldots, f_r(x) - g_r(x))$$

y por tanto $\boldsymbol{in}\ (f_* \xi) = \boldsymbol{in}\ (\xi) = 0$. Por el teorema anterior se sigue que $f_*(\xi) = 0$.

Lo que hemos probado es que si $in\ (\xi) = 0$ entonces existe un T-espacio y una función antípoda tal que $f(\xi) = 0$. □

Como corolario a lo anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema. *Si $in\ (X,T) = m$, $in\ (Y,T) = n$ y $m > n$, entonces no existe una función antípoda*

$$f : (X,T) \to (Y,T).$$

Este teorema tiene como corolario :

Teorema. *No existe $f : (\mathbb{S}^n, T) \to (\mathbb{S}^{n-1}, T)$.* □

Como ya habíamos observado al final de la sección 1, este teorema tiene como corolario el teorema de *Borsuk-Ulam* .

Recapitulando, el teorema de *Borsuk-Ulam* garantiza que toda función continua f de la n-esfera en $\mathbb{R}^n$ manda dos puntos antípodas al mismo. Una pregunta que nos viene de inmediato a la mente es la siguiente *¿ Necesariamente los puntos que "pega" f son antípodas ?.*

El capítulo siguiente da respuesta a esta pregunta :¡ no!. ¡ La condición de ser antípodas la podemos cambiar por que los puntos tengan distancia arbitraria !.

CAPITULO II

Teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado

En este capítulo se estudian nuevamente funciones continuas $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$. En el capítulo anterior vimos que f "pega" dos puntos antípodas. Daremos respuesta a la pregunta formulada anteriormente: ¿ Necesariamente los puntos que "pega" f son antípodas ?. Veremos que la condición de ser antípodas la puedo generalizar y pedir que los puntos tengan distancia arbitraria entre 0 y π.

Como anteriormente, el caso $n = 1$ y $n = 2$ se resuelven de manera muy distinta y el caso $n = 2$ da una idea para resolver el caso general $n > 2$.

Teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado ($n = 1$). *Sean $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una función continua, $\theta \in (0, \pi)$. Entonces existen $x, y \in \mathbb{S}^1$ tales que*

$$i) d(x, y) = \theta$$

$$ii) f(x) = f(y).$$

Demostración.

caso 1) Sea $\theta = \frac{p}{q} 2\pi$ para algunos $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Consideremos $g(x) = f(x) - f(x + \theta)$. Lo que buscamos son ceros de g. Si g tiene algún cero, hemos terminado. Si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$, entonces, por la conexidad de $\mathbb{S}^1, g$ es siempre positiva o siempre negativa. Sin pérdida de generalidad, supongo que

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

Esto implica que $f(x) > f(x+\theta) \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$. De modo que

$$f(x) > f(x+\theta) > f(x+2\theta) > \cdots > f(x+q\theta) = f(x)$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $g(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{S}^1$.

caso 2) Sea $\theta \neq \frac{p}{q}2\pi \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Considero $g(x) = f(x) - f(x+\theta)$, como $\theta \neq \frac{p}{q}2\pi \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$ esto implica que el conjunto

$$C = \{x, x+\theta, x+2\theta, \ldots\}$$

es un subconjunto denso de $\mathbb{S}^1$[12]. Supongamos que $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$, entonces de manera similar al caso 1 puedo, sin perder generalidad, suponer que $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$. Considero $x \in \mathbb{S}^1$ y de C extraigo una sucesión monótona $\{x, x+k_1\theta, x+k_2\theta, \ldots\}$, tal que

$$\lim_{s \to \infty} \{x + k_s\theta\} = x$$

con estas condiciones tenemos que

$$f(x) > f(x+k_1\theta) > f(x+k_2\theta) > \cdots f(x+k_j\theta) > \cdots$$

entonces $f(x) > \lim_{s\to\infty} f(x+k_s\theta) = f(x)$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $g(x) = 0$ para alguna $x \in \mathbb{S}^1$ □

Observaciones: En esta demostración se utilizaron dos propiedades de los espacios involucrados:

- De $\mathbb{S}^1$, la propiedad de que si "salgo" de x en una dirección y avanzo siempre en esa dirección, regreso a x.
- De $\mathbb{R}$ el orden.

Ambas propiedades se pierden para $n > 1$ y tenemos que recurrir a otros métodos.

Teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado ($n = 2$). *Sean $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función continua, $\theta \in (0, \pi)$. Entonces existen $x, y \in \mathbb{S}^1$ tales que*

$$i) d(x, y) = \theta$$

$$ii) f(x) = f(y).$$

Demostración.

Supongamos que $f(x) \neq f(y)$ siempre que $d(x, y) = \theta$, entonces definimos una función $\overline{g}(x, y) = f(x) - f(y)$. Lo que buscamos son ceros de $\overline{g}$. Cabe señalar que a $\overline{g}$ no le he definido dominio aún. Entonces comencemos por definir un dominio para $\overline{g}$.

$$\text{Sea} \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 | d(x, y) = \theta\} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2.$$

En X hay una involución continua sin puntos fijos

$$T : X \to X$$

$$T(x, y) = (y, x)$$

Si $\overline{g}$ tiene un cero, hemos terminado. Así, tenemos que $\overline{g}(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in X$. (Notemos que hasta aquí hemos seguido un camino análogo al de la demostración anterior). Como he supuesto que $\overline{g} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in X$, podemos definir una función continua

$$g : X \to \mathbb{S}^1$$
$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$$

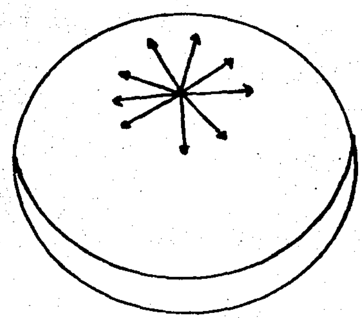
que satisface

$$g(T(x, y)) = g(y, x) = \frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|} = \frac{-(f(x) - f(y))}{\|f(x) - f(y)\|}$$
$$= Tg(x, y)$$

donde T del lado derecho es la función antípoda de $\mathbb{S}^1$. Esto quiere decir que g es una función antípoda de (X,T) en $(\mathbb{S}^1,T)$. Las preguntas que inmediatamente se nos ocurren son

- ¿ Existe tal g ?.
- ¿ Cuál es el *índice* de (X,T). ?

Puesto que el *índice* de $(\mathbb{S}^1,T)$ es 1, bastaría probar que *in* $(X,T) > 1$, para obtener una contradicción [lema 3] . *in* $(X,T) < 3$ pues si fuese 3, cambiando el codominio de f por $\mathbb{R}^3$, con la misma argumentación, obtendríamos que toda función continua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ manda dos puntos con distancia $\frac{\pi}{2}$ (por ejemplo) al mismo. Lo cual es evidentemente falso. Por lo tanto *in* $(X,T) = 0,1,2$. Averiguar si *in* $(X,T) =$ 2,resultó ser muy complicado, pues habría que obtener un $T-2$-ciclo de (X,T) con *índice* no cero. Este camino del *índice* no nos proporciona suficiente información hasta aquí , y por lo tanto vamos a averiguar más acerca de X.



$ST\mathbb{S}^2$

fig. 2

af1 X es homeomorfo al *espacio tangente esférico* a $\mathbb{S}^2$. Este espacio (denotado por $ST\mathbb{S}^2$) se define como :

$$ST\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in T\mathbb{S}^2 | \|y\| = 1\} \quad \text{donde} \quad T\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 | x \perp y\}$$
$$= \{\text{vectores unitarios tangentes a } \quad \mathbb{S}^2\}$$

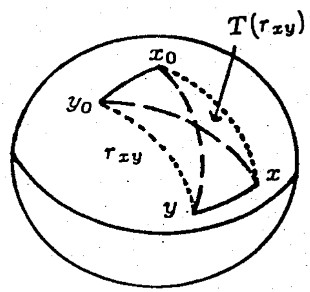
el homeomorfismo está dado por

$$(x,y) \mapsto (x, \frac{exp_x^{-1}(y)}{\|exp_x^{-1}(y)\|})$$

con $exp_x : T(\mathbb{S}^2) \to \mathbb{S}^2$ la función exponencial [12] ,que es difeomorfismo local pues $\theta \neq 0, \pi$. En este caso es claro el inverso de este homeomorfismo.(fig 2)

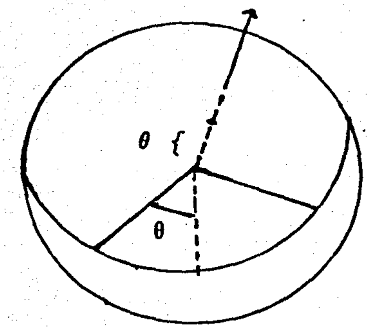
af2 El espacio $ST\mathbb{S}^2$ es homeomorfo al espacio de rotaciones de $\mathbb{R}^3$. El espacio de rotaciones de $\mathbb{R}^3$ se denota por $SO(3)$. El homeomorfismo entre estos dos espacios es como sigue[8] . Considero un punto fijo de $ST\mathbb{S}^2$, le llamo (x_0, y_0). Cualquier otro punto $(x,y) \in ST\mathbb{S}^2$, determina una rotación ,r_{xy},rotación que manda x en x_0, y y en y_0. Inversamente cada rotación r, determina un punto de $ST\mathbb{S}^2$, la imagen bajo r de (x_0, y_0). De modo que

$$X \cong SO(3).$$



Además la involución T de X define una involución, que también denoto por T, en $SO(3)$. Si $r_{xy} \in SO(3), T(r_{xy})$ es la rotación que manda x en y_0, y y en x_0 (fig 3).

af3 El espacio $SO(3)$ es homeomorfo al *espacio proyectivo real* de tres dimensiones $\mathbb{R}P^3$[8] . Una manera de definir este espacio es como una $3-$ *bola* en la que he identificado puntos antípodas de la frontera. El homeomorfismo viene dado como sigue. Considero $B_\pi$la bola de radio π con centro en el origen de $\mathbb{R}^3$, a cada punto $x \in B_\pi$ le asocio la rotación con eje $\vec{0x}$ y ángulo $\|x\|$, puesto que para $x \in \partial B_\pi$, el ángulo de rotación que define en $SO(3)$ es π , y dá lo mismo rotar π que $-\pi$. Los puntos antípodas en ∂B_π definen la misma rotación en $SO(3)$ (por supuesto que 0 va a dar a la rotación identidad). El inverso de este homeomorfismo manda a cada rotación r, al punto en B_π determinado por el eje de rotación a distancia del origen el ángulo de rotación. (Estoy pensando que el eje de rotación y el ángulo definen la orientación de $\mathbb{R}^3$ para poder elegir en qué dirección del eje de rotación escojo x (fig 4). Además, T define una involución en $\mathbb{R}P^3$, sin puntos fijos. Esta involución en $\mathbb{R}P^3$ ya no resulta fácil de visualizar.



B_π

Resumiendo; el espacio X que consideramos como dominio para g resultó ser homeomorfo a varios espacios interesantes:

$$X \overset{\varphi_1}{\cong} ST\mathbb{S}^2 \overset{\varphi_2}{\cong} SO(3) \overset{\varphi_3}{\cong} \mathbb{R}P^3.$$

Ya teniendo un mejor conocimiento de X, continuamos con nuestra demostración. A continuación voy a construir un 1-ciclo de X que sea T-invariante. Considero (x_0, y_0) fijo en X. Sea c el conjunto de parejas $(x, y) \subset X$ tales que el punto medio del arco de círculo que une x con y coincide con el punto medio del arco que une x_0 con y_0.

La imagen de c en $SO(3)$ bajo φ_2, son todas las rotaciones con un eje fijo [af2], cuyo ángulo va desde $-\pi$ a π, según la descripción de φ_2. La imagen bajo φ_3 de las rotaciones con un eje fijo y ángulo entre $-\pi$ y π es un diámetro de B_π (pues la rotación identidad va a dar al origen bajo φ_3), por lo tanto la imagen de c bajo

$\varphi_3\varphi_2$, es un ciclo no cero en $\mathbb{R}P^3$, es decir es un elemento [illegible] en $(H_1\mathbb{R}P^3)$.

También notemos que T actúa en c como la antípoda de $\mathbb{S}^1$, de modo que existe una función antípoda $\varphi : \mathbb{S}^1 \to X$. Por lo tanto $g\varphi$ es una función antípoda de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ y por el corolario 1 del primer capítulo se sigue que $(g\varphi) : (\mathbb{S}^1, T) \to (\mathbb{S}^1, T)$ es distinto de cero (en homología equivariante). Inmediatamente nos viene a la mente la siguiente pregunta: ¿ El homomorfismo $(g\varphi)_*$ es distinto de cero también en homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$?. La respuesta es que sí:

Puesto que $H_1(\mathbb{S}^1, T) \cong H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}_2)$ y se tiene un epimorfismo $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, esto induce un homomorfismo $\gamma : H(Y;\mathbb{Z}) \to H(Y;\mathbb{Z}_2)$, que también es epimorfismo. Además γ es natural al variar el espacio Y, por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma} & H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}_2) \\ \downarrow{\scriptstyle (g\varphi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (g\varphi)_*} \\ H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma} & H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}_2), \end{array}$$

y como γ es epimorfismo y $(g\varphi)_*$ es no cero con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, se sigue que $(g\varphi)_*$ es no cero con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Lo anterior implica que

$$g_* : H_1(X) \to H_1(\mathbb{S}^1)$$

es un homomorfismo no trivial. Pero

$$H_1(X) \simeq H_1(SO(3)) \simeq H_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z},$$

y no existen homomorfismos no triviales de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$. Por tanto, como el suponer que g no tiene ceros nos lleva a una contradicción, nuestro teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado queda probado. □

Observaciones En esta demostración se utilizó de manera esencial que $H_1(X) = \mathbb{Z}_2$ y $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ para obtener una contradicción. La demostración se puede generalizar para $n > 2$, salvo algunos detalles que se explicaran en el siguiente teorema.

Teorema de ***Borsuk-Ulam*** **generalizado** ($n > 2, n$ *par*). *Sean* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función continua,* $\theta \in (0, \pi)$*. Entonces, si* n *es par, existen* $x, y \in \mathbb{S}^n$*, tales que*

$$i) d(x,y) = \theta$$

$$ii) f(x) = f(y).$$

Demostración.

En esta primera parte de la demostración, se desarrolla un camino completamente análogo al de la demostración del teorema para $n = 2$. Sea $\overline{g} : X \to \mathbb{R}^n$ definida como $\overline{g}(x,y) = f(x) - f(y)$, donde X es el siguiente espacio

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n | d(x,y) = \theta\}.$$

Los ceros de $\overline{g}$ son los puntos que estamos buscando, por lo tanto, si $\overline{g}$ tiene un cero, hemos terminado. De modo que supongamos que $\overline{g}(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in X$. Esto define una función continua

$$g : X \to \mathbb{S}^{n-1}$$
$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}.$$

Nuevamente en X tenemos definida una involución sin puntos fijos

$$T : X \to X$$

$$T(x,y) = (y,x).$$

De manera análoga a la demostración del caso $n = 2$, se prueba que g es una función antípoda de (X, T) en $(\mathbb{S}^{n-1}, T)$. Como anteriormente, la existencia de g nos llevará a una contradicción.

El conjunto X es homeomorfo al *espacio tangente esférico* a $\mathbb{S}^n$. El homeomorfismo es el análogo al de la afirmación 1 del caso $n = 2$. Este espacio X tiene propiedades interesantes, por ejemplo es el espacio total de una fibración [11] sobre

$\mathbb{S}^n$, con fibra $\mathbb{S}^{n-1}$, esta propiedad permite conocer la homología en dimensión $n-1$ de X [10] .

$$H_{n-1}(ST\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar ;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } n \text{ es par .} \end{cases}$$

Nuevamente considero c el conjunto de parejas $(x, y) \subset X$ tales que el punto medio del arco de círculo que une x con y coincide con el punto medio del arco que une x_0 con y_0. Este conjunto lo puedo describir explícitamente como sigue :

$$\text{Sea} \quad h : ST\mathbb{S}^n \to X \quad \text{definida como}$$
$$h(x, y) = (exp_x(\frac{\theta}{2}y), exp_x(-\frac{\theta}{2}y)).$$

Como exp_x es una isometría radial,

$$d(exp_x(\frac{\theta}{2}y), exp_x(-\frac{\theta}{2}y)) = \frac{\theta}{2} - (-\frac{\theta}{2}) = \theta,$$

y por lo tanto $(exp_x(\frac{\theta}{2}y), exp_x(-\frac{\theta}{2}y) \in X$. Ademas $h(ST_{x_0}\mathbb{S}^n) = c$.

Ahora consideremos la inclusión de la fibra $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow ST\mathbb{S}^n$ y la composición

$$ghi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}.$$

Se verifica fácilmente que ghi es una función antípoda de

$$(\mathbb{S}^{n-1}, T) \quad \text{en} \quad (\mathbb{S}^{n-1}, T).$$

Con una argumentación análoga a la de la demostración anterior se prueba que $(ghi)_* \neq 0$ con coeficiente en $\mathbb{Z}$. La funtorialidad de la homología implica que

$$g_* h_* i_* \neq 0,$$

en particular

$$g_* \neq 0 \quad \forall (x, y) \in ST\mathbb{S}^n.$$

Pero esto es imposible porque $H_{n-1}(X) \sim H_{n-1}(ST\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}_2$ y $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$.

Por tanto queda probado nuestro teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado para n un entero positivo par. $\square$

Observaciones

- Esta demostración es la generalización,practicamente paso a paso, de la demostración del caso $n = 2$. Lo que usamos en general fué la **no-** existencia de homomorfismos distintos de cero de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$, y que $H_{n-1}(ST\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}_2$ cuando n es par.

- En esta demostración lo único que hemos utilizado es que el homomorfismo g_* que construimos es no trivial en homología. En la demostración del caso general utilizaremos este homomorfismo, y construiremos un homomorfismo que será nulhomotópico y, sin embargo homotópico a g.

- Hasta aquí he escrito el trabajo que desarrollé para generalizar el teorema de *Borsuk-Ulam* . La demostración de esta generalización, para todo $n \in \mathbb{N}$, no la obtuve con los métodos hasta ahora utilizados. A continuación escribo la generalización del teorema de *Borsuk-Ulam* . Esta generalización se debe a *Hopf* y cabe notar que las ideas que se utilizan en la demostración son análogas a las que desarrollé hasta este punto de la tesis.

Teorema de Borsuk-Ulam generalizado(caso general)[7]. *Sean $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua, $\theta \in (0, \pi)$. Entonces existen $x, y \in \mathbb{S}^n$, tales que*

$$i) d(x, y) = \theta,$$

$$ii) f(x) = f(y).$$

Demostración. *(por contradicción).*

Supongamos que el teorema es falso, esto es supongamos que $f(x) \neq f(y)$

siempre que $d(x,y)=\theta$. Consideremos

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n|d(x,y)=\theta\},$$

y la siguiente función contínua $g:X\to\mathbb{S}^{n-1}$

$$g(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{\|f(y)-f(x)\|}.$$

Sean $f^i:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}, i=1,\cdots,n$, las funciones coordenadas de f. Como $\mathbb{S}^n$ es compacto entonces f^n alcanza su máximo en un punto $x_0\in\mathbb{S}^n$. Esto implica que $f^n(y)-f^n(x_0)\leq 0 \quad \forall y\in\mathbb{S}^n$. Por lo tanto

$$g^n(x_0,y)=\frac{f^n(y)-f^n(x_0)}{\|f(y)-f(x_0)\|}\leq 0 \quad \forall \quad y\in\mathbb{S}^n,$$

$$\text{Sea} \quad g_{x_0}=g(x_0,y).$$

Por lo tanto

$$g_{x_0}(\mathbb{S}^n)\subset E^-=\{y\in\mathbb{R}^n|y^n\leq 0\}$$

esto quiere decir que $g_{x_0}:\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}$ no es suprayectiva, lo cual implica que g_{x_0} es nulhomotópica.

Ahora considero $h_0:ST_{x_0}\mathbb{S}^n\to X$ definida como

$$\begin{aligned} h_0(x_0,y)&=(exp(\theta y),exp(0))\\ &=(exp(\theta y),x_0). \end{aligned}$$

Sea $h_{-\frac{\theta}{2}}:ST_{x_0}\mathbb{S}^n\to X$ definida como

$$h_{-\frac{\theta}{2}}(x_0,y)=(exp(\frac{\theta}{2}y),exp(-\frac{\theta}{2}y)).$$

Por último considero

$$H_0:ST_{x_0}\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^{n-1},$$

$$H_0=g_{x_0}h_0 \quad ,$$

$$H_{-\frac{\theta}{2}}:ST_{x_0}\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^{n-1},$$

$$H_{-\frac{\theta}{2}}=g_{x_0}h_{-\frac{\theta}{2}}.$$

La función H_0 es nulhomotópica, mientras que la función $H_{-\frac{\theta}{2}}$ no lo es (ésto se probó en la demostración del teorema anterior). Sin embargo, la siguiente función es una homotopía entre H_0 y $H_{-\frac{\theta}{2}}$:

$$H : [-\frac{\theta}{2}, 0] \times ST_{x_0}\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$$

$$H(t, x_0, y) = \frac{f(exp((t+\theta)y)) - f(exp(ty))}{\|f(exp((t+\theta)y)) - f(exp(ty))\|}.$$

Lo cual es una contradicción, y por lo tanto queda probado nuestro teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado. □

APENDICE

Variantes del teorema y Conjetura de Hopf

En el capítulo anterior se expone el trabajo de investigación que desarrollé y los resultados que obtuve. En este capítulo se redondea este trabajo mencionando una generalización del Teorema de *Borsuk-Ulam* debida a *Hopf* . El capítulo termina mencionando una variante del teorema de *Borsuk-Ulam* planteada por *Hopf* en [7] . Esta pregunta hecha por *Hopf* se pudo resolver completamente hasta 1985.

Comenzaremos mencionando el teorema de *Hopf* .

Teorema de Hopf. *Sea M una variedad riemanniana compacta,conexa,de dimensión n. Sea r_M el radio de inyectividad de la función exponencial [12]*

$$exp : TM \to M \qquad (TM \quad \text{el haz tangente de} \quad M).$$

Sean $f : M \to \mathbb{R}^n$ una función contínua y $\theta \in (0, r_M)$. Entonces existen $x, y \in M$ tales que

$$i) d(x,y) = \theta$$

$$ii) f(x) = f(y).$$

Este teorema en realidad es una consecuencia del corolario 1 del primer capítulo, y la demostración es prácticamente la misma que la demostración hecha al final del capítulo 2.

En ese mismo artículo [16] ,*Hopf* conjeturó la siguiente variante del teorema.

1. Sea M una variedad riemanniana compacta, conexa.

2. Sea r_M el radio de inyectividad de la función exponencial.

DEFINICION.

Sea $f : M^n \to \mathbb{S}^n$ una función continua.Si α es un número real con la propiedad

$$(d(x,y) = \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)), \quad \text{entonces}$$

diremos que f en una función $\alpha -$ *separadora.*

Teniendo esta definición podemos establecer la conjetura de *Hopf*

Conjetura de *Hopf* **(1945).** *Sean $f : M \to \mathbb{S}^n$ una función continua, M como en* **1.** *Si f es $\alpha - separadora$ para algún $\alpha \in (0, r_M)$, entonces*

$$\partial f \neq 0 \qquad \textit{donde} \quad \partial \quad \textit{denota el grado topológico de} \quad f[13].$$

otra forma equivalente de esta conjetura es :

Si $f : M \to \mathbb{S}^n$ es una función continua y $\partial f = 0$ entonces, para cada $\alpha \in (0, r_M)$, existen $x, y \in M$ tales que

$$i) d(x,y) = \alpha$$

$$ii) f(x) = f(y).$$

Esta conjetura de *Hopf* se resuleve fácilmente para el caso $n = 1$, y, de hecho es una consecuencia del teorema de *Borsuk-Ulam* generalizado. La conjetura no resultó ser tan sencilla para el caso $n > 1$, e históricamente se ha probado por partes.

Hirsch[6] prueba la siguiente versión de la conjetura de *Hopf* .

Sean M, N variedades riemannianas cerradas, conexas, orientables, de la misma dimensión y con característica de Euler no nula. Sea $f : M \to N$ una función $\alpha - separadora, \alpha \in (0, r_M)$ tal que

$$(*)\cdots \quad \text{Si} \quad (x,y) \in M \times M \quad \text{y} \quad d(x,y) < r_M \quad \text{entonces} \quad d'(f(x), f(y)) < r_N.$$

Entonces

$$\frac{\chi(N)}{\chi(M)}(\partial f)^2 \quad \text{es un número entero impar.}$$

Este teorema de Hirsch tiene los siguientes corolarios inmediatos

$i)$ $\dfrac{\chi(M)}{\chi(N)}$ no puede ser un número entero,

$ii)$ si $N = \mathbb{S}^n, \chi(N) = 2$, entonces $\chi(M)$ es par,

$iii)$ si $M = N$ entonces ∂f es impar.

Posteriormente para $N = \mathbb{S}^n$ T. t. Dieck y L. Smith [4] probaron la conjetura de *Hopf* para $n \neq 3, 7$ y sin pedir que $\chi(M) \neq 0$ ni la condición $(*)$.

F.Wille abordó el problema en la década de los 70^s, y entre 1976 y 1978[15] da una prueba para cuando $M = \mathbb{S}^n$ y n par; y cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ para todo n [16] .

En 1980 el mismo Wille prueba la conjetura de *Hopf* para $M = \mathbb{S}^n$y para todo entero n. Ese mismo año prueba la conjetura de *Hopf* en general[17] .

BIBLIOGRAFIA

[1] Borsuk, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.* 20 (1933). 177-190.

[2] Do Carmo, M.. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Englewood Cliffs., N. J. ,Prentice Hall, 1976.

[3] Dold, A. Lectures on Algebraic Topology, 2^{nd} Ed., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1980.

[4] t.Dieck, T., Smith, L. On coincidence points of maps from manifolds to spheres, *Ind. Univ. Math. J.* 28, 1-3(1979) 251-255.

[5] Hirsch, G. Sur un problème de Hopf, *Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège* (1943), 514-522.

[6] Hirsch, G. A propos d'un problème de Hopf sur les represèntations de variétés, *Ann. of Math.* 50 (1949), 174-179.

[7] Hopf, H. Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs-und Überdeckungs-sätze, *Port. Math.* 4(1943-45), 381-405.

[8] Montesinos, J. M. Variedades de mosaicos, *Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas, Oaxtepec, Mor.* CINVESTAV, 1982.

[9] Munkres,J. R. Topology; a First Course. Englewood Cliffs, 1975.

[10] Serre, J. P. Homologie singulière des espaces fibrés, *Ann. of Math.* 54,(1951), 425-505.

[11] Spanier, E. Algebraic Topology, New York, Mc Graw Hill, 1966.

[12] Spivak M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol I-III, Boston, Mass., Publish or Perish Inc.

[13] Steenrod, N.E. Foundations of Algebraic Topology,Princ. Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.

[14] Steenrod, N.E. Topology of Fibre Bundles, Princeton Math. Series, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1951.

[15] Wille, F. Über eine Vermutung von,H. Hopf sur Abbildungsgrad-theorie, preprint, *FB Math. Univ.* Kassel, 1976.

[16] Wille, F. Ein Analogon zum Borsukschen Antipodensatz für rechtwinklige Punktepaare, preprint, *FB Math. Univ.* Kassel, 1978.

[17] Wille, F. On a conjeture of Hopf for α-separating maps from manifolds into spheres. *Proc. Sherbrooke,*Quebec 1980; Fixed Point Theory. *Lecture Notes Math.* 886, Springer.

[18] Yang-Chung-Yao. On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani, Yamabe, Yujobô and Dyson *I*, *Ann. of Math.* 60, (1954), 262-282.