

2ej
6



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

**MODELAJE MATEMATICO DE LA
ENERGIA ELECTROMAGNETICA**

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Laura Altagracia González García

México, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Página
Indice	i
Resumen	ii
Lista de Figuras	iii
Lista de Símbolos	iv
Capítulo	
1. INTRODUCCION	1
2. TEORIA	3
3. DISCUSION	9
4. RANGO DE APLICACION	14
5. COMPARACIONES NUMERICAS	16
6. CONCLUSIONES	23
Referencias	24
Apéndice A	26

RESUMEN

Partiendo del sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la electrodinámica, trabajando en el dominio de la frecuencia y usando la aproximación de la óptica geométrica, se ha obtenido una ecuación simple que describe la distribución de la energía electromagnética. Su aplicabilidad a problemas reales es discutida, sujeto a las restricciones de la aproximación, el procedimiento provee de una manera limitada pero rápida de interpretar o modelar estructuras complejas que es más barata que los métodos tridimensionales actuales. Una regla para el rango de aplicación es dada, y comparaciones numéricas fueron hechas para tres casos: una fuente alámbrica en un espacio conductor para la polarización transversal eléctrica contra la solución analítica dada por Wait (1952), con buenos resultados; un perfil de falla para la polarización transversal magnética contra la solución analítica dada por d'Erceville y Kunetz (1962), y también contra el programa de modelado independiente escrito por Stodt y modificado por Bennett (1982), con buenos resultados; y un prisma tridimensional enterrado en un semiespacio conductor contra las soluciones numéricas dadas por Ting y Hohmann (1981), con resultados alentadores pero no conclusivos.

LISTA DE FIGURAS

Figura

- 1 Error porcentual contra profundidades de piel a la fuente alámbrica.
- 2 Error porcentual para la resistividad aparente contra distancia en dos cuarto-espacios.
- 3 Comparación de la razón $\left| \frac{E_x}{H_y} \right|$ para diferentes soluciones contra distancia en dos cuarto-espacios.
- 4 Modelo tridimensional usado para calcular las resistividades aparentes en todas las figuras posteriores.
- 5 Resistividades aparentes (ρ_m) en el sistema coordenado original.
- 6 Error porcentual para la resistividad aparente en el sistema coordenado original.

LISTA DE SIMBOLOS

c	Velocidad de fase electromagnética
e	Amplitud compleja del campo eléctrico
f	Frecuencia
h	Amplitud compleja del campo magnético
i	Raíz cuadrada de -1
\hat{i}	Vector unitario paralelo al eje +x
k	Magnitud de vector de onda
m	Vector unitario dirigido del dipolo hacia el observador
p	Vector eléctrico dipolar unitario
q	Vector magnético dipolar unitario
r	Posición
t	Tiempo
\hat{z}	Vector unitario paralelo al eje +z
E	Campo eléctrico
H	Campo magnético
I	Corriente
K_0	Función Bessel del tercer tipo modificada de orden cero
K_1	Constante
K_2	Constante
S	Vector de Poynting
α	Parte real del número de onda
β	Parte imaginaria de número de onda
ϵ	Permitividad
δ	Profundidad de piel
μ	Permeabilidad magnética

μ_0	Permeabilidad del vacío
ω	Frecuencia angular
ϕ	Función escalar de la posición
ρ	Resistividad eléctrica
ρ_a	Resistividad aparente
ρ_l	Carga libre
ρ_{xy}	Resistividad aparente en la polarización transversal magnética
ρ_{yx}	Resistividad aparente en la polarización transversal eléctrica
σ	Conductividad eléctrica
ζ	Eikonal
∇	Operador diferencial Nabla

El sistema de Unidades Electromagnéticas es el MKSA Racionalizado

Capítulo 1

INTRODUCCION

Tradicionalmente las ecuaciones del electromagnetismo, conocidas como ecuaciones de Maxwell, han resultado difíciles de resolver en medios que no sean idealizados. En particular, en medios conductores sólo se han encontrado unas cuantas soluciones analíticas. En cuanto a las soluciones numéricas éstas han probado ser extremadamente laboriosas y costosas de obtener.

En una amplia clase de problemas, particularmente aquellos que se encuentran en el campo de la óptica, el comportamiento de los vectores de campo electromagnético es de pequeño interés; lo que uno desea fundamentalmente conocer es el promedio, o el flujo promedio, de la energía electromagnética.

Existen aplicaciones prácticas como las de los métodos geofísicos en las que uno está interesado en encontrar la distribución de conductividad eléctrica en un medio. Es claro del teorema de Poynting:

$$\nabla \cdot (\text{Re}(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)) = -\frac{1}{2} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (1)$$

que la disipación de energía está directamente relacionada con la distribución de conductividad a través de la cual viaja. Sin embargo, no se ha invertido una gran cantidad de esfuerzo en la aplicación de los métodos y resultados de la óptica a estas aplicaciones prácticas. Esto es debido principalmente a el hecho de que la propagación de la energía electromagnética se parece más a un proceso de difusión que a uno de radiación.

Es el propósito de este trabajo el aplicar los métodos del dominio de la

óptica para encontrar un modelo matemático de la energía electromagnética que resulte adecuado y fácil de analizar numéricamente.

Capítulo 2

TEORÍA

Tomando una dependencia del tiempo de la forma $e^{-i\omega t}$ (ω = frecuencia angular, ρ_1 = carga libre, $\mu = \mu_0$, μ_0 = permeabilidad magnética del vacío), las ecuaciones de Maxwell tienen la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_1 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (5)$$

Partiendo de estas ecuaciones y siguiendo de cerca a Born y Wolf (1965), hago la suposición de Sommerfeld-Runge. Esto es, asumo que los campos pueden ser representados de la forma.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(r)e^{ik\zeta(r)} \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}(r)e^{ik\zeta(r)} \quad (7)$$

Donde $\zeta(r)$ (la Eikonal) es una función real de la posición, $\mathbf{e}(r)$ y $\mathbf{h}(r)$ son funciones vectoriales complejas de la posición, y k (la magnitud del vector de onda) satisface la relación.

$$k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon + i\omega\mu_0\sigma \quad (8)$$

De (6) y (7) se puede mostrar que

$$\nabla \times \mathbf{E} = (\nabla \times \mathbf{e} + ik\nabla\zeta \times \mathbf{e})e^{ik\zeta} \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\nabla \times \mathbf{h} + ik\nabla\zeta \times \mathbf{h})e^{ik\zeta} \quad (10)$$

De donde (4) y (5) se transforman a

$$\nabla \times \mathbf{e} + ik\nabla\zeta \times \mathbf{e} = i\omega\mu_0 \mathbf{h} \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} + ik \nabla \zeta \times \mathbf{h} = (\sigma - i\omega\epsilon) \mathbf{e} . \quad (12)$$

Después de reorganizar términos, resulta

$$\nabla \zeta \times \mathbf{e} - \frac{\omega\mu_0}{k} \mathbf{h} = -\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{e} \quad (13)$$

$$\nabla \zeta \times \mathbf{h} - \frac{\sigma - i\omega\epsilon}{ik} \mathbf{e} = -\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{h} . \quad (14)$$

Si los términos del lado derecho de las ecuaciones (13) y (14) son despreciados las ecuaciones se reducen a:

$$\nabla \zeta \times \mathbf{e} - \frac{\omega\mu_0}{k} \mathbf{h} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \zeta \times \mathbf{h} - \frac{\sigma - i\omega\epsilon}{ik} \mathbf{e} = 0 \quad (16)$$

Que multiplicadas escalarmente por $\nabla \zeta$ dan:

$$\nabla \zeta \cdot \mathbf{h} = 0 . \quad (17)$$

$$\nabla \zeta \cdot \mathbf{e} = 0 . \quad (18)$$

De (15) h es

$$\mathbf{h} = \frac{k}{\omega\mu_0} \nabla \zeta \times \mathbf{e} \quad (19)$$

Y así (16) se convierte en

$$(\nabla \zeta \cdot \mathbf{e}) \left(\frac{k}{\omega\mu_0} \nabla \zeta \right) - \frac{k}{\omega\mu_0} (\nabla \zeta)^2 \mathbf{e} - \frac{\sigma - i\omega\epsilon}{ik} \mathbf{e} = 0 . \quad (20)$$

El primer término desaparece al tomar en cuenta a (18), y con la ayuda de la relación (8) la ecuación se reduce a

$$(\nabla\zeta)^2 = 1 \quad (21)$$

Que es entonces la ecuación Eikonal en este caso.

Si estamos interesados en el comportamiento espacial de las formas hermitianas $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{E}$ o $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ (donde el tilde significa complejo conjugado transpuesto) en medios conductores, y podemos representar a cualquiera de estos campos escalares como correspondiendo a la concentración de un soluto ϕ en un solvente, entonces lo que queremos medir es el "amontonamiento" de ϕ en cualquier punto. Esta medida estará dada por el laplaciano de ϕ , $\nabla^2 \phi$ (Morse y Feshbach, 1953):

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (22)$$

Que esperamos al menos, sea función de las propiedades conductoras del medio.

Busquemos pues, una ecuación que involucre $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{E}$ o a $\nabla^2 \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$. Teniendo la opción de trabajar con cualquiera de $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{E}$ o $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$, notamos que de (19):

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^* = \frac{k k^*}{(\omega \mu_0)^2} (\nabla\zeta \times \mathbf{e}) \cdot (\nabla\zeta \times \mathbf{e}^*) \quad (23)$$

Expandiendo y multiplicando por el factor $e^{i(k - k^*)\zeta}$, esto se convierte en

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^* e^{i(k - k^*)\zeta} = \frac{k k^*}{(\omega \mu_0)^2} ((\nabla\zeta)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) - (\nabla\zeta \cdot \mathbf{e}^*) (\mathbf{e} \cdot \nabla\zeta)) e^{i(k - k^*)\zeta} \quad (24)$$

Que con la substitución de (6), (7), (18) y (21) resulta:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \frac{k^2 c^2}{(\omega \mu_0)^2} \mathbf{E}\mathbf{E} \quad (25)$$

Un resultado equivalente se puede encontrar en Stratton (1941), página 227. Escogiendo trabajar con $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ por sus propiedades de continuidad, procedo como sigue:

Primero, la ecuación (1) es expresada en términos de $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$. Calculando el vector de Poynting (\mathbf{S}) con campos de la forma (6) y (7) tengo:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{e} e^{ik\tau} \times \mathbf{h}^* e^{-ik^*\tau} \quad (26)$$

Substituyendo \mathbf{e} de (16),

$$\mathbf{S} = ((\nabla\tau \cdot \mathbf{h}^*)\mathbf{h} - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*)\nabla\tau) \frac{ik}{\sigma - i\omega\epsilon} e^{i(k-k^*)\tau} \quad (27)$$

El primer término desaparece tomando en cuenta (17) y \mathbf{S} se reduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{-ik}{\sigma - i\omega\epsilon} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*) e^{i(k-k^*)\tau} \nabla\tau \\ &= \frac{-ik}{\sigma - i\omega\epsilon} (\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}) \nabla\tau \end{aligned} \quad (28)$$

Substituyendo (25) y (28) en (1) hallamos que

$$\nabla \cdot \left(\text{Re} \left[\frac{ik}{2(\sigma - i\omega\epsilon)} \right] (\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}) \nabla\tau \right) = \frac{\sigma(\omega\mu_0)^2}{2k^2 c^2} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \quad (29)$$

Seguidamente, busco encontrar una expresión de \mathbf{S} en términos de $\nabla(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H})$. Tomando la ecuación (3) y substituyendo (7) obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + ik\nabla_{\zeta} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (30)$$

Como el segundo término desaparece al tomar en cuenta (17),

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (31)$$

En cualquier superficie $\zeta = \text{constante}$, las condiciones $\nabla_{\zeta} \cdot \mathbf{h} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ (ecuaciones (17) y (31)), sólo pueden ser satisfechas si $|\mathbf{h}| = \text{constante}$. Esto a su vez implica que $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ también es constante en esa superficie, y que

$$\nabla_{\zeta} = K_1 \nabla(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}) \quad (32)$$

Donde $K_1 = \text{constante de proporcionalidad}$. Definiendo K_2 tal que

$$K_2 = \text{Re} \left[\frac{ik}{2(\sigma - i\omega\epsilon)} \right] (\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}) K_1 \quad (33)$$

La ecuación (29) se convierte en

$$\nabla \cdot (K_2 \nabla(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H})) = \frac{\sigma(\omega\mu_0)^2}{2kk^2} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \quad (34)$$

Como la ecuación (34) es una aproximación para cualquier tipo de $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ en el cual \mathbf{H} es de la forma (7), K_2 puede ser obtenida por medio de una simple evaluación de (34) para una onda plana propagándose a lo largo del eje z con amplitud unitaria, digamos una onda de la forma:

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{i}} e^{ikz} \quad (35)$$

Aquí \hat{i} es un vector unitario paralelo al eje x en un medio isotrópico libre de fuentes. Esto revela que K_2 si es una constante con el valor:

$$K_2 = \frac{\sigma(\omega\mu_0)^2}{2(i(k - k^*))^2 k k^*} \quad (36)$$

Substitución de K_2 en (34) finalmente da:

$$\nabla^2 \vec{H} = (i(k - k^*))^2 \vec{H} \quad (37)$$

Similarmente para \vec{E} , ecuaciones (37) y (25) dan:

$$\nabla^2 \vec{E} = (i(k - k^*))^2 \vec{E} \quad (38)$$

Usando la representación asociada con la definición (22), las ecuaciones (37) y (38) pueden ser interpretadas diciendo que la concentración de \vec{H} y \vec{E} es proporcional a $(i(k - k^*))^2$.

Una observación importante es que las ecuaciones (28) y (32) tomadas en conjunto afirman que el flujo de energía electro magnética es proporcional al gradiente de la densidad de energía electromagnética. Esto es, bajo esta aproximación la propagación de la energía electro magnética es estrictamente un proceso de difusión.

Capítulo 3

DISCUSION

La pregunta relevante a contestar es:

Bajo que condiciones pueden los términos

$$\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{e}, \quad \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{h} \quad (39)$$

del lado derecho de las ecuaciones (13) y (14) ser despreciados?

Calculemos primero k . Siguiendo a Stratton (1941) podemos decir que si

$$k = \alpha + i\beta \quad (40)$$

entonces las constantes α y β pueden ser calculadas elevando al cuadrado (40) e igualando las partes reales e imaginarias a los términos reales e imaginarios en (8):

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon, \quad \alpha\beta = \frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}, \quad (41)$$

de esto resulta

$$\alpha = \omega \left[\frac{\mu_0 \epsilon}{2} \left(\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu_0 \epsilon}{2} \left(\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

con α y β reales.

Substitución de estos resultados en las ecuaciones (13) y (14) muestran que, si las otras cantidades permanecen finitas cuando $\omega \rightarrow \infty$,

$$\nabla \zeta \times \mathbf{e} - \left(\frac{\mu_0}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} = 0 \quad (44)$$

$$\nabla \zeta \times \mathbf{h} - \left(\frac{\epsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \mathbf{e} = 0 \quad (45)$$

y que, cuando $\omega \rightarrow 0$,

$$0 = \nabla \times \mathbf{e} \quad (46)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = \nabla \times \mathbf{h} . \quad (47)$$

Las últimas cuatro ecuaciones implican que los términos (39) siempre pueden ser despreciados a altas frecuencias, y que también es posible que -- exista un rango de frecuencias, tal que la condición arriba mencionada -- sea satisfecha. Por ejemplo, las soluciones para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en un semi-espacio homogéneo, isotrópico y conductor son tales que (Stratton, - 1941; Jackson, 1975) $\mathbf{h} = \text{constante}$, $\mathbf{e} = \text{constante}$ y

$$\nabla \times \mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{e} = 0 \quad (48)$$

y los términos (39) tienen valor cero independientemente de la frecuencia para $\omega \neq 0$.

También es posible que los términos (39) en un problema dado tengan una distribución tal que, puedan ser despreciados en algunas regiones. Por -- ejemplo, las soluciones para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} para un dipolo eléctrico -- con un momento dipolar unitario \mathbf{p} en un espacio homogéneo, isotrópico y conductor son tales que (Stratton, 1941; Jackson, 1975):

$$\mathbf{h} = \mu_0 k^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{ikr^2} \right) (\mathbf{m} \times \mathbf{p}) \quad (49)$$

$$\mathbf{e} = \frac{k^2}{r} (\mathbf{m} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{m} + (3\mathbf{m}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \quad (50)$$

Aquí \mathbf{m} es un vector unitario dirigido del dipolo hacia el observador y r

es la distancia de observación. Digamos que estamos interesados en los campos ecuatoriales, esto es, campos tales que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = 0$. Si usamos un sistema de coordenadas cilíndrico (ρ, θ, z) en el cual \mathbf{p} pasa a través del origen y es paralelo a z entonces

$$\mathbf{h} = -\mu_0 k^2 \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{ik\rho^2} \right] \hat{\theta} \quad (51)$$

$$\mathbf{e} = \left[\frac{k^2}{\rho} + \frac{ik}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^3} \right] \hat{z} \quad (52)$$

donde $\hat{\theta}$ y \hat{z} son vectores unitarios paralelos a los ejes θ y z respectivamente. Para este caso

$$-\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{h} = -\frac{\mu_0}{\rho^3} \hat{z} \quad (53)$$

$$-\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{e} = \left[-\frac{k}{i\rho^2} - \frac{2}{\rho^3} + \frac{3}{ik\rho^4} \right] \hat{\theta} \quad (54)$$

si como se acostumbra, se definen tres zonas espaciales de interés:

La zona cercana: $\rho \ll \delta$

La zona intermedia: $\rho = \delta$

La zona lejana: $\rho \gg \delta$

donde δ es la profundidad de piel (Jackson, 1975):

$$\delta = \left[\frac{2}{\omega\mu_0\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ (m)} \quad (55)$$

Entonces los términos (53) y (54) pueden ser siempre despreciados en la zona lejana y las zonas intermedias en las que $\rho/\delta \gg 1$. Los mismos resultados se mantienen para un dipolo magnético con un momento dipolar unitario \mathbf{q} en un espacio homogéneo, isotrópico y conductor, con los cambios

de $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ (Jackson, 1975). Pensando que una fuente electromagnética o la dispersión de un blanco puede ser representada como hecha por una colección de dipolos eléctricos o magnéticos inducidos, podemos esperar en general la existencia de regiones cercanas a lejanas en las cuales la aproximación va de mala a buena.

Así es claro que las descripciones y resultados obtenidos usando las ecuaciones (37) o (38) junto con las condiciones de frontera adecuadas, van a tener todas las ventajas y desventajas de la aproximación de la óptica geométrica (para una revisión de estas, ver por ejemplo, Born y Wolf, 1965; Kline y Kay, 1965). La ventaja es que, en este caso, la energía electromagnética puede ser descrita como propagándose a lo largo de una trayectoria de rayo, debido a un proceso de difusión pura. La desventaja es que, cuando los términos (39) no puedan ser despreciados, esto es, cuando las magnitudes de los cambios en \mathbf{e} y \mathbf{h} no son pequeños comparados con las magnitudes de \mathbf{e} y \mathbf{h} en dominios cuyas dimensiones lineales son del orden de la longitud de onda, entonces las ecuaciones (37) y (38) no puede esperarse describan correctamente el comportamiento de $\vec{\mathbf{H}}$ o $\vec{\mathbf{E}}$ en estos dominios (llamados regiones caústicas). Sin embargo, trabajar con conductores nos dá una ventaja inesperada: siempre se está en la superficie de la muestra estudiada y casi nunca tendremos que preocuparnos de las regiones caústicas.

Una observación importante acerca del desarrollo teórico es que los resultados principales (ecuaciones (21), (28), (29), (37) y (38)) no se alteran si las corrientes de desplazamiento (el término $i\omega\mathbf{E}$ de la ecuación (5)) son despreciadas. En tal caso:

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma, \quad k = \left(\frac{\omega\mu_0\sigma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + i) = \frac{1 + i}{\delta} \quad (56)$$

significa que, en este caso, el término longitud de onda usado en óptica se traduce al familiar término profundidad de piel usado en electricidad.

Capítulo 4

RANGO DE APLICACION

Hechos muy bien conocidos son, que en la aproximación de campos lejanos, las ondas electromagnéticas son exactamente de la forma (6) y (7) (Stratton, 1941; Jackson, 1975), y también que en general, los campos se comportan localmente como ondas planas (Born y Wolf, 1965). Así que para --- nuestros propósitos normalmente deberíamos esperar buenos resultados en --- algún rango de frecuencias excepto cerca de una fuente o dispensor. La --- pregunta es: Cual es el rango espacial de aplicación? O más precisamente: A cuantas profundidades de piel de una fuente o dispensor es la aproximación confiable, digamos dentro de un diez por ciento de error?

No existe una respuesta directa a esta pregunta. Lo que esta disponible son algunas respuestas para algunos casos especiales de los cuales reglas razonables pueden ser derivadas.

Goldstein y Strangway (1975) en su trabajo del método audiomagnetotelúrico con fuente controlada muestran que, mientras que la distancia del punto de observación a una fuente dipolar eléctrica aterrizada sea tres profundidades de piel o más (relativa a la más grande resistividad en una --- sección bidimensional), la aproximación de fuente de onda plana es válida. Sus resultados modelados fueron hechos para semi-espacios con diferentes resistividades y checaron bien contra datos de campo.

Kan y Clay (1979), trabajando con su aproximación de rayos-híbrida, muestran soluciones para los campos dentro de conductores usando un transmi--- sor dipolar eléctrico y concluyen que la aproximación de fuente de onda ---

plana es válida más allá de seis profundidades de piel. Sus resultados -- son basados en las fases de los campos dentro de los conductores. Sus modelos teóricos consisten en capas de entre 18 a 23 km de grueso con una -- conductividad de 1.67×10^{-4} S/m sobre un semi-espacio con una conductivi-
dad de 1.67×10^{-2} S/m.

Sandberg y Holmann (1982) en sus cálculos para el método audiomagnetotellú-
rico con fuente controlada en un semi-espacio muestran que la suposición
de onda plana es válida cuando un transmisor alámbrico esta a más de tres
profundidades de piel de distancia en la configuración lateral y a más de
cinco profundidades de piel de distancia en la configuración colineal. --
Las soluciones fueron calculadas sobre una malla de 5.23×5.23 km para --
un transmisor de 609.6 m en un semi-espacio con un valor de profundidad --
de piel igual a 883.61 m.

Mundy, Roux y Smith (1974), en un trabajo posteriormente corregido por --
Chýlek (1977), muestran resultados para dispersión electromagnética por --
esferas inmersas en un medio absorbente, en los cuales la aproximación de
campos lejanos fue satisfecha para una distancia en el medio igual al ra-
dio de la esfera y valores de la profundidad de piel menores o iguales a
un quinto de él, lo que da una distancia de cinco profundidades de piel o
más. Sus resultados fueron hechos para varias combinaciones de índices --
complejos de refracción de esfera y medio.

Asumir pues, que en general a distancias más grandes que cinco profunda-
des de piel de una fuente o dispersor la aproximación es confiable, es en
tonces una regla razonable.

Capítulo 5
COMPARACIONES NUMERICAS

El propósito de esta sección es mostrar ejemplos de comparaciones numéricas entre las soluciones exactas dadas por las ecuaciones de Maxwell (4) y (5) despreciando las corrientes de desplazamiento para \vec{E} y \vec{H} , contra la aproximación dada por las ecuaciones (38) y (37) respectivamente.

a) Caso 1

Principalmente de interés teórico es el caso de una fuente alámbrica embebida en un espacio homogéneo conductor, para la polarización donde \vec{E} es paralelo al alambre. Comparaciones fueron hechas contra la bien conocida solución analítica dada por (ver por ejemplo Wait, 1952)

$$\vec{E} = \frac{k^2 \vec{I}}{2\pi\sigma} K_0(kr) \quad (57)$$

donde \vec{I} es la corriente en el alambre y $K_0(kr)$ es la función Bessel de tercer tipo modificada de orden cero.

La ecuación (38) no se resuelve directamente. En su lugar, \vec{E} es calculado usando las ecuaciones (25) y (28) en lo que realmente es usar la ley de intensidad de la óptica geométrica (Born y Wolf, 1965) en medios conductores. Substitución de \vec{H} de (25) en (28) da:

$$\vec{S} = \frac{ik}{\sigma} \frac{k^2}{(\omega\mu_0)^2} \vec{E} v_z \quad (58)$$

Usando (56), \vec{S} se reduce a

$$\vec{S} = \frac{k^2}{\omega\mu_0} \vec{E} v_z. \quad (59)$$

Si recordamos que en un medio homogéneo conductor la velocidad de fase de

una onda plana electromagnética es (Stratton, 1941);

$$c = \left(\frac{\sigma}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Re} \left(\frac{k^*}{\omega \mu_0} \right) \quad (60)$$

y dándose cuenta que debido a la ecuación (21) el valor absoluto de $\nabla \zeta$ es uno, entonces podemos identificar inmediatamente el término $(\vec{E}\vec{E})$ con la densidad de energía electromagnética y el valor absoluto de \vec{S} con la intensidad de la "luz" en cualquier punto fuera de la fuente alámbrica. La única diferencia con medios no-conductores es que, en nuestro caso, la intensidad está atenuada por el factor $e^{i(k - k^*)\zeta}$ presente implícitamente en la ecuación (59).

Soluciones numéricas fueron obtenidas para la fuente alámbrica conduciendo un ampere de corriente en un conductor con una resistividad de $10 \Omega\text{-m}$ a una frecuencia de 10 hertz, que da una profundidad de piel de 500 m. La computadora usada fue una Vax 11/780. Una gráfica del error porcentual de la solución aproximada de $\vec{E}\vec{E}$, comparada con la solución exacta para una corriente unitaria, como una función de la distancia de la fuente se muestra en la Figura 1. La solución exacta tomó 3.87 segundos de tiempo de la Unidad del Procesador Central, mientras que la solución aproximada tomó 2.29 segundos. La gráfica muestra las regiones esperadas que aparecen en el error porcentual; errores muy grandes cerca de la fuente, con un rápido y suave decaimiento a valores menores al 10% a 1.3 profundidades de piel, y errores despreciables a distancias mayores a cinco profundidades de piel.

b) Caso 2

Error porcentual

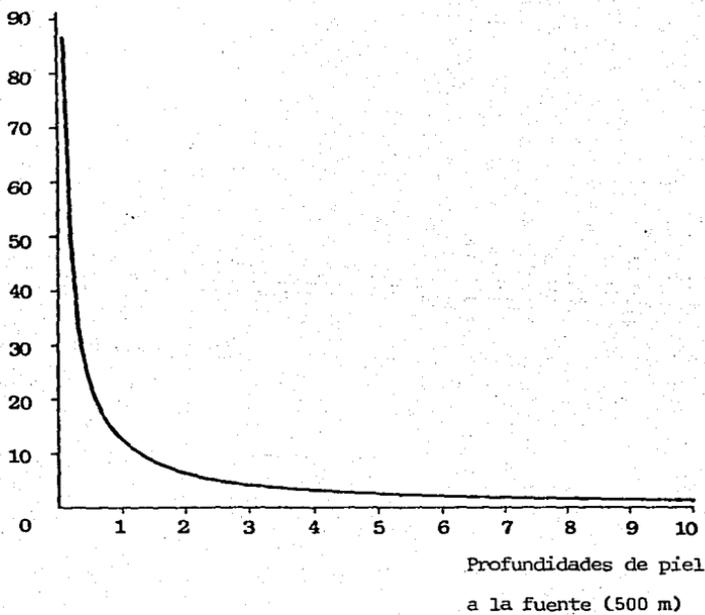


Figura 1. Error porcentual contra profundidades de piel a la fuente alámbrica.

De interés más práctico es el caso de una falla vertical de longitud y -- profundidad infinitas, separando dos cuarto-espacios de diferente resistividad, para la polarización donde \mathbf{H} está a lo largo del rumbo de la falla. Este es uno de los pocos casos prácticos (casos en que la distribución de la resistividad ocupa un semi-espacio) donde soluciones aproximadas pueden ser comparadas con analíticas (d'Erceville y Kunetz, 1962; Weaver, -- 1963; Jones y Price, 1970).

Adicionalmente, comparaciones fueron hechas contra el programa independiente de modelaje electromagnético VMT2D, escrito por Stodt y modificado -- por Bennett (1982), que calcula resistividades y fases (entre otras cosas) en la superficie de estructuras conductoras bidimensionales usando el método de elemento finito.

La solución de la ecuación aproximada (37) es obtenida usando la misma -- computadora del caso 1 y un programa que sigue el dado por James, Smith y Wolford (1977) en su sección: Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas. El procedimiento seguido consiste en reemplazar la ecuación (37) por una correspondiente ecuación de diferencias finitas, que luego es resuelta en cada punto de una malla rectangular por medio del método Gauss-Seidel iterativo. Las condiciones de frontera en la malla, junto con los valores iniciales, son determinados de $e^{i(k - k^*)z}$, donde z es la profundidad de cualquier punto de la malla. Dos valores diferentes de k son usados, dependiendo de en que cuarto-espacio el punto de la malla se encuentra.

Una vez que $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ es calculado, una resistividad aparente se define como sigue (Apéndice A):

$$\rho_a = \frac{16\pi^2 f}{107 \left(\frac{\partial}{\partial z} (\ln(\frac{E}{H})) \right)^2} (\Omega - m) \quad (61)$$

Soluciones numéricas fueron obtenidas para el caso de cuarto-espacios con valores de resistividad de 10 y 90 Ω -m y una frecuencia de 19 hertz, que dan valores de profundidades de piel de 500 y 1500 m respectivamente. Ambas soluciones fueron obtenidas usando varias mallas rectangulares (para asegurar la convergencias de soluciones) en las cuales cada cuarto-espacio ocupó una malla cuadrada con 50 m de separación entre nodos en todos los casos. Un error porcentual típico de la solución ρ_a , comparado con lo calculado por el programa VMT2D, como una función de la distancia de la falla es exhibido en la Figura 2. Este resultado es para una malla de 80 x 80 nodos, con la formación de menor resistividad a la izquierda. Le tomó a la solución VMT2D cerca de tres minutos de tiempo de la Unidad de Procesamiento Central, y menos de medio minuto para la solución aproximada y muestra el comportamiento consistentemente seguido por el error porcentual. Esto es, un pico asimétrico con su valor más alto obtenido en la discontinuidad de resistividad, con decaimientos rápidos y suaves, el decaimiento más rápido ocurriendo en la formación de más baja resistividad, y valores menores al 10% a una profundidad de piel o menos en ambos lados.

La Figura 3 muestra la solución analítica del módulo de la razón E_x/H_y -- desplegada por d'Erceville y Kuznetz (1962) para una razón de resistividades de nueve (misma que en este caso) junto con la misma cantidad obtenida por VMT2D, y lo que sería el equivalente para nuestra aproximación usando la definición de resistividad aparente dada en la ecuación (61). La figura muestra que la solución de VMT2D es buena (menos del 10% de error) en todo su dominio, y que la solución aproximada es buena más allá de una dis

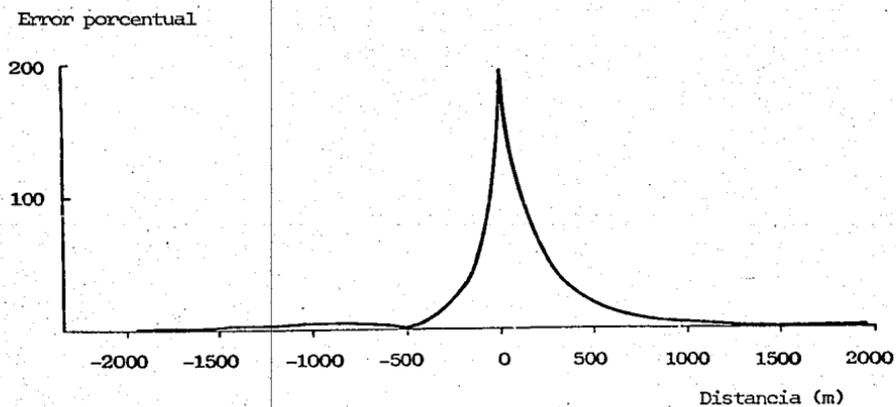


Figura 2. Error porcentual para la resistividad aparente contra distancia en dos cuarto-espacios.

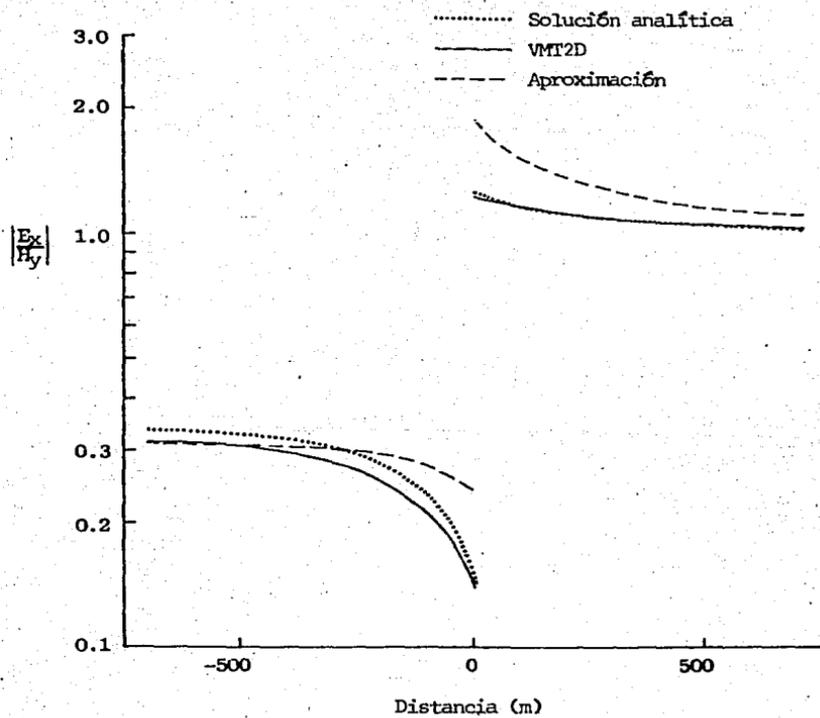


Figura 3. Comparación de la razón $\left| \frac{E_x}{E_y} \right|$ para diferentes soluciones contra distancia en dos cuarto-espacios.

tancia de una profundidad de piel de la discontinuidad de resistividad.

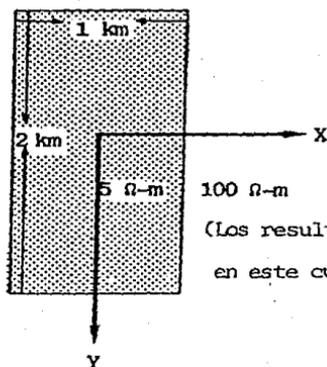
c) Caso 3

De gran interés es el caso de un prisma tridimensional conductor enterrado en un semi-espacio conductor. Comparaciones numéricas fueron hechas -- contra los resultados presentados por Ting y Hohmann (1981) calculados -- por el método de ecuaciones integrales.

La solución de la ecuación (37) es obtenida usando una versión tridimensional del programa usado para el caso 2, en la misma computadora. Las -- condiciones de frontera y valores iniciales en la malla son otra vez de-- terminados de $e^{i(kx - k^2)z}$, donde z es la profundidad de cualquier nodo en la malla. Es importante notar que estas son condiciones de frontera ad -- hoc. Una vez que \vec{H} es calculado, una resistividad aparente es otra vez -- calculada por medio de la fórmula (61). Soluciones numéricas han sido obtenidas para el caso mostrado en la Figura 4, que es un prisma rectangu-- lar enterrado en un semi-espacio con valores de resistividad de 5 y 100 -- Ω -m respectivamente. A una frecuencia de 10 hertz, esto da valores de pro-- fundidades de piel de 356 y 1583 m respectivamente. La solución fué obtenida para una malla con 49 x 57 x 22 nodos en las direcciones x , y , z res-- pectivamente, y una separación de 250 m entre nodos. Debido a que el mode-- lo tiene dos planos de simetría verticales, el resultado y las comparacio-- nes son mostradas para el cuadrante inferior derecho solamente.

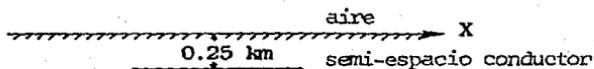
El mismo modelo a una frecuencia de 0.1 hertz resuelto por Ting y Hohmann (1981) no se resolvió aquí. Esto es debido a que el gran valor de profundi

VISTA DE PLANTA

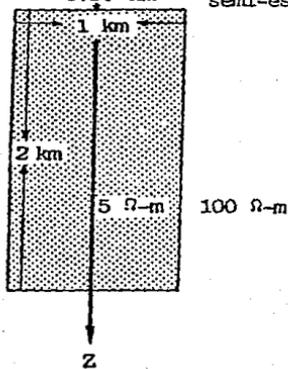


100 Ω -m

(Los resultados son mostrados en este cuadrante)



VISTA DE SECCION



100 Ω -m

Figura 4. Modelo tridimensional usado para calcular las resistividades aparentes en todas las figuras posteriores.

dad de piel alcanzado por el semi-espacio huésped igual a 15805 m y el método de diferencias finitas usado, ponen el requerimiento de memoria disponible de la computadora fuera de alcance. Ting y Hohmann son capaces de resolver el problema en una computadora más pequeña (una Prime-400) debido a que ellos solo necesitan discretizar la distribución de conductividad anómala, característica fundamental del método de ecuaciones integrales.

La solución para ρ_a , junto con ρ_{yx} y ρ_{xy} (Las resistividades para las dos diferentes polarizaciones) de Ting y Hohmann (1981) son mostradas en la Figura 5. Los errores porcentuales con cada una de ρ_{yx} y ρ_{xy} son presentados en la Figura 6. Tomó cerca de 16 minutos de tiempo de la Unidad del Procesador Central para obtener los valores de ρ_a . Las características exhibidas por ρ_a son, como era de esperarse, un comportamiento suave y monótono como función de la posición dando su valor mínimo, que es muy cerca (5.964 Ω -m) a 5.0 Ω -m en el centro de la malla, y un buen acuerdo con ρ_{yx} pero mejor aún con ρ_{xy} , siendo el error porcentual menor al 10% a distancias menores a una profundidad de piel de las discontinuidades de conductividad en el último caso.

Como el prisma está alargado en la dirección y, el mejor ajuste entre ρ_a y ρ_{xy} puede ser explicado si pensamos en la dirección y como la dirección del rumbo y recordamos que, cuando se calcula ρ_{xy} , \mathbf{H} es paralelo al rumbo (como en el caso 2) y debe ser modelado mejor por la aproximación de \mathbf{HH} : Similarmente ρ_{yx} debe ser modelada mejor calculando ρ_a con la aproximación de \mathbf{EE} .

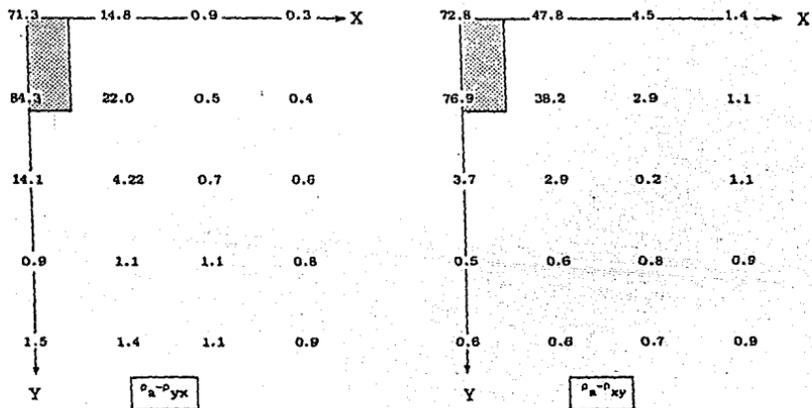


Figura 6. Error porcentual para la resistividad aparente en el sistema coordenado original.

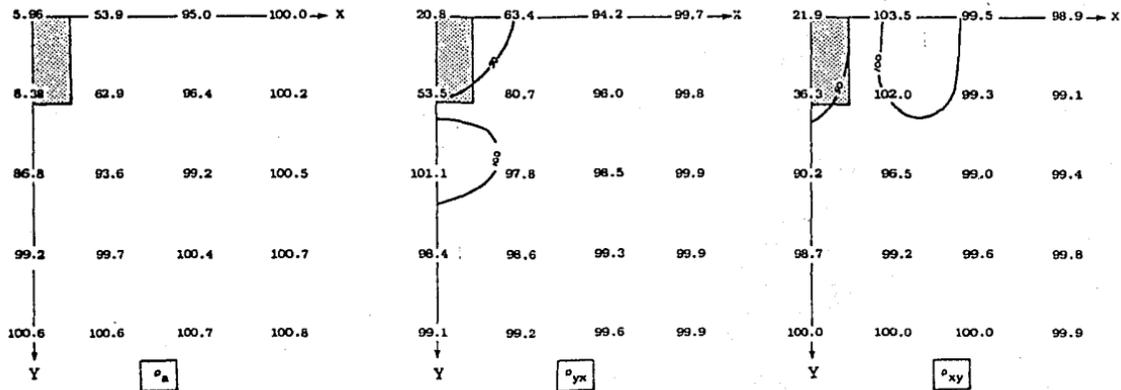


Figura 5. Resistividades aparentes ($\Omega - m$) en el sistema coordenado original.

Lo que hace estos últimos resultados no conclusivos, es por supuesto, las condiciones de frontera ad hoc.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Un nuevo modelo matemático se ha obtenido. Usando la aproximación de la óptica geométrica en medios conductores, describe la distribución de la energía electromagnética en conductores. Provee de un eslabón entre los campos de la óptica y la electricidad. Con él, otro punto de vista del cual un mejor entendimiento de los campos electromagnéticos y su energía en conductores puede ser ganado. Ejemplos numéricos muestran que tiene aplicaciones teóricas y prácticas. Áreas de futura investigación que se pueden proponer son: Ejemplos y problemas tridimensionales numéricos, rederivación de los resultados principales (ecuaciones (21), (28), (29), (37) y (38)), de otras maneras o en el dominio del tiempo, extracción de información acerca de las fases de los campos y, finalmente, uso de las aproximaciones en esquemas de inversión.

REFERENCIAS

- Bennet, L. A., 1982. Report on the program VMT2D, CSIRO., Division of Mineral Physics, RIR 1354R.
- Born, M. and Wolf, E., 1965. Principles of optics, Pergamon Press, Oxford, 808p.
- Chýlek, P., 1977. Light scattering by small particles in an absorbing medium. Journal of the Optical Society of America, v.67, p.561-563.
- d'Erceville, I. and Kunetz, G., 1962. The effect of a fault on the Earth's natural electromagnetic field. Geophysics, v.27, p.651-665.
- Goldstein, M.A. and Strangway, D.W., 1975. Audio-frequency magnetotellurics with a grounded electric dipole source. Geophysics, v.90, p.669-683.
- Jackson, J.D., 1975. Classical electrodynamics, Wiley & Sons Inc., New York, 848p.
- James, M.L., Smith, G.M. and Wolford, J.C., 1977. Applied numerical methods for digital computation, Harper & Row Publishers, New York 687p.
- Jones, F.W. and Price, A.T., 1970. The perturbations of alternating geomagnetic fields by conductivity anomalies. Geophysl. J.R.A.S., v.20, p.317-334.
- Kan, T. and Clay, C.S., 1979. Hybrid-Ray approximation in electromagnetic sounding. Geophysics, v.49, p.1846-1861.
- Kline, M. and Kay, I.K., 1965. Electromagnetic theory and geometrical optics, Interscience Publishers, New York, 527p.
- Morse, P.M. and Feshbach, H., 1953. Methods of theoretical physics. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1978p.
- Mundy, W.C., Roux, J.A. and Smith, A.M., 1974. Scattering by spheres in an absorbing medium. Journal of the Optical Society of America, v.64, --

p.1593-1597.

- Sandberg, S.K. and Hohmann, G.W., 1982. Controlled-source audio-magnetotellurics in geothermal exploration. *Geophysics*, v.47, p.100-116.
- Schmucker, U. and Weidelt, P., 1975. Electromagnetic induction in the earth. Lecture notes, Aarhus University, 178p.
- Stratton, J.A., 1941. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill Book Company, -- New York and London, 615p.
- Ting, S.C. and Hohmann, G.W., 1981. Integral equation modelling of three-dimensional magnetotelluric response. *Geophysics*, v.46, p.182-197.
- Wait, J.R., 1952. The cylindrical ore body in the presence of a cable carrying an oscillating current. *Geophysics*, v.17, p.378-386.
- Weaver, J.T., 1963. Electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micropulsations near a coastline. *Can.J. Phys.*, v.41, p.484-495.

APENDICE A

Una definición de resistividad aparente

Los parámetros ρ (resistividad) y ρ_a (resistividad aparente) están relacionados, pero son dos conceptos diferentes. Mientras que ρ es una propiedad intrínseca del medio, ρ_a es la resistividad de un medio virtual que diera la misma respuesta que la medida.

Para los propósitos de las comparaciones numéricas, es necesario tener una resistividad aparente definida como una función de $\vec{H}H$ o $\vec{E}E$, esto puede ser hecho de la siguiente manera:

En un espacio infinito, isotrópico, conductor y libre de cargas, $\vec{H}H$ satisface aproximadamente la ecuación homogénea de Helmholtz:

$$\nabla^2(\vec{H}H) - (i(k - k^*))^2 \vec{H}H = 0. \quad (A1)$$

Para una onda propagándose a lo largo del eje z , la ecuación (A1) tiene la solución:

$$\vec{H}H = (\vec{H}H)_0 e^{i(k - k^*)z} \quad (A2)$$

donde $(\vec{H}H)_0$ es el valor de $\vec{H}H$ en $z = 0$. En este caso las ecuaciones de Maxwell dan el mismo resultado (A2) para $\vec{H}H$. Tomando la derivada con respecto a z , da

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vec{H}H) = i(k - k^*) \vec{H}H. \quad (A3)$$

Despreciando las corrientes de desplazamiento

$$i(k - k^*) = -(2\omega\mu_0\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad (A4)$$

y

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2\omega\mu_0}{\left(\frac{\partial}{\partial z}(\ln(\vec{H}H))\right)^2}. \quad (A5)$$

Tomando $\omega = 2\pi f$ da

$$\rho = \frac{16\pi^2 f}{10^7 \left(\frac{\partial}{\partial z} (\ln \tilde{H})\right)^2} \quad (\Omega - m) \quad (A6)$$

donde H se mide en nanoteslas.

Este último resultado puede ser extrapolado y definir una resistividad aparente en términos del \tilde{H} observado o modelado y su derivada vertical. - Una fórmula similar involucrando H y su derivada vertical en la superficie de un semi-espacio con una estructura conductora unidimensional (que solo varía con la profundidad), puede ser hallada en Schmucker y Weidelt (1975).

Otra definición de resistividad aparente similar es obtenida substituyendo \tilde{E} por \tilde{H} en la fórmula (A6).