20
17

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPICOS MATEMATICOS EN EL ESTUDIO DE CARACTERISTICAS DE POBLACIONES

TESIS PROFESIONAL

MATEMATICO

Jorge Manuel Ochoa Ugalde

AGOSTO DE 1987.

TOPICOS MATEMATICOS EN EL ESTUDIO DE CARACTERISTICAS DE POBLACIONES

I N D I C E

PRESENTACION

En la Facultad de Ciencias desde hace tiempo, el avance y desarrollo en el estudio e investigación dentro del basto campo de la Demografía se han visto detenidos. En este trabajo no se pretende explicar o justificar las causas que han dado origen a esta situación, lo que se intenta es reactivar esa larga postura pasiva que se ha mantenido, presentando nuevas alternativas demográficas sujetas de estudio y de aplicación de modelos matemáticos, los cuales resultan ser más interesantes y quizá para alguien parezcan más sofisticados que los que regularmente se estudian.

El objetivo fundamental que se tiene es presentar a manera de divulgación, la revisión efectuada del material sobre los temas que se incluyen; dicho de otra manera, es dar a conocer una metodología para el estudio de características poblacionales que la mayoría de las veces pasan inadvertidas. Se presentan nuevas opciones, las cuales generalmente poseen un amplio entorno matemático formal que sería muy difícil de incluir totalmente para cada tópico en particular, además de que no es lo que se persigue.

Para alcanzar de manera completa el objetivo planteado, en la presentación de cada tema se indican las fuentes bibliográficas más importantes, así mismo se incluye en la bibliografía (que se encuentra al final del trabajo) una lista de artículos y libros que son de uso complementario para un mejor análisis y una mayor profundidad en todos los temas.

El trabajo se presenta en dos partes. La primera de ellas contiene varios resultados generales que pueden ser empleados en el análisis de diferentse características de la población, como lo son: La Teoría Estable, Fracción de Población Vieja, La Ecuación Característica y Formulaciones Matemáticas de la Ecuación Característica. En la segunda parte, en sí la parte más fuerte de la tesis, se encuentra la presentación de los temas que corresponden al estudio de las características de población que son sujetas de estudio, entre ellas: ¿Por qué hay más hombres que mujeres en las poblaciones modernas?, El Equivalente Estable, Edad al Matrimonio y Demografía de las Organizaciones, entre otros.

En total son seis diferentes grandes características de las poblaciones que se presentan para ser sujetas de estudio. Cabe resaltar lo siguiente: al hacer referencia a una población, no necesariamente hay que identificarla como aquella que ocupa un determinado espacio geográfico establecido políticamente; para el tipo de análisis que se lleva a cabo, una población puede ser el conjunto de personas que acuden a un centro deportivo, que trabajan en cierta empresa, estudian en una determinada institución, o cualquier otra característica que identifique con precisión a un conjunto de personas.

Finalmente, queda abierta la invitación a toda persona que se interese en los tópicos presentados, para llevar a cabo un trabajo de investigación que consistiría en la presentación más amplia y profunda del tema elegido, así como la aplicación del o los modelos matemáticos que intervengan en el desarrollo del estudio realizado.

AGOSTO DE 1987.

PRIMERA PARTE

CAPITULO 1

LA TEORIA ESTABLE

Supóngase que la oportunidad de sobrevivir del nacimiento a la edad x es l(x), la cual es una función que depende de la edad pero no del tiempo. Una población cerrada a la migración con B nacimientos distribuídos uniformemente en el año y sin cambio, contendrá Bl(x)dx individuos entre las edades x y x+dx en cualquier momento del tiempo, donde l(x) se obtiene a partir de suponer que l(0)=1.

Una población con estas características contendrá B_5L_x individuos entre las edades exactas x y x+5, donde $B_5L_x = B\int_0^5 l(x+t)dt$.

Esta teoría puede aplicarse a dos sexos en conjunto usando una función de supervivencia l(x) aplicable a cualquier combinación de hombres y mujeres, aunque si bien la práctica usual es considerar un solo sexo[1].

Una población estacionaria producida por este supuesto, de número anual de nacimientos y tabla de vida fijos para cada sexo, se puede generalizar suponiendo nacimientos que crecen de manera exponencial: Be^{rt}.

Considérese la parte femenina (o masculina) de una población cerrada a la migración, sujeta a una tabla de vida fija y con nacimientos creciendo exponencialmente, estas condiciones son suficientes para obtener una distribución estable por edad, en la cual los sobrevivientes y las muertes ocurridas en cada grupo de edades, así como la población total, se incrementan exponencialmente a la misma tasa.

Si la probabilidad de sobrevivir a la edad x es l(x) y los nacimientos al tiempo t son B_0e^{rt}, entonces para determinar el número de personas entre las edades x y x+dx, es necesario regresar en el tiempo de x a x+dx, cuando el número de nacimientos fué $B_0e^{r(t-x)}$. La fracción de estos nacimientos que sobrevive al tiempo t debe ser l(x), por lo tanto el número absoluto de personas de

1 Keyfitz, Nathan. 1977. Applied Mathematical Demography. 77–81.

edades x a x+dx al tiempo t es:

$$B_0 e^{r(t-x)} l(x)dx \tag{1.1}$$

Al considerar el rango de edades desde 0 hasta w se obtiene la población total al tiempo t P(t):

$$P(t) = B_0 \int_0^{\omega} e^{r(t-x)} l(x)dx \tag{1.2}$$

Considerando la relación de las personas de edades x a x+dx con respecto a la población total, se obtiene la proporción de población de esas edades con respecto a la total, c(x)dx:

$$c(x)dx = \frac{B_0 e^{r(t-x)} l(x)dx}{\int_0^{\omega} B_0 e^{r(t-x)} l(x)dx}$$

$$\Longrightarrow$$

$$c(x)dx = \frac{e^{-rx} l(x)dx}{\int_0^{\omega} e^{-rx} l(x)dx}$$

$$\Longrightarrow$$

$$c(x)dx = be^{-rx} l(x)dx \;, \tag{1.3}$$

donde $b = \dfrac{1}{\int_0^{\omega} e^{-rx} l(x)dx}$.

El argumento empleado descansa en el supuesto de que la tabla de vida permanece fija en el tiempo para toda x, que los nacimientos, y por tanto la población, crecen exponencialmente, lo cual equivale a suponer que las tasas de natalidad y mortalidad han permanecido constantes durante un largo periodo de tiempo en el pasado.

Debido a que c(x)dx representa la proporción de población de edades-x a x+dx, la suma de todas ellas, $\int_0^{\omega} c(x)dx$, es la unidad, por lo cual:

$$\int_0^{\omega} be^{-rx} l(x)dx = 1 \ . \tag{1.4}$$

Esta expresión es una ecuación en b, por lo tanto su valor se puede obtener a partir de ella (dado en (1.3) como definición):

$$b = \frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-rx} l(x)dx} \ . \tag{1.5}$$

Si en (1.3) x=0 se obtiene el radix c(0), dado que c(0)=b; si se desea se puede considerar c(0)=1. En este caso el argumento empleado se reemplaza por otro, el cual es determinar la población presente a edad x por cada nacimiento, por lo que la tasa de natalidad será:

$$\frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-rx} l(x)dx} \ . \tag{1.6}$$

UNA FORMA DISCRETA.

Aunque es más fácil pensar la distribución estable por edad en la versión continua, para su aplicación se requiere una forma discreta, es decir, se necesita trasladar c(x)dx a grupos quinquenales de edad, para de esta manera emplear la información poblacional que usualmente se tiene. Para esto se necesita hacer lo siguiente: integrar ambos lados de (1.5) de x a x+5, obteniéndose de esta manera ${}_5C_x$, donde ${}_5C_x = \int_0^5 c(x+t)dt$. Por lo que:

$${}_5C_x = b\int_0^5 e^{-r(x+t)} l(x+t)dt$$

$$\cong be^{-r(x+2.5)} \int_0^5 e^{-r(t-2.5)} l(x+t)dt \; . \qquad (1.7)$$

Esta última integral es muy cercana a $\int_0^5 l(x+t)dt$, la cual se encuentra tabulada en una tabla de vida como ${}_5L_x$, por tanto se puede considerar:

$$\int_0^5 l(x+t)dt \cong {}_5L_x \; . \qquad (1.8)$$

Usando esta última aproximación:

$${}_5C_x \cong be^{-r(x+2.5)} {}_5L_x \; . \qquad (1.9)$$

De esta manera se ha obtenido una expresión para $c(x)dx$ en una versión discreta ${}_5C_x$, en función de valores que se encuentran tabulados en una tabla de vida: ${}_5L_x$.

CAPITULO 2

EDAD MEDIA EN LA POBLACION ESTABLE

A partir de (1.3) se obtiene la edad promedio $\hat{x}$ de la población estable, dado que:

$$\hat{x} = \int_0^\omega xc(x)dx \tag{2.1}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\hat{x} = \frac{\int_0^\omega xe^{-rx}l(x)dx}{\int_0^\omega e^{-rx}l(x)dx} . \tag{2.2}$$

La expansión en series de e^{-rx} es:

$$1 - rx + \frac{r^2}{2!}x^2 - \frac{r^3}{3!}x^3 + \frac{r^4}{4!}x^4 - \ldots \tag{2.3}$$

Sustituyendo (2.3) en (2.2):

$$\hat{x} = \frac{\int_0^\omega x(1 - rx + \frac{r^2}{2!}x^2 - \frac{r^3}{3!}x^3 + \frac{r^4}{4!}x^4 - \ldots)l(x)dx}{\int_0^\omega (1 - rx + \frac{r^2}{2!}x^2 - \frac{r^3}{3!}x^3 + \frac{r^4}{4!}x^4 - \ldots)l(x)dx} \tag{2.4}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\hat{x} = \frac{\int_0^\omega (x - rx^2 + \frac{r^2}{2!}x^3 - \frac{r^3}{3!}x^4 + \frac{r^4}{4!}x^5 - \ldots)l(x)dx}{\int_0^\omega (1 - rx + \frac{r^2}{2!}x^2 - \frac{r^3}{3!}x^3 + \frac{r^4}{4!}x^4 - \ldots)l(x)dx} \tag{2.5}$$

Al integrar cada uno de los términos, tanto en el numerador como en el denominador de (2.5), se obtiene:

$$\hat{x} = \frac{L_1 - r\,L_2 + \frac{r^2}{2!}L_3 - \frac{r^3}{3!}L_4 + \ldots}{L_0 - r\,L_1 + \frac{r^2}{2!}L_2 - \frac{r^3}{3!}L_3 + \ldots} \tag{2.6}$$

donde $L_i = \int_0^{\omega} x^i l(x)dx$ es el numerador del i-ésimo momento alrededor del cero de- la población estacionaria de la tabla de vida.

Haciendo una división ordinaria en el lado derecho de (2.6) se tie- ne:

$$\ell = \frac{L_1}{L_0} - r\left(\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1^2}{L_0^2}\right) + \ldots \qquad (2.7)$$

lo cual se puede aproximar a:

$$\ell \cong \frac{L_1}{L_0} - \sigma^2 r \ , \qquad (2.8)$$

donde $\frac{L_1}{L_0}$ y σ^2 son, respectivamente, la media y la varianza de la distribución- por edad de la población estacionaria, donde ambos son necesariamente positivos.

Por lo tanto, ℓ es menor que $\frac{L_1}{L_o}$ cuando r es positivo, además de — que los términos siguientes son muy pequeños y pueden despreciarse.

Una serie infinita exacta para ℓ es:

$$\ell = \frac{L_1}{L_0} - {}^2r + \frac{k_3}{2!} r^2 - \frac{k_4}{4!} r^3 + \ldots \ , \qquad (2.9)$$

donde k_3 y k_4 son, respectivamente, el tercer y cuarto cumulante de la distribu- ción con densidad $\frac{l(x)}{L_0}$.

El tercer cumulante es igual al tercer momento alrededor de la me--- dia:

$$k_3 = \mu_3 = \int_{\alpha}^{\omega} (x - L_1/L_0)^3 \frac{l(x)}{L_0}\, dx \,, \tag{2.10}$$

y está asociado con asimetría.

El cuarto cumulante k_4 es igual al cuarto momento alrededor de la media menos tres veces el cuadrado de la varianza, y es una medida de la curtosis o picudez.

Despejando r de (2.8):

$$r \cong \frac{(L_1/L_0) - \bar{x}}{\sigma^2} \,, \tag{2.11}$$

donde (2.11) proporciona una aproximación a la tasa de crecimiento poblacional r, donde están dadas:

a) la edad media de la tabla de vida $\frac{L_1}{L_0}$;

b) la varianza de la distribución de la tabla de vida σ^2;

c) la edad media observada $\bar{x}$.

Cuando los parámetros k_3 (asimetría) y k_4 (curtosis) son conocidos se obtiene una mejor aproximación de r:

$$r^* \cong \frac{(L_1/L_0) - \bar{x}}{\sigma^2 - \frac{k_3 r}{2} + \frac{k_4 r^2}{6}} \,. \tag{2.12}$$

CAPITULO 3

FRACCION DE POBLACION VIEJA

Supóngase que se desea conocer, de la fracción de población considerada como vieja, aquella de 65 años y más, qué proporción de ella depende de la tasa de crecimiento, suponiendo que las tasas de mortalidad no cambian.

La fracción f(r) de la población de 65 años y más, está dada por:

$$f(r) = \frac{\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da}{\int_{0}^{\omega} e^{-ra} l(a)da} \; . \qquad (3.1)$$

Tomando logaritmos:

$$\ln(f(r)) = \ln(\; e^{-ra} l(a)da) - \ln(\; e^{-ra} l(a)da) \; . \qquad (3.2)$$

Diferenciando (3.2) de ambos lados, con respecto de r:

$$\frac{d}{dr}(\ln(f(r))) = \frac{d}{dr}(\ln(\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da)) - \frac{d}{dr}(\ln(\int_{0}^{\omega} e^{-ra} l(a)da)) \; . \qquad (3.3)$$

Se tiene que:

$$\frac{d}{dr}(\ln(\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da)) = \frac{1}{\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da} \frac{d}{dr}\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da$$

$$= \frac{1}{\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da} \int_{65}^{\omega} \frac{d}{dr}(e^{-ra} l(a)da \; . \qquad (3.4)$$

Ahora bien:

$$\frac{d}{dr}(e^{-ra} l(a)da)) = -ae^{-ra} l(a) \; . \qquad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.4) se llega a:

$$-\frac{d}{dr}(\ln(\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da)) = \frac{\int_{65}^{\omega} a e^{-ra} l(a)da}{\int_{65}^{\omega} e^{-ra} l(a)da} . \tag{3.6}$$

De manera análoga:

$$-\frac{d}{dr}(\ln(\int_{0}^{\omega} e^{-ra} l(a)da)) = \frac{\int_{0}^{\omega} a e^{-ra} l(a)da}{\int_{0}^{\omega} e^{-ra} l(a)da} . \tag{3.7}$$

El lado derecho de (3.6) y de (3.7), de acuerdo a (2.2), son respectivamente la edad media k_1 de la población mayor de 65 años y la edad media K_1 - de la población total.

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.3) y usando el hecho de que

$$\frac{d}{dr}(\ln(f(r))) = \frac{1}{f(r)} \frac{d}{dr} f(r)$$

se llega a que:

$$\frac{d}{dr}(\ln(f(r))) = K_1 - k_1 . \tag{3.8}$$

Integrando (3.8) y tomando exponenciales:

$$f(r) \cong f_0 e^{(K_1 - k_1)r} , \tag{3.9}$$

donde f_0 es la proporción de 65 años y más de la tabla de vida.

El resultado(3.9) se obtiene a partir del término en r de la diferencia de dos funciones generadoras de cumulantes, una para la distribución de - todas las edades y la otra para las de 65 años y más:

$$\ln(f(r) = \ln(f_0) + (-rk_1 + \frac{r^2}{2!} k_2 - \frac{r^3}{3!} k_3 + \ldots)$$

$$- (-rK_1 + \frac{r^2}{2!} K_2 - \frac{r^3}{3!} K_3 + \ldots) \, , \tag{3.10}$$

donde las K's son los cumulantes de la población total y las k's de la población de 65 años y más.

Tomando exponenciales en (3.10) y despreciando términos a partir de- los de tercer grado se obtiene:

$$f(r) = f_0 \exp(r(K_1 - k_1) - \frac{r^2}{2!} (K_2 - k_2) \, . \tag{3.11}$$

CAPITULO 4

LA ECUACION CARACTERISTICA

Al suponer estabilidad, la fracción de población de edades a a a+da es $be^{-ra}l(a)da$, por lo que para determinar los nacimientos que corresponden a esas edades, se multiplica la población expuesta de edades a a a+da por m(a), donde m(a) es la tasa de natalidad y m(a)da es la probabilidad de que una mujer que ha alcanzado la edad a tenga una hija antes de la edad a+da. La fracción de la población $be^{-ra}l(a)da$ debe proporcionar un aumento de nacimientos igual a $be^{-ra}l(a)m(a)$ por unidad de población total.

Integrando $be^{-ra}l(a)m(a)da$ desde la edad α hasta la edad β (generalmente 15 y 50 años, respectivamente), las edades extremas que determinan el periodo fértil de la mujer, lo que se obtiene es la tasa de natalidad total:

$$\int_{\alpha}^{\beta} be^{-ra}l(a)m(a)da \ . \tag{4.1}$$

Por otra parte, b es la tasa de natalidad total de la población con distribución por edad $be^{-ra}l(a)m(a)da$ y puede, por lo tanto, igualarse a (4.1). Esto conduce a que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} be^{-ra}l(a)m(a)da = b \ , \tag{4.2}$$

o bien, dividiendo entre b:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra}l(a)m(a)da = 1 \ . \tag{4.3}$$

La expresión (4.3) proporciona la tasa definitiva de crecimiento implicada por l(a) y m(a), después de que ambas han actuado lo suficiente bajo el supuesto de estabilidad que se ha empleado.

Para una función general neta de maternidad $l(a)m(a)$, (4.3) tiene un número infinito de raíces, de las cuales sólo la raíz real es la que interesa.

La unicidad de la raíz real se determina a partir de lo siguiente:

$$\text{Sea } P(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a)m(a)da \ , \tag{4.4}$$

$P(r)$ tiene una primera derivada negativa, y dado que es una función monótona decreciente de r, la cual toma el valor de oo para r=-oo y de cero para r=oo. Por estas razones $P(r)$ cruza una sola vez cualquier recta horizontal en el semiplano $P(r)$ 0, incluyendo la recta unitaria por arriba del eje r; por lo que $P(r)=1$ --- puede tener sólo una raíz real.

La función $P(r)$ cruza el eje vertical en:

$$P(0) = \int_{\alpha}^{\beta} l(a)m(a)da = R_0 \ , \tag{4.5}$$

donde R_0 es la tasa neta de reproducción.

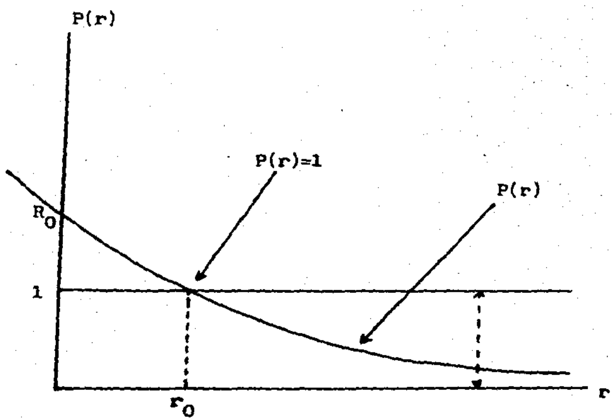

Fig. 4.1 Valores de $P(r)$, mostrando $P(0)=R_0$ y la raíz -- r_0 de $P(r)=1$.

CAPITULO 5

UNA FORMA DIFERENTE DE LA ECUACION CARACTERISTICA

Si la expresión (4.4) del capítulo anterior se divide entre R_0, se obtiene la función generatriz de momentos de la función neta de maternidad normalizada $\frac{l(a)m(a)}{R_0}$:

$$\frac{P(r)}{R_0} = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} \frac{l(a)m(a)}{R_0}\, da \,. \tag{5.1}$$

El sentido en el cual $\frac{P(r)}{R_0}$ genera los momentos, es en su equivalencia a la serie infinita (de manera similar al desarrollo presentado en el capítulo 2):

$$\frac{P(r)}{R_0} = 1 - \frac{r}{R_0} R_1 + \frac{r^2}{2!} \frac{R_2}{R_0} - \frac{r^3}{3!} \frac{R_3}{R_0} + \dots \,, \tag{5.2}$$

donde $R_i = \int_{\alpha}^{\beta} a^i l(a)m(a)da$, tal que $\frac{R_i}{R_0}$ es el i-ésimo momento alrededor del cero de la distribución $\frac{l(a)m(a)}{R_0}$. Los momentos alrededor del cero son valores grandes, y aunque la serie converge, se requiere un buen número de términos para obtener una buena aproximación.

Una serie que converge más rápidamente se obtiene al tomar el logaritmo de $\frac{P(r)}{R_0}$, generando así las funciones de momentos llamadas cumulantes, las cuales se presentaron en el capítulo 3:

$$\ln\left(\frac{P(r)}{R_0}\right) = -r\mu + \frac{r^2}{2!}\sigma^2 - \frac{r^3}{3!}k_3 + \frac{r^4}{4!}k_4 - \ldots \tag{5.3}$$

Los cumulantes expresados en términos de las R's son:

$$\mu = \frac{R_1}{R_0}$$

$$\sigma^2 = \frac{R_2}{R_0} - (R_1/R_0)^2$$

$$k_3 = \frac{R_3}{R_0} - 3\frac{R_1 R_2}{R_0^{\;2}} + 2\,(R_1/R_0)^3$$

$$\vdots$$

y en términos de los momentos alrededor de la media:

$$\mu_i = \frac{(a - \quad)^i l(a)m(a)da}{R_0}, \tag{5.4}$$

los cuales son:

$$k_1 = \mu = \mu_1$$

$$k_2 = \sigma^2 = \mu_2$$

$$k_3 = \mu_3$$

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$$

$$k_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2$$

$$\vdots$$

Ahora bien, la ecuación característica es $P(r)=1$, lo cual conduce a que

$$\ln\left(\frac{P(r)}{R_0}\right) = -\ln R_0\ , \tag{5.5}$$

o, escribiendo en términos de los cumulantes, a partir de (5.3) el equivalente a (4.3) es:

$$\ln R_0 = r\mu - \frac{r^2}{2!}\sigma^2 + \frac{r^3}{3!}k_3 - \frac{r^4}{4!}k_4 + \ldots \tag{5.6}$$

CAPITULO 6

FORMULACIONES MATEMATICAS DE LA ECUACION BASICA DE POBLACION

Cotidianamente se ha tratado el proceso puro de mortalidad de acuerdo a una tabla de vida, en la cual el total de nacimientos es justamente igual al total de muertes. La misma tabla de vida se ha empleado con una tasa arbitraria de crecimiento r para conformar una distribución estable por edad.

A continuación se comprueba el hecho de que la misma tasa de crecimiento r, que se obtiene a partir de una ecuación que incorpora tasas de natalidad específicas por edad, es similar a la que se obtiene de acuerdo a una tabla de vida.

El análisis general de lo mencionado en el párrafo anterior se hace en base a partes que relacionan al total de la población de cada generación o periodo determinado con la que le precede. Dicho análisis puede llevarse a cabo por medio de una ecuación integral, o bien en base a un modelo de producto de matrices.

El propósito de presentar estos dos modelos no es el de exhibir la virtuosidad matemática de sus autores, Lotka y Leslie, pero si lo es el hecho de mostrar las ventajas que algunas aplicaciones tienen con un modelo, mientras que otras son más accesibles con el otro.

Cabe señalar que el presente trabajo no es el lugar más indicado para tratar el detalle matemático de cada uno de los modelos, por lo cual se presenta al lector bibliografía para tal fin.

LA ECUACION INTEGRAL DE LOTKA.[2]

Históricamente la formulación más remota de que se tiene conocimiento fué en términos de una ecuación integral, en la que lo que se desconoce es la

2 Lotka, Alfred J. 1922. The stability of the normal age distribution. Proceedings of the National Academy of Sciences 5: 339-445.

trayectoria de nacimientos, la cual, bajo el nombre de ecuación de renovación, se ha venido usando en muchos otros contextos.

Los nacimientos al tiempo t, B(t), se pueden ver como el resultado de nacimientos ocurridos a años atrás, donde a se encuentra entre 15 y 50, o bien en general, entre α y β. Los nacidos hace a años, B(t-a), tienen una probabilidad l(a) de sobrevivir al tiempo t; aquellos que sobreviven tienen una probabilidad m(a)da de tener un nacimiento en el intervalo de tiempo a a a+da. El total de estos nacimientos sobre el rango de edades de α y β es

$$\int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)l(a)m(a)da \;, \tag{6.1}$$

los cuales finalmente deben ser iguales a los nacimientos actuales B(t).

En cualquier sistema se tiene una condición inicial, en la ecuación de Lotka[3] esa condición inicial es G(t), el número de nacimientos que se habían dado al inicio del proceso. La función G(t) es igual a cero para $t > \beta$, esto es, cuando todas las mujeres presentes en t=0 han completado su periodo fértil.

Introduciendo la función G(t), ya conocida, en la ecuación de Lotka dada en (6.1):

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)l(a)m(a)da + G(t) \;, \tag{6.2}$$

la cual determina la trayectoria de B(t).

El método que emplea Lotka[4] para resolver (6.2) para B(t), es llevar la ecuación a su forma homogénea, en la cual G(t) se ignora y así tratar de manera directa a $B(t)=e^{rt}$. Sustituyendo este valor para B(t) y el correspondiente $B(t-a)=e^{r(t-a)}$ en (6.2), así como omitir G(t), se obtiene la ecuación característica (4.3), la cual tiene para la función neta de maternidad l(a)m(a) un número infinito de raíces.

La forma homogénea que se obtiene es lineal y por lo tanto, si e^{rt} -

3 Lotka, Alfred J. Idem.
4 Lotka, Alfred J. Idem.

es una solución, también lo es $Q_1 e^{r_1 t}$, donde Q_1 es una constante arbitraria. Si un número determinado de tales términos son soluciones, su suma también es solución.

Las consideraciones anteriores proporcionan la solución general:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots , \tag{6.3}$$

donde las r_i's son las raíces de (4.3) y las Q_i's son constantes arbitrarias.

La solución a la forma homogénea (6.2) que contiene a G(t) se obtiene seleccionando valores de Q que concuerden con los nacimientos G(t) de la población inicial. Estos valores son:

$$Q_i = \frac{\int_0^{\beta} e^{r_i t} G(t)dt}{\int_{\alpha}^{\beta} a e^{-r_i a} l(a)m(a)da} . \tag{6.4}$$

Una manera más fácil de resolver (6.2) es considerar la transformada de Laplace de cada uno de los miembros que están presentes en ella. Dicha transformada es, por ejemplo para B(t):

$$B'(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} B(t)dt , \tag{6.5}$$

y de manera similar para G(t) y l(a)m(a)=H(a).

La integral de (6.2) es una convolución, esto es, la suma de los argumentos de las funciones B(t-a) y H(a)=l(a)m(a) en el integrando, no involucran a a. La transformada de una convolución es igual al producto de las transformadas de las funciones.

La ecuación es transformadas, distinguida por primas, es:

$$B'(r) = G'(r) + B'(r)H'(r) \ , \tag{6.6}$$

en la cual es más fácil determinar el valor de la transformada $B'(r)$ de la función $B(t)$:

$$B'(r) = \frac{G'(r)}{1 - H'(r)} \ . \tag{6.7}$$

Se requiere invertir el lado derecho de (6.7), para ello se expande en fracciones parciales usando los factores de $1-H'(r)$ obtenidos de las raíces r_1, r_2, ... de $H'(r)=1$, lo cual es similar a (4.3). De acuerdo a esto la expansión de $B'(r)$ es

$$B'(r) = \frac{Q_1}{r - r_1} + \frac{Q_2}{r - r_2} + \ldots \tag{6.8}$$

La transformada de Laplace de $e^{r_1 t}$ es

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} e^{r_1 t} dt = \frac{1}{r - r_1} \ , \tag{5.9}$$

por lo que la transformada inversa de $\frac{1}{r - r_1}$ es $e^{r_1 t}$.

Usando este hecho es posible escribir la solución de la forma (6.3), donde los coeficientes involucrados son los mismos que en (6.4). Tomando en particular $i=1$ en (6.4) se obtiene la constante Q_1 para el primer término de la solución:

$$Q_1 = \frac{\int_0^{\beta} e^{-rt} G(t) dt}{K} \ , \tag{6.10}$$

donde K, es de nuevo, la edad media a la maternidad en la población estable.

Las raíces r_2, r_3, ... , todas y cada una de ellas, tienen partes reales menores que r_1, y además los términos que las involucran pierden importancia con el tiempo, por lo que la curva de nacimientos B(t) se aproxima asintóticamente a $Q_1 e^{r_1 t}$.

LA MATRIZ DE LESLIE[5].

Whelpton[6] presentó lo que él llamó el método de componentes de proyección de población, en el cual una distribución por edad en grupos quinquenales se encuentra "sobreviviendo" a lo largo de líneas de cohortes, y los nacimientos menos las muertes de la primera infancia están sumados en cada ciclo de proyección.

Más tarde, esta misma proyección fué formalizada por Leslie[7], haciendo ésta con tal detalle, que el proceso ha venido a ser llamado con su nombre.

Leslie observó que si la población inicial, en grupos quinquenales, se representa por medio de un vector vertical P:

$$P = \begin{bmatrix} {}_5P_0 \\ {}_5P_5 \\ {}_5P_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}_5P_{w-5} \end{bmatrix} ,$$

entonces los sobrevivientes $\frac{{}_5L_5}{{}_5L_0}$, $\frac{{}_5L_{10}}{{}_5L_5}$, y así sucesivamente, situados en la

5 Leslie, P.H. 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika (London) 33: 183-212.
6 Whelpton, Pascal K. 1936. An empirical method of calculating future population. Journal of the Americal Statistical Association 31: 457-473.
7 Leslie, P.H. Idem.

subdiagonal de una matriz S, llevarán a la población a líneas de cohortes hacia-abajo cuando el vector P es multiplicado previamente por la matriz S.

Los supervivientes después de cinco años estarán dados por SP, des-- pués de diez años por $S(SP)=S^2P$, y así sucesivamente. La contribución de los nacimientos, después de que el proceso ha concluído de esta forma, está dada por - el primer renglón de una matriz B, la cual tiene elementos distintos de cero en-las entradas de la tres a la once si la fecundidad es positiva del grupo de edades 15–19 al 45–49. Hay que hacer notar que el tercer elemento del vector corresponde al grupo 10–14, en el que la fecundidad bien puede suponerse igual a cero; sin embargo, el tercer elemento de la matriz toma en cuenta el hecho de que las-personas del grupo 10–14, al inicio de cada ciclo de proyección de cinco años, - se ubican en el grupo 15–19 durante ese mismo ciclo.

Si la suma de las matrices de natalidad B y de supervivencia S es M, M=S+B, la proyección al tiempo t, medida en unidades de cinco años, es

$$P^t = M^t P^{(0)} \quad . \tag{6.11}$$

La ecuación característica se obtiene al considerar la condición de-estabilidad, en la cual la proyección de la distribución por edad a través de un ciclo no altera las proporciones relativas, pero si incrementa la población en - todas las edades en la misma razón, dígase

$$MK = \lambda K \ , \tag{6.12}$$

donde el vector K es el vector vertical estable. Esto equivale a

$$(M - \lambda I) = (0) \ , \tag{6.13}$$

con I la matriz de identidad del orden correspondiente, y (0) un vector de ce--- ros; si los elementos de K no son todos cero, entonces la matriz $(M - \lambda I)$ debe - ser singular, es decir, su determinante debe ser igual a cero.

La ecuación del determinante $(M - \lambda I)=0$ proporciona raíces en λ, — llamadas valores propios. Las raíces cero no son de interés, una población con - fecundidad positiva hasta la edad 50 tiene 10 raíces diferentes de cero en λ. Con un número finito de grupos de edades, en la aproximación finita usual, la población crece un poco más rápido en la proyección de Leslie que en la de Lotka. En efecto, cuando los intervalos de tiempo son muy pequeños, ambos modelos coinciden.

LOS NACIMIENTOS DE EXTRANJEROS Y MIGRACION INTERNA.

Una etapa en análisis, más allá de la contabilización de los nacimientos extranjeros presentes, en términos de la precedente corriente de inmigración, es proyectar las consecuencias para la población futura, de las presentes tasas de inmigración o de algún cambio hipótetico en ellas. Esto lleva más allá de la descripción y reconciliación de reportes en al menos una clase primitiva - de mecanismo. El mecanismo es el efecto de tasas fijas o variables sobre el modelo de residentes del extranjero, donde "extranjero" puede significar otro país,- región, estado o ciudad.

Si la posibilidad de que un individuo que reside en el lugar j se — cambie al lugar i es m_{ij}, sin tomar en cuenta la historia previa de la persona,- y siendo ${}_iP_t$ el número de individuos en el lugar i al tiempo t, entonces la distribución de individuos entre los lugares al tiempo t+1 es:

$$P_{t+1} = M\, P_t\ , \qquad (6.14)$$

donde M es la matriz que tiene m_{ij} en la entrada ij, y P_t es el vector vertical- con ${}_iP_t$ en la i-ésima entrada.

El argumento que se emplea es similar al presentado para la matriz - de Leslie.

SEGUNDA PARTE

Para analizar un fenómeno se debe particionarlo en elementos simples y entonces juntarlos posteriormente, de tal manera que se reconstruya el fenómeno. Este fué el método propuesto por Descartes para el estudio del mundo físico, y puede ser usado para hacer más comprensibles las características de la población que son presentadas por medio de censos y otras fuentes de datos. Tales características, como edad, sexo, estado civil, lugar de nacimiento, ocupación, etc., pueden ser tratadas por el método cartesiano, aunque no todas con la misma efectividad.

CAPITULO 7

CONTABILIZACION DE LA DISTRIBUCION POR EDAD

Por el momento se dejará a un lado la edad política (en años), y llámese una población (demográficamente) joven, si tiene una fracción grande de niños y una pequeña de personas viejas. "Joven" y "viejo" en términos de esta definición, serán explicables por medio de una tabla de vida y por una tasa de crecimiento.

El primer intento de explicación será, nuevamente, la distribución estable por edad de Euler dada por la expresión (1.3), por medio de la cual, bajo un régimen fijo de mortalidad y fecundidad, incluyendo la probabilidad l(a) de sobrevivir del nacimiento a la edad a y una tasa de crecimiento r, la población entre las edades a y a+da es

$$e^{-ra}l(a)da \tag{7.1}$$

por cada nacimiento actual, y si se desea en forma de proporción, el valor dado por (7.1) se divide por su integral sobre el rango de cero a w.

LA DISTRIBUCION POR EDAD COMO UNA FUNCION DE LA TASA DE CRECIMIENTO.

Anteriormente se presentó la manera en que la fracción de cualquier edad en una población estable es expresable en términos de la tasa de crecimiento de la población y las edades medias de los subgrupos relevantes. Un caso especial, la fracción de la población de 65 años y más se presentó en el capítulo 3.

En términos generales la fracción de población entre cualquier par de edades, α y β, es:

$$ {}_{\beta-\alpha}C_{\alpha} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a)da}{\int_{0}^{\omega} e^{-ra} l(a)da} \, . \tag{7.2} $$

De acuerdo a lo presentado en el capítulo 5, $\ln(\int_0^\omega e^{-ra} l(a)da)$ genera los cumulantes de la distribución con densidad f(a), el primer cumulante es la media, y el segundo y tercer cumulantes son los momentos alrededor de la media.

Se puede expresar f(a) como $\frac{l(a)}{\int_0^\omega l(x)dx}$ para el denominador, y de igual manera para el numerador, ahora entre α y β : $\frac{l(a)}{\int_\alpha^\beta l(x)dx}$; para valores fuera del intervalo $[\alpha,\beta]$, f(a)=0.

Normalizando (7.2), al dividir por $\frac{\int_\alpha^\beta l(a)da}{\int_0^\omega l(a)da}$, tomando logaritmos en ambos lados y expandiendo las dos funciones generadoras de cumulantes de (-r) se obtiene:

$$ \ln({}_{\beta-\alpha}C_{\alpha}) = \ln\left(\frac{{}_{\beta-\alpha}L_{\alpha}}{{}^{\circ}e_0}\right) - \left(k_1 r - \frac{k_2 r^2}{2!} + \frac{k_3 r^3}{3!} - \dots \right. $$

$$ \left. - \left(K_1 r - \frac{K_2 r^2}{2!} + \frac{K_3 r^3}{3!} - \dots\right)\right) \, , \tag{7.3} $$

donde las k's son los cumulantes de la distribución de la tabla de vida entre las edades α y β , y las K's los correspondientes al rango completo de la distribución por edad.

CAMBIO NEUTRAL Y NO NEUTRAL EN MORTALIDAD.

¿Cómo poblaciones que han estado sujetas a diferentes tasas de mor–

talidad difieren en edad?

Si la diferencia es la misma para todas las edades, ésta no tiene — efecto alguno en la distribución por edad. Si las tasas de natalidad son las — mismas y la mortalidad en todas las edades ha sido incrementada, por ejemplo, en exactamente 0.01 en una población que en la otra, las distribuciones por edad de ambas poblaciones serán idénticas.

Esto parece ser una paradoja. Un incremento en mortalidad que evita- que la gente llegue a edades avanzadas haría pensar que en la población hay un - índice alto de gente joven. Ciertamente, esto hace que la expectativa de vida — sea más larga para un individuo de lo que era antes, ¿por qué no sucede lo mismo para la comunidad? Aquí, como en muchas otras situaciones, la misma regla no se- aplica a poblaciones de la forma como se aplica a individuos.

Cuando la mortalidad es muy alta y la fecundidad no cambia, la tasa- de crecimiento es justo lo suficiente menor para compensar, en cuanto a la dis-- tribución por edad se refiere, el cambio en la tabla de vida. La cancelación es- una propiedad del crecimiento exponencial, encajando con el efecto exponencial - en $l(x)$ de una adición a $u(x)$.

Si k (i.e. 0.01) se suma a la tasa de mortalidad $u(x)$ para cada edad, se obtiene $u^*(x)=u(x)+k$; por lo que la probabilidad de sobrevivir a edad x es — ahora $l^*(x)=e^{-kx}l(x)$, en lugar de $l(x)$.

Pero si las tasas de natalidad específicas por edad permanecen sin - cambio, la tasa de crecimiento de la población disminuye exactamente en k. La -- prueba de esta afirmación se basa en que la nueva tasa de crecimiento r^* debe — satisfacer la ecuación característica:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r^*x} l^*(x)m(x)dx = 1 \qquad (7.4)$$

ó

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r^*x} e^{-kx} l(x)m(x)dx = 1 \qquad (7.5)$$

ó

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(r^*+k)x} l(x)m(x)dx = 1 \; . \tag{7.6}$$

Dado que la tasa original r satisfacía la misma ecuación que ahora satisface r^*+k, por la unicidad de la raíz real se tiene que $r=r^*+k$, por lo cual $r^*=r-k$.

Combinando lo presentado en los dos párrafos anteriores se tiene, para la nueva población estable, sobre un radix de un nacimiento actual por año,

$$e^{-r^*x} l^*(x) = e^{-(r-k)x} e^{-kx} l(x) = e^{-rx} l(x) \; ; \tag{7.7}$$

por lo tanto, el número de personas de edad x por nacimiento actual, es el mismo bajo el nuevo régimen que bajo el anterior.

CAPITULO 8

¿POR QUE HAY MAS MUJERES QUE HOMBRES A EDADES MAYORES EN LAS POBLACIONES MODERNAS?

Esencialmente el mismo método de estudio que se usó para la distribución por edad, ayudará a explicar las variedades de proporción de sexos en las poblaciones modernas.

La investigación iniciará con las actuales tasas específicas por edad de natalidad y mortalidad, ahora perteneciendo a los dos sexos de manera separada, desde lo cual se puede construir un modelo estable.

Para convertir el modelo de un solo sexo usado anteriormente para el análisis de edades dentro del modelo de dos sexos (muy primitivo) que ahora se necesita, se requiere de un conjunto de datos: la proporción de sexos al nacimiento, s.

Si s niños nacen por cada niña, y B niñas nacen al año, entonces el número de niños que nacen es sB. Por el mismo argumento que se usó para (1.3), se puede expresar la distribución por edad y sexo, siempre que el régimen de mortalidad y fecundidad permanezca fijo, y que la población crece de acuerdo a una progresión geométrica con radio de crecimiento e^{5r} en cualquier periodo de 5 años.

Los nacimientos, así como cada grupo por edad y sexo, se supone que crecen en esta misma proporción, por lo que, si actualmente hay B nacimientos de niñas por año, en una aproximación al argumento de población estable citado en el capítulo 1, habrá $B\,{}_5L_0e^{-2.5\,r}$ niñas de edades 0 a 4 años, ${}_5{}_5L_5e^{-7.5\,r}$ de edades 5 a 9, y así sucesivamente para las edades posteriores. De acuerdo a esto se está estableciendo la aproximación común:

$$\int_x^{x+5} e^{-ra}l(a)da \cong e^{-r(x+2.5)}\int_x^{x+5} l(a)da$$

$$= {}_5L_x \, e^{-r(x+2.5)} \tag{8.1}$$

Los nacimientos de niños son sB, y los sobrevivientes de éstos al final del primer periodo de cinco años son $sB_5L_0^* e^{-2.5\,r}$, lo mismo que para niñas pero usando s y la función ${}_5L_0^*$ de la tabla masculina de vida. Por lo tanto el número de niñas es

$$B \; {}_5L_x \, e^{-r(x+2.5)} \tag{8.2}$$

y el de niños es

$$sB \; {}_5L_x^* \, e^{-r(x+2.5)} \; , \tag{8.3}$$

ambos en el grupo de edades x a x+4 al momento del último cumpleaños, donde se supone que los dos sexos crecen a la misma tasa r.

Entonces la proporción de sexos por grupos de edades es:

$$\frac{sB \; {}_5L_x^* \, e^{-r(x+2.5)}}{B \; {}_5L_x \, e^{-r(x+2.5)}} = \frac{s \; {}_5L_x^*}{{}_5L_x} \tag{8.4}$$

CAPITULO 9

EL EQUIVALENTE ESTABLE

El equivalente estable Q, asociado con proyecciones a largo plazo, - ayuda a interpretar una anterior distribución por edad ya observada desde el punto de vista de potencial reproductivo, el cual es el compañero natural de la tasa intrínseca de crecimiento natural r. La tasa r dice que tan rápido crece finalmente la población de acuerdo a las tasas específicas por edad presentes en - la actualidad.

PROYECCION DE POBLACION Y LA APROXIMACION ESTABLE DE THERETO[8].

Dada una distribución observada por edad para un solo sexo (desde el punto de vista matemático, arbitraria), la cual se arregla en un vector vertical $P^{(0)}$, junto con las tasas específicas por edad, tanto de natalidad como de mortalidad, arregladas en una matriz M. Si se tienen grupos quinquenales hasta el 85-89, por ejemplo, M tiene 18X18 elementos (324 en total) y el vector de la distribución $P^{(0)}$ tiene 18X1. El primer renglón de M proporciona lo correspondiente a-fecundidad y la subdiagonal lo que respecta a supervivencia; esto es, en efecto, la matriz de Leslie presentada en el capítulo 6.

La distribución por edad proyectada al cabo de 5t años es:

$$P^{(t)} = M^{t}P^{(0)} \quad . \tag{9.1}$$

Una aproximación a esta proyección, denominada asintótica porque se-aproxima tanto como se desea con t suficientemente grande, es

$$P^{(t)} \cong Qe^{5rt} \quad , \tag{9.2}$$

donde Q es el equivalente estable de la distribución por edad.

Para calcular Q, se seleccciona un valor grande de t y se iguala el-lado derecho de (9.1) con el correspondiente de (9.2), esto es:

$$M^{t}P^{(0)} = Qe^{5rt} \quad . \tag{9.3}$$

8 Keyfitz, Nathan, and Flieger, Wilhelm. 1968. Worls Population: An Analysis of vital Data. Chicago: University of Chicago Press.

Si la población tuvo distribución estable por edad desde el inicio y contenía Q individuos a diferentes edades durante un periodo de tiempo 5t, crecerán a Qe^{5rt}. En efecto, se sabe que la distribución por edad $P^{(0)}$ crece a $M^tP^{(0)}$ cuando se proyecta por un tiempo 5t.

La ecuación matricial para calcular Q es (9.3), por lo tanto:

$$Q = \frac{M^tP^{(0)}}{e^{5rt}} . \tag{9.4}$$

Una forma de describir (9.3), es decir, que $P^{(0)}$, la población inicial, es proyectada prospectivamente t periodos por la matriz M, y retrospectivamente una longitud de tiempo igual por la raíz real r, esto es, al dividir entre el denominador e^{5rt}. El valor de Qe^{5rt} es el término real de la solución a la ecuación de Lotka(6.3), pero es más completa al proporcionar las diferentes edades de la población y no unicamente nacimientos.

CAPITULO 10

EDAD AL MATRIMONIO

Hernes[9] diseñó una curva para describir la proporción de casados por edad respaldado por una razón convincente. En una población agrupada por edad, - difícilmente ocurre que los individuos se casan cuando la mayoría de sus contemporáneos están solteros; pero sucede que cuando el matrimonio se presenta des--- pués de los 18 años, se observa que el número de sus amigos (as) disminuye y empieza a sentirse inexperto, a decir verdad, presionado para casarse. Por ello, - argumenta Hernes, se puede trasladar la tasa de transferencia al estado de "ca-- sado" como proporcional respecto a la fracción de casados. Sin embargo, también- debe ser proporcional a la fracción todavía no casada, los casados solamente pueden provenir del efectivo de los no casados[10].

UN MODELO DE SUMA DE INTERVALOS ALEATORIOS.

Coale[11] encontró, al experimentar con diferentes distribuciones por- edad al matrimonio, que todas ellas se fijan a uan cierta curva estándar, la --- cual sólo fué ajustada para lo siguiente:

a) La edad a la cual las mujeres están en situación de casarse;
b) la proporción de matrimonios a lo largo de la vida; y
c) una escala horizontal.

Si las distribuciones a las que se hace referencia son presentadas - como funciones de riesgo, esto es, tasas de nupcialidad específicas por edad para la población todavía soltera excluyendo de ella las personas que nunca se casan, toman la siguiente forma para primeros matrimonios:

$$r(x) = 0.174\, e^{-4.411\, e^{-0.0309\, x}} \qquad (10.1)$$

9 Hernes, Gudmund. 1972. The process of entry into first marriage. American Sociological Review 27: 173-182.
10 Savage, I. Richard. 1973. Sociology wants Mathematics. FSU Statistics Report M-247. Tallahassee, Fla: Florida State University.
11 Coale, Ansley J. 1971. Age patterns of marriage. Population Studies 25: 193-214.

donde x es la edad de la persona medida desde el origen, para cada población en particular.

Si la probabilidad de que X suceda entre x y x+dx es $f_X(x)dx$, y de que Y suceda entre y y y+dy es $f_Y(y)dy$, entonces la probabilidad conjunta es $f_X(x)f_Y(y)dxdy$. Para determinar la distribución f(z) de Z=X+Y, se integra la probabilidad conjunta sobre el rango completo de x y de y, de tal manera que x+y=z:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \ . \qquad (10.2)$$

Esta expresión es llamada una convolución, así como (6.3), debido a que la suma de los argumentos de las funciones en su integrando no involucra a x, la variable de integración. Esto es fácilmente de aplicar a la suma de dos distribuciones exponenciales negativas, $f_X(x)=r_1e^{-r_1x}$ y $f_Y(y)=r_2e^{-r_2y}$, obteniendo así la distribución[12] de Z=X+Y:

$$f_Z(z) = \frac{r_1\ r_2}{r_1 - r_2}(e^{-r_2x} - e^{-r_1z}) \ . \qquad (10.3)$$

CIRCULOS PEQUEÑOS DE MATRIMONIOS.

En una población grande, para parejas de casados donde se reconoce una variación aleatoria en el tiempo de matrimonios individuales, una variación aleatoria en el número de hombres y mujeres en edad de casarse puede tener sólo un efecto menor. Si cada individuo, tanto él como ella, está en edad de casarse y busca una pareja para hacerlo dentro de un círculo relativamente pequeño, una parte de los que no lo logran puede deberse a diferencias aleatorias en el número de hombres y mujeres en estos círculos[13].

Hay que pensar en un círculo, el cual contiene candidatos al matrimonio. Un círculo puede ser una oficina o cualquier otro lugar de trabajo, un —

12 Coale, Ansley J. and McNeil, D.R. 1972. Distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort. Journal of the American Statistical Association 67: 743-749.

13 Henry, Louis. 1969. Outlines of nupciality: lock of balance of sexes at celibacy. Population 24: 457-486.

club social o bien una colonia.

Supóngase que el círculo contiene 2n miembros, todos ellos con edad y disposición para ser candidatos para casarse con alguien del mismo círculo, encontrándose distribuidos aleatoriamente por sexo, esto es, la probabilidad de que un miembro del círculo sea mujer es 1/2, y de que sea hombre también es 1/2. El número esperado de candidatos masculinos será n, así como el de candidatos femeninos, de tal manera que en cualquier realización de este círculo hipotético, estos valores esperados conforman los 2n candidatos a casarse. El objetivo es encontrar el número esperado de candidatos sobre el total de realizaciones del círculo. La solución al problema planteado por Henry que se presenta a continuación, se debe a McFarland[14].

Si la oportunidad de que cada miembro del círculo sea hombre es 1/2, la posibilidad de que de los 2n miembros, el número de hombres sea n+k, k>0, y por tanto, el de mujeres n-k, es:

$$\binom{2n}{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} . \qquad (10.4)$$

En esta situación los hombres sin casarse serán (n+k)-(n-k)=2k. De acuerdo a esto, el número esperado de hombres que no se casan debe ser 2k veces la probabilidad dada por (10.4), sumada sobre todas las posibles conformaciones del círculo que presenten mayor número de hombres que de mujeres. Por lo tanto, el valor esperado de hombres sin casarse es:

$$\sum_{1}^{n} ((n+k) - (n-k)) \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{1}^{n} ((n+k) - (n-k)) \frac{(2n)!}{(n+k)!(2n-(n+k))!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= (2n)! \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\sum_{1}^{n} \frac{n+k}{(n+k)!(n-k)!} - \sum_{1}^{n} \frac{n-k}{(n+k)!(n-k)!}\right)$$

$$= (2n)! \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{(n+k-1)!(n-k)!} - \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{(n+k)!(n-k-1)!}\right) . \qquad (10.5)$$

14 McFarland, David D. 1970. Effects of group size on the availability of marriage partners. Demography 7: 411-415.

El límite superior de la segunda sumatoria es n-1, puesto que si fuera n, en el denominador quedaría el factor (-1)!. Al considerar k=2 en la primer sumatoria el valor resultante se cancela con el correspondiente de la segunda sumatoria cuando k=1, donde ambos valores son iguales a $\frac{1}{(n+1)!(n-2)!}$. Todos los los demás valores se cancelan similarmente, excepto para k=1 en la primer sumatoria, donde el valor correspondiente es $\frac{1}{n!(n-1)!}$. Por lo tanto el número esperado de hombres sin casarse es:

$$(2n)!\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{1}{n!(n-1)!}$$

$$=(2n)!\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{n}{n!n!}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} n\,\frac{(2n)!}{n!n!}\ . \tag{10.6}$$

Por simetría, el número esperado de mujeres sin casarse debe ser el mismo que el de hombres, por lo que para ambos sexos se tiene un valor esperado de

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 2n\,\frac{(2n)!}{n!n!} \tag{10.7}$$

personas sin casarse, o bien como una fracción de los 2n individuos del círculo:[15]

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{(2n)!}{n!n!} \tag{10.8}$$

La aproximación de Stirling[16] para el factorial es:

$$n! = n^{n} e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ \left(1+\frac{1}{12n}\right), \tag{10.9}$$

en la cual se han despreciado los términos a partir de $\frac{1}{n^2}$.

Sustituyendo esta aproximación en (10.8):

15 McDonald, John. 1973. Sex predetermination: Demographic effects. Mathematical Biosciencies 17: 137-146.

16 Freeman, Harry. 1938. An elementary treatise on Actuarial Mathematics. Cambridge, England: University Press.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}\ \ (1 + 1/24n)}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ \ (1 + 1/12n))^2}\ , \tag{10.10}$$

la cual se reduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\ \frac{1 + 1/24n}{(1 + 1/12n)^2} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\ (1 - 1/8n)\ . \tag{10.11}$$

De acuerdo a (10.11), si un círculo está formado por 2n miembros, la fracción esperada de excedente de cualquiera de los dos sexos, o bien la fracción promedio de quienes no pueden casarse dentro del círculo, es ligeramente menor que $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Este resultado puede extenderse a un círculo que tenga desequilibrio de sexos, en el sentido de que la probabilidad de que un miembro tomado al azar sea hombre (o mijer) no es 1/2; en este caso se requiere de otro procedimiento para sumar la serie, que sería similar al dado por (10.5) pero con $p \neq 1/2$.

¿CUANTAS FAMILIAS SON EL RESULTADO DE LAS TASAS DE NATALIDAD, MORTALIDAD Y NUPCIALIDAD?

Sea p(a) la distribución por edad de la población femenina, la cual no necesariamente es estable, de tal manera que;

$$\int_0^{\omega} p(a)da = P^f\ , \tag{10.12}$$

donde P^f es la población total de mujeres. Sea q(a) la fracción de mujeres casadas a edad a. De acuerdo a esto, el número total de mujeres casadas es:

$$\int_0^{\omega} p(a)q(a)da\ . \tag{10.13}$$

Es razonable asignar una familia por separado a cada mujer casada, -

donde para este propósito, sólo aquellas que actualmente viven con su esposo o cónyuge son consideradas como casadas. Entonces el número total de familias está dado por (10.13), y el promedio de personas por familia es:

$$\frac{2\,P^{f}}{\int_{0}^{\omega} p(a)q(a)da}\,, \tag{10.14}$$

bajo el supuesto de que el número de hombres y mujeres es igual en la población.

A partir de esto, hasta llegar al tamaño medio de familia implicado por las tasas específicas por edad en una población estable, el valor dado por $\frac{p(a)}{P^{f}}$ se reemplaza por $be^{-ra}l(a)$, de la misma manera que en el capítulo 1.

Entonces se tiene el número medio de personas por familia, que es:

$$\frac{2}{\int_{0}^{\omega} be^{-ra}l(a)q(a)da}\,. \tag{10.15}$$

Esta última expresión es diferente en concepto, del promedio que se obtiene a partir de un censo, ya que en este último se contabiliza el número de personas y se divide entre el número de familias.

La expresión (10.15) no contempla a las personas que no viven en familias por estar en prisiones y otras instituciones, e implícitamente reparte de algún modo, los hijos ilegítimos entre las mujeres casadas.

Asimismo, la diferencia principal es que (10.15) proporciona lo que está implicado por las tasas actuales mas que por las tasas que se han presentado en toda la vida de la población contabilizada en el censo.

MATRIMONIOS Y DIVORCIOS.

Las personas casadas y divorciadas contadas en un censo, así como aquellas de las diferentes edades y sexos, están relacionadas con la historia previa del país o región en cuanto a matrimonios y divorcios.

Es necesario considerar las series de tiempo de matrimonios de los años anteriores, junto con las series de disolución de matrimonios por muerte del esposo o por divorcio. Este es un principio explicable y compatible con el pasado. Si la reconciliación y explicación se dan en una pequeña area local se debe tener en cuenta emigración e inmigración, así como matrimonios, muertes y divorcios, pero esta situación se dejará a un lado en el desarrollo del presente trabajo.

Por simplicidad se hará caso omiso de la edad de los individuos al casarse, tomando sólo en cuenta la duración del matrimonio[17].

Sea $u^m(x)dx$ la posibilidad de que un matrimonio que ha durado x años se disuelva durante el periodo x a x+dx debido a la muerte del esposo, $u^f(x)$ debido a la muerte de la esposa y $u^d(x)$ debido al divorcio. Supóngase que inicialmente se tienen P_0 matrimonios. El número de parejas que permanecen casadas al cabo de t años (P(t)) es:

$$P(t) = P_0 \exp\left(-\int_0^t (u^m(x) + u^f(x) + u^d(x))dx\right) . \tag{10.16}$$

El número esperado de divorcios entre t y t+dt será $P(t)u^d(t)dt$, suponiendo independencia y despreciando segundos matrimonios y posteriores.

Estas causas de disolución compiten entre sí. Una alta mortalidad disminuye la tasa de divorcios, permaneciendo sin cambio lo demás. Para esto basta obtener la expresión que proporciona el número de matrimonios que eventualmente terminarán en divorcio:

$$D = \int_0^\infty P(t)u^d(t)dt . \tag{10.17}$$

Dividiendo (10.17) entre P_0 se obtiene la fracción esperada de matrimonios que concluirán en divorcio.

17 Preston, Samuel H. 1975. Estimating proportion of marriages that end in divorce. Sociological Methods and Research 3: 435-459.

LA PROPORCION ACTUAL DIVORCIO-MATRIMONIO.

La proprociŏn actual de divorcios-matrimonios es una medida conve--- niente del impacto del divorcio. Esta medida es frecuentemente usada, y casi --- siempre criticada, debido al hecho de que los divorcios actuales se derivan de - matrimonios ocurridos en un periodŏ anterior de tiempo, y por esta razŏn, en el- denominador de la proprociŏn los que deben aparecer son estos matrimonios.

Lo ideal es un esquema de tasas de divorcio de acuerdo a la duración del matrimonio, de tal manera que las tasas especĺficas de divorcio por duración del matrimonio puedan ser calculadas. Pero cuando esto no es posible, y por tanto se tiene que recurrir a pa proporciŏn actual de divorcio-matrimonio, se puede aplicar una interpretaciŏn de esta proporciŏn dada por Preston[18].

Sean D(t) y M(t) las curvas de divorcios y matrimonios con relaciŏn- al tiempo, respectivamente.

Sea $u^d(x)$ la fuerza continua (instantánea) especĺfica por edad, de - divorcios para matrimonios que han ocurrido durante los ũltimos x años, y sea -- p(x) la probabilidad de supervivencia del matrimonio por un lapso de x años contra las contingencias de muerte y divorcio.

De acuerdo a lo anterior, el nũmero actual de divorcios debe ser:

$$D(t) = \int_0^{\infty} M(t-x)p(x)u^d(x)dx \ , \tag{10.18}$$

y bajo una tasa fija de crecimiento r, el nũmero actual de matrimonios es:

$$M(t) = M_0 e^{rt} \ . \tag{10.19}$$

Por lo tanto, sustituyendo $M(t-x)=M_0 e^{r(t-x)}$ en (10.18) se tiene:

$$D(t) = \int_0^{\infty} M_0 e^{-r(t-x)} p(x)u^d(x)dx \ . \tag{10.20}$$

18 <u>Preston, Samuel H.</u> 1975. Idem.

A partir de (10.19) y (10.20) se obtiene la proporción actual de divorcios-matrimonios:

$$\frac{D(t)}{M(t)} = \int_0^\infty e^{-rx} p(x) u^d(x) dx \;. \qquad (10.21)$$

CAPITULO 11

STOCKS (EFECTIVOS) Y FLUJOS HUMANOS

El estudio de una población exige relacionar flujos y efectivos[19]. - Los censos reportan efectivos de acuerdo a varias categorías como son edad, estado civil, ocupación y algunas otras; las estadísticas vitales mediante flujos proporcionan nacimientos, defunciones, graduados y otros datos actuales de similares características.

Subyacentes a todas las estadísticas sociales, se encuentran individuos que van pasando por varios estados de sus ciclos de vida. Ellos empiezan — por nacer y son reportados en una serie de flujos, pasan algunos años en su casa, entran al sistema educacional al nivel inferior (primaria), tarde o temprano pasan a niveles superiores (secundaria y preparatoria), eventualmente ingresan a - trabajar, donde pueden permanecer brevemente o bien por un tiempo más largo, quizá regresen al sistema educativo estudiando una carrera profesional y finalmente jubilarse, posiblemente después de varias entradas y salidas a la actividad productiva. Al mismo tiempo pasan por una casa de orientación (la de sus padres o - tutores), se casan y forman una casa de procreación, tienen hijos, se divorcian, se vuelven a casar, enviudan y pasan a lo largo de otras transiciones domésticas. Si fuera usual, se podría considerar cada estado de actividad económica clasificado por los varios estados domésticos, pero los datos de que se dispone evitan esto, y a su vez, usar dos modelos en los cuales las dos colecciones de estados sean tratadas por separado.

Las dos secuencias bosquejadas anteriormente son denominadas secuencia activa y pasiva, respectivamente. La primera de ellas se refiere al individuo y su relación con la producción y el mercado, incluyendo escolaridad y jubilación; la segunda incluye los diferentes sitios de los cuales sucesivamente el individuo va formando parte, las condiciones del hogar, su localización. Otra secuencia es la que se refiere a la salud y cuidados médicos, como el paso de un - individuo por estados de salud y enfermedad, visitas al doctor, hospitalización, dado de alta, etc. Algunos individuos entran también en una secuencia de estados de delincuencia, iniciando con una conducta aberrante y sus consecuencias, como-

19 Stone, Richard. 1972. A Markovian education model and other examples linking social behavior to the economy. Journal of the Royal Statistical Society, Serie A (London) 135: 511-543.

son pasar por manos de la policía, delegaciones, cortes y prisiones.

Para cada uno de los estados de cada una de las cuatro secuencias mencionadas, se requiere de una definición precisa que determine con exactitud los límites de cada uno de ellos para poder cuantificarlos. Un conflicto entre la precisión de la medida y la relevancia del concepto siempre existe en cualquier ciencia empírica.

Para introducir la notación e ideas de manera sencilla, considérese el siguiente ejemplo: una secuencia con sólo dos estados y sus correspondientes flujos de nacimientos y muertes. Supóngase una matriz S, en la cual los elementos de la subdiagonal son las probabilidades de sobrevivir de una edad a la siguiente, donde la primera de ellas es $\frac{L_1}{L_0}$, la segunda $\frac{L_2}{L_1}$, y así sucesivamente; todos los elementos, excepto los de la subdiagonal, son cero. La población nueva que ingresa cada año por natalidad o migración está dada por un vector vertical b, suponiendo que b contiene un número L_0 en la primer entrada y cero en las demás.

Entonces si la población al tiempo t es P_t (también un vector vertical), se tiene que:

$$P_1 = S\ P_0 + b$$

$$P_2 = S\ P_1 + b = S^2\ P_0 + b$$

$$\vdots$$

Después que este proceso se ha mantenido durante largo tiempo, el término $S^t P_0$ desaparecerá, en efecto, todas las potencias de S más allá de la m-1 desaparecerán si S es una matriz de m x m, la cual consistirá sólo de ceros.

Similarmente, si $t \quad m$, los términos $S^t b$ son cero, por lo que se pueden sumar sin problema. Así se obtiene la serie

$$P_t = b + Sb + S^2 b + \dots \qquad t \geq m$$

$$= (I + S + S^2 + \dots)b \;. \tag{11.1}$$

La suma de una serie geométrica de matrices se obtiene de la misma manera que la suma de una serie de escalares, donde la razón es menor que uno.

Sea T la suma:

$$T = I + S + S^2 + \dots \tag{11.2}$$

Multiplicando (11.2) por S:

$$TS = S + S^2 + S^3 + \dots \tag{11.3}$$

Haciendo la diferencia de (11.2) y (11.3):

$$T - TS = I \;. \tag{11.4}$$

Por lo que:

$$T = \frac{I}{I - S} \;. \tag{11.5}$$

Sustituyendo el valor de T dado por (11.5) en la expresión (11.1), se obtiene la distribución de población por edad al tiempo t:

$$P_t = (I - S)^{-1} b \;, \tag{11.6}$$

donde $(I - S)^{-1}$ es la matriz fundamental que corresponde a la matriz original S, a la cual se le puede dar varios usos.

Para el caso particular que se tiene, S proporciona los sobrevivientes como transiciones entre dos edades consecutivas. El determinante de (I - S) es fácil probar que es igual a la unidad y que por tanto su inversa es la transpuesta de los cofactores de los elementos de (I - S), es decir, para el elemento situado en la entrada ij de la inversa, se introduce el valor del determinante que se obtiene al eliminar el renglón i y la columna j de la matriz (I - S).

Este procedimiento proporciona la matriz fundamental de la matriz de supervivencia:

$$(I - S)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{L_1}{L_0} & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{L_2}{L_0} & \frac{L_2}{L_1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{L_3}{L_0} & \frac{L_3}{L_1} & \frac{L_3}{L_2} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

Los elementos de la primer columna de $(I - S)^{-1}$ son las probabilidades de supervivencia desde el nacimiento hasta cada edad alcanzada x; los de la segunda columna, las probabilidades de supervivencia de edad uno a edad alcanzada x, y así sucesivamente para las columnas restantes. Los totales de cada una de las columnas proporcionan la esperanza de vida a cada edad, iniciando en la edad cero, uno, y así sucesivamente. Expresado formalmente: si R es el vector de unos, R=(1,1,1,1,...), entonces el i-ésimo elemento del producto de R por la-matriz dada por (11.7), esto es, $R(I - S)^{-1}$, es la esperanza de vida para una — persona que ha alcanzado la edad i.

Simplemente, para llegar a una versión inexacta de la tabla de vida, el análisis matricial anterior es muy pesado así como superfluo. La ventaja que tiene es que proporciona efectivos poblacionales en términos de flujos, no sólo para muertes sino para cualquier otro evento.

Se tiene la posibilidad de sumar las potencias de S debido a que S se anula después de cierta potencia. Esto no sucede en general, pero en muchas situaciones los elementos de las potencias son muy pequeños y decrecen en forma de progresión geométrica. Esto sucede cuando S es parte de una cadena absorbente y lo es en el sentido de que cada uno de los individuos es absorbido por el evento muerte ya sea temprano o más tarde en su paso a través de varias edades.

Algunas de las condiciones mencionadas se pueden ilustrar para un modelo de población escolar y su ingreso a la fuerza de trabajo.

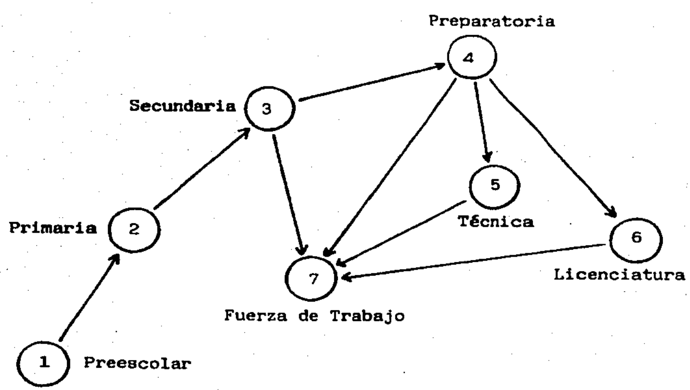

Fig 11.1 Gráfica del proceso a través del sistema escolar y puntos de ingreso a la fuerza de trabajo.

Considérense sólo los flujos presentados en la gráfica de la figura-(11.1) y su correspondiente matriz S[20]. Se fija S en una matriz A que incluye --absorción por terminación de los diferentes grados de escolaridad:

$$A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ T & I \end{bmatrix}, \tag{11.9}$$

o bien, escribiendo 1 (uno) donde se dan transiciones positivas:

$$A = i \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{11.10}$$

Cabe señalar que tanto en la gráfica (11.1) como en la matriz dada -en (11.10) se han omitido mortalidad y repetición.

Cada periodo de tiempo a través del cual el proceso va pasando es --reprentado por una multiplicación por la matriz A, y como A se mueve hacia po---tencias más altas también lo hace S:

$$A^n = \begin{bmatrix} S^n & 0 \\ T_n & I \end{bmatrix}, \tag{11.11}$$

donde T_n representa la salida del sistema.

Varias observaciones se pueden hacer sobre el esquema anterior:

1. El elemento $s_{ij}^{(n)}$ de S^n para i y j no absorbentes, in-

20 Keyfitz, Nathan. 1977. Applied Mathematical Demography. University of Harvard, John Wiley & Sons, New York.

dica la probabilidad de que un individuo que inició en el estado j se encuentre en el estado i al cabo de n periodos.

2. El elemento n_{ij} de la matriz N, $N=(I - S)^{-1}$, representa el número esperado de veces que la cadena que inició en el estado j esté en el estado i no absorbente.

3. El j-ésimo elemento de RN, donde R es un vector horizontal de unos, es el número esperado de pasos antes de ser absorbido un elemento que inicia en el j-ésimo estado no absorbente.

4. La oportunidad de ser absorbido dentro del estado i de la matriz A, para un elemento que inició en el estado j, es el elemento b_{ij} de la matriz B, donde $B=TN=T(I - S)^{-1}$[21].

21 Kemeny, J.G. Snell, J.L., and Thompson, G.L., 1974. Introduction to Finite Mathematics. New York: Prentice Hall.

CAPITULO 12

DEMOGRAFIA DE LAS ORGANIZACIONES

Lo tratado hasta el momento en el desarrollo de este trabajo se usa generalmente para grandes poblaciones; se ha presentado teoría empleada en el estudio de poblaciones a nivel nacional, sin embargo, ésta es una restricción inapropiada, ya que cada ciudad, corporación, escuela, hospital, sindicato o lugar de descanso, tiene su propia demografía.

El funcionamiento de comunidades e instituciones depende de flujos de personas, cuyas entradas son análogas a los nacimientos y sus salidas a las muertes. Para instituciones que tienen relativamente bien definidos sus puestos, diferenciados por edad y sexo como en una población nacional, y en suma, por habilidades y otros requisitos, una demografía que analice esta situación es un tema muy extenso, razón por la cual lo que se presenta a continuación es solamente de carácter introductorio[22].

PERDIDA DE PODER.

Un aspecto del número de personas en una organización, ha sido llamado por Coleman[23] "pérdida de poder", es el que se refiere a la disminución de la influencia de un individuo conforme la organización crece en tamaño. Esta situación se observa claramente en el proceso electoral, donde el individuo tiene en su poder la desición, sólo cuando sus asociados están divididos mitad y mitad. Se puede mostrar que la probabilidad de tal división es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tamaño del grupo votante. Esta ley de la raíz cuadrada inversa se deduce fácilmente.

Con $2n+1$ individuos votando, la posibilidad de que el voto de una persona sea decisivo, es igual a la posibilidad de que los otros $2n$ individuos voten n a favor y n en contra de cualquier situación en debate. El número de

22 March, James G. 1975. Comments at Conference on the Demography of Education. Harvard University, April.

23 Coleman, James S. 1973. Loss of Power. American Sociological Review 38: 1-17.

formas en que esto puede suceder es igual a $\frac{(2n)!}{n!n!}$; el número total de combinaciones de los 2n votos es 2^{2n}, dado que cada uno de ellos puede ser a favor o en contra.

Con posibilidades iguales sobre cada voto, la probabilidad p de que de 2n votos, n sean a favor y n en contra es:

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \; . \tag{12.1}$$

La solución viene a ser formalmente idéntica a la encontrada para la fracción de personas solteras dada en (10.7).

Utilizando la primera aproximación de Stirling[24] para el factorial: $n!=n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, se tiene que:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \; . \tag{12.2}$$

Con n=3 se tiene p=0.3257 contra el valor exacto 0.3125; con n=5 p=0.2523 contra el exacto 0.2641. Para valores mayores de n el error de la aproximación es insignificante. Esto establece la proposición de que el poder de una persona decrece de acuerdo a la raíz cuadrada del tamaño del grupo dentro del cual está participando, suponiendo que ella es la última en votar. En la condición simétrica, antes de que la votación inicie, cada miembro puede tener nada más y nada menos que $\frac{1}{n}$ del poder.

EXITO DE ORGANIZACIONES POLITICAS.

Coleman[25] afirma que uno de los medios por el cual un individuo puede aplicar su habilidad social para conseguir poder es reestructurando al electorado. En la vida real un electorado, ya sea un club social de jóvenes, una comunidad o un país, está integrado por pandillas, facciones, comités, partidos y

24 Freeman, Harry. 1938. Idem.
25 Coleman, James S. 1973. Idem.

otros subgrupos.

En la celda más pequeña, la probabilidad $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ proporciona una oportunidad inapreciable al individuo. Cada persona bien puede lograr cierto sentido del poder a través de tener el voto decisivo en el partido, con una frecuencia relativa, aún cuando las decisiones afecten aspectos menores, tal como la forma en que el partido como totalidad, votará en una gran contienda.

Si la votación es por grupos, la oportunidad de que una persona sea el votante que decida, es un poco diferente a la que tiene cuando vota individualmente. Evidentemente una persona gana poder cercano al radio de $\sqrt{2}$, por ser miembro de una coalición que contiene la mitad de miembros más uno. Ella gana si forma parte de una coalición de cualquier tamaño que vota conjuntamente, mientras otras votan de manera individual. Coleman[26] prueba que el tamaño de la coalición que maximiza el poder de la persona, es considerablemente menor que el 51% que proporciona el control absoluto.

JERARQUIAS ECONOMICAS.

Las organizaciones económicas frecuentemente se dividen de manera natural en jerarquías, en virtud de los requerimientos técnicos de producción y toma de decisiones. Para simplificar una organización típica, supóngase que hay un sólo dirigente en ella, el cual tiene s personas que le reportan directamente a él, y cada una de éstas tiene a su vez s personas que le reportan, donde s es denominada la esfera de control[27].

Si existen n niveles, entonces el personal de la organización se distribuye de la siguiente manera:

nivel	1	2	3	. . . .	n
número de empleados	1	s	s^2	. . . .	s^{n-1} ,

y el personal total al tiempo t será:

26 Coleman, James S. 1973. Idem.
27 Keyfitz, Nathan. 1977. Idem.

$$P(t) = \frac{s^n - 1}{s - 1} . \qquad (12.3)$$

Entonces, si se realiza un retiro en el nivel i, la oportunidad de promoción para cada individuo del nivel i+1 es $\frac{1}{s^i}$, esta oportunidad es un valor muy pequeño para el escalón más bajo de la jerarquía.

Hay que hacer notar que como s es mayor que uno, hay más personas en el nivel más bajo (nivel n) que en todos los demás niveles superiores juntos (del nivel 1 al n-1). Si la antiguedad se mantiene para la promoción, el punto medio entre la cima y la parte más baja se encontrará siempre dentro del nivel más bajo.

Una persona en una organización con una esfera de control de 5, es decir s=5, estará a un 80% del camino hacia la cima en el momento en que es ascendido fuera del nivel más bajo cuando la escala está en términos de individuos; pero cuando dicha escala está en función de niveles, la persona estará tan sólo a $\frac{1}{n}$ del camino a la cima (el primer nivel).

Suponiendo que la organización inicia con P_0 empleados distribuídos en k estratos, entonces:

$$P_0 = 1 + s + s^2 + . . . + s^{k-1} = \frac{s^k - 1}{s - 1} , \qquad (12.4)$$

y si crece a una tasa r, su tamaño al tiempo t puede expresarse como:

$$P(t) = P_0 e^{rt} . \qquad (12.5)$$

Igualando (12.3) y (12.5):

$$\frac{s^n - 1}{s - 1} = \frac{s^k - 1}{s - 1} e^{rt} . \qquad (12.6)$$

Para una población pequeña, el error al sustituir s^n por $s^n - 1$ y s^k por $s^k - 1$ es despreciable. Esta situación permite resolver (12.6) para n:

$$s^n = s^k e^{rt} , \tag{12.7}$$

por lo que:

$$n = k + \frac{rt}{\ln s} , \tag{12.8}$$

donde k, el número inicial de niveles, sólo depende de la población inicial y de la esfera de control.

De lo anterior se concluye que la creación de nuevos niveles se da a una tasa constante de $\frac{r}{\ln s}$ por unidad de tiempo , equivalentemente, que cada - $\frac{\ln s}{r}$ unidades de tiempo se crea un nuevo nivel.

Los límites de una organización no siempre están bien definidos; --- en efecto, estos límites pueden estar determinados por el punto de vista del individuo. Por ejemplo: un enfermero en un hospital está cerca de la parte más baja de la jerarquía hospitalaria, pero si se piensa que los pacientes forman parte del hospital, entonces se adiciona un nivel sustancial debajo de él. Un ayudante de profesor en una universidad, está en la parte más baja o no, dependiendo si los estudiantes son o no incluídos en la jerarquía universitaria. Un miembro de una facultad puede estar en un lugar alto de alguno de los departamentos de ella, paro en un lugar bajo en la colección de departamentos de la universidad en la que se encuentra.

Suponiendo que las reglas de una organización son determinadas por - absoluta antiguedad, tal que cada uno de sus miembros tiene un turno para estar en la cima sólo por un periodo corto; en una condición estacionaria, la fracción de su servicio que puede tener en la cima es:

$$\frac{1}{p} = \frac{s - 1}{s^n - 1} . \qquad (12.9)$$

Si s=5 y n=9, un individuo podrá estar en la cima de la organización durante $\frac{4}{5^9 - 1}$ de su carrera, lo cual equivale a 11 minutos de sus 45 años de servicio.

BIBLIOGRAFIA

* Bartholomew, David J. 1967. Stochastic Models for Social Processes. New York: John Wiley & Sons.

* Brass, William. 1963. The construcyion of life tables from child survivorship ratios. In International Population Conference (IUSSP) New York, 1961: — Proceedings, Vol. 1, pp. 294-301. London: International Union for the Study of Population.

* Brass, William. 1974. Perspectives in population prediction, illustrated by - the statistics of England and Wales. Journal of the Royal Statistical Society, Series A: General 137: 532-583.

* Chiang, C.L. 1968. Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics. New York: John Wiley & Sons.

* Coale, Ansley. 1956. The effects of changes in mortality and fertility on age composition. Milbank Memorial Fund Quarterly 34: 79-114.

* Coale, Ansley. 1957. A new method for calculating Lotka's r the intrinsic rate of growth in a stable population. Population Studies 11: 92-94.

* Coale, Anrley. 1968. Convergence of a human population to a stable form. Journal of the American Statistical Association 63: 395-435.

** Coale, Ansley. 1971. Age patterns of marriage. Population Studies 25: 193-214.

* Coale, Ansley. 1972. The Growth and Structure of Human Population. A Mathematical Investigation. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

* Coale, Ansley and Demeny, Paul. 1967. Method of Estimating Basic Demographic Measures from Incomplete Data. Manuals on Methods of Estimating Population, Manual 4. ST/SOA/Series A/42. New York: United Nations.

** Coale, Ansley and McNeil, D.R. 1972. Distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort. Journal of the American Statistical — Association 67: 743-749.

** Coleman, James S. 1973. Loss of Power. American Sociological Review 38: 1-17.

* Feller, W. 1941. On the integral equation of renewal theory. Annals of Mathematical Statistics 12: 243-267.

* Feller, W. 1973. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, - Vol. 1. Third Edition. New York: John Wiley & Sons.

** Freeman, Harry. 1962. Finite Differences for Actuarial Students. Cambridge, - England: University Press.

* Glick, Paul C. 1955. The life cycle of the family. Marriage and Family Living 17: 3-9.

* Goodman, Leo A. 1953. Population growth of the sexes. Biometrics 9: 212-225.

* Greville, Thomas N.E. 1943. Some methods of constructing abridged life tables. Record of the American Institute of Actuaries 32, Part 1 29-43.

* Greville, T.N.E. and Keyfitz, Nathan. 1974. Backward population projection by a generalizedinverse. Theoretical Population Biology 6: 135-142.

** Henry, Louis. 1969. Outlines of nupciality: lack of balance of sexes at celibacy. Population 24: 457-486.

** Hernes, Gudmund. 1972. The process of entry into first marriage. American Sociological Review 27: 173-182.

* Hoem, J.M. 1971. On the interpretation of the maternity function as a probability density. Theoretical Population Bilogy 2: 319-327.

** Kemeny, J.G. Snell, J.L., and Thonpson, G.L. Introduction to Finite Mathematics. New York: Prentice-Hall.

** Keyfitz, Nathan. 1968. Introduction to the Mathematics of Population. Reading Mass.: Addison-Wesley.

* Keyfitz, Nathan. 1969. Age distribution and the stable equivalent. Demography 6: 261-269.

** Keyfitz, Nathan, and Flieger, Wilhelm. 1968. World Population: An Analysis of Vital Data. Chicago: University of Chicago Press.

** Keyfitz, Nathan, and Flieger, Wilhelm. 1971. Population: Facts and Methods of Demography. San Francisco: W.H. Freeman.

* Keyfitz, Nathan, Nagnur, Dhruva, and Sharma, Divakar. 1967. On the interpretation of age distributions. Journal of the American Statistical Association 62: 862-874.

** Keyfitz, Nathan. 1977. Applied Mathematical Demography. A Wiley-Interscience-Publication. New York: John Wiley & Sons.

** Leslie, P.H. 1945. On the use of matrices in certain population mathematics.- Biometrika (London) 33: 183-212.

** Leslie, P.H. 1948. Some further notes on the use of matrices in population -- mathematics. Biometrika (London) 35: 213-245.

** Lotka, Alfred J. 1922. The stability of the normal age distribution. Proceedings of thr Natinal Academy of Sciences 5: 339-345.

* Lotka, Alfred J. 1948. Application of recurrent series in renewal theory. --- Annals of Mathematical Statistics 19: 190-206.

** March, James G. 1975. Comments at Conference on the Demography of Education.- Harvard University, April.

** McDonald, John. 1973. Sex predetermination: Demographic effects. Mathematical Biosciences 17: 137-146.

** McFarland, David D. 1970. Effects of group size on the availibility of marria ge partners. Demography 7: 411-415.

** Preston, Samuel H. 1974. Effect of mortality change on stable population pa-- rameters. Demography 11: 119-130.

** Preston, Samuel H. 1975b. Estimating proportion of marriages that end in di-- vorce. Sociological Methods and Research 3: 435-459.

* Rao, C.R., and Mitra, S.K. 1971. Generalized Inverse of Matrices and Its - -- Applications. New York: John Wiley & Sons.

** Spiegelman, Mortimer. 1968. Introduction to Demography. Revised Edition. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

** Whelpton, Pascal K. 1936. An empirical method of calculating future popula--- tion. Journal of the American Statistical Association 31: 457-473.

** Whelpton, Pascal K. 1946. Reproduction rates adjusted for age, parity, fecundity and marriage. Journal of the American Statistical Association 41: -- 501-516.

* Recomendada.

** B&sica.