2ej
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE DISTRIBUCIONES INFINITAMENTE DIVISIBLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

SERGIO ALFONSO ALLARD BARROSO

México, D. F. 1987

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto presentar algunos resultados sobre las variables aleatorias INFINITAMENTE DIVISIBLES.

Esta Tesis se divide en tres capítulos y un anexo donde:

- En el Primer capítulo se dan las generalidades de la teoría de Probabilidad y consta de ocho partes que son : Fenómenos Aleatorios, Definiciones de Probabilidad, Algebra de eventos, Espacio de Probabilidad y Definición Axiomática, Funciones de Distribución, Características Numéricas, Función Característica y Convergencia.

De estas partes desarrolladas cabe mencionar que la parte más profunda de todas es la parte de la Función Característica por su importancia en la Teoría de Probabilidad. Una de las propiedades de las Funciones Características es la biyectividad que tiene con el espacio de funciones de Distribución, es decir, en algunas ocasiones es más sencillo resolver algunos problemas en el espacio de Funciones Características para luego regresar al espacio de funciones de Distribución con el problema o los problemas "resueltos".

Otra característica importante de éste tipo de funciones es el manejo de la Función Exponencial, que en sí tiene propiedades muy especiales que facilitan muchos cálculos dentro de la Teoría de Probabilidad.

En la última parte de este capítulo se presentan algunos resultados sobre la convergencia de variables aleatorias que se utilizan en el desarrollo del presente trabajo.

- En el Segundo capítulo se desarrollan cuatro secciones.

En la Primer sección se da la primer definición básica de variables aleatorias INFINITAMENTE DIVISIBLES.

En la Segunda sección se ven algunas propiedades básicas y se da la primer definición formal sobre distribuciones INFINITAMENTE DIVISIBLES.

En la Tercera se desarrollan resultados para distribuciones Infinitamente Divisibles en su representación canónica. En esta sección la mayoría de las conclusiones estan determinadas por la función Característica.

En la Cuarta se definen a las funciones de Distribución Infinitesimales, así como su comparación con el espacio de funciones de distribución infinitamente divisibles. Con este resultado se introducen algunas conclusiones sobre sumas de variables aleatorias.

- En el Tercer capítulo se darán proposiciones más generales sobre este tipo de distribuciones.

En la Primer sección se establecen las condiciones para la convergencia de sumas de variables aleatorias infinitamente divisibles.

En la Segunda se definirán a las distribuciones de la clase "L", las "ESTABLES" y el "DOMINIO DE ATRACCION".

En la Tercer y Cuarta sección se presentan las condiciones que deben tener las sucesiones de variables aleatorias infinitamente divisibles para pertenecer a la Ley Débil y la Ley Fuerte de los Grandes Números respectivamente.

En la Quinta sección se trata al Teorema de Límite Central y se da el resultado de la Condición de Lindeberg desde el punto de vista tratado en este trabajo.

Cabe aclarar que el tema de Infinitamente Divisibles es muy extenso, en el desarrollo de este trabajo sólo se plasman algunos resultados de esta teoría.

I N D I C E

I. GENERALIDADES DE PROBABILIDAD

I.1 FENOMENOS ALEATORIOS

El concepto de fenómeno o experimento tiene un significado muy amplio dentro de la Teoría de Probabilidad y decimos que cualquier tipo de fenómeno o experimento tiene las siguientes características secuenciales:

- Un conjunto de condiciones que se crean arbitrariamente o independientemente del experimentador.
- Los resultados provocados por este conjunto de condiciones al realizarce el fenómeno o experimento.

A su vez los fenómenos pueden dividirse de manera esquemática en las siguientes clases:

i) La primera es en la que el resultado se presenta de manera única, a éste tipo de fenómenos se les llama determinísticos.

ii) La segunda clase es en la que el resultado del fenómeno es incierto y a éstos se les llama Aleatorios.

El objetivo de la Teoría de Probabilidad es el estudio y análisis de los FENOMENOS ALEATORIOS. Como ejemplos de dichos fenómenos podemos citar:

a) Lanzar una moneda.

b) Lanzar un dado.

c) Número que llegan a una cola de servicio a las 11:00 horas.

Con éstos ejemplos vemos que en cualquier tipo de actividad, casi siempre podemos encontrar un suceso cuyo resultado sea incierto.

I.2 DEFINICIONES DE PROBABILIDAD Y FENOMENOS ALEATORIOS

Hay algunos fenómenos en los cuales las condiciones de éstos permanecen inveriantes durante la realización del experimento, a éstos se les llama fenómenos en serie.

A continuación daremos la primera definición de Probabilidad, llamada CLASICA.

DEFINICION I.2.1

Si un fenómeno o experimento aleatorio, al realizarse nos da solo un número finito de posibles resultados, digamos n, cada uno de ellos igualmente probables de ocurrir; entonces, la probabilidad de que ocurra algún subconjunto del conjunto de todos los posibles resultados del experimento, lo podemos calcular como:

$$P(A) = \frac{\#A}{n} \qquad \text{con } \#A = m \leq n$$

Donde #A denota el número de elementos que contiene el subconjunto A.

Además tiene las siguientes propiedades:

i) La probabilidad de cualquier suceso es mayor o igual a cero.

ii) La probabilidad del suceso seguro es aquél que se presenta cada vez que se realiza el experimento.

Para dar la siguiente definición de Probabilidad llamada FRECUENTISTA, nos cuestionamos si un experimento o fenómeno se puede repetir una infinidad de veces bajo las mismas condiciones. Entonces nos preguntamos ¿la sucesión de resultados del experimento con cierta característica convergerá a un número real? si converge podemos definir:

DEFINICION I.2.2

Supongamos que las condiciones de un fenómeno o experimento se mantienen invariantes, cuando se realiza éste n veces, entonces; denotamos a la probabilidad de que el resultado del fenómeno o experimento tenga la característica A como P(A). Y la podemos aproximar para n suficientemente grande por:

$$P(A) \simeq \frac{n_A}{n}$$

donde n_A denota el número de veces que se presentó el resultado A en las n repeticiones del experimento.

Por otra parte para establecer una correspondencia entre los fenómenos aleatorios y una medida cuantitativa de éstos, nos podemos preguntar por una característica del fenómeno, ésto es, al lanzar un dado n veces nos preguntamos por el número de veces que se observó en el resultado a un número par; al lanzar una moneda al aire, nos preguntamos por la cantidad de caras observadas en n lanzamientos.

De esta manera establecemos dicha correspondencia a su vez, a la medida cuantitativa le podemos asignar en particular números reales, ya que se está preguntando por la cantidad de apariciones en los resultados del fenómeno en serie de cierta característica específica, entonces; ésta correspondencia queda determinada por la pregunta y la llamaremos: VARIABLE ALEATORIA.

I.3 ALGEBRA DE EVENTOS

Si denotamos à Ω como el conjunto de posibles resultados de un fenómeno aleatorio. Las características que debe contener éste conjunto es que no solo nos preguntemos por la ocurrencia de un elemento de Ω si no también debe contener a subconjuntos de Ω, es decir, a uniones o intersecciones de subconjuntos de ellos mismos. Por lo que es necesario, bajo estas condiciones, que la construcción de éste conjunto tenga un marco matemático formal y además pueda responder a las distintas formas de preguntar por una característica del fenómeno en estudio y de las distintas combinaciones que de esta se puedan hacer. Es necesario relacionar a dichas preguntas con un conjunto de posibles resultados o sucesos que puedan observarse en un fenómeno aleatorio, que denotamos por . También le pediremos a éste conjunto que permita determinar algunas operaciones que se realizan entre tales sucesos, como la unión y la intersección.

DEFINICION I.3.1

A un elemento de $\mathcal{G}$ se le llama EVENTO.

OBSERVACION

En este conjunto $\mathcal{G}$ existen dos eventos especiales:

- El evento seguro es aquél que siempre ocurre, es decir, se presenta en cada realización del fenómeno. Y lo denotamos por Ω.

- El evento imposible ϕ es aquél que nunca ocurre.

Algunas de las propiedades que tiene G son que para todo evento $A \in G$ asociamos al evento $\bar{A}$ que implica que A no ocurrió; un evento del cual de otros dos eventos A, B ocurre al menos uno de los dos lo llamamos la unión de dos eventos y se denota por $A \cup B$; al evento en que A y B ocurren simultaneamente se le llama intersección o producto de A y B y se denota por $A \cap B$. Diremos que dos eventos son excluyentes si $A \cap B$ es el evento imposible.

DEFINICION I.3.2

G recibe el nombre de algebra de eventos si:

i) $\Omega \in G$

ii) Si $A \in G$ entonces $\bar{A} \in G$

iii) Si $A, B \in G$ entonces $A \cup B \in G$.

Ahora definamos a una variable aleatoria como:

DEFINICION I.3.3

Una variable aleatoria es una función:

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

con la condición:

$$\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in G$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

I.4 ESPACIO DE PROBABILIDAD Y DEFINICION AXIOMATICA

Para definir el Espacio de Probabilidad sabemos que hay fenómenos aleatorios en el que el Algebra de Eventos contiene un número finito o infinito de éstos, también consideremos sus seciones finitas o infinitas de eventos que las denotamos de la siguiente manera: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ respectivamente.

Si el Algebra de Eventos es tal que para cada sucesión de eventos, para toda n $A_n \in \mathcal{G}$ y si también consideramos a los eventos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i/o $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ será llamada σ-algebra.

A $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ se llama <u>espacio elemental de probabilidad</u> si existen:

a) Un conjunto de sucesos o resultados Ω arbitrario.

b) El Algebra $\mathcal{G}$, de subconjuntos del conjunto Ω.

c) Una medida $P: \mathcal{G} \longrightarrow (0, 1)$ tal que cumple con:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $P(A) \geq 0$

iii) Si $A \cap B = \phi$ implica que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Con éstas propiedades inducimos que la Probabilidad es una función $P: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$

A continuación se dará la definición Axiomática que formuló Kolmogorov:

DEFINICION I.4.1

Para cualesquier evento tenemos:

i) $P(A) \geq 0$ para todo evento A.

ii) $P(\Omega) = 1$.

iii) Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, para todo $i \neq j$ entonces:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A \quad) .$$

Esta definición se basa en el Espacio de Probabilidad, que es un marco formal de estudio donde:

- Ω representa el conjunto de posibles resultados del fenómeno aleatorio.
- $\mathcal{G}$ es un σ- Algebra que es el conjunto de las diferentes formas que se hace la pregunta acerca del fenómeno.
- P es la función que representa la respuesta de la Teoría acerca del fenómeno.

Para finalizar ésta sección enunciaremos un resultado sobre la convergencia de sucesiones de eventos.

Sea $\{ A_n ; n=1, 2, \ldots \}$ una sucesión de eventos, donde cada A pertenece a un conjunto no vacío de Ω.

Definimos a los límites inferiores y superiores como

$$\lim \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\lim \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Por otra parte sea $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espacio de probabilidad y A un evento, entonces:

LEMA I.4.1

(LEMA DEBOREL-CANTELLI)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ entonces $P(\lim \sup A_n) = 0$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ y si $\{A_n\}$ es una sucesión de eventos independientes entonces $P(\lim \sup A_n) = 1$

Para su demostración ver Loeve (1)

I.5 FUNCIONES DE DISTRIBUCION

Para definir una función de Distribución, sabemos por un lado, que una variable aleatoria $X(w)$ es una función tal que $X(w): \Omega \to \mathbb{R}$ y por otro lado consideremos a los conjuntos $\{ w \in \Omega / X(w) \leq x \} \in \mathcal{G}$; es decir, definimos a la Probabilidad de que $X(w)$ sea menor o igual que $x \in \mathbb{R}$ como la función de Distribución de X denotada por $F_X(x)$ como:

$$P(X(w) \leq x) = F_X(x)$$

---

(1) Loeve

Existen también las variables aleatorias continuas que es un caso más general de éstas.

b) Si existe una función $P_X(x)$ tal que $P_X(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} P_X(x_k)$$

entonces decimos que la variable aleatoria es discreta.

En los dos casos $P_X(x)$ es la función de Densidad de la variable aleatoria X.

Las propiedades de esta función son:

i) $P_X(x) \geq 0$ para todo x.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)dx = 1$

La propiedad (ii) es una variable aleatoria absolutamente continua pero esta propiedad se extiende para los dos casos de variables aleatorias antes especificadas.

Por otra parte, dentro de los fenómenos aleatorios nos podemos interesar por dos o más características de dicho fenómeno, es decir:

- Sea X la variable aleatoria que denota el peso de los estudiantes, entonces nos preguntamos por :

  X_1 : Edad

  X_2 : Estatura

- Sea X la variable aleatoria que describe el ingreso de los habitantes del Distrito Federal entonces nos podemos preguntar lo siguiente:

  X_1 : Ocupación

  X_2 : Sueldo

DEFINICION I.5.1

La función de Distribución $F_X(x)$ de la variable aleatoria X es la que describe la serie de respuestas del fenómeno aleatorio la cual se formaliza:

Sea (Ω , $\mathcal{G}$, P) un espacio de probabilidad, $X(w): \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria sobre (Ω , $\mathcal{G}$, P) para todo $x \in \mathbb{R}$ definimos:

$$F_X(x) = P\{ w \in \Omega / X(w) \leq x \} = P(X \leq x).$$

Al tomar la desigualdad $X(w) \leq x$ es análoga a tomar las desigualdades $<$, $>$ y $\geq$.

Las propiedades de la FUNCION DE DISTRIBUCION son:

i) $F(\infty) = 1$

ii) $F(-\infty) = 0$

iii) Sean x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 \leq x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F(x_2)$, esto es, $F_X(x)$ es no decreciente.

iv) $F_X(x)$ es contínua por la derecha.

Como una proposición podemos dar:

PROPOSICION I.5.1

P($X \leq x$) es una FUNCION DE DISTRIBUCION.

Como una variable aleatoria es una función, entonces pueden existir en general dos tipos de éstas:

a) Si existe una función $P_X(x)$ tal que $P_X(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} P_X(z)\,dz$ en el sentido de Riemman. Decimos que la variable aleatoria X es absolutamente contínua.

con estos ejemplos, nos damos cuenta que existen Funciones de Distribución de dos o más variables, en lugar de variable aleatoria se llaman vectores alzatorios y los definimos como:

DEFINICION I.5.2

<u>Sea</u> $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ <u>un espacio de Probabilidad;</u> X_1, X_2 <u>dos variables aleatorias sobre</u> $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ <u>donde</u>:

$X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in \mathbb{R} \{ w \in \Omega, X_1(w) \leq x \}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in \mathbb{R} \{ w \in \Omega, X_2(w) \leq x \}$

<u>entonces definimos a</u> $\overline{X} = (X_1, X_2)$ <u>como un vector aleatorio de dimensión dos.</u>

A continuación daremos algunas propiedades y definiciones sobre los vectores aleatorios, estas definiciones y propiedades se harán para el caso de dos variables, pero los siguientes resultados se pueden extender facilmente para vectores aleatorios de dimensión n.

<u>OBSERVACION</u>

Un vector aleatorio es una función tal que:

$\overline{X} = (X_1, X_2) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$

Definimos a $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ como la función de distribución conjunta del vector aleatorio X.

Y tiene las siguientes propiedades:

i) $F_{X_1 X_2}(\infty, \infty) = 1$ ii) $F_{X_1 X_2}(-\infty, x_2) = 0$

iii) $F_{X_1 X_2}(x_1, \infty) = F_{X_1}(x_1)$ que es la función de distribución marginal de X_1.

iv) $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ es no decreciente por variable, es decir, si existe $x_1' \in \mathbb{R}$ tal que $x_1' \leq x_1$ entonces $F_{X_1 X_2}(x_1', x_2) \leq F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$. El otro caso es análogo.

v) $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ es continua por la derecha por variable.

vi) Para todo $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ con $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$

$$F_{X_1 X_2}(b_1, b_2) - F_{X_1 X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1 X_2}(b_1, a_2) + F_{X_1 X_2}(a_1, a_2) \geq 0$$

Para vectores aleatorios existen también dos tipos que son:

- Los vectores aleatorios absolutamente continuos (Una partición de esta clase sería el caso general para vectores continuos).
- Los vectores aleatorios discretos.

Esta clasificación es una extensión de las variables aleatorias.

DEFINICION I.5.3

La función de Densidad Conjunta se denota por $P_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ y tiene las siguientes propiedades:

a) $P_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$

La última definición de esta parte sera la de variables aleatorias independientes.

DEFINICION I.5.4

Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ son IN-

DEPENDIENTES si:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Por otra parte, dentro de este desarrollo de funciones de distribución sólo se mencionaron algunas propiedades básicas de estas, para consultar propiedades más generales ver cualquier libro introductorio de Probabilidad como por ejemplo Harris, Feller, etc.

I.6 CARACTERISTICAS NUMERICAS

En esta parte definiremos a las características numéricas que son muy importantes porque existen fenómenos aleatorios en los cuales no podemos describir a su respectiva Función de Distribución, entonces podemos conocer algunas propiedades de las variables aleatorias por medio de estas Características Numéricas.

DEFINICION I.6.1

Sea X una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, la mediana de X que denotamos por m(X) se define como:

$$P(X \leq m(X)) \geq \tfrac{1}{2} \quad y \quad P(X \geq m(X)) \geq 1/2 .$$

Las siguientes definiciones se haran para el caso de variables aleatorias absolutamente continuas, pero se pueden generalizar para cualquier clase y para cualquier dimensión.

DEFINICION I.6.2

Sea $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espacio de probabilidad. X una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Definimos a la Esperanza Matemática (media) como :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, P_X(x) \, dx \iff \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, P_X(x) \, dx < \infty$$

y la denotamos como E(X).

DEFINICION I.6.3

Sea $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espacio de probabilidad. X una variable aleatorria sobre $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Sea $E(X) = \mu$ la esperanza matemática de X La varianza de X que denotamos como Var(X) se define por:

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, P_X(x) \, dx$$

DEFINICION I.6.4

Sean X y Y dos variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espacio de probabilidad. La Covarianza de X y Y, denotada por Cov(X, Y) se - define como:

$$COV(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

donde E(X) y E(Y) son las respectivas esperanzas matematicas de X y Y.

DEFINICION I.6.5

El Coeficiente de Correlación de las variables aleatorias X y Y, - denotado por $\varphi(X, Y)$ se define como:

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{VAR(X) \quad VAR(Y)}$$

donde suponemos que las varianzas y la covarianza existen.

Por otra parte los momentos de una variable aleatoria o de una distribución son las esperanzas matemáticas de estas variables elevadas a una potencia.

DEFINICION I.6.6

Si X es una variable aleatoria, el r-ésimo momento de X, usualmente denotado por μ_r esta dado por:

$$\mu_r = E(X^r)$$

si la esperanza existe.

DEFINICION I.6.7

Sea X una variable aleatoria con funsión de densidad P (x). El valor esperado de EXP(tX) es definido como la FUNCION GENERADORA DE MOMENTOS de X si la esperanza matemática existe para cada valor t en el intervalo $-h < t < h$, tal que $h > 0$ es decir:

$$M_X(t) = E[\exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} P_X(x)\, dx$$

I.7 FUNCION CARACTERISTICA

En la parte anterior de éste capítulo se definió la función generadora de momentos como:

$$E\ (\ EXP(tX)\ )$$

ésta función es muy importante dentro de la Teoría de la Función Característica porque a través de ella se desarrollan los principales resultados.

DEFINICION I.7.1

Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$. La función CARACTERISTICA de F (o de X) se denota por $f(t)$ y se define para cada t real por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_X(x) = U(t) - iV(t)$$

donde:

I.7.A ...... $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx\ dF_X(x)$, $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} tx\ dF_X(x)$

éstas integrales están dadas en el sentido de Riemman-Stieltjes.

OBSERVACION

La función característica de cualquier variable aleatoria real siempre existe.

A continuación daremos algunas propiedades de la función característica, pero necesitamos definir:

DEFINICION I.7.2

Si X y Y son variables aleatorias independientes continuas y Z = X + Y entonces a la siguiente fórmula se le llama convolución y está dada por:

$$P_Z(z) = P_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(z-x)\, P_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(z-y)\, P_Y(y)\, dy$$

PROPOSICION I.7.1

Sea $f = u + iv$ la FUNCION CARACTERISTICA de la variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x)$. Entonces:

i) f es absolutamente continua

ii) $f(0) = 1$ y $|f(t)| \leq 1$ para todo

iii) $aX+b$ tiene función característica dada por

$$E(e^{it(ax+b)}) = e^{ibt} f(at)$$

En particular $f=u-iv$ es la función característica de $-X$.

iv) u es par y v impar. La función característica es real si y solo si $F_X(x)$ es simétrica con respecto al origen.

v) Para todo t

$$0 \leq 1-u(2t) \leq 4(1-u(t))$$

PROPOSICION I.7.2

La convolución $F_1 * F_2$ tiene la función característica $f_1 \cdot f_2$. Es decir, la suma $X_1 + X_2$ de dos variables aleatorias independientes corresponde el producto $f_1 \cdot f_2$ de sus respectivas funciones características.

Por otra parte, si X_2 tiene la misma distribución que X_1, entonces la suma $X_1 - X_2$ representa la variable simetrizada, y $|f|^2$ es la función característica de la función de distribución F.

PROPOSICION I.7.3

Si $\lambda \neq 0$ *entonces las tres siguientes poroposiciones son equivalentes:*

i) $f(\lambda) = 1$

ii) f tiene periodo λ, es decir, $f(t+n\lambda) = f(t)$ para toda t y n.

iii) Todos los puntos de incremento de F estan entre $0, \pm h, \pm 2h$ donde $h = 2\pi/\lambda$

PROPOSICION I.7.4

Solamente existen las tres posibilidades siguientes:

i) $|f(t)| < 1$ para todo $t = 1$

ii) $|f(\lambda)| = 1$ y $|f(t)| < 1$ para $0 < t < \lambda$

En este caso $|f|$ tiene periodo λ, y existe un número real b tal que $F_X(x+b)$ es aritméticamente con alcance $h = 2\pi/\lambda$

iii) $|f(t)| = 1$ para todo t. En esta caso $f(t) = Exp(ibt)$ y F esta concentrada en el punto b.

I.8 CONVERGENCIA

A continuación daremos algunas definiciones de convergencias de variables aleatorias.

DEFINICION I.8.1

Sea $F_{X_1}(x)$, $F_{X_2}(x)$, ..., $F_{X_n}(x)$, ... una sucesión de funciones de variación. La sucesión $\{ F_{X_n}(x) \}$ converge debilmente a $F_X(x)$ si $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ en cada punto de continuidad de $F_X(x)$. A la convergencia débil de funciones de distribución la denotamos por $F_n \to F$. Si $F_n \to F$ y $F_n(\infty) \to F(\infty)$, $F_n(-\infty) \to F(-\infty)$ entonces decimos que $F_n(x)$ converge COMPLETAMENTE a $F(x)$ y lo denotamos por $F \rightrightarrows F$.

OBSERVACION

Decimos que la convergencia $F_n \to F$ es propia si F es una función de distribución no degenerada.

OBSERVACION

La convergencia de densidades es la condición de que si $P_X(x) \to P(x)$ entonces $F_X \to F$. El inverso no necesariamente es cierto.

TEOREMA DE CONVERGENCIA DOMINADA

Sea u_n integrable en el sentido de Lebesgue y $u_n \to u$ puntualmente. Si existe M integrable tal que $|u_n| \leq M$ para toda n, entonces u es integrable y $E(u_n) \to E(u)$.

DEFINICION I.8.2

Sea X_n una sucesión de variables aleatorias, decimos que X_n convergeen probabilidad a la variable aleatoria $X=0$ si para todo $\varepsilon > 0$

$$P\{|X_n| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

que denotamos por $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Por extensión $X_n \xrightarrow{P} X$ significa que $X_n - X \xrightarrow{P} 0$.

DEFINICION I.8.3

Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ converge casi seguramente a lã variable aleatoria X si $X_n(\omega) \to X(\omega)$ siempre excepto en un conjunto de puntos de medida cero.

En seguida enunciaremos un lema importante en el desarrollo de ēste trabajo. (Para su demostración consultar PETROV-(1)).

LEMA I.8.1

La relación $X_n \to X$ casi seguramente es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

i) $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ para toda $\varepsilon > 0$

ii) $P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}([|X_n - X| \geq \varepsilon])\right) \to 0$ pará toda $\varepsilon > 0$

iii) $P\left(\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq \varepsilon\right) \to 0$ para todo $\varepsilon > 0$

(1) PETROV

da n, entonces u es integrable y $E(u_n) \to E(u)$.

DEFINICION I.8.2

Sea X_n una sucesión de variables aleatorias, decimos que X_n convergeen probabilidad a la variable aleatoria $X=0$ si para todo $\varepsilon > 0$

$$P\{|X_n| > \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

que denotamos por $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Por extensión $X_n \xrightarrow{P} X$ significa que $X_n - X \xrightarrow{P} 0$.

DEFINICION I.8.3

Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ converge casi seguramente a la variable oleatoria X si $X_n(w) \to X(w)$ siempre excepto en un conjunto de puntos de medida cero.

En seguida enunciaremos un lema importante en el desarrollo de éste trabajo. (Para su demostración consultar PETROV-(1)).

LEMA I.8.1

La relación $X_n \to X$ casi seguramente es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

i) $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ para toda $\varepsilon > 0$

ii) $P\left(\bigcup_{m\geq n}^{\infty}([|X_n - X| \geq \varepsilon])\right) \to 0$ para toda $\varepsilon > 0$

iii) $P\left(\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq \varepsilon\right) \to 0$ para todo $\varepsilon > 0$

(1) PETROV

Para finalizar éste capítulo daremos los siguientes resultados:

TEOREMA DE LIMITE CENTRAL

Sea $\{X_k\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con media μ_X y varianza σ^2 distinta de cero, y sea $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Entonces para toda ε fija.

$$P\left\{\frac{S_n - n\mu_X}{\sigma\sqrt{n}} < \varepsilon\right\} \to N(0,1)$$

donde $N(0,1)$ es la distribución normal, con media igual a cero y varianza σ^2.

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV (TSCHEBYCHEFF)

Sea X una variable aleatoria tal que $E(|X|^2) < \infty$ implica que para toda $\varepsilon > 0$.

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}$$

DEMOSTRACION

Si $|x| \geq \varepsilon \Rightarrow |x|^2 \geq \varepsilon^2$; ahora

$$E(X^2) = \int_X x^2\, dF_X(x) = \int_{|X|\geq\varepsilon} x^2\, dF_X(x) + \int_{|X|<\varepsilon} x^2\, dF_X(x)$$

$$\geq \int_{|X|\geq\varepsilon} x^2\, dF_X(x) \geq \int_{|X|\geq\varepsilon} \varepsilon^2\, dF_X(x) = \varepsilon^2 P(|X| \geq \varepsilon)$$

$$\therefore \quad E(X^2) \geq \varepsilon^2 P(|X| \geq \varepsilon)$$

i.e. $E(X^2)/\varepsilon^2 \geq P(|X| \geq \varepsilon)$

DISTRIBUCIONES INFINITAMENTE DIVISIBLES.

I.- INTRODUCCION

En este capítulo estudiaremos las propiedades que deben tener las funciones de distribución para que sean consideradas funciones de distribución INFINITAMENTE DIVISIBLES, así como diferentes resultados de este tipo de funciones que nos servirán como base para dar algunas aplicaciones a sumas variables aleatorias independientes que se discutirán en la -- última sección de este capítulo y durante el siguiente.

El contenido de este capítulo se divide en cuatro secciones

- En la primera sección se da la primera definición básica para variables aleatorias infinitamente divisibles, así como una ubicación del problema englobando que tipo de funciones de distribución se estudiarán y qué propiedades deben de cumplir las variables aleatorias para pertenecer al conjunto de variables aleatorias infinitamente divisibles. --- Además, se harán planteamientos de tipo de funciones que se analizarán en la tercera sección.

- En la segunda sección se darán definiciones y ejemplos para funciones de distribución infinitamente divisibles, aclarando que este análisis se hará en el espacio de funciones características de dichas funciones de distribución. También se enunciarán algunos teoremas importantes con sus respectivas demostraciones utilizando la herramienta dada en el primer capítulo como es el caso de convergencia débil de funciones de distribución.

- En la tercera sección se toman algunas definiciones enunciadas en la primera sección con el objeto de plantear diferentes formas que pueden tomar las funciones características para ser expresadas en la REPRESENTACION CANONICA de las funciones de distribución infinitamente divisibles. Además, se enunciarán algunos teoremas relativos a esta representación con sus respectivas demostraciones.

- En la cuarta y última sección de este capítulo, se definirá el concepto de funciones de distribución INFINITESIMALES que nos servirán para introducir algunos resultados de sumas de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, así como el concepto de CONSISTENCIA EN EL LI-

MITE que se aplicarán durante el desarrollo del siguiente capítulo.

SECCION 1

UBICACION DEL PROBLEMA Y PRIMER DEFINICION FORMAL

Para ubicarnos en el problema, supongamos que se tiene una sucesión de variables aleatorias de la siguiente forma : X_{n_1} , X_{n_2} , . . . , X_{n_k} tal que X_{n_j} y X_{n_k} tienen la misma distribución para toda $j \neq k$; a través de esta sección estudiaremos las funciones de distribución de las diferencias del tipo $X_{n_j} - X_{n_k}$ que dependen unicamente del valor de la diferencia k - j , sin embargo, para poder llegar a esto necesitamos :

DEFINICION 2.1.1.

Sean X_{n_1} , X_{n_2} , X_{n_3} , . . . una sucesión de variables aleatorias y sean $X_{n_2} - X_{n_1}$, $X_{n_3} - X_{n_2}$; las diferencias entre variables aleatorias de esta sucesión. Entonces, decimos que estas son independientes si :

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

La siguiente definición nos servirá para llegar a --- nuestro objetivo, puesto que esta herramienta se extiende - sobre el espacio de los números reales.

PROPOSICION

Para cada real $\lambda \geq 0$ corresponde, una variable alea-- toria X_λ tal que :

i) X_λ es identicamente cero.

ii) La función de distribución de la diferencia $X_{\lambda_2} - - X_{\lambda_1}$ con $\lambda_2 > \lambda_1$ depende solamente de la diferencia.

iii) Para $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ las diferencias $X_{\lambda_2} - - X_{\lambda_1}$, $X_{\lambda_k} - X_{\lambda_{k-1}}$ son mutuamente independientes.

Con las definiciones anteriores estamos en condiciones de dar la primera definición de variables aleatorias infinitamente divisibles que se extiende a la FORMA BASICA de la definición de "funciones de distribución INFINITAMENTE DIVISIBLES".

DEFINICION 2.1.3

Sea X_λ una variable aleatoria tal que para cada natural n, definimos la suma :

$$X_\lambda = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n$$

que tiene n sumandos independientes e identicamente distribuidos.

Entonces, la distribución de la variable aleatoria

$$Y_k = X_{\frac{k}{n}\lambda} - X_{\frac{k-1}{n}\lambda}$$

es una distribución INFINITAMENTE DIVISIBLE.

OBSERVACION

La definición es consistente.

JUSTIFICACION DE LA OBSERVACION.-

Sean $X_{\frac{n}{n}\lambda}$, $X_{\frac{n-1}{n}\lambda}$, . . . , $X_{\frac{1}{n}\lambda}$ *variables aleatorias* -- *tales que se pueden representar por la suma de n, n-1, ... etc.variables aleatorias donde* :

$$
\begin{aligned}
X_{\frac{n}{n}\lambda} &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \\
X_{\frac{n-1}{n}\lambda} &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-1} \\
X_{\frac{n-2}{n}\lambda} &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-2} \\
&\vdots \\
X_{\frac{3}{n}\lambda} &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\
X_{\frac{2}{n}\lambda} &= Y_1 + Y_2 \\
X_{\frac{1}{n}\lambda} &= Y_1
\end{aligned}
$$

ya que X_0 *es identicamente cero.*

Despejando las ecuaciones tenemos :

$$(1) \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; y_n = X_{\frac{n}{n}\lambda} - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}$$

$$(2) \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; y_{n-1} = X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-2}$$

$$(3) \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; y_{n-2} = X_{\frac{n-2}{n}\lambda} - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-3}$$

$$(K-2) \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; y_3 = X_{\frac{3}{n}\lambda} - y_1 - y_2$$

$$(K-1) \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; y_2 = X_{\frac{2}{n}\lambda} - y_1$$

$$(K) \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; y_1 = X_{\frac{1}{n}\lambda}$$

Restando las ecuaciones (1) - (2), (2) - (3), ... tenemos :

$$(1) - (2) \implies y_n - y_{n-1} = X_{\frac{n}{n}\lambda} - X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - y_1 + y_1 - \ldots - y_{n-2} + y_{n-2} - y_{n-1}$$

$$\implies y_n - y_{n-1} = X_{\frac{n}{n}\lambda} - X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - y_{n-1}$$

$$\implies y_n - y_{n-1} + y_{n-1} = X_{\frac{n}{n}\lambda} - X_{\frac{n-1}{n}\lambda}$$

$$y_n = X_{\frac{n}{n}\lambda} - X_{\frac{n-1}{n}\lambda}$$

$$(2) - (3) \implies y_{n-1} - y_{n-2} = X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - X_{\frac{n-2}{n}\lambda} - y_1 + y_1 - \ldots - y_{n-3} + y_{n-3} - y_{n-2}$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} = X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - X_{\frac{n-2}{n}\lambda} - y_{n-2}$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} + y_{n-2} = X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - X_{\frac{n-2}{n}\lambda}$$

$$y_{n-1} = X_{\frac{n-1}{n}\lambda} - X_{\frac{n-2}{n}\lambda}$$

$$(K-1) - (K) \Rightarrow y_2 - y_1 = X_{\frac{2}{n}\lambda} - X_{\frac{1}{n}\lambda} - y_1$$

$$y_2 - y_1 + y_1 = X_{\frac{2}{n}\lambda} - X_{\frac{1}{n}\lambda}$$

$$y_2 = X_{\frac{2}{n}\lambda} - X_{\frac{1}{n}\lambda}$$

donde y_k representa la función de distribución de las diferencias entre $X_{\frac{k}{n}\lambda} - X_{\frac{k-1}{n}\lambda}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

A continuación introduciremos conceptos de funciones aleatorias "comunes" que nos servirán como un concepto para la tercera sección, pero en la forma en que se dan estas funciones de distribución (Normal y Poisson) es singular ya que para su representación se utiliza el logaritmo de sus respectivas funciones características.

El objetivo de estas dos representaciones es encontrar una función con esta misma representación que las combine.

<u>DEFINICION</u> 2.1.4

<u>El tipo "Normal" en el cual la función característica $f_\lambda(t)$ de la variable aleatoria X_λ tiene la siguiente forma</u> :

$$\text{Log } f_\lambda(t) = \lambda\left(i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2\right)$$

DEFINICION 2.1.5

El tipo "Poisson" en el cual la función característica $f_\lambda(t)$ de la variable aleatoria X_λ tiene la siguiente forma :

$$\mathrm{Log}\ f_\lambda(t) = \lambda C \ (e^{iht} - 1)$$

Como mencionamos anteriormente estos resultados se emplearán en la sección tres de este capítulo, y para finalizar esta sección se da la idea general de la combinación de estas dos funciones o "tipos" de funciones aleatorias, esto es : El concepto de "unión" de estas dos funciones se basa en que una es absolutamente continua y la otra es discreta y de aquí parte el que la función resultante de esta combinación va a ser continua por intervalos y con saltos no solo de longitud h, sino que todos los saltos son de la misma clase; luego entonces supongamos que el intervalo $(\lambda, \lambda + d\ )$ donde $\lambda, d \in \mathbb{R}$, un salto ocurre con probabilidad $cd\lambda$ y la función de distribución de la magnitud del salto es :

$$P\ (h <= u) = F\ (u)$$

La fórmula que representa este tipo de función está dada por la fórmula De-Finetti (1) .

$$\log f_\lambda(t) = \lambda\left\{ i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + c\int (e^{iut} - 1)\, dF(u) \right\}.$$

A partir de esta fórmula surgen dos dudas :

a) ¿Qué sucede si la distribución de la variable aleatoria X tiene la varianza finita?

<u>Se puede ver ; que</u>

$$\log f_\lambda(t) = \lambda\left\{ iyt - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^{0} (e^{iut} - iut)\, dM(u) + \int_{0}^{\infty} (e^{iut} - 1 - itu)\, dN(u) \right\}.$$

donde M(u) y N(u) son funciones particionadas de F(U) para - $u < 0$ y $u > 0$ respectivamente.

Esta fórmula representa el caso general del logaritmo - de la función característica con varianza finita.

b) ¿Qué sucede si la distribución de la variable aleatoria X tiene varianza infinita?

---

(1) PETROV

Se obtiene la siguiente igualdad :

$$\log f_{\lambda}(t) = \lambda\left\{ iyt + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right) dM(u) + \int_{0}^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right) dN(u) \right\}$$

que es el caso general, y esta fórmula fué introducida por P. Levy. (1) .

La generalización de esta fórmula fué introducida por Khintchine (1) , y está dada por :

$$\log f_{\lambda}(t) = \lambda\left\{ iyt + \int \left(e^{iut} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \right\}$$ donde :

$$2.1.A \ldots\ G(u) = \begin{cases} \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) = dM(u) & \text{si } u<0 \\ \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) = dN(u) & \text{si } u>0 \\ u = 0 \implies G(u) = \sigma^2 & \end{cases}$$

Esto es, el valor del salto de $G(u)$ es σ^2 y el valor de la integral en cero es :

$$\lim_{u \to 0} \left[\left(e^{iut} - 1 - \frac{itu}{u^2}\right) \frac{1+u}{u^2} \right] \qquad \ldots\ldots 2.1.B$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\left(e^{iut}(1+u^2) - (1+u^2) - itu\right)}{u^2}$$

---

(1) Petrov.

Aplicando a L' Hospital

$$= \lim_{u \to 0} \left[\frac{2u\,(e^{iut}-1) + it\, e^{itu}\,(1+u^2) - it}{2u} \right]$$

$$= \lim_{u \to 0} \left\{ \left[e^{iut} - 1 \right] + \frac{-it + it\, e^{itu}(1+u^2)}{2u} \right\}$$

$$= 0 + \lim_{u \to 0} \left\{ \frac{-it + it\, e^{itu}}{2u} + \frac{u^2 it\, e^{itu}}{2u} \right\}$$

Aplicando a L' Hospital tenemos

$$\lim_{u \to 0} \left\{ \frac{i^2 t^2\, e^{itu}}{2} + \frac{2u\, it\, e^{itu}}{2} + \frac{u^2 i^2 t^2\, e^{itu}}{2} \right.$$

Evaluando el límite

$$= \frac{i^2 t^2}{2} + 0 = -\frac{t^2}{2} \qquad \text{ya que } i^2 = -1$$

$$\therefore \lim_{u \to 0} \left[\left(e^{iut} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} \right] = -\frac{t^2}{2}$$

SECCION II

DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS

En esta sección enunciaremos algunas definiciones que nos permitirán conocer cuando una función de distribución será llamada función de distribución INFINITAMENTE DIVISIBLE. A partir de esta definición ejemplificaremos con algunos ejercicios de funciones de distribución mas usuales como es el caso de la Normal, Poisson, Cauchy, etc. son "INFINITAMENTE DIVISIBLES".

También se presentan algunos teoremas que definen ciertas propiedades de esta clase de funciones de distribución utilizando algunos conceptos definidos en el Capítulo I.

DEFINICION 2.2.1

Sea X una variable aleatoria, decimos que X es Infinitamente Divisible si para cada natural n, X puede ser representada como la suma de n variables aleatorias identicamente distribuidas e independientes, es decir

$$X = X_{n_1} + X_{n_2} + \dots + X_{n_k}$$

La siguiente definición es muy importante para nuestro estudio, ya que se extiende el concepto de variable aleatoria Infinitamente Divisible a funciones de distribución Infinitamente Divisibles, esto es :

DEFINICION 2.2.2

La función de distribución de variables aleatorias Infinitamente Divisibles será llamada FUNCION DE DISTRIBUCION INFINITAMENTE DIVISIBLE.

Con esta definición se está en la posibilidad de comenzar el estudio de esta clase de funciones de distribución, por esto se enunciará la primera definición para estas funciones utilizando a la función característica de estas distribuciones.

TEOREMA 2.2.1

La función de distribución de una variable aleatoria Independiente Infinitamente divisible es Infinitamente Divisible si y solo si su correspondiente función característica se puede representar para cada $n \in \mathbb{N}$, como la n-esima potencia de su función característica $f(t)$; esto es :

$$f(t) = (f_n(t))^n$$

DEMOSTRACION

Sea $\underline{X}$ una variable aleatoria infinitamente divisible con función característica $f(t)$ $\Longleftrightarrow$ $\underline{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ entonces por la proposición 1.7.2 $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = f_1(t) f_2(t) \cdots f_n(t) = (f_n(t))^n$ $\Longleftrightarrow$ $f(t) = (f_n(t))^n$

$\therefore$ queda demostrado el teorema 2.2.1.

Como se mencionó, se darán algunos ejemplos que servirán para mostrar algunas funciones de distribución "comunes" que tienen la propiedad de ser Infinitamente Divisibles.

Ejemplo 2.2.1.- Sea X una v. a. que se distribuye Normal; ¿X es Infinitamente Divisible?

Sea $f(t) = \text{Exp}\,(iat - \frac{\sigma^2}{2}t)$ la función característica de una distribución normal con media a y varianza σ^2

Haciendo : $$(f(t))^{1/n} = \text{Exp}\left(iat - \frac{\sigma^2}{2}t\right)^{1/n}$$

Esto es igual a $$(f(t))^{1/n} = \text{Exp}\left\{\frac{iat}{n} - \frac{\sigma^2 t}{2n}\right\}$$

$$\Rightarrow \qquad f_n(t) = \left\{ f(t) \right\}^{1/n}$$

ya que para cada $n > 0$

$$fn(t) = \text{Exp}\left\{ \frac{iat}{n} - \frac{\sigma^2}{2n}\, t \right\}$$

que es la función característica de una distribución Normal con media a/n y varianza $\sigma^2/2n$. La función de distribución Normal es Infinitamente Divisible.

Ejemplo 2.2.2.- Sea X una v. a. que se distribuye como una - Poisson. ¿Es Infinitamente Divisible?

Supongamos que los posibles valores que puede tomar X - son de la forma :

$$a + kh \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(esto nos está diciendo que es una Poisson trasladada y cuando $a = 0$ y $h = 1$ nos resulta la Poisson centrada en el origen), y

$$P_X (X = a + kh) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

y la función característica de una distribución Poisson es :

$$f(t) = Exp\left[iat + \lambda(e^{ith} - 1)\right]$$

ahora

$$\left(f(t) \right)^{1/n} = Exp\left\{ iat + \lambda (e^{ith} - 1) \right\}^{1/n}$$

$$= Exp\left\{ \frac{iat}{n} + (\lambda/n) (e^{ith} - 1) \right\}$$

$$\Longrightarrow fn(t) = \left\{ f (t) \right\}^{1/n}$$

$\therefore$ ya que $fn(t)$ es la función característica de una función de distribución Poisson con media λ/n y varianza λ/n

. .La función de distribución Poisson es Infinitamente Divisible.

Ejemplo 2.2.3. - Sea X una v. a. que se distribuye Cauchy ¿X es Infinitamente Divisible?

La función de densidad de la Cauchy (caso particular - de la Cauchy centrada en el origen) es :

$$P_X(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$$

y su función característica está dada por :

$$f(t) = \mathrm{Exp}\,(-|t|)$$

ahora

$$(f(t))^{1/n} = \left\{\mathrm{Exp}\,(-|t|)\right\}^{1/n} = \mathrm{Exp}\left\{-(1/n)\,|t|\right\}$$
$$f_n(t) = (f(t))^{1/n}$$

porque $f_n(t)$ es la función característica de una Cauchy cuya densidad está dada por :

$$P_X(x) = \frac{1}{\pi(1+nx\quad)}$$

$\therefore$ La función de distribución Cauchy es Infinitamente Divisible.

Ejemplo 2.2.4.- Sea X una v. a. con función de densidad dada por :

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad X \leq 0 \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} X^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad si \ X, \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

que es la función de distribución Gamma, entonces ¿X es Infinitamente Divisible?

Su función característica está dada por :

$$f(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

entonces

$$\left(f(t)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha/n}$$

$$fn(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha/n}$$

que es la función característica de una función de distri-- bución Gamma con media $\frac{\alpha}{n\beta}$ y varianza $\alpha^2/n\,\beta^2$. ∴ La distribución Gamma es Infinitamente Divisible.

Después de familiarizarnos con la propiedad que debe - tener una función de distribución para que sea Infinitamente Divisible, se darán algunos teoremas que muestran pro--- piedades acerca de esta clase de funciones de distribución. El primer teorema dice que si una función es Infinitamente - Divisible entonces su función característica nunca es cero,- esto es :

TEOREMA 2.2.2

Sea $f(t)$ una función característica Infinitamente Divisible entonces, para todo t $\gamma(t) \neq 0$

Para la demostración de este teorema, se utilizará un -- ejemplo, el cual se construye una función característica que nunca es cero y sin embargo no puede ser representada por la suma de variables aleatorias independientes identicamente - distribuidas.

DEMOSTRACION

Consideremos la variable aleatoria discreta que toma -- los valores $-1,\ 0,\ 1$ con probabilidad $1/8,\ 3/4,\ 1/8$ respectivamente, esto implica que su función característica está - dada por :

$$f(t) = (1/8)\ \mathrm{Exp}(-it) + (3/4)\ \mathrm{Exp}(it0) + (1/8)\ \mathrm{Exp}(it)$$
$$\Longrightarrow f(t) = [3 + \cos(t)]/4$$

se ve que $f(t) \neq 0$ ya que $|\cos(t)| \leq 1$ para todo t.

Ahora supongamos que existe X v. a. de la función de -- distribución que tiene como función característica a $f(t)$ - tal que

$$X = X_1 + X_2$$

donde X_1 y X_2 son mutuamente independientes e identicamente - distribuidos, entonces podemos ver que los sumandos toman solo dos valores a_1 y a_2 $(a_1 < a_2)$ con probabilidad p y $q = (1 - p)$ respectivamente.- Por otro lado los posibles valores que pueden tomar $X_1 + X_2$ son $2a_1$, $a_1 + a_2$ y $2a_2$ que tienen probabilidad P , $2pq$ y q^2 entonces $2a_1 = -1$, $a_1 + a_2 = 0$ y $2a_2 = 1$; mientras que $(1/8) = p^2$, $(3/4) = 2pq$ y $(1/8) = q^2$ y este sistema no tiene solución $\therefore$ X no es Infinitamente Divisible.

El siguiente teorema nos muestra la "cerradura" en la suma de variables aleatorias Infinitamente Divisibles.

TEOREMA 2.2.3

La función de distribución de la suma independiente de un número finito de variables aleatorias independientes infinitamente divisibles es Infinitamente Divisible.

DEMOSTRACION

Sean X y Y dos variables aleatorias infinitamente divisibles tal que sus respectivas funciones características son $f(t)$ y $g(t)$ entonces por hipótesis sabemos que :

$$f(t) = (f_n(t))^n \text{ y } g(t) = (g_n(t))^n$$

donde $f_n(t)$ y $g_n(t)$ son funciones características.

Sea $Z = X + Y$ v. a. tal que su función característica es $h(t)$, esto implica que

$$h(t) = f(t) \cdot g(t) = (f_n(t) \cdot g_n(t))^n \text{ para cada } n$$

∴ La v. a. Z es Infinitamente Divisible.

Antes de continuar podemos dejar abierta una pregunta : ¿Se extiende este resultado para sumas infinitas?

El siguiente teorema involucra el concepto de convergencia débil para funciones de distribución.

TEOREMA 2.2.4

Una función de distribución, la cual es el límite de una sucesión de funciones de distribución infinitamente divisibles en el sentido de convergencia débil es Infinitamente Divisible .

DEMOSTRACION

Sea $F^{(k)}(x)$ una función de distribución Infinitamente Divisible, tal que $F^{(k)}(x) \longrightarrow F(x)$ cuando $K \to \infty$ y sean -- $f^{(k)}(t)$, $f(t)$ las funciones características de $F^{(k)}(x)$ y $F(x)$ respectivamente, entonces por el segundo teorema de -- Helly (1) implica que $f_n^{(k)}(t) \to fn(t)$ que es una función -- característica, y por el teorema 2.2.2, $fn(t) \neq 0$, entonces

$$f(t) = \left(fn^{(k)}(t) \right)^n$$

por lo tanto F (x) es infinitamente divisible.

(Para la demostración del segundo teorema de Helly, consultar Gnedenko) (1).

---

(1) GNEDENKO

SECCION III

LA REPRESENTACION CANONICA

Los objetivos de esta sección, como lo mencionamos en la primera, es tener los elementos suficientes para poder presentar a las funciones de distribución Infinitamente Divisibles por medio de la función característica que admite una representación como la que se presentó en la sección I, utilizando al logaritmo de la función característica. Además se enunciarán algunos lemas y teoremas que presentan resultados muy importantes como el del teorema cuatro. Todos estos resultados surgen del problema de la combinación de las funciones de tipo "Normal" y del tipo "Poisson".

TEOREMA 2.3.1.

Una función de distribución es Infinitamente Divisible si y solo si su respectiva función característica admite la siguiente representación :

$$\text{Log } f(t) = \left\{ i\gamma t + \int \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \right\} \ldots \quad 2.3.A$$

donde G(u) está dado como en 2.1.A

Para demostrar este teorema recurriremos a dos lemas - que utilizaremos en la demostración.

Sean γ una constante real y G(u) una función no-decreciente acotada, decimos que :

$$\psi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \ \ldots \quad 2.3.B$$

donde el valor de la integral en cero es igual a $(-t^2/2)$ (demostrado al final de la sección I. Consultar fórmula de P. Levy). (1)

LEMA 2.3.1

La función Exp ($\psi(t)$) es una función característica Infinitamente Divisible.

(1) PETROV

DEMOSTRACION

$$\operatorname{Exp}\ (\psi(t)) = \operatorname{Exp}\left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)\right\}$$

donde:

i) $\operatorname{Exp}\{i\gamma t\}$

ii) $\operatorname{Exp}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dG(u)\right\}$

Por el teorema 2.2.2 basta demostrar que (i) y (ii) son Infinitamente Divisibles independientemente. A continuación se demostrará la parte ii).

Para cada $\varepsilon < 1$ positivo tenemos

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{it\delta_k} - 1 - \frac{it\delta_k}{1+\delta_k^2}\right)\frac{1+\delta_k^2}{\delta_k^2}\left[G(u_{k+1}) - G(u_k)\right]$$

$k=0,1,\dots,n-1$ y $\max_k (u_{k+1} - u_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$

cada término de esta suma tiene la forma :

(I) ... $i a_{nk} t + \lambda_{nk}\left(e^{itb_{nk}} - 1\right)$ donde :

$$\lambda_{nk} = \frac{1+\delta_k^2}{\delta_k^2}\left[G(u_{k+1}) - G(u_k)\right] ,$$

$b_{nk} = \delta_k$ y

$$a_{nk} = \frac{-\lambda_{nk}\,\delta_k}{1+\delta_k^2}$$

(I) es el logaritmo de la función característica de la distribución Poisson que es INFINITAMENTE DIVISIBLE.

Por otra parte :

$$I_1 = \int_{u>0} \left(e^{iut} - 1 - \frac{itu}{u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)$$

$$I_2 = \int_{u<0} \left(e^{iut} - 1 \quad \frac{itu}{u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)$$

Sumando tenemos :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)$$
$$= I_1 + I_2 - t^2/2\,[G(+0) - G(-0)]$$

y la función

$$-t^2/2\,(G(+0) - G(-0))$$

es el logaritmo natural de la función característica de la distribución <u>normal</u>.

Por lo tanto (ii) es Infinitamente Divisible.

(i) Exp $(i\gamma t)$ es la función característica de una función de distribución degenerada, esto implica que :

$$\left(f(t)\right)^{1/n} = e^{\frac{i\gamma t}{n}} = f_n(t)$$

Por lo tanto (ii) es Infinitamente Divisible.

Entonces concluimos :

EXP $(\psi(t))$ es INFINITAMENTE DIVISIBLE.

El siguiente lema será dado sin su demostración (Ver Petrov) (1)

<u>LEMA</u> 2.3.2

<u>Existe una correspondencia uno a uno entre $f(t)$ y $(\gamma; G)$ donde γ es una constante real y G es una función definida</u> --

(1) PETROV

como en 2:1.A.

Con este lema se da la unicidad para el teorema 2.3.1 Ahora demostraremos dicho teorema :

DEMOSTRACION 2.3.1

Por el lema 2.3.1 es suficiente mostrar que una función característica Infinitamente Divisible $f(t)$ que está dada como en 2.3.A.

Por otra parte, por el teorema 2.2.1, $f(t) \neq 0$ para todo t. Ahora si consideramos al logaritmo donde $f(t) = fn(t)$ para cada n, donde $fn(t)$ es una función característica, entonces :

$$\log f(t) = n \log \left(fn(t) \right) = n \log \left(1 + \left(fn(t) - 1 \right) \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(n\, f(t) - 1 \right)$$

Si $F_n(x)$ denota la función de distribución de $f(t)$

$$\log f(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n \ (e^{iut} - 1) \ dF_n(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nu}{1+u^2} dF_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} n \left(e^{iut} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dF_n(x) \right\}$$

$= \lim_{n\to\infty} \psi_n(t)$ *para cada t, donde* $\psi_n(t)$ *está dada como en 2.3.B y*

$$\gamma_n = n \int_{-\infty}^{\infty} u/(1+u^2) \ dF_n(u), \quad G_n(u), \ = n \int_{-\infty}^{\infty} z^2/1+z^2 \ dF_n(z)$$

y por el teorema A.1 del anexo $\psi(t) \longrightarrow \log f(t)$. *Por lo tanto queda demostrado el teorema 2.3.1 .*

La igualdad 2.3.A es llamada fórmula de Levy-Khintchine (1) *. Se sigue del lema 2.3.1 y del teorema 2.3.1 que si* $G(-\infty) = 0$ *la representación de la función característica infinitamente divisible en la forma 2.3.A es única y* , $G(x)$ *están determinadas por* $f(t)$.

Por ejemplo, para la distribución Normal con media a y varianza σ^2 *tenemos que* $\gamma = a$, $G(x) = 0$ *si* $x \leq 0$ $G(x) = \sigma^2$ *si* $x > 0$. *Para la función de distribución Poisson con parámetros* (a, b, λ) *está dada por* $\gamma = \frac{a+b\lambda}{1+b^2}$, $G(x) = 0$ *si* $x \leq b$ *y* $G(x) = \lambda$ *si* $x > 0$. *Para una función de distribución degene-*

---

(1) PETROV

rada en el punto a, entonces $\gamma = a$ y $G(x) \equiv 0$.

La igualdad 2.3.A se puede escribir también como una - función :

$$\log f(t) = G(+0) - G(-0)$$

definida como

$$2.3.C \; \ldots\ldots \; L(x) = \begin{cases} \dfrac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) & \text{para } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Esta función está definida en los reales excepto en el punto 0, es no-decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$ y satisface las condiciones : $L(-\infty) = 0$, $L(+\infty) = 0$ y además es continua en estos puntos del dominio.

Por último para toda $d > 0$ y $\delta > 0$. $\int x \;\; dL(x) < \infty$ *

El siguiente teorema es un caso particular del anterior, ya que aparte de usa. a la función $L(x)$, incluye una constan-

---

* La integral $\int$ significa que el punto cero no pertenece al dominio de integración.

te real positiva σ^2 y que cumplen con las condiciones anteriores que determinan a una función característica infinitamente divisible, a partir de esto se sigue :

TEOREMA 2.3.2

Una función $f(t)$ es una función característica infinitamente divisible, si y solo sí admite la siguiente representación :

$$2.3.D \quad \ldots\ldots \quad f(t) = \text{EXP}\left\{ i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) dL(x) \right\}$$

donde γ es una constante real, x una constante no negativa, y la función $L(x)$ es no-decreciente como se especificó anteriormente.

La igualdad 2.3.D es llamada fórmula de Levy, además de que esta representación es única. La demostración del anterior teorema se sigue del Teorema 2.3.1. (1)

---

(1) PETROV

TEOREMA 2.3.3

Una función $f(t)$, es una función característica de una distribución infinitamente divisible con varianza finita, si y solo sí, admite la siguiente representación :

$$2.3.E \ \ldots\ldots \ \log f(t) = \mathrm{EXP}\left\{ i\alpha t + \int_{-\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \, dK(x) \right\}$$

donde α es una constante real, $K(x)$ es una función acotada no decreciente, dada por :

$$K(x) = \int_{-\infty} (1+x^2)\, dG(x)$$

y la función bajo la integral es igual a $(-t^2/2)$ para $x=0$.

La igualdad 2.3.E es llamada fórmula de Kolmogorov. Las funciones $G(x)$, $L(x)$ y $K(x)$ dadas por 2.3.A, 2.3.C y 2.3.E, son las llamadas funciones Espectral de Levy-Khintchine, Levy y Kolmogorov respectivamente.

OBSERVACION

Una condición para asegurar la existencia de la Esperanza y Varianza, es que exista la derivada de segundo orden - de $f(t)$ en $t = 0$.

SECCION IV

FUNCIONES DE DISTRIBUCION INFINITESIMALES

En esta sección se darán los elementos necesarios que servirán como base para las secciones siguientes, porque a partir de ahora, nuestro problema será caracterizar a las funciones de distribución infinitamente divisibles, como el límite de distribuciones de sumas de variables aleatorias, esto es, sea

$$
\begin{array}{llll}
X_{11}, & X_{12}, & \ldots, & X_{1k_1} \\
X_{21}, & X_{22}, & \ldots, & X_{2k_2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
X_{n1}, & X_{n2}, & \ldots, & X_{nk_n}
\end{array}
$$

una serie de variables aleatorias independientes cuando $K \to \infty$ y $n \to \infty$ entre sí. El objetivo de esta y las siguientes secciones será determinar la función de distribución para la suma de la forma :

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \qquad \ldots\ldots\ 2.4.A$$

cuando $n \to \infty$. En ausencia de restricciones adicionales, - la solución es obvia. Normalmente cada función de distribución F(x) puede ser considerada como el límite de esta clase de suma, si la variable aleatoria X_{n1} tiene la función de distribución F(x) para cada n y si $X_{nk} \equiv 0$ para cada $k > 1$.

La siguiente definición introduce algunas restricciones para que cada término en 2.4.A llegue a ser infinitesimal en el límite.

DEFINICION 2.4.1

Las variables aleatorias X_{nk} son llamadas INFINITESIMALES cuando

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} P\left\{ |X_{nk}| \geq \varepsilon \right\} \to 0 \qquad \ldots\ldots\ 2.4.B$$

Existen una serie de resultados acerca de esta definición para el objetivo de este capítulo pero sólo nos enfocaremos a la relación que existe entre las variables infinitesimales y las funciones de distribución infinitamente divisibles. (1)

TEOREMA 2.4.1

El conjunto de funciones de distribución que son límite (en el sentido de convergencia débil) de la distribución de sumas $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ de variables aleatorias independientes que satisfacen la condición de infinitesimales coinciden en el - conjunto de funciones de distribución infinitamente divisibles.

Para la demostración de este teorema necesitamos los -- siguientes resultados :

LEMA 2.4.1

Las siguientes condiciones son equivalentes :

i) La condición de infinitesimales

ii) $\sup_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \to 0$

iii) $\sup_k | f(t) - 1 | \to$ 0 uniformemente - en t en un intervalo finito arbitrario.

(1) PETROV

DEMOSTRACION

Por (i) tenemos

$\sup_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$ esto implica que:

$$\sup_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) = \sup_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \quad y \quad \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} dF_{nk}(x) \leq \varepsilon^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dF_{nk}(x)$$

$$\Rightarrow \sup_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \leq \varepsilon^2 + \sup_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x)$$

por lo tanto (i) $\Rightarrow$ (ii)

La Funcion $\frac{1+x^2}{x^2}$ decrece en el intervalo $x > 0$ y
$|x| \geq \varepsilon \Rightarrow x^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow 1/\varepsilon^2 \geq 1/x^2 \Rightarrow 1/\varepsilon^2 + 1 \geq \frac{1}{x^2} + 1$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2} \geq \frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{x^2/(x^2+1)}{\varepsilon^2/(\varepsilon^2+1)} \geq 1$$

Entonces

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\, dF_{nk}(x) \leq \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x)$$

$$\Rightarrow \int_{|x|\geq\varepsilon} \varepsilon^2\, dF_{nk}(x) \leq (\varepsilon^2+1) \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x)$$

$$\Rightarrow \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leq \frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x)$$

$$\Rightarrow \sup_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leq \sup_k \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x)$$

que es una cota superior de una desigualdad monotona por lo tanto (ii) => (iii)

Para $|t| \leq b$ y $b < \infty$

$$\sup_k |\gamma_{nk}(t) - 1| \leq \sup_k \left| \int_{|x|\leq\varepsilon} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| +$$

$$\sup_k \left| \int_{|x|\geq\varepsilon} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| \leq b\varepsilon + 2 \sup_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x)$$

por lo tanto (i) => (iii)

Por otra parte, integrando

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} (1 - \mathrm{Re} f(t))\, dt$ para una función de distribución $F(x)$ arbitraria y su correspondiente función característica, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} |\gamma_{nk}(t) - 1|\, dt \leq \int_0^{T} \sup_k |\gamma_{nk}(t) - 1|\, dt$$

$$+ 2 \int_{-T}^{0} e^{-t}\, dt .$$

Como todas las funciones características tienden a cero en el límite, esto implica, que el lado derecho de esta desigualdad puede ser tan pequeño como se quiera para alguna n suficientemente grande con respeto a T y esto implica que:

$$\sup_k |\gamma(t)-1| \to 0 \implies \sup_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \to 0.$$

por lo tanto (iii) => (ii)

Con esto queda demostrado el Lema 2.4.1

El siguiente lema será dado sin su demostración. (1)

LEMA 2.4.2

Suponga que $0 < b < \infty$. Si la sucesión de $\{X_{nk}\}$ satisface la condición de infinitesimales, existen números positivos $c_* = c_*(b, \tau)$ y $c^* = c^*(b, \tau)$ tal que :

$$c_* \sup_{|t| \le b} |\gamma_{nk}(t) - 1| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \le c^* \int_0^b |\log|\gamma_{nk}(t)||\, dt$$

para toda n suficientemente grande.

LEMA 2.4.3

Suponga que la condición de infinitesimales es satisfecha.

---

(1) PETROV

Si $\prod_k |f_{nk}(t)| \to |f(t)|$, donde $f(t)$ es una función característica, entonces existe una constante positiva c tal que :

$$2.4.c' \quad \ldots \quad \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \leq c$$

para una n suficientemente grande .

DEMOSTRACION

Sea b un número positivo tal que $f(t) > 0$ para $t \leq b$, - como la condición de infinitesimales es satisfecha entonces, las funciones $\log f_{nk}(t)$ están definidas en un intervalo - finito, en el $t \leq b$; para una n suficientemente grande tenemos :

$$2.4.c \quad \ldots \quad \prod_k |\gamma_{nk}(t)|^2 \to |\gamma(t)|^2$$

donde $f(t)$ es una función característica. Por el lema A.1 del Anexo la relación 2.4.C y $\sum_k \log |f(t)| \to \log |f(t)|$ uniformemente en t, en el intervalo $t <= b$, ahora por el lema 2.4.2

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \leq -C^* \int_0^b \sum_k \log |f_{nk}(t)|\, dt$$

el lado de esta desigualdad tiene un límite finito igual a :

$$-C \int_0^b \log |f(t)| \, dt$$

LEMA 2.4.4

Suponga que la condición de infinitamente es satisfecha. Si existe una constante positiva, tal que la desigualdad 2.4.c' se tiene para toda n suficientemente grande entonces :

$$2.4.D \ldots \sum_k \left\{ \log \bar{f}_{nk}(t) - (\bar{f}_{nk}(t) - 1) \right\} \to 0$$

para todo t .

DEMOSTRACION

Sea t un real arbitrario, por los lemas 2.4.3 y 2.4.2 tenemos

$$\sup |\bar{f}_{nk}(t) - 1| \to 0$$

y $\log \bar{f}_{nk}(t) = \bar{f}_{nk}(t) - 1 + \Theta(f_{nk}(t) - 1)^2$ para toda n suficientemente grande por 2.4.C' y el lema 2.4.2

$$\sum_k |\bar{f}_{nk}(t) - 1| \leq \frac{1}{C^*} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\bar{F}_{nk}(x) \leq \frac{C}{C^*}$$

para n suficientemente grande.

$$\left| \sum_k \left\{ \log \bar{f}_{nk}(t) - (\bar{f}_{nk}(t) - 1) \right\} \right| \leq \left| \sum_k |\bar{f}_{nk}(t) - 1|^2 \right| \leq \frac{C}{C_*} \sup |\bar{f}_{nk}(t) - 1|$$

Con estos lemas estamos en condiciones de demostrar el teorema 2.4.1

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2.4.1

Por la definición, una función de distribución infinitamente divisible, es un límite de distribuciones de sumas de variables aleatorias de la forma 2.4.A . Sea $F(x)$ una función de distribución infinitamente divisible arbitraria y $f(t)$ su correspondiente función característica, entonces $f(t) = (f_n(t))^n$ donde $f_n(t)$ es una función característica, para toda n.

Sea $f_{nk}(t) = f_n(t)$ ára $k = 1, 2, \ldots, n$ por ésto $f(t) = \lim_{k \to \infty} \prod_k^n f_{nk}(t)$. Por lo tanto la sucesión de funciones de distribución de la suma $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ de variables aleatorias independientes X_{nk} con función característica $f_{nk}(t)$ convergen debilmente a F(x). La sucesión $\{X_{nk}\}$ satisfacen la condición de infinitesimales dado que $f_n(t) \to 1$ uniformemente en t en cada intervalo finito y se aplica el lema 2.4.1.

Ahora consideremos una sucesión de series variables aleatorias (cada serie independiente) (X_{nk} ; k = 1, 2, ..., k_n : n = 1, 2, ...) satisfacen la condición de infinitesimales. Sea $P(\sum_k X_{nk} < x) \to F_{nk}(x)$ en todo punto de continuidad de la función de distribución F(x). Debemos mostrar que F(x) es infinitamente divisible.

Por el teorema A.2 del Anexo

$$\prod_k \gamma_{nk}(t) \to \gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

por los lemas 2.4.2 y 2.4.3, 2.4.4 es satisfecha para toda t

Ahora :

$$\bar{\gamma}_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{nk}(x + a_{nk}) = e^{ita_{nk}}\, \gamma_{nk}(t)$$

por lo tanto

$$\log \gamma_{nk}(t) - (\bar{\gamma}_{nk}(t) - 1) = \log \gamma_{nk}(t) - \{ a_{nk} +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, d\bar{F}_{nk}(x) \Big\}$$

$$2.4.E \quad \ldots \quad \sum_k \left\{ \log \bar{f}_{nk}(t) - (\bar{f}_{nk}(t) - 1) \right\} = \log \prod_k f_{nk}(t) - \Psi_n(t)$$

donde

$$\Psi_n(t) = i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x)$$

$$\gamma_n = \sum_k \left\{ a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\bar{F}_{nk}(x) \right\} \qquad y$$

$$G_n(x) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{1+y^2}\, d\bar{F}_{nk}(y)$$

Por el lema 2.4.4 tenemos $G(+\infty) \leq c < \infty$ para todo n suficientemente grande y $G_n(x)$ es una función - no-decreciente de variación acotada. Por el teorema 2.3.1 $\Psi_n(t)$ es el logaritmo de una función característica infinitamente divisible, esto se sigue de (2.4.D - 2.4.E) tal que

$$\operatorname{Exp}(\Psi_n(t)) \to f(t)$$

para toda t, entonces por el teorema 2.3.2 la función característica $f(t)$ es infinitamente divisible. □

El siguiente teorema no será demostrado, pero es de suma importancia, ya que es la generalización del teorema --- 2.4.1, porque en este resultado se involucra una constante para la suma de variables aleatorias independientes. Antes de enunciar este teorema daremos la difinición de consistencia en el límite. (1)

DEFINICION 2.4.2

Las variables aleatorias X_{nk} son llamadas (la condición de consistencia en el límite) consistentes en el límite si existen constantes ℓ_{nk} ($k=1, 2, \ldots, K_n$; $n=1, 2, \ldots$) tal que las diferencias $X_{nk} - \ell_{nk}$ son infinitesimales, esto es :

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} P\left\{ | X_{nk} - \ell_{nk} | \geq \varepsilon \right\} \to 0$$

para todo $\varepsilon > 0$ fijo.

TEOREMA 2.4.2

El conjunto de funciones de distribución que son límites

(1) PETROV

de funciones de distribución de sumas de la forma $\sum_k X_{nk} - b$ donde X_{nk} es una sucesión de variables aleatorias independientes que satisfacen la condición de infinitesimales, b - constantes, coinciden con el conjunto de funciones de distribución infinitamente divisibles. (Para su demostración - ver Petrov) (1).

Una herramienta fundamental para la demostración de este teorema es la generalización de la definición de variables aleatorias infinitesimales.

Con este teorema con-cluimos este capítulo donde se analizaron las propiedades básicas de funciones infinitamente - divisibles, así como las primeras definiciones acerca de sumas de variables aleatorias independientes que nos servirán como herramienta principal en el desarrollo del siguiente -- capítulo.

(1) PETROV

CONVERGENCIA DE UNA FUNCION DE DISTRIBUCION INFINITAMENTE DIVISIBLE

INTRODUCCION

Durante la discusión en el presente capítulo estudiaremos las condiciones para la convergencia de sumas de variables aleatorias que tienen una función de distribución dada, basándonos en los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

El objetivo de este capítulo se divide en dos partes; la primera es generalizar la convergencia de sumas de variables aleatorias y establecer qué condiciones deben cumplir dichas funciones de Distribución Infinitamente Divisibles para pertenecer a una clase especificamente.

La segunda parte del objetivo es en base a los elementos desarrollados en el presente trabajo para mostrar su aplicación en temas específicos de la Teoría de Probabilidad como son los temas de la Ley Débil y la Ley Fuerte de los Grandes Números, así como el Teorema de Límite Central.

El contenido de este capítulo se divide en cinco secciones :

- En la Primera sección daremos algunas condiciones para la convergencia de sumas de variables aleatorias Infinitamente Divisibles, en algunos teoremas nos basaremos en resultados del capítulo anterior.

- En la Segunda sección definiremos a las funciones de distribución de la clase "L", así como algunos resultados de este tipo de funciones; también se enunciarán teoremas sobre distribuciones, límites y funciones de distribución estables que nos permitirán analizar la convergencia de sumas de variables aleatorias de un tipo más general.

- En la Tercera sección definiremos la Ley Fuerte de los Grandes Números, así como resultados que nos describen las condiciones y características que debe cumplir la sucesión de variables aleatorias para cumplir con la Ley Débil de los Grandes Números.

- En la Cuarta sección se definirá la Ley Fuerte de los Grandes Números y qué condiciones deben tener las sucesiones de variables aleatorias para cumplir esta Ley. También definiremos el concepto de sucesiones de variables aleatorias FUERTEMENTE ESTABLES, para desarrollar estos resultados utilizaremos esta convergencia casi segura expuesta en el Primer capítulo.

- En la Quinta sección enfocaremos el Teorema de Límite Central desde el punto de convergencia de suma de variables aleatorias infinitamente divisibles, además se presentan resultados sobre la estandarización de la distribución Normal. Por último se dará la condición de Lindeberg.

SECCION I

CONDICIONES PARA LA CONVERGENCIA DE UNA FUNCION DE DISTRIBUCION INFINITAMENTE DIVISIBLE

La discusión de esta sección se llevará sobre Resultados que muestren bajo qué condiciones convergen sumas de variables aleatorias que son infinitamente divisibles, utilizando para estos resultados el concepto de Convergencia Débil, algunos resultados expuestos en la sección 2.3. del capítulo anterior y el resultado de consistencia en el límite.

En el siguiente teorema utilizaremos a una función característica infinitamente divisible que tiene una representación como en 2.3.A sucesiones de variables aleatorias infinitesimales y el concepto de convergencia débil que son básicos en las condiciones de este resultado.

TEOREMA 3.1.1

Sea $F(x)$ una función de distribución infinitamente divisible con función característica, $f(t)$ que se puede representar como en 2.3.A del capítulo II. Sea $\{X_{nk}; k=1, \ldots, k_n; n=1, 2, \ldots\}$ una sucesión de series de variables aleatorias las cuales son independientes entre cada serie y que satisfacen la condición de infinitesimales. Denotemos a $F_{nk}(x)=P(X_{nk} \leq x)$ como la función de distribución de las variables aleatorias X_{nk}, entonces la función de distribución de la suma

$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ <u>converge debilmente a F(x) si y solo si</u> :

3.1.A ..... $G_n \Rightarrow G$ y $\gamma_n \to \gamma$

<u>donde</u>

3.1.B ..... $G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} \, d\bar{F}_{nk}(y)$

3.1.C ..... $\gamma_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, d\bar{F}_{nk}(x) \right.$

3.1.D ..... $a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x \, d\bar{F}_{nk}(x)$

<u>donde τ es un número positivo y $\bar{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk})$</u>

<u>DEMOSTRACION</u>

$\Rightarrow$) Supongamos que $P(\sum_k X_{nk} < x) \to F(x)$ para cada punto de continuidad de la función F(x), entonces por el teorema 2.3.1 tenemos que $\mathrm{Exp}(\Psi_n(t)) \to f(t)$ por lo tanto $\Psi_n(t) \to f(t)$ y por el lema A.3 del Anexo $G_n \Rightarrow G$ y $\gamma_n \to \gamma$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $G_n \Rightarrow G$ y $\gamma_n \to \gamma$ entonces por el lema A.3 del Anexo $\gamma_n \to \gamma = (\gamma, G)$ y como $G_n \Rightarrow G$ entonces

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, d\bar{F}_{nk}(x) \to G(+\infty) < \infty$$

Por otro lado, por el lema 2.4.4 y 3.1.A podemos concluir que por cualquier t

$$\log \prod_k f_{nk}(t) - \psi_n(t) \to 0$$

y $$\prod_k f_{nk}(t) \to e^{\psi(t)} = f(t)$$

De aquí se sigue la convergencia débil de la suma a la distribución F(x) con función característica $f(t)$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 3.1.1 con la variante de que involucra una sucesión de constantes la demostración es análoga a la anterior.

TEOREMA 3.1.2

Suponga que las condiciones del teorema 3.1.1 se cumplen y sea $\{b_n\}$ una sucesión de reales, entonces la distribución de la suma $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - b_n$ converge debilmente a F(x) si y solo si

3.1.E ..... $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2}\, dF_{nk}(y+a_{nk}) \Rightarrow G(x)$$

3.1.F ..... $$\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+a_{nk}) \right\} - b_n \to \gamma$$

donde

3.1.G ..... $$a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x)$$

τ un real positivo

y $G_n(x)$ esta dada como en 3.1.B y γ esta dada como en 3.1.C.

Como los dos anteriores resultados nos hablan de las condiciones escenciales para la convergencia de sumas de variables aleatorias, en el siguiente resultado se define a diferencia del teorema 3.1.2 como deben ser las bn. (Para demostración consultar PETROV) (1)

TEOREMA 3.1.3

Sea $\{X_{nk}\}$ una sucesión de series de variables aleatorias las cuales son independientes entre sí y que satisfacen las condiciones de infinitesimales. Entonces con el objeto de que exista una sucesión de constantes reales positivas $\{bn\}$ tal que la distribución de la suma $\sum_{k} X_{nk} - bn$ converge debilmente a una distribución límite, es necesario y suficiente que 3.1.E se cumpla donde $G(x)$ es una función acotada no-decreciente.

Si la distribución de las sumas

$$\sum_{k} X_{nk} - b_n$$

converge debilmente a una distribución límite, entonces

$$b_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x + a_{nk}) \right\} - \gamma + O(1)$$

donde γ es una constante real arbitraria.

En condiciones presentadas en estos Teoremas se podría reemplazar la condición de Infinitesimales por la condición de Consistencia en el Límite. De hecho en los Teoremas - 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3 es necesario cambiar a $F_{nk}(x)$ por F-- $F_{nk}(x + M_{nk})$ donde M_{nk} es la mediana de las variables aleatorias X_{nk}. De hecho este campo en las condiciones de infinitesimales por una más general que es el caso de la Consistencia en el Límite no se dificultaría mucho en lo escencial pero si tendría cierta complicación en su formulación, ya que tendríamos que hacer unas consideraciones en los límites a la sucesión de series de variables aleatorias independientes que cumplen la condición de infinitesimales.

TEOREMA 3.1.4

Supongamos que las condiciones del Teorema 3.1.1 se cumplen, entonces la distribución de la suma $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ convergerá a la distribución F(x) si y solo si las siguientes condiciones se cumplen :

3.1.H ..... $$\begin{cases} \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) & \text{para } X<0 \\ \sum_{k=1}^{k_n} (1 - F_{nk}(x)) \to \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) & \text{para } X>0 \end{cases}$$

para todo punto de continuidad de $G(x)$:

3.1.I ..... $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \\ = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \liminf\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \end{array}\right.$$

3.1.J ..... $$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) \to \gamma + \int\limits_{|x|<\tau} x\, dG(x) - \int\limits_{|x|>\tau} \frac{dG(x)}{x}$$

para todo $\tau > 0$ tal que los puntos $\pm\tau$ son puntos de continuidad de $G(x)$.

DEMOSTRACION

La demostración de este teorema se hará sin tomar en cuenta la condición de infinitesimales ya que las condiciones 3.1.H, 3.1.I y 3.1.J son equivalentes a la condición 3.1.A, donde $G_n(x)$ y γ_n estan definidas en las condiciones 3.1.B, 3.1.C y 3.1.D donde τ es una constante positiva arbitraria. Primero mostraremos que las condiciones 3.1.H y 3.1.I son equivalentes a la condición :

3.1.K ..... $$\sum_k \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2}\, dF_{nk}(y) \to G(x)$$

Por el Teorema A.4 del Anexo, tenemos que la condición 3.1.K es equivalente a las siguientes dos condiciones :

$$\text{3.1.L} \ \ldots\ldots \quad \begin{cases} \sum_k \bar{F}_{nk}(x) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) & \text{para } x<0 \\ \sum_k (1 \ \ \bar{F}_{nk}(x)) \to \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) & \text{para } x>0 \end{cases}$$

$$\text{3.1.M} \ \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\bar{F}_{nk}(x) = \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\bar{F}_{nk}(x) = G(+0)-G(-0) \end{cases}$$

para todo punto de continuidad de $G(x)$.

Definimos $a_n = \sup_k |a_{nk}|$. Por el lema A.5 del Anexo y por la condición de infinitesimales, tenemos que para todo $\tau > 0$

$$\text{3.1.N} \ \ldots\ldots \quad a_n \leq \sup_k \int_{|x|<\tau} |x|\, dF_{nk}(x) \to 0$$

Por otra parte $F_{nk}(x) \leq \bar{F}_{nk}(x + a_n) \leq F \ \ (x + 2a_n)$, por lo tanto la condición 3.1.L es equivalente cuando $\bar{F}_{nk}$ reemplaza a F_{nk}. Entonces la condición 3.1.K es equivalente a las condiciones 3.1.H y 3.1.M.

Ahora probaremos que 3.1.H y 3.1.M son equivalentes a las condiciones 3.1.H y 3.1.I para esto definimos

$$T_n = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}$$

y

$$U_n = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)$$

donde $0<\varepsilon<\tau$. Desarrollando tenemos :

$$T_n = \sum_k a_{nk}^2 \int_{|x|<\varepsilon} dF(x) - 2 \sum_k a_{nk} \int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) + \sum_k \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2$$

$$= \sum_k \left\{ \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) - \int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right\}^2 - \sum_k a_{nk}^2 P(|X_{nk}| \geq \varepsilon)$$

$$= \sum_k \left(\int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 - \sum_k a_{nk}^2 P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \Rightarrow |T_n| \leq (a_n \tau + a_n^2) \sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon)$$

Si 3.1.H se cumple, entonces $T_n \to 0$. Por lo tanto

$$U_n = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \sum_k \int_{|x-a_{nk}|<\varepsilon} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x)$$

$$= \sum_k \int_{\substack{|x|<\varepsilon \\ |x-a_{nk}|\geq\varepsilon}} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \sum_k \int_{\substack{|x|\geq\varepsilon \\ |x-a_{nk}|<\varepsilon}} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x)$$

y por 3.1.N y para n suficientemente grande

$$U_n \leq 2 \sum \int_{\varepsilon/2 \leq |x| < 2\varepsilon} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) \leq 18\, \varepsilon^2 \sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon/2)$$

donde $P[\,|X_{nk}| \geq \varepsilon/2\,]$ es la desigualdad de Chebyshev.

Si 3.1.H se cumple $U_n \to 0$ y $T_n - U_n \to 0$

i.e.

$$\sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, d\bar{F}_{nk}(x) - \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to 0$$

De esto y de las siguientes desigualdades se sigue la equivalencia entre 3.1.H y 3.1.I en el primer lado de la desigualdad y de 3.1.H y 3.1.M del segundo; esto es :

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, d\bar{F}_{nk}(x) \leq \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x) \leq \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, d\bar{F}_{nk}(x)$$

Para terminar la demostración de este Teorema solo necesitamos demostrar que si 3.1.H y 3.1.I se cumplen, las condiciones 3.1.J y $\gamma_n \to \gamma$ son equivalentes, es suficiente ver que para todo τ fijo tal que los puntos $\pm\tau$ son puntos de continuidad de $G(x)$; se cumple :

$$3.1.\tilde{N} \; \ldots\ldots \; \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dF_{nk}(x) \to \int_{|x|<\tau} \frac{dG(x)}{x} - \int_{|x|<\tau} x \, dG(x)$$

Supongamos que las condiciones 3.1.H y 3.1.I se cumplen. Usando la siguiente igualdad

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, d\bar{F}_{nk}(x) = \sum_k \int_{|x|<\tau} x \, d\bar{F}_{nk}(x) - \sum_k \int_{|x|<\tau} \frac{x^3}{1+x^2} \, d\bar{F}_{nk}(x) + \sum_k \int_{|x|\geq\tau} \frac{x}{1+x^2} \, d\bar{F}_{nk}(x)$$

por 3.1.K la cual es equivalente a 3.1.H y 3.1.J y por el Teorema A.4 del Anexo, tenemos :

$$\sum_k \int_{|x|<\tau} \frac{x^3}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \to \int_{|x|<\tau} x\, dG(x)$$

$$\sum_k \int_{|x|\geq\tau} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \to \int_{|x|\geq\tau} \frac{dG(x)}{x}$$

Unicamente necesitamos probar que : $\sum_k \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) \to 0$

pero si $a_n = \sup_k \{a_{nk}\}$ y

$$\left|\sum_k \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x)\right| \leq \left|\sum_k \int_{|x|<\tau} (x-a_{nk})\, dF_{nk}(x)\right| + \left|\sum_k \int_{\substack{|x-a_{nk}|<\tau \\ |x|\geq\tau}} (x-a_{nk})\, dF_{nk}(x) -\right.$$

$$\left.\sum_k \int_{\substack{|x-a_{nk}|\geq\tau \\ |x|<\tau}} (x-a_{nk})\, dF_{nk}(x)\right| \leq \left|\sum_k a_{nk} P(|X_{nk}| \geq \tau)\right| +$$

$$\tau \sum_k P(\tau \leq |X_{nk}| < \tau + a_n) + (\tau + a_n) \sum_k P(\tau - a_n \leq |X_{nk}| < \tau)$$

y por 3.1.H y la relación 3.1.N el lado derecho de esta desigualdad converge a 0. □

El siguiente resultado que enunciaremos, se refiere a propiedades expuestas en el Capítulo II, como la representación canónica, en particular la aplicación de la fórmula de Levy-Khintchine dada en la tercer sección y este resultado nos habla que la convergencia de sumas de variables aleatorias a una distribución límite donde su respectiva función característica debe tener una representación de la forma Levy-Khintchine esto es :

TEOREMA 3.1.5.

Sea $F(x)$ una función de distribución infinitamente divisible con función característica $f(t)$ que tiene la representación en 2.3.A.

Sea $\{X_{nk}\}$ una sucesión de series de variables aleatorias las cuales son independientes con cada serie y que satisfacen la condición de infinitesimales. Sean $F_{nk}(x) = P(X_{nk} < x)$ y $\{b_n\}$ una sucesión de constantes $\mathbb{R}$. Para la convergencia débil de la distribución de la suma $\sum_k X_{nk} - b_n$ a la distribución $F(x)$ es necesario y suficiente que las condiciones 3.1.K y 3.1.M del Teorema 3.1.4 se cumplan acompañadas de la siguiente condición :

$$\sum_k \int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) - b_n \to \gamma + \int_{|x|<\tau} x \, dG(x) - \int_{|x|\geq\tau} \frac{dG(x)}{x}$$

Para todo $\tau > 0$ fijo, tal que los puntos $\pm\tau$ son puntos de continuidad de $G(x)$.

La demostración del Teorema es análoga a la del Teorema 3.1.2 y de los siguientes hechos observados en el Teorema 3.1.4 :

1) Las condiciones 3.1.H y 3.1.K son equivalentes a la condición 3.1.M; 2) Si 3.1.H y 3.1.K se cumplen, entonces tenemos a 3.1.N. Suponemos también que se cumple la condición de Infinitesimales.

Con este teorema terminamos esta sección que nos da resultados generales para la convergencia de sumas de variables aleatorias.

SECCION II

DISTRIBUCIONES LIMITE DE LA CLASE L Y DISTRIBUCIONES ESTABLES.

En esta sección introduciremos dos nuevos conceptos -- que nos sirven para la convergencia de sumas de variables - aleatorias hacia una función de distribución de tipo más general de las que ya hemos estudiado. Durante el desarrollo de esta sección solo analizaremos la convergencia de este - tipo de sumas, además, con algunos resultados expresados -- por medio de lemas y teoremas concluiremos que el conjunto de funciones de distribución de la clase L coinciden con las distribuciones estables y estas a su vez son un subconjunto de las funciones de distribución infinitamente divisibles. Para concluir esta sección se enunciará el concepto de dominio de atracción que se analizará brevemente.

Para definir al conjunto de funciones de distribución - que pertenecen a la clase L, necesitamos considerar una sucesión de variables aleatorias independientes y una sucesión de constantes positivas $\{ A_n : n = 1, 2, \ldots \}$; para todo $\varepsilon > 0$

$$3.2.A \ldots\ldots \sup_{1 \le k \le n} P(|X_{nk}| \geq \varepsilon a_n) \to 0$$

Es claro ver que estamos considerando un caso particu-lar de la condición de infinitesimales ya que si hacemos a :

$$X_{nk} = \frac{X_k}{a_k} \quad \text{para } K = 1, 2, \ldots, n \text{ y } n = 1, 2, \ldots$$

tenemos la condición de infinitesimales.

DEFINICION 3.2.1

Denotamos por la clase L al conjunto de funciones de distribución las cuales son el límite de las sumas :

$$3.2.B \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - b_n$$

donde $\{ X_n \}$ es una sucesión de variables aleatorias que satisfacen 3.2.A y $\{ a_n \}$, $\{ b_n \}$ son sucesiones constantes tal que $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$.

Con esta definición podemos afirmar que el conjunto de funciones de distribución de la clase L son un subconjunto del conjunto de funciones de distribución infinitamente divisibles, ya que este conjunto, coincide con el conjunto de funciones de distribución infinitesimales y la condición 3.2.A es un caso particular del conjunto de las distribuciones infinitesimales y de hecho por la definición de las funciones de distribución de la clase L este concepto es indispensable.

El siguiente lema establece las condiciones que debe cumplir la sucesión de constantes An para la convergencia de sumas de variables aleatorias que satisfacen las condiciones 3.2.A y B.

LEMA 3.2.1

Sean las variables aleatorias independientes como en 3.2.B que satisfacen la condición de infinitesimales en 3.2.A y sea la distribución de la suma en 3.2.B, si converge débilmente a una función de distribución F(x) no degenerada entonces :

$$a_n \to \infty \quad y \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

DEMOSTRACION :

La función característica de la variable aleatoria como en 3.2.A tiene la forma :

$$f(t) = \operatorname{Exp}\{-ibnt\{\prod_{k=1}^{n} V_k(t/a_n)$$

donde :

$V_k(t)$ es la función característica de la variable aleatoria X_k.

Tenemos por hipótesis que :

$$f_n(t) \to f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

Supongamos que :

$$a_n \text{ no tiende a } \infty$$

entonces la sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión acotada.

$$a_n \to \infty \quad y \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

DEMOSTRACION :

La función característica de la variable aleatoria como en 3.2.A tiene la forma :

$$f(t) = \operatorname{Exp}\left\{-ibnt\right\}\prod_{k=1}^{n} V_k(t/a_n)$$

donde :

$V_k(t)$ es la función característica de la variable aleatoria X_k.

Tenemos por hipótesis que :

$$\gamma_n(t) \to f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

Supongamos que :

$$a_n \text{ no tiende a } \infty$$

entonces la sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión aco-tada, la cual también contiene una subsucesión $\{a_{n_m}\}$ que converge a un límite finito a cuando $m \to \infty$. Sea t un número fijo arbitrario, si $t_m = a_{n_m} t$ entonces $t_m \to at$ cuando $m \to \infty$. Por 3.2.A y el lema 2.4.1 tenemos que

$$\sup_k \left| V_k\left(\frac{t}{a_n}\right) - 1 \right| \to 0$$

por lo tanto $|V_k(t)| = \left| V_k\left(\frac{t_m}{a_{n_m}}\right)\right| \to 1$ cuando $m \to \infty$ para toda k, entonces se sigue que $|V_k(t)| \equiv 1$ y $|f(t)| \equiv 1$ y esto implica que $F(x)$ es una función de distribución degenerada, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$a_n \to \infty$$

Ahora solo tenemos que demostrar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ entonces por 2.4.A y el teorema A.5 del Anexo la distribución de la suma $\frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=1}^{n} X_k - b$ converge debilmente a $F_n(x)$, entonces :

$$P\left(\frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} X_k - b_{n+1} < X\right) = F_n(\alpha_n X = \beta_n)$$

donde $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\beta_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} - b_n$ por el teorema A.5 del Anexo, tenemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$

El siguiente lema nos habla de las condiciones que debe tener una función característica de una función de distribución para pertenecer a la clase L.

LEMA 3.2.2

Una función de distribución $F(x)$ con función característica $f(t)$ pertenece a la clase L si y solo si para todo $\alpha > 1$ existe una función característica $f_\alpha(t)$ tal que:

3.2.C ..... $f(t) = f(\alpha t) \cdot f_\alpha(t)$

DEMOSTRACION

<=) Supongamos que la condición 3.2.C se cumple, entonces $f(t) \neq 0$ para todo t. Ahora supongamos lo contrario, esto es, que para alguna $a > 0$ $f(2a) = 0$ y $f(t) = 0$ para $0 < t < 2a$ entonces $f_\alpha(2a) = 0$ la proposición 1.7.1 del Capítulo I.

3.2.C ..... $1 = |1 - f(2a)|^2 \leq 4(1 - |f_\alpha(a)|^2)$

Por otra parte la continuidad de $f(t)$ implica que:

$$f_\alpha(a) = \frac{f(a)}{f(\alpha a)} \longrightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad \alpha \to 1$$

Con esto, 3.2.D se cumple para $\alpha \to \xi$ donde ξ es una vecindad alrededor de 1.

Ahora para la siguiente parte, supongamos otra vez que 3.2.C se cumple. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias tales que X_k tiene función característica dada por :

$$V_k(t) = f_{\frac{k-1}{k}}(kt) = \frac{f(kt)}{f((k-1)t)}$$

Entonces la función característica de la variable aleatoria $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ es igual a $\prod_{k=1}^{n} V_k(t/n) = f(t)$. La función característica $f(t)$ es continua y por lo tanto :

$$\sup_k \left| V_k\left(\tfrac{t}{n}\right) - 1 \right| \to 0 \ y \ \sup_k P(|X_k| \geq \varepsilon_n) \to 0$$

para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $F(x)$ pertenece a la clase L.

$\Rightarrow$) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias que independientes y $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de contantes con $a_n > 0$, tales que la distribución de la suma $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n$ converge debilmente a $F(x)$ y la condición 3.2.A se cumple, esto es, la condición de infinitesimales para las variables aleatorias X_k/a_n $(k=1, 2, \ldots, n)$, podemos suponer que F(x) es una función de distribución no-degenerada ya -- que si no lo fuese, se cumpliría 3.2.C con función característica $f_\alpha(t)$ de la distribución degenerada.

Denotamos por $V_k(t)$ la función característica de X_k, tenemos que $g_n(t) \rightarrow f(t)$ donde $g_n(t) = e^{-ib_n t}\prod_{k=1}^{n} V_k\left(\frac{t}{a_n}\right)$ y $f(t) \neq 0$.

Y, por el teorema 2.2.1 $f(t) \neq 0$ y por el lema 3.2.1 tenemos que $a_n \rightarrow \infty$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ por lo tanto para todo $\alpha < 1$ positivo existe una sucesión de enteros $\{m_n\}$ tal que $m_n \rightarrow \infty$, $n - m_n \rightarrow \infty$. Escribimos $g_n(t)$ como sigue :

$$g_n(t) = g_n^{(1)}(t) \times g_n^{(2)}(t)$$

donde :

$$g_n^{(1)}(t) = Exp\left\{ -i\alpha\, b_{mn}\, t \right\} \left(\prod_{k=1}^{m_n} V_k\left(\frac{a_{mn}}{a_n} \cdot \frac{t}{a_{mn}} \right) \right)$$

y

$$g_n^{(2)}(t) = Exp\left\{ i\alpha\,(b_n - b_{mn})\, t \right\} \left(\prod_{k=m_n+1}^{n} V_k\left(\frac{t}{a_n}\right) \right)$$

Tomando la relación que $g_n(t) \rightarrow f(t)$ y las propiedades de la sucesión $\{m_n\}$ encontramos que $g_n^{(1)}(t) \longrightarrow f(t)$ por lo tanto la función característica $g_n^{(2)}(t)$ converge a la función continua :

$$f_{\alpha}(t) = \frac{f(t)}{f(\alpha t)}$$

Y por el teorema A.7 del Anexo, $f_{\alpha}(t)$ es una función característica, con lo que concluye la demostración. $\square$

De esta demostración podemos concluir que la función característica $f_{\alpha}(t)$ como está dada en 3.2.C es infinitamente divisible. Para funciones características de la clase L, $f_{\alpha}(t)$ es un límite de funciones características de variables aleatorias independientes que satisfacen la condición de infinitesimales.

Por otra parte, sabemos que las distribuciones que pertenecen a la clase L son infinitamente divisibles; ahora, nos preguntamos si podemos tener una caracterización de las funciones características de este tipo de distribuciones por el uso de la función de Levy L(x) dada por :

$$3.2.E \ldots\ldots \quad f(t) = \operatorname{Exp}\left\{ i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) dL(x)\right\}$$

El siguiente teorema nos da un resultado referente a - esta caracterización.

TEOREMA 3.2.1

Una función de distribución infinitamente divisible F(x) pertenece a la clase L si y solo sí su correspondiente fun-- ción espectral de Levy L(X) es continua en cada $x \neq 0$ y tiene derivadas por la derecha y por la izquierda y la función --- L' (x) es decreciente. (Donde L' (x) denota cualquiera de - estas derivadas).

DEMOSTRACION

<=) Sea f(t) la función característica de una función de distribución F(x) pertenecientes a la clase L y suponga -- que $0 < \alpha < 1$ tenemos :

$$f(\alpha t) = \operatorname{Exp}\left\{ i\gamma\alpha t - \frac{\sigma^2\alpha^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\alpha t x} - 1 - \frac{i\alpha t x}{1+x^2}\right) dL(x)\right\}$$

si hacemos $x = \frac{\alpha}{u}$ tenemos

$$\gamma(\alpha t) = \text{Exp}\left\{ i\gamma\alpha t - \frac{\sigma^2\alpha^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{it\alpha^2 u}{\alpha^2+u^2}\right) dL\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

por demostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{itu}{1+u^2} - \frac{it\alpha^2 u}{\alpha^2+u^2}\right) dL\left(\frac{u}{\alpha}\right) = it\alpha(1-\alpha^2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v^3\, dL(v)}{(1+v^2)(1+\alpha^2 v^2)} = itc_1$$

por lo tanto

$$\gamma(\alpha t) = \text{Exp}\left\{ i\gamma_1 t - \frac{\sigma^2\alpha^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\, dL\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

donde : $\gamma_1 = \gamma\alpha + c_1$

$$\frac{\gamma(t)}{\gamma(\alpha t)} = \text{Exp}\left\{ i(\gamma-\gamma_1)t - \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\, d\left(L(u) - L\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right)\right)\right\}$$

Sabemos que la función $f(t) / f(\alpha t)$ es una función característica infinitamente divisible. Por el teorema 2.3.2 del Capítulo II, la función $L(u) - L(u/\alpha)$ no decrece en $u < 0$, para todo u_1, u_2 que cumplen que $u_1 < u_2$ y $u_1 u_2 > 0$ tenemos :

3.2.F ..... $L(u_1) - L\left(\frac{u_1}{\alpha}\right) \le L(u_2) - L\left(\frac{u_2}{\alpha}\right)$

Inversamente, la función $L(u) - L(\frac{u}{\alpha})$ es no decreciente y por lo tanto $f_{\alpha}(t) = f(t)/f(\alpha t)$ es una función característica, entonces por la condición 3.2.F es necesario y suficiente para que la distribución $F(x)$ con la función espectral de Levy pertenezca a la clase L. $\square$

Para ejemplificar este teorema, podemos ver que :

i) Por el teorema 3.2.1 la función de distribución -- Poisson con parámetros (a, b, λ) no pertenece a la clase L, ya que su función espectral de Levy tiene una discontinuidad en $b \neq 0$

ii) Para la función de distribución normal $L(x) \equiv 0$ entonces pertenece a la clase L. Lo mismo podemos - afirmar de la distribución degenerada.

Por ahora nos seguiremos ocupando de las distribuciones de la clase L, pero utilizaremos un nuevo concepto, el de -- distribuciones <u>estables</u>, el cual será definido y concluirá - que este conjunto de funciones de distribución coincide con - el conjunto de funciones de distribución de la clase L. Daremos algunas condiciones que se necesitan para caracterizar a las variables aleatorias, tal que sus Funciones de distribución sean estables.

Para definir las funciones de distribución estables, necesitamos una restricción adicional a las ya expuestas, para el caso del conjunto de distribuciones de la clase L, esto es :

PROPOSICION 3.2.1

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes identicamente distribuidas, el límite de las distribuciones de las sumas de la forma 3.2.B es un subconjunto del conjunto de todas las funciones de distribución infinitamente divisibles, y este a su vez coincide con el conjunto de distribuciones estables.

DEFINICION 3.2.2

Una función de distribución $F(x)$ y su correspondiente función característica $f(t)$ son llamadas ESTABLES si para toda a_1, a_2 constantes existen $a > 0$, b números reales tales que :

3.2.G ..... $f(a_1 t)\, f(a_2 t) = e^{ibt} f(a\, t)$

Observamos en 3.2.F que si escribimos $at=U$, $\alpha = a_1/a_n$ y $\alpha_1 = a_2/a_n$

$$f(U) = \text{Exp}\left\{-\frac{ibU}{\alpha}\right\} f(\alpha u) \cdot f(\alpha_1 u) = f(\alpha U)\, \gamma_\alpha(U)$$

donde :

$$f_\alpha(U) = \text{Exp}\left\{-\frac{ibU}{\alpha_1}\right\} f(\alpha_1 u)$$

es una función característica, por lo tanto, una distribución estable pertenece a la clase L.

OBSERVACION

Una alternativa de la definición de funciones de distribución estable es :

DEFINIMOS : Una función de distribución es estable si y solo si para todo $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, b_1, b_2 existen $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b)$$

Para respaldar esta afirmación, enunciaremos el siguiente teorema :

TEOREMA 3.2.2

El conjunto de distribuciones que son el límite de la suma de variables aleatorias independientes e identicamente

<u>distribuidas como en la forma 3.2.B coinciden con el conjunto de distribuciones estables.</u>

<u>DEMOSTRACION</u>

Sea F(x) una función de distribución estable, con función característica $f(t)$. Consideremos una sucesión de variables aleatorias independientes $\{X_n\}$, con función de distribución F(x). Entonces la suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ para todo n tiene la función característica $f(t) = \text{Exp}\,\}ibnt\{ \cdot f(a_n t)$, y la suma estandarizada $\frac{S_n}{a_n} - b_n$ tiene la función característica $f(t)$ y por lo tanto su función de distribución es F(x).

Ahora, supongamos que F(x) es un límite de la distribución de la suma de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas de la forma 3.2.B donde $a_n > 0$ y b_n son constantes. También supongamos que F(x) es no degenerada, aunque la distribución degenerada es estable. Sea g(t) la función característica de la variable aleatoria X, entonces para todo t

3.2.H ..... $e^{ib_n t}\, g_n\left(\frac{t}{a_n}\right) \rightarrow \gamma(t)$

La variable aleatoria X_k/a_n (k=1, 2, ..., n) satisface la condición de infinitesimales que es $(X_k/a_n) \xrightarrow{P} 0$ y esto equivale a la condición de que para todo t $g(t/a_n) \rightarrow 1$

Por otra parte sea $\delta > 0$ tal que $f(t) \neq 0$ para todo t. Entonces se sigue de 3.2.G que $\mathrm{Exp}\left\{-\frac{i b_n t}{n}\right\} g\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$ para $|t| \leq \delta$. Por la proposición 1.7.1 del Capítulo I tenemos :

$$\left(1 - \mathrm{Re}\; g\left(\frac{2t}{a_n}\right)\right) \leq 4\left(1 - \mathrm{Re}\; g(t/a_n)\right)$$

de esto se sigue que : $\mathrm{Re}\; g(t/a_n) \to 1$ en el intervalo $|t| \leq 2\delta$ y $\therefore$ $g(t/a_n) \to 1$

Por el lema 3.2.1 tenemos $a_n \to \infty$ y $a_{n+1}/a_n \to 1$

Sean c_1 y c_2 dos números positivos arbitrarios y d_1 y d_2 reales arbitrarios. Entonces existe una sucesión de enteros $\{M_n\}$ tal que :

$$\frac{a_{M_n}}{a_n} \to \frac{c_1}{c_2}$$

Sean $\alpha_n = a_n c_1$ $\quad B = \frac{1}{\alpha_n}\left(a_n b_n + a_{M_n} b_{M_n} + a_n d_1 + a_{M_n} d_2\right)$

entonces

3.2.I ..... $\displaystyle \frac{a_n}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n - d_1\right) + \frac{a_{M_n}}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_{M_n}}\sum_{k=n+1}^{n+M_n} X_k - b_{M_n} - d_2\right)$

$$= \frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n+M_n} X_k - B_n$$

Los sumandos convergen a $F(c_1 x + d_1)$ y $F(c_2 x + d_2)$ respectivamente como una consecuencia del teorema A.6 del Anexo. Y la suma converge solo a una función de la forma $F(ax + b)$ entonces

$$F(c_1 x + d_1) * F(c_2 x + d_2) = F(ax + b)$$

Por lo tanto la función de distribución $F(x)$ es estable. $\square$

En el siguiente teorema introduciremos la relación que existe entre las funciones de distribución infinitamente divisibles con las funciones de distribución estables. La demostración del teorema se puede consultar en Petrov. (1)

TEOREMA 3.2.3

Con el objeto de que una función característica infinitamente divisible sea estable, es necesario y suficiente que su correspondiente función espectral de Levy $L(x)$ y la constante positiva en la fórmula de Levy satisfaga una de las dos condiciones siguientes :

(i) $L(x) \equiv 0$

(ii) $\sigma^2 = 0$ $\quad L(x) = \frac{c_1}{|x|^{\alpha}}$ para $x < 0$

$L(x) = -\frac{c_2}{x^{\alpha}}$ para $x > 0$ donde

$0 < \alpha < 2,\ c_1 \geq 0,\ c_2 \geq 0,\ c_1 + c_2 > 0$

Para enunciar el siguiente teorema debemos establecer que este resultado, da una representación de la función característica de tal manera que pertenezca al conjunto de funciones de distribución estables. (1)

TEOREMA 3.2.4

Con el objeto de que la función característica sea estable, es necesario y suficiente que admita la siguiente representación :

3.2.1 ..... $f(t) = \mathrm{Exp}\left\{ i\gamma t - c|t|^{\alpha}\left(1 + i\beta \frac{t}{|t|}\, w(t,\alpha)\right)\right\}$

donde c, α, β y γ son constantes

$$w(t,\alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Si $\alpha < 2$ la constante α está dada como en el teorema 3.2.3.

Con esta representación de la función característica se podrían obtener los siguientes casos :

i) Si el valor $c=0$ entonces la función característica 3.2.1 corresponde a la función característica de la distribución degenerada.

---

(1) PETROV

ii) Si el valor de $c=0$ y $\alpha=2$ entonces la función característica corresponde a la función normal.

Como una porpiedad importante de esta representación, donde $f(t)$ es la función característica de una distribución estable no degenerada $F(x)$, tenemos $|f(t)| = \text{Exp}\left\{ -C\,|t|^{\alpha} \right\}$ para $(0 < \alpha \leq 2)$ y por esto $F(x)$ tiene derivadas contínuas de todo orden.

Para concluir esta sección, enunciaremos el concepto de dominio de atracción que tiene una fuerte dependencia con el concepto de funciones de distribución estables.

DEFINICION 3.2.3

Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes que tienen la misma función de distribución $F(x)$. Si existe una sucesión de constantes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tal que $a_n > 0$ y la distribución de las sumas

$$Z_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - b_n$$

converge debilmente a alguna función de distribución $G(x)$ entonces decimos que $F(x)$ es atraída por $G(x)$. El conjunto de todas las funciones de distribución que son atraídas por

G(x) es llamado el dominio de atracción de la distribución G(x).

Como se mencionó al empezar la última parte de esta sección y por el teorema 3.2.2, podemos concluir que solo las distribuciones estables tienen dominio de atracción.

Para dar el primer resultado formal acerca del dominio de atracción, pensemos en la representación 3.2.1 del teorema 3.2.4 y en el caso (ii), entonces :

TEOREMA 3.2.5

La función de distribución F(x) pertenece al dominio de atracción de una distribución normal si y solo si

$$\int_{|x|\geq z} dF(x) = o\left(\frac{1}{z^2}\int_{|x|<z} x^2\, dF(x)\right) \quad (z \to +\infty)$$

La demostración puede verse en Petrov (1)

La herramienta que nos presenta este teorema em importante dentro de la teoría de la Distribución Infinitamente -

Divisible, ya que si tenemos una sucesión de variables aleatorias con la misma función de distribución, entonces serán atraídas por la función de distribución normal, siempre y cuando cumpla con las condiciones de este teorema.

Para concluir se enunciará un teorema que nos habla de las condiciones que debe cumplir una función de distribución para pertenecer al dominio de atracción de una función estable, esto es :

TEOREMA 3.2.6

La función de distribución F(x) pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con el exponente característico "$\alpha < 2$" si y solo si

$$F(x) = \frac{c_1 + o(1)}{|x|^{\alpha}} h(|x|) \qquad x \to -\infty$$

$$1 - F(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^{\alpha}} h(x) \qquad x \to +\infty$$

donde $h(x)$ es función de variación lenta y C_1, C_2 son constantes definidas como en el teorema 3.2.3.

NOTA : α está dada como en el 3.2.1. de una distribución estable, es llamado exponente característico.

NOTA : *Una función positiva* $h(x)$ *definida en* $x > 0$ *es llamada de variación lenta si para todo* $C > 0$

$$\frac{h(cx)}{h(x)} \longrightarrow 1 \qquad \text{cuando} \quad X \longrightarrow +\infty$$

LA LEY DEBIL DE LOS GRANDES NUMEROS

SECCION III

En esta sección definiremos La Ley Débil de los Grandes Números basandonos en conceptos vistos en el capítulo II, ya que para llegar al concepto de la Ley Débil de los Grandes Números usamos implicítamente el concepto de distribuciones Infinitésimales. Por otra parte, a partir de este concepto, se enunciaran resultados que involucran conceptos ya definidos como es el concepto de Consistencia en el límite; además se discutiran varios resultados acerca de las condiciones que debe de cumplir una sucesión de variables aleatorias, para que pertenezcan a dicha ley; por último, para finalizar esta sección se presentaran dos resultados de convergencia de sumas de variables aleatorias en casos particulares.

Para llegar al concepto antes mencionado necesitamos la siguiente definición:

DEFINICION 3.3.1

La sucesión $\{X_n\}$ es estable si existe una sucesión de constantes $\{b_n\}$ tal que $X_n - b_n \xrightarrow{P} 0$

Por otra parte si la siguiente condición se cumple, es decir:

Para todo $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande tenemos:

$$P(|\bar{X}_n - b_n| < \varepsilon) > 1/2$$

que es la mediana de la variable aleatoria X y denotamos por M(X) se sigue que, para toda n suficientemente grande tenemos

$$|M(X_n) - b_n| < \varepsilon$$

entonces si la sucesión es estable y para todo $\varepsilon > 0$

$$P(|\bar{X}_n - M(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq P(|\bar{X}_n - b_n| + |b_n - M(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq P(|\bar{X}_n - b_n| > \varepsilon/2) \to 0$$

de esta manera

$$\bar{X}_n - M(\bar{X}_n) \xrightarrow{P} 0$$

<u>DEFINICION</u> 3.3.2

<u>Sea</u> $\{X_{nk};\ k = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ <u>una sucesión de series de variables aleatorias que son independientes entre si. Esta sucesión de series de variables aleatorias</u> $\{X_{nk}\}$ <u>pertenece a la Ley Débil de los Grandes Números si y solo si existe una sucesión de constantes</u> $\{b_n\}$ <u>tal que la distribución Degenerada dada por:</u>

$$D(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq 0 \\ 1 & \text{si } X > 0 \end{cases}$$

El primer resultado que se demues-tra en esta sección nos muestra la relación entre la Ley Débil de los Grandes

Números y el concepto de Consistencia en el Límite.

LEMA 3.3.1.

Si la sucesión $\{X_{nk}\}$ pertenece a la Ley Débil de los Grandes Números, entonces las $\{X_{nk}\}$ tienen la propiedad de Consistencia en el Límite.

DEMOSTRACION

Si la susesión $\{X_{nk}\}$ pertenece la Ley Débil de los Grandes Números entonces su función caracteristica es identicamente 1. Sea f la función caracteristica de X_{nk} entonces para todo t

$$\operatorname{Exp}\{-i b_n t\} \prod_k \gamma_{nk}(t) \to 1$$

es mas

$$\prod_k |\gamma_{nk}(t)| \to 1 \quad y \quad \inf_k |\gamma_{nk}(t)|^2 \to 1$$

La función $|f_{nk}(t)|^2$ es la función característica de la diferencia de dos variables aleatorias identicamente distribuidas e independientes X_{nk} y Y_{nk}. Esto implica que para todo $\varepsilon > 0$

3.3.A .... $\sup_k P(|X_{nk} - Y_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$

Sea $\{a_{nk}\}$ una sucesión de números tal que $P(X_{nk} < a_{nk}) \leq \frac{1}{2} \leq P(X_{nk} \leq a_{nk})$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$P(X_{nk} - Y_{nk} \geq \varepsilon) \geq P(X_{nk} - a_{nk} \geq \varepsilon,\ Y_{nk} - a_{nk} \leq 0) \geq \frac{1}{2}(1 - F_{nk}(a_{nk} + \varepsilon))$$

donde F_{nk} es la función de distribución de X_{nk}. Similarmente

$$P(X_{nk} - Y_{nk} \leq -\varepsilon) \geq \tfrac{1}{2} F_{nk}(a_{nk} - \varepsilon + 0)$$

es mas

$$P(|X_{nk} - a_{nk}| \geq \varepsilon) \leq 2P(|X_{nk} - Y_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$$

uniformente en k, esto por 3.3.A Entonces X_{nk} satisface la condición de Consistencia en el límite. □

Para el siguiente resultado, utilizaremos el hecho - que si las variables aleatorias X_{nk} son Consistentes en el límite entonces la variable aleatoria $X_{nk} - M(X_{nk})$ satisface la condición de funciones de distribución infinitesimales, aparte este mismo resultado es una consecuencia del -- teorema 3.1.2 (1)

LEMA 3.3.2

Sea F_{nk} la función de distribución de X_{nk} . $M_{nk} = M(X_{nk})$ la mediana de X_{nk} La susesión $\{X_{nk}\}$ pertenece a la Ley Débil de los Grandes Números si y solo si para todo $\varepsilon > 0$

3.3.B .... $$\sum_k \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x - M_{nk}) \to 0$$

3.3.C .... $$\sum_k \left\{ \int_{|x|<1} x^2 dF_{nk}(x + M_{nk}) - \left(\int_{|x|<1} x \, dF_{nk}(x + M_{nk}) \right)^2 \right\} \to 0$$

....

(1) PETROV [Consultar para su demostración].

En el siguiente resultado se seguiran enunciando las condiciones que debe cumplir una sucesión de variables aleatorias para que pertenezca a la Ley Débil de los Grandes -- Números, la variación de este resultado es que en este resultado se involucra uno de los conceptos de convergencia de variables aleatorias.

TEOREMA 3.3.1

La sucesión $\{Xnk\}$ pertenece la Ley Débil de los Grandes Números si y solo si :

3.3.D .... $\sum_k \int_{|x|\geq 1} dF_{nk}(x + M_{nk}) \to 0$

3.3.E .... $\sum_k \int_{|x|<1} x^2\, dF_{nk}(x - M_{nk}) \to 0$

si las condiciones 3.3.D y 3.3.E se cunplen, entonces:

$$\sum_k X_{nk} - b_n \xrightarrow{P} 0$$

y las constantes b_n satisfacen la ecuación (que cumplen todas las constantes admisibles):

$$b_n = \sum_k \left(M_{nk} + \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x + M_{nk}) \right) + O(1)$$

donde τ es un número positivo arbitrario.

DEMOSTRACION

Si tenemos 3.3.B y 3.3.C. obtenemos a 3.3.D y 3.3.E

Denotamos por I a cualquier de los siguientes intervalos - (-1, 0) y (0, 1) en el cual $\int_I x\,dF_{nk}(x+\mu_{nk})$ tiene el valor absoluto de esta integral.

(I independiente del valor de n y k). Entonces tenemos:

$$\sum_k \left(\int_{|x|<1} x\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \right)^2 \leq \sum_k \left(\int_I x\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \right) \leq$$
$$\sum_k \int_I x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \int_I dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \leq \sum_k \int_{|x|<1} x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk})$$
$$\int_I dF_{nk}(x+\mu_{nk})$$

La definición de mediana implica:

$$\int_I dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \leq \frac{1}{2}$$

También

$$\sum_k \left(\int_{|x|<1} x\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \right)^2 \leq \frac{1}{2} \sum_k \int_{|x|<1} x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \leq$$
$$\sum_k \left\{ \int_{|x|<1} x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) - \left(\int_{|x|<1} x\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \right)^2 \right\}$$

por lo tanto 3.3.C implica 3.3.E. Ahora tenemos que probar que 3.3.E y 3.3.D implican 3.3.C y 3.3.B

Primero 3.3.E implica 3.3.C

$$0 \leq \int_{|x|<1} x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) - \left(\int_{|x|<1} x\,dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \right)^2 \leq \int_{|x|<1} x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk})$$

Si 3.3.D y 3.3.E se tiene entonces 3.3.B se cumple y para todo $\varepsilon \geq 1$

$$\sum_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x+\mu_{nk}) = \sum_k \left| \int_{\varepsilon\leq|x|<1} + \int_{|x|\geq 1} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon\leq|x|<1} x^2\,dF_{nk}(x+\mu_{nk})$$
$$+ \sum_k \int_{|x|\geq 1} dF_{nk}(x+\mu_{nk}) \to 0 \qquad \square$$

A continuación utilizaremos el siguiente lema que nos da una visión para formular el teorema 3.3.2

LEMA 3.3.3

Sea X una variable aleatoria y b una constante positiva.

Definimos : $Z = \begin{cases} X, & \text{si } |x| < b \\ 0, & \text{si } |x| \geq b \end{cases}$

entonces $\frac{E(Z^2)}{2b^2} + \frac{1}{2} P(|x| \geq b) \leq E\left\{\frac{x^2}{x^2+b^2}\right\} \leq \frac{E(Z^2)}{b^2} + P(|x| \geq b)$

DEMOSTRACION

Sea F(x) la función de distribución de X. Entonces

$$E\left(\frac{X^2}{X^2+b^2}\right) = \int_{|x|<b} \frac{x^2}{x^2+b^2}\, dF(x) + \int_{|x|\geq b} \frac{x^2}{x^2+b^2}\, dF(x) \leq \frac{1}{b^2} \int_{|x|<b} x^2 dF(x) + \int_{|x|\geq b} dF(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+b^2}\, dF(x) \geq \frac{1}{2} \int_{|x|\geq b} dF(x) + \frac{1}{2b^2} \int_{|x|<b} x^2\, dF(x)$$

$\square$

Con este lema formularemos el siguiente teorema que no será demostrado. (1)

TEOREMA 3.3.2

La sucesión de variables aleatorias $\{X_{nk}\}$ pertenece a la Ley Débil de los Grandes Números si y solo si

(1) PETROV

3.3.F ..... $\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + M_{nk}) \to 0$

De hecho 3.3.D y 3.3.E son equivalentes a 3.3.F

Durante la discusión del siguiente resultado se presentará la relación entre el concepto de funciones de distribución infinitesimales con la convergencia en probabilidad. (1)

TEOREMA 3.3.3

Tendremos $\sum_k X_{nk} \xrightarrow{P} 0$

y la sucesión $\{X_{nk}\}$ cumplirá con la condición de infinitesimales si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ y alguna $\tau > 0$

3.3.G ..... $\sum_k \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{nk}(x) \to 0$

3.3.H ..... $\sum_k \left\{ \int_{|x|<\tau} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to 0$

3.3.I ..... $\sum_k \int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) \to 0$

Con este teorema concluimos esta sección donde se mostraron algunos resultados acerca de las condiciones que deben de cumplir las sucesiones de variables aleatorias para que satisfagan la condición de la Ley Débil de los Grandes Números, además algunos casos se enuncian resultados de la convergencia de sumas de variables aleatorias;

(1) PETROV

que satisfagan la condición de la Ley Débil de los Grandes Nú
meros, además algunos casos se enuncian resultados de la -
convergencia de sumas de variables aleatorias.

LEY FUERTE DE LOS GRANDES NUMEROS

SECCION IV

En esta sección analizaremos algunos casos de convergencia de sumas de variables aleatorias, este análisis se hará desde el punto de vista de las variables aleatorias que cumplan con la Ley Fuerte de los Grandes Números, así como las distintas condiciones que deben de cumplir estas sucesiones para que satisfagan dicha ley.

Un concepto que necesitaremos para poder definir a las sucesiones de variables aleatorias que cumplan con la Ley Fuerte de los Grandes Números es el concepto de sucesiones Fuertemente Estables ya que este concepto nos servirá incluso para enunciar algunos resultados importantes.

DEFINICION 3.4.1

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias. Decimos que la sucesión $\{X_n\}$ es FUERTEMENTE ESTABLE si existe una sucesión de constantes $\{b_n\}$ tal que:

3.4.A .... $X_n - b_n \to 0$ casi seguramente.

Podemos ver que si tenemos 3.4.A y existe otra sucesión de constantes $\{b'_n\}$ tal que $b_n - b'_n \to 0$, entonces $X_n - b'_n \to 0$ casi seguramente.

Por otra parte afirmamos que si una sucesión de variables aleatorias es fuertemente Estable entonces:

3.4.B .... $b_n = M(X_n) + O(1)$

y

3.4.C .... $X_n - M(X_n) \to 0$ casi seguramente

La justificación de esta afirmación es que partiendo de 3.4.A implica que para todo $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - b_n| < \varepsilon) \to 1$ y que para una $n \geq n_0$ con $n, n_0 \in \mathbb{N}$, $P(|X_n - b_n| < \varepsilon) > 1/2$ entonces esto implica que a partir de una $n > n_0$ definimos b_n que cumple con la expresión 3.4.B y esta a su vez implica 3.4.C

La siguiente definición dará cuales condiciones debe cumplir una sucesión de variables aleatorias para que satisfagan la Ley Fuerte de los Grandes Números.

DEFINICION 3.4.2

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y definimos a: $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Supongamos que $a_n \uparrow \infty$. Decimos que la sucesión $\{X_n\}$ pertenece a la Ley Fuerte de los Grandes Números con la sucesión de constantes normalizada $\{a_n\}$ si la sucesión $\{S_n/a_n\}$ es fuertemente Estable .

El estudio de esta ley también se puede desarrollar sobre las condiciones siguientes:

$$\frac{S_n}{a_n} - M\left(\frac{S_n}{a_n}\right) \to 0 \quad \text{casi seguramente}$$

$$\frac{S_n - M(S_n)}{a_n} \to 0 \quad \text{casi seguramente}$$

Ya que bajo estas condiciones la definición de la Ley Fuerte de los Grandes Números se cumple.

DEFINICION 3.4.3

Supongamos que la sucesión de constantes $a_n \uparrow \infty$ y que existe una subsucesión a_{n_k} y constantes $c_1 > 1, c_2$ tales que para todo k suficientemente grande:

$$c_1 \leq a_{n_{k+1}} / a_{n_k} \leq c_2$$

(Esta condición se cumple para cada $c_1 > 1$ cuando $a_n = n$ y en el caso más general cuando $a_{n+1}/a_n \to 1$). Definimos a $S_{n_0} = 0$, $T_k = \frac{1}{a_{n_k}}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}})$

El primer teorema que enunciaremos es un resultado -- muy interante ya que nos da algunas alternativas para que una sucesión de variables aleatorias cumplan con las condiciones de la Ley Fuerte de los Grandes Números y sobre las sucesiones Fuertemente Estables.

TEOREMA 3.4.1

La relación:

3.4.D .... $\frac{1}{a_n}(S_n - M(S_n)) \to 0$ casi seguramente

es equivalente a cualquiera de las siguientes:

3.4.E .... $T_k - M(T_k) \to$ casi seguramente

cuando $k \to \infty$. Y para todo $\varepsilon > 0$

3.4.F .... $\sum_{k=1}^{\infty} P(|T_k - M(T_k)| \geq \varepsilon) < \infty$

DEMOSTRACION

Solo necesitamos mostrar la equivalencia de 3.4.D. y 3.4.E ya que la equivalencia de 3.4.E y 3.4.F se siguen de los lemas de Borel-Cantelli y el lema 1.3.1 del capítulo I y de la definición de T_k. Para probar la equivalencia de 3.4.D y 3.4.E en terminos del lema 1.3.1 del primer capítulo tenemos: Si $S_n/a_n \to$ casi seguramente entonces:

$$T_k = \frac{S_{n_k}}{a_{n_k}} - \frac{a_{n_{k-1}}}{a_{n_k}} \cdot \frac{S_{n_{k-1}}}{a_{n_k}} \to 0$$

casi seguramente cuando $k \to \infty$.

Supongamos que $T_k \to 0$ casi seguramente cuando $k \to \infty$. Por las propiedades de la subsucesión $\{a_{n_k}\}$ implica que

$$\sum_{i=1}^{k} a_{n_k} \leq \left(1+\frac{1}{c_1}+\ldots+\frac{1}{c_1^{k-1}}\right)a_{n_k} \leq \frac{a_{n_k}}{1-\frac{1}{c_1}}$$

y por el lema A.9 tenemos que:

$$\frac{S_{n_k}}{a_{n_k}} = \frac{1}{a_{n_k}}\sum_{i=1}^{k} a_{n_i}T_i \to 0 \quad \text{casi seguramente.}$$

y definimos $U_k = \sup_{n_{k-1}<n\leq n_k} \dfrac{|S_n - S_{n_{k-1}}|}{a_{n_k}}$

usando el teorema A.10 del anexo encontraremos que

$$\sum_k P(|U_k| \geq \varepsilon) \leq 2\sum_k P(|T_k| \geq \varepsilon) < \infty$$

es más $U_n \to 0$ casi seguramente (por los lemas 1.4.1 y 1.8.1)

Si $n_{k-1} < n \leq n_k$ entonces

$$\frac{|S_n|}{a_n} \leq \frac{1}{a_n}|S_n - S_{n_{k-1}}| + \frac{1}{a_n}|S_{n_{k-1}}| \leq \frac{a_{n_k}}{a_n}U_k + \frac{1}{a_{n_{k-1}}}|S_{n_{k-1}}| \to 0$$

casi seguramente cuando $k \to \infty$. $\square$

Los siguientes resultados de esta sección seran dados sin su respectiva demostración(1), en el anterior teorema se mostro algunas equivalencias en cuanto a la LEY FUERTE DE LOS GRANDES NUMEROS, ahora en el siguiente resultado se estableceran condiciones más particulares para que una sucesión de variables aleatorias cumplan con las condiciones de esta Ley.

TEOREMA 3.4.2

Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, $\{g_n(x)\}$ una sucesión de funciones positivas y no-de-

---

(1) PETROV (para consultar)

crecientes en el intervalo $x > 0$, $\{a_n\}$ una sucesión de constantes positivas. Una u otra de las siguientes condiciones se cumplen:

a) $x/g_n(x)$ no decrece en el intervalo $x > 0$

b) $x/g_n(x)$, $\frac{g_n(x)}{x^2}$ no crece en el intervalo $x > 0$, y además $a_n \uparrow \infty$

Si: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(g_n(x))}{g_n(a_n)} < \infty$$

entonces $S_n/a_n \to 0$ casi seguramente.

El siguiente resultado es un caso particular del anterior ya que specifica que tipo de función es $g(x)$ y tiene las mismas condiciones.

TEOREMA 3.4.3

Sean $\{x_n\}$, $\{g_n(x)\}$ y $\{a_n\}$ sucesiones que cumplen las condiciones del teorema anterior, donde para todo n $g_n(x) = g(x)$ y definimos a $g(x) = |x|^p$, $p > 0$, si $a_n \uparrow \infty$ y para alguna p tal que $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|x|^p)}{a_n^p} < \infty$$

Entonces $S_n/a_n \to 0$ casi seguramente.

El resultado que enunciaremos es mas general porque involucra sucesiones Fuertemente Estables, a la esperanza matemática y la condición que pide es que la suma de las varianzas ente una constante converja.

TEOREMA 3.4.4

Si $a_n \uparrow \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(x)}{a_n^2} < \infty$ entonces

$$\frac{S_n - E(S_n)}{a_n} \to 0$$ casi seguramente .

El próximo resultado es interesante ya que involucra a la esperanza y en cierta forma a esta misma al cuadro y - sus respectivas convergencias y estos resultados se desarrollarán en la siguiente sección.

TEOREMA 3.4.5

Sea $\{X_n\}$ una secesión de variables aleatorias independientes y $\{a_n\}$ una sucesión de constantes positivas -- tal que $a_n \uparrow \infty$.

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq a_n) < \infty \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \int_{|x|<a_n} x^2 \, dV_n(x) < \infty$$

donde $V_n(x)$ es la función de distribución de X_n. Además si:

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<a_n} x \, dV_k(x) \to 0$$

entonces $S_n/a_n \to 0$ casi seguramente .

El resultado siguiente involucra una sucesión de variables aleatorias que tienen una función de distribución común y una sucesión de constantes que crece al

TEOREMA 3.4.6

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias que -- tienen la misma distribución, $\{a_n\}$ una sucesión de números - positivos, $a_n \uparrow \infty$. Suponga que

3.4.F .... $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq a_n) < \infty$

3.4.G .... $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} = O\left(\frac{n}{a_n^2}\right)$

y además

3.4.H .... X_1 se distribuye simétricamente

o

3.4.I .... $\frac{a_k}{a_n} \leq C \frac{k}{n}$ para todo $k \geq n$ y

$E(X_1) = 0$

entonces

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{casi seguramente.}$$

DEMOSTRACION

Sea $V(x) = P(X_1 < x)$ y

$$Z_n = \begin{cases} 1, & \text{si } |X_n| < a_n \\ 0, & \text{si } |X_n| \geq a_n \end{cases}$$

y $a_0 = 0$. Tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{Z_n^2}{a_n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{a_n^2} \int_{a_{k-1} \leq |x| < a_k} x^2 \, dV(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1} \leq |x| < a_k} x^2 \, dV(x) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$$

por 3.4.G tenemos las siguientes desigualdades

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{Z_n^2}{a_n^2}\right) \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a_k^2} \int_{a_{k-1} \leq |x| < a_k} x^2 \, dV(x) \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} k P(a_{k-1} \leq |X_1| \leq a_k) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} P(|X_1| \geq a_k)$$

y esta serie converge ya que por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq a_n) < \infty$ e implica que: $\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{Z_n^2}{a_n^2}\right) < \infty$

Para completar la demostración tenemos que probar que

3.4.J .... $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} E(Z_k) \to 0$

la condición 3.4.H implica la condición 3.4.J.

Supongamos que se cumple la condición 3.4.J entonces:

$$\frac{1}{a_n} \left| \sum_{k=1}^{n} E(Z_k) \right| \leq \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{|x| < a_k} x \, dV(x) \right| \leq \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k}^{\infty} \int_{a_m \leq |x| < a_{m+1}} |x| \, dV(x) =$$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \int_{a_m \leq |x| < a_{m+1}} |x| \, dV(x) + \frac{1}{a_n} \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_m \leq |x| < a_{m+1}} |x| \, dV(x) \leq T_1 + T_2$$

donde $T_1 = \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^{n} m \, a_{m+1} P(a_m \leq |Z_1| < a_{m+1})$

$T_2 = \frac{1}{a_n} \sum_{m=n+1}^{\infty} n \, a_{m+1} P(a_m \leq |Z_1| < a_{m+1})$

y 3.4.I Implica que $a_{n+1}/a_n < C$ entonces

3.4.K .... $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) P(a_m \leq |Z_1| < a_{m+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} P(|X_1| \geq a_m) < \infty$

usando el lema A.1 del Anexo concluimos que $T_1 \to 0$.

Entonces por 3.4.I

$$T_2 \leq C \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)\, P(a_m \leq |X_1| < a_{m+1})$$

de esto y de 3.4.K vemos que $T_2 \to 0$ $\square$

El próximo resultado nos da una condición más sencilla sobre sucesiones de variables aleatorias que cumplen con las condiciones de la Ley Fuerte de los Grandes Números solo incluyéndole algunas reestricciones a dicha sucesión. (1)

TEOREMA 3.4.7

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes que tienen una distribución común y además está distribución es simétrica y a_n una sucesión de números positivos que satisfacen 3.4.G y tales que $a_n \uparrow \infty$. Entonces $S_n/a_n \to 0$ casi seguramente si y solo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq a_n) < \infty$$

El próximo resultado involucra también sucesiones de variables aleatorias fuertemente estables pero la suma de esta sucesión de variables aleatorias converge hacia un número real arbitrario. (1)

TEOREMA 3.4.8

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con una función de distribución común, entonces

---

(1) PETROV (consultar para su demostración)

existirá una constante b tal que

3.4.L .... $\frac{S_n}{n} \to b$ casi seguramente

si y solo si

3.4.M .... $E(|X_1|) < \infty$

Si 3.4.M se cumple entonces 3.4.L se cumple con $b = E(X_1)$.

DEMOSTRACION

===>) Para probar 3.4.M para $\frac{1}{n}(S_n - E(S_n)) \to 0$ casi seguramente se sigue del teorema 3.4.6 de hecho tenemos que: $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1 - E(X_1)| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(m \leq |X_1 - E(X_1)| < m+1) = \sum_{m=1}^{\infty} m P(m \leq |X_1 - E(X_1)| < m+1) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{m \leq |x| < m+1} |x| \, dF(x) = E(|X_1 - E(X_1)|)$

Donde $F(x)$ es la función de distribución de $(X_1 - E(X_1))$.

$\Longleftarrow$) Por el lema A.12 y de 3.4.L tenemos:

3.4.N ..... $$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1-b|\geq n)<\infty$$

si $E(X_1)=\infty$ entonces

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1-b|\geq n)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(n-1\leq |X_1-b|<n)\geq E(|X_1-b|)=\infty$$

lo cual contradice 3.4.N por lo tanto $E(|X_1|)<\infty$. $\square$

$\Leftarrow$) Por el lema A.12 y de 3.4.L tenemos:

3.4.N .... $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1 - b| \geq n) < \infty$

si $E(X_1) = \infty$ entonces

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1 - b| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(n-1 \leq |X_1 - b| < n) \geq E(|X_1 - b|) = \infty$$

lo cual contradice 3.4.N por lo tanto $E(|X_1|) < \infty$. $\square$

SECCION V

TEOREMA DE LIMITE CENTRAL

En esta sección se discutirá una de las partes más importantes de la Teoría de Probabilidad, que es el Teorema de Límite Central. El análisis de este resultado se hará por medio de sumas de variables aleatorias que satisfacen la condición de infinitesimales y además que convergen a una distribución límite.

El objetivo de esta sección es presentar la importancia del resultado antes mencionado con toda la herramienta ya desarrollada en los anteriores capítulos y secciones y muy especialmente desde el punto de vista de funciones de distribución infinitamente divisibles.

Un concepto importante que se trató en la convergencia débil de sumas de variables aleatorias como una condición desarrollada en el trabajo, es el concepto de infinitesimales. En base a esto, tenemos la siguiente proposición :

PROPOSICION 3.5.1

Sea $\{X_{nk}\}$ una sucesión de series de variables aleatorias que satisfacen la condición de infinitesimales y sea $F_{nk}(x)$ la función de distribución de la variable aleatoria X_{nk}, para que converja debilmente la distribución de la suma $\sum_k X_{nk}$ a la función de distribución normal con parámetros (a, σ) es necesario y suficiente que se cumplan las tres siguientes condiciones :

3.5.A ..... $\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$ para todo $\varepsilon > 0$

3.5.B ..... $\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} =$ $\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \inf \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} = \sigma^2$

3.5.C ..... $\sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \to a$ para todo $\varepsilon > 0$

Por la conclusión de esta proposición empezamos a usar formalmente el concepto de media y varianza que es una herramienta matemática importante para el desarrollo de esta sección.

TEOREMA 3.5.1

Sean $\{X_{nk}\ ;\ k = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de series de variables aleatorias independientes entre si,

$F_{nk}(x)$ la función de distribución de la variable aleatoria X_{nk}. La condición de infinitesimales se cumplirá y la distribución de la suma convergerá a la distribución normal con parámetros (a, σ^2) si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ fijo las siguientes condiciones se cumplen :

3.5.D ..... $\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$

3.5.E ..... $\sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to \sigma^2$

3.5.F ..... $\sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \to a$

DEMOSTRACION

=>) Para esto, es suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ si 3.5.A se cumple, entonces 2.5.E . Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo.

Para todo $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ tenemos :

$$\sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} =$$

$$\sum_k \left\{ \int_{|x|<\delta} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\delta} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} +$$

$$\sum_k \left\{ \int_{\delta \leq |x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{\delta \leq |x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 - 2 \int_{|x|<\delta} x \cdot \int_{\delta \leq |x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right\}$$

como $|x| < \varepsilon \Rightarrow x^2 < \varepsilon^2$ y como $\sigma^2 > 0$

$$0 \le \sum_k \left\{ \int_{\delta\le|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{\delta\le|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \le \varepsilon^2 \sum_k \int_{\delta\le|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \le \varepsilon^2 \sum_k P(|X_{nk}| \ge \delta) \to 0$$

y por condición 3.5.A se cumple

$$\sum_k \left| \int_{|x|<\delta} x\, dF_{nk}(x) \right| \cdot \left| \int_{\delta\le|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right| \le \delta^2 \varepsilon \sum_k P(|X_{nk}| \ge \delta) \to 0$$

por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{\delta\le|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_k \left\{ \int_{|x|<\delta} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\delta} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}.$$

Para el límite inferior es análoga la prueba, entonces estos límites son independientes de ε, como una consecuencia de 3.5.B el límite :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \left\{ \int_{|x|<\delta} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}$$

existe y es igual a σ^2.

$\Leftarrow$) Si las condiciones 3.5.D, 3.5.E y 3.5.F se cumplen, entonces las condiciones 3.5.A, 3.5.B y 3.5.D se cumplen, por lo tanto solo tenemos que probar la condición de infinitesimales, pero esto se sigue de 3.5.D, ya que

$$\sup_{k} P\left(|X_{nk}| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{k} P\left(|X_{nk}| \geq \varepsilon\right) \to 0 \qquad \square$$

El teorema 3.5.1 es una generalización del teorema del Límite Central para sumas de variables aleatorias independientes, pero, para que converjan a la función de distribución Normal, se establecieron condiciones que debe cumplir la distribución de la suma de dichas variables aleatorias, que están acotadas por números crecientes de variables aleatorias que convergen a una función de distribución normal.

El siguiente teorema incluye una restricción un poco más fuerte a saber :

TEOREMA 3.5.2

Sean $\{X_{nk}\}$ una sucesión de series de variables aleatorias independientes entre sí, $F_{nk}(x)$ la función de distribución de la variable aleatoria X_{nk} .

La condición de infinitesimales se cumplirá y la distribución de la suma $\sum_{k} X_{nk}$ convergerá debilmente a la distribución Normal si y solo sí para todo $\varepsilon > 0$ y algún $\tau > 0$

las siguientes condiciones se cumplen :

3.5.D' .... $\sum_{k} P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$

3.5.E' .... $\sum_{k} \left\{ \int_{|x|<\tau} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to \sigma^2$

3.5.F' .... $\sum_{k} \int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) \to a$

DEMOSTRACION

Para probar este teorema solo necesitamos probar que si las condiciones 3.5.D', 3.5.E' y 3.5.F' se cumplen para todo $\varepsilon > 0$ y algún $\tau > 0$ entonces las condiciones 3.5.D y 3.5.F se cumplirán para todo $\varepsilon > 0$.

Para esto supongamos $0 < \varepsilon < \tau$; si

$$D_{nk}(\tau) = \sum_{k} \left\{ \int_{|x|<\tau} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}$$

obtenemos :

$$| D_{nk}(\tau) - D_{nk}(\varepsilon) | \leq \sum_{k} \left\{ \int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}$$

$$\leq \sum_k \int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} x^2 \, dF_{nk}(x) + 3\tau \sum_k \left| \int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} x \, dF_{nk}(x) \right|$$

y como $|x| < \tau$ *implica que* $x^2 < \tau^2$

$$\leq 4\tau^2 \sum_k \int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} dF_{nk}(x) \to 0$$ *ya que la suma* $\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$

Si $0 < \tau < \varepsilon$ *esto se cumple en forma análoga, es decir*

$$\left| \sum_k \int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) - \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right| \leq \sum_k \int_{\min(\tau,\varepsilon) \leq |x| < \max(\tau,\varepsilon)} |x| \, dF_{nk}(x) \to 0$$

$\square$

El siguiente resultado es una generalización de los dos anteriores, ya que solo pide una condición para la convergencia de la suma de variables aleatorias a una distribución -- normal.

TEOREMA 3.5.3

Sea $\{X_{nk}\}$ *una sucesión de series de variables aleatorias independientes entre sí. La suma* $\sum X_{nk}$ *converge debilmente a alguna distribución no-degenerada en el sentido de función límite. Esta función será Normal y la condición de infinitesimales se cumplirá si y solo sí para todo* $\varepsilon > 0$

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$$

DEMOSTRACION

Por el teorema A.13 del anexo, implica que la función - espectral de Levy $L(x)$ nunca es cero para todo $x=0$, esto implica que el límite de la suma no es una distribución degenerada, por lo tanto debe ser una distribución Normal. $\square$

En los siguientes resultados se darán las condiciones - para la convergencia de sumas de variables aleatorias a la - distribución Normal estandarizada.

TEOREMA 3.5.4

Sean $\{X_{nk}\}$ una sucesión de series de variables aleatorias independientes entre sí, $F_{nk}(x)$ la función de distribución de variables aleatorias X_{nk}. Entonces la condición - de infinitesimales se cumple y existe una sucesión de constantes $\{b_n\}$ tal que la distribución de $\sum_k X_{nk} - b_n$ converge a la distribución Normal con parámetros (0, 1) si y solo si las siguientes condiciones se cumplen para todo $\varepsilon > 0$

3.5.G ..... $\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$

y alguna $\tau > 0$

3.5.H ..... $\sum_{k} \left\{ \int_{|x|<\tau} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\tau} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to 1$

si estas condiciones se cumplen, entonces para H > 0

3.5.I ..... $b_n = \sum_{k} \int_{|x|<H} x \, dF_{nk}(x) + O(1)$

(Para la demostración de este teorema consultar PETROV)

Como se vió anteriormente, la distribución normal estandarizada, tiene la forma

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dx$$

TEOREMA 3.5.5

Sean $\{ X_{nk} ;\ n = 1, 2, \dots \}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, $V_n(x)$ la función de distribución de la variable aleatoria X_{nk} y a_n una sucesión de constantes reales positivas, con el objeto de que para todo $\varepsilon > 0$

3.5.J ..... $\sup_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon a_n) \to 0$ y

3.5.K ..... $\sup_k \left| \left[P\left(\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k < x\right) - \phi(x) \right] \right| \to 0$

<u>es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ fijo</u>.

3.5.L ..... $\sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geq \varepsilon a_n} dV_k(x) \to 0$

3.5.M ..... $\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<a_n} x^2 dV_k(x) - \left(\int_{|x|<a_n} x\, dV_k(x) \right)^2 \right\} \to 1$ y

3.5.N ..... $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<a_n} x\, dV_k(x) \to 0$

Este teorema se sigue de los teoremas 3.5.1 y 3.5.2. Haciendo $X_{nk} = \frac{1}{a_n} X_k$ y $F_{nk}(x) = V_k(a_n X)$; $K = 1, \ldots,$ la condición 3.5.K es equivalente a la convergencia débil de la distribución $\frac{1}{a_n} X_k$ a $\phi(x)$ porque $\phi(x)$ es contínua; y este resultado es consecuencia del teorema 3.5.2.

Las condiciones 3.5.M y 3.5.N pueden ser cambiadas por $|x| < \varepsilon a_n$ sin pérdida de generalidad.

El siguiente teorema nos da la condición conocida como de Lindeberg, que también es importante dentro de la Teoría de Probabilidad.

TEOREMA 3.5.6

Sea X_n una sucesión de variables aleatorias independientes donde al menos una tiene una distribución no degenerada. Sea X_n una sucesión con varianza finita ($n=1, 2, \ldots$) definimos :

$$V_n(x) = P(X_n \leq x) \; ; \quad \alpha_n = E(X_n) \; ; \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

$$F_n(x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \alpha_k) < x \right)$$

con el objeto de que :

3.5.R ..... $\sup_{1 \leq k \leq n} \dfrac{\sigma_k^2}{\beta_n} \to 0$

3.5.S ..... $\sup_{x} \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \to 0$

es necesario y suficiente que la siguiente condición se cumpla para todo $\varepsilon > 0$ fijo

3.5.T ..... $\dfrac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\alpha_k| \geq \varepsilon \sqrt{\beta_n}} (x - \alpha_k)^2 \, dV_k(x) \to 0$

DEMOSTRACION

Supongamos que $\alpha_n = 0$ para toda n. Por otra parte si el teorema se prueba para un caso particular, entonces se probará para el caso general con valores arbitrarios de la media, introduciendo las variables aleatorias $Y_n = X_n - \alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, las cuales tienen las propiedades $E[Y_n] = 0$ y $Var[Y_n] = \sigma^2$

$\Rightarrow$) Supongamos que las condiciones 3.5.R y 3.5.S se cumplen, entonces :

$$\sup_{1 \le k \le n} P(|X_k| \geq \varepsilon a_n) \to 0 \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0$$

y

$$\sup_{K} \left| P\left(\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k < x\right) - \Phi(x) \right| \to 0$$

para $a_n = \sqrt{\beta_n}$ ya que

$$\sup_{1 \le k \le n} P(|Z_k| \geq \varepsilon \sqrt{\beta_n}) \le \sup_{1 \le k \le n} \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 \beta_n}$$

por la desigualdad de Chebyshev y por el teorema 3.5.5, tenemos para todo $\varepsilon > 0$ fijo

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 \, dV_k(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x \, dV_k(x) \right)^2 \right\} \longrightarrow 1$$

y

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x|\geq\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 \, dV_k(x) + \left(\int_{|x|<\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x \, dV_k(x) \right)^2 \right\} \longrightarrow 0$$

entonces la condición de Lindeberg se tiene.

$\Leftarrow$) Por otra parte, vamos a probar que la condición de Lindeberg implica las condiciones 3.5.R y 3.5.S del teorema, para esto definimos

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\geq\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 \, dV_k(x)$$

a $\Lambda_n(\varepsilon)$ lo llamamos la razón de Lindeberg.

Si $1 \leq k \leq n$, entonces

$$\sigma_k^2 = \int_{|x|<\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 \, dV_k(x) + \int_{|x|\geq\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 \, dV_k(x) \leq \varepsilon^2 \beta_n + \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\geq\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 \, dV_k(x)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\beta_n} \sup_{1\le k\le n} \sigma_k^2 \le \varepsilon^2 + \Lambda_n(\varepsilon)$$

para toda n suficientemente grande y para toda ε suficientemente pequeña; el lado derecho de la desigualdad lo podemos hacer tan pequeño como queramos de acuerdo a la condición de Lindeberg. Entonces 3.5.R se cumple.

Ahora tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon\sqrt{\beta_n}} dV_k(x) \le \frac{1}{\varepsilon^2\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon\sqrt{\beta_n}} x^2 dV_k(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\Lambda(\varepsilon) \to 0$$

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\sqrt{\beta_n}} x^2 dV_k(x) = \frac{1}{\beta_n}\left(\beta_n - \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\sqrt{\beta_n}} x^2 dV_k(x)\right)$$

$$= 1 - \Lambda_n(1) \to 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{|x|<\sqrt{\beta_n}} x\, dV_k(x) \right| = \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{|x|\ge\sqrt{\beta_n}} x\, dV_k(x) \right|$$

$$\le \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\sqrt{\beta_n}} x^2\, dV_k(x) = \Lambda_n(1) \to 0$$

con la condición del teorema A.14 del Anexo, se cumple para

$$a_n = \sqrt{\beta_n} \qquad \square$$

ANEXO

A continuación se enunciarán diferentes Teoremas y Lemas que nos sirven de apoyo para la demostración de algunos Teoremas de este trabajo. Todos estos se darán sin su demostración, consultar PETROV (1).

LEMA A.1

Si la sucesión de funciones características $\{\varphi_n(t)\}$ converge a la f.c $f(t)$ para cada t entonces la convergencia es uniforme en un intervalo finito t.

TEOREMA A.2

Sea $F(x)$, $F_1(x)$, ... las F. D. y sean $f(t)$, $f_1(t)$, ... sus correspondientes f.c. Si $F_n \to F$, entonces $f_n(t) \to f(t)$ para cada t en un intervalo finito.

LEMA A.3

Suponga que :

$$\psi_n(t) = i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x)$$

donde γ_n es una constante positiva, $G(x)$ es una función de variación acotada; $G_n(-\infty) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$. Si $\gamma_n \to \gamma$ y $G_n \rightrightarrows G$ entonces $\psi_n(t) \to \psi(t) = (\gamma, G)$. Si $\psi_n(t) \to \psi(t)$ donde $\psi(t)$ es una función continua en el punto $t=0$ entonces exste una constante positiva y una función acotada $G(x)$ tal que

$$\gamma_n \to \gamma, \quad G_n \rightrightarrows G \quad y \quad \psi = (\gamma, G).$$

TEOREMA A.4

Sea $g(x)$ una función real acotada. Sea $F(x)$, $F_1(x)$, ... funciones no decrecientes y acotadas, y sea $F_n \Rightarrow F$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x)$$

TEOREMA A.5

Sea $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ sucesiones de v.a. definidas en un espacio de probabilidad común. Si la sucesión $\{P(X_n < x)\}$ converge debilmente a la f.d. $F(x)$ y si $Y_n \xrightarrow{P} 0$, entonces la sucesión $\{P(X_n + Y_n < x)\}$ converge debilmente a $F(x)$.

TEOREMA A.6

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de reales en la cual $a_n > 0$. Sea la sucesión de F.D. $\{F_n(x)\}$ converge debilmente a la f.d. no degenerada $F(x)$ entonces se tienen las siguientes condiciones: (A) Si $F_n(a_n x + b_n) \to G(x)$, donde $G(x)$ es no-deg. F.D. entonces $G(x) = F(ax+b)$, $a_n \to a$ y $b_n \to b$. En particular si $F_n(a_n x + b_n) \to F(x)$ entonces $a_n \to 1$ y $b_n \to 0$.

(B) Si $a_n \to a$ y $b_n \to b \Rightarrow F_n(a_n x + b_n) \to F(ax+b)$.

TEOREMA A.7

Sea $\{\varphi_n(t)\}$ una sucesión de f.c., $\{F_n(x)\}$ la correspondiente sucesión de f.d.. Si $\varphi_n(t) \to \varphi$ para cada t y si φ es contínua en el punto $t=0$, existe una f.d. $F(x)$ tal que $F_n \to F$ para esta f.d.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

LEMA A.9

$Y_n - b_n \to 0$ c.s si y solo si $\tilde{Y}_n \to 0$ c.s. y $b_n - m(Y_n) \to 0$.

TEOREMA A.10

Sea $\{b_n\}$ y $\{x_n\}$ una sucesión de números tal que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \uparrow \infty, \quad x_n \to x, \quad |x| < \infty$$

entonces
$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to x$$

LEMA A.11

Suponga que las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y que $a_n \uparrow \infty$ entonces

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \to 0$$

LEMA A.12

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de v. a. independientes y sea una sucesión de reales positivos, si $S_n/a_n \to 0$ c. s.

y $a_{n-1}/a_n = O(1)$

entonces
$$\sum P(|x_n| \geq a_n) < \infty$$

TEOREMA A.13

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de series de v.a, independientes entre si que satisfacen la condición de infinitesimales. Con el objeto de que exista una sucesión de constantes $\{b_n\}$ tal que la distribución de las sumas $\sum_k X_{nk} - b_n$ converge debilmente a una f.d. infinitamente divisible F(x), es necesario y suficiente que las condiciones $\sum_k F_{nk}(x) \to L(x)$ para $x<0$

$\sum_k (F_{nk}(x)-1) \to L(x)$ para $x>0$

se cumplan para todo punto de continuidad de L(x)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\} = \sigma^2$$

aquí la función L(x) y la constante son definidos por la fórmula de Levy para la f.c. de F(x).

TEOREMA A.14

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v. a. independientes y $\{a_n\}$ una sucesión de reales positivos, si

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<a_n} x^2\,dV_k(x) \to 1\,,\quad \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{|x|<a_n} x\,dV_k(x)\right| \to 0$$

y la condición $\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq \varepsilon a_n} dV_k(x) \to 0$ para todo $\varepsilon>0$

se cumplen la relación $\sup_x \left| P\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k < x\right) - \Phi(x)\right| \to 0$

aquí $V_k(x)$ es la f. d. de X_k.

B I B L I O G R A F I A

(1) BAUTISTA J. R., *Cruzamientos de Trayectorias de un Proceso Estocástico a nivel fijo y otras Propiedades Relacionadas.*

(1) FELLER, *Introducción a la Teoría de Probabilidades Vol. I y II.*

(1) FERNANDEZ M, *Continuidad de un Proceso Estocástico.*

(1) GNEDENKO, *Theory of Probability.*

(2) GNEDENKO and KOLMOGOROV, *Sums of Independent Random Variables.*

(1) HARRIS, *Introduction to the Theory of Probability.*

(1) LOEVE, *Sums of Independent Random Variables.*

(1) MOOD, GRAYBILL and BOES, *Introduction to the Theory of Statistics.*

(1) PETROV, *Sums of Independent Random Variables.*