Zej'. 22

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS DINAMICOS DE GALAXIAS ELIPTICAS TRIAXIALES

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a :

ALEJANDRO GONZALEZ SANCHEZ

México, D.F. 1987

MODELOS DINAMICOS DE GALAXIAS ELIPTICAS TRIAXIALES

INDICE

I. INTRODUCCION

Actualmente no se conoce con certeza si la formación de galaxias se llevó a cabo o no mediante procesos disipativos. Si tal es el caso, las actuales galaxias no reflejan las condiciones iniciales de las cuales se formaron. En caso contrario pueden retener suficiente información y reflejarla en su morfología, cinemática y dinámica actuales. Por tanto, un conocimiento más apegado a la realidad de estos aspectos, debe conducir a un mejor conocimiento de las condiciones prevalecientes en el universo durante la etápa de formación de galaxias.

Recientes trabajos observacionales, empezando en 1976 con la obtención de las primeras curvas de rotación de galaxias elípticas, han puesto en evidencia nuevos aspectos de su morfología y dinámica que cambian la visión que de ellas se tenía. Algunos de estos aspectos son, por un lado, la estructura triaxial de las galaxias, cuya existencia está basada en las bajas velocidades de rotación, alta dispersión anisotrópica de velocidades y los gradientes de elipticidad y posición angular de las isofotas, observadas. Por otro lado, los trabajos teóricos que al hacer uso de la teoría de formación de galaxias por colapsos no disipativos, de condiciones iniciales anisotrópicas en las velocidades y una relajación por oscilaciones del campo gravitacional, logran explicar las observaciones a partir de estructuras triaxiales sin rotación. Actualmente se cree que existen distintos tipos de galaxias elípticas: triaxiales, oblatas anisotrópicas, oblatas por rotación e incluso prolatas.

En particular, los modelos de galaxias triaxiales muestran que éstas solo pueden existir si son sistemas altamente anisotrópicos. Debido a ésto no es posible asociarles un potencial axisimétrico, pues este tipo de potenciales predice un plano de isotropía, inexistente en las galaxias triaxiales. La anisotrópia necesaria para sostener una galaxia triaxial, estable por 10^{10} años, se da si su función de distribución posee tres integrales de movimiento: la energía y otras dos no clásicas. La forma analítica de las integrales de movimiento no es posible conocerla ya que las ecuaciones de movimiento resultan ser acopladas, sin embargo, Schwarzschild (1979) ha construído, en base a un perfil de densidad de Hubble, el primer modelo de un potencial triaxial cuyas órbitas asociadas tienen tres integrales de movimiento. Estas órbitas definen tres familias presentes también en los llamados potenciales de Stäckel, separables en coordenadas elipsoidales y para los cuales se conocen las tres integrales de movimiento en forma analítica. El ajuste de un potencial integrable de Stäckel perturbado que más se parezca a un potencial galáctico, lleva a expresiones analíticas aproximadas de las integrales de movimiento galácticas como perturbaciones de las de Stäckel.

La dinámica de las galaxias triaxiales será el tema de estudio de este trabajo, cuyos objetivos son en primer lugar, dar los argumentos que sostienen la existencia de estructuras triaxiales; reproducir y generalizar algunos de los pasos del modelo autoconsistente de Schwarzschild y mostrar que presenta un potencial repulsivo no deducible de las ecuaciones. Se hará la correción al potencial. Aunque posiblemente la corrección presentada en este trabajo cambie las conclusiones de Schwarzschild, la verificación de tal aseveración no será parte de los objetivos debido a los problemas de tiempo de cómputo que representa, pero se darán algunas condiciones bajo las cuales sigue siendo válido. El objetivo principal es dejar expresado el potencial triaxial en términos de las razones de ejes, lo que permitirá modelar galaxias triaxiales, oblatas, prolatas y esféricas sin rotación. A partir de un ajuste se expresará el potencial en términos de potenciales de Stăckel para hallar las expresiones analíticas de las tres integrales de movimiento. Estas quedarán también en función de las razones de ejes y dejará abierta la posibilidad de estudiar su evolución al pasar a distintos tipos de galaxias. También como parte de los objetivos es introducir las técnicas de exploración de sistemas hamiltonianos que son útiles para evaluar hasta que grado un potencial galáctico es integrable. Es decir si el potencial modelado conserva la estructura orbital para considerarse estable.

Con tales fines el trabajo se ha organizado de la siguiente manera: en el capítulo II se darán los argumentos observacionales y teóricos que sostienen la existencia de galaxias triaxiales. Se hará énfasis en que la velocidad de rotación no es suficiente para producir la elipticidad observada y la necesidad de una alta dispersión de velocidades como mecanismo alternativo de achatamiento. En III se describirá la teoría de formación de galaxias por colapso no disipativo a partir de condiciones iniciales anisotrópicas y relajadas por el mecanismo de la relajación violenta, que conduce a estructuras elongadas oblatas y triaxiales sin rotación. Aquí se verá que la anisotropía no es estrictamente necesaria para obtener este tipo de configuraciones. En el capítulo IV se introduce la teoría de los potenciales separables de Stäckel y se dan las expresiones de las integrales de movimiento. Se hace uso de la teoría del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) y de los mapeos para explorar sistemas hamiltonianos, que dan indicios de la existencia y destrucción de integrales de movimiento. Se verá que la destrucción de integrales de movimiento da origen a regiones caóticas en el espacio fase, que pueden ser estimadas por la integral de Melnikov. Una region caótica pequeña no altera la estructura orbital global de un potencial de Stäckel perturbado y puede simular un potencial galáctico. En V se reproduce parte del modelo de Schwarzschild y se corrige el potencial. Se expresará el potencial en términos de las razones de ejes y a partir de los potenciales de Stäckel se hará un ajuste para hallar las expresiones aproximadas de las integrales de movimiento de galaxias triaxiales. Finalmente en VI se presentarán las conclusiones y se discutirán los trabajos que pueden realizarse a partir de lo elaborado en éste.

II. TRIAXIALIDAD Y ANISOTROPIA DE GALAXIAS ELIPTICAS

Durante mucho tiempo se pensó que el momento angular de las galaxias elípticas era suficiente para explicar la elipticidad observada, pero mediciones de algunas curvas de rotación muestran que su velocidad no es suficiente para producirla. Adicionalmente se ha observado que las isofotas de algunas galaxias, presentan un gradiente de elipticidad y posición angular como función de la distancia al centro de la galaxia. Estos elementos rompen con la visión biaxial de las galaxias elípticas ya que el aplanamiento puede ser explicado si la nube protogalactica poseé una alta dispersión anisotrópica de velocidades y un bajo o nulo momento angular. Los gradientes observados en las isofotas se explican si la estructura es triaxial.

Para delinear los argumentos que conducen a la idea de la triaxialidad, discutiré en a) la relación existente, para las galaxias elípticas, entre su excentricidad y su momento angular bajo la hipótesis de que son elongadas por rotación, y en b) la inconsistencia de este resultado con las curvas de rotación observacionales. También en b) trataré sobre el mecanismo alternativo de la dispersión anisotrópica de velocidades que explica la elipticidad de las galaxias. Se mencionarán, en c), los elementos que sugieren la existencia de galaxias triaxiales.

a) Relación teórica excentricidad-momento angular

Los primeros intentos por modelar galaxias elípticas estuvieron basados en un razonamiento inverso al que Newton utilizó para explicar el origen de la geometría oblata de la Tierra: un sistema autogravitante, como lo es una galaxia, que presente excentricidad distinta de cero debe encontrarse rotando con una velocidad angular suficientemente grande como para producir tal deformacion. Tal es el caso de los esferoides homogeneos; Aikawa (1971), por otro lado, ha demostrado que los modelos de galaxias elípticas construidos como esferoides politrópicos $[P \equiv K\rho^{(n+1)/n}]$ en rotación diferencial, muestran un comportamiento similar al de un esferoide homogéneo que rote con velocidad angular constante. Aunque la condición de homogeneidad no es aplicable a las galaxias, en base a la similaridad demostrada por Aikawa deduciré la relación existente entre la excentricidad e y la velocidad angular Ω para un sistema homogéneo. Para un esferoide con semiejes a_1, a_2 y cuyo eje de simetría coincida con el eje de rotación a_3, el teorema virial tensorial toma la forma (Chandrasekhar, 1969):

$$W_{ij} + \Omega^2(I_{ij} - \delta_{i3}I_{3j}) = -\delta_{ij}\Pi,$$

donde I, W y Π son respectivamente los tensores de inercia, energía gravitacional y energía interna. De aquí se obtiene la expresión para Ω^2 en unidades de $\pi G\rho$

$$\Omega^2 = 2(A_1 - A_3 I_{33}/I_{11}),$$

donde las A_i por estar definidas en términos de los ejes, introducen la geometría del sistema:

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty du/[\Delta(a_i^2+u)], \text{ y } \Delta^2 = \Pi_j(a_j^2+u).$$

Bajo la condición $a_1 = a_2 > a_3$ se obtiene la secuencia de esferoides oblatos llamada de Maclaurin y caracterizada por:

$$\Omega^2=2e^{-3}(1-e^2)(3-2e^2)\text{sen}^{-1}e \; -6e^{-2}(1-e^2) \quad , \qquad \ldots II.1$$

y momento angular:

$$L=3M\Omega(a^2a_3)^{2/3}/5,$$

donde M es la masa del esferoide. La Fig. II.1 muestra estas relaciones.

Se observa de las gráficas que la secuencia va desde una esfera cuando el momento angular es cero, hasta un disco cuando tiende a infinito.

Existe un punto R sobre la secuencia en $\Omega^2=0.3742$ donde el esferoide se vuelve secularmente inestable. Esta inestabilidad da origen a una nueva secuencia de elipsoides triaxiales llamada de Jacobi, con $a_1>a_2>a_3$. Se puede demostrar que para valores fijos de L, M y V(volumen del sistema) la energía total es menor para las configuraciones triaxiales que para las configuraciones con simetría biaxial. De acuerdo a esto, un esferoide de Maclaurin evolucionará a un elipsoide de Jacobi si opera algun mecanismo disipativo (viscosidad del medio), con el cual elimine su exceso de energía. Si se realiza el análisis de estabilidad, se encuentra que son los modos sectoriales de oscilación los que conducen a una evolución de este tipo. Escencialmente, los modos sectoriales describen la oscilación de los hemisferios del sistema. Si no interviene ningún proceso disipativo, pasando el punto R el esferoide de Maclaurin oscila.

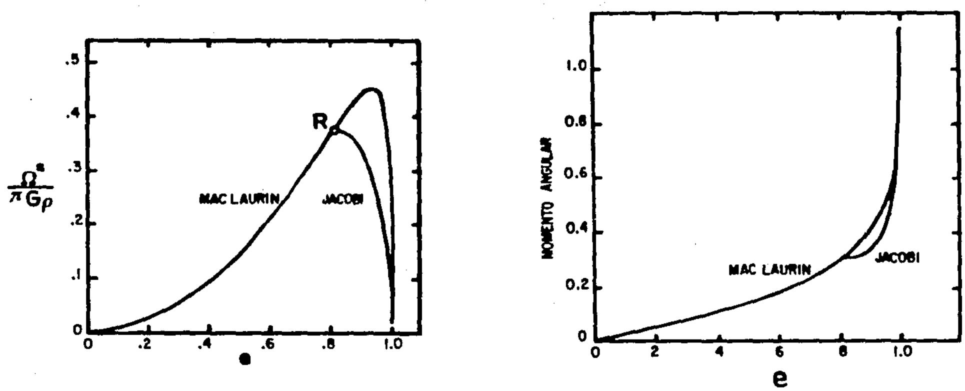


Fig. II.1
Variación de la excentricidad como función
de la velocidad y el momento angular.

Para una excentricidad dada el elipsoide de Jacobi rota más lento que el correspondiente de Maclaurin debido a que su momento de inercia es mayor. De la misma gráfica puede verse que para un valor fijo de Ω existen tres configuraciones posibles, de excentricidad distinta, que puede asumir un sistema: dos esferoides oblatos y un elipsoide triaxial.

Ahora bien, aparentemente las galaxias elípticas son sistemas conservativos sobre los que no opera ningún proceso disipativo. Este hecho, por el razonamiento anterior excluye como modelo una estructura triaxial estable. Por tanto, si la excentricidad de las galaxias fuese ocasionada por la existencia de alto momento angular, las curvas de rotación observacional y la teórica, correspondiente a un esferoide oblato de Maclaurin con la misma excentricidad deben ser similares.

b) **Achatamiento por dispersión anisotrópica de velocidades**

En 1975, Bertola y Capaccioli lograron medir la primer curva de rotación de una galaxia elíptica, NGC4697, clasificada por Sandage(1961) como E5 . Encuentran que hay una parte central que rota como cuerpo rígido donde la velocidad v_r aumenta linealmente con la distancia al centro hasta un máximo de 65Km/seg, luego se mantiene casi constante en rotación diferencial. Al corregir por efecto de proyección, Bertola y Capaccioli concluyen que la máxima velocidad de rotación posible para la galaxia es de 85 km/seg, muy baja para explicar la elipticiad observada, pues la velocidad de rotación teórica para un esferoide E5 de Maclaurin es de 300 km/seg.

La inconsistencia entre las observaciones y los modelos fué confirmada por Illingworth (1977) quien encuentra que las velocidades de rotación para 13 galaxias elípticas son aproximadamente 1/3 de las requeridas para explicar la elipticidad a través de esferoides de Maclaurin. Illingworth concluye que si las galaxias fuesen oblatas, el bajo valor encontrado para su momento angular indica que la distribución de velocidades en la dirección z debe ser menor que en las otras dos direcciones. De esta manera el sistema se aplana sobre el plano de simetría sin necesidad de rotación.

Por otro lado, Faber y Jackson(1976) han encontrado una relación entre la luminosidad L de las galaxias y su dispersión central de velocidades σ: $L\propto\sigma^4$, lo que permite cuantificar la razón de energía cinética rotacional T_r a interna T_t a través de la relación deducida del terema virial:

$$T_r/T_t=(v/\sigma)^2.$$

En el caso de NGC4697 King y Minkowski(1966) han encontrado que σ=310 km/seg, por lo que el bajo valor de (v/σ)=0.075 refleja que la energía interna es dinamicamente más importante que la rotacional. Este resultado también se observa en las 13 galaxias estudiadas por Illingworth, para las cuales v/σ toma valores en el intervalo [0.1,0.45], de donde se infiere que en estas galaxias el achatamiento no es producido por la rotación, y en cambio puede ser ocasionada por la alta dispersión de velocidades.

A raíz del descubrimiento de Bertola y Capaccioli, Binney (1976) realizó un importante experimento numérico en el que demuestra que una formación de galaxias a partir de un colapso con condiciones iniciales anisotrópicas en la dispersíon de velocidades retiene, después de que el sistema se ha relajado, suficiente anisotropía como para aplanar el sistema aún cuando tenga solo una pequeña rotación. La configuración final obtenida es un esferoide oblato anisotrópico o una configuración triaxial.

Para comprobar este mecanismo no rotacional de achatamiento, Binney (1978) dedujo una relación entre el cociente v/σ y los distintos grados de anisotropía para sistemas oblatos cuya densidad se encuentra estratificada en elipsoides similares. Un sistema como éste tiene isofotas concéntricas y coaxiales. Tomando el primer momento de la ecuación de Boltzmann, se obtiene el teorema virial tensorial

$$\ddot{I}_{ij}/2 = 2T_{ij} + W_{ij} + \Pi_{ij} \;, \qquad \ldots II.2$$

donde T es el tensor de energía cinética. Supongamos que la galaxia rota sobre el eje menor x_3, con una velocidad angular Ω . Si se elige un marco de referencia comóvil al sistema se tiene que:

$$\ddot{I}_{ij}/2 = \Omega^2 \begin{pmatrix} \delta I & 0 & 0 \\ 0 & -\delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{con } \delta I = I_2 - I_1 > 0.$$

Sustituyendo en II.2 y descomponiendo el tensor de energía interna en la presión y su componente anisotrópica de velocidades $\Pi_{ij}=\Pi\delta_{ij}+\tilde{\Pi}_{ij}$, se obtiene:

$$[2(T_{11}+T_{22})+3\Pi]/[2(T_{11}+T_{22}-3\tilde{\Pi}_{33}]=(W_{11}+W_{22}+W_{33})/[W_{11}+W_{22}-2W_{33}] \qquad \text{...II.3}$$

Debido a que no hay movimiento a lo largo del eje de rotación, $T_{33}=0$, y la energía cinética queda dada solamente por: $T_{11}+T_{22}=Mv^2/2$ y $\Pi+\tilde{\Pi}_{11}=M\sigma^2$. Sustituyendo en II.3

$$(\sigma/v)^2=([W_{11}+W_{22}+W_{33}](1+3Q_3/2)/[W_{11}+W_{22}-2W_{33}] - 1 -3Q_1/2)/3, \qquad \text{...II.4}$$

donde $Q_i=-\tilde{\Pi}_{ii}/(T_{11}+T_{22})$ mide el grado de anisotropía en unidades de energía cinética. Roberts (1962) demostró que el tensor de energía potencial W_{ij} para un elipsoide con superficies de isodensidad similares viene dado por: $W_{ij}=-\pi^2 Ga^4_i a^2_h a^2_l A_i \delta_{ij} R$, donde R es una función que describe el perfil de densidad. Así, sustituyendo W_{11}, W_{22}, W_{33} e invirtiendo II.4, obtenemos

$$(v/\sigma)=([1+3Q_3/2]/[[1-(3A_3a_3/I)] -1 -3Q_1/2)]/3)^{-1/2} \text{ con } \quad I=\int_0^\infty du/\Delta. \qquad \text{...II.5}$$

De aquí se observa que v/σ depende solo de la razón de ejes implícita en $\alpha=a^2_3A_3/I$ pero que es independiente tanto del perfil radial de la densidad como de la velocidad angular. En ausencia de anisotropía, i.e. $Q_i=0$ la forma de una galaxia queda determinada por la razón de energía cinética rotacional a energía interna isotrópica. En tal caso se puede demostrar que α es más grande para una galaxia oblata que para una prolata, por lo que en el primer caso la velocidad de rotación es mayor. Un sistema triaxial se comporta en forma intermedia.

La característica común de las observaciones es que $v/\sigma \ll 1$ lo cual puede explicarse de II.5 aumentando la anisotropía, $Q_t \neq 0$. En la Fig. II.2 se describe la variación v/σ como función de la elipticidad para diferentes modelos y grados de anisotropía. La línea contínua corresponde a un esferoide oblato isotrópico ($Q_1 = Q_3 = 0$). La línea de rayas y puntos es para un elipsoide triaxial isotrópico (de Jacobi) y la punteada para un esferoide oblato anisotrópico $Q_3 = 2$, $Q_1 = -1$. Las cruces son datos observacionales de galaxias elípticas gigantes.

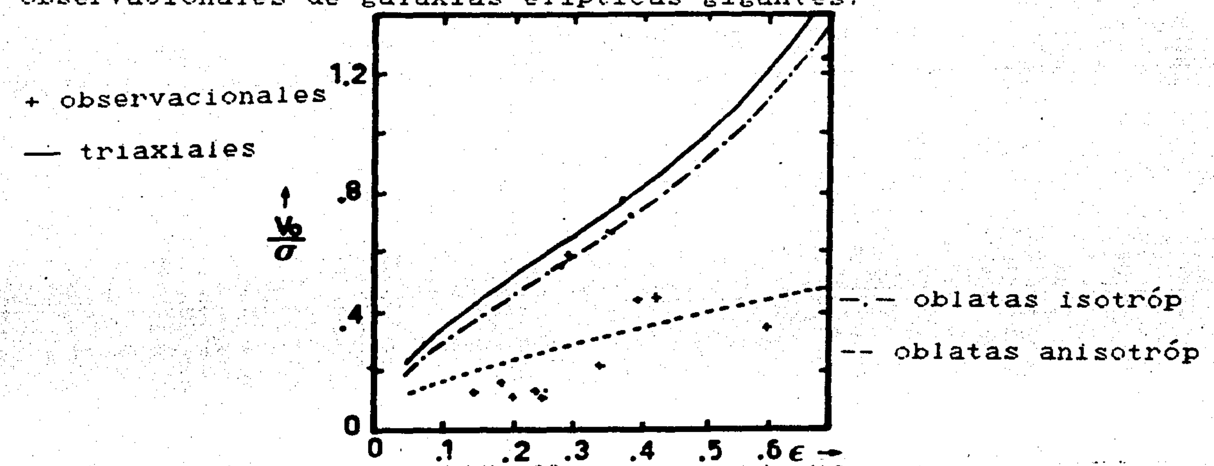


Fig. II.2
v/σ como función de la elipticiad para distintas geometrias y grados de anisotropía.

De esta gráfica se puede ver que los puntos observacionales quedan uniformemente distribuidos a lo largo de la curva teórica para un esferoide oblato anisotrópico. Solo una galaxia caé en la curva de los modelos triaxiales; es valido, por tanto, creer que las galaxias elípticas se encuentran soportadas por dispersión anisotrópica de velocidades y no por rotación.

c) **Galaxias elípticas triaxiales anisotrópicas**

King (1976) y Williams-Schwarzschild (1976) han reportado algunas galaxias que no presentan isofotas concéntricas como lo supone Binney en sus modelos, pues presentan una variación en su elipticidad y su posición angular al alejarse del centro de la galaxia. Fig. I.3. Sin embargo Fish (1961) ha demostrado que para un sistema biaxial orientado arbitrariamente en el cielo, las isofotas son elipses concéntricas y coaxiales. Esto quiere decir que las galaxias reportadas por King y Williams-Schwarzschild no tienen simetría biaxial. Para explicar los gradientes observados es necesario recurrir a la idea de que estas galaxias son triaxiales. Esta es una posibilidad razonable ya que Stark (1978) ha logrado explicar cambios similares en la elipticidad y la posición angular de las isofotas del núcleo de M31, mediante una estructura triaxial.

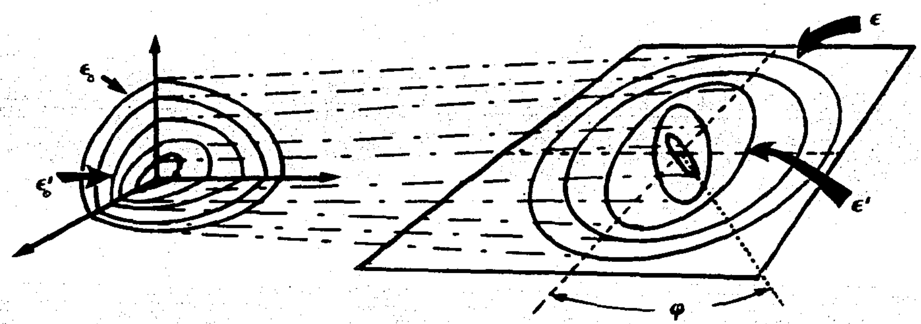


Fig. II.3
Proyección sobre el plano del cielo de las superficies triaxiales de igual intensidad.

Considerese un sistema cuya luminosidad F_ν es constante en elipsoides triaxiales concéntricos y coaxiales(similares). En un sistema de referencia xyz fijo al elipsoide, las isofotas estan dadas por:

$$(tx)^2 + (uy)^2 + z^2 = a_\nu^2, \qquad \text{...II.6}$$

donde t y u son las razones de ejes x/z y y/z y a_ν es una variable que paramétriza la luminosidad $F_\nu = F_\nu(a_\nu)$. Mediante una rotación a través de los dos primeros ángulos de Euler es posible transformar el sistema a uno nuevo x'y'z' en el que el eje z' coincida con la línea que une al observador con el centro de la galaxia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi & \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\mathrm{sen}\theta\cos\varphi \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

con lo cual II.6 se expresa como:

$$fz^2 + gz' + h = a_\nu^2 , \qquad \ldots II.7$$

donde las funciones f,g y h dependen de los ángulos θ y φ y la razón de ejes t y u . El observador en el plano x'y' solo puede medir el brillo superficial

$$F_s=F_s(x',y')=\int_{-\infty}^{\infty} F_\nu(a_\nu)\,dz' . \qquad \ldots II.8$$

Para x' y y' fijos el integrando es simétrico respecto al punto sobre la visual en el que a_ν sea mínimo. Sea a_s este valor, dado por la condición

$$(\partial a_\nu/\partial z')_{a_s}=0, \text{ de donde } a_s=(h-g^2/4f)^{1/2}. \qquad \ldots II.9$$

Usando II.7, II.8 puede escribirse como:

$$F_s=F_s(a_s)=2f^{-1/2}\int_{a_s}^{\infty} F_\nu(a_\nu)(a_\nu^2-a_s^2)^{-1/2} a_\nu\, da_\nu ,$$

que es la luminosidad superficial parametrizada por a_s. Para los distintos valores de a_s, II.9 permite hallar la ecuación de las isofotas:

$$a_s^2=(j/f)x^2+2(k/f)x'y'+(l/f)y^2 , \qquad \ldots II.10$$

con j,k y l definidas por :

$$j=t^2u^2\mathrm{sen}^2\theta+t^2\cos^2\varphi\cos^2\theta+u^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\theta,$$

$$k=(u^2-t^2)\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta,$$

$$l=t^2\mathrm{sen}^2\varphi+u^2\cos^2\varphi.$$

Para una razón fija de ejes y una orientación particular del sistema, II.10 reproduce una familia de elipses rotadas un ángulo constante respecto del semieje mayor aparente de la galaxia, y aunque el análisis anterior explica la rotación de las isofotas, presenta una seria limitación, pues no explica ni el gradiente de elipticidad $\nabla\epsilon$ ni el gradiente en la posición angular $\nabla\varphi$. Leach (1981), con mediciones hechas con un CCD, mide para 30 galaxias los gradientes como función de r, mostrados en la fig. II.4. Para reproducir los posibles elipsoides triaxiales que pueden dar origen a los gradientes observados, construyó una familia de elipsoides de dos parámetros; la orientación y la razón de ejes. Considera que las superficies de igual intensidad no son elipsoides similares sino que la razón de ejes varia al alejarse del centro. Esto se traduce en variar j,k,l y f en II.10, por lo que ahora esta ecuación describe una familia de elipsoides no similares (ni concéntricos, ni coaxiales) que presentan un gradiente en la elipticidad y la posición angular. La fig. II.5 muestra las distribuciones $(\epsilon,\nabla\varphi)$ y $(\nabla\epsilon,\nabla\varphi)$ observacionales y teóricos. Las distribuciones resultan ser similares. De todo lo anterior puede concluirse que aquellas galaxias cuyas isofotas presenten gradientes de elipticidad y posición angular, son triaxiales (sin embargo véase Leach, 1981, donde da otras alternativas).

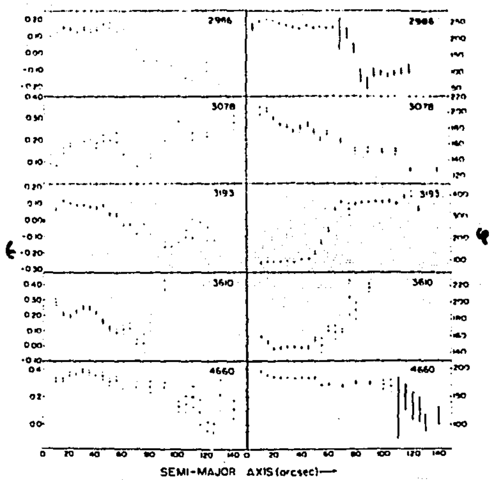


Fig. II.4
Variación de $\nabla\epsilon$ y $\nabla\varphi$ observacional

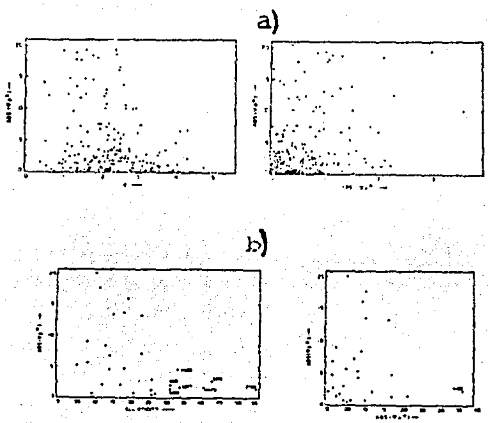


Fig. II.5
Distribución a) teórica y b) observacional de $(\nabla\epsilon, \nabla\varphi)$

Davis (1982) ha encontrado que algunas galaxias elípticas caracterizadas por ser poco masivas y de baja luminosidad, presentan valores de v/σ lo suficientemente altos como para explicar su elipticidad por efecto de la rotación. Las galaxias muy masivas y de alta luminosidad presentan valores muy pequeños, y son las que se encontrarían soportadas por una alta dispersión de velocidades. Por otro lado, no todas las galaxias presentan isofotas con gradientes en su elipticidad y posición angular, lo cual hace pensar en la posibilidad de que existan varios tipos de galaxias: oblatas elongadas por rotación, oblatas anisotrópicas, triaxiales con nula o baja rotación, e incluso prolatas. Veremos a continuación, que las galaxias triaxiales deben ser sistemas con alta dispersión anisotrópica de velocidades. Según Binney, si las galaxias se forman a partir de un colapso no disipativo con condiciones iniciales anisotrópicas en la dispersión de velocidades, después de que el sistema se ha relajado conserva suficiente anisotropía como para aplanar la galaxia.

III. FORMACION DE GALAXIAS ELIPTICAS POR COLAPSO NO DISIPATIVO

Actualmente no se sabe si las galaxias se forman o no mediante procesos disipativos. Si el proceso es no disipativo, las condiciones actuales de las galaxias reflejan las condiciones iniciales de las cuales se formaron, pero en caso contrario explicar las galaxias actuales es muy difícil pues se hace necesario estudiar todos los posibles mecanismos de disipación y el grado de importancia que tiene cada uno. El resultado final de estos procesos no reflejaría las condiciones existentes en el inicio de las galaxias. Sin embargo, en la etápa de formación estelar en la que predomina el gas, dominan los procesos disipativos. Cuando se han formado las estrellas tales procesos desaparecen. En este capítulo, en a), se desarrollará la idea de Binney de que las galaxias se forman a partir de estructuras laminares llamadas 'pancakes', formadas de estrellas y en la cual existe una dispersión anisotrópica de velocidades desde el inicio. Se recurre al mecanismo de oscilación rápida del campo gravitacional como mecanismo de relajación (relajación violenta). También se describirán, en b), los experimentos de N cuerpos realizados por Binney, introduciendo la anisotropía y la relajación violenta, con los cuales logra modelar galaxias oblatas sin rotación y galaxias triaxiales. En el primer caso reproduce un perfil de Hubble de la densidad. En c) veremos que la anisotropía no es estrictamente necesaria para modelar galaxias elongadas sin rotación. Finalmente en d) hablaré de la necesidad de introducir una tercera integral de movimiento I_3 para generar la anisotropía en la dispersión de velocidades.

a) **Relajación con anisotropía**

La teoría de la inestabilidad gravitacional supone que en el universo temprano se producen fluctuaciones que hacen que el medio se fragmente y colapse en aquellas regiones en que la densidad es mayor que la densidad promedio. Sin embargo el centro de masa de cada fragmento sigue moviendose como parte del flujo de Hubble del universo, lo cual explica la recesión observada de los cúmulos de galaxias . Si la energía gravitacional de las nubes es mayor que la energía térmica, sufrirán un colapso y fragmentación sucesiva, para lo cual es necesario que su masa sea mayor que una masa crítica, llamada de Jeans(1902):

$$M_J = (\pi kT/\mu G)^{3/2} \rho^{-1/2},$$

que depende de la temperatura T y la densidad ρ, suponiendo que en esta época el medio se comporta como un gas ideal ($P=\rho kT/\mu$). Aunque globalmente el universo es homogéneo e isotrópico debieron existir inhomogeneidades tanto en la densidad como en la composición química y consecuentemente en la opacidad, la cual debió tener valores pequeños de tal forma que el proceso fué isotérmico. Es decir, aunque las nubes se contraen el material es muy transparente a la radiación enfriandose más rápido de lo que se colapsa, $t_e < t_c$. Pero con el colapso aumenta la densidad y disminuye la masa de Jeans, provocando una nueva fase de colapso y fragmentación. Lin, Mestel y Shu (1965) han demostrado que una nube que se colapse unicamente bajo la influencia de la gravedad se vuelve altamente anisotrópica. Para cada nueva subcondensación en el proceso, la densidad y la opacidad aumentan, pero la masa de Jeans disminuye hasta que el material se hace tan opaco que el tiempo de colapso se hace menor que el de enfriamiento, $t_c < t_e$; en este momento el colapso se detiene. En el caso en que la masa sea muy grande el colapso continúa, aumenta su temperatura central y se prenden las reacciones nucleares, necesarias como soporte al colapso gravitacional.

En una nube protogaláctica el colapso y la fragmentación producen nubes de velocidad, dispersión y sección eficaz colisional alta, debido a lo cual cuando colisionan crean en su frontera un frente de choque que utiliza la componente perpendicular del movimiento de las nubes para elevar su temperatura, mientras que la componente paralela distribuye el material a lo largo del frente, engrosandolo. Ver fig. III.1.

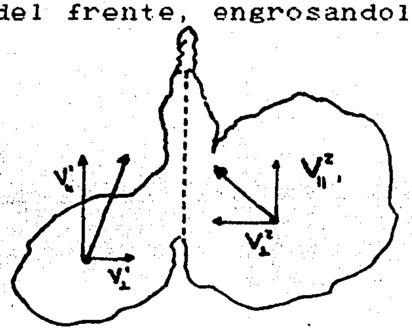


Fig. III.1
Colisión de nubes de alta velocidad. La componente $V_\perp$ de la velocidad aumenta la temperatura del frente de choque, mientras que $V_\parallel$ distribuye el material a lo largo.

Colisiones subsecuentes de nubes de diferente masa y ángulo de incidencia con el frente de choque crean nuevas perturbaciones en la densidad del gas distribuido en una estructura laminar (Sunyaev y Zeldovich, 1972). De esta manera el llamado 'pancake' acreta la suficiente masa como para volverse gravitacionalmente inestable e inicie una última fase de fragmentación y colapso. El 'pancake' se colapsa pero ahora la alta opacidad de los fragmentos permite la formación de casí todas las estrellas al mismo tiempo, con una alta dispersión anisotrópica de velocidades heredada de las condiciones iniciales anteriores al 'pancake'. Se tiene entonces un sistema en colapso, formado por estrellas.

Lynden-Bell (1967) argumenta que la distribución regular y estacionaria de la luz que hoy observamos en las galaxias elípticas, no se puede dar a través de la equipartición de la energía entre las estrellas, ya que el producto final de este proceso sería una luminosidad central más alta, y una caída más rápida que la observada. Se hace necesario entonces incluir nuevos elementos que puedan relajar un sistema estelar. Una posibilidad la da el número de estrellas. Para entender esto obtengamos el tiempo de relajación por colisiones estelares, para lo cual considerese un sistema con N estrellas de masa m y sean R y v la distancia y la velocidad estelar promedio respectivamente. La razón entre la energía potencial de una estrella debida a otra a la distancia promedio de separación entre estrellas y su energía cinética es:

$$\alpha = \Phi(1,2)/T_1 = GmN^{1/3}/RV^2. \qquad \ldots III.1$$

La energía total del sistema esta dada por la suma de la energía total de cada una de las estrellas:

$$E = Nmv^2/2 - N^2m^2G/R,$$

y si suponemos que es un sistema cerrado en equilibrio, el teorema virial nos dice:

$$-E = Nmv^2/2 \;,\; -2E = N^2m^2G/R^2,$$

de donde III.1 se puede escribir como:

$$\alpha \approx N^{-2/3}.$$

Si el número de estrellas es grande, α es pequeño y los encuentros entre dos estrellas serán en general hiperbólicos ya que $T_1 >> \phi(1,2)$, mientras que si N es pequeño, es la energía potencial la que domina y los encuentros tienden a formar sistemas binarios (encuentros elípticos).

Para la derivación del tiempo de relajación se utilizan encuentros binarios con perturbaciones pequeñas, de donde resulta que (ver apéndice A):

$$t_r \approx v^3/(m\rho \ln N), \qquad \ldots III.2$$

aplicando a esta fórmula los valores característicos de una galaxia, se encuentra que el tiempo de relajación es de 10^{15} años, que es un valor más grande que la edad del universo. En cambio para un cúmulo globular con mucho menor número de estrellas se encuentra un tiempo de 10^5 años . En términos de la masa y del radio del sistema el tiempo queda expresado como:

$$t_r \approx v^3/N \approx M^{1/2}R^{3/2},$$

esto indica que para un sistema de masa dada el tiempo de relajación decrece rapidamente al decrecer el radio. En el caso de los cúmulos globulares en los que el tiempo de relajación es corto ($<10^{15}$), la energía intercambiada por las estrellas al formar sistemas binarios puede ser usada por otras para escapar del sistema. Este proceso de evaporación del sistema se lleva a cabo debido la redistribución de la energía entre cada vez menos estrellas, disminuyendo su masa hasta que el cúmulo se contrae y aumenta la dispersión de velocidades. (Woltjer, 1974).

Sin embargo, este no es el caso de las galaxias elípticas pues el tiempo de relajación como ya vimos es muy grande. Entonces se debe aceptar o bien que las galaxias son sistemas no relajados y explicar con otro método la distribución regular de la luz, o bien proponer un mecanismo de relajación más rápido que lleve al estado estacionario.

Lynden-Bell ha discutido la relajación que ocurre cuando el campo gravitacional de una galaxia recién formada fluctúa violentamente: debido a estos cambios las estrellas siguen trayectorias muy complicadas a lo largo de las cuales no se conserva la energía. Así el cambio de ésta se encuentra dada por:

$$d\epsilon^{*}=-m\partial\Phi/\partial t,$$

con ϵ^{*} la energía de la estrella y Φ el campo gravitacional del sistema, dependiente del tiempo en una galaxia recién formada. Ya que: $\epsilon^{*}=m(v^{2}/2-\Phi)$ si $\epsilon=\epsilon^{*}/m$ es la energía por unidad de masa, su cambio con el tiempo esta dado por:

$$d\epsilon/dt=-\partial\Phi/\partial t.$$

El tiempo de relajación debido a las fluctuaciones del campo se define convenientemente como:

$$t_{rv}=\langle(d\epsilon/dt)^{2}/\epsilon^{2}\rangle^{-1/2}=\langle(\partial\Phi/\partial t)^{2}/\epsilon^{2}\rangle, \qquad ...III.3$$

para estimar t_{rv} debemos conocer la forma como cambia Φ, pero sabemos que la galaxia oscila transformando energía cinética en potencial y viceversa, en concordancia con el teorema virial dependiente del tiempo:

$$\ddot{I}/2 = 2T + W,$$

y su energía total es: $E = T + W$, de manera que si el sistema estuviese en equilibrio con I=cte. tendríamos $T=-E$ y $W=2E$, pero si no lo está, T y ϕ oscilan alrededor de estos valores ya que la energía se conserva. T es la suma de la energía cinética de cada estrella pero W es un medio de la suma de la energía potencial:

$$mv^2/2 \approx m\phi/4, \quad \text{o} \quad \epsilon \approx -3\phi/4,$$

de donde sustituyendo en III.3:

$$t_{rv} = 3\langle\dot{\phi}^2/\phi^2\rangle^{-1/2},$$

y claramente t_{rv} será del orden del tiempo en el que $\Delta\phi$ sea aproximadamente igual a ϕ. Si existen oscilaciones este tiempo será del orden del período de una oscilación de la galaxia. Para encontrar el valor aproximado definimos R por: $-GM^2/R = W$, $I=\lambda^2MR^2$ donde λ^2 es un número del orden de uno aproximadamente constante para el modo normal de oscilación, con valor 1/3 para un cuerpo cuya densidad caé como r^{-2} y 1/5 para un cuerpo homogéneo. Del teorema virial:

$$\lambda\ddot{R}^2 = 2E/M + GM/R,$$

y para pequeñas oscilaciones alrededor del radio de equilibrio

$$R_0=GM^2/-2E, \text{ con } R = R_0 + \delta R$$

se tiene entonces:

$$2\lambda^2 R_0 \delta\dot{R} = -GM\delta R/R_0^2,$$

que es la ecuación de un oscilador con frecuencia angular:

$$w=(GM/2\lambda^2 R_0^3)^{1/2}=2(-E/M)^{3/2}/\lambda GM,$$

sustituyendo $\lambda^2=1/3$ y $\bar{\rho}=M/(4\pi R_0^3/3)$ se tiene:

$$w=(2\pi G\rho)^{1/2} \quad \text{o bien} \quad t_{rv} \approx (R_0^3/GM)^{1/2} \qquad \text{...III.4}$$

que corresponde al tiempo de caída libre de una galaxia. Comparando III.2 y III.4:

$$t_r/t_{rv}=v^3(R^3/GNm)^{1/2}/m^2G^2N\ln N\approx N/\ln N,$$

para N del orden de una galaxia $N=10^{11}$ se obtiene:

$$t_r\approx 10^{10} t_{rv}$$

El análisis anterior muestra que éste tipo de relajación es extremadamente rápido. El tiempo de caída libre de una galaxia es aproximadamente 10^8 años, por lo que el tiempo de relajación colisional resulta en 10^{18}, 10^3 veces más grande que el predicho por III.2. Esta inconsistencia parece provenir de la forma de calcular el tiempo de relajación colisional. Para ello hemos dicho que se utilizan encuentros binarios con perturbaciones pequeñas; el parámetro de impacto mínimo se obtiene cuando $T(1)\approx\Phi(1,2)$. Sin embargo, estamos dentro del regimen de movimiento hiperbólico, i.e. los encuentros multiples pueden ser importantes. Aparentemente se consideran todo tipo de encuentros al sumar sobre todo el sistema, pero no es así: se suman sucesivamente los encuentros binarios. En tal tratamiento se dejan fuera las interacciones múltiples. Por ejemplo, el cambio en la velocidad Δv sufrido por una estrella en el campo de otras dos, será diferente si se consideran actuando simultanea y no sucesivamente.

Por otro lado la cancelación de la masa en III.2 refleja que la ganancia o pérdida de energía de una estrella no depende de su masa. Esto lleva a predecir en la etapa temprana de la galaxia que tal forma de relajación no lleva a ninguna segregación de masa como lo sugiere la equipartición de la energía.

Sin embargo el proceso de relajación violenta se ve limitado si las oscilaciones del campo gravitacional son rapidamente amortiguadas por el proceso de Amortiguamiento Landau en unos cuantos períodos.(Apéndice B). Esto quiere decir que si el amortiguamiento Landau es eficiente, el sistema no se relajará totalmente por oscilaciones del campo gravitacional y pasará a un proceso de relajación por colisiones. Es decir, cabe la posibilidad de que las galaxias lleguen a un estado relajado usando los dos mecanismos. Si el amortiguamiento Landau no es importante, las galaxias se relajarán en 10^8 años.

b) **El modelo anisotrópico de Binney**

Binney ha retomado todo este proceso para simular una formación de galaxias elípticas en base a experimentos numéricos de N-cuerpos. En este tipo de modelos es necesario hacer suposiciones sobre las condiciones iniciales prevalecientes en las nubes protogalacticas, y hacer evolucionar al sistema durante un lapso grande de tiempo de tal forma que simule la edad de las galaxias. Siguiendo esta línea, Binney ha supuesto: que las galaxias se forman a partir de un 'pancake' formado de estrellas*. Que la distribución de velocidades es anisotrópica al momento en el cual el 'pancake' se colapsa, y que las galaxias alcanzan el estado estacionario por el mecanismo de la relajación violenta.

Se desarrollaron cuatro modelos: tres de los cuales contenían 100 partículas y cuya finalidad fué investigar los efectos de los distintos grados de anisotropía sobre la morfología del producto final. Estas variaciones resultaron ser irrelevantes. Un cuarto modelo, constituido de 200 partículas se hizo evolucionar por un tiempo equivalente a casí 4 tiempos de colapso. Este es el tiempo que tarda un sistema (una galaxia recíen formada) en ir de su configuración inicial a su mínima configuración. Recuerdese que son las oscilaciones del sistema y por tanto las del campo gravitacional las que conducen a la relajación violenta.

Las condiciones iniciales para el cuarto modelo fueron:

i) Las partículas se distribuyeron al azar en un "pancake" oblato cuya razón de ejes era 10:1.

ii) Todas las partículas fueron dirigidas al centro del "pancake" con velocidades iniciales proporcionales a la distancia al centro. Por ésta razón el tiempo de colapso es menor que el de caída libre por un factor de 1.7.

iii) La configuración inicial rota como cuerpo rígido con una velocidad angular tan pequeña que necesitaría 3.4×10^3 tiempos de

*) Binney sostiene que las galaxias se forman después de que las estrellas ya han sido formadas.

colapso antes de que la rotación fuese dinámicamente importante, o bien que el semieje mayor se redujera en más del 60%.

iv) Se proveé al sistema con una distribución anisotrópica de velocidades.

En la fig. III.2 se muestra la evolución del sistema proyectado sobre los planos x-y y y-z para cuatro tiempos de colapso . De aquí se observa:

a) Un núcleo esferoidal muy denso, cuyo semieje mayor es 1/8 del semieje mayor inicial.

b) Una región tres veces más grande que el núcleo, en la que la densidad de partículas es igual a la densidad de la estructura inicial.

c) Una region de partículas satélite.

d) La estructura inicial tiende a preservarse.

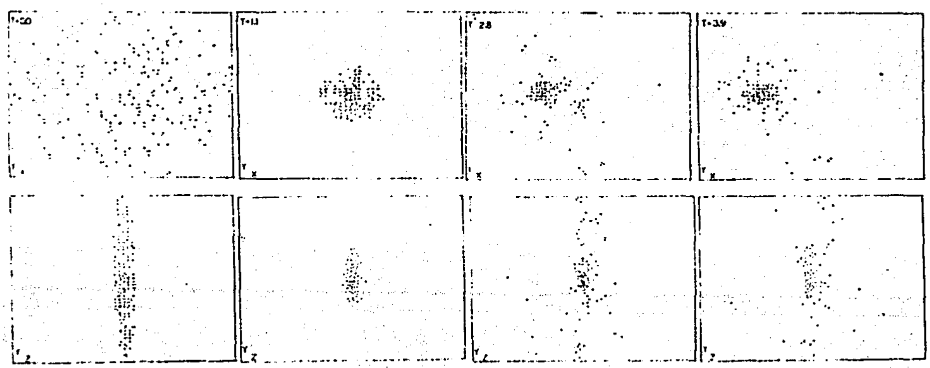


Fig. III.2
Evolución del sistema de 400 partículas durante cuatro tiempos de colapso.

Para cada tiempo de colapso la energía y el momento se conservan respectivamente en un 4 y 2.5 % del tiempo. Binney logra reproducir, después de cuatro tiempos de colapso un perfil de densidad de Hubble:

$$I(r)=k/(r + a_0)^2,$$

donde k es una constante y a_0 un radio efectivo al cual la luminosidad decaé a cierto valor. Para tiempos mayores no encuentra indicios de que el sistema se relaje a configuraciones esféricas. En la Fig. III.3 se observa la variación de las razones de los momentos principales de inercia de las partículas ligadas al sistema:

$R_1=I_x/I_y$, y $R_2=I_y/I_z$.

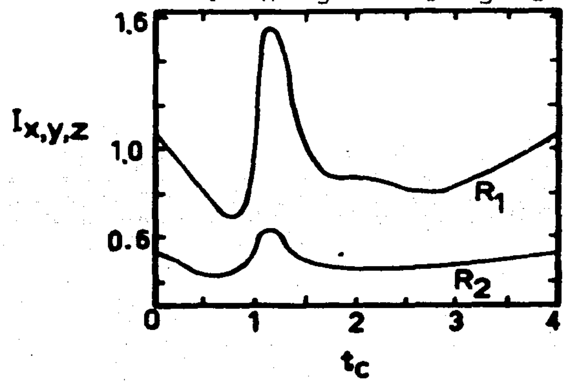


Fig. III.3
Variación de las razones $R_1=I_x/I_y$ y $R_2=I_y/I_z$ como función de t_c.

En el intervalo de tiempo $t=0-1.5\ t_c$ puede verse el efecto notorio de la relajación violenta. Durante este tiempo el sistema oscila y finalmente alcanza, aproximadamente la razón R_2 inicial. Para tiempos posteriores el sistema permanece casi constante en R_2 hasta $t=2.8$ donde empieza a crecer. En cambio R_1 sigue decreciendo, permanece constante y en $t=2.8$ aumenta. Uno de los puntos importantes encontrados en los cuatro modelos, es que R_2, que mide la razón de la extensión del sistema perpendicular al disco inicial a la extensión perpendicular, es invariante ante el proceso de relajacíon violenta.

En un experimento similar realizado por Aarseth y Binney (1978) con estructuras triaxiales anisotrópicas encuentran, que tales configuraciones se preservan bajo un colapso no disipativo.

El elemento adicional agregado al anterior es unicamente la geometría inicial.

c) **Modelos de colapso frío**

Recientemente Aguilar, Merrit y Duncan (1987) han investigado mediante experimentos numéricos de N cuerpos el proceso de formación sin disipación de galaxias elípticas a partir de un colapso frío, caracterizado por $2T \ll W$, y una estructura inicial sin rotación. Variando la geometría inicial de la protogalaxia, encuentran que no es necesario un alto grado de aplanamiento para producir galaxias prolatas, pero éste en cambio juega un papel importante para producir galaxias triaxiales. Las galaxias oblatas son muy difícil de producir a menos que se utilize una estructura extremadamente plana.

Los colapsos inicialmente fríos ($2T/W < 0.1$) difieren de los calientes ya que en estos aparece una inestabilidad dinámica producida por el acumulamiento de órbitas casí radiales. Por esta razón la inestabilidad puede producir barras muy elongadas aún partiendo de condiciones iniciales esféricas, y puede aparecer durante la evolución de modelos de condiciones iniciales oblatas y triaxiales. Pero son unicamente los colapsos cuyos valores de $2T/W$ se encuentran cercanos a la región de inestabilidad (≈ 0.15) los que producen objetos triaxiales partiendo de estructuras no esféricas (≈ 2 a 1 en la razón de ejes). Los colapsos calientes, por otro lado, tienden a preservar la configuracuín inicial.

Mientras que sus modelos reproducen un perfil de luminosidad de de Vaucouleurs con colapsos fríos, los colapsos calientes producen perfiles muy concentrados al núcleo y lentamente decrecientes. Las condiciones utilizadas para sus modelos fueron:

un perfil de densidad $\rho \propto r^{-1}$ y un movimiento térmico gaussiano independiente de la posición. Todos los colapsos involucraron el movimiento de 500 partículas seguidas durante diez tiempos de caída libre, y cuya razon virial 2T/W estaba en el intervalo [.01,.3]. Las estructuras iniciales corrieron desde esféricas hasta oblatas con razón de ejes en el rango [1,2.5]. Solo se hizo un experimento con condiciones iniciales triaxiales 1:2:3.

En la tabla I se muestran los eigenvalores del tensor de inercia para cada configuración final, los cuales se usaron como estimadores del grado de aplanamiento.

Notese el salto abrupto a la no esfericidad en los modelos más frios que $2T/W \approx 0.1$. Despúes de todo parece haber una pequeña relación entre la razón final de ejes con la temperatura(2T/W). El mismo comportamiento cualitativo se presenta para los modelos de condiciones iniciales no esféricas, pero aparecen algunos modelos triaxiales en la frontera de la inestabilidad y se crean más conforme se incrementa el aplanamiento inicial. Observese además cómo en un colapso frío es posible mantener la estructura inicial para modelos triaxiales.

TABLA I

RAZON FINAL DE EJES COMO FUNCION DE (2T/W) Y LA RAZON INICIAL

$\log 2T/W =$	-0.50	-0.75	-1.00	-1.25	-1.50	-1.75	-2.00
$\epsilon = 1.0$	1.1-1.0-1	1.1-1.0-1	1.6-1.1-1	1.8-1.2-1	1.9-1.2-1	2.0-1.2-1	2.1-1.3-1
1.5	1.2-1.1-1	1.2-1.1-1	1.6-1.1-1	1.9-1.2-1	1.6-1.0-1	1.8-1.0-1	
2.0	1.4-1.4-1	1.7-1.4-1	1.9-1.4-1	1.9-1.3-1	2.2-1.3-1	1.9-1.2-1	
2.5		1.8-1.5-1	2.1-1.5-1	2.3-1.5-1	2.1-1.3-1	2.3-1.4-1	
1:2:3					2.1-1.2-1		

INESTABILIDAD DE BARRA

TRIAXIALES **ESFERICAS** **OBLATAS** **PROLATAS**

Una función gaussiana es una función simétrica, consecuentemente la utilización de un movimiento térmico gaussiano independiente de la posición (isotrópico), refleja que la distribución de velocidades es isotrópica, por lo que el estudio de Aguilar, Merrit y Duncan muestra que la anisotropía de velocidades inicial no es estrictamente necesaria para configurar galaxias oblatas sin rotación y triaxiales.

d) **Anisotropía soportada por I_3**

Visualizando las galaxia como sistemas mecánico-estadísticos, éstas quedarán descritas completamente por una función de distribución que depende de las posiciones q_i de las estrellas y sus momentos p_i. La función $f(q_i,p_i,t)$ da información sobre la distribución de las estrellas, i.e. de su posición y su velocidad como función del tiempo. En el caso de las galaxias triaxiales su función de distribución debe reflejar la anisotropía en la dispersión de velocidades. Para un sistema en estado estacionario, esta función debe satisfacer la ecuación de Boltzmann-Liouville:

$$[f,H]=\frac{\partial H \partial f}{\partial p_i \partial q_i}-\frac{\partial H \partial f}{\partial q_i \partial p_i}=0, \qquad \ldots III.5$$

donde [,] es el corchete de Poisson y H es la hamiltoniana del sistema. Resolver III.5 constituye el problema fundamental de la dinámica estelar, ya que para conocer f es necesario conocer el potencial. Sin embargo aunque el potencial puede deducirse a través de la densidad vía la ec. de Poisson, ésta se deduce de la distribucíon superficial de la luz. Lo anterior limita a suponer formas para la densidad y por tanto para el potencial de tres dimensiones, a funciones de dos cordenadas o de la distancia al centro de la galaxia.

Por otro lado, el teorema de Jeans (1915) establece que f es función de las integrales de movimiento estacionarias, admitidas por el potencial galáctico. Una integral de movimiento es una función $I(q_i, p_i)$ tal que permanece constante a lo largo de cualquier órbita en el potencial Φ; $dI/dt=0$.

Siguiendo esta línea consideremos algunas restricciones físicas aparentemente aplicables a las galaxias elípticas:

i) Si Φ es estacionario, $\Phi=\Phi(x,y,z)$ y la energía cinética es una función cuadrática en los momentos, la hamiltoniana se conserva para cualquier órbita en este potencial. Ella es la primer integral de movimiento:

$$I_1=E=H=(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2 + \Phi(x,y,z).$$

ii) Si adicional a la primer constricción, el potencial tiene simetría rotacional, i.e. $\Phi=\Phi(r,z)$, donde (r,θ,z) son las coordenadas cilíndricas, se tiene de la segunda ec. de mov

$$dp_\theta/dt=-\partial\Phi/\partial\theta=0, \text{ de donde } p_\theta=r^2\dot{\theta}=I_2=L=cte.,$$

que corresponde a la componente z del momento angular. Esta es la segunda integral de movimiento. La otra integral del sistema es la energía total.

De acuerdo al teorema de Jeans, expresemos para una galaxia oblata, la función de distribución en términos de las integrales de movimiento:

$$f=f(I_1,I_2)=f(\Pi^2+L^2/r^2+Z^2)/2 + \Phi, L).$$

Aquí las componentes r y z de la velocidad (Π, Z) aparecen en forma cuadrática, lo que sugiere que las componentes meridionales de la velocidad de una estrella en cualquier región de la galaxia, estan distribuidas con simetría circular sobre el plano meridional. Tal propiedad debe ser válida para cualquier galaxia con simetría axial, por lo tanto, las dispersiones de velocidad σ_r, σ_θ y σ_z dadas por

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\int \Pi^2 f(E,L)\,d\Pi dZ d\theta_\rho, \qquad \theta_\rho=r\theta\\ \sigma_\theta&=\int \theta_\rho f(E,L)\,d\Pi dZ d\theta_\rho,\\ \sigma_z&=\int Z^2 f(E,L)\,d\Pi dZ d\theta_\rho,\end{aligned}\right\}\quad \ldots \text{III.6}$$

cumplen con: $\sigma_r=\sigma_z\neq\sigma_\theta$.

Si las galaxias fuesen oblatas, las dispersiones de velocidades deberían cumplir estas relaciones, sin embargo para que el sistema poseea distintos grados de aplanamiento sobre los tres planos de simetría, σ_r debe ser distinta a σ_z, lo cual solo se logra si el sistema posee una tercera integral de movimiento que sea función únicamente de alguna de las componentes donde exista la simetria.

Evidentemente si el sistema es oblato, la simetría permanece, y si no lo es, no necesariamente la segunda integral corresponde a la componente z del momento angular. Es decir, existen dos integrales de movimeinto adicionales a la integral de energía. Estas pueden llegar a ser cuasi–integrales, caracterizadas por que solo se conservan para ciertas condiciones iniciales.

Resumiendo, una formación galáctica mediante procesos disipativos, con dispersión anisotrópica de velocidades y relajado por fluctuaciones del campo gravitacional, puede en principio conducir a configuraciones triaxiales u oblatas anisotrópicas. La anisotropía es mantenida solamente si existe una tercera integral de movimiento, de la cual nos ocuparemos en los siguientes capítulos.

IV. POTENCIALES TRIAXIALES SEPARABLES Y SISTEMAS HAMILTONIANOS

Todo potencial galáctico axisimétrico $\Phi(r,z)$, poseé dos integrales de movimiento: la energía y el momento angular. Para obtener la anisotropía de la dispersión de velocidades, necesaria para configurar la estructura triaxial de las galaxias, el potencial debe poseer tres integrales de movimiento, dos no clásicas en adición a la energía: ellas son necesarias para romper con la simetría $\sigma_r=\sigma_z$. Sin embargo, debido a la dificultad que se presenta para hallar la expresión analítica de todas las integrales, pues las ecuaciones de movimiento resultan ser acopladas, se hace necesario introducir métodos que den por un lado formas analíticas aproximadas para las integrales, y por otro, indicios de su existencia o destrucción ante perturbaciones de la Hamiltoniana asociada. El análisis de integrabilidad de la Hamiltoniana y de su estructura orbital ante perturbaciones ayuda a establecer formas más apropiadas para los potenciales galacticos.

El objetivo de este capítulo es el de exponer la teoría necesaria para la exploración numérica de Hamiltonianos, que reflejen la existencia de integrales adicionales a la integral de energía y dar sus expresiones analíticas para el caso de galaxias triaxiales y algunos otros casos particulares, a través de los potenciales de Stäckel. Para ello en la sección a) se estudiarán los potenciales triaxiales de Stäckel, caracterizados por ser separables en coordenadas elipsoidales y para los cuales se conoce la forma analítica de las tres integrales de movimiento. El ajuste de la expansión en serie de uno de tales potenciales con un potencial galáctico lleva a expresiones analíticas aproximadas para las integrales no clásicas. En b) se dará la condición necesaria que debe cumplir un potencial galáctico para que se le pueda ajustar uno de tales potenciales separables. En c) se darán los criterios de integrabilidad de un hamiltoniano asociado a un sistema estelar, y se verá que la no integrabilidad esta asociada con la interacción de dos, o más, resonancias. Se puede llegar a la no integrabilidad expresando el hamiltoniano como la suma de uno integrable más un término perturbativo. Si la perturabación es muy grande, de acuerdo al teorema KAM algunas de las frecuencias pueden ser aproximadamente iguales a las originales lo que quiere decir que el hamiltoniano sigue siendo integrable. En caso contrario pueden crear grandes regiones caóticas cuyo tamaño es indicativo del grado de integrabilidad del sistema. La integral de Melnikov ayudará a evaluar el tamaño de estas regiones (sección d).

a) Potenciales de Stäckel y sus integrales de movimiento

Una galaxia elíptica triaxial poseé isofotas que rotan al variar la posición angular. Esto indica, suponiendo una relación masa-luminosidad constante, que las superficies de isodensidad y por tanto el potencial es triaxial. En un potencial de este tipo las órbitas admiten tres integrales de movimiento; dos adicionales a la integral de energía. (Schwarzschild, 1979).

de Zeeuw y Lynden-Bell (1985) han desarrollado una técnica para hallar una expresión analítica aproximada para las integrales de movimiento utilizando potenciales de Stäckel. Estos se caracterízan porque las ecuaciones de movimiento son separables en coordenadas elipsoidales y porque todas las órbitas admiten tres integrales analíticas conocidas. Por tanto, dado un potencial galáctico Φ no separable, el problema se reduce a hacer el mejor ajuste de uno de Stäckel. De esta manera se espera que las órbitas y las integrales de movimiento de una galaxia sean muy parecidas a las de uno de Stäckel.

Para ello se definen las coordenadas elipsoidales (λ, μ, ν) como las raíces para τ de la ecuación:

$$x^2/(\tau+\alpha) + y^2/(\tau+\beta) + z^2/(\tau+\gamma) = 1, \qquad \ldots IV.1$$

donde α, β y γ son números fijos y $-\gamma \leq \nu \leq -\beta \leq \mu \leq -\alpha \leq \gamma$. En estas coordenadas las ecuaciones de movimiento son separables para todo potencial Φ_s de la forma:

$$\Phi_s = -\xi^*(\lambda)/(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) - \eta^*(\nu)/(\mu-\nu)(\mu-\lambda) - \theta^*(\nu)/(\nu-\lambda)(\nu-\mu),$$

con ξ^*, ν^* y θ^* funciones arbitrarias. Todo punto en el espacio queda determinado por la interseccción de tres superficies definidas por (λ, μ, ν); ellas corresponden a elipsoides cuando se sustituye λ en IV.1 , hiperboloides de una hoja cuando se sustituye μ, y cuando ν se obtiene un hiperboloide de dos hojas. En la Fig. IV.1 se muestran estas superficies y la distribución de densidad asociada, estratificada en elipsoides triaxiales y concéntricos, asociada a un potencial de Stäckel.

En estas coordenadas la métrica queda dada por

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = P^2 d\lambda^2 + Q^2 d\mu^2 + R^2 d\nu^2,$$

donde P, Q y R son los factores de escala:

$$P^2 = (\lambda-\mu)(\lambda-\nu)/4(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)(\lambda+\gamma).$$

En lo subsecuente las otras relaciones se obtendrán al variar cíclicamente como: $\lambda-\mu-\nu-\lambda$, $\alpha-\beta-\gamma-\alpha$, $x-y-z-x$, $P-Q-R-P$ y $\xi-\nu-\theta-\xi$.

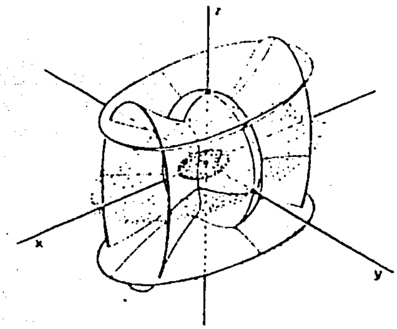


Fig. IV.1
Aquí se muestran las superficies que definen las coordenadas elipsoidales y la funión de densidad triaxial asociada.

Por lo tanto la hamiltoniana de movimiento en coordenadas elipsoidales queda expresada como:

$$H=P_\lambda^2/2P^2 + P_\mu^2/2Q^2 + P_\nu^2/2R^2 + \Phi(\lambda,\mu,\nu),$$

donde $P_\lambda=P^2\dot{\lambda}$ etc. son los momentos conjugados. Para que las ecuaciones de movimiento $\dot{p}_\tau=-\partial H/\partial q_\tau$ sean separables Φ debe ser de la forma Φ_s, que admite tres integrales cuadráticas en las velocidades, la integral de energía y otras dos, J y K, que llamaré adélficas para distinguirlas de las integrales clásicas, de energía y momento angular, construidas como:

$$\left.\begin{aligned} &H=X + Y + Z,\\ &J=(\mu+\nu)X + (\nu+\lambda)Y + (\lambda+\mu)Z,\\ &K=\mu\nu X + \nu\lambda Y + \lambda\mu Z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots IV.2$$

con $X=[P_\lambda^2/2 - \xi(\lambda)]/P^2$ etc. A partir de las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a elipsoidales se tiene que:

$$2\dot{x}/x=\dot{\lambda}/(\lambda+\alpha) + \dot{\mu}/(\mu+\alpha) + \dot{\nu}/(\nu+\alpha), \quad \text{etc.}$$

por lo que sustituyendo en IV.2 y usando la expresión para el momento angular $L^2=L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, se obtienen las integrales no clásicas en términos de componentes de energía y momento angular:

$$\left.\begin{aligned} &H=E_x + E_y + E_z,\\ &J=L^2/2-(\beta+\gamma)E_x-(\gamma+\alpha)E_y-(\alpha+\beta)E_z,\\ &K=\alpha L_x^2/2-\beta L_y^2/2-\gamma L_z^2/2+\beta\gamma E_x+\gamma\alpha E_y+\alpha\beta E_z, \end{aligned}\right\}\ldots \text{IV.3}$$

donde $E_x=x^2/2 + \phi_x$ etc. Analogamente ϕ_x, ϕ_y y ϕ_z deben satisfacer simultaneamente:

$$\phi_x+\phi_y+\phi_z=-\xi(\lambda)/P^2-\eta(\mu)/Q^2-\theta(\nu)/R^2=\phi_s,$$

$$(\beta+\gamma)\phi_x+(\gamma+\alpha)\phi_y+(\alpha+\beta)\phi_z=(\mu+\nu)\xi/P^2+(\nu+\lambda)\eta/Q^2+(\lambda+\mu)\theta/R^2,$$

$$\beta\gamma\phi_x+\gamma\alpha\phi_y+\alpha\beta\phi_z=-\mu\nu\xi/P^2-\nu\lambda\eta/Q^2-\lambda\mu\theta/R^2.$$

Resolviendo estas tres ecuaciones se tiene para ϕ_x:

$$\phi_x=-\{(\mu+\alpha)(\nu+\alpha)\xi/P^2+(\nu+\alpha)(\lambda+\alpha)\eta/Q^2+(\lambda+\alpha)(\mu+\alpha)\theta/R^2\}/(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta),$$

que depende de las tres coordenadas, pero que cerca del origen depende unicamente de x. Esto sugiere que en IV.3 E_x, E_y y E_z son las energias en las distintas direcciones cerca del origen. Para puntos alejados el potencial es no separable.

Definamos otras nuevas integrales I_2 e I_3 como:

$$I_2=\alpha^2H+\alpha J+K/(\alpha-\gamma), \qquad I_3=\gamma^2H+\gamma J+K/(\gamma-\alpha).$$

Con estas nuevas integrales, cerca del origen se tiene:

$$H=E_x+E_y+E_z,$$
$$J=-(\beta+\gamma)E_x-(\gamma+\alpha)E_y-(\alpha+\beta)E_z, \qquad I_2=(\alpha-\beta)E_x,$$
$$K=\beta\gamma E_x+\gamma\alpha E_y+\alpha\beta E_z, \qquad I_3=(\gamma-\beta)E_z.$$

Cuando $\beta=\alpha$ las coordenadas elipsoidales se transforman en esferoidales prolatas con el eje z como eje de simetría. La forma general de Φ_s en estas coordenadas aparece en las tablas II y III (obtenidas de Lynden-Bell, 1962). Para este potencial prolato se encuentra:

$$H=E_x+E_y+E_z,$$
$$I_2=L_z^2/2,$$
$$I_3=(L_x^2+L_y^2)/2 + (\gamma-\alpha)E_z.$$

Si $\beta=\gamma$ las coordenadas se reducen a coordenadas esferoidales oblatas con el eje x como eje de simetría, y en este caso el potencial admite las integrales

$$H=E_x+E_y+E_z,$$
$$I_2=(L_y^2+L_z^2)/2 + (\alpha-\gamma)E_x,$$
$$I_3=L_x^2/2.$$

Cuando $\alpha=\beta=\gamma$ las coordenadas elipsoidales se reducen a esféricas, y la forma general de Φ_s es:

$$\Phi_s=\xi(r) + r^{-2}\eta(\theta) + (r^2\mathrm{sen}^2\theta)^{-1}k(\varphi),$$

TABLA II

Axially symmetrical potentials with isolating integrals‖

Coordinates	No.	Potential	Independent isolating integrals
Spheroidal‖	i	$\psi = \frac{\zeta(\lambda)-\eta(\mu)}{\lambda-\mu}$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}[\mu v_\lambda^2 + \lambda v_\mu^2 + (\lambda+\mu)v_\phi^2] - \frac{\mu\zeta(\lambda)-\lambda\eta(\mu)}{\lambda-\mu}$
Eddington's Potential		For $\lambda^{1/2} \gg$ the interfocal distance this approximates to (cf. iv)	
		$\psi = \frac{\zeta(r^2)-\eta(\beta\cos\theta)}{r^2}$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}\varpi^2 + \eta$
Cylindrical	ii	$\psi = \zeta(R,z)$	E, ϖ_z
Spherical	iii	$\psi = \zeta(r)$	$E, \boldsymbol{\varpi}$
Spherical	iv	$\psi = \zeta(r) + r^{-2}\eta(\theta)$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}\varpi^2 - \eta(\theta)$
Cylindrical	v	$\psi = \zeta(R) + \eta(z)$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}w^2 - \eta(z)$
Spherical	vi	$\psi = Ar^{-1}$	$E, \boldsymbol{\varpi}, \chi = \cos^{-1}\left[\frac{\varpi^2/r - A}{(2E\varpi^2 + A^2)^{1/2}}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{\varpi\varpi_z\tan\phi}{(\varpi_x^2+\varpi_y^2)+\varpi_x\varpi_y\tan\phi}\right]$
Cylindrical	vii	$\psi = AR^{-1} + \zeta(z)$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}w^2 - \zeta(z), \chi = \phi + \cos^{-1}\left[\frac{\varpi_z^2/R - A}{\{[2(E+\zeta)-w^2]\varpi_z^2 + A^2\}^{1/2}}\right]$
Cylindrical	viii	$\psi = -AR^2 + \zeta(z)$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}u^2 + Ax^2, \frac{1}{2}v^2 + Ay^2$
Cylindrical	ix	$\psi = -A(l^2R^2 + n^2z^2)$	$E, \varpi_z, \frac{1}{2}u^2 + Al^2x^2, \frac{1}{2}v^2 + Al^2y^2,$
			$S_y = (2A)^{-1/2}\left[l^{-1}\sin^{-1}\left(\frac{l^2Ax}{\frac{1}{2}u^2 + Al^2x^2}\right) - n^{-1}\sin^{-1}\left(\frac{n^2Az}{\frac{1}{2}w^2 + An^2z^2}\right)\right]$
Spherical	x	$\psi = -Ar^2$	$E, \boldsymbol{\varpi}, \frac{1}{2}w^2 + Az^2$
Cartesian	xi	$\psi = \zeta(x,y,z)$	E
Cartesian	xii	$\psi = \zeta(x,y) + \eta(z)$	$E, \frac{1}{2}w^2 - \eta$
Ellipsoidal	xiii	$\psi = \frac{\zeta(\lambda)}{P^2} + \frac{\eta(\mu)}{Q^2} + \frac{\kappa(\nu)}{R^2}$	$E, \frac{1}{2}[(\mu+\nu)(\frac{1}{2}v_\lambda^2 - P^{-2}\zeta) + (\nu+\lambda)(\frac{1}{2}v_\mu^2 - Q^{-2}\eta) + (\lambda+\mu)(\frac{1}{2}v_\nu^2 - R^{-2}\kappa)],$
			$[\mu\nu(\frac{1}{2}v_\lambda^2 - P^{-2}\zeta) + \nu\lambda(\frac{1}{2}v_\mu^2 - Q^{-2}\eta) + \lambda\mu(\frac{1}{2}v_\nu^2 - R^{-2}\kappa)]$
Elliptic cylindrical	xiv	$\psi = (\lambda-\mu)^{-1}(\zeta(\lambda)+\eta(\mu)) + \kappa(z)$	$E, \frac{1}{2}w^2 - \kappa, \frac{1}{2}(\mu v_\lambda^2 + \lambda v_\mu^2) + (\lambda-\mu)^{-1}(\mu\zeta - \lambda\eta)$
Cartesian	xv	$\psi = \zeta(x) + \eta(y) + \kappa(z)$	$E, \frac{1}{2}u^2 - \zeta, \frac{1}{2}v^2 - \eta$
Cartesian	xvi	$\psi = \frac{1}{2}A^2(l^2x^2 + m^2y^2) + \kappa(z)$	$E, \frac{1}{2}(u^2 - A^2l^2x^2), \frac{1}{2}(v^2 - A^2m^2y^2),$
			$S_z = A^{-1}\left[l^{-1}\sin^{-1}\left(\frac{xA^2l^2}{u^2 - A^2l^2x^2}\right) - m^{-1}\sin^{-1}\left(\frac{yA^2m^2}{v^2 - A^2m^2y^2}\right)\right]$
Cartesian	xvii	$\psi = \frac{1}{2}A^2(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2)$	$E, \frac{1}{2}(u^2 - A^2l^2x^2), \frac{1}{2}(v^2 - A^2m^2y^2), S_x, S_y$ (similar to S_z above)
Cylindrical	xviii	$\psi = \zeta(R,z) + R^{-2}\eta(\phi)$	$E, \frac{1}{2}\varpi_z^2 - \eta$
Spheroidal	xix	$\psi = (\lambda-\mu)^{-1}(\zeta(\lambda)-\eta(\mu)) + R^{-2}\kappa(\phi)$	$E, \frac{1}{2}\varpi_z^2 - \kappa, \left[\frac{1}{2}\left\{\mu v_\lambda^2 + \lambda v_\mu^2 + \left(\frac{\lambda+\mu}{R^2}\right)(\varpi_z^2 - \kappa)\right\} - \frac{\mu\zeta - \lambda\eta}{\lambda-\mu}\right]$
Cylindrical	xx	$\psi = \zeta(R) + R^{-2}\eta(\phi) + \kappa(z)$	$E, \frac{w^2}{2} - \kappa, \frac{1}{2}\varpi_z^2 - \eta$
Spherical	xxi	$\psi = \zeta(r) + r^{-2}\eta(\theta) + (r^2\sin^2\theta)^{-1}\kappa(\phi)$	$E, \frac{1}{2}\varpi_z^2 - \eta, \frac{1}{2}\varpi^2 - \eta(\theta) - (\sin\theta)^{-2}\kappa(\phi)$
Helical	xxii	$\psi = \zeta(x', y')$	$E, w + \alpha\varpi_z$
Cartesian	xxiii	$\psi = \zeta(x,y)$	E, w
Elliptic cylindrical	xxiv	$\psi = (\lambda-\mu)^{-1}(\zeta(\lambda) - \eta(\mu))$	$E, w, \frac{1}{2}(\mu v_\lambda + \lambda v_\mu) + (\lambda-\mu)^{-1}(\mu\zeta - \lambda\eta)$
Cylindrical	xxv	$\psi = \zeta(R) + R^{-2}\eta(\phi)$	$E, w, \frac{1}{2}\varpi_z^2 - \eta, \frac{z}{w} - \int^R [2(E+\psi) - w^2 - (\frac{1}{2}\varpi_z^2 - \eta)R^{-2}]^{-1/2}dR$
Cartesian	xxvi	$\psi = \zeta(x) + \eta(y)$	$E, w, \frac{1}{2}u^2 - \zeta, \frac{z}{w} - \int_0^x [2(\frac{1}{2}u^2 - \zeta) + 2\zeta]^{-1/2}dx,$
			$\left(zw^{-1} - \int_0^y [2(\frac{1}{2}v^2 - \eta) + 2\eta]^{-1/2}dy\right)$
Cartesian	xxvii	$\psi = \frac{1}{2}A^2(l^2x^2 + m^2y^2)$	$E, w, \frac{1}{2}(u^2 - A^2l^2x^2), S_z, \frac{z}{w} - \int_0^x [(u^2 - A^2l^2x^2) + A^2l^2x^2]^{-1/2}dx$
		Systems steady in rotating axes. $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ = *angular velocity of axes*	
Cartesian	xxviii	$\psi = \zeta(x,y,z)$	$E^* = \frac{c^2}{2} - \psi - \frac{1}{2}\Omega^2R^2$
Cartesian	xxix	$\psi = \zeta(x,y) + \eta(z)$	$E^*, \frac{1}{2}w^2 - \eta(z)$
Cartesian	xxx	$\psi = \zeta(x,y)$	E^*, w

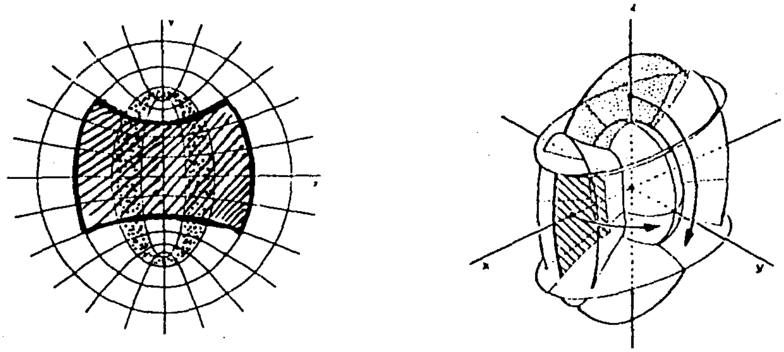
Integrales analíticas asociadas a potenciales triaxiales separables.

cuyas integrales asociadas son:

$$H=E_x+E_y+E_z,$$
$$J=L^2/2\ -2\alpha H,$$
$$k=\alpha^2H-\alpha L^2/2, \qquad \text{con } I_2+I_3=L^2/2.$$

En los tres casos anteriores las integrales I_2 e I_3 pueden considerarse una generalización de las integrales de energía y momento angular existentes en un potencial esférico.

Las órbitas en un potencial de Stäckel son el resultado de la suma de tres movimientos, uno para cada coordenada. El movimiento es admisible si P^2_λ, P^2_μ y P^2_ν son mayores o iguales a cero, por lo que las órbitas poseen puntos de retorno en aquellas superficies definidas por las coordenadas elipsoidales con las cuales $P_\lambda=P_\mu=P_\nu=0$. El movimiento es la suma de tres oscilaciones independientes, una para cada coordenada (recuerdese que un sistema integrable es equivalente a un sistema de osciladores desacoplados). Las frecuencias de estas oscilaciones en general son inconmensurables, de manera que las órbitas llenan densamente el volumen de configuracion permitido por las integrales. Todas las posibles regiones ocupadas por las órbitas pueden encontrarse por inspección de las superficies coordenadas. En los potenciales de Stackel la estructura orbital esta constituída por tres familias de órbitas : de caja, de tubo corto, tubo largo y de rizo. (de Zeeuw, 1985a). La forma de los volumenes seguidos por una órbita de tubo largo y tubo corto se muestra en la Fig. IV.2a. En dos dimensiones las frecuencias inconmensurables describen figuras de Lissajous que llenan densamente el área permitida por las integrales (Fig. IV.2b). Al ajustar un potencial de Stäckel a un potencial galáctico las órbitas y las integrales de movimiento en uno y otro caso son similares.



a) b)

Fig. IV.2
Orbitas asociadas a un potencial de Stäckel
en a) dos y, b) tres dimensiones.

b) Análisis de potenciales de la forma $\Phi(x^2, y^2, z^2)$

Cerca del origen el potencial Φ_x depende solo de x, lo que permite hacer un ajuste con uno de Stäckel alrededor de éste. Para un potencial del tipo $\Phi=\Phi(x^2, y^2, z^2)$, desarrollado en serie de Taylor, se tiene:

$$\Phi=\Sigma_{hlm=0}\Phi_{hlm}x^{h}y^{l}z^{m}. \qquad \ldots IV.4$$

Para hacer la comparación expandamos un potencial de Stäckel Φ_s alrededor del origen, como:

$$\Phi_s=-\Sigma_n \xi_n(\lambda+\alpha)^n/P^2-\Sigma\eta_n(\mu+\beta)^n/Q^2-\Sigma\theta_n(\nu+\gamma)^n/R^2, \qquad \ldots IV.5$$

para el cual el origen se encuentra en $(\lambda, \mu, \nu)=(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Igualando término a término IV.4 y IV.5 obtenemos los factores constantes Φ_{hlm}, hasta orden cuarto:

$$\Phi_{020}=-4\eta_0 \qquad \Phi_{200}=-4\xi_0 \qquad \Phi_{022}=8(\theta_0-\eta_0)/(\gamma-\beta)$$

$$\Phi_{002}=-4\theta_0 \qquad \Phi_{220}=-8(\xi_0-\eta_0)/(\beta-\alpha) \qquad \Phi_{202}=8(\xi_0-\theta_0)/(\alpha-\gamma) \qquad \text{...IV.6}$$

lo que impone la condición:

$$(\Phi_{200}-\Phi_{020})/\Phi_{220} + (\Phi_{020}-\Phi_{002})/\Phi_{022} + (\Phi_{002}-\Phi_{200})/\Phi_{202}=0$$

Esto indica que los potenciales galácticos cuyos coeficientes cuárticos no cumplan esta relación, no pueden ser ajustados con un potencial separable de Stäckel.

Sin embargo, de Zeew ha demostrado que existe un solo tipo de potencial que cumple con IV.6, deducido por Chandrasekhar (1969). Considérese una distribución triaxial en la densidad, estratificada en elipsoides similares y concentricos. La densidad puede ser parametrizada como $\rho=\rho(m^2)$, donde:

$$m^2=x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2+x_3^2/a_3^2, \qquad a_1\le a_2\le a_3,$$

y el requerimiento de que Φ sea analítico cerca del origen permite hacer una expansión de Taylor:

$$\rho(m^2)=\rho_0(1+\alpha_1 m^2+\alpha_2 m^4+...)=\rho_0\Sigma\alpha_n m^{2n}, \qquad \text{...IV.7}$$

con un potencial asociado Φ:

$$\Phi=-\pi G\rho_0\sum_0^\infty\alpha_n\{I-\Sigma A_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} x^2_{i_1}x^2_{i_2}\ldots x^2_{i_{n+1}}\}/(n+1)$$

donde A_{ijk}... e I fueron definidos en la introducción.

Es fácil demostrar que: $A_{ijhl}=-(A_{ihl\cdots}-a_{jhl\cdots})/(a_i^2-a_j^2)$ $i=j$ y $(2n-1)A_{iii\cdots ii}+A_{iii\cdots ij}+A_{iii\cdots ih}=2/a^{2n-2}$, de donde se tiene la igualdad:

$$(A_1-A_2)/A_{12} + (A_2-A_3)/A_{23} + (A_2-A_1)/A_{31}=0.$$

Se puede concluir que a un sistema triaxial <u>con superficies de isodensidad similares</u>, se le puede ajustar hasta orden cuarto, un potencial separable.

La ecuación IV.7 puede escribirse por medio de la relación de recurrencia

$$\alpha_n=(n+1)\alpha_{n-1}\alpha_1/2n \quad \text{de la forma} \quad \rho(m^2)=\rho_0\Sigma(n+1)\alpha^n m^{2n}/2^n,$$

que es la expansión en serie para m^2 pequeña, del perfil de densidad:

$$\rho(m^2) = \rho_0/(1+m^2)^2. \qquad \ldots IV.8$$

A un elipsoide de cualquier razón de ejes, cuyo perfil de densidad siga esta relación, se le puede ajustar un potencial de Stäckel. Aparentemente para un perfil de Hubble de la densidad, $\rho\propto m^{-2}$ o $\rho\propto m^{-3/2}$, no es posible ajustar un potencial separable, pero Schwarzschild (1979) ha demostrado a partir de un modelo triaxial de galaxia que la estructura órbital en uno y otro caso son muy parecidos. Es decir, las familias de órbitas existentes en la region central de un potencial de Stäckel se encuentran también presentes en su potencial triaxial galáctico. De lo anterior se deduce que aunque un potencial con perfil de densidad asociado no sea IV.8, pero tenga una estructura orbital parecida, puede ser aproximado con uno de Stäckel. En otras palabras, la condición IV.6 fija un único potencial al cual se le puede ajustar uno de Stäckel, pero la estructura orbital no es única, lo que permite hacer algunos ajustes aproximados de potenciales de Stäckel a sistemas con distintos perfiles de densidad con la condición de que sus estructuras orbitales sean análogas.

Para obtener las expresiones aproximadas de las integrales de movimiento sustituimos las expresiones del potencial

$$\begin{aligned}
&\Phi_x=\Sigma_{klm}k\Phi_{klm}x^k y^l z^m/(k+l+m),\\
&\Phi_y=\Sigma_{klm}l\Phi_{klm}x^k y^l z^m/(k+l+m),\\
&\Phi_z=\Phi-\Phi_x-\Phi_y,
\end{aligned} \qquad \ldots \text{IV.8b}$$

en las funciones IV.3

$$\begin{aligned}
&H=(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2 + \Sigma\Phi_{klm}x^k y^l z^m,\\
&J=L^2/2-(\beta+\gamma)(\dot{x}^2/2+\Phi_x)-(\gamma+\alpha)(\dot{y}_2/2+\Phi_y)-(\alpha+\beta)(\dot{z}^2/2+\Phi_z),\\
&K=-\alpha L_x^2/2-\beta L_y^2/2-\gamma L_z^2/2+\beta\gamma(\dot{x}^2/2+\Phi_x)+\gamma\alpha(\dot{y}^2/2+\Phi_y)+\alpha\beta(\dot{z}^2/2+\Phi_z).
\end{aligned} \qquad \ldots \text{IV.8c}$$

El hecho de encontrar la forma de las integrales de movimiento, no implica que deban ser válidas en todas las regiones de la galaxia, de hecho puede suceder que sean cuasintegrales. En la sección siguiente veremos que si tomamos una hamiltoniana asociada al término cuártico del potencial y la visualizamos como un término perturbativo de H, para energías arriba de ciertos valores la posible integral es destruida.

c) **Sistemas dinámicos**

El comportamiento asintótico de las órbitas, en los que la evolución se sigue para tiempos muy largos, proporciona mayor información sobre los sistemas dinámicos. Por esto resulta innecesario hayar las soluciones a las ecuaciones de movimiento a todo tiempo, siendo suficiente con tomar un número grande de puntos representativos de la órbita sobre una variedad Σ de dimensión $M=N-1$, con N el número de grados de libertad. Considerese entonces una trayectoria y las intersecciones $Y_0, Y_1, \ldots$ de ella con Σ. Si se conoce el punto Y_i el Y_{i+1} se obtiene integrando las ecuaciones hasta la siguiente intersección. Las intersecciones permiten definir un mapeo de Poincaré G de Σ en sí mismo tal que;

$$Y_{i+1} = G\,(Y_i), \qquad \ldots IV.9$$

o en general $$Y_{i+j} = G^j(Y_i),$$

y ya que las ecuaciones pueden integrarse en ambas direcciones con el tiempo, existe el mapeo inverso G^{-1}: $Y_{i-1}=G^{-1}(Y_i)$. El mapeo G refleja las propiedades de las órbitas como veremos enseguida. En el conjunto de intersecciones se puede dar la existencia de puntos que bajo el mapeo sean invariantes: $Y^* = G(Y^*)$, los cuales coinciden con los puntos críticos de estabilidad del sistema y describen el comportamiento de las trayectorias en su vecindad. Para entender esto, tomese el conjunto de puntos U_i dentro de una vecindad U muy pequeña alrededor de Y^*:

$$Y = Y^* + U$$

sustituyendo en IV.9 y desarrollando en serie:

$$Y_{t+1}=Y^{*}+U_{t+1}=G(Y^{*}+U_{t})=G(Y^{*})+(\partial G/\partial Y)_{Y=Y}U_{t}+\ O(U^{2}{}_{t})$$

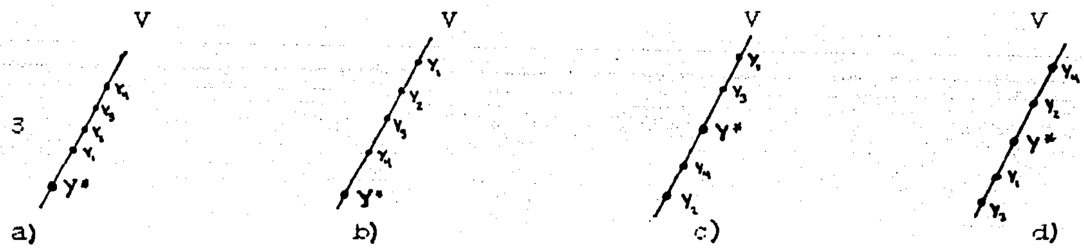
$$U_{t+1}\ =\ (\partial G/\partial Y)U_{t}\ =\ TU_{t}$$

donde $\partial G/\partial Y$ es una matriz MxM , llamada la jacobiana del mapeo, que ha sido linealizada. Suponiendo que la matriz T tiene M eigenvalores reales distintos, se puede elegir como dirección de desplazamiento del primer punto respecto del punto fijo la dirección del eigenvector asociado $U_0=V$, lo que define los valores posteriores de U como;

$$U_0=V,\quad U_1=TU_0=\lambda V,\quad U_2=T(TU_0)=\lambda^2 V,\ \ldots,\ U_j=\lambda^j V$$

sobre una recta en la dirección de V. La Fig. IV.3 muestra el comportamiento de la trayectoria para distintos valores de λ.

Fig. IV.3



$\lambda > 1$ $\quad 0 < \lambda < 1$ $\quad -1 < \lambda < 0$ $\quad \lambda < -1$

Si en cambio existen un par de eigenvalores complejos conjugados $\rho e^{\pm i\varphi}$, cuyo eigenvectores asociados son $V_1 \pm iV_2$, la distribución de puntos se lleva a cabo sobre un plano. V_1, V_2 son reales. Eligiendo a $U_0=aV_1+bV_2$ como la dirección de movimiento, los puntos siguientes estan dados por:

$$U_j = \rho^j [(aV_1+bV_2)\mathrm{Cos}(j\varphi) + (bV_1-aV_2)\mathrm{Sen}(j\varphi)].$$

Para eigenvalores de módulo 1 el primer término representa un movimiento oscilatorio a lo largo de la dirección aV_1+bV_2, y el segundo una otra oscilación desfasada 90° de la primera en la dirección bV_1-aV_2. Esta es la caracteristica de un movimiento elíptico (Fig.IV.4a). Aquí las órbitas ni se acercan ni se alejan del punto fijo, pero para eigenvalores de modulo distinto de uno los puntos describen un movimiento espiral acercandose al punto fijo con un factor de contracción ρ^j si $\rho < 1$, o alejandose si $\rho > 1$.

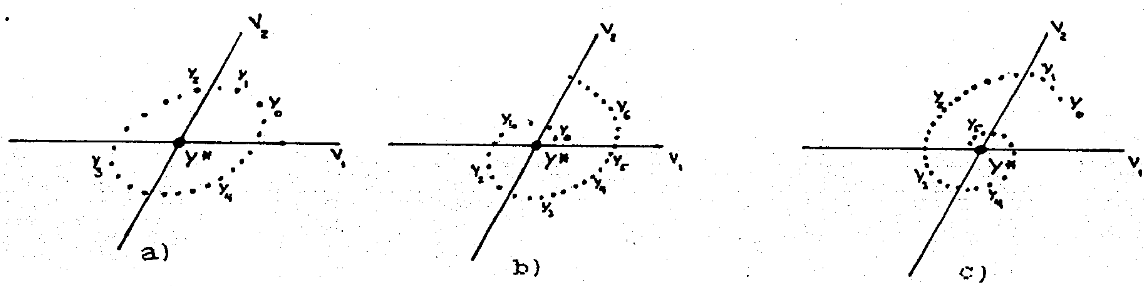


Fig. IV.4
Distribución de los puntos en el espacio fase, alrededor de un punto elíptico, en a, y un punto hiperbólico, en b y c.

El alejamiento o acercamiento de los puntos al punto fijo refleja una estructura del espacio en su vecindad. Considérese el conjunto de eigenvalores de módulo menor que uno.. Ellos definen un subespacio de contracción o estable V^s si despues de haber elegido el desplazamiento inicial U_0 de una trayectoria en él, los puntos siguientes Y_j tienden a acercarse al punto fijo cuando $j \to \infty$. Analogamente los eigenvalores de módulo mayor que uno definen un subespacio de expansión o inestable V^u en el cual el conjunto de puntos se alejan del punto fijo cuando $j \to -\infty$. Para un punto dado y una vecindad existe un número infinito de formas en que los puntos pueden acercarse o alejarse pero siempre es posible trazar una curva contínua que los contenga sin cambiar la propiedad del espacio: la variedad invariante estable, W^s, o inestable, W^u.

Hay otro tipo de comportamiento importante de los puntos de intersección en el que para cada Y_t aplicando el mapeo G un número finito de veces se obtiene el mismo punto: $Y_t = G^n(Y_t)$. Esto solo sucede si la trayectoria es n-periódica.

De hecho las propiedades de un sistema dinámico quedan especificadas representando en el espacio fase sus puntos fijos, sus variedades invariantes y trayectorias periódicas. Para hallarlas es necesario especificar la variedad Σ y el mapeo G.

Restringiendo ahora el análisis a sistemas hamiltonianos conservativos H coincide con la energía, que es la primera integral. Esto reduce el espacio fase en una dimensión pues es posible despejar una variable p_t del hamiltoniano y elegir su variable conjugada q_t=0 para hayar una superficie de sección. De esta manera se elimina un par de variables y los N-1 pares restantes se toman como coordenadas sobre la superficie Σ. Cualquier mapeo utilizado debe conservar el volúmen (prop. simpléctica), debido a que el sistema es hamiltoniano y por tanto cumple la ecuación de Liouville. Una consecuencia de la propiedad anterior es que para un punto fijo, los M=2N-2 eigenvalores que lo caracterizan tomados en pares cumplen la relación: $\lambda_1\lambda_2=1$ que define una propiedad importante del sistema. Por simplicidad tomemos dos grados de libertad. El punto fijo tiene dos eigenvalores obtenidos para una aproximación lineal, por la ecuación:

$$| \partial G/\partial Y - \lambda I | = \lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$$

donde a es un número real llamado índice de estabilidad y :

$$\lambda=a+(a^2-1)^{1/2}.$$

Observese que si: i) $-1 < a < 1$ los eigenvalores son complejos conjugados y se recobra el caso en que los puntos caen sobre una elipse. Se ha encontrado así un punto elíptico o estable para el cual una trayectoria inicialmente cerca del punto fijo se mantiene cerca.

ii) $a > 1$ o $a < -1$, λ_1 es real mayor que uno y λ_2 es negativo con $|\lambda_2| < 1$. Los puntos tienden a acercarse y luego a alejarse del punto fijo describiendo una hipérbola. A este punto se le llama hiperbólico o de inestabilidad (Fig. IV.4b y c).

Frecuentemente la facilidad de encontrar la solución de las ecuaciones de movimiento depende de las coordenadas generalizadas utilizadas. El caso ideal sería hallar una transformación canónica de coordenadas que expresara a la nueva hamiltoniana K en términos unicamente de los momentos P_i:

$$K = K(P_1,...,P_n),$$

ya que al dejar invariantes las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{P}_i = -\partial K/\partial Q_i,$$
$$\dot{Q}_i = \partial K/\partial P_i,$$

la primera ecuación aporta todas las integrales de movimiento del sistema:

$$P_i(t) = C_i \text{ y } \partial K/\partial P_i = w_i(C_1,...,C_n),$$

son las frecuencias con que las trayectorias son recorridas. Las ecuaciones de Hamilton son análogas a las ecuaciones de movimiento para un oscilador. Las variables $Q_i=w_it + D_i$ son ciclicas y $D_i=Q_i(t=0)$. Si el sistema es integrable una trayectoria quedará restringida a un subespacio n-dimensional definido por las integrales $P_i = C_i$. Las variables Q_i por ser cíclicas aumentadas en 2Π regresan al mismo estado. Estos pares de variables determinan en coordenadas polares la superficie sobre la que se encuentran constreñidas todas las trayectorias: para un par dado P define un radio y Q un ángulo, por lo que en conjunto definen un n-toro. Cualquier punto sobre esta superficie queda especificado por las coordenadas $(Q_1,...,Q_n)$. Cuando las w_i son mutuamente inconmensurables, es decir si no existe una relación:

$$k_1 w_1 + ... + k_n w_n = 0$$

con las k_i no todas cero, entonces la trayectoria es densa en el n-toro, por el contrario si solo existen p relaciones independientes de inconmesurabilidad, la trayectoria ocupa solo un subespacio de dimension n-p sobre el n-toro.

En las nuevas coordenadas la superficie de sección corresponde a un n-1 toro encontrada al hacer $Q_n=0$ (módulo 2Π) y dando un valor a P_n. LLamando Y_0 al primer punto de una secuencia, el siguiente Y_1 corresponde a $Q_n=2\Pi$, suponiendo $w_n>0$, y el punto Y_h corresponde a $Q_n=2\Pi k$ a un tiempo:

$$t = 2\Pi k/w_n - D_n/w_n,$$

y usando que $Q_i=w_i t+D_i$ las otras coordenadas de Y_h son dadas por;

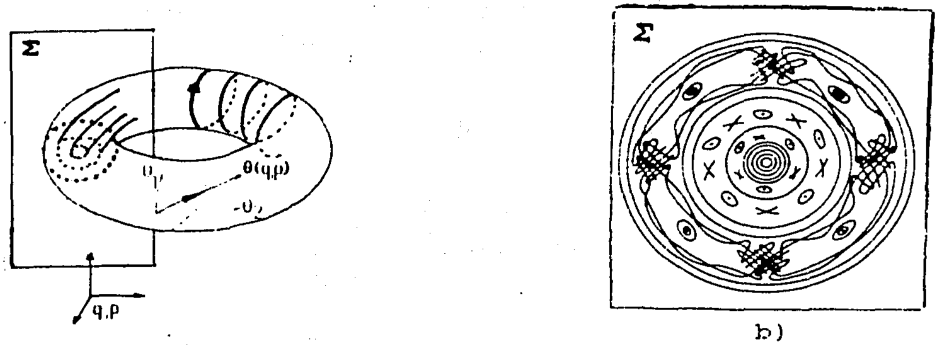
$$Q_{h,i} = (D_i - w_i D_n/w_n) + 2\Pi w_i k/w_n,$$

donde el primer término es constante. El segundo muestra que los valores sucesivos de $Q_{h,t}$ de la coordenada Q_t estan igualmente espaciadas. Representando Q_t sobre el círculo, P_t=cte, los puntos sucesivos se encuentran separados por el mismo ángulo w_{1}/w_{2}, al que llamaremos de rotación, por lo que considerando todas las variables angulares el mapeo consiste de n rotaciones de ángulos $2\Pi w_t/w_n$. En la Fig. IV.5 se muestra el aspecto que presenta la variedad de Poincaré después de hacer las intersecciones con distintas trayectorias, para un sistema integrable y otro que no lo es.

Nuevamente, en la práctica no es sencillo encontrar una transformación canónica que reduzca el hamiltoniano a una forma normal. Es aqui cuando se hace uso de de la exploración numérica de los sistemas para hallar indicios en los diagramas de fase de la existencia o no de integrales de movimiento.

Supóngase que solo la integral H es conocida. Ella define en el espacio fase una curva, más alla de la cual una órbita no periódica no puede cruzar, porque necesitaría velocidades imaginarias, y cualquier punto en el interior puede ser ocupado de acuerdo al teorema de recurrencia de Poincaré. En el espacio fase la trayectoria se encuentra constreñida en la superficie Π definida por H = cte. que permite escoger, además, una superficie de sección Σ y definir un mapeo G. Con el transcurso del tiempo, en el espacio físico la orbita pasa por regiones nuevas y de igual manera en la superficie Π, pero en Σ bajo G los puntos caen dentro de una curva invariante que es densamente cubierta. En este caso no existe ninguna constricción extra.

Inversamente si la curva invariante presenta puntos llenos y huecos alternados, implica que la trayectoria se encuentra confinada en un subespacio mas pequeño que Π y que la órbita solo



a) b)

Fig. IV.5
Aspecto del plano de Poicaré, para un sistema integrable, en a), y en b), para un sistema cuasintegrable

pasa por puntos nuevos pero dentro de una región física más pequeña. Sí éste comportamiento se presenta para cualquier valor de H, existe una constricción extra, una segunda integral de movimiento. Pero puede suceder que solo para algunos valores de H suceda esto y que en otros se de el caso donde no haya constricción extra, aquí los puntos bajo el mapeo no caen sobre ninguna curva invariante y se genera un caos. Se ha destruido la integral de movimiento y la trayectoria puede ocupar cualquier regíon en el espacio fase, estocasticamente. Esto quiere decir que el sistema posee una cuasintegral de movimiento.

c.2) **El Potencial triangular como ejemplo**

Cualquier potencial de la forma V(x,y) describe una superficie en el espacio de configuracion sobre la cual se lleva a cabo el movimiento de acuerdo a las ecuaciones de Newton:

$$\dot{x} = -\partial V/\partial x \quad \text{y} \quad \dot{y} = -\partial V/\partial y.$$

Claramente el sistema tiene dos grados de libertad a los que se definirán por: $q_1=x$, $q_2=y$ por lo que $p_1=\dot{x}$, $p_2=\dot{y}$ y la hamiltoniana es entonces:

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + V(q_1,q_2)$$

Hénon y Heiles (1964) proponen para su análisis con este metodo el potencial:

$$V(x,y) = (x^2+y^2+2x^2y-2y^3/3)/2.$$

Muy cerca del origen el término cúbico es despreciable y las equipotenciales se aproximan a círculos. Para valores mas grandes se aprecia una simetría triangular hasta $V=1/6$, después del cual las lineas equipotenciales se abren (Fig. IV.6a). La única integral conocida es la energía $E=H$ por lo que $V(x,y) < E$ confina la orbita en la regíon del plano x-y donde se satisface la desigualdad; de igual manera las velocidades se encuentran limitadas por: $(p_1^2 + p_2^2)/2 < E$.

Para definir la superficie de sección elijamos:

$$q_1 = 0 \quad y \quad p_1 = (2E-p_2^2-q_2^2+2q_2^3/3)^{1/2}.$$

La Fig. IV.6b muestra que la secuencia de puntos para $E=1/2$ define una curva invariante estable . Su número de rotación puede obtenerse observando primero que el punto 9 es justo el anterior al punto 1 por lo que $\nu < 1/8$, pero el punto 10 es el inmediato posterior y $\nu > 1/9$. Para tres revoluciones el punto 27 cae antes del 1 y $\nu < 3/36$ y aproximandonos más al valor exacto de ν si se consideran más revoluciones.

Al cambiar la superficie de seccción dejando $q_1=0$ pero variando $p_1 > 0$ bajo la condición de que $p_2^2+q_2^2-2q_2^3/3 < 2E$ se obtiene para la misma energía el comportamiento de la Fig. IV.6c donde se observa la existencia de 4 puntos elípticos y 3 hiperbólicos, pero la característica más importante es que los puntos no llenan densamente la curva, reflejando la existencia de una integral extra. Cuando la energía es aumentada a E=1/8 surge una propiedad muy importante del sistema pues existen algunas condiciones iniciales para las cuales los puntos caen sobre una variedad invariante y para otras una trayectoria cae caoticamente sobre el plano destruyendo la constricción que había. Tal es el comportamiento de una órbita cuando el sistema posee una cuasintegral.

Para cambios muy pequeños en la energía, E=1/6 el cáos producido es mayor y las curvas invariantes son destruidas, excepto algunas regiones muy pequeñas (Fig. IV.6d). El cálculo de las áreas dentro de las curvas invariantes muestra que mientras se den energías menores que una energía crítica, permanece constante, pero para energias mayores el área disminuye rapidamente sin hacerse cero (Fig. IV.6e). Esto quiere decir que se siguen manteniendo algunas curvas invariantes. Puede suceder entonces que las curvas cerradas sean tan pequeñas que escapen a nuestra resolución y que parezcan puntos haciendonos concluir erroneamente que el comportamiento sea caótico.

d) Islas y Teorema KAM

Considerese un sistema con dos grados de libertad cuya hamiltoniana $H=H_0$ puede reducirse a la forma normal. Eligiendo un valor de P_2 y haciendo $Q_2=0$ se define una superficie de sección sobre la cual las variables de acción-ángulo P_1 y Q_1 se toman

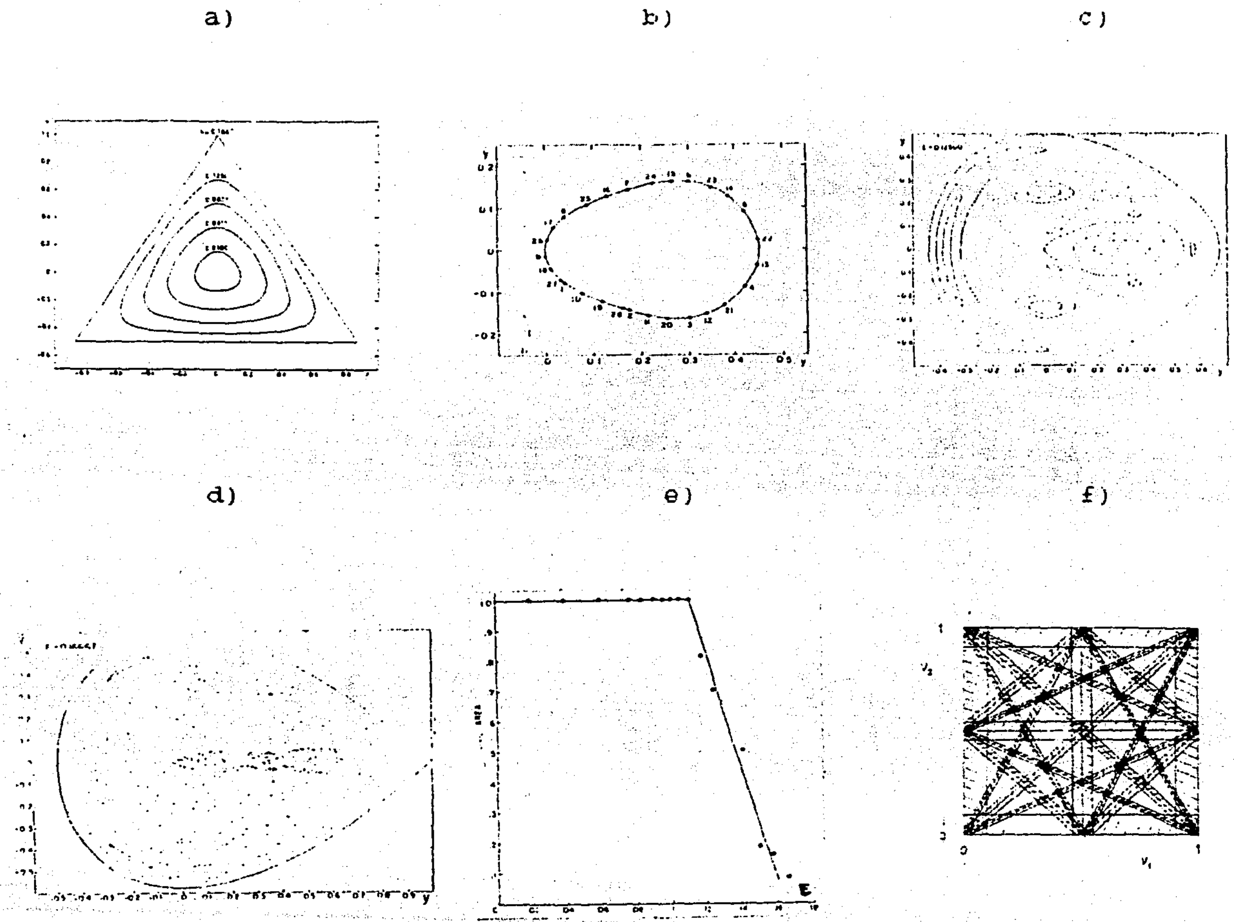


Fig. IV.6

como coordenadas polares, describiendo círculos concéntricos que corresponden a las curvas invariantes sobre las que caen los puntos separados por un ángulo constante igual al número de rotación $\nu_1 = w_1/w_2$. Las frecuencias w_1, w_2 son funciones de P_1 y P_2 pero la elección de un valor para P_2 hace que ν_1 varie solo con P_1 y por consiguiente, el ángulo de separación de los puntos para cada curva invariante es distinto.

Aquellos círculos que tengan un número de rotación irracional son densamente cubiertos por la secuencia de puntos, mientras que si es un número racional $\nu_1 = i/j$ la secuencia pasará por las mismas intersecciones después de j iteraciones repitiendose periodicamente. Cada punto sobre el círculo es un j-ciclo.

Cuando el sistema integrable es ligeramente perturbado, su nueva hamiltoniana $H = H_0 + H'$ no conserva su forma normal y el sistema puede volverse no integrable. Bajo ésta situación algunos de los puntos que eran j-ciclos desaparecen y surgen dos tipos de ciclos que se alternan; elipticos e hiperbólicos. Ellos siguen cayendo sobre la curva invariante original, pero si ahora en lugar de usar el mapeo G se usa G^j el punto j-ésimo estará subrodeado por un conjunto de curvas invariantes anidadas (islas). Nuevamente aplicando G, esta isla que rodea al punto j es mapeada en una estructura similar que rodea al siguiente ciclo elíptico, obteniendose una cadena de islas. En cada aplicación del mapeo G el punto salta de una isla a otra, pero despúes de j iteraciones regresa a la misma isla pero no al mismo punto. Si se considera solo el j-ésimo punto de la secuencia, se obtiene una nueva isla que rota a lo largo de otra.

De el hecho de que en un sistema integrable el número de rotación ν_1 varíe en forma contínua como función de P_1, y por tanto tenga un número infinito de valores racionales, se desprende que el sistema perturbado tiene una estructura más compleja, pues existe una infinidad de cadenas concéntricas de islas cuya dimensión decrece conforme el número j de islas se incrementa y solo aquellas cadenas con j pequeña pueden ser observadas. Es por esto que en el caso del potencial triangular solo se observan algunas cadenas.

Si se considera el mapeo G^j en lugar de G cada curva invariante que forma la isla es caracterizada por un número de rotación de segundo orden ν' igual al número fraccional de revoluciones hechas por un punto sobre la curva despúes de una aplicación de G^j. Tal número de rotación de segundo orden tambien varia en forma continua, rompiendo las curvas invariantes en una cadena de islas más pequeñas, llamadas de segundo orden. Si $\nu'=i'/j'$ hay j' islas de segundo orden en torno de una isla de primer orden, por lo que el número total de islas de segundo orden sobre la que caé una trayectoria es jj'. Sucesivamente, para cada isla de orden dos existe un número de rotación de orden 3 para cada curva invariante, con un número infinito de valores racionales que generan islas de orden 4, y así sucesivamente a orden infinito.

A partir del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) se puede explicar el comportamiento anterior. Para el sistema integrable considerese un mapeo de rotación dado en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} P' &= P \\ Q' &= Q + 2\Pi\nu(P) \end{aligned} \qquad \text{...IV.9}$$

definido para un anillo tal que: $a < P < b$ donde a y b son reales positivos, y en el cual el número de rotación es una función monotónica creciente de P_1. La perturbación del sistema conlleva a una perturbación del mapeo:

$$\begin{aligned} P' &= P + f_1(P,Q) \\ Q' &= Q + 2\Pi\nu(P) + f_2(P,Q) \end{aligned} \qquad \text{...IV.10}$$

en la que f_1 y f_2 son funciones periódicas de Q, con período 2Π, que sin embargo debe preservar el área. La pregunta que surge es si las curvas invariantes de IV.10 son modificaciones pequeñas de las existemtes en IV.9, o dicho de otra manera, si el número de rotación sigue siendo igual independientemente de la deformación de la curva.

El teorema de Moser da como condición suficiente de existencia de la curva invariante perturbada, que ν debe estar lejos de cualquier número racional:

$$| \nu - i/j | > \epsilon j^{-5/2} \qquad \text{...IV.11}$$

ϵ es una constante que depende de la amplitud de los términos perturbativos f_1 y f_2, para valores pequeños las curvas invariantes se preservan.

El toerema de Arnold presenta algunas diferencias:

1) considera sistemas hamiltonianos en vez de mapeos.

2) lo aplica a sistemas con n grados de libertad mientras que Moser lo hace sola para n=2.

3) su función hamiltoniana es analítica.

Escencialmente considera un sistema integrable y en este sistema un n-toro caracterizado por sus n frecuencias $w_1,\ldots,w_n$. Sumando una pequeña perturbación encuentra que los n-toros se mantienen invariantes bajo la condición de que las frecuencias no mantengan una relación de conmensurabilidad, por lo que deben satisfacer:

$$|\Sigma^n k_i w_i| > c|\Sigma^n |k_i||^{-\gamma}$$

para cualquier conjunto de enteros k_i no todos cero, y donde c y γ son constantes.

El teorema KAM no establece que las curvas invariantes o los toros se destruyan si la perturbación es grande, pero sugiere que puede suceder. Cuando la perturbación es del órden de los términos principales las curvas se rompen y forman cadenas de islas.

El teorema tambien explica porque el tamaño de las islas decrece cuando j se incrementa; esto es consecuencia del exponente -5/2 en IV.11 y aporta una prueba de estabilidad de los puntos elipticos fijos para el caso de dos grados de libertad.

e) **Difusión de Arnold**

En un sistema integrable de tres grados de libertad la secuencia de puntos en la superficie de sección de dimensión 4 caé sobre un toro invariante bidimensional. Cada uno de estos toros está caracterizado por dos números de rotación ν_1 y ν_2, que pueden graficarse en un cuadrado de lado 1. Añadiendo una perturbación, el toro es destruido en la vecindad de cada relación de conmensurabilidad:

$$k_1\nu_1 + k_2\nu_2 + k_3\nu = 0 \qquad \ldots IV.12$$

donde k_i son enteros. Cada relación IV.12 representa una línea en el plano ν_1-ν_2: los toros son destruidos y reemplazados por trayectorias caóticas en el interior de las bandas de diferente grosor alrededor de las lineas (Fig. IV.6f). El grosor decrece rapidamente, conforme las k_i se hacen grandes y tienden a cero cuando la perturbación tiende a cero. Se observa que las bandas se comunican; su union es llamada la red de Arnold. Una orbita en una region caótica de una banda particular es capaz de entrar a todas las otras bandas de regiones caóticas.Esta es la difusión.

f) La integral de Melnikov

Mientras que todas las órbitas en un potencial integrable son regulares, pequeñas perturbaciones del Hamiltoniano asociado en general llevan a la aparición de órbitas estocásticas. En el sistema integrable no perturbado, H_0, las órbitas se encuentran confinadas al n-toro definido por las integrales de movimiento y las coordenadas cíclicas. Al sumar a la Hamiltoniana un término perturbativo H_1, de acuerdo al teorema KAM puede suceder que muchos de los n-toros que componen el espacio fase del sistema integrable solo sean distorsionados, o bien, que algunos ser destruidos, en cuyo caso se crean regiones caóticas por las cuales las trayectorias pueden pasar sin restricción. Esto quiere decir que algunas de las integrales de movimiento son destruidas.

También, asociadas a un potencial, se encuentran una o varias familias de órbitas que definen la estructura orbital del sistema. Si ante una perturbación no aparecen regiones caóticas, el sistema sigue siendo integrable y la estructura orbital se conserva. Sin embargo pueden crearse regiones caóticas pequeñas que modifiquen la estructura orbital global del sistema. Schwarzschild ha encontrado que en un modelo galáctico triaxial aparecen las familias de órbitas presentes también en los potenciales de Stackel. Un potencial de Stäckel con perturbaciones pequeñas se puede aproximar a uno galáctico si su estructura orbital es sufientemente estable, como es el caso de las órbitas de una galaxia triaxial. Esta estabilidad puede ser estimada considerando el tamaño de la región estocástica. Si la región es muy grande el sistema es no integrable y las órbitas no se encuentran confinadas; no definen ninguna familia. Se puede dar el caso de que aún y cuando la región caótica no sea cero o muy grande, la estructura orbital global no se afecte; en tal caso el potencial puede simular un potencial galáctico. La suposición importante implicita en esta teoría es la existencia de una region caótica límite, para la cual el sistema conserve algunas integrales y las familias de órbitas características de los modelos de potenciales triaxiales de galaxias, compatibles con los potenciales deducidos de las observaciones; órbitas de caja, de tubo corto, tubo largo y de rizo.

Melnikov (1963) ha construído una integral en función del Hamiltoniano perturbado y una integral de movimiento del sistema original, que mide el área ocupada por la region caótica. Las suposiciones básicas de su teoría son que la Hamiltoniana perturbada contenga puntos hiperbólicos fijos con sus correspondientes órbitas homoclínicas (periódicas inestables o críticas) y una familia interna de órbitas periódicas cuyo periodo aumente al incrementarse la energía. Estas últimas se encuentran asociadas a puntos elípticos fijos. Para describir el procedimiento de Melnikov consideremos primero un potencial unidimensional y luego uno bidimensional conservativo é integrable. Recuerdese que por cada grado de libertad la teoría de Hamilton-Jacobi predice una integral de movimiento. Por tanto un potencial bidimensional de Stäckel tiene dos integrales; la energía E y otra que se denotará por I. En la Fig. IV.7a se muestra una órbita y-axial periódica inestable y una asintótica asociada para un potencial de Stackel, a los cuales se les puede aplicar la teoría.

La idea de Melnikov es determinar el rompimiento de la estructura orbital regular cerca de las órbitas homoclínicas. Para visualizar esto consideraremos un potencial unidimensional con dos mínimos, separados por un máximo localizado en el origen. Cada órbita u(t), donde u=(u,v), es una curva contínua función del tiempo y de las condiciones iniciales: $u=\varphi(u_0,t)$. Construyendo el mapeo de Poincaré para este potencial se observa la estructura del espacio fase de la Fig. IV.7b, donde se aprecian dos puntos elípticos con órbitas periódicas a su alrededor, una órbita asintótica que poseé la energía justa para alcanzar el punto de equilibrio después de un tiempo infinito, y una familia externa de órbitas también periódicas pero con energías mayores. El punto hiperbólico tiene asociada una órbita asintótica con una variedad estable W^s, sobre la cual los puntos se acercan al punto fijo cuando $t\to+\infty$, y una inestable W^u para la que los puntos se alejan cuando $t\to-\infty$.

Ahora considerese una pequeña perturbación de periódo T en el tiempo, i.e. la ecuación del sistema perturbado en u=(u,v) es:

$$u=g_0(u)+\epsilon g_1(u,t), \qquad \text{...IV.13}$$

con g_1 de periódo T, derivada de H_1 a través de las ecuaciones de Hamilton para:

$$H=H_0(u)+\epsilon H_1(u,t).$$

IV.13 puede escribirse alternativamente como un sistema autónomo de tres ecuaciones diferenciales. La órbita ahora depende de las condiciones iniciales en (u,v) y la fase de la perturbación a t=0, $t_0\epsilon[0,T]$. Así se ha construido un espacio fase tridimensional y las órbitas $u(t,t_0)$ se pueden usar para analizar el movimiento en la superficie de sección (u,v). Haciendo ésto, Greenspan y Holmes (1983) han encontrado que:

i) Para ϵ suficientemente pequeño, el mapeo de Poincaré refleja un único punto hiperbólico cercano al del sistema no perturbado. De igual manera las variedades estables e inestables se encuentran muy cercanas a las del sistema no perturbado.

ii) Las órbitas en las variedades perturbadas pueden ser expresadas como una expansión alrededor de la órbita homoclínica no perturbada $u^0(t)$ como:

$$u^s(t,t)=u^0(t-t_0)+\epsilon u_1{}^s(t,t_0)+O(\epsilon^2) \qquad t\epsilon[t_0,\infty],$$

$$u^u(t,t)=u^0(t-t_0)+\epsilon u_1{}^u(t,t_0)+O(\epsilon^2) \qquad t\epsilon[-\infty,t_0].$$

iii) Para la separación de w^s y w^u perpendicular al vector de flujo no perturbado $g_0(u^0)$ en el punto base $u^0(0)$ se encuentra:

$$d(t_0)=\epsilon|g_0(u^0)x(u^s(t,t_0)-u^u(t,t_0))|/|g_0(u^0)|+O(\epsilon^2)$$

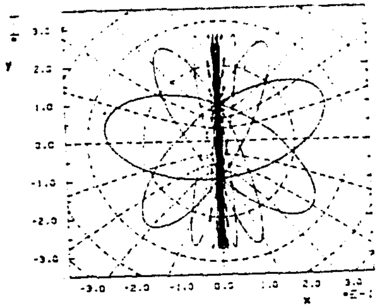
$$=\epsilon M(t_0)/|g_0(u^0)|. \qquad \text{...IV.14}$$

Aquí $M(t_0)$ es la integral de Melnikov dependiente de la fase:

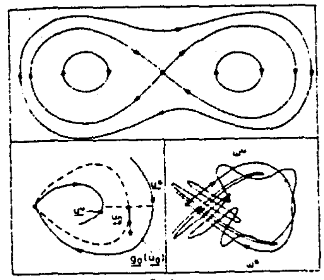
$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\,[H_0,H_1]_{uv} + O(\epsilon\cosh^2\mu t),$$

donde $[,]_{uv}$ es el corchete de Poisson en las variables u,v y la integración se toma a lo largo de la órbita homoclínica no perturbada $(u(t-t_0),v(t-t_0),t_0)$. De IV.13 y la Fig. IV.7b puede observarse que $M(t_0)$ es una área en el espacio fase, generada por los vectores u^s-u^u y $g_0(u^0)$. Ella da una buena medida de la separación de las variedades en la superficie de sección t_0, para ϵ muy pequeña y un punto base $u^0(0)$ lejos del punto fijo donde $g_0(u^0)=0$.

iv) M es invariante ante una transformación canónica de coordenadas, mientras que la primer ecuación de IV.14 no lo es.



a)



b)

Fig. IV.9

En a) se muestra una órbita homoclínica inestable para un potencial bidimensional de Stäckel. En b), se muestra la estructura del espacio fase cerca del punto hiperbólico, antes y después de la perturbación.

Una de las propiedades importantes de esta integral es que la existencia de ceros implica que aún para perturbaciones muy pequeñas no existe ninguna integral adicional en el sistema. Si se da la existencia de ceros, el maximo y el mínimo de la integral M da una medida de la importancia de las regiones caóticas en el sistema perturbado, en otras palabras, mide la rapidez con la cual la estructura orbital del potencial no perturbado es destruída.

Gerhard (1985) ha utilizado el método de Melnikov para cuantificar el tamaño de la region estocastica en el plano ecuatorial de galaxias prolatas y triaxiales, utilizando el Hamiltoniano:

$$H_o=P_\lambda^2/2P^2+P_\mu^2/2Q^2-(f(\lambda)-f\mu))/(\lambda-\mu),$$

construido con un potencial de Stäckel bidimensional, definido por la función f y cuya función de densidad es proporcional a r^{-2}. El término perturbativo utilizado es de la forma (ver Fig. V.2):

$$\text{Cos}m\varphi,\ \text{con } m=0,1,..$$

Ha encontrado que aquellas perturbaciones que se aproximan más a las deducidas a partir de la morfología de galaxias de tipo temprano, preservan la estructura orbital global del potencial de Stackel, para m=0,1,2,4. La integral de Melnikov se hace cero en las regiones caóticas encontradas, lo que refleja que en esas regiones no hay integrales adicionales a la energía, como se esperaba. Sin embargo las regiones caóticas son muy pequeñas y no alteran la estructura orbital global del potencial de Stäckel. En el caso de m=3 y <5, la estructura orbital es facilmente destruida, por la aparicion de grandes regiones caóticas.

V. EL MODELO TRIAXIAL DE SCHWARZSCHILD

En el capítulo dos se ha visto que una función de distribución que dependa de una o más integrales de movimiento en adición a la de energía y momento angular, genera una dispersión anisotrópica en la distribución de velocidades necesaria para sostener una configuración elipsoidal sin rotación. Schwarzschild (1979) ha demostrado, dentro del marco de los modelos estelares autoconsistentes, que es posible la existencia de galaxias elípticas triaxiales con tres integrales de movimiento, estables por 10^{10} años . Su procedimiento en contraste a los modelos de N cuerpos no proporciona ningún indicio sobre las condiciones iniciales de la formación de galaxias ya que solo interesa el estado estacionario final que se observa, evitando la suposición de Binney de que las galaxias triaxiales se forman a partir del colapso de un "pancake" de Zeldovich formado de estrellas preexistentes. El fín de los modelos estelares autoconsistentes es la de reproducir, en cualquier regíon del sistema, la función de densidad propuesta para una galaxia de morfología ya determinada, a partir de una superposición de densidades estelares, definidas por las estrellas que ocupan las órbitas permitidas por el potencial al seguirlas durante lapsos grandes de tiempo. El modelo de Schwarzschild no solo reproduce la densidad sino tambíen muestra que las órbitas se encuentran confinadas en regiones más pequeñas que las permitidas por su energía, indicando la existencia de integrales adicionales de movimiento. Su procedimiento consta de cinco pasos:

i) Se fijan las razónes de ejes de un sistema triaxial y se elige una función de densidad ρ a la cual no se modifica durante todo el procedimiento, representando a una galaxia que no ha sido formada ni perturbada recientemente. El sistema se divide en J celdas de masa D(J).

ii) Se resuelve la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi=4\Pi G\rho$ para el potencial triaxial.

iii) A partir de las ecuaciones de movimiento se hace el cálculo de M órbitas, de tal forma que las estrellas describan P oscilaciones a través del sistema. En este paso se calcula el tiempo I que tarda una estrella de cada órbita en cruzar la celda J, definiendo una densidad orbital B(I,J).

iv) Se analizan las regiones ocupadas por las órbitas para cierto valor de su energía.

v) Se reproduce la función de densidad a partir de la superposición de densidades orbitales al meter en cada órbita C(I) estrellas, llamado número de ocupación.

El objetivo de este capítulo es reproducir y al mismo tiempo generalizar algunos de los pasos seguidos por Schwarzschild, en particular, se hallará, en a), una expresión para la densidad. En b), se corregirá el potencial triaxial de Schwarzschild que se dejará en función de las razones de ejes α y β, lo que permitirá modelar galaxias triaxiales con casos particulares de oblatas, prolatas y esféricas. En c) se describirán los resultados de Schwarzschild y se calcularán algunas órbitas con el potencial corregido que mostrarán que la estructura orbital de ambos y la de un potencial de Stäckel parecen ser similares. Finalmente en d) se hará el ajuste del potencial triaxial con uno de Stäckel y se darán las expresiones analíticas aproximadas para las tres integrales de movimiento en función de las razones de ejes.

a) La Función Triaxial de Densidad

Para construir una estructura triaxial se hace uso de una expansión en serie de Taylor de armónicos esféricos alrededor de un sistema con simetría esférica. De esta manera la triaxialidad se alcanza sumando algunos términos perturbativos, que son función de los ángulos θ y φ. En el caso de una galaxia triaxial, las superficies de isodensidad tambien deben ser triaxiales por lo que la densidad puede expanderse alrededor de una densidad simetricamente esférica, como:

$$\begin{aligned}\rho(R,\theta,\varphi)&=\Sigma_{l,m}Y_{l,m}(\theta,\varphi)\rho_{l,m}(R)\\&=Y_{0,0}\rho_0+Y_{1,-1}\rho_1+Y_{1,0}\rho_2+Y_{1,1}\rho_3+Y_{2,-2}\rho_4+\\&\quad Y_{2,-1}\rho_5+Y_{2,0}\rho_6+Y_{2,1}\rho_7+Y_{2,2}\rho_8+\ldots\end{aligned}$$

de donde solo deben considerarse los términos $Y_{0,0}\rho_0$, $Y_{2,0}\rho_6$ y $Y_{2,2}\rho_8$, pues se puede apreciar de la Fig. V.1 que el primero conserva la simetría esférica, permitiendo modelar galaxias E0. Los otros dos términos perturbativos deforman al sistema en uno triaxial, y armónicos intermedios y de orden mayor deforman aún más al sistema, de donde se deduce que la densidad triaxial queda expresada convenientemente por:

$$\rho(x,y,z)=F(R) - G(R)(2z^2-x^2-y^2)/2R^2 + 3H(R)(x^2-y^2)/R^2 \quad \ldots V.1$$

con: $Y_{0,0}=1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\rho_0(R)=F(R)$

$Y_{2,0}=(3\cos^2\theta-1)/2=-(2z^2-x^2-y^2)/2R^2$ $\quad$ y $\qquad$ $\rho_6(R)=G(R)$

$Y_{2,2}=3\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\varphi=3(x^2-y^2)/R^2$ $\qquad\qquad$ $\rho_8(R)=H(R)$

La densidad $F(R)$ propuesta, a la que se expande en armónicos esféricos, es la deducida de acuerdo a la distribución de la luz en galaxias elípticas según un perfil de luminosidad de Hubble:

$$F(R) = (1 + R^2)^{-3/2}. \qquad \ldots V.2$$

La función IV.1 describe la variación punto a punto de la densidad, mientras que para una R dada, las funciones G(R) y H(R) describen superficies triaxiales de isodensidad, i.e. la "parametrizan"; ellas no reproducen superficies concéntricas ní coaxiales, lo cual es necesario para reproducir los gradientes observados en las isofotas. Para hallar su forma explícita se introducen las razones de ejes $\alpha=x/z$ y $\beta=y/z$ del sistema, y una condición de triaxialidad. Observese que si $\alpha=\beta=1$ se debe recuperar el caso esférico, pero si $\alpha=\beta$ se obtiene un sistema oblato. Un sistema triaxial se obtiene con $\alpha\neq\beta$.

La condición de triaxialidad en la densidad es que ésta sea un factor α ó β mayor en la dirección x ó y, que en z, respectivamente, es decir:

$$\rho(\alpha z,0,0) = \rho(0,0,z),$$
$$\rho(0,\beta z,0) = \rho(0,0,z). \qquad \ldots V.3$$

Para especificar completamente $\rho(x,y,z)$ es necesario conocer G y H, para lo cual de V.1 obtenemos;

$$\rho(R,0,0) = F(R) + G(R)/2 + 3H(R),$$
$$\rho(0,R,0) = F(R) + G(R)/2 - 3H(R), \qquad \ldots V.4$$
$$\rho(0,0,R) = F(R) - G(R),$$

eliminando de aquí H(R):

$$\rho(R,0,0)+\rho(0,R,0) = 2F(R) + G(R),$$

y haciendo uso de la condición de triaxialidad tenemos:

$$\rho(0,0,\alpha R)+\rho(0,0,\beta R)=F(\alpha R)+F(\beta R)-G(\alpha R)-G(\beta R) \Rightarrow$$

$$\rho(0,0,\alpha R)+\rho(0,0,\beta R)+\rho(\alpha\beta R,0,0)-\rho(0,\alpha\beta R,0)=F(\alpha R)+F(\beta R)-2F(\alpha\beta R)-G(\alpha R)-G(\beta R)-G(\alpha\beta R). \qquad ...V.5$$

Aplicando las condiciones V.3 se obtiene la relación:

$$F(\alpha R) + F(\beta R) - 2F(\alpha\beta R) = G(\alpha R) + G(\beta R) + G(\alpha B R). \qquad ...V.6$$

En general este tipo de ecuaciones no tienen solución única, lo que ayuda a encontrar una solución para regiones cercanas al centro de la galaxia con R's pequeñas, y otra para describir el comportamiento asintótico para R's grandes. Expandiendo V.6 en serie alrededor del origen:

$$\Sigma_0 F^n(0)R^{2n}\{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^{2n}\}/n!=\Sigma G^n(0)\{\alpha^{2n}+\beta^{2n}+(\alpha\beta)^{2n}\}/n!$$

de donde se despejan los factores G_n de G:

$$G^n(0) = F^n(0)\{(\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^{2n})/(\alpha^{2n}+\beta^{2n}+(\alpha\beta)^{2n})\} \qquad ...V.7$$

y puede verse facilmente de F que: $F^n(0)=(-1/2)^n 1X3X...(2n+1)$ lo que nos permite construir G.

Para hallar H(R), de V.4 se llega a:

$$\rho(R,0,0) - \rho(0,R,0) = 6H(R), \text{ o bien}$$

$$H(R)=\{F(R/\alpha)-G(R/\alpha)-F(R/\beta)+G(R/\beta)\}/6,$$

y expandiendo en serie se encuentran los factores de H:

$$H^n(0)=F^n(0)\{(\beta^{2n}-\alpha^{2n})/(\alpha^{2n}+\beta^{2n}+(\alpha\beta)^{2n})\}/2 \qquad \ldots V.8$$

Busquemos ahora el comportamiento asintótico. Para F basta con hacer $F(R)=(R^{-3})(1 + R^{-2})^{-3/2} = f(u)R^{-3}$ y expander $f(u)$ alrededor del cero, es decir cuando $R \Rightarrow \infty$, con $u=1/R$. Así que;

$$F(R)= R^{-3}\Sigma_0 F^n(0)R^{-2n}/n! \qquad \ldots V.9$$

y la ecuación V.6 pasa a ser:

$$F(1/\alpha R)+F(1/\beta R)-2F(1/\alpha\beta R) = G(1/\alpha R)+G(1/\beta R)+G(1/\alpha\beta R).$$

Proponiendo:

$G(R)=R^{-3}\Sigma_0 G^n R^{-2n}/n!$ obtenemos:

$$G^n=F^n\{(\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}-2)/(\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}+1\}, \qquad \ldots V.10$$

y $H(R)=\{F(R/\alpha)-G(R/\alpha)-F(R/\beta)+G(R/\beta)\}/6$ que al expander en serie nos da los coeficientes:

$$H^n=F^n\{(\alpha^{2n-3}-\beta^{2n-3})/(\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}+1\}/2 \qquad \ldots V.11$$

Schwarzschild ha unido las dos soluciones, promediando los valores en el intervalo R=[0.8,1.2]. En este trabajo, en la misma región, se ha interpolado usando el método de Neville. La Fig.

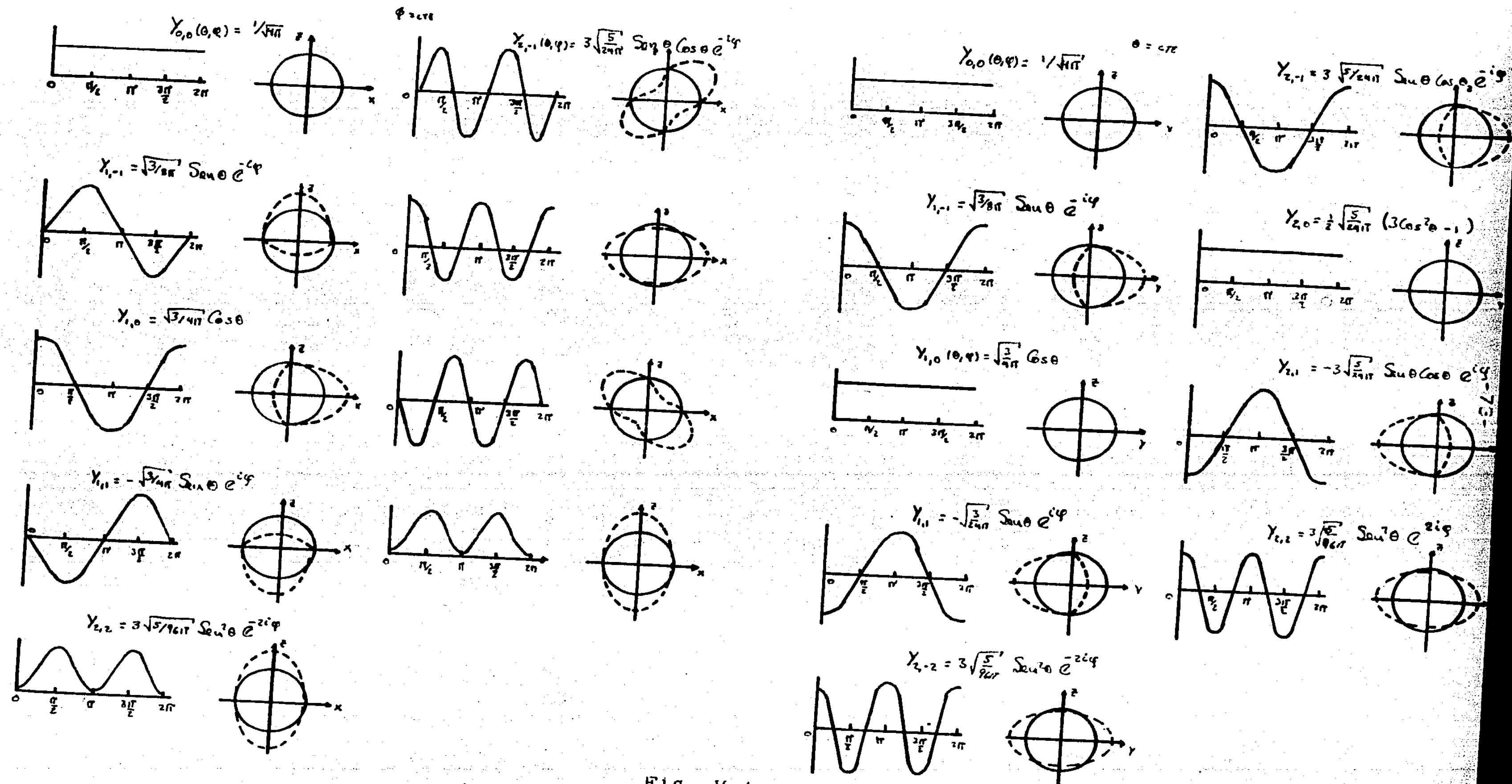


Fig. V.1
Deformación de un sistema esferico ante perturbaciones en términos de armonicos esféricos.

V.2 muestra el comportamiento de las funciones F, G y H.

b) El Potencial Triaxial y Algunas Correcciones

De igual manera como sucede con el potencial para un homeoide de estratificaciones de igual densidad, en este elipsoide se obtienen superficies equipotenciales triaxiales al expander en armónicos el potencial de simetría esférica asociado a la densidad F:

$$\Phi(R,\theta,\varphi) = \Sigma Y_{l,m}(\theta,\varphi)\Phi_{l,m}(R)$$

cuyos únicos términos utiles son el 2,0 y 2,2. Por lo tanto el potencial triaxial queda expresado como:

$$\Phi(x,y,z)=Y_{0,0}\Phi_0 + Y_{2,0}\Phi_6 + Y_{2,2}\Phi_8,$$

$$= U(R) -V(R)(2z^2-x^2-y^2)/2R^2+3W(R)(x^2-y^2)/R^2, \qquad \text{...V.12}$$

de igual manera las funciones indeterminadas V y W reproducen superficies equipotenciales no concéntricas ní coaxiales. Para encontrarlas sustituimos V.12 en la ecuación de Poisson:

$\nabla^2\Phi = (\nabla^2_r+\nabla^2_{\theta,\varphi})\Sigma Y_{l\ m}\Phi_{l,m} = \Sigma Y_{l,m}\rho_{l,m}$ por lo que las ecuaciones a resolver son:

$$R^{-1}d^2RU/dR^2 = F(R), \qquad \text{...V.13a}$$

$$R^{-1}d^2RV/dR^2-6R^{-2}V = G(R), \qquad \text{...V.13b}$$

$$R^{-1}d^2RW/dR^2-6R^{-2}W = H(R). \qquad \text{...V.13c}$$

La primera de las ecuaciones se puede resolver analíticamente, resultando:

$$U(R) =-R^{-1}\ln((1+R^2)^{1/2}+R) + C_1/R + C_2,$$

de donde estableciendo las condiciones a la frontera: $U(\infty)=C_2=0$ y $U(0)=-1$ se tiene la forma exacta de U:

$$U(R)=-R^{-1}\ln((1+R^2)^{1/2}+R) -1.$$

O bien expandiendo en serie, los coeficientes quedan como:

$$U^n = F^{n-1}/2(2n+1) \quad \text{con} \quad n=1,2..., \qquad ...V.14a$$

el término n=0 corresponde a la constante $U^0= -1$.

Analogamente para V y W, cuyas expresiones se obtienen expandiendo las relaciones V.13 en función de los coeficientes G_n y H_n ya conocidos, y despejar V_n y W_n:

$$V^n = G^n/(2(n+1)(2n+3)-6), \qquad ...V.14b$$

$$W^n = H^n/(2(n+1)(2n+3)-6), \qquad ...V.14c$$

validas desde que n=1,2,..Sin embargo las series (V.14) presentan una singularidad en n=0, por lo que cualquier solución de la forma v_0R^2 satisface la ecuación de Poisson. Se debe resolver entonces la ecuación homogénea en términos de los coeficientes V^n ya conocidos:

$$R^{-1}d^2(RV(\text{ó } W))/dR^2 - 6V(\text{ó } W)/R^2=0 \qquad ...V.15$$

Antes de resolverla, encontremos la solución asintótica para los potenciales sustituyendo las expresiones asintoticas de la densidad y resolviendo la ecuación de Poisson. Las soluciones así obtenidas son:

$$U(R) = -2\ln R/R + c_2/R + \Sigma U^n(1/R)^{2n+1},$$

donde $U^n=F^n/2n(2n+1)$ y $n=1,2,\ldots$ Se presenta igualmente una singularidad en $n=0$. Para los coeficientes de V y W se tiene:

$$\left.\begin{aligned} V^n&=G^n/[2n(2n+1)-6] \\ W^n&=H^n/[2n(2n+1)-6] \end{aligned}\right\} \ldots V.15$$

pero ahora éstas solo son validas si $n=0,2,3\ldots$ y presentan un comportamiento crítico en $n=1$ en donde cualquier expresión de la forma v_1/R^3 es solución. Por otro lado, no solo se requiere hallar los coeficientes indeterminados sino expresarlos en función de la triaxialidad α y β. Para hallar dichos coeficientes, llamemos Σ_1 y Σ_1' a la función y su derivada evaluada en $R=1$, menos los coeficientes que se quiere encontrar. De igual manera sean Σ_2 y Σ_2' para el caso asintótico. La condición de continuidad al unir las dos soluciones requiere que en $R=1$:

$$\Sigma_1 + v_0 = \Sigma_2 + v_1,$$
$$\Sigma_1' + 2v_0 = \Sigma_2' - 3v_1,$$

de donde resolviendo simultaneamente:

$$v_0 = [(\Sigma_2-\Sigma_1) - 3(\Sigma_1'-\Sigma_2')]/5$$
$$v_1 = v_0 + (\Sigma_1-\Sigma_2).$$

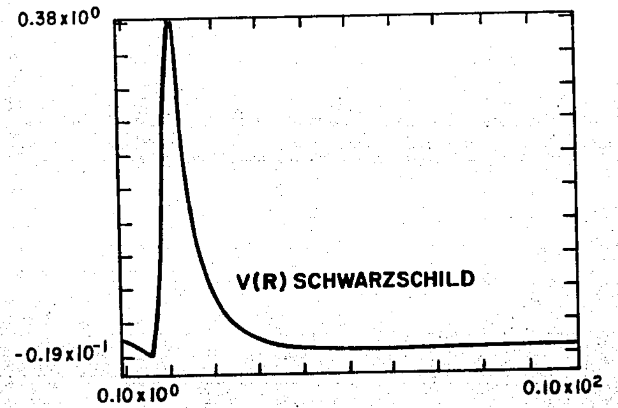
Para W se obtienen expresiones análogas, y estas deben ser parte de la solución general a la ecuación de Poisson. En la Fig. V.2 se muestra la forma de las funciones U, V y W.

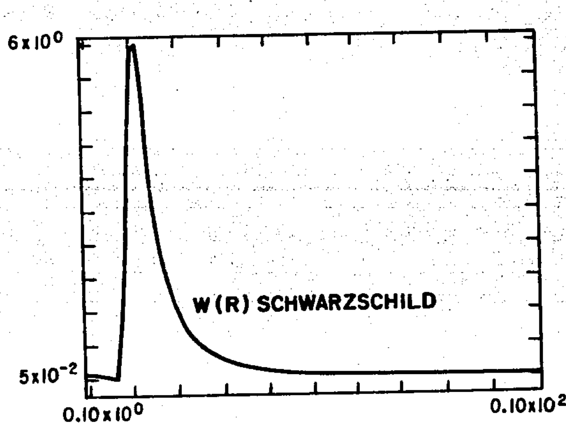
En el modelo de Schwarzschild la forma de sus potenciales presentan un comportamiento incongruente con la forma de la densidad, pues sus ecuaciones no satisfecen la ecuación de Poisson y predicen la existencia de un potencial repulsivo en una región de la galaxia, no deducible de la densidad. Ha mencionado, en conversación personal, que el error no es importante como para modificar los resultados lo que tiene que tomarse con mucha reserva. Debido a los problemas de cómputo y tiempo que se presentan para verificar tal afirmación, asumiré que las conclusiones deducidas de su modelo siguen siendo validas.

En la tabla III se comparan las soluciones obtenidas por Schwarzschild y las obtenidas en este trabajo, asumiendo la razón de ejes deducida para el núcleo de M31, para el cual $\alpha=2$ y $\beta=1.25$.

TABLA III

Función	**Schwarzschild**	**Este trabajo**
U	$-1+0.16666R^2-0.075R^4+...$	$-1+0.16666R^2-0.075R^4+...$
U(asint)	$-\ln R/R-0.6936/R-0.25/R+...$	$-\ln R/R-0.6936/R-0.25/R+..$
V	$-0.061064R^2+0.06292R^4+...$	$-0.106621R^2+0.06292R^4+...$
V(asint)	$-0.12102/R+0.7641/R^3+...$	$-0.12102/R+(1.37518\ln R/5-$ $-0.0465629)/R^3+...$
W	$-0.015403R^2+0.011054R^4+...$	$-0.044025R^2+0.01105R^4+...$
W(asint)	$-0.04601/R+0.8711/R^3+...$	$-0.04601/R+(0.60222\ln R/5-$ $-0.034468)/R^3+...$


0.38x10^0
-0.19x10^-1
V(R) SCHWARZSCHILD
0.10x10^0
0.10x10^2


6x10^0
5x10^-2
W(R) SCHWARZSCHILD
0.10x10^0
0.10x10^2

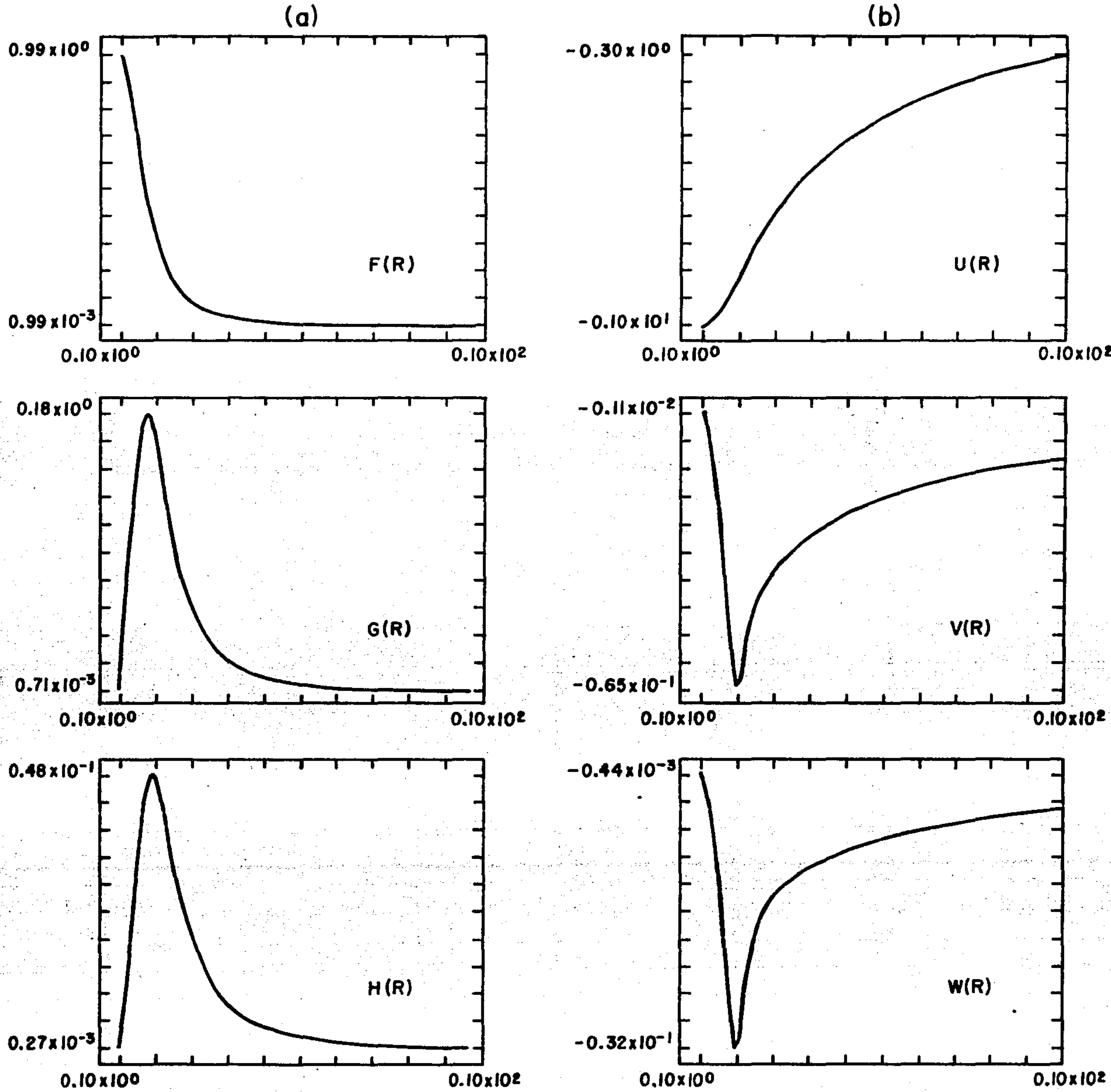


Fig. V.2
En a) se muestran las graficas de las densidades F,G y H como función de R. En b) los potenciales U,V y W y la comparación de los potenciales deducidos por Schwarzschild con los de este trabajo. En el primer caso aparece, en V y W , un potencial repulsivo en una region grande de la galaxia.

Puede observarse de esta tabla, que los coeficientes de V y W asintóticos de Schwarzschild omiten un término $\ln R/R^3$ que para las regiones centrales puede ser importante, debido a que el factor R^{-3} crece más rápido que el logarítmico; sin embargo, la existencia de términos de orden mayor puede hacer que su importancia dependa del grado de la serie. También se observa un cambio de signo en el término R^{-3}. Al graficar las funciones de V y W omitiendo las correcciones se obtienen los potenciales repulsivos que aparecen en la Fig. V.2

En la tabla IV se hace una lista de los coeficientes resultantes de la expansión. Los datos fueron obtenidos con el programa que aparece al final del trabajo.

c) La estructura orbital del modelo de galaxias triaxiales

Para demostrar la existencia de integrales de movimiento adicionales a la energía, que generasen la anisotropía necesaria para sostener la estructura triaxial, Schwarzschild dividio su elipsoide triaxial en 259 celdas. En la dirección radial el sistema fue dividido en 15 cascarones equipotenciales, de tal forma que de superficie en superficie el potencial se incrementara a lo más en un factor $2^{1/3}$. Esto tiene la ventaja de que cada superficie tiene aproximadamente la misma masa. En la Fig. V.3 se muestra la división. Para asegurar que cada celda tiene la misma masa, se utilizaron planos que pasaran por el origen y que describieran dos ángulos α' y β' respecto de los ejes x-y, y que delimitados por las superficies equipotenciales describierán angulos solidos iguales.

Para el cálculo de las órbitas Schwarzschild normalizó sus variables como:

TABLA IV

Coeficientes para distintos tipos de geometrias

TRIAXIAL (α=2, β=1.25)

I	FN(I)	GNCH(I)	HNCH(I)	GNGR(I)	HNGR(I)	
0	1.000000	0.000003	0.000000	0.726106	0.276034	
1	-1.500000	0.880957	0.154762	-1.375179	-0.602223	
2	1.875000	-1.946072	-0.221049	1.832950	0.863654	
3	-2.187500	2.948403	0.211016	-2.174891	-1.060333	
4	2.460938	-2.840137	-0.172088	2.457355	1.215969	
5	-2.707031	4.620196	0.129933	-2.706042	-1.347354	
6	2.932617	-5.297646	-0.093928	2.932349	1.463723	
7	-3.142090	5.986545	0.066089	-3.142018	-1.569969	
8	3.338470	-6.402605	-0.045473	3.336451	1.668790	
I	UNCH(I)	VNCH(I)	WNCH(I)	UNGR(I)	VNGR(I)	WNGR(I)
0	-1.000000	-0.106621	-0.044025	-0.693600	-0.121018	-0.046006
1	0.166667	0.062925	0.011054	-0.250000	-0.046563	-0.034468
2	-0.075000	-0.054058	-0.006140	0.093750	0.130925	0.061690
3	0.044643	0.044673	0.003197	-0.052083	-0.060414	-0.029454
4	-0.030382	-0.036924	-0.001655	0.034180	0.037233	0.018424
5	0.022372	0.030801	0.000866	-0.024609	-0.026020	-0.012955
6	-0.017353	-0.025969	-0.000460	0.018799	0.019515	0.009758
7	0.013965	0.022130	0.000248	-0.014962	-0.015402	-0.007696
8	-0.011552	-0.019055	-0.000136	0.012274	0.012551	0.006274

ESFERICA (α=β=1)

I	FN(I)	GNCH(I)	HNCH(I)	GNGR(I)	HNGR(I)	
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
1	-1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
2	1.875000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
3	-2.187500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
4	2.460938	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
5	-2.707031	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
6	2.932617	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
7	-3.142090	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
8	3.338470	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
I	UNCH(I)	VNCH(I)	WNCH(I)	UNGR(I)	VNGR(I)	WNGR(I)
0	-1.000000	0.000000	0.000000	-0.693600	0.000000	0.000000
1	0.166667	0.000000	0.000000	-0.250000	0.000000	0.000000
2	-0.075000	0.000000	0.000000	0.093750	0.000000	0.000000
3	0.044643	0.000000	0.000000	-0.052083	0.000000	0.000000
4	-0.030382	0.000000	0.000000	0.034180	0.000000	0.000000
5	0.022372	0.000000	0.000000	-0.024609	0.000000	0.000000
6	-0.017353	0.000000	0.000000	0.018799	0.000000	0.000000
7	0.013965	0.000000	0.000000	-0.014962	0.000000	0.000000
8	-0.011552	0.000000	0.000000	0.012274	0.000000	0.000000

OBLATA (α=β=2)

I	FN(I)	GNCH(I)	HNCH(I)	GNGR(I)	HNGR(I)	
0	1.000000	0.000000	0.000000	0.823529	0.000000	
1	-1.500000	1.500000	0.000000	-1.430769	0.000000	
2	1.875000	-3.125000	0.000000	1.853113	0.000000	
3	-2.187500	4.176136	0.000000	-2.181098	0.000000	
4	2.460938	-4.864644	0.000000	2.459135	0.000000	
5	-2.707031	5.398232	0.000000	-2.706536	0.000000	
6	2.932617	-5.860941	0.000000	2.932483	0.000000	
7	-3.142090	6.283029	0.000000	-3.142054	0.000000	
8	3.338470	-6.676635	0.000000	3.338461	0.000000	
I	UNCH(I)	VNCH(I)	WNCH(I)	UNGR(I)	VNGR(I)	WNGR(I)
0	-1.000000	-0.141554	0.000000	-0.693600	-0.137255	0.000000
1	0.166667	0.107143	0.000000	-0.250000	-0.042939	0.000000
2	-0.075000	-0.086806	0.000000	0.093750	0.132365	0.000000
3	0.044643	0.063275	0.000000	-0.052083	-0.060586	0.000000
4	-0.030382	-0.046775	0.000000	0.034180	0.037260	0.000000
5	0.022372	0.035988	0.000000	-0.024609	-0.026024	0.000000
6	-0.017353	-0.028730	0.000000	0.018799	0.019550	0.000000
7	0.013965	0.023620	0.000000	-0.014962	-0.015402	0.000000
8	-0.011552	-0.019871	0.000000	0.012274	0.012551	0.000000

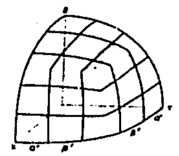


Fig. V.3
El sistema triaxial dividido en 259 celdas.
Cada cascara equipotencial tiene la misma masa.

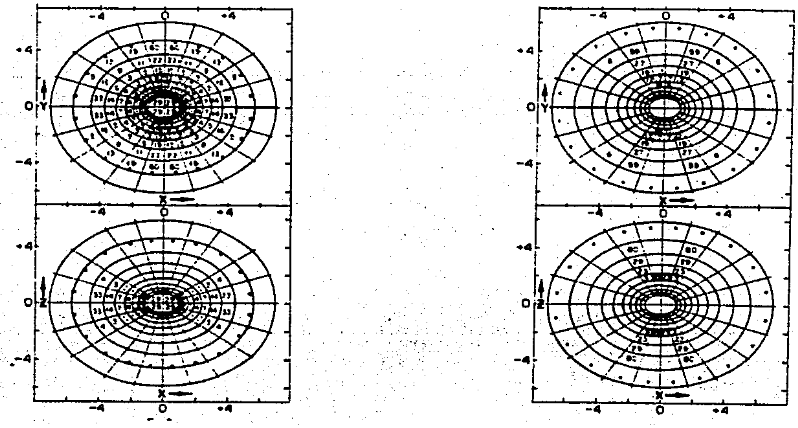
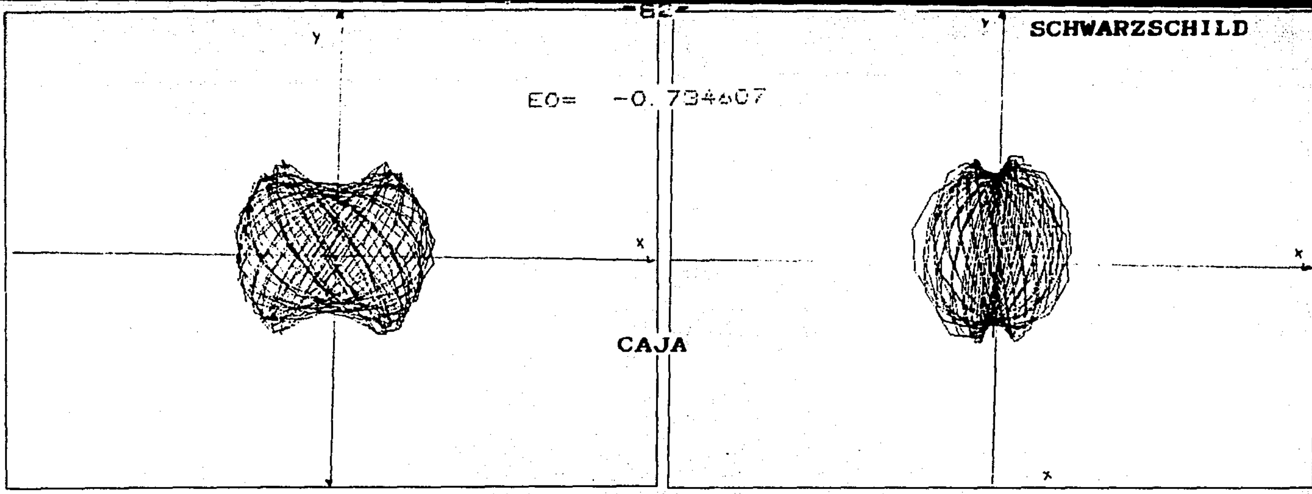
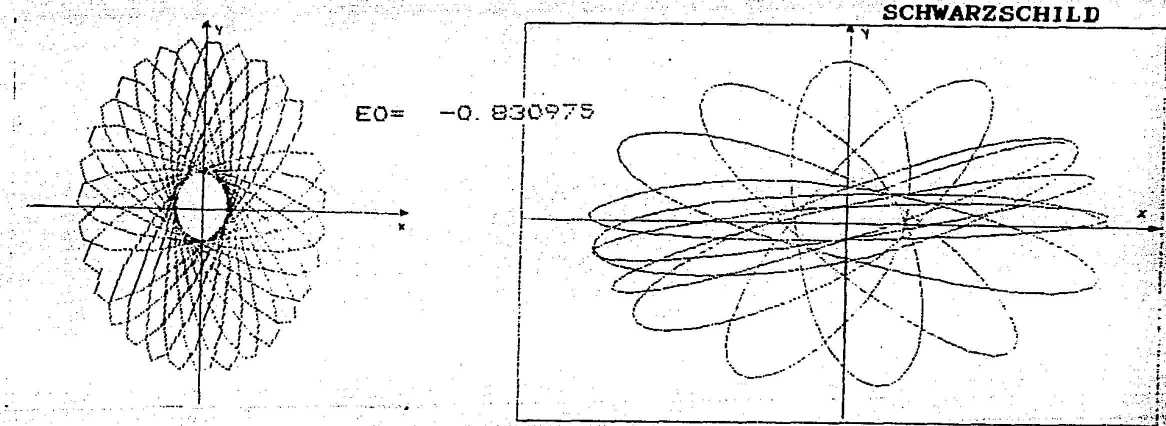


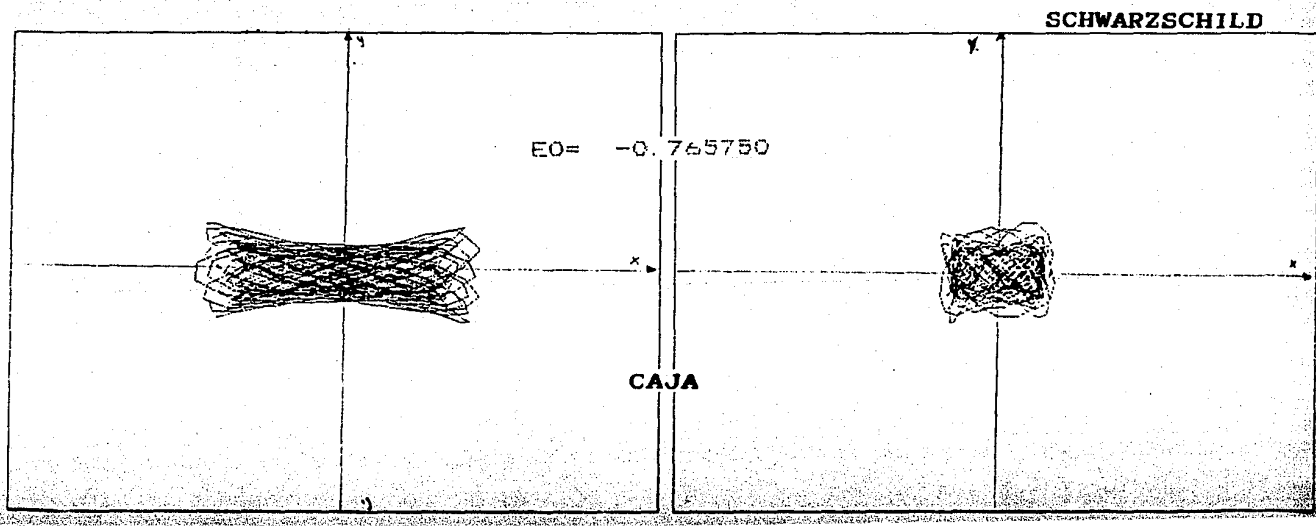
Fig. V.4
Regiones ocupadas por las órbitas. Ellas ocupan regiones más pequeñas que las permitidas por su energía, lo cual es evidencia de integrales de movimiento adicionales.

Longitud	$R=1$	[200 pc],
Masa	$\rho_c R_c$	[$3x10^9 M_\odot$],
Tiempo	$(4\Pi G\rho_c)^{-1/2}$	[2×10^5 años],
Velocidad	$R_c(4\Pi\Gamma\rho_c)^{1/2}$	[1000 km/seg].

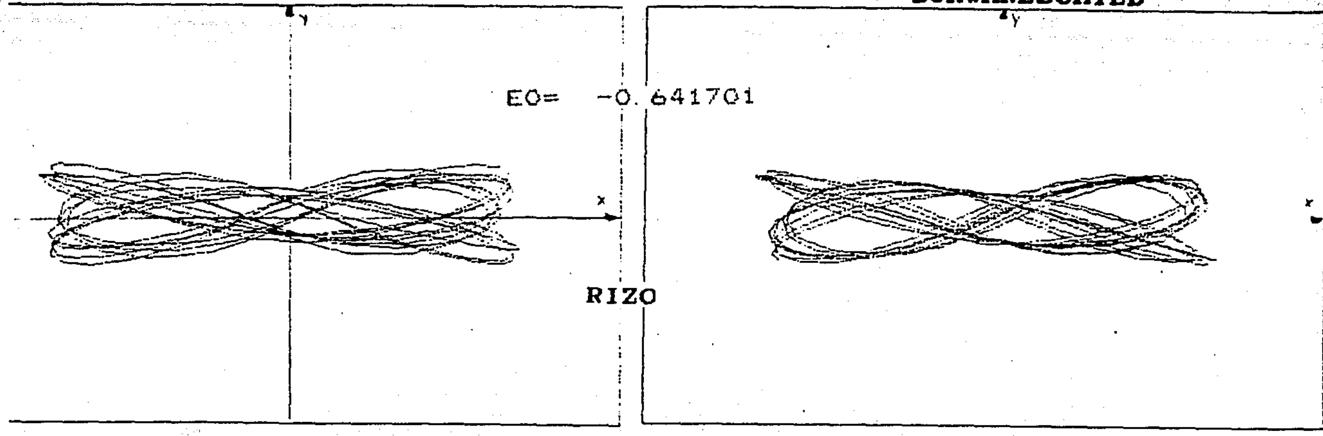
En este trabajo se ha seguido la misma normalización. En las paginas siguientes se muestran algunas órbitas calculadas con el potencial de Schwarzschild corregido y las correspondientes de Schwarzschild omitiendo las correcciones. Se puede apreciar que algunas de ellas no sufren grandes cambios e incluso son del tipo asociadas a un potencial de Stäckel: de caja , de tubo y de rizo.


SCHWARZSCHILD
EO= -0.734607
CAJA
y
x

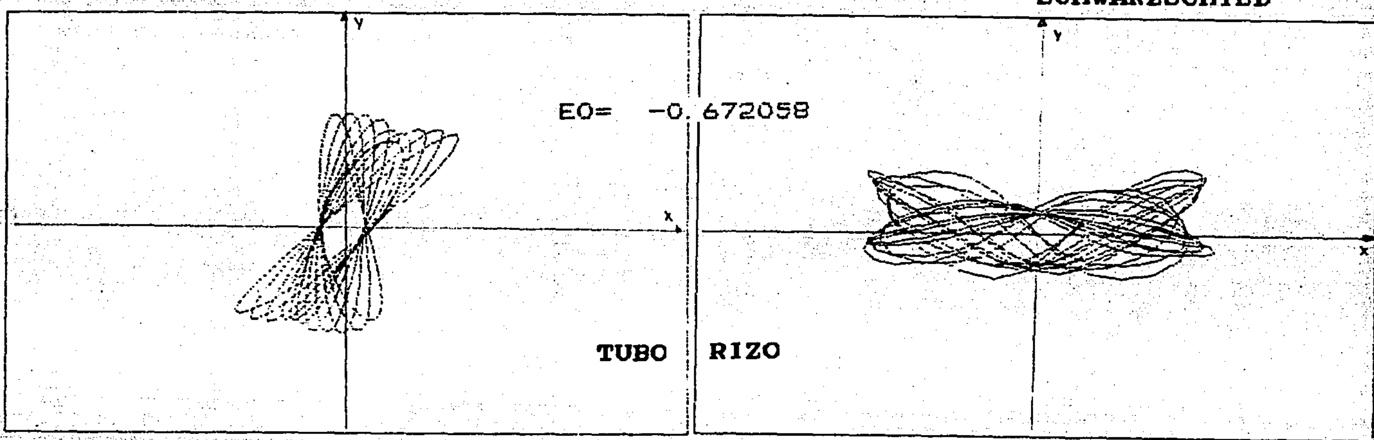

SCHWARZSCHILD
EO= -0.830975
y
x


SCHWARZSCHILD
EO= -0.765750
CAJA
y
x

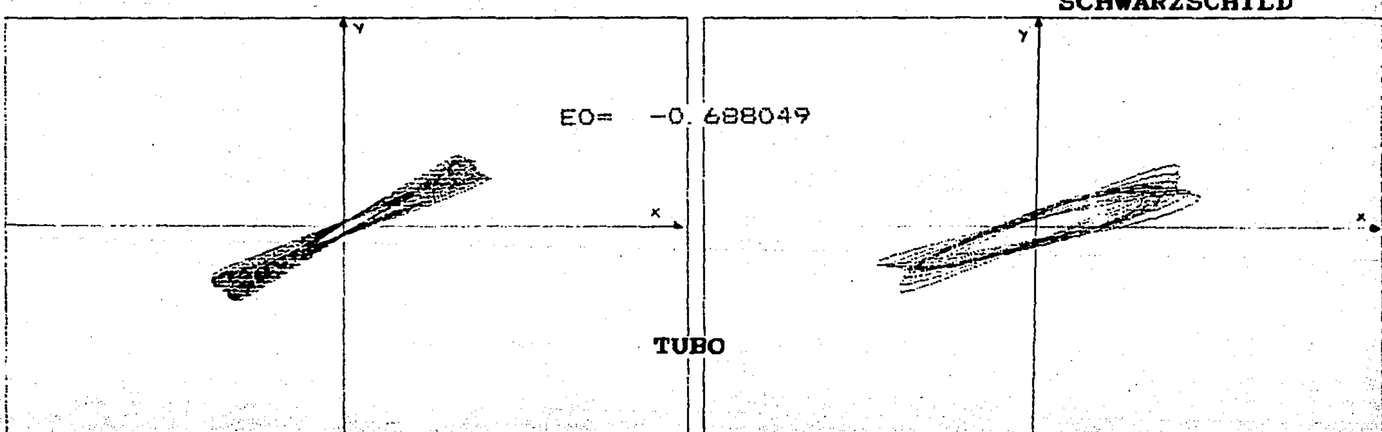
SCHWARZSCHILD



SCHWARZSCHILD



SCHWARZSCHILD



Para verificar si las correcciones hechas en este trabajo son importantes o no en las conclusiones de Schwarzschild es necesario hacer un cálculo más grande y detallado de órbitas. Por lo pronto, aparentemente hay cambios muy pequeños en su forma, sin embargo cerca de la region de potencial repulsivo, se encuentra que las órbitas escapan rápidamente de la galaxia. Ello podría cambiar la estructura orbital del sistema. Por otra parte, con el potencial de Schwarzschild corregido, se encuentra que para galaxias oblatas se conservan tanto la energía total como la componente z del momento angular. Para las galaxias triaxiales únicamente se conserva la energía pero no la componente z del momento angular, lo cual es de esperarse en este tipo de galaxias como se observa en las expresiones IV.8c.

d) Ajuste de un potencial de Stäckel y las integrales de mov.

Se ha visto en el capítulo IV que un potencial de Stäckel solo se puede ajustar a un potencial triaxial hasta orden dos. Expandiendo en serie un potencial de Stäckel alrededor del origen las funciones $\xi(\lambda)$, $\eta(\mu)$ y $\theta(\nu)$ que lo definen quedan expresados como:

$$\xi(\lambda)=\xi_0+\xi_1(\lambda+\alpha)+\xi_2(\lambda+\alpha)^2+\ldots,$$

$$\eta(\mu)=\eta_0+\eta_1(\mu+\beta)+\eta_2(\mu+\beta)^2+\ldots,$$

$$\theta(\nu)=\theta_0+\theta_1(\nu+\gamma)+\theta_2(\nu+\gamma)^2+\ldots,$$

de donde a partir de la transformación de coordenadas elipsopidales a cartesianas, cada término de la serie puede verse como una función de las variables x, y y z. Los términos elipsoidales en función de las coordenadas cartesianas involucran términos no lineales, por lo que se debe expander nuevamente alrededor del origen:

$$(\lambda+\alpha)=x^2\{1+y^2/(\beta-\alpha)+z^2/(\gamma-\alpha)-y^2(x^2-y^2)/(\beta-\alpha)^2+\ldots,$$

$$(\mu+\beta)=y^2\{1+z^2/(\gamma-\beta)+x^2/(\alpha-\beta)-z^2(y^2-x^2)/(\gamma-\beta)^2+\ldots,$$

$$(\nu+\gamma)=z^2\{1+x^2/(\alpha-\gamma)+y^2/(\beta-\gamma)-x^2(z^2-y^2)/(\alpha-\gamma)^2+\ldots$$

Haciendo lo mismo con los factores de escala P, Q y R, en coordenadas cartesianas el potencial de Stäckel queda expresado por: ...V.17

$$\Phi_s(\lambda,\mu,\nu)=-\xi(\lambda)/P^2-\eta(\mu)/Q^2-\theta(\nu)/R^2=$$
$$= 4x^2\{\xi_0+\xi_1x^2+2\xi_0y^2/(\beta-\alpha)+2\xi_0z^2/(\gamma-\alpha)+\xi_2x^4+\ldots\}+$$
$$+ 4y^2\{\nu_0+\nu_1y^2+2\nu_0z^2/(\gamma-\beta)+2\nu_0x^2/(\alpha-\beta)+\nu_2y^4+\ldots\}+$$
$$+ 4z^2\{\theta_0+\theta_1z^2+2\theta_0x^2/(\alpha-\gamma)+2\theta_0y^2/(\beta-\gamma)+\theta_2z^4+\ldots\}.$$

Para un potencial triaxial de la forma $\Phi(x^2,y^2,x^2)$ la expansión queda dada como: ...V.18

$$\Phi(x^2,y^2,z^2)=\Phi_{000}+\Phi_{200}x^2+\Phi_{020}y^2+\Phi_{002}z^2+\Phi_{400}x^4$$
$$+\Phi_{040}y^4+\Phi_{004}z^4+6\Phi_{220}x^2y^2+6\Phi_{202}x^2z^2+\ldots$$

Expandiendo el potencial triaxial de Schwarzschild, V.12, se obtienen los términos Φ_{ijk} en función de los coeficientes de U, V y W que dependen de las razones de ejes. Debido a la condición IV.6 impuesta por los términos de orden dos de los potenciales de Stäckel, la serie para el potencial de Schwarzschild solo será ajustable a ese orden a partir de los coeficientes: ...V.19

$$\Phi_{000}=0 \qquad \Phi_{200}=U_1+V_0/2+3W_0,$$
$$\Phi_{020}=U_1+V_0/2-3W_0 \qquad \Phi_{002}=U_1-V_0,$$

$$\Phi_{400}=U_2+V_1/2+3W_1 \qquad \Phi_{040}=U_2+V_1/2-3W_1,$$

$$\Phi_{004}=U_2-V_1 \qquad \Phi_{220}=2U_2+V_1,$$

$$\Phi_{022}=2U_2-V_1/2-3W_1 \qquad \Phi_{202}=2U_2-V_1/2+3W_1,$$

$$\Phi_{600}=U_3+V_2/2+3W_2 \qquad \Phi_{060}=U_3+V_2/2-3W_2.$$

Comparando los coeficentes de esta expansión con los del potencial separable de Stäckel, V.17 se encuentran los factores constantes: ...V.20

$$\xi_0=-\Phi_{002}/4 \qquad \eta_0=-\Phi_{020}/4 \qquad \theta_0=-\Phi_{002}/4$$

$$\xi_1=-\Phi_{400}/4 \qquad \eta_1=-\Phi_{040}/4 \qquad \theta_1=-\Phi_{004}/4$$

$$\alpha-\beta=8(\xi_0-\eta_0)/\Phi_{220} \qquad \gamma-\beta=8(\theta_0-\eta_0)/\Phi_{022}$$

$$\alpha-\gamma=8(\xi_0-\theta_0)/\Phi_{202} \quad \xi_2=-\Phi_{600}/4 \quad \eta_2=-\Phi_{060}/4$$

Ya se ha mencionado que cerca de la region central de la galaxia el potencial se vuelve separable y de acuerdo a IV.8b ellos concuerdan con el potencial de un oscilar armónico:

$$\Phi_x=\Phi_{200}x^2/2=[U_1+V_0/2+3W_0]x^2/2$$
$$\Phi_y=\Phi_{020}y^2/2=[U_1+V_0/2-3W_0]y^2/2 \qquad \text{...V.21}$$
$$\Phi_z=\Phi_{002}z^2/2=[U_1-V_0]z^2/2$$

En la tabla IV se pueden ver algunos coeficientes para distintas razones de ejes. En particular se ve que para una galaxia esférica, con $\alpha=\beta=1$, los coeficientes V^n y W^n son cero. Para una estructura oblata, con $\alpha=\beta=2$, únicamente los términos W^n se hacen cero. Para una triaxial, $\alpha=2$ y $\beta=1.25$, no se hacen cero. Sin embargo, las expresiones V.21 en ningún caso cambian drasticamente. Esto se espera siempre en la region central de las galaxias: en otras palabras, el potencial central de las galaxias elípticas es un oscilador armónico.

Con las expresiones V.21, se pueden obtener explicitamente en términos de la razón de ejes, las expresiones analíticas aproximadas para las tres integrales de movimiento mostradas en IV.8c

$$\ldots V.22$$

$$H=(p_x+p_y+p_z)/2 + \bar{\Phi}_x + \bar{\Phi}_y + \bar{\Phi}_z,$$
$$J=L^2/2-(\beta+\gamma)(\dot{x}^2/2+\bar{\Phi}_x)-(\gamma+\alpha)(\dot{y}^2/2+\bar{\Phi}_y)-(\alpha+\beta)(\dot{z}^2/2+\bar{\Phi}_z),$$
$$K=-\alpha L^2_x/2-\beta L^2_y/2-\gamma L^2_z/2+\beta\gamma(\dot{x}^2/2+\bar{\Phi}_x)+\gamma\alpha(\dot{y}^2/2+\bar{\Phi}_y)+\alpha\beta(\dot{z}^2/2+\bar{\Phi}_z).$$

La validez de estas expresiones es un punto que debe estudiarse en el futuro y ver si ellas son compatibles con la anisotropía generada en el modelo de Schwarzschild corregido, como para soportar la estructura triaxial de las galaxias.

VI. **CONCLUSIONES**

Se ha visto que la existencia de galaxias elípticas triaxiales es una teoría que encuentra su mayor apoyo en la observación de gradientes en la elipticidad y posición angular de las isofotas. Los modelos triaxiales de Leach dan una reproducción de tales gradientes, suponiendo que las razones de ejes de las superficies de isodensidad cambian con el radio. Otras características de este tipo de galaxias, pero no exclusivas de ellas, son: alta dispersión anisotrópica de velocidades y bajas velociades de rotación. Los modelos de N cuerpos desarrollados por Binney, dan información de las condiciones iniciales existentes en el medio protogaláctico que conducen a la formación de las galaxias y parecen indicar que la existencia de galaxias oblatas y triaxiales, requieren de un colapso no disipativo de estructuras protogalácticas planas sin rotación, provistas con una dispersión anisotrópica desde el inicio y que alcanzen su estado estacionario por el mecanismo de la relajación violenta. Con estos elementos logra reproducir galaxias elípticas con perfil de densidad de Hubble.

La anisotropía en la dispersión de velocidades es necesaria para configurar estructuras triaxiales, pues de esta manera el sistema se aplana en distintos grados sobre los planos de la galaxia. A partir del teorema de Jeans se ha visto que si la función de distribución depende de las integrales de movimiento, E y L_z, el sistema posee un plano de isotropía, $\sigma_r=\sigma_z$, inexistente en las galaxias triaxiales. Es necesario introducir una tercera integral que rompa con esta simetría.

El modelo triaxial de Schwarzschild construido como una suma de términos perturbativos a un sistema de simetría esférica con perfil de densidad de Hubble, muestra que el potencial de una galaxia triaxial, estable por 10^{10} años, admite tres integrales de movimiento: la energía y otras dos no clásicas cuya existencia depende de las condiciones iniciales de posición y velocidades de las estrellas. Estas integrales generan la anisotropía necesaria para sostener la estructura triaxial de las galaxias. Hemos visto que la componente z del momento angular no aparece como integral de movimiento, si no como un término de una expresión más compleja. Esto se debe basicamente a que el potencial no tiene simetría rotacional, $\Phi=\Phi(r,z)$.

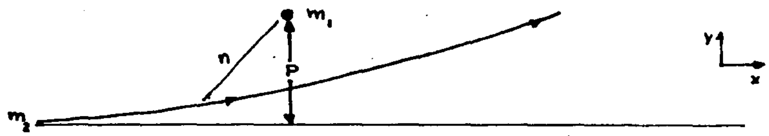
La importancia de hallar las expresiones analíticas de las integrales de movimiento radica en que con ellas es posible hacer una estimación del grado de anisotropía generada. Es decir, puede suceder que aún cuando el sistema triaxial poseea tres integrales de movimiento la anisotropía que generen no sea suficiente para sostenerlo y dejarlo estable. Se ha visto que una manera de encontrar la forma analítica de las integrales de movimiento es a través de hacer un ajuste con un potencial de Stäckel, caracterizado por tener tres integrales de movimiento analíticas conocidas. Al hacer un ajuste de uno de estos potenciales al potencial de Schwarschild se han encontrado las expresiones aproximadas de las integrales de movimiento; ellas resultan ser la energía total y combinaciones de las componentes de energía y momento angular. El análisis de algunas órbitas, tanto con el potencial incorrecto de Schawzschild con el corregido, muestra que las estrúcturas orbitales parecen ser similares a las existentes en uno de Stackel. Sin embargo el número de órbitas calculadas es pequeño y debera hacerse en el futuro un cálculo más grande para verificar si las conclusiones de Schwarzschild siguen siendo validas, y para decir si las integrales analíticas encontradas generan la anistropía que sostiene una estructura truiaxial. Dos herramientas valiosas introducidas en este trabajo son, por un lado la exploración númerica de sistemas hamiltonianos a través de los mapeos de Poicaré, que da evidenciad de existencia o destrucción de integrales de movimiento. Por otra parte, la introducción de la integral de Melnikov ayuda a estimar el tamaño de las regiones estocasticas en un sistema cuando son destruídas algunas interales de movimiento. Si las regiones estocasticas son grandes el potencial no puede simular uno galáctico, pues estos son sistemas aparentemente estables que deben tener integrales que generen anistropía o cuasintegrales que generen pequeñisimas regiones de cáos de tal forma que permitan seguir considerando integrable al sistema. Un potencial con grandes regiones estocasticas no posee las integrales necesarias para sostener la estructura.

En el modelo triaxial de Schwarzschild la información de los gradientes observados en las isofotas se encuentra contenida en las funciones F,G,H,U,V y W que reproducen superficies de isodensidad y equipotenciales no concéntricas ní coaxiales. Las tres integrales de las cuales su modelo tiene evidencia generan la anisotropía necesaria para sostener su modelo sin rotación. Sin embargo, todos los modelos que intentan explicar los gradientes observados en las isofotas se basan en la teoría de la triaxialidad, pero deben estudiarse en el futuro alternativas tales como esferoides anisotrópicos con superficies de isodensiad no concéntricas ni coaxiales, o bien secuencias de superficies oblatas y prolatas que reproducen el mismo efecto y que no se han trabajado. Es importante racalcar que el cambio no solo es morfológico, pués las integrales asociadas a estructuras oblatas, prolatas y triaxiales no son iguales y por tanto la dinámica asociada a las nuevas alternativas son distintas.

Una posibilidad que habrá que estudiar en el futuro es si existe una relación entre la forma de las integrales y los grados de anisotropia que generan, ésto para ver si el cambio de integrales de potenciales separables de Stäckel perturbados que simulen un potencial galáctico, deja invariante la estructura orbital.

Apéndice A

Considerese el caso en que una estrella de masa m_2 colisiona con otra de masa m_1 y donde la colisión este carcterizada por un parámetro de impacto b y una velocidad relativa inicial v (Fig.)



Si $\langle \Delta v^2 \rangle$ es el promedio del cuadrado en el cambio de la velocidad relativa por unidad de tiempo, se puede definir el tiempo de relajación por: $t_r = v^2/\langle \Delta v^2 \rangle$. Para estimar $\langle \Delta v^2 \rangle$ se considera que la estrella se deflecta un ángulo tan pequeño que se puede igualar el cambio en su momento Δp al cambio en su componente y: $\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = -\int_{-\infty}^{\infty} G m_1 m_2 y/r^3 \, dt$, y ya que se han supuesto angulos pequeños de deflección se puede escribir: $r^2 = b^2 + v^2 t^2$, $y \approx b$, donde al tiempo t se produce el máximo acercamiento:

$$\Delta p = -\int_{-\infty}^{\infty} G m_1 m_2 b/(b^2+v^2t^2)^{3/2} \, dt = 2Gm_1m_2/bv \qquad (1)$$

Para encontrar $\langle \Delta v^2 \rangle$ se tiene que el número de colisiones por unidad de tiempo con parámetro de impacto entre b y b+Δb y velocidades relativas dentro del elemento de volúmen de velocidades $d^3\underline{v}$ es igual a: $f(v) d^3\underline{v} v 2\pi b db$. Usando t_r y (1) se tiene:

$$1/t_r \approx \left(\int\int v f(v) b db d^3\underline{v} G^2 m^2/b^2 v^2\right)/v^2, \text{ o}$$

$$t_r \approx v^2 R^3 (v^{-1})_p^{-1} \ln^{-1}(p_2/p_1)/G^2 m^2 N,$$

donde R es el radio del sistema y $()_p$ indica un promedio sobre la función de distribución. p_1 y p_2 son los valores de corte del parámetro de impacto. Para el límite superior tomamos el tamaño del sistema: $p_2 \approx R$. Para el límite inferior se toma aquel valor para el cual el ángulo de deflección sea del orden de 1, en el cual la energía potencial y cinética sean casi iguales:

$$Gm/p_1 v_p \approx 1 \text{ , de donde } p_1 \approx R/N.$$

Tomando valores típicos para una galaxia: $m=10^{33}$gr, $N=10^{11}$, $R \approx 10^{22}$cm y $v=10^7$cm/seg, se encuentra que el tiempo de relajación resulta de 10^{15} años.

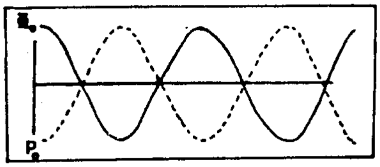
Apéndice B

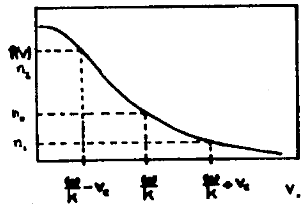
El colapso de una nube protogaláctica se traduce en un cambio de energía cinética a gravitacional, y lleva a una oscilación del campo gravitacional debido a las fluctuaciones que se producen en la densidad. Estas pueden ser representadas por ondas de densidad perturbadas. Retomemos este caso.

Una onda estable con frecuencia w y número de onda k se propaga a través del sistema con una velocidad de fase w/k, la cual pierde energía al chocar con estrellas que se mueven a una velocidad menor y gana energía de las que se mueven más rápido. Para clarificar esto consideremos una onda de densidad:

$$\rho = \rho_0 \exp(i(kx-wt)).$$

Un sistema de referencia S' moviendose con la velocidad de un sistema de referencia u moviendose con la velocidad de fase w/k representa a ρ como una onda estacionaria: no hay oscilaciones. La segunda derivada del campo gravitacional es proporcional a la densidad, por lo que él y la densiad se encuentran defasadas (Fig.). En las regiones de ρ máxima tiende a acumularse más material.





Consideremos una estrella que ha cierto tiempo se encuentra en x_0 moviendose en un pozo de potencial. Si la energía cinética es más grande que el pozo la estrella puede escapar, para lo cual requiere de una velocidad mayor que una crítica $v_c/2=2\Phi_0$. Permanece confinada si su energía es menor. Todas las estrellas con velocidades entre $(w/k)-v_c$ y $(w/k)+v_c$ son atrapadas por la onda. Debido a que la función de distribución de velocidades de una galaxia generalmente es monótona decreciente. El número de estrellas con velocidades mayores es mayor. La colisión de la onda con las estrellas transfiere energía y se amortigua. Después de tres o cuatro períodos de fluctuación del campo, se hace cero y las galaxias pueden llegar a un estado relajado.

REFERENCIAS

Aarseth S., Binney J., Mon. Not. R. Astr. Soc., **185**, 227 (1978).

Aguilar, L.A.,D. Merrit, M. Duncan, 1987, en preparación.

Aikawa T., Sci. Reports Tohoku Univ. (1), **54**, 13 (1971).

Benacchio L., Galleta G., Mon. Not. R. Astr. Soc., **193**, 885 (1980).

Bertola F., Capaccioli M., Ap. J.,**200**, 439 (1975).

Binney J., Mon. Not. R. astr. Soc., **177**, 19 (1976).

———, Mon. Not. R. astr. Soc., **183**, 501 (1978).

_____, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **296**, 329 (1980).

_____, Mon. Not. R. astr. Soc., **201**, 15 (1982).

_____, Mon. Not. R. astr. Soc., **212**, 767 (1985).

Carrasco L., Roth M., Serrano A., Bull. Amer. Astr. Soc.,**12**, 445 (1980).

Chandrasekhar S., Ellipsoidal Figures of Equilibrium. (1969). Yale University Press.

———, Lebovitz N.R., Ap. J., **135**, 38 (1962).

Contopoulus G., en Dynamical Structure and Evolution of Stellar Systems. Eds. Contopoulus G., Hénon M., Lynden-Bell D. Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, Saas-Fee, p52 (1973).

_____, Ap. J., **375**, 511 (1983)

Davies R.L., Illingworth G., Ap. J., **226**, 516 (1983).

Dejonghe H., de Zeeuw P.T., 1987, en preparación.

de Zeeuw P.T., Lynden-Bell D., Mon. Not. R., astr. Soc., **215**, 713 (1985).

de Zeeuw P.T., Mon. Not. R. astr. Soc., **215**, 731 (1985a).

_____, Mon. Not. R. astr. Soc., **216**, 273 (1985b).

Faber S.M., Jackson R.E., Ap. J., **204**, 668 (1975).

Gerhard O.E., Astron. Astrophys., **151**, 279 (1985).

Goodman J., Schwarzschild M., Ap. J., **245**, 1087 (1981).

Greenspan B., Holmes P.J., 1983, Non-linear dynamics and turbulence, eds G. Barenblatt, G. Iooss, G. Joseph, Pitman

Hayli A., Desolneux N., Galletta G., Astron. Astrophys., **122**, 137 (1983).

Hénon M., Heiles C., Astron. J.,**69**, 73 (1964).

Hénon M., "Numerical Exploration of Hamiltonian Sistems" en Les Houches 1981, Sesión XXXVI. Chaotic Behaviour of

Deterministic Sistems, eds. Looss G., Helleman R.H.G.
Illingworth G., Ap. J., **218**, L43 (1977).
King I.R., Minkowski R., Ap. J., **143**, 1002 (1966).
Leach R., Ap. J., **248**, 485 (1981).
Lin C., Mestel L., Shu F., Ap. J., **142**, 1431 (1965).
Lynden-Bell, D Mon. Not. R. astr. Soc., **136**, 101 (1967).
———, Mon. Not. R. astr. Soc., **124**, 95 (1962).
———, en Dynamical Structura and Evolution of Stellar Systems., Eds. Contopoulus G., Henon M., Lynden-Bell D., Swiss Society of Astronomy and Astrophysics., Saas-Fee, p.147 (1973)
———, Kalnajs A.J., Mon. Not. R. Astr. Soc., **157**, 1 (1972).
Martos N. de C., M.A., Tesis licenciatura. U.N.A.M. México, 1986
Noriega C. A., Tesis de licenciatura, U.N.A.M. México, 1981
Ollongren A., Bull., Astr. Inst. Neth., **16**, 241 (1962).
Peebles P.J.E., Astron. J., **75**, 13 (1969).
Pishmish P., Proc. First Europ. Astr. Meeting, Eds. Barbanis B., Hadjnetusu J.D. (Springer Verlag: Berlin), 319 (1975).
Roberts P.H., Ap. J., **136**, 1108 (1962).
Sandage A.R., Hubble atlas of galaxies. (1961). Washington.

Schwarzschild M., Ap. J., **232**, 236 (1979).
———, Ap. J., **263**, 599 (1982).
Stackel P., Math. Ann., **42**, 537 (1893).
Stark A.A., Ap. J., **213**, 368 (1977).
Sunyaev R.A., Zeldovich Y.B., Astron. Astrophys., **20**, 189 (1972).
Tayler R.J., Galaxies:Structure and Evolution.Ed. Wykeham, 1978.
Treemaine S., de Zeeuw P.T., 1987, en preparación.
Whittaker E.T., Analytical Dynamics. Cambridge University. 1917.
Wilkinson A., de Zeeuw P.T., 1987, en preparación.
Williams T.B., Schwarzschild M., Ap. J., **227**, 56 (1979).
Woltjer L., en Structure and Evolution of Galaxies, Ed. Setti G., NATO Advances Study Institutes Series, p45 (1976)
Young P., Sargent W.L., Ap. J., **222**, 450 (1978).

PROGRAM PROGP

```
      PROGRAM PROGP
      INTEGER*2 EL,M,N,N1
$INSERT COMARCH3
10    WRITE(*,*) 'A=X/Z , B=Y/Z'
      READ(*,*,ERR=10) A,B
      M=100
      N=40
      CALL CALCOEFS(A,B)
      CALL FSDER(M)
20    WRITE(*,*) 'COEFICIENTES   , PUNTOS      < 1 | 2 >'
      WRITE(*,*) 'GRAFICAS   ,    ORBITAS      < 3 | 4 >'
      WRITE(*,*) 'VARIAR EJES   , TERMINAR     < 5 | 6 >'
      READ(*,*,ERR=20) EL
      IF(EL.LE.0 .OR. EL.GE.7) GO TO 20
      GO TO (1,2,3,4,10,30),EL
1     CONTINUE
       CALL CFS(N)
      GO TO 20
2     CONTINUE
       CALL FUNS(M)
      GO TO 20
3     CONTINUE
       CALL GRAFICAS(M)
      GO TO 20
4     CONTINUE
       N1=6
       CALL ECSMOV(N1)
      GO TO 20
30    CALL EXIT
      END
      SUBROUTINE CALCOEFS(A,B)
      REAL*8 ALFA2,BETA2,ALFA3,BETA3,ALFA2N,BETA2N,ALFA2NM3
     ,BETA2NM3,CN,DENOM,S1,S1P,S2,S2P,S11,S11P,S22,S22P
     ,M1,M2,C1,C2
$INSERT COMARCH3
      N = 40
      ALFA = A
      BETA = B
      ALFA2 = ALFA*ALFA
      ALFA3 = ALFA2*ALFA
      BETA2 = BETA*BETA
      BETA3 = BETA2*BETA
      ALFA2N =1.0D0
      BETA2N = 1.0D0
      CN=1.0D0
      DO 50 I=0,N
        ALFA2NM3=ALFA3*ALFA2N
        BETA2NM3 = BETA3*BETA2N
        IF(I.GT.0) CN= -(I+0.5)*CN/I
        FN(I) = CN
        DENOM = ALFA2N*(1.+BETA2N) + BETA2N
        GNCH(I)=CN*( ALFA2N*(1.0-2.0*BETA2N) + BETA2N )/DENOM
        HNCH(I) = 0.5*CN*( BETA2N - ALFA2N )/DENOM
        DENOM = ALFA2NM3 + BETA2NM3 + 1.0D0
        GNGR(I) = CN*( ALFA2NM3 + BETA2NM3 - 2.0)/DENOM
        HNGR(I) = 0.5*CN*( ALFA2NM3 - BETA2NM3 )/DENOM
        ALFA2N = ALFA2N*ALFA2
        BETA2N = BETA2N*BETA2
        IF(I .EQ. 0) THEN
          UNCH(0)=-1
          UNGR(0)=-0.693a0
          GO TO 40
        ELSE
30        UNCH(I)=FN(I-1)/((2*I)*(2*I+1))
          VNCH(I)=GNCH(I)/(2*(I+1)*(2*I+3)-6)
          WNCH(I)=HNCH(I)/(2*(I+1)*(2*I+3)-6)
          UNGR(I)=FN(I)/((2*I)*(2*I+1))
        ENDIF
        IF(I .EQ. 1) GO TO 50
40      VNGR(I)=GNGR(I)/(2*I*(2*I+1)-6)
        WNGR(I)=HNGR(I)/(2*I*(2*I+1)-6)
50    CONTINUE
      S1=VNCH(1)
      S1P=82*VNCH(40)
      S2=VNGR(0)
      S2P=-VNGR(0)
      S11=WNCH(1)
      S11P=82*WNCH(40)
      S22=WNGR(0)
      S22P=-WNGR(0)
      DO 55 I=2,40
        S1=VNCH(I) + S1
        S1P=2*I*VNCH(I-1) + S1P
        S2=VNGR(I) + S2
        S2P=-(2*I+1)*VNGR(I) + S2P
        S11=WNCH(I) + S11
        S11P=2*I*WNCH(I-1) + S11P
        S22=WNGR(I) + S22
        S22P=-(2*I+1)*WNGR(I) + S22P
55    CONTINUE
      VNCH(0)=(1.0D0/5.0D0)*((S2P-S1P)-3.0D0*(S1-S2))
      VNGR(1)=VNCH(0) + (S1-S2)
      WNCH(0)=(1.0D0/5.0D0)*((S22P-S11P)-3.0D0*(S11-S22))
      WNGR(1)=WNCH(0) + (S11-S22)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ECSMOV(N)
$INSERT COMARCH3
      INTEGER*4 MAXPUN
      PARAMETER MAXPUN = 250
      CHARACTER*2 RESP
      INTEGER*2 METH,MITER,INDEX,IWK(6),IER,K,M,N,L,INDX
      REAL*4 CART(6),WK(144),TI,TF,TOL,DT,E,H,X,Y
     ,Z,PX,PY,PZ,EO,HO
      EXTERNAL FCN,FCNJ
30    WRITE(*,*) 'ELIJE POSICION INICIAL X,Y,Z'
      READ(*,*) (CART(I),I=1,3)
      WRITE(*,*) 'VELOCIDAD INICIAL PX,PY,PZ'
      READ(*,*) (CART(J),J=4,6)
      CALL ENERGIA(CART,E,H)
      EO=E
      HO=H
      WRITE(*,*) 'PLANO DE GRAFICACION:'
      WRITE(*,*) 'X-Y   X-Z   X-PX   X-PY   X-PZ  <1|2|3|4|5
      WRITE(*,*) 'Y-Z   Y-PX  Y-PY   Y-PZ   Z-PX  <6|7|8|9|1
      WRITE(*,*) 'Z-PY  Z-PZ PX-PY  PX-PZ  PY-PZ <11|12|13|1
      READ(*,*) L
      WRITE(*,*) 'ELIGE TI'
      READ(*,*) TI
      WRITE(*,*) 'EO=',EO,' HO=',HO
      DT=0.001
      TOL=0.001
      INDX=3
      METH=1
      MITER=1
      INDEX=1
      CALL INITQ(INDX)
      CALL WINDO(10,10,550,550,-3.0,3.0,-3.0,3.0,0,IER)
      CALL MARCO
      IF(L.EQ. 1) CALL MOVEA(CART(1),CART(2))
      IF(L.EQ. 2) CALL MOVEA(CART(1),CART(3))
      IF(L.EQ. 3) CALL MOVEA(CART(1),CART(4))
      IF(L.EQ. 4) CALL MOVEA(CART(1),CART(5))
      IF(L.EQ. 5) CALL MOVEA(CART(1),CART(6))
      IF(L.EQ. 6) CALL MOVEA(CART(2),CART(3))
      IF(L.EQ. 7) CALL MOVEA(CART(2),CART(4))
      IF(L.EQ. 8) CALL MOVEA(CART(2),CART(5))
      IF(L.EQ. 9) CALL MOVEA(CART(2),CART(6))
      IF(L.EQ.10) CALL MOVEA(CART(3),CART(4))
      IF(L.EQ.11) CALL MOVEA(CART(3),CART(5))
      IF(L.EQ.12) CALL MOVEA(CART(3),CART(6))
      IF(L.EQ.13) CALL MOVEA(CART(4),CART(5))
      IF(L.EQ.14) CALL MOVEA(CART(4),CART(6))
      IF(L.EQ.15) CALL MOVEA(CART(5),CART(6))
      DO 40 K=1,MAXPUN
        TF=FLOAT(K)
        CALL DGEAR (N,FCN,FCNJ,TI,DT,CART,TF,TOL,METH,MITER
     ,INDEX,IWK,WK,IER)
        CALL ENERGIA(CART,E,H)
        ERE=ABS(E-EO)
        ERH=ABS(H-HO)
      X=CART(1)
      Y=CART(2)
      Z=CART(3)
      PX=CART(4)
      PY=CART(5)
      PZ=CART(6)
      IF(L.EQ. 1) CALL DRAWA(X,Y)
      IF(L.EQ. 2) CALL DRAWA(X,Z)
      IF(L.EQ. 3) CALL DRAWA(X,PX)
      IF(L.EQ. 4) CALL DRAWA(X,PY)
      IF(L.EQ. 5) CALL DRAWA(X,PZ)
      IF(L.EQ. 6) CALL DRAWA(Y,Z)
      IF(L.EQ. 7) CALL DRAWA(Y,PX)
      IF(L.EQ. 8) CALL DRAWA(Y,PY)
      IF(L.EQ. 9) CALL DRAWA(Y,PZ)
      IF(L.EQ.10) CALL DRAWA(Z,PX)
      IF(L.EQ.11) CALL DRAWA(Z,PY)
      IF(L.EQ.12) CALL DRAWA(Z,PZ)
      IF(L.EQ.13) CALL DRAWA(PX,PY)
      IF(L.EQ.14) CALL DRAWA(PX,PZ)
      IF(L.EQ.15) CALL DRAWA(PY,PZ)
        IF(IER.GE.128)GO TO 50
40    CONTINUE
      CALL FINITT
50    CONTINUE
      WRITE(*,*)' QUIERES VARIAR LAS CONDICIONES INICIALES < SI :  >'
      READ(*,20) RESP
20    FORMAT(A2)
       IF(RESP .EQ. 'SI') GO TO 30
       RETURN
       END
       SUBROUTINE FSDER(M)
$INSERT COMARCH3
      REAL*8 BRA(16),BFA(16),BGA(16),BHA(16),BUA(16)
     ,,BVA(16),BWA(16),BDUA(16),BDVA(16),BDWA(16),BD2UA(16)
     ,,BD2VA(16),BD2WA(16)
      OPEN(10,FILE='FSDER')
      DO 10 I=1,M
       IF(I.GT.8 .AND. I.LT.14) GO TO 10
       X=FLOAT(I)/10.
       RP(I)=X
       FP(I)=F(X)
       GP(I)=G(X)
       HP(I)=H(X)
       UP(I)=U(X)
       VP(I)=V(X)
       WP(I)=W(X)
       DU(I)=UPRIMA(X)
       DV(I)=VPRIMA(X)
       DW(I)=WPRIMA(X)
       D2U(I)=UPRIMA2(X)
       D2V(I)=VPRIMA2(X)
       D2W(I)=WPRIMA2(X)
       WRITE(10,*) RP(I),FP(I),GP(I),HP(I)
       WRITE(10,*) RP(I),UP(I),VP(I), WP(I)
       WRITE(10,*) RP(I),DU(I),DV(I),D W(I)
       WRITE(10,*) RP(I),D2U(I),D2V(I),D2 W(I)
10    CONTINUE
      CLOSE(10)
      OPEN(10,FILE='FSDER')
      DO 20 I=1,16
       READ(10,*) A1(I),BF(I),BG(I),BH(I)
       READ(10,*) A1(I),BU(I),BV(I),BW(I)
       READ(10,*) A1(I),BDU(I),BDV(I),BDW(I)
       READ(10,*) A1(I),BD2U(I),BD2V(I),BD2W(I)
20    CONTINUE
      CLOSE(10)
      OPEN(11,FILE='FDRINT')
      DO 30 I=9,13
       N=15
       X1=FLOAT(I)/10.D0
       BRA(I)=DBLE(X1)
       CALL VINT(N,A1,BF,X1,XINT)
       BFA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BG,X1,XINT)
       BGA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BH,X1,XINT)
       BHA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BU,X1,XINT)
       BUA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BV,X1,XINT)
       BVA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BW,X1,XINT)
       BWA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BDU,X1,XINT)
       BDUA(I)=DBLE(XINT)
       CALL VINT(N,A1,BDV,X1,XINT)
       BDVA(I)=DBLE(XINT)
```

PROGRAM PROGP

```
         CALL VINT(N,A1,BDW,X1,XINT)
         BDWA(I)=DBLE(XINT)
         CALL VINT(N,A1,BD2U,X1,XINT)
         BD2UA(I)=DBLE(XINT)
         CALL VINT(N,A1,BD2V,X1,XINT)
         BD2VA(I)=DBLE(XINT)
         CALL VINT(N,A1,BD2W,X1,XINT)
         BD2WA(I)=DBLE(XINT)
         WRITE(11,*) BRA(I),BFA(I),BGA(I),BHA(I)
         WRITE(11,*) BRA(I),BUA(I),BVA(I),BWA(I)
         WRITE(11,*) BRA(I),BDUA(I),BDVA(I),BDWA(I)
         WRITE(11,*) BRA(I),BD2UA(I),BD2VA(I),BD2WA(I)
 30     CONTINUE
        CLOSE(11)
        OPEN(10,FILE='FSDER')
        OPEN(11,FILE='FDRINT')
        DO 40 I=1,8
         READ(10,*) RP(I),FP(I),GP(I),HP(I)
         READ(10,*) RP(I),UP(I),VP(I),WP(I)
         READ(10,*) RP(I),DU(I),DV(I),DW(I)
         READ(10,*) RP(I),D2U(I),D2V(I),D2W(I)
 40     CONTINUE
        DO 50 I=9,13
         READ(11,*) RP(I),FP(I),GP(I),HP(I)
         READ(11,*) RP(I),UP(I),VP(I),WP(I)
         READ(11,*) RP(I),DU(I),DV(I),DW(I)
         READ(11,*) RP(I),D2U(I),D2V(I),D2W(I)
 50     CONTINUE
        DO 60 I=14,100
         READ(10,*) RP(I),FP(I),GP(I),HP(I)
         READ(10,*) RP(I),UP(I),VP(I),WP(I)
         READ(10,*) RP(I),DU(I),DV(I),DW(I)
         READ(10,*) RP(I),D2U(I),D2V(I),D2W(I)
 60     CONTINUE
        CLOSE(10)
        CLOSE(11)
 150    RETURN
        END
        SUBROUTINE VINT(N,AR,BP,X,XINT)
*INSERT COMARCH3
        REAL*8 XD,AUX(16),AR(16),BAUX(16),BP(16),C(120)
        XD=DBLE(X)
        DO 10 I=1,16
         AUX(I)=AR(I)
         BAUX(I)=BP(I)
 10     CONTINUE
        DO 20 I=1,120
         C(I)=0.0D0
 20     CONTINUE
        N1=N+1
        N2=N*N1/2
        CALL E01AAF(AR,BP,C,N1,N2,N,XD)
        XINT=SNGL(C(N2))
        DO 30 I=1,120
         C(I)=0.0D0
 30     CONTINUE
        DO 40 I=1,16
         AR(I)=AUX(I)
         BP(I)=BAUX(I)
 40     CONTINUE
        RETURN
        END
* E01FTEXT
*UPTODATE E01AAFTEXT
        SUBROUTINE E01AAF(A, B, C, N1, N2, N, X)
*INSERT COMARCH3
C       MARK 1 RELEASE   NAG COPYRIGHT 1971
C       MARK 4.5 REVISED
        INTEGER *2 NN1, N, I, M, K, L, II, N1, N2
        REAL *8 X, RAK, RBK, RAI, RBI, A(N1+1), B(N1+1), C(N2)
        NN1 = N + 1
        DO 20 I=1,NN1
           A(I) = A(I) - X
   20   CONTINUE
        M = 2
        K = 1
        L = 0
   40   CONTINUE
        RAK = A(K)
        RBK = B(K)
        DO 60 I=M,NN1
           II = I + L - 1
           RAI = A(I)
           RBI = (RBK*RAI-B(I)*RAK)/(RAI-RAK)
           B(I) = RBI
           C(II) = RBI
   60   CONTINUE
        L = L + NN1 - M
        K = M
        M = M + 1
        IF (NN1-K) 80, 80, 40
   80   RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION F(X1)
*INSERT COMARCH3
        IF(X1.GT.0.8 .AND. X1.LT.1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BF,X1,XINT)
          R8=XINT
        ELSE
          R8 = CALPOLA(FN,FN,X1)
        ENDIF
        F=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION G(X1)
*INSERT COMARCH3
        IF( X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
         CALL VINT(15,A1,BG,X1,XINT)
         R8=XINT
        ELSE
         R8 = CALPOLA(GNCH,GNGR,X1)
        ENDIF
        G=R8
        RETURN
        END

        REAL*4 FUNCTION H(X1)
*INSERT COMARCH3
        IF( X1 .GT.0.8 .AND. X1.LT.1.4) THEN
         CALL VINT(15,A1,BH,X1,XINT)
         R8=XINT
        ELSE
         R8 = CALPOLA(HNCH,HNGR,X1)
        ENDIF
        H=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION U(X1)
*INSERT COMARCH3
        IF(X1.GT.0.8 .AND. X1.LT.1.4) THEN
         CALL VINT(15,A1,BU,X1,XINT)
         R8=XINT
        ELSE
         R8 = CALPOLB(UNCH,UNGR,X1)
        ENDIF
        U=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION V(X1)
*INSERT COMARCH3
        REAL*8 S
        IF(X1.LE.0.8) THEN
         R8=CALPOLC(VNCH,VNGR,X1)
        ELSE
         IF(X1.GT.0.8 .AND. X1.LT.1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BV,X1,XINT)
          R8=XINT
         ELSE
          S=X1
          S=-GNGR(1)*DLOG(S)/(5.0*(S**3))
          R8=CALPOLC(VNCH,VNGR,X1)+S
         ENDIF
        ENDIF
        V=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION W(X1)
*INSERT COMARCH3
        REAL*8 S
        IF(X1 .LE. 0.8) THEN
         R8=CALPOLC(WNCH,WNGR,X1)
        ELSE
         IF( X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BW,X1,XINT)
          R8=XINT
         ELSE
          S=X1
          S=-HNGR(1)*DLOG(S)/(5.0*(S**3))
          R8=CALPOLC(WNCH,WNGR,X1) + S
         ENDIF
        ENDIF
        W=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION UPRIMA(X1)
*INSERT COMARCH3
        IF(X1 .LE. 0.8) THEN
         R8=CALPOLE(UNCH,UNGR,X1)
        ELSE
         IF(X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BDU,X1,XINT)
          R8=XINT
         ELSE
          R8=CALPOLE(UNCH,UNGR,X1)
         ENDIF
        ENDIF
        UPRIMA=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION VPRIMA(X1)
*INSERT COMARCH3
        REAL*8 S
        IF(X1 .LE. 0.8) THEN
         R8=CALPOLH(VNCH,VNGR,X1)
        ELSE
         IF(X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BDV,X1,XINT)
          R8=XINT
         ELSE
          S=X1
          S=(-GNGR(1)/(5.0*(S**4)))*(1.0-3.0*DLOG(S))
          R8=CALPOLH(VNCH,VNGR,X1) + S
         ENDIF
        ENDIF
        VPRIMA=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION WPRIMA(X1)
*INSERT COMARCH3
        REAL*8 S
        IF(X1 .LE. 0.8) THEN
         R8=CALPOLH(WNCH,WNGR,X1)
        ELSE
         IF(X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BDW,X1,XINT)
          R8=XINT
         ELSE
          S=X1
          S=(-HNGR(1)/(5.0*(S**4)))*(1.0-3.0*DLOG(S))
          R8=CALPOLH(WNCH,WNGR,X1) + S
         ENDIF
        ENDIF
        WPRIMA=R8
        RETURN
        END
        REAL*4 FUNCTION UPRIMA2(X1)
*INSERT COMARCH3
        IF(X1 .LE. 0.8) THEN
         R8=CALPOLA(UNCH,UNGR,X1)
        ELSE
         IF(X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
          CALL VINT(15,A1,BD2U,X1,XINT)
          R8=XINT
         ELSE
          R8=CALPOLK(UNCH,UNGR,X1)
         ENDIF
        ENDIF
        UPRIMA2=R8
        RETURN
        END
```

```
      REAL*4 FUNCTION VPRIMA2(X1)
$INSERT COMARCH3
      REAL*8 S
      IF(X1 .LE. 0.8) THEN
       R8=CALPOLN(VNCH,VNGR,X1)
      ELSE
       IF(X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
        CALL VINT(15,A1,BD2V,X1,XINT)
        R8=XINT
       ELSE
        S=X1
        B=(GNGR(1)/(5.0*(S**5)))*(7.0-12.0*DLOG(S))
        R8=CALPOLN(VNCH,VNGR,X1) + B
       ENDIF
      ENDIF
      VPRIMA2=R8
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION WPRIMA2(X1)
$INSERT COMARCH3
      REAL*8 S
      IF(X1 .LE. 0.8) THEN
       R8=CALPOLN(WNCH,WNGR,X1)
      ELSE
       IF(X1 .GT. 0.8 .AND. X1 .LT. 1.4) THEN
        CALL VINT(15,A1,BD2W,X1,XINT)
        R8=XINT
       ELSE
        S=X1
        B=(WNGR(1)/(5.0*(S**5)))*(7.0-12.0*DLOG(S))
        R8=CALPOLN(WNCH,WNGR,X1) + B
       ENDIF
      ENDIF
      WPRIMA2=R8
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ENERGIA(CART,E,H)
      REAL*4 CART(6),X,Y,Z,PX,PY,PZ,Y20,Y22,V2,E,H
      X=CART(1)
      Y=CART(2)
      Z=CART(3)
      PX=CART(4)
      PY=CART(5)
      PZ=CART(6)
      R=(X*X+Y*Y+Z*Z)**0.5
      V2=PX*PX+PY*PY+PZ*PZ
      XY=(X*X+Y*Y)**0.5
      Y20=(2*Z*Z-XY*XY)/(2*R*R)
      Y22=3*(X*X-Y*Y)/(R*R)
      E=V2/2. + U(R)-Y20*V(R)+Y22*W(R)
      H=-(R*R*PZ-Z*(X*PX+Y*PY+Z*PZ))/XY
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FCN(N,TI,Y,YPRIME)
      INTEGER*2 N
      REAL*4 Y(6),YPRIME(6),X,Y1,Z,PX,PY,PZ,TI,DRU,DRV,DRW,UR,VR,W
      X=Y(1)
      Y1=Y(2)
      Z=Y(3)
      PX=Y(4)
      PY=Y(5)
      PZ=Y(6)
      R=(X*X + Y1*Y1 + Z*Z)**0.5
      Y20=(2*Z*Z-X*X-Y1*Y1)/(2*R*R)
      Y22=3*(X*X-Y1*Y1)/(R*R)
      UR=U(R)
      VR=V(R)
      WR=W(R)
      DRU=UPRIMA(R)
      DRV=VPRIMA(R)
      DRW=WPRIMA(R)
      R2=R*R
      C=(R*DRW-2*WR)/R2
      D=(R*DRV-2*VR)/R2
      YPRIME(1)=PX
      YPRIME(2)=PY
      YPRIME(3)=PZ
      YPRIME(4)=-(X/R)*(DRU-R*D*Y20+R*C*Y22+(VR/R)+6*(WR/R))
      YPRIME(5)=-(Y1/R)*(DRU-R*D*Y20+R*C*Y22+(VR/R)-6*(WR/R))
      YPRIME(6)=-(Z/R)*(DRU-R*D*Y20+R*C*Y22-2*(VR/R))
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FCNJ(N,TI,Y,PD)
      INTEGER*2 N
      REAL *4 Y(6),X,Y1,Z,PX,PY,PZ,TI,PD(6,6)
      X=Y(1)
      Y1=Y(2)
      Z=Y(3)
      PX=Y(4)
      PY=Y(5)
      PZ=Y(6)
      R=(X*X+Y1*Y1+Z*Z)**0.5
      Y20=(2*Z*Z-X*X-Y1*Y1)/(2*R*R)
      Y22=3*(X*X-Y1*Y1)/(R*R)
      UR=U(R)
      VR=V(R)
      WR=W(R)
      DU=UPRIMA(R)
      DV=VPRIMA(R)
      DW=WPRIMA(R)
      D2U=UPRIMA2(R)
      D2V=VPRIMA2(R)
      D2W=WPRIMA2(R)
      R2=R*R
      A=(R*DV-VR)/R2
      B=(R*DW-WR)/R2
      C=(R*DW-2*WR)/R2
      D=(R*DV-2*VR)/R2
      D3=D2U-Y20*D2V+Y22*D2W
      PXP=-(X/R)*(DU-R*D*Y20+R*C*Y22+(VR/R)+6*(WR/R))
      PYP=-(Y1/R)*(DU-R*D*Y20+R*C*Y22+(VR/R)-6*(WR/R))
      PZP=-(Z/R)*(DU-R*C*Y20-2*(VR/R))
      PD(1,1)=0
      PD(1,2)=0
      PD(1,3)=0
      PD(1,4)=1.0
      PD(1,5)=0
      PD(1,6)=0
      PD(2,1)=0
      PD(2,2)=0
      PD(2,3)=0
      PD(2,4)=0
      PD(2,5)=1.0
      PD(2,6)=0
      PD(3,1)=0
      PD(3,2)=0
      PD(3,3)=0
      PD(3,4)=0
      PD(3,5)=0
      PD(3,6)=1.0
      PD(4,1)=PXP*(R2-X*X)/(X*R2)-(X*X/R2)*(D3+(1+2*Y20)*(A+D)
     .+(6-2*Y22)*(B+C))
      PD(4,2)=-(Y1/R2)*(PXP+X*D3+X*(1.+2*Y20)*(A+D)+X*B*(6-2*Y22)
     .-X*C*(6+2*Y22))
      PD(4,3)=-(Z/R2)*(PXP+X*D3+X*A*(1+2*Y20)-2*X*D*(1-2*Y22)
     .+B*(6-2*Y22)*X-2*X*C*Y22)
      PD(4,4)=0
      PD(4,5)=0
      PD(4,6)=0
      PD(5,1)=-(X/R2)*(PYP+Y1*D3+Y1*(1+2*Y20)*(A+D)-Y1*(6+2*Y22)*(C+B))
      PD(5,2)=(R2-Y1*Y1)/(Y1*R2)-(Y1*Y1/R2)*(D3+(A+D)*(1+2*Y20)
     .-B*(6+2*Y22)+C*(6-2*Y22))
      PD(5,3)=-(Z/R2)*(PYP+Y1*D3+Y1*A*(1+2*Y20)-2*Y1*D*(1-2*Y20)
     -Y1*B*(6+2*Y22)-2*Y1*C*Y22)
      PD(5,4)=0
      PD(5,5)=0
      PD(5,6)=0
      PD(6,1)=-(X/R2)*(PZP+Z*D3-2*Z*A*(1-Y20)+Z*D*(1+2*Y20)-2*Z*B*Y22
     .+Z*C*(6-2*Y22))
      PD(6,2)=-(Y1/R2)*(PZP+Z*D3-2*Z*A*(1-Y20)+Z*D*(1+2*Y20)
     -2*Z*Y22*B-Z*C*(6+2*Y22))
      PD(6,3)=(R2-Z*Z)/(Z*R2)-(Z*Z/R2)*(D3-2*A*(1-Y20)-2*D*(1-2*Y20)
     .-2*Y22*(B+C))
      PD(6,4)=0
      PD(6,5)=0
      PD(6,6)=0
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GRAFICAS(J)
      CHARACTER*2 RESP
      REAL*4 POTENCI(52,150),POTEN2(52,150)
      INTEGER*2 J
$INSERT COMARCH3
      WRITE(*,*) 'CALCULAMOS LA DENS. TRIDI <SI/NO>'
      READ(*,5) RESP
5     FORMAT(A2)
      IF(RESP .EQ. 'NO') GO TO 15
      OPEN(15,FILE='POTENCI')
      WRITE(15,*) 52,150,0,0,0,1
      DO 10 I=1,52
       XX=FLOAT(I)/10.0
      DO 20 JJ=1,150
       YY=FLOAT(JJ)/10.0
      X2=XX**2
      Y2=YY**2
      RR2 = X2 + Y2
      RR = SQRT(RR2)
      POTENCI(I,JJ)=U(RR)+(0.5)*V(RR)+3.0*W(RR)*(X2-Y2)/RR2
      WRITE(15,*) POTENCI(I,JJ)
20    CONTINUE
10    CONTINUE
      CLOSE(15)
      OPEN(16,FILE='POTEN2')
      WRITE(16,*) 52,150,0,0,0,1
      DO 14 I=1,52
       XX=FLOAT(I)/10.0
      DO 11 JJ=1,150
       ZZ=FLOAT(JJ)/10.0
      X2=XX**2
      Z2=ZZ**2
      RR2=X2 +Z2
      RR=SQRT(RR2)
      POTEN2(I,JJ)=U(RR) -0.5*V(RR)*(2*Z2-X2)/R2+3.0*W(RR)
      WRITE(16,*) POTEN2(I,JJ)
11    CONTINUE
14    CONTINUE
      CLOSE(16)
15    XO=RP(1)
      XMAX=RP(100)
      YO=FP(100)
      YMAX=FP(1)
      CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,FP,J)
      CALL MINYMAX(GP,YO,YMAX)
      CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,GP,J)
      CALL MINYMAX(HP,YO,YMAX)
      CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,HP,J)
      CALL MINYMAX(UP,YO,YMAX)
      CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,UP,J)
      CALL MINYMAX(VP,YO,YMAX)
      CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,VP,J)
      CALL MINYMAX(WP,YO,YMAX)
      CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,WP,J)
C     CALL MINYMAX(DU,YO,YMAX)
C     CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,DU,J)
C     CALL MINYMAX(DV,YO,YMAX)
C     CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,DV,J)
C     CALL MINYMAX(DW,YO,YMAX)
C     CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,DW,J)
C     CALL MINYMAX(D2U,YO,YMAX)
C     CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,D2U,J)
C     CALL MINYMAX(D2V,YO,YMAX)
C     CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,D2V,J)
C     CALL MINYMAX(D2W,YO,YMAX)
C     CALL GRAFI2(XO,XMAX,YO,YMAX,RP,D2W,J)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE MINYMAX(AS,YO,YMAX)
$INSERT COMARCH3
      REAL *4 AS(100)
      INTEGER*2 I
      YO=1.E38
      YMAX=-YO
      DO 2 I=1,100
       IF(AS(I) .GT. YMAX)YMAX=AS(I)
       IF(AS(I) .LT. YO) YO=AS(I)
2     CONTINUE
      WRITE(*,*) 'YO=',YO,'YMAX=',YMAX
      RETURN
      END
```

PROGRAM PROOF

```
      REAL*4 FUNCTION CALPOLA(COEFSCH,COEFSGR,R)
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q
      Q=R
      Q=Q*Q
      IF(R .LT. 1.0D0) THEN
        RESUL=CALPOLD(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        RESUL=Q*CALPOLD(COEFSGR,Q)/R
      ENDIF
      IF(R.GT.1.0D0) WRITE(*,*) 'R,Q=',R,Q
      CALPOLA=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLB(COEFSCH,COEFSGR,R)
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q,LOGQ
      Q=R
      Q=Q*Q
      IF(R .LT. 1.0D0) THEN
        RESUL=CALPOLD(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        LOGQ=DLOG(SQRT(1.0D0/Q))/SQRT(1.0D0/Q)
        RESUL=(CALPOLD(COEFSGR,Q)/R)-(LOGQ)
      ENDIF
      IF(R.GT.1.0D0) WRITE(*,*) 'R,Q=',R,Q
      CALPOLB=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLC(COEFSCH,COEFSGR,S)
$INSERT COMARCH3
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q,EXTRA
      Q=S
      Q=Q*Q
      IF(Q .LT. 1.0D0) THEN
        RESUL=Q*CALPOLD(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        RESUL=CALPOLD(COEFSGR,Q)/S
      ENDIF
      CALPOLC=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLD(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
       P=COEFS(40-I) + P*X4
       Q=COEFS(40-I) + COEFS(39-I) +Q*X4
10    CONTINUE
      P=COEFS(0)+ X2*((X2-1.0D0)*P + Q)
      IF(P.GT.1.0010 .OR. P.LT.-1.0D0) THEN
       WRITE(*,*) 'X,P=',X,P
      ENDIF
      CALPOLD=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLE(COEFSCH,COEFSGR,R)
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q,LOGQ
      Q=R
      Q=Q*Q
      IF (R.LT. 1.0) THEN
        RESUL=R*CALPOLF(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        LOGQ=(DLOG(SQRT(1.0/Q)))-(COEFSGR(0)+1.0)
        RESUL=(LOGQ+CALPOLG(COEFSGR,Q))*Q
      ENDIF
      CALPOLE=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLF(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
       P=2*(40-I)*COEFS(40-I) + P*X4
       Q=2*(40-I)*COEFS(40-I)+2*(39-I)*COEFS(39-I) +Q*X4
10    CONTINUE
      P=(X2-1.0D0)*P + Q
      CALPOLF=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLG(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
       P=(2*(40-I)+1)*COEFS(40-I) + P*X4
       Q=(2*(40-I)+1)*COEFS(40-I)+(2*(39-I)+1)*COEFS(39-I)+Q*X4
10    CONTINUE
      P=X2*((X2-1.0D0)*P +Q )*(-1.0)
      CALPOLG=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLH(COEFSCH,COEFSGR,S)
$INSERT COMARCH3
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q,RESUL
      Q=S
      Q=Q*Q
      IF(S .LT. 1.0) THEN
        RESUL=S*CALPOLI(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        RESUL=Q*CALPOLJ(COEFSGR,Q)
      ENDIF
      CALPOLH=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLI(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
       P=2*(41-I)*COEFS(40-I) + P*X4
       Q=2*(41-I)*COEFS(40-I)+2*(40-I)*COEFS(39-I)+Q*X4
10    CONTINUE
      P=2*COEFS(0) + X2*((X2-1.0D0)*P + Q)
      CALPOLI=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLJ(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
       P=(2*(41-I)-1)*COEFS(40-I)+P*X4
       Q=(2*(41-I)-1)*COEFS(40-I)+(2*(40-I)-1)*COEFS(39-I)+Q*X4
10    CONTINUE
      P=(-1.0)*COEFS(0)+X2*((X2-1.0D0)*P + Q)*(-1.0)
      CALPOLJ=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLK(COEFSCH,COEFSGR,R)
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q,LOGQ
      Q=R
      Q=Q*Q
      IF(R .LT. 1.0) THEN
        RESUL = CALPOLL(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        LOGQ=-2.0*DLOG(SQRT(1.0/Q))+3.0
        RESUL=(LOGQ+CALPOLM(COEFSGR,Q))*Q/R
      ENDIF
      CALPOLK=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLL(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X,S
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
        P=2*(40-I)*(2*(40-I)-1)*COEFS(40-I) + P*X4
        S=2*(39-I)*(2*(39-I)-1)*COEFS(39-I) + Q*X4
        Q=2*(40-I)*(2*(40-I)-1)*COEFS(40-I)+S
10    CONTINUE
      P=(X2-1.0D0)*P + Q
      CALPOLL=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLM(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X,S
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
        P=2*(41-I)*(2*(40-I)+1)*COEFS(40-I) + P*X4
        S=2*(40-I)*(2*(39-I)+1)*COEFS(39-I) + Q*X4
        Q=2*(41-I)*(2*(40-I)+1)*COEFS(40-I)+S
10    CONTINUE
      P=2*COEFS(0)+X2*((X2-1.0D0)*P + Q)
      CALPOLM=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLN(COEFSCH,COEFSGR,S)
      REAL*8 COEFSCH(0:40),COEFSGR(0:40),Q
$INSERT COMARCH3
      Q=S
      Q=Q*Q
      IF(S .LT. 1.0) THEN
        RESUL=CALPOLO(COEFSCH,Q)
      ELSE
        Q=1.0D0/Q
        RESUL=Q*CALPOLP(COEFSGR,Q)/S
      ENDIF
      CALPOLN=RESUL
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLO(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X,S
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
        P=2*(41-I)*(2*(41-I)-1)*COEFS(40-I) + P*X4
        S=2*(40-I)*(2*(40-I)-1)*COEFS(39-I) + Q*X4
        Q=2*(41-I)*(2*(41-I)-1)*COEFS(40-I) + S
10    CONTINUE
      P=2*COEFS(0) + X2*((X2-1.0D0)*P + Q)
      CALPOLO=P
      RETURN
      END
      REAL*4 FUNCTION CALPOLP(COEFS,X)
      REAL*8 COEFS(0:40),P,Q,X2,X4,X,S
      P=0.0D0
      Q=0.0D0
      X2=X
      X4=X2*X2
      DO 10 I=0,38,2
        P=2*(41-I)*(2*(41-I)-1)*COEFS(40-I) + P*X4
        S=2*(40-I)*(2*(40-I)-1)*COEFS(39-I) + Q*X4
        Q=2*(41-I)*(2*(41-I)-1)*COEFS(40-I) + S
10    CONTINUE
      P=2*COEFS(0)+X2*((X2-1.0D0)*P + Q)
      CALPOLP=P
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GRAFI2(X0,XMAX,Y0,YMAX,ARRX,ARRY,N)
      INTEGER*2 N
      REAL*4 ARRX(200),ARRY(200)
10    CONTINUE
      WRITE(*,*) 'QUIERES GRAFICAR EN LA IMPRESORA O EN LA SELAN
      WRITE(*,*) 'IMPRESORA=3, SELANAR=2, GRINEL=1'
      READ(*,*,ERR=10) INDX
      IF(INDX.NE.1 .AND. INDX.NE.2 .AND. INDX.NE.3) GO TO 10
```

```
      IDIVIY = I2ACEPTA(' Divisiones en Y')*10
      IDIVIX = I2ACEPTA(' Divisiones en X')*10
      CALL INITQ(INDX)
      CALL MARCO
      CALL WINDO(150,150,570,570,XO,XMAX,YO,YMAX,O,IER)
      CALL AXIS(150 ,150 ,720,720,IDIVIX,IDIVIY,5.)
      CALL CONCA(4.,YO,0 ,130.)
      CALL CONCA(4 ,YMAX,0.,740.)
      CALL CONCA(4.,XO,60.,100.)
      CALL CONCA(4 ,XMAX,600.,100.)
      CALL MOVEA(XO,YO)
      CALL MOVEA(ARRX(1),ARRY(1))
      DO 20 I=1,N
        X=ARRX(I)
        Y=ARRY(I)
        CALL DRAWA(X,Y)
        CALL SIMBOL(3)
        CALL MOVEA(X,Y)
20    CONTINUE
      CALL FINITT
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CFS(N)
*INSERT COMARCH3
      WRITE(*,30)
      DO 50 I=0,N
        WRITE(*,40) I,FN(I),GNCH(I),HNCH(I),GNGR(I),HNGR(I)
50    CONTINUE
      WRITE(*,*) '        COEFICIENTES DE LAS FUNCIONES U,V,W'
      WRITE(*,60)
      DO 80 I=0,N
        WRITE(*,70) I,UNCH(I),VNCH(I),WNCH(I)
80    CONTINUE
      WRITE(*,90)
      DO 110 I=0,N
        WRITE(*,100) I,UNGR(I),VNGR(I),WNGR(I)
110   CONTINUE
      RETURN
30    FORMAT('  I',5X,'FN(I)',8X,'GNCH(I)',5X,'HNCH(I)',5X,'GNGR(I)',5X
     ,'HNGR(I)')
40    FORMAT(I3,5F12.6)
60    FORMAT('  I',3X,'  UNCH(I)',2X,'   VNCH(I)',2X,'   WNCH(I)')
70    FORMAT(I3,3F12.6)
90    FORMAT('  I',3X,'  UNGR(I)',2X,'   VNGR(I)',2X,'   WNGR(I)')
100   FORMAT(I3,3F12.6)
      END
      SUBROUTINE FUNS(M)
      REAL*4 EDU,EDV,EDW,S
      REAL*8 S1
      CHARACTER*2 RESP
*INSERT COMARCH3
      WRITE(*,*) 'PUNTOS  PARA GRAFICAR  F , G , H '
      DO 120 I=1,M
        WRITE(*,*) 'R=',RP(I),' F=',FP(I),' G=',GP(I),' H=',HP(I)
120   CONTINUE
      WRITE(*,*) '   PUNTOS  PARA GRAFICAR  U , V , W '
      DO 130 I=1,M
        WRITE(*,*) 'R=',RP(I),' U=',UP(I),' V=',VP(I),' W=',WP(I)
130   CONTINUE
      WRITE(*,*) ' COMPROBAMOS POISSON (SI , NO)'
```



```
      READ(*,135) RESP
      IF(RESP .EQ. 'NO') GO TO 150
      WRITE(*,*) ' COMPROBACION  A LA EC DE POISSON'
      DO 140 I=1,M
       IF(I .GT. 8 .AND. I .LT. 14) THEN
        S1=FLOAT(I)/10.D0
        S2=SNGL(S1)
        EDU=UPRIMA2(S2)+2.*UPRIMA(S2)/S2
        EDV=VPRIMA2(S2)+2.*VPRIMA(S2)/S2-6.*V(S2)/(S2*S2)
        EDW=WPRIMA2(S2)+2.*WPRIMA(S2)/S2-6 *W(S2)/(S2*S2)
        WRITE(*,*) '    R=: ',S2
       ELSE
        S=FLOAT(I)/10.
        EDU=UPRIMA2(S) + 2.*UPRIMA(S)/S
        EDV=VPRIMA2(S)+2.*VPRIMA(S)/S-6.*V(S)/(S*S)
        EDW=WPRIMA2(S)+2.*WPRIMA(S)/S-6.*W(S)/(S*S)
        WRITE(*,*) '    R=: ',S
       ENDIF
138    WRITE(*,*) 'EDU=',EDU,'        F=',FP(I)
       WRITE(*,*) 'EDV=',EDV,'        G=',GP(I),I
       WRITE(*,*) 'EDW=',EDW,'        H=',HP(I)
       WRITE(*,*) '------------------------------------------------------------
140   CONTINUE
150   RETURN
135   FORMAT(A2)
      END
```