2ej
13

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISTRIBUCIONES LIMITE DEL MAXIMO Y EL MINIMO DE UNA SUCESION DE VARIABLES ALEATORIAS

T E S I S

QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

SILVIA LETICIA CUELLAR MONTOYA

MEXICO, D. F. 1987

INDICE

INTRODUCCION

B.V. Gnedenko y N.A. Kolmogorov mencionan en su libro de 1949 «Distribuciones límite para sumas de variables aleatorias independientes» que:

> « En la construcción formal de un curso sobre la teoría de probabilidad, los teoremas límite aparecen como una especie de superestructura sobre los capítulos elementales, en los cuales todos los problemas tienen un carácter finito puramente aritmético. No obstante, en realidad, el valor epistemológico de la teoría de probabilidad es revelado solamente por los teoremas límite. Todavía más, sin los teoremas límite es imposible entender el contenido real del concepto primario de todas nuestras ciencias - el concepto de probabilidad ...».

Este tipo de afirmaciones expresan las inquietudes que se manifestaron pronto y constantemente en la evolución de la teoría de probabilidad con los trabajos de Bernoulli, De Moivre, Laplace, Poisson, Tchebyschev, Markov, Lyapunov, Borel y Kolmogorov por sólo mencionar algunos de los más importantes, surgiendo conceptos que pretenden reflejar la idea de «límite» en la teoría de probabilidad, como por ejemplo, (utilizando la acepción moderna) convergencia en probabilidad, casi segura, en distribución, en r-media, etc.

En este contexto, el presente trabajo analiza algunos resultados de lo que conocemos como convergencia en distribución, a saber:

Sean $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espacio de probabilidad, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias sobre dicho espacio y para todo número natural n, g_n una función real de variable n-dimensional que transforma el vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ en una variable aleatoria $g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ con función de distribución G_n. La pregunta general sería: ¿ bajo qué condiciones sobre la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, g_n converge en distribución y qué forma adquiere la función de distribución límite previa «estandarización» de la sucesión transformada $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$? es decir, dado una sucesión de transformaciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, con funciones de distribución $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, se desea saber:

i) ¿cuáles son las funciones de distribución límite G ? (de la sucesión de funciones $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ evaluadas en los puntos $\{a_n + b_n x\}_{n=1}^{\infty}$).

ii) ¿qué condiciones sobre la función G_n, garantizan la existencia de sucesiones de términos no aleatorios $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ para los cuales la sucesión $\{G(a_n + b_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ converja?

iii) y ¿cuáles son los términos no aleatorios a_n y b_n?[1]

Hasta el momento, solamente se ha estudiado a fondo este problema en aquellos casos para los cuales la función g_n tiene las reglas de correspondencia:

1.- $g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$

2.- $g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

y $g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

En este trabajo, nos ocuparemos precisamente de este último punto.

[1] Para un análisis detallado del por qué estas tres preguntas son importantes, consultar Loeve, M., The theory of probability, capítulo VI.

1.- La convergencia en distribución de la suma de variables aleatorias fue el primer problema que se atacó. Este problema se empezó a estudiar para suma de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas. Su estudio sistemático se remonta al siglo XVIII, con los trabajos (aunque planteados en otro «lenguaje») de Moivre (1730) y Laplace (1812), quienes continuaron los trabajos de Bernoulli y Poisson. Matemáticos como Tchebyschev, Markov y Lyapunov entre otros, generalizaron la idea de teorema límite y buscaron condiciones necesarias y suficientes. El resultado más conocido para la convergencia en distribución de variables aleatorias (y uno de los más importantes que se ha obtenido para la teoría de probabilidad) es el conjunto de resultados conocidos con el nombre de Teorema del Límite Central[2], uno de cuyos enunciado sería:

Teorema del Límite Central.- *Sean* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas y* F_Y *la función de distribución de una variable aleatoria normal estandar, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\ E(X_n) + [n\ Var(X_i)]^{1/2}x\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{x} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-y^2/2} dy = F_Y(x)$$

si y sólo si

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad E(X_n) < \infty \quad \text{y} \quad Var(X_n) < \infty .$$

Como podemos apreciar, este teorema responde a las pregun-

---

[2] Para un estudio profundo del problema de convergencia en distribución de la suma de variables aleatorias independientes, consultar Gnedenko B.V. y Kolmogorov A.N., Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables o Petrov, Sums of Independent Random Variables.

tas *i)*, *ii)* y *iii)*; proporciona criterios para que la sucesión $\{\sum_{i=1}^{n} X_i\}_{n=1}^{\infty}$ converja (para todo número natural n, la existencia de los primeros dos momentos de la variable aleatoria X_n) a una variable aleatoria normal estandar y da explicitamente las sucesiones de términos de normalización:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{i=1}^{n} E(X_n) \qquad y \qquad b_n = [\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)]^{1/2} \ ,$$

observemos que como las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son independientes e identicamente distribuídas, los términos a_n y b_n los podemos reescribir como:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = n\ E(X_n) \qquad y \qquad b_n = [n\ Var(X_i)]^{1/2} \ .$$

Este tipo de resultados son la continuación natural de los trabajos de Bernoulli y Poisson, que hoy son conocidos con el nombre de Leyes Débiles de los Grandes Números y que corresponden al concepto de convergencia en probabilidad (ver capítulo I, sección 3).

2.- El tema del presente trabajo, es la convergencia en distribución del máximo y el mínimo de una sucesión de variables aleatorias. Sin embargo, debido a la relación que existe entre el máximo y el mínimo:

$$\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \ldots, -X_n)$$

la teoría asintótica que se pueda desarrollar para la sucesión de mínimos es equivalente a la correspondiente para la sucesión de máximos, por lo cual, nos limitaremos a hablar de esta última.

Al igual que para el problema referente a la convergencia en distribución de la suma de variables aleatorias, el estudio de la convergencia en distribución del máximo, se inició para sucesiones $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con función de distribución F. Observemos que en este caso, si:

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

la función de distribución H_n del máximo Z_n la podemos expresar en términos de la función F como:

$$H_n(x) = P(Z_n \le x) = F^n(x) .$$

En estas condiciones, las preguntas *i)*, *ii)* y *iii)* las podemos traducir de la siguiente manera: ¿ bajo qué condiciones sobre la función de distribución F y para qué sucesiones de términos de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, se satisface que:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x) \qquad 1.1$$

y cuáles serían, en tal caso, las funciones de distribución límite ?

El trabajo más completo referente a este problema, fue publicado por Gnedenko en 1943; en él, no sólo demuestra que las únicas funciones de distribución límite son funciones del mismo tipo[1] que las funciones:

para un número γ positivo

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{si } x \le 0 & 0 \\ \text{si } x > 0 & exp(-x^{-\gamma}) \end{cases}$$

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & exp(-(-x)^{-\gamma}) \\ \text{si } x \ge 0 & 1 \end{cases}$$

[1] Se dice que una función G es del mismo tipo que la función H, si existen números reales A y B tales que para todo número real x:

$$G(A+Bx) = H(x)$$

y

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad H_{3,0}(x) = exp(-e^{-x})$$

sino que también proporciona un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que la función F satisfaga el límite 1.1 para las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$.

Así, como veremos en el transcurso de este trabajo, el problema de la convergencia en distribución para el máximo de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas está totalmente resuelto, debido a que:

i') se sabe que la función de distribución límite H para el máximo tiene que ser una función del mismo tipo que una de las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$.

ii') se tiene un conjunto de condiciones necesarias y suficientes sobre la función F, para que ésta satisfaga el límite 1.1 (donde la función H, es una función del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$).

iii') y se tienen reglas para construir las sucesiones de térmios de estandarización $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ahora bien, si se omite la hipótesis de independencia, el problema de la convergencia en distribución del máximo, se encuentra parcialmente resuelto. Por ejemplo, en el caso en el que la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estacionaria, bajo ciertas condiciones (una de las cuales, es que las variables aleatorias sean asintoticamente independientes), se cuenta solamente con criterios suficientes para que la sucesión de máximos converja en distribución. Sin embargo, es precisamente para este tipo de sucesiones, para las cuales se han encontrado nuevas funciones de distribución límite, a parte de las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$.

El objetivo principal de este trabajo, es realizar una exposición global del problema de convergencia en distribución del máximo de una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas, partiendo del planteamiento original de Gnedenko (1943) y utilizando métodos más recientes como los que aparecen en Galambos (1978), con el propósito de lograr una exposición completa, moderna y con una notación uniforme que sólo requiriera de cierta familiaridad con conocimientos elementales de la teoría de probabilidad y que llegara hasta resultados recientes sobre variables aleatorias, no necesariamente independientes (ver capítulo IV), que permitieran « vislumbrar » el futuro desarrollo de este tema.

Con este propósito, el presente trabajo está dividido en cuatro capítulos.

En el capítulo I, enunciaremos los conceptos básicos de la teoría de probabilidad relacionados con los resultados que demostraremos, revisaremos algunos tipos de convergencia de variables aleatorias (convergencia en probabilidad, convergencia casi segura y convergencia en distribución), los principales resultados que generan y presentaremos dos casos particulares de convergencia en distribución; la convergencia de la mediana y la del máximo y el mínimo.

El capítulo II, está totalmente dedicado al estudio de la convergencia en distribución del máximo en el caso independiente e identicamente distribuído. Aquí resolveremos los puntos *i')*, *ii')* y *iii')*.

En el capítulo III, ilustraremos con ayuda de algunos ejemplos la teoría desarrollada en el capítulo II. Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera de las cuales, analizaremos el comportamiento límite de sucesiones de máximos correspondientes a algunos de los modelos de variables aleatorias más conocidos, que sí convergen en distribución. En la segunda sección, veremos ejemplos de sucesiones de máximos que no convergen en distribución y en la última sección de este capítulo examinaremos algunos de los problemas que se podrían presentar en la práctica, referentes a la convergencia en distribución del máximo y el mínimo.

Finalmente, en el capítulo IV, analizaremos brevemente la convergencia en distribución del máximo de dos clases de sucesiones estacionarias $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$: las sucesiones mezclantes y un caso particular de éstas, las sucesiones m-dependientes, las cuales presentaremos en la primera sección y las sucesiones gaussianas estacionarias, que estudiaremos en la segunda sección de este último capítulo. En ambos casos, enunciaremos un conjunto de condiciones suficientes para que el máximo de las sucesiones mencionadas converja en distribución.

CAPITULO I

GENERALIDADES

En este primer capítulo, presentamos algunos de los conceptos básicos de la teoría de probabilidad relacionados con el presente trabajo, los principales tipos de convergencia de variables aleatorias y enunciamos las relaciones y los resultados más importantes de los diferentes tipos de convergencia. Por último analizamos la convergencia en distribución de la mediana y del máximo y el mínimo de una sucesión de variables aleatorias.

1. CONCEPTOS GENERALES

Espacio de probabilidad

Definición 1.1 Un *espacio de probabilidad* es una terna que consiste de:

1) Un conjunto Ω distinto del vacío.

2) Una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω tal que:

i) $\Omega \in \mathscr{A}$

ii) $\forall\ A \in \mathscr{A}, \qquad A^c \in \mathscr{A}$

iii) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

La familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω que cumple con las propiedades anteriores, recibe el nombre de σ-álgebra o σ-campo de subconjuntos de Ω.

3) Una función de probabilidad P, es decir, una función definida del σ-campo $\mathscr{A}$ al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $\forall\, A \in \mathscr{A}, \quad P(A) \geq 0$

iii) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{A}$ y $\forall\, i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

entonces $\quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad, en estas condiciones tenemos las siguientes definiciones:

Variable aleatoria

Definición 1.2 La función X es una *variable aleatoria real* sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ si:

i) $X : \Omega \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$

y si:

ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}.$

Como trataremos solamente con variables aleatorias reales, omitiremos en lo sucesivo la palabra real y en general identificaremos una variable aleatoria con las letras U, V, W, X, Y y Z a menos que especifiquemos otra cosa.

Vector aleatorio

Definición 1.3 Sea $\bar{X}$ una función definida del conjunto Ω al conjunto $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\bar{X}$ es un *vector aleatorio de dimensión n* sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, si cada una de las n-coordenadas es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y lo representamos por:

$$\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Sucesión de variables aleatorias

Definición 1.4 Una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión de variables aleatorias* sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ si para todo número natural n, X_n es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Función medible y función de Borel

Definición 1.5 Sean $\mathscr{C}$ la clase de todos los intervalos

abiertos del eje real, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ el mínimo σ–campo que contiene a la clase $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ el σ–campo de subconjuntos del conjunto Ω y f una función definida del conjunto Ω al conjunto $\mathbb{R}$. Decimos que la función f es una ***función $\mathcal{A}$–medible*** **o una** ***función medible con respecto a $\mathcal{A}$*** **si:**

$$\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \qquad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Si tomamos el conjunto Ω como el conjunto $\mathbb{R}$ y si la función f es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–medible, entonces a la función f se le llama ***función de Borel.***

Propiedades de variables aleatorias

Proposición 1.6 *Sea $\{ X_n \}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, entonces las siguientes funciones también son variables aleatorias sobre $(\Omega,\mathcal{A},P)$:*

i) Si $k \in \mathbb{R}$, $\qquad X_i \equiv k$

es decir, una función constante. Esta variable aleatoria recibe el nombre de variable aleatoria degenerada.

ii) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\qquad \sum_{i=1}^{n} X_i$

iii) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\qquad \prod_{i=1}^{n} X_i$

iv) $\forall\ n,m \in \mathbb{N}$, $\qquad \dfrac{X_n}{X_m}$

v) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\qquad \max_{1<i<n} (X_i)$ y $\min_{1<i<n} (X_i)$

En general, si tenemos n *variables aleatorias y para cada elemento ω del conjunto Ω, las ordenamos en orden creciente, obtenemos* n *nuevas funciones $X_{i:n}$, de tal forma que:*

$$X_{1:n} < X_{2:n} < \ldots < X_{n:n}$$

entonces para todo número natural i *en el conjunto* $\{1,2,\ldots n\}$

$X_{i:n}$ *también es variable aleatoria. Notemos que en este caso:*

$$X_{1:n} = \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \quad \text{y} \quad X_{n:n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}.$$

vi) $\sup_n \{X_n\}$ y $\inf_n \{X_n\}$

vii) $\lim_{n \to \infty} X_n$ *si el límite existe.*

En general, si la función f *es una función de Borel, entonces la función* $f(X_i)$ *es variable aleatoria.*

Función de distribución

Definición 1.7 **Sea X una variable aleatoria y $\bar{X}$ un vector aleatorio sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.** *Las funciones de distribución de la variable aleatoria X y del vector aleatorio $\bar{X}$,* **que representamos por F_X y $F_{\bar{X}}$ respectivamente, están dadas por las siguientes reglas de correspondencia:**

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

$$\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad F_{\bar{X}}(\bar{x}) = P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) \leq x_i\})$$

La función $F_{\bar{X}}$ la podemos expresar también como:

$$F_{\bar{X}}(\bar{x}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq x_1;\ X_2(\omega) \leq x_2; \ldots ;\ X_n(\omega) \leq x_n\})$$

o bien, simplemente:

$$F_{\bar{X}}(\bar{x}) = P(X_1 \leq x_1;\ X_2 \leq x_2;\ \ldots ;\ X_n \leq x_n)\ .$$

Propiedades de la función de distribución

Proposición 1.8 *Sea* X *una variable aleatoria con función de distribución* F_X, *entonces la función* F_X *satisface que:*

i) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

iii) F_X *es continua por la derecha.*

iv) F_X *es monótona no decreciente.*

v) Para toda pareja de números reales $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$

$$P(\{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a).$$

Variables aleatorias independientes

Definición 1.9 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Decimos que las *variables aleatorias* X_1, X_2, ..., X_n *son independientes* (o mutuamente independientes) si para todo subconjunto de índices $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ del conjunto de índices $\{1,2,\ldots,n\}$ se tiene que:

$$F_{X_{i1}X_{i2}\ldots X_{im}}(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{im}) = \prod_{j=1}^{m} F_{X_{ij}}(x_{ij})$$

Un número infinito de variables aleatorias es independiente, si para todo subconjunto finito de variables aleatorias es independiente.

Variables aleatorias identicamente distribuídas

Definición 1.10 Sean X y $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una variable aleatoria y una sucesión de variables aleatorias sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$ respectivamente y F_X y $\{F_{X_i}\}_{i=1}^{\infty}$ las funciones de distribución correspondientes. Decimos que la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una *sucesión de variables aleatorias identicamente distribuídas* si:

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad F_X(x) = F_{X_i}(x)$$

y decimos que la variables aleatoria X_i es una copia de la variable aleatoria X.

Esperanza

Definición 1.11 Sea X una variable aleatoria sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$ con función de distribución F_X. Definimos la *esperanza de la variable aleatoria* X como la integral de Riemann-Stieljes de la variable aleatoria X con respecto a su función de distribución F_X, es decir:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; dF_X(x) \; .$$

A partir de esta definición, se puede deducir que si la función g es una función de la variable aleatoria X, la esperanza de dicha función estará dada por:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \; dF_X(x) \; .$$

Función característica

Definición 1.12 Sea X una variable aleatoria sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$ con función de distribución F_X. Definimos la *función característica de la variable aleatoria* X como:

$$\forall \; t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \; dF_X(x)$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

Teorema de convergencia dominada

Teorema 1.13 *Sean* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y G funciones reales de variable real. Supongamos que la función G es integrable en todo el eje real y que las siguientes condiciones se cumplen:*

$$i) \; \forall \; n \in \mathbb{N} \; \text{ y } \; \forall \; x \in \mathbb{R} \qquad |g_n(x)| \le G(x)$$

y

$$ii) \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx .$$

Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

Teorema 1.14 *Sean* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias y* X *y* Y *dos variables aleatorias sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Si la esperanza de la variable aleatoria* Y *existe y si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, \omega \in \Omega$ $\qquad |X_n(\omega)| \le Y(\omega)$

ii) $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ $\qquad$ (ver definición 2.2.1)

entonces

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$$

es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_{Xn}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x) .$$

Distribución de la suma de variables aleatorias independientes

Proposición 1.15 *Sean* X *y* Y *dos variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *independientes con funciones de distribución* F_X *y* F_Y *respectivamente y sea* $Z = X + Y$, *entonces:*

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - x)\, dF_Y(x) . \qquad 1.15.1$$

A la integral 1.15.1 se le conoce con el nombre de *Convolución* **de las funciones F_X y F_Y y se representa como:**

$$F_X * F_Y .$$

2. CONVERGENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

En la sección anterior, enunciamos que si el límite de una sucesión de variables aleatorias existe, éste a su vez, también es variable aleatoria. A continuación analizamos que significa y en que sentido una sucesión de variables aleatorias converge. Recordando la definición clásica del límite puntual de una sucesión de funciones $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendríamos que X_n converge puntualmente a X si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \ni \quad \forall n \geq N$$

$$| X_n(\omega) - X(\omega) | < \varepsilon.$$

Evidentemente, esta definición no tiene sentido en nuestro contexto, debido a que si consideramos que las funciones son variables aleatorias, no tenemos la seguridad de que éstas tomen un valor determinado, por lo cual no podemos estar seguros de que a partir de un cierto número n, la variable aleatoria X_n tomará un valor cercano a la variable aleatoria X. Sin embargo, como el conjunto:

$$\{\omega \in \Omega \mid | X_n(\omega) - X(\omega) | < \varepsilon\}$$

es un evento, podemos hablar de la probabilidad de que dicho evento ocurra. De esta forma, el conjunto A para el cual, para todo elemento ω de este conjunto, $X_n(\omega)$ converge a $X(\omega)$, recibe el nombre de *conjunto de convergencia* y lo podemos expresar como:

$$A = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}$$

y por lo tanto, el conjunto

$$A^c = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \not\rightarrow X(\omega)\}$$

será el *conjunto de divergencia*. Es así, como surgen los tipos de convergencia de variables aleatorias que presentamos a continuación.

2.1. Convergencia en probabilidad

Definición 2.1.1 Sea $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espacio de probabilidad y sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Decimos que *la sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge en probabilidad a la variable aleatoria* X si:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

o equivalentemente si:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

y lo denotamos como : $X_n \xrightarrow{P} X$.

Intuitivamente, este tipo de convergencia significa que para n suficientemente grande, la probabilidad de que la diferencia entre las variables aleatorias X_n y X sea pequeña, es grande; sin embargo no significa que para todo elemento ω del conjunto Ω, la diferencia $X_n(\omega) - X(\omega)$ sea pequeña, de hecho puede ser muy grande, aún para n suficientemente grande.

Criterios de convergencia

El siguiente lema proporciona un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de variables aleatorias converja en probabilidad.

Lema 2.1.2. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias y para todo número natural* n, *sea* $Y_n = X_n - X$, *entonces cuando* n *tiende a infinito:*

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \quad E\left[\frac{|Y_n|}{1 + |Y_n|}\right] \longrightarrow 0\,.$$

Existe un método más sencillo para demostrar que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria X, sin embargo éste sólo nos proporciona una condición suficiente para que $X_n \xrightarrow{P} X$. Este método consiste en dar una estimación de la probabilidad

$$P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n - X| \geq \varepsilon\})$$

de tal forma que esa estimación dependa del número n y tienda a cero cuando n tiende a infinito. Esta estimación la da la desigualdad de Tchebyschev, que afirma que:

Desigualdad de Tchebyschev 2.1.3 *Si Y es una variable aleatoria con r-ésimo momento finito (es decir, si $E(Y^r)$ existe), entonces*

$$P(\{\omega \in \Omega \mid |Y(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E(Y^r)}{\varepsilon^r}$$

De esta forma tenemos que:

Lema 2.1.4 $X_n \xrightarrow{P} X$ *si* $E((X_n - X)^r) \longrightarrow 0$ *cuando* $n \to \infty$

lo cual se puede demostrar facilmente tomando en la desigualdad 2.1.3 a la variable aleatoria Y como $Y = X_n - X$.

A continuación enunciamos algunas propiedades de convergencia en probabilidad.

Propiedades de convergencia en probabilidad

Proposición 2.1.5 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de variables aleatorias y X y Y dos variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tales que:*

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad y \quad Y_n \xrightarrow{P} Y$$

entonces

$i)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\qquad \alpha X_n \xrightarrow{P} \alpha X$

$ii)\qquad X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

$iii)\qquad X_n Y_n \xrightarrow{P} X\, Y$

$iv)$ *si* $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad P(Y_n = 0) = P(Y = 0) = 0$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$$

$v)$ *si* f *es una función continua* $\quad f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

2.2. Convergencia casi segura

Dada la definición de convergencia en probabilidad se está considerando un límite de números entre cero y uno, y ya vimos que no garantiza que para todo elemento ω del conjunto Ω y n suficientemente grande, $X_n(\omega)$ esté cerca de $X(\omega)$, entonces a continuación damos una definición de convergencia en donde sea «raro» que $X_n(\omega)$ difiera mucho de $X(\omega)$, es decir, en donde estemos casi seguros de que $X_n(\omega)$ no diferirá mucho de $X(\omega)$.

Sea $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espacio de probabilidad y sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ y X una sucesión de variables aleatorias y una variable aleatoria respectivamente sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$. En estas condiciones tenemos la siguiente definición:

Definición 2.2.1 Decimos que la *sucesión* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de variables aleatorias converge casi seguramente a la variable aleatoria* X si existe un conjunto A en el σ-álgebra $\mathscr{A}$ tal que:

$i)\quad P(A^c) = 0$

y $\qquad ii)\quad \forall\ \omega \in A,\quad X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$.

o equivalentemente tenemos que:

Definición 2.2.2 La *sucesión* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de variables aleatorias converge casi seguramente a la variable aleatoria* X si:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \forall\, r \geq 1,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ni \forall\, n \geq N\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \tfrac{1}{r}\}) = 1$$

o bien

$$P(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \tfrac{1}{r}\}) = 1$$

y lo designamos por $X_n \xrightarrow{c.s} X$ o $X_n \xrightarrow{a.s} X$.

Observemos que en general, si la probabilidad P(A) es igual a uno, decimos que el evento A es casi seguro, no decimos seguro, ya que el único evento seguro es el evento Ω. Así, convergencia casi segura nos permite afirmar, que la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la variable aleatoria X, salvo en un conjunto de probabilidad cero. Además notemos que si modificamos la definición 2.2.2 de la siguiente manera:

$$X_n \xrightarrow{c.s} X$$

si

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \ni \forall\, n \geq N\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

o equivalentemente si

$$P(\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X| < \varepsilon\}) = 1$$

no nos servirá, debido a que la intersección no numerable de eventos no necesariamente está en la σ-álgebra $\mathscr{A}$ y en consecuencia la probabilidad de dicho evento podría no estar definida.

Antes de ver algunos criterios de convergencia para convergencia casi segura, veamos que diferencias existen entre los dos tipos de convergencia vistos hasta ahora.

Primero notemos que técnicamente la convergencia en probabilidad, es una convergencia de números entre cero y uno, mientras que la convergencia casi segura es una «convergencia de eventos» y se calcula la probabilidad sobre el evento límite. Ahora bien, intuitivamente la convergencia en probabilidad no asegura que la sucesión de variables aleatotrias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a la variable aleatoria X, y la convergencia casi segura, como su nombre lo indica, casi asegura que la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a la variable aleatoria X.

Criterios de convergencia

El siguiente lema nos brinda una condición suficiente para que una sucesión de variables aleatorias converja casi seguramente.

Lema 2.2.3 *Sean* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* X *una sucesión de variables aleatorias y una variable aleatoria respectivamente sobre* $(\Omega,\mathcal{A},P)$. *Si para todo número natural* r *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega \in \Omega \mid | X_n(\omega) - X(\omega) | \geq \frac{1}{r}\}\right)$$

converge, entonces

$$X_n \xrightarrow{c.s} X.$$

Propiedades de convergencia casi segura

Proposición 2.2.4 *Sea* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *un espacio de probabilidad y sean* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de variables aleatorias y* X *y* Y *dos variables aleatorias sobre* $(\Omega,\mathcal{A},P)$, *tales* *que* $X_n \xrightarrow{c.s} X$ *y* $Y_n \xrightarrow{c.s} Y$, *entonces tenemos que:*

i) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\qquad aX_n \xrightarrow{c.s} aX$

ii) $\qquad X_n + Y_n \xrightarrow{c.s} X + Y$

iii) $\qquad X_n Y_n \xrightarrow{c.s} X\,Y$

iv) Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(Y_n = 0) = P(Y = 0) = 0$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{c.s} \frac{X}{Y} \quad \blacksquare$$

2.3. Convergencia en distribución

Los dos tipos de convergencia que hemos visto hasta ahora, involucran directamente a la sucesión de variables aleatorias, pero existen otros tipos de convergencia de variables aleatorias, en donde no sucede así, como el que exponemos a continuación, que en lugar de tratar explicitamente con la sucesión de variables aleatorias, trata con la sucesión de funciones de distribución correspondientes, lo cual queremos estudiar, ya que nos interesa saber el comportamiento de las probabilidades

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \le x\})$$

para n **grande.**

Definición 2.3.1 **Sean** $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **y** X **una sucesión de variables aleatorias y una variable aleatoria respectivamente sobre el espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **y sean** $\{F_{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ **y** F_X **las funciones de distribución correspondientes. Decimos que** *la sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge en distribución a la variable aleatoria* X, **si para todo punto** x **de**

continuidad de la función F_X se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Xn}(x) = F_X(x)$$

y lo representaremos por:

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

o bien por:

$$\forall\, x \in \mathscr{C}(F_X), \qquad F_{Xn}(x) \longrightarrow F_X(x)$$

donde $\mathscr{C}(F_X)$ es el conjunto de puntos de continuidad de la función F_X.

Observemos que este tipo de convergencia, se refiere simplemente a la convergencia de funciones.

Ahora bien, la convergencia en distribución tiene una gran importancia, debido a que la función de distribución F_X va a permitir aproximar probabilidades que deberían de ser calculadas a partir de las funciones F_{Xn} y es precisamente este tipo de convergencia de variables aleatorias, el que da lugar al Teorema del Límite Central como veremos más adelante.

Por lo pronto, veamos algunos criterios de convergencia y algunas propiedades.

Criterios de convergencia

Teorema 2.3.2 *Sea $\{F_{Xn}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución y sea $\{\Phi_{Xn}\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones características correspondientes. Entonces:*

$$\forall\, x \in \mathscr{C}(F),\ F_{Xn}(x) \longrightarrow F(x) \iff \forall\, t \in \mathbb{R},\ \Phi_{Xn}(t) \longrightarrow \Phi(t)$$

donde la función Φ es continua en el punto $t = 0$ y es la función característica de la función F.

La importancia de este teorema radica en que el problema de encontrar la función de distribución límite de una sucesión de variables aleatorias, lo podemos resolver a través de la función de distribución límite de las funciones características correspondientes, debido a que conocemos la función de distribución límite de una variables aleatoria si y sólo si conocemos su función característica.

Propiedades de convergencia en distribución

Como ya vimos, la clase de variables aleatorias es cerrada bajo operaciones aritméticas de límites en probabilidad y casi seguros. Bueno, pues también resulta ser cerrada bajo límites en distribución en el caso particular en el que una de las variables aleatorias es degenerada, dicho sea de otra forma:

Proposición 2.3.3 *Si* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **y** $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ **son dos sucesiones de variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$**, tales que para algún número real** c**:**

$$Y_n \xrightarrow{D} c \quad \text{y} \quad X_n \xrightarrow{D} X$$

entonces

i) $$X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$$

ii) $$X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$$

iii) **si** $P(Y_n = 0) = 0$ **y** $c \neq 0$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{X}{c}.$$

3. RELACION ENTRE LOS DIFERENTES TIPOS DE CONVERGENCIA

3.1. Relación entre convergencia en probabilidad y convergencia casi segura

Habíamos dicho que convergencia en probabilidad no aseguraba que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergiera a la variable aleatoria X y que convergencia casi segura aseguraba que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergiera a una variable aleatoria X en un conjunto de probabilidad uno, entonces intuitivamente deberíamos tener que convergencia casi segura implique convergencia en probabilidad. Esto en efecto se cumple en virtud del siguiente teorema:

Teorema 3.1.1 *Si* $X_n \xrightarrow{c.s} X$ *entonces* $X_n \xrightarrow{P} X$.

A pesar de que el inverso no es cierto, es decir, que si una sucesión de variables aleatorias converge en probabilidad, no implica que dicha sucesión converja casi seguramente, sí podemos afirmar que al menos existe una subsucesión que converge casi seguramente.

Teorema 3.1.2 *Si*

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

entonces existe una subsucesión $\{X_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ *de la sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que:*

$$X_{nk} \xrightarrow{c.s.} X.$$

Como convergencia casi segura nos dice cual es el comportamiento de la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ y convergencia en probabilidad nos dice cual es el comportamiento de la sucesión de funciones de distribución $\{F_{Xn}\}_{n=1}^{\infty}$, dado el teorema 3.1.1, intuitivamente tenemos que si la sucesión

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ se comporta bien, en el sentido de que la sucesión converja, entonces la sucesión $\{F_{Xn}\}_{n=1}^{\infty}$ también convergerá; sin embargo, si la sucesión $\{F_{Xn}\}_{n=1}^{\infty}$ converge, no hay garantía de que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converja.

3.2. <u>Relación entre convergencia en probabilidad y convergencia en distribución</u>

Teorema 3.2.1 *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias. En estas condiciones, si*

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{D} X.$$

Obviamente, este teorema implica que convergencia en distribución es más débil que convergencia en probabilidad (y por lo tanto, también que convergencia casi segura), sin embargo, en el caso en el que la variable aleatoria X sea degenerada, los dos tipos de convergencia son equivalentes.

Corolario 3.2.2 *Para algún número real c*

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} F_{Xn}(x) = \begin{cases} \text{si } x < c & 0 \\ \text{si } x \geq c & 1 \end{cases}$$

En general, el hecho de que una sucesión de variables aleatorias converja en distribución no nos brinda mayor información acerca del comportamiento límite de la sucesión de variables aleatorias, sin embargo, para efectos de este trabajo, ésto no nos afecta, debido a que a nosotros lo que realmente nos va a interesar es el comportamiento límite de las probabilidades:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \leq x\})$$

más que el comportamiento límite de las reglas de correspondencia de las variables aleatorias X_n.

4. PRINCIPALES RESULTADOS DE LOS DIFERENTES TIPOS DE CONVERGENCIA

Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales. Definamos una nueva sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal forma que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n}{b_n} .$$

Los resultados que veremos a continuación se refieren a la convergencia de esta nueva sucesión de variables aleatorias. En general, nos interesa saber para qué sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y qué condiciones debe cumplir la sucesión $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ para que ésta converja. Estos resultados los podemos clasificar en tres grupos, dependiendo bajo que tipo de convergencia, la sucesión $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja. Así, si dicha sucesión converge a cero en probabilidad o casi seguramente, obtenemos respectivamente las siguientes familias de resultados:

la *Ley Débil de los Grandes Números*
y la *Ley Fuerte de los Grandes Números*

y si al tipo de convergencia al que nos referimos, es la convergencia en distribución, en el caso particular en el que la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a una variable aleatoria normal estandar, obtenemos uno de los resultados más importantes de la teoría de probabilidad, el *Teorema del Límite Central*.

Si la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a una variable aleatoria que no sea una normal estandar, entonces obtenemos el conjunto de resultados llamados problemas del *Límite No Central*. Sin embargo, por el momento, nosotros nos ocuparemos únicamente del *Teorema del Límite Central*.

4.1. La ley débil de los grandes números

Definición 4.1.1 Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias. Decimos que *la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisface la Ley Débil de los Grandes Números Generalizada* si existen dos sucesiones de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que cuando el número n tiende a infinito:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - a_i}{b_n} \xrightarrow{P} 0 .$$

Sin embargo, nosotros solamente analizaremos el caso particular en el que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{y} \quad b_n = n .$$

En este caso, diremos simplemente que:

Definición 4.1.2 *La sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ de variables aleatorias satisface la Ley Débil de los Grandes Números* si cuando n tiende a infinito:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n} \xrightarrow{P} 0$$

es decir, si: $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) | > \varepsilon\}) = 0$$

A continuación, veremos algunos resultados que nos dicen bajo que condiciones una sucesión de variables aleatorias satisface la *Ley Débil de los Grandes Números*.

Teorema de Khintchine 4.1.2 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con esperanza finita, entonces la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$*

satisface la Ley Débil de los Grandes Números.

Vale la pena recordar que si dos variables aleatorias tienen la misma distribución, sus momentos serán iguales. Entonces, en este caso tenemos que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad E(X_n) = c < \infty$$

por lo que la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfacerá la *Ley Débil de los Grandes Números* **si:**

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - c \right| > \varepsilon\}) = 0$$

Ahora bien, si quitamos la hipótesis de que las variables aleatorias se distribuyan identicamente, pero les pedimos que sean de varianza uniformemente acotada, obtenemos el teorema que enunciamos a continuación y que recibe el nombre de *Ley Débil de los Grandes Números de Tchebyschev.*

Teorema 4.1.4 *Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y de varianza uniformemente acotada,* **es decir, si existe un número real M tal que:**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad \mathrm{Var}(X_n) \le M\ ,$$

entonces la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisface la Ley Débil de los Grandes Números.

Los siguientes dos resultados son casos particulares del teorema 4.1.4 .

Corolario 4.1.5 (Ley Débil de los Grandes Números de Bernoulli) *Sea n_A el número de ocurrencias de un evento* A *en* n *realizaciones independientes de un experimento, entonces cuando n tiende a infinito:*

$$\frac{n_A}{n} - P(A) \xrightarrow{\ P\ } 0\ .$$

Definición 4.1.6 Definimos la variable aleatoria X_i como:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el evento A ocurrió en la i-ésima realización} \\ 0 & \text{si el evento A no ocurrió en la i-ésima realización} \end{cases}$$

y consideremos que si $0 \leq \rho_i \leq 1$

$$P(X_i = 1) = \rho_i \qquad \text{y} \qquad P(X_i = 0) = 1 - \rho_i$$

entonces decimos que X_i es una *variable aleatoria Bernoulli* con parámetro ρ_i .

Dada la definición 4.1.6 tendremos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{n_A}{n}$$

y de esta forma, podremos expresar este corolario también de la siguiente forma:

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas como una variable aleatoria Bernoulli con parámetro ρ, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \rho \xrightarrow{P} 0$$

es decir, que la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisface la *Ley Débil de los Grandes Números.*

El siguiente resultado es un poco más general que el anterior.

Corolario 4.1.7 (Ley Débil de los Grandes Números de Poisson) *Sea ρ_i la probabilidad de que ocurra un evento A en la i-ésima realización de n ensayos independientes, entonces si n* *tiende a infinito:*

$$\frac{n_A}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n} \xrightarrow{P} 0$$

donde n_A *está definida como en el Corolario* **4.1.8** .

Realizando el mismo razonamiento que en el resultado anterior, este corolario también lo podemos expresar como sigue:

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes tal que para todo número natural i, la variable aleatoria* X_i *es una variable aleatoria Bernoulli con parámetro* p_i, *entonces cuando n tiende a infinito:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n} \xrightarrow{P} 0$$

es decir, que la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ **satisface la** ***Ley Débil de los Grandes Números.***

En ambos casos, la cota de la varianza es un cuarto.

Si deseamos también quitar la hipótesis de que las variables aleatorias sean independientes, la condición suficiente que necesitamos para que la sucesión satisfaga la ***Ley Débil de los Grandes Números*** **nos la da el siguiente teorema:**

Teorema 4.1.8 *Una sucesión de variables aleatorias* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *satisface la Ley Débil de los Grandes Números si cuando n tiende a infinito:*

$$\mathrm{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right] \longrightarrow 0$$

Esta condición recibe el nombre de Condición de Markov.

Por último, presentamos el teorema de Kolmogorov que nos da una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de variables aleatorias arbitraria satisfaga la *Ley Débil de los Grandes Números.*

Teorema 4.1.9 *La sucesión de variables aleatorias* $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *satisface la Ley Débil de los Grandes Números si y solamente si cuando n tiende a infinito:*

$$E\left[\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E(X_k) \right)^2}{n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E(X_k) \right)^2} \right] \longrightarrow 0$$

(Ver lema 2.1.2).

4.2. Ley fuerte de los grandes números

Definición 4.2.1 **Sea** $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ **una sucesión de variables aleatorias. Decimos que** ***la sucesión*** $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ ***satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números Generalizada*** **, si existen dos sucesiones de números reales** $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ **y** $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ **tales que cuando el número n tiende a infinito:**

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - a_i}{b_n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Al igual que en la sección anterior, presentaremos solamente el caso en el que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad y \quad b_n = n$$

de esta forma, tenemos simplemente que:

Definición 4.2.2 *La sucesión* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de variables aleatorias satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números* si cuando n tiende a infinito:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

o equivalentemente si:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \exists r \geq 1 \ni \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(\omega) - E(X_i)}{n} \mid \geq \frac{1}{r}\}) = 0$$

Veamos ahora, bajo que condiciones una sucesión de variables aleatorias satisface esta Ley.

Teorema de Kolmogorov 4.2.3 *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas satisfaga la Ley Fuerte de los Grandes Números, es la existencia de las esperansas,* (recordemos que como las variables aleatorias se distribuyen identicamente, entonces todas tendrán la misma esperansa) es decir, que si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias tal que

$$\forall\ i \in \mathbb{N} \qquad E(X_i) = c < \infty$$

entonces cuando n tiende:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - c \xrightarrow{c.s.} 0 .$$

El siguiente resultado también se debe a Kolmogorov.

Teorema 4.2.4 *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes y de varianza finita. Esta sucesión* *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números, si la siguiente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}(X_i)$$

converge.

Corolario 4.2.5 *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes y de varianza uniformemente acotada,* **es decir, que existe un número real** M **tal que para todo número** i: $\operatorname{Var}(X_i) \leq M$ *, entonces la sucesión* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Este último resultado nos permite afirmar que las sucesiones de variables aleatorias independientes $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ **y** $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ **con distribuciones** *Bernoulli* **con parámetro** p **y** *Bernoulli* **con parámetro** p_i **respectivamente, (ver corolarios 4.1.5 y 4.1.6) también satisfacen la** *Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Finalmente tenemos que:

Teorema 4.2.6 *Una sucesión de variables aleatorias arbitraria satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números, si para todo número natural r, la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) | > \frac{1}{r}\})$$

converge **(ver lema 2.2.3).**

Evidentemente, si una sucesión de variables aleatorias satisface la *Ley Fuerte de los Grandes Números*, **también satisface la** *Ley Débil de los Grandes Números*, **dado que convergencia casi segura implica convergencia en probabildad (ver teorema 3.1.1).**

4.3. Teorema del límite central

Definición 4.3.1 Decimos que *la sucesión de variables aleatorias* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *tiene la propiedad del Límite Central*, si existen dos sucesiones de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que si:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n}{b_n}$$

entonces cuando n tiende a infinito:

$$F_{Y_n}(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-y^2/2}\, dy$$

es decir, que:

$$Y_n \xrightarrow{D} Y$$

donde Y es una variable aleatoria normal con media cero y varianza unitaria (una variable aleatoria normal estandar). Aquí presentamos sólo el caso particular en el que las sucesiones de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ tienen la siguiente forma:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{y} \quad b_n = \left[\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \right]^{1/2}$$

lo cual parece bastante natural, en virtud de que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad E(Y_n) = 0 \quad \text{y} \quad Var(Y_n) = 1$$

y de esta forma tendremos que cuando n tiende a infinito:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k))}{\left[\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \right]^{1/2}} \xrightarrow{D} Y$$

donde Y es una variable aleatoria normal estandar.

De Moivre y Laplace resolvieron el caso en el que la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con distribución Bernoulli con parámetro p. Este fue el primer resultado al que se le dió el nombre de *Teorema del Límite Central*.

Veamos ahora, bajo que criterios una sucesión de variables aleatorias cumple con la propiedad del Límite Central.

El primer teorema que enunciamos, nos brindará un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de variables aleatorias independientes tenga la propiedad mencionada.

Teorema de Lindeberg-Feller 4.3.2 *La sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ de variables aleatorias independientes con esperansa μ_n y varianza σ_n^2 respectivamente, tiene la propiedad del Límite Central y además:*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i} \frac{\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = 0$$

si y sólo si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \right]^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_A (x - \mu_k)^2 \, dF_k(x) = 1$$

donde

$$A = \{x \mid |x - \mu_k| \le \varepsilon \, (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)^{1/2} \}.$$

Sin embargo, este teorema no es sencillo de aplicar, por lo cual a continuación simplemente daremos algunas condiciones suficientes.

Teorema de Liapunov 4.3.3 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tal que para todo número* *natural n, existe un número γ positivo para el cual:*

$$E(|X_k - \mu_k|^{2+\gamma})$$

existe. En estas condiciones si:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \right]^{-(1 + \gamma/2)} \sum_{k=1}^{n} E(\ |X_k - \mu_k|^{2+\gamma}\ ) = 0$$

la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad del Límite Central.

Teorema 4.3.4 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con función de distribución F_X y sea:*

$$E(X) = \mu \qquad y \qquad 0 < Var(X) = \sigma^2 < \infty$$

entonces la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad del Límite Central.

En este caso tenemos que si:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{(n\sigma)^{1/2}}$$

entonces

$$Y_n \xrightarrow{D} Y$$

donde Y es una variable aleatoria normal estandar.

5. OTROS EJEMPLOS DE CONVERGENCIA EN DISTRIBUCION

Hasta el momento sólo hemos analizado el caso en el que la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n}{b_n}$$

converge en distribución.

Sin embargo, existen muchas otras sucesiones de variables aleatorias para las cuales no solamente tiene sentido, sino una gran importancia el saber a donde convergen en distribución. Veamos un par de ejemplos.

5.1. Convergencia de la mediana

Consideremos las n variables aleatorias $X_{i:n}$ definidas en el párrafo 1.6. v), que reciben el nombre de *Estadísticas de Orden*.

Definición 5.1 Si la función Y_n definida del conjunto Ω al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es tal que:

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, [\tfrac{n}{2}]\} \ \ \text{y}$$

$$\forall\, j \in \{[\tfrac{n}{2}] + 1, [\tfrac{n}{2}] + 2, \ldots, n\}$$

$$X_{i:n}(\omega) \le Y_n(w) \le X_{j:n}(\omega)$$

es decir, que el valor $Y_n(\omega)$ es aquel valor para el cual existen tantos valores más chicos como más grandes que él de los n valores $X_{i:n}(\omega)$ ($Y_n(\omega)$ es el valor intermedio), entonces *la función* Y_n, que a su vez también es variable aleatoria, recibe el nombre de *Mediana*.

Sea $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias donde para todo número natural n, la función Y_n represente la mediana, entonces si $Y_n \xrightarrow{D} Y$, tendríamos que:

$\forall\ y \in \mathscr{C}(F_Y)$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \leq y\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq y\}) = F_Y(y)$$

y así, para n suficientemente grande podríamos conocer con que probabilidad la mitad de los valores $\{X_{i:n}\}_{n=1}^{\infty}$ son menores que un cierto valor real y .

5.2. Convergencia del máximo y del mínimo

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias. Ahora, consideremos la sucesión de variables aleatorias $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde:

$$\forall\ \omega \in \Omega,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \quad Z_n(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

entonces si $Z_n \xrightarrow{D} Z$, podríamos conocer con que probabilidad todos los valores $X_n(\omega)$ son menores que un cierto número real para n suficientemente grande.

A continuación, expondremos porque nos puede interesar saber si la sucesión de variables aleatorias $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución o no.

Existen una gran cantidad de problemas, en donde al realizar una serie de observaciones (o mediciones), la solución de dichos problemas queda dada en términos de los valores extremos observados; expresado de otra forma, si

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

representan las observaciones, entonces la solución del problema estará dada en términos de Z_n o de W_n donde:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad Z_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

y

$$V_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Veamos algunos ejemplos.

5.2.1. Ingeniería Civil

Deseamos saber a que altura se debe construir un dique para evitar que se desborde el agua de un determinado río. Podríamos medir el nivel del agua diariamente durante un cierto período, sin embargo, no podemos saber como se va a comportar el nivel del agua en el futuro, entonces para nosotros este comportamiento será aleatorio. Así, si por ejemplo, X_i es la variable aleatoria que representa el nivel del agua el i-ésimo día de los próximos cincuenta años, entonces la altura del dique deberá ser mayor al máximo nivel que alcance el río en los próximos cincuenta años. De esta forma, nos preguntaríamos, por la probabilidad

$$P(Z_n \leq a)$$

donde el número a sería la altura del dique y

$$Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Ahora, supongamos que queremos utilizar el río como fuente de energía. En este caso, estaríamos interesados en saber que tanto bajará el nivel del río, así nos tendríamos que preguntar por la probabilidad

$$P(V_n > a)$$

donde

$$V_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y habría que especificar el valor del número a, que representaría el nivel del río mínimo requerido.

5.2.2. Ingeniería Metalúrgica

Si tuviéramos un material absolutamente homogeneo, éste se rompería bajo presión según una ley determinística. Sin embargo, no existe un material absolutamente homogeneo. De hecho, la experiencia en ingeniería demuestra que materiales producidos bajo los mismos procedimientos se rompen de manera distinta. Esto se debe a que cada punto o al menos cada área pequeña tiene una resistencia aleatoria y de esta forma, la fuerza que se necesita para romper el material, variará de punto a punto. Evidentemente, el punto más débil determinará la resistencia de todo el material.

Por ejemplo, supongamos que tenemos una hoja de metal rectangular y que la dividimos en n^2 partes iguales, dividiendo cada lado en n partes iguales. Sea X_j la fuerza de resistencia de la j-ésima parte. Como la hoja se romperá en el momento en el que se rompa una de sus partes, la más débil, la fuerza de resistencia de toda la hoja estará dada por:

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Observemos que entre más grande sea el número de partes en las que dividamos cada lado, podremos localizar con mayor precisión el punto o el área más débil.

5.2.3. Falla de equipo

Supongamos que queremos determinar el período de garantía de una máquina que falla en el momento en el cual, alguna de las piezas que la componen falla. Si nos preguntamos por el tiempo que tarda en fallar la máquina, es decir, el tiempo que tarda en fallar una de las n piezas que constituyen la máquina, el problema se reduce a preguntarnos por el tiempo que tarda en fallar la pieza más débil. Representemos el tiempo que tarda en fallar la i-ésima pieza con X_i, entonces para resolver el problema, bastaría con conocer como se comporta la probabilidad

$$P(W_n > a)$$

donde

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

y el número a representaría el tiempo de garantía.

Ahora, supongamos que la máquina requiere de mantenimiento cada determinado período de tiempo y que todas sus piezas pueden recibir servicio simultaneamente. Si nos preguntamos por el tiempo en que la máquina recibe mantenimiento, éste queda determinado , por aquella pieza que requiera el servicio más largo. De esta forma, si X_i representa el tiempo de servicio de la i-ésima pieza, el comportamiento del tiempo de mantenimiento de la máquina estaría dado por la probabilidad

$$P(Z_n \le t)$$

donde

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) .$$

Si el número n es muy grande, tendremos una máquina constituída por un gran número de piezas.

5.2.4. Agricultura

Muchos productos agrícolas sólo pueden ser producidos bajo ciertas características climatológicas, por ejemplo, requieren de una temperatura y de una cantidad de lluvia mínimas. Llamemos a X_i la temperatura (cantidad de lluvia) del i-ésimo día en una determinada zona, entonces X_i sería una variable aleatoria, debido a que no sabemos con exactitud que valor tomará. Así, para decidir si se puede cultivar una nueva planta en dicha zona, necesitaríamos conocer el valor de la probabilidad

$$P(V_n > a)$$

donde

$$V_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) .$$

De igual forma, como necesitamos conocer las características climatológicas mínimas, también nos interesa conocer las características climatológicas máximas, en virtud de que si la temperatura aumenta mucho o si llueve demasiado, la cosecha se echará a perder. Por lo tanto, también necesitamos conocer la probabilidad

$$P(Z_n \leq a)$$

donde

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) .$$

El número a lo tendríamos que determinar nosotros, dependiendo de la planta que se vaya a cultivar.

3.2.5. Contaminación

La contaminación en el aire se expresa en términos de la proporción de un contaminante específico en el aire y generalmente esta proporción se mide en intervalos de tiempo iguales (por ejemplo cada cinco minutos). Obviamente, deseamos que la proporción de contaminante no sobrepase un cierto límite b, que podría llegar a ser mortal.

Así, si llamamos a X_i la proporción de contaminante en el i-ésimo intervalo de tiempo, entonces será suficiente con que analicemos como se comporta

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

es decir, la probabilidad

$$P(Z_n \leq b).$$

5.2.6. Economía

Supongamos que un individuo trabaja siempre ocho horas diarias y dependiendo de la cantidad de trabajo que haya, trabaja un cierto número de horas extras. Si solamente trabajara ocho horas, su sueldo mensual estaría totalmente determinado, pero dado que trabaja horas extras y él no sabe cuantas trabajará en un mes, él considera que su sueldo mensual se comporta aleatoriamente y está interesado en saber si por lo menos obtendrá una cantidad S de dinero mensualmente (mayor que la cantidad que recibe sólo por ocho horas).

Si llamamos a X_i el número de horas que trabaja el individuo el i-ésimo día del mes, entonces la cantidad S de dinero, la podrá determinar a partir de kV_n, donde el número k es el importe de lo que recibe por cada hora de trabajo y

$$V_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

por lo tanto, él desea conocer como se comporta la probabilidad

$$P(kV_n > \frac{S}{30})$$

suponiendo que el mes tiene treinta días.

5.2.7. Líneas de espera

Supongamos que en un banco se tiene una línea de espera y r cajas de servicio. En el momento en el que se desocupa una caja, pasa un cliente. Sabemos que se pueden atender λ número de clientes por hora, pero como el número de clientes que llegan a la cola en cada hora no es fijo, deseamos averiguar si el número de cajas que se tienen en servicio son suficientes o no. Llamemos a X_i el número de clientes que llegan al banco entre la $(i-1)$-ésima y la i-ésima hora. Entonces, para saber si las r cajas que se tienen en servicio son suficientes, necesitaríamos estudiar simplemente como se comporta la probabilidad

$$P(Z_n \leq \lambda)$$

donde

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

o bien si queremos saber si podemos prescindir de una o varias de las r cajas, habría que conocer

$$P(W_n > \lambda).$$

donde

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

5.2.8. Muestreo

En muestreo, se realizan una serie muy grande de observaciones y por lo general, es importante saber que tan pequeña o grande será la magnitud de dichas observaciones, es decir, si X_i es la magnitud de la i-ésima observación, se desea conocer:

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

y

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) .$$

Después de que tomamos la muestra, ésta la utilizamos para calcular estimadores de las características de aquello que hayamos observado y queremos que éstos sean lo más exactos posibles, de aquí que nos interese analizar el estimador mínimo y el máximo.

En todos los ejemplos presentados, las observaciones:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

son variables aleatorias, entonces Z_n y V_n también serán variables aleatorias (ver propiedades de variables aleatorias 1.6.υ.) y por lo tanto, podremos hablar de que las variables Z_n y V_n tomen un cierto conjunto de valores sólo en términos probabilísticos. Así, en todos los problemas planteados, estábamos interesados en conocer las probabilidades

$$P(Z_n \leq x) \quad \text{y} \quad P(V_n > x).$$

Entonces, dadas estas condiciones, lo que nos gustaría encontrar o aproximar, son las funciones de distribución H_n y L_n correspondientes a las variables aleatorias Z_n y V_n respectivamente, es decir:

$$H_n(x) = P(Z_n \leq x) \quad \text{y} \quad L_n(x) = P(V_n \leq x)$$

para lo cual, en principio, tendríamos que encontrar las funciones de distribución de las variables aleatorias

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

y a partir de éstas encontrar las funciones de distribución de las variables aleatorias Z_n y V_n. Pero, notemos que en todos los ejemplos, el número de observaciones es muy grande, por lo cual el problema de encontrar las funciones H_n y L_n puede dificultarse . Sin embargo, si las sucesiones de variables aleatorias $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen en distribución a las variables aleatorias Z y W con funciones de distribución H y L respectivamente, a partir de éstas podríamos aproximar las probabilidades

$$P(Z_n \leq x) \quad y \quad P(W_n \leq x) .$$

Hagamos un pequeño paréntesis.

Por lo general, el comportamiento de cualquier sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es muy inestable. Si recordamos las tres familias de resultados que enunciamos en la sección 4 (la *Ley Débil de los Grandes Números* , la *Ley Fuerte de los Grandes Números* y el *Teorema del Límite Central*), correspondientes a los tres tipos de convergencia que definimos en la sección 2 (convergencia en probabilidad, casi segura y en distribución respectivamente), veremos que en lugar de analizar simplemente como converge la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, estudiamos la convergencia de la sucesión de variables aleatorias

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

que son transformaciones de las primeras. Esto se debe a que como los términos a_n y b_n son *no aleatorios*, el comportamiento de esta nueva sucesión es más estable que el de la sucesión original (claro, dependiendo de la elección de las sucesiones de términos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$) y por lo tanto, puede ser más «sencillo» encontrar condiciones sobre esta nueva sucesión para que converja ya sea en probabilidad, casi seguramente o en distribución.

Volviendo a nuestro problema, si hacemos una analogía con el problema de la sección 4, lo que queremos es encontrar dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y ver bajo que condiciones la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Y_n = \frac{Z_n - a_n}{b_n}$$

converge en distribución.

Así, si logramos encontrar números reales a_n y b_n tales que conforme más grande sea el número n, la variable aleatoria definida como:

$$Y_n = \frac{Z_n - a_n}{b_n}$$

(que es una transformación de la variable aleatoria Z_n) dependa cada vez menos del número n, lo cual podemos expresar de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{1}{b_n}(Z_n - a_n) \le z\right] = \lim_{n\to\infty} H_n(a_n + b_n z) = H(z)$$

para un número z fijo, entonces el problema sería ahora encontrar dichas sucesiones de números reales y nos olvidaríamos de las funciones de distribución de cada una de las variables aleatorias X_i. Este problema no tiene porque ser más sencillo que el primero (aunque la nueva sucesión $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenga un comportamiento más estable), sin embargo lo será si desarrollamos una teoría asintótica apropiada para H_n.

Analogamente, para determinar el comportamiento de la función de distribución L_n de la variable aleatoria W_n, si llamamos:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad U_n = \frac{W_n - c_n}{d_n}$$

queremos saber para que sucesiones de números reales $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ y bajo que condiciones la sucesión de variables aleatorias $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución.

Por último, observemos que a cada uno de los ejemplos expuestos, está asociado un problema de máximo y uno de mínimo, lo cual en general se puede realizar, es decir, a todo problema de máximo le podemos asociar uno de mínimo y viceversa, y más aún, tenemos que la teoría que se puede desarrollar para la variable aleatoria Z_n es idéntica a la de la variable aleatoria V_n, dado que:

$$\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = -\min\{-X_1, -X_2, \ldots, -X_n\}$$

o bien

$$\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \ldots, -X_n\}.$$

CAPITULO II

CONVERGENCIA EN DISTRIBUCION DEL MAXIMO Y EL MINIMO DE UNA SUCESION DE VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS

1. INTRODUCCION

En este capítulo vamos a analizar la convergencia en distribución del máximo y el mínimo de una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas. A lo largo del cual, utilizaremos la notación introducida en esta sección a menos que se especifique otra cosa.

Sean $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias sobre dicho espacio independientes e identicamente distribuídas con función de distribución F. Construyamos dos nuevas sucesiones de variables aleatorias $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la forma siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y

$$V_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y sean $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ las funciones de distribución correspondientes. Evidentemente tenemos que:

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$H_n(x) = P(Z_n \le x) = P(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x)$$

y

$$1 - L_n(x) = P(V_n > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x)$$

y dado que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes e identicamente distribuídas tenemos que:

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$H_n(x) = F^n(x) \qquad 1.1$$

y

$$1 - L_n(x) = (1 - F(x))^n$$

entonces

$$L_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n . \qquad 1.2$$

El problema que estudiaremos en este capítulo, consiste en encontrar condiciones sobre la función de distribución F, que garanticen la existencia de sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde para todo número natural n los números b_n y d_n sean positivos, los límites:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x) \qquad 1.3$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(c_n + d_n x) = L(x) \qquad 1.4$$

existan para todo punto de continuidad x de las funciones H y L y donde éstas sean funciones de distribución no degeneradas; en otras palabras, lo que queremos es encontrar condiciones sobre la función F, bajo las cuales las sucesiones $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ puedan ser estandarizadas por términos no aleatorios $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal forma que las sucesiones de variables aleatorias estandarizadas $\left\{ \frac{Z_n - a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{ \frac{W_n - c_n}{d_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ converjan en distribución a una variable aleatoria no degenerada. Observemos que dadas las relaciones 1.1 y

1.2 las expresiones 1.3 y 1.4 son equivalentes a:

$$\forall\, x \in \mathcal{C}(H) \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + bx_n) = H(x) \qquad 1.5$$

$$\forall\, x \in \mathcal{C}(L) \qquad \lim_{n\to\infty} [1 - F(a_n + b_n x)]^n = 1 - L(x)\ . \qquad 1.6$$

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias como la descrita al principio de esta sección y sean g una función real del vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y G una función de distribución no degenerada. En estas condiciones, introduzcamos la siguiente definición:

Definición 1.1 Decimos que *la función* F *es atraída por la función de distribución* G , si existen sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, con b_n mayor que cero para todo natural n, tales que:

$$\forall\, x \in \mathcal{C}(G) \qquad \lim_{n\to\infty} P[\,g(X_1, \ldots, X_n) \le a_n + b_n x] = G(x)\ .$$

para toda función medible g.

Al conjunto de funciones de distribución que son atraídas por la función G se la llama *dominio de atracción* y lo representamos por:

$$F \in \mathcal{D}(G)\ .$$

A nosotros nos interesa estudiar los casos particulares en los que la función g está dada por:

$$g(X_1, \ldots, X_n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y

$$g(X_1, \ldots, X_n) = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

de esta forma si:

$$\forall\, x \in \mathcal{C}(H) \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(Z_n \le a_n + b_n x] = H(x) \qquad 1.7$$

diremos que la función F está en el dominio de atracción de la función H; además diremos que la función F está en el *dominio de atracción de la función de distribución* L, si existen sucesiones de números reales $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde para todo número natural n el número d_n es positivo, tales que

$$\forall\, x \in \mathscr{E}(L) \qquad \lim_{n\to\infty} [1 - F(a_n + b_n x)]^n = 1 - L(x) \qquad 1.8$$

y lo representamos como:

$$F \in \mathscr{D}(H) \quad \text{y} \quad F \in \mathscr{D}(L)$$

respectivamente.

Como veremos en el transcurso de este capítulo, las únicas funciones de distribución límite posibles para la sucesión de funciones $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ evaluadas en los puntos $a_n + b_n x$ respectivamente, (donde a_n y b_n son constantes convenientemente escogidas), son las siguientes[1]:

si γ es una constante positiva

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{si } x \le 0 & 0 \\ \text{si } x > 0 & exp(-x^{-\gamma}) \end{cases} \qquad 1.9$$

---

[1] La notación que utilizamos para las funciones de distribución límite $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$ se debe a que son casos particulares de la función de distribución de von Mises cuya regla de correspondencia está dada por:

$$\text{si } \tau \neq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_\tau(x) = \exp(-(1 + \tau x)^{-1/\tau})$$

$$\text{si } \tau = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_\tau(x) = \lim_{\tau\to 0} H_\tau(x).$$

A partir de esta función podemos obtener las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$ transladadas tomando:

$\gamma = |1/\tau|$, τ positivo, τ negativo y $\tau = 0$ respectivamente, es decir:

$$\text{si } \tau > 0 \qquad H_{1/\gamma}(x) = H_{1,\gamma}(1 + x)$$

$$\text{si } \tau < 0 \qquad H_{-1/\gamma}(x) = H_{2,\gamma}(1 + x)$$

$$\text{y si } \tau = 0 \qquad H_{1/\gamma}(x) = H_{3,0}(x).$$

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & exp(-(-x)^{\gamma}) \\ \text{si } x \geq 0 & 1 \end{cases} \qquad 1.10$$

y

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad H_{3,0}(x) = exp(-e^{-x}) \,. \qquad 1.11$$

Y las únicas funciones de distribución límite posibles para la sucesión de funciones $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ evaluadas en los puntos $c_n + d_n x$ respectivamente, son las siguientes:

si γ es una constante positiva

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & 1 - exp(-(-x)^{-\gamma}) \\ \text{si } x \geq 0 & 1 \end{cases} \qquad 1.12$$

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} \text{si } x \leq 0 & 0 \\ \text{si } x > 0 & 1 - exp(-x^{\gamma}) \end{cases} \qquad 1.13$$

y

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad L_{3,0}(x) = 1 - exp(-e^{x}) \,. \qquad 1.14$$

Aquí vale la pena observar, que el problema que queremos resolver, es decir, el ver bajo qué condiciones sobre la sucesión de variables aleatorias $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y para qué sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a una variable aleatoria cuya función de distribución sea $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$, dada la definición 1.1, lo podemos traducir como: ver bajo qué condiciones la función de distribución F está en el dominio de atracción de alguna de las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n + b_n x) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x)$$

donde la función H puede ser $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$.

Antes de continuar con la exposición de nuestro problema, veamos brevemente cómo se resolvió éste a través del tiempo y quienes fueron los principales autores. En 1927, M. Fréchet, encontró que las funciones $H_{1,\gamma}$ y $H_{2,\gamma}$ eran funciones de distribución límite factibles para la sucesión $\{F_n(b_n x)\}_{n=1}^{\infty}$. En 1928, R. A. Fisher y L. H. Tippet establecieron que las únicas funciones de distribución límite posibles para la sucesión $\{F_n(a_n + b_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ eran precisamente las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$. Un poco más tarde, en 1936, von Mises a través de un estudio sistemático de las funciones de distribución límite correspondientes a la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, logró deducir algunas condiciones suficientes para que las funciones de distribución límite de la expresión 1.5 fueran $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$; pero no fue sino hasta 1943, cuando Gnedenko publica el primer trabajo completo acerca del problema planteado. En él, no sólo demuestra que las únicas funciones de distribución límite son las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$, sino que además da un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que la función F esté en el dominio de atracción de las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$. Sin embargo en el caso de la función $H_{3,0}$, Gnedenko simplemente garantiza que la existencia de una función h, con ciertas características, (que satisfaga el límite 6.3.17) es una condición necesaria y suficiente para que la función F esté en el dominio de atracción de $H_{3,0}$. La siguiente contribución importante fue hasta 1970 o 1971, cuando de Haan encontró la función h en forma explícita (aquí es la función R dada en la expresión 6.3.2). De cualquier forma, desde el trabajo publicado por Gnedenko, muchos matemáticos como J. Galambos, Mejzler, Feller, Poyla, Gumbel, Pickands, Cramer, Marcus, etc. han trabajado sobre este problema encontrando otras condiciones para que $F \in \mathcal{D}(H)$, han estudiado la velocidad de convergencia, la convergencia uniforme, la convergencia de transformaciones de la sucesión de máximos, etc. Todos estos últimos resultados, que no presentamos en este trabajo, están incluídos en el libro de J. Galambos, «Teoría Asintótica de Estadísticas de Orden Extremas».

Nosotros seguiremos el planteamiento de Gnedenko y lo resolveremos con las técnicas y procedimientos de un trabajo más reciente de J. Galambos de 1978 (el libro citado en el párrafo anterior).

Así, el objetivo de este capítulo, es demostrar que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$, $H_{3,0}$, $L_{1,\gamma}$, $L_{2,\gamma}$ y $L_{3,0}$ son las únicas funciones de distribución límite de las sucesiones de variables aleatorias $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ respectivamente y daremos condiciones necerias y suficientes para que la función de distribución F esté en el dominio de atracción de las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$, $H_{3,0}$, $L_{1,\gamma}$, $L_{2,\gamma}$ y $L_{3,0}$. Además daremos criterios para construir las sucesiones de términos no aleatorios $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. Todo ésto lo realizaremos en las secciones 5 y 6. Pero primero, en las secciones 2, 3 y 4, estudiaremos una serie de resultados, que además de facilitarnos las demostraciones de las secciones 5 y 6, nos ayudarán a analizar la estructura de las sucesiones de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ y de las funciones de distribución límite H y L. En el siguiente capítulo, analizaremos una serie de ejemplos de sucesiones de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas para aplicar los resultados estudiados a lo largo de este capítulo.

Para concluir esta primera sección, queremos recalcar que a todo problema de máximo, está asociado uno de mínimo y que si lo tenemos resuelto para el primero, lo tendremos resuelto para el segundo, debido a que:

$$\min\{X_i\}_{i=1}^{n} = -\max\{-X_i\}_{i=1}^{n} .$$

En el transcurso de este capítulo, resolveremos siempre el problema planteado para la sucesión $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de máximos y en general, simplemente enunciaremos los resultados para la sucesión de mínimos $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$, ya que a partir de la función de distribución límite H^- del máximo Z^-, donde

$$Z_n^- = \max\{-X_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{D} Z^-$$

y

$$H_n^-(x) = P(Z_n^- \leq x) \xrightarrow{D} H^-(x)$$

podemos encontrar la función de distribución límite L del mínimo W de la siguiente forma: evidentemente la siguiente cadena de igualdades se cumple:

$$H_n^-(x) = P(Z_n^- \leq x) = P^n(-X_i \leq x) = P^n(X_i > x)$$
$$= [1 - P(X_i < -x)]^n$$

por la ecuación 1.2 :

$$H_n^-(-x) = 1 - L_n(x)$$

y considerando las ecuaciones 1.5 y 1.6 :

$$H^-(-x) = 1 - L(x)$$

por lo tanto:

$$L(-x) = 1 - H^-(x) \qquad \mathbf{1.18}$$

Observemos que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} L_{1,\gamma}(x) &= 1 - H_{1,\gamma}(-x) \\ L_{2,\gamma}(x) &= 1 - H_{2,\gamma}(-x) \\ L_{3,0}(x) &= 1 - H_{3,0}(-x). \end{aligned}$$

Así, si logramos demostrar que la únicas funciones de distribución límite para la sucesión de máximos son $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$, habremos demostrado que las funciones $L_{1,\gamma}$, $L_{2,\gamma}$ y $L_{3,0}$ son las únicas funciones de distribución límite posibles para la sucesión de mínimos.

2. CONDICIONES SUFICIENTES

En esta sección, damos algunos resultados preliminares que nos servirán para establecer un conjunto de condiciones suficientes sobre la función de distribución F para que los límites 1.5 y 1.6 existan, es decir, para que:

$$F \in \mathcal{D}(H) \quad y \quad F \in \mathcal{D}(L).$$

Comencemos con un lema que nos ayudará a dar dos aproximaciones para las funciones H_n y L_n en los teoremas 2.2 y 2.3 y a partir de los cuales obtendremos los primeros dos resultados importantes de este capítulo (corolarios 2.4 y 2.5), que son los que nos proporcionan el conjunto de condiciones suficientes para que:

$$F \in \mathcal{D}(H) \quad y \quad F \in \mathcal{D}(L).$$

Lema 2.1 *Para todo número real z en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y para todo número natural n se tiene que:*

$$e^{-nz} - (1 - z)^n (e^{2nz^2} - 1) < (1 - z)^n \leq e^{-nz}.$$

La última desigualdad se cumple para todo número real z en el intervalo [0, 1].

Demostración.- Primero demostraremos que se cumple la desigualdad:

$$(1 - z)^n \leq e^{-nz} \qquad 2.1.1$$

para lo cual consideraremos la siguiente desigualdad:

$$\forall\, z \in [0, 1) \qquad - \frac{1}{1 - z} \leq 1.$$

Integremos ambas partes de la desigualdad:

$$\forall\, z \in [0, 1) \qquad \log(1 - z) \leq -z$$

multiplicando por un número natural n:

$$\forall\, z \in [0,\, 1) \qquad n\, \log(1 - z) \leq -nz$$

y finalmente aplicando la función exponencial obtenemos:

$$\forall\, z \in [0,\, 1) \qquad (1 - z)^n \leq e^{-nz}\,.$$

El caso en el que z toma el valor de uno, la desigualdad 2.1.1 evidentemente se cumple, dado que la función exponencial siempre es positiva, por lo tanto esta relación se cumple para todo valor de z en el intervalo $[0,\, 1]$.

Para demostrar que se cumple la desigualdad:

$$\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \quad e^{-nz} - (1 - z)^n\, (e^{2nz^2} - 1) < (1 - z)^n \qquad 2.1.2$$

utilizaremos las siguientes dos desigualdades:

$i)$ $\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \quad e^{-nz} - (1 - z)^n < (1 - z)^{n-nz} - (1 - z)^n$

$ii)$ $\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \qquad (1 - z)^{-nz} < e^{2nz^2}$

que a continuación probamos.

$i)$ Consideremos la siguiente desigualdad:

$$\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \qquad \frac{1}{1 - z} < 1 + 2z$$

integrando ambos miembros de esta desigualdad obtenemos:

$$\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \qquad \log\frac{1}{1 - z} < z + z^2$$

es decir:

$$\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \qquad \log(1 - z) > -z(1 - z)$$

multipliquemos esta desigualdad por $(1 - z)$:

$$\forall\, z \in (0,\, \tfrac{1}{2}) \quad (1 - z)\, \log(1 - z) > -z(1 - z)^2$$

y como:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad -(1 - z)^2 > -1$$

entonces:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad (1 - z)\, \log(1 - z) > -z\,.$$

Ahora multipliquemos por un número natural n y apliquemos la función exponencial:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad e^{-nz} < (1 - z)^{n-nz}$$

y por último, restemos $(1 - z)^n$ de ambos lados de esta desigualdad:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad e^{-nz} - (1 - z)^n < (1 - z)^{n-nz} - (1 - z)^n$$

por lo tanto la desigualdad del inciso *i)* se cumple.

ii) Consideremos ahora la desigualdad:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad \frac{1}{1 - z} < 2.$$

Si integramos ambos lados de esta desigualdad, tenemos que:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad -\log(1 - z) < 2z$$

y si multiplicamos por nz y aplicamos la función exponencial, obtenemos la desigualdad que queríamos demostrar, es decir:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad (1 - z)^{-nz} < e^{2nz^2}.$$

Ahora, demostraremos que se cumple la desigualdad 2.1.2. Por el inciso *ii)* tenemos que:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad (1 - z)^{-nz} < e^{2nz^2}$$

multipliquemos ambos lados de esta desigualdad por $(1 - z)^n$ y restemos $(1 - z)^n$:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2})$$

$$(1 - z)^{n-nz} - (1 - z) < (1 - z)^n\, e^{2nz^2} - (1 - z)^n$$

y utilizando la desigualdad del inciso *i)* llegamos a que:

$$\forall\, z \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad e^{-nz} - (1 - z)^n\, (e^{2nz^2} - 1) < (1 - z)^n$$

con lo cual el lema 2.1 queda demostrado. ∎

Los siguientes dos teoremas nos dan estimaciones de las funciones de distribución de las variables aleatorias Z_n y W_n.

Teorema 2.2 *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con función de distribución* F *y sea* x *un número real tal que para algún número natural* n:

$$1 - F(x) < \frac{1}{2\sqrt{n}} \qquad 2.2.1$$

entonces:

$$\Gamma(x) - 4n\,[1 - F(x)]^2\, F^n(x) < P(Z_n \le x) < \Gamma(x)$$

donde

$$\Gamma(x) = e^{-n[1-F(x)]}.$$

Demostración.- Aplicaremos el lema 2.1 tomando

$$z = 1 - F(x)$$

Observemos que en virtud de la relación 2.2.1, el número z está en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y que:

$$(1 - z)^n = F^n(x)$$

y recordando que: $F^n(x) = P(Z_n \leq x)$, tendremos que:

$$(1 - z)^n = P(Z_n \leq x)$$

por lo tanto, por el lema 2.1 se cumple la desigualdad:

$$e^{-n(1-F(x))} - F^n(x)(e^{-2n(1-F(x))^2} - 1) < P(Z \leq x) < e^{-n(1-F(x))}$$

Finalmente como:

$$\forall\ w \in (0, \tfrac{1}{2}) \qquad |e^{w} - 1| < 2w$$

tomando $\quad w = 2nz^2 = 2n[1 - F((x)]^2$:

$$e^{-n(1-F(x))} - 4n\ [1 - F(x)]^2\ F^n(x) < P(Z_n \leq x) < e^{-n(1-F(x))}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Teorema 2.3 *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con función de distribución* F *y sea* x *un número real que satisfaga que para algún número natural* n:

$$F(x) < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

entonces:

$$U(x) - 4n\ [1 - F(x)]^n\ F^2(x) < P(V_n > x) < U(x)$$

donde

$$U(x) = e^{-nF(x)}.$$

Demostración.- La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 2.2 tomando ahora el número z como $F(x)$ y recordando que:

$$[1 - F(x)]^n = P(V_n > x)$$ ■

A continuación veremos los corolarios 2.4 y 2.5 de los teoremas 2.2 y 2.3, que nos proporcionan un conjunto de condiciones suficientes para que los límites 1.5 y 1.6 existan.

Corolario 2.4 *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias como la descrita en el teorema* 2.2 *y sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de números reales y de números reales positivos respectivamente; suponiendo que para todo número real* y *el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} [1 - F(a_n + b_n y)]\, n = u(y) \qquad 2.4.1$$

exista (permitiendo que $u(y) = \infty$), *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n + b_n y) = e^{-u(y)}.$$

Demostración .- Sea $u(y) = \infty$ y sea $z = 1 - F(a_n + b_n y)$. Como el número z está en el intervalo [0, 1], dado el lema 2.1 se cumple la desigualdad:

$$F^n(a_n + b_n y) \leq exp[-n(1 - F(a_n + b_n y))]$$

es decir:

$$P(Z_n \leq a_n + b_n y) \leq exp[-n(1 - F(a_n + b_n y))].$$

Si consideramos la expresión 2.4.1 al tomar el límite cuando n tiende a infinito en esta desigualdad, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n + b_n y) = 0 = e^{-u(y)}.$$

Ahora supongamos que el valor $u(y)$ es finito. Sabemos que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad P(Z_n \leq a_n + b_n y) < 1$$

por lo que:

$$0 \leq 4n[1 - F(a_n + b_n y)]^2\, F^n(a_n + b_n y) \leq \frac{4}{n} \Big[n[1 - F(a_n + b_n y)]\Big]^2$$

y dada la relación 2.4.1 el miembro derecho de esta desigualdad converge a cero cuando n tiende a infinito, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} 4n[1 - F(a_n + b_n y)]^2 F^n(a_n + b_n y) = 0 \qquad 2.4.2$$

De la condición 2.4.1 se deduce que cuando el número n es suficientemente grande:

$$1 - F(a_n + b_n y) < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

así, por el teorema 2.2 se cumple que:

$$exp[-n(1 - F(a_n + b_n y))] - 4n[1 - F(a_n + b_n y)]^2 F^n(a_n + b_n y)$$

$$< P(Z_n \le a_n + b_n y) \le exp[-n(1 - F(a_n + b_n y))]$$

entonces al tomar el límite cuando n tiende a infinito en esta última desigualdad, considerando las expresiones 2.4.1 y 2.4.2 obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n y) = 0 = e^{-u(y)}.$$

■

Corolario 2.8 *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias como la descrita en el teorema* 2.2 *y sean* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de números reales y de números reales positivos respectivamente; suponiendo que para todo número real* y *el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} nF(c_n + d_n y) = w(y) \qquad 2.8.1$$

exista (permitiendo que $w(y) = \infty$), *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} P(V_n \le c_n + d_n y) = 1 - e^{-w(y)}.$$

Demostración.- La demostración de este corolario se sigue del corolario 2.4 y de la relación 1.14.

■

3. TERMINOS DE ESTANDARIZACION

En esta sección, establecemos dos resultados fundamentales para el desarrollo de la teoría asintótica que estamos estudiando. El primero de ellos, el lema 3.1, nos da información acerca de la estructura de las sucesiones de números reales que nos sirven para estandarizar una sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (cualquiera) para que ésta converja en distribución. Lo más importante que nos dice este lema, es que estas sucesiones de números *no son únicas* y además establece la relación que debe haber entre ellas.

El segundo de estos resultados, el lema 3.2, nos habla acerca de las funciones de distribución límite de una sucesión de funciones de distribución $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Así, veremos que esta sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no tiene una única función de distribución límite*. De esta forma, suponiendo que las funciones G y T son funciones de distribución límite de la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ (que obviamente dependerán de cómo se hayan escogido las sucesiones de constantes de estandarización, que como ya vimos, tampoco son únicas), éstas satisfacen una relación funcional, que es la que nos brindará toda la información necesaria para determinar completamente el conjunto de funciones de distribución límite de la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$.

En la siguiente sección (la 2.4), estableceremos el caso particular en el que la sucesión de funciones de distribución es $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, que es la que nos interesa. Sin embargo, aquí enunciamos el caso más general, debido a que éste, nos será de gran utilidad para demostrar en el teorema 6.3., que existe un conjunto de condiciones necesarias para que:

$$F \in \mathcal{D}(H_{3,0})$$

(ver definición 1.1).

Lema 3.1 *Sea $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y sean $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales donde para todo número natural n el número D_n es positivo, tales que*

$$\forall\, x \in \mathscr{C}(G) \qquad \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n + D_n x) = G(x) \,. \qquad 3.1.1$$

Sean $\{C_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales donde para todo número natural n el número D_n^* es positivo, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C_n^*}{D_n} = 0 \qquad 3.1.2$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{D_n^*} = 1 \qquad 3.1.3$$

entonces

$$\forall\, x \in \mathscr{C}(G) \qquad \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n^* + D_n^* x) = G(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n^* + D_n x) = G(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n + D_n^* x) = G(x).$$

Demostración.- Primero demostremos que podemos substituir C_n por C_n^*. Sean

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \frac{Y_n - C_n^*}{D_n} \qquad y \qquad V_n = \frac{C_n - C_n^*}{D_n}$$

entonces;

$$U_n + V_n = \frac{Y_n - C_n^*}{D_n} \,.$$

Por hipótesis sabemos que:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n + D_n x) = G(x)$$

es decir que:

$$\forall\ x \in \mathscr{C}(G) \qquad U_n \doteq \frac{Y_n - C_n}{D_n} \xrightarrow{D} U$$

donde U es la variable aleatoria con función de distribución G y como la condición 3.1.2 se cumple, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0$$

en particular

$$V_n \xrightarrow{P} 0$$

entonces por la propiedad 2.3.3 *i)* de convergencia en distribución (capítulo I), que nos dice que si cuando n tiende a infinito:

$$U_n \xrightarrow{D} U \quad y \quad V_n \xrightarrow{P} 0$$

entonces

$$U_n + V_n \xrightarrow{D} U$$

tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(U_n + V_n \le x) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n^* + D_n x) = G(x).$$

Ahora, para probar que podemos substituir D_n por D_n^* escribamos:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \frac{Y_n - C_n}{D_n^*} = \frac{Y_n - C_n}{D_n} + \frac{Y_n - C_n}{D_n}\left[\frac{D_n}{D_n^*} - 1\right]$$

entonces para todo número natural n sean

$$U_n = \frac{Y_n - C_n}{D_n} \qquad y \qquad V_n = \frac{Y_n - C_n}{D_n}\left[\frac{D_n}{D_n^*} - 1\right].$$

Como por hipótesis U_n converge en distribución a U, si demostramos que V_n converge en probabilidad a cero, de nuevo por la propiedad 2.3.3 *i)* del capítulo I, habremos probado que:

$$\forall\, x \in \mathscr{C}(G) \qquad \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n + D_n^* x) = G(x).$$

Sean ε un número positivo y M un número natural mayor que uno, tales que los puntos $\pm\varepsilon M$ sean puntos de continuidad de la función G . Ahora, dada la condición 3.1.3, existe un número natural $n_o(M)$ tal que:

$$\forall\, n \ge n_o \qquad \left| \frac{D_n}{D_n^*} - 1 \right| < \frac{1}{M}$$

entonces:

$$\forall\, n \ge n_o \quad |V_n| = \left| \frac{Y_n - C_n}{D_n} \left(\frac{D_n}{D_n^*} - 1 \right) \right| \le \left| \frac{Y_n - C_n}{D_n} \right| \frac{1}{M}$$

de donde se deduce que:

$$\forall\, n \ge n_o \qquad 0 \le P(|V_n| \ge \varepsilon) \le P\left(\left| \frac{1}{D_n} (Y_n - C_n) \right| \ge \varepsilon M \right)$$

y tomando el límite cuando n tiende a infinito, el miembro derecho de esta desigualdad converge a $1 - [G(\varepsilon M) - G(-\varepsilon M)]$ y considerando que:

$$\lim_{M\to\infty} (1 - [G(\varepsilon M) - G(-\varepsilon M)]) = 0$$

obtenemos que:

$$0 \le P(|V_n| \ge \varepsilon) \le 0$$

por lo tanto, V_n converge en probabilidad a cero como queríamos demostrar.

Observemos, que como en esta última demostración podemos intercambiar C_n por C_n^* sin alterar el resultado, entonces:

$$\forall\ x \in \mathscr{C}(G) \qquad \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le C_n^* + D_n^* x) = G(x)$$

con lo cual el lema 3.1 queda demostrado. ■

Lema 3.2 *Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución y sean $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales, tales que para todo número natural n los números D_n y β_n son positivos, y para los cuales:*

$$\forall\ x \in \mathscr{C}(G) \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(C_n + D_n x) = G(x) \tag{3.2.1}$$

y

$$\forall\ x \in \mathscr{C}(\Gamma) \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n + \beta_n x) = \Gamma(x) \tag{3.2.2}$$

donde las funciones G y Γ son funciones de distribución no degeneradas; entonces si los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{D_n} = B > 0 \quad \textbf{3.2.3} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - C_n}{D_n} = A \quad \textbf{3.2.4}$$

existen[1]*, éstos serán finitos y además se cumple la identidad:*

$$\Gamma(x) = G(A + Bx). \tag{3.2.5}$$

Demostración.- *Sean* $x_1, x_2 \in \mathscr{C}(G)$ y $y_1, y_2 \in \mathscr{C}(\Gamma)$ **tales que:**

$$0 \le \Gamma(y_1) < G(x_1) < G(x_2) < \Gamma(y_2) \le 1 \ .$$

Como las funciones Γ y G son funciones de distribución, éstas

---

[1] Estamos suponiendo que el límite A de una sucesión de números reales $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe, si éste es finito, ∞ o $-\infty$.

son funciones monótonas no decrecientes y dadas las condiciones 3.2.1 y 3.2.2, tenemos que para n suficientemente grande se satisface la siguiente desigualdad:

$$\alpha_n + \beta_n y_1 \le C_n + D_n x_1 \le C_n + D_n x_2 \le \alpha_n + \beta_n y_2 \qquad 3.2.6$$

ahora restemos los términos intermedios y los términos extremos de esta desigualdad:

$$D_n(x_2 - x_1) \le \beta_n(y_2 - y_1)$$

entonces

$$\frac{D_n}{\beta_n} \le \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad 3.2.7$$

y como los números x_1, x_2, y_1 y y_2 son fijos, el cociente $\frac{D_n}{\beta_n}$ permanece acotado para n suficientemente grande. Si intercambiamos los papeles de las funciones G y Γ en el argumento que nos llevó a la desigualdad 3.2.6, obtendremos que para n suficientemente grande, también el cociente $\frac{\beta_n}{D_n}$ está acotado, por lo tanto, en caso de existir el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{D_n}$$

éste será finito y además será positivo, dado que las sucesiones $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de números positivos y el límite no podrá valer cero, ya que el recíproco $\frac{D_n}{\beta_n}$ permanece acotado para n suficientemente grande.

Ahora, para probar que el límite 3.2.4 es finito, en caso de existir, consideremos los dos primeros miembros de la desigualdad 3.2.6 de donde se desprende que para n suficientemente grande:

$$\frac{\alpha_n - C_n}{D_n} \le x_1 - y_1 \left(\frac{\beta_n}{D_n}\right)$$

como x_1 y y_1 son números fijos y como se cumple la desigualdad 3.2.7, tenemos que para n suficientemente grande el cociente $\frac{\alpha_n - C_n}{D_n}$ permanece acotado inferiormente (para n suficientemente grande), por lo tanto, en caso de existir el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - C_n}{D_n}$$

éste será finito.

Ahora demostraremos la identidad 3.2.5. Sea $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ una subsucesión de la sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ para la cual las expresiones 3.2.3 y 3.2.4 se cumplen y sean ε un número real positivo y n_t un número suficientemente grande para los cuales:

$$(B - \varepsilon)\, D_{n_t} \le \beta_{n_t} \le D_{n_t}(B + \varepsilon) \qquad 3.2.8$$

y

$$C_{n_t} + D_{n_t}(A - \varepsilon) \le \alpha_{n_t} \le C_{n_t} + D_{n_t}(A + \varepsilon). \qquad 3.2.9$$

Sea x un número real no negativo. Multipliquemos la desigualdad 3.2.9 por x y si la sumamos a la desigualdad 3.2.8 obtenemos que:

$$\forall\, x \ge 0 \qquad C_{n_t} + D_{n_t}[A + Bx - \varepsilon(x + 1)] \le \alpha_{n_t} + \beta_{n_t} x$$

y

$$\forall\, x \ge 0 \qquad \alpha_{n_t} + \beta_{n_t} x \le C_{n_t} + D_{n_t}[A + Bx + \varepsilon(x + 1)]$$

entonces:

$$\forall\, x \ge 0 \;\; F_{n_t}\left(C_{n_t} + D_{n_t}[A + Bx - \varepsilon(x + 1)]\right) \le F_{n_t}\left(\alpha_{n_t} + \beta_{n_t} x\right)$$

y

$$\forall\, x \ge 0 \;\; F_{n_t}\left(\alpha_{n_t} + \beta_{n_t} x\right) \le F_{n_t}\left(C_{n_t} + D_{n_t}[A + Bx - \varepsilon(x + 1)]\right)$$

por lo tanto, si los números x y ε son tales que los puntos

$A + Bx - \varepsilon(x + 1)$ y $A + Bx + \varepsilon(x + 1)$ sean puntos de continuidad de la función de distribución G, entonces por la hipótesis 3.2.1 tendremos que:

$$\forall\ x \geq 0 \qquad G[A + Bx - \varepsilon(x + 1)] \leq \underline{\lim}\ F_{n_t}\left(\alpha_{n_t} + \beta_{n_t} x\right)$$

$$\leq \overline{\lim}\ F_{n_t}\left(\alpha_{n_t} + \beta_{n_t} x\right) \leq G[A + Bx + \varepsilon(x + 1)].$$

Finalmente, si el punto x es punto de continuidad de la función de distribución Γ y el punto $A + Bx$ lo es de la función G, al considerar el límite cuando ε tiende a cero en la última desigualdad, obtenemos que:

$$\forall\ x \geq 0 \qquad \Gamma(x) = G(A + Bx)$$

como queríamos demostrar.

El caso en el que el número x es negativo, es análogo al que desarrollamos aquí, simplemente en donde aparezca εx, habría que poner $-\varepsilon x$ y de igual forma se sigue el resultado 3.2.5. ■

4. RELACION FUNCIONAL DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION LIMITE

En esta sección, en el teorema 4.1, enunciamos el caso particular del lema 3.2 , en el que la sucesión de funciones de distribución es $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$; es decir, estudiaremos de que forma deben de ser las sucesiones de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ para que el límite:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x)$$

exista y además veremos la relación funcional que deben satisfacer las funciones de distribución límite, que resulta fundamental para este estudio, debido a que las soluciones de dicha ecuación funcional, serán precisamente las funciones de distribución límite posibles (en este caso, lo serán las funciones de distribución $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$) como veremos en la sección 5.

También enunciamos el resultado análogo para el mínimo en el teorema 4.2, el cual se puede deducir facilmente a partir del teorema 4.1 y de la relación 1.15:

$$L(x) = 1 - H^{-}(x) .$$

Concluímos esta sección, realizando una serie de observaciones acerca de la relación funcional ya mencionada.

Teorema 4.1 *Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de números reales y de números reales positivos respectivamente, tales que:*

$$\lim_{n\to\infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x)$$

y sea m un número natural para el cual los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{nm} - a_n}{b_n} = A_m \qquad 4.1.1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{nm}}{b_n} = B_m > 0 \qquad 4.1.2$$

existen[1]; *entonces éstos son finitos y además la función* H *satisface la ecuación:*

$$H^m(A_m + B_m x) = H(x). \qquad 4.1.3$$

Demostración.- Sea F una función de distribución tal que:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x) \qquad 4.1.4$$

y sea m un número natural (fijo), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F^{nm}(a_{nm} + b_{nm} x) = H(x)$$

o bien:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_{nm} + b_{nm} x) = H^{1/m}(x). \qquad 4.1.5$$

Dadas las expresiones 4.1.4 y 4.1.5 tenemos que se cumplen las hipótesis del lema 2.3, donde:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ F_n = F^n\ ;\ C_n = a_n\ ;\ D_n = b_n\ ;\ \alpha_n = a_{nm}\ ;\ \beta_n = b_{nm}$$

y

$$G(x) = H(x) \quad \text{y} \quad \Gamma(x) = H^{1/m}(x)$$

por lo tanto las expresiones 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3 son ciertas. Este teorema es un corolario del lema 3.2. ∎

---

[1] Suponemos que el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales existe, si:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

donde A puede ser un número real, ∞ o $-\infty$.

A continuación, enunciamos la contraprate del teorema 4.1 para el mínimo.

Teorema 4.2 *Sean $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales y de números reales positivos respectivamente, tales que:*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(c_n + d_n x) = L(x)$$

es decir, tales que:

$$\lim_{n\to\infty} [1 - F(c_n + d_n x)]^n = 1 - L(x) .$$

Sea además m un número natural (arbitrario), para el cual los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{nm} - c_n}{d_n} = C_m$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{nm}}{d_n} = D_m > 0$$

existen; entonces éstos son finitos y además la función L satisface la ecuación:

$$1 - L(x) = [1 - L(C_m + D_m x)]^m. \qquad 4.2.1$$

Antes de continuar, vale la pena enfatizar, que dados los teoremas 4.1 y 4.2, podemos afirmar que la clase de funciones de distribución límite H y L correspondientes al máximo y al mínimo respectivamente, es el conjunto de soluciones de las ecuaciones 4.1.3 y 4.2.1.

En el lema 3.2 establecimos que si las sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (donde $\forall\ n \in \mathbb{N},\ b_n > 0$), son ta-

les que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = H(x)$$

y si las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ (donde $\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n > 0$), son tales que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le A_n + B_n x) = H^*(x)$$

entonces existen constantes A y $B > 0$, tales que:

$$H^*(x) = H(A + Bx)$$

por lo tanto, no podemos hablar de una única función de distribución límite, sino de toda una familia de funciones de distribución límite relacionadas por esta ecuación funcional. De aquí surge la necesidad de introducir la siguiente definición:

Definición 4.3 Decimos que *las funciones de distribución* H *y* H* *son del mismo tipo* si existen dos números reales A y B ($B > 0$) tales que:

$$H^*(x) = H(A + Bx).$$

Observemos que esta relación genera una clase de equivalencia, ya que la relación es reflexiva, tomando $A = 0$ y $B = 1$

$$H(x) = H(A + Bx),$$

es simétrica, debido a que si existen dos números reales A y B ($B > 0$) tales que:

$$H^*(x) = H(A + Bx),$$

haciendo el cambio de variable $y = A + Bx$, encontramos que:

$$H(-A + \frac{1}{B}\, y) = H^*(y)$$

y por último, tenemos que la relación también es transitiva, es decir, si la función H es del mismo tipo que la función H^* y si ésta es del mismo tipo que la función G, entonces:

$$\exists\, A,\ B,\ C \text{ y } D \in \mathbb{R} \quad (B,\ D > 0) \quad \Rightarrow$$

$$H(A + Bx) = H^*(x) \quad \text{y} \quad G(x) = H^*(C + Dx)$$

entonces:

$$G(x) = H[A + B(C + Dx)] = H[(A + BC) + BDx]$$

por lo tanto, las funciones G y H son del mismo tipo.

Además, notemos que si substituímos el número x por el número $A + Bx$ $(B > 0)$ en cualquiera de las expresiones 1.7 o 1.8, obtenemos que si:

$$F \in \mathcal{D}(H) \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{D}(H^*)$$

donde la función H^* es cualquier función del mismo tipo que la función H. Analogamente si:

$$F \in \mathcal{D}(L) \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{D}(L^*)$$

donde la función L^* es una función del mismo tipo que la función L. En otras palabras tenemos que:

Proposición 4.4 *El dominio de atracción de dos funciones es el mismo si y solamente si las dos funciones son del mismo tipo.*

Dado que la relación «del mismo tipo» es una relación de equivalencia, ésta induce una partición del conjunto $\mathcal{F}$ de funciones de distribución límite (no degeneradas); es decir, si consideramos todas las clases de funciones de distribución límite del mismo tipo, estas clases forman una partición del conjunto $\mathcal{F}$.

5. DISTRIBUCIONES LIMITE

Esta sección está totalmente dedicada a demostrar que las únicas funciones de distribución límite para la sucesión:

$$\{F_n(a_n + b_n x)\}_{n=1}^{\infty}$$

son las funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$ (ver reglas de correspondencia 1.9, 1.10 y 1.11 respectivamente). Esta demostración, consiste en encontrar las soluciones de la ecuación funcional que establecimos en el teorema 4.1:

$$H(x) = H^m(A_m + B_m x)$$

donde las sucesiones de números reales $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ son las sucesiones dadas en las expresiones 4.1.1 y 4.1.2, como ya mencionamos en la sección anterior.

El resultado análogo correspondiente al mínimo, simplemente lo enunciamos al final de esta sección.

Antes de comenzar, queremos introducir la siguiente notación que utilizaremos continuamente a lo largo de esta y de la siguiente sección:

Decimos que $\alpha(F)$ es *el punto ínfimo de la función de distribución* F si:

$$\alpha(F) = \inf\{x \mid F(x) > 0\} \qquad 5.1$$

Decimos que $\omega(F)$ es *el punto supremo de la función de distribución* F si:

$$\omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\}. \qquad 5.2$$

Observemos que el número $\alpha(F)$ puede tomar un valor finito o $-\infty$ y que el número $\omega(F)$ puede tomar un valor finito o $+\infty$.

Teorema 5.1 *Supongamos que la función de distribución* F *está en el dominio de atracción de la función de distribución* H *(no degenerada), entonces la función* F *pertenece a alguna de las tres clases de equivalencia generadas por las siguientes funciones:*

$$i)\ H_{3,0} \qquad ii)\ H_{2,\gamma} \qquad o \qquad iii)\ H_{1,\gamma}\ .$$

(ver reglas de correspondencia **1.9**, **1.10** *y* **1.11***).*

Demostración.- Por hipótesis la función de distribución F está en el dominio de atracción de la función H, es decir, existen sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x) \qquad 5.1.1$$

En el teorema 4.1 establecimos que si la función de distribución H es no degenerada y satisface la expresión 5.1.1, entonces satisface la ecuación:

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \qquad H^m(A_m + B_m x) = H(x) \qquad 5.1.2$$

donde las sucesiones de números reales $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ (con $B_n > 0$) son sucesiones de números reales convenientemente escogidas.

A continuación determinaremos las soluciones de la ecuación 5.1.2 en tres pasos y como veremos, dichas soluciones son funciones del mismo tipo que las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$.

i) Primero determinaremos las soluciones de la ecuación 5.1.2, en el caso en el que:

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \qquad B_m = 1.$$

En estas condiciones, tenemos que para alguna sucesión de números reales $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ se cumpe la siguiente ecuación:

$$\forall\, m \geq 1,\quad \forall\, x \in \mathcal{E}(H) \qquad H^m(A_m + x) = H(x) \qquad 5.1.3$$

en particular si $m = 1$:

$$\forall\, x \in \mathcal{E}(H) \qquad H(A_1 + x) = H(x)$$

de donde deducimos que $A_1 = 0$. Además observemos que:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad H(A_m) = H^{m+1}(A_{m+1} + A_m) \leq H^m(A_{m+1} + A_m) = H(A_{m+1})$$

y como la función H es monótona no decreciente, entonces:

$$0 = A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$$

Afirmamos que existe al menos un número natural m para el cual A_m es positivo, debido a que de lo contrario la ecuación 5.1.2 se reducirá a:

$$\forall\, m \geq 1,\quad \forall\, x \in \mathcal{E}(H) \qquad H^m(x) = H(x)$$

y entonces:

$$\forall\, x \in \mathcal{E}(H) \qquad H(x) = 0$$

o

$$\forall\, x \in \mathcal{E}(H) \qquad H(x) = 1$$

lo cual contradiría el hecho de que la función de distribución H es no degenerada.

Ahora veamos que:

$$\lim_{m \to \infty} A_m = \omega(H) \qquad 5.1.4$$

y que:

$$\forall\, x \in \mathcal{E}(H) \qquad 0 < H(x) < 1 \qquad 5.1.5$$

Probemos la identidad 5.1.4 por reducción al absurdo. Supongаmos que existe un número natural M tal que:

$$\omega(H) < A_M$$

en tal caso, existe un número real x tal que:

$$x < \omega(H) < A_M + x$$

pero por la definición de $\omega(H)$ y por la relación 5.1.3 obtenemos que:

$$1 > H(x) = H^M(A_M + x) = 1 \quad \nabla$$

por lo tanto:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad\qquad A_m \leq \omega(H)$$

y de hecho, a continuación probaremos que:

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \ni \forall\, m \geq M \qquad A_m = \omega(H)$$

con lo cual quedará demostrada la expresión 5.1.4. Para verificar ésto, supongamos que:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad\qquad A_m < \omega(H).$$

Ya vimos que la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona no decreciente, no negativa y que existe un número natural M tal que:

$$\forall\, m \geq M \qquad\qquad A_m > 0$$

entonces, por la relación 5.1.3:

$$\forall\, m \geq M \qquad\qquad H(A_m) = H(0)$$

pero como:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad\qquad A_m < \omega(H)$$

entonces:

$$\forall\, m \geq M \qquad\qquad H(A_m) = 0\ .$$

De nuevo, utilizando la relación 5.1.3:

$$\forall\, m \geq M \qquad 0 = H(A_m) = H^m(2A_m) \quad \Rightarrow \quad H(2A_m) = 0$$

y así, aplicando la relación 5.1.3 sucesivamente, tendremos que:

$$\forall\, m \geq M \qquad H(kA_m) = 0$$

y considerando el límite cuando k tiende a infinito:

$$\forall\, m \geq M \qquad \lim_{k\to\infty} H(kA_m) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 \quad \nabla$$

porque H es una función de distribución, por lo tanto:

$$\forall\, m \geq M \qquad A_m = \omega(H) \ .$$

Ahora demostraremos que para todo número real x :

$$0 < H(x) < 1$$

Primero supongamos que existe un número real x^* tal que:

$$H(x^*) = 0$$

(observemos que $\forall\, x < x^* \quad H(x) = 0$), entonces:

$$H(x^*) = H^m(A_m + x^*) = 0$$

por lo tanto, para:

$$x_1 = A_m + x^* \qquad H(x_1) = 0$$

Sea $x_2 = x^* + 2A_m$, entonces:

$$H(x_1) = H^m(2A_m + x^*) = H^m(x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(x_2) = 0$$

así, por inducción podemos probar que:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad x_k = kA_m + x^* \geq x^* \qquad H(x_k) = 0$$

de donde concluímos que:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad\qquad H(x) \equiv 0 \quad \nabla$$

ya que la función H, es una función de distribución no degenerada, por lo tanto:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad\qquad H(x) > 0 .$$

Ahora supongamos que existe un número real x^* tal que:

$$H(x^*) = 1$$

entonces:

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \qquad\qquad H^m(x^*) = 1 .$$

Sea $x_1 = x^* - A_m \leq x^*$ ($\forall\ m \in \mathbb{N}\ \ A_m \geq 0$), entonces por la relación 5.1.3:

$$H(x_1) = H^m(A_m + x_1) = H^m(x^*) = 1$$

sea $x_2 = x^* - 2A_m$, entonces:

$$H(x_2) = H^m(A_m + x_2) = H^m(x^* - A_m) = H^m(x_1) = 1$$

así por inducción podemos probar que:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \qquad si\ x_k = x^* - kA_m < x^* \quad \Rightarrow \quad H(x_k) \equiv 1$$

de donde concluímos que:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad\qquad H(x) \equiv 1 \quad \nabla$$

por lo tanto:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad\qquad H(x) < 1$$

Como para todo número natural x, $H(x) < 1$, entonces tenemos que $\omega(H) = \infty$, y como también para todo número real x, $H(x) > 0$, podemos aplicar la función logaritmo en la identidad

5.1.3, así:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \forall\, m \ge 1 \qquad m\ log H(A_m + x) = log H(x) \qquad 5.1.6$$

donde

$$0 = A_1 \le A_2 \le \dots \qquad y \qquad \lim_{m\to\infty} A_m = \infty\ . \qquad 5.1.7$$

De las expresiones 5.1.6 y 5.1.7 deduciremos que la función:

$$G^*(x) = \frac{G(x)}{G(0)} \qquad \text{donde} \quad G(x) = log H(x) \qquad 5.1.8$$

satisface la ecuación:

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R} \qquad G^*(x + y) = G^*(x)\ G^*(y)\ . \qquad 5.1.9$$

Para ésto, consideremos un número z positivo. Dada la expresión 5.1.7, podemos encontrar un único número natural m tal que:

$$A_m \le z \le A_{m+1}$$

y como la función G es monótona no decreciente, entonces:

$$G(A_m + x) \le G(z + x) \le G(A_{m+1} + x) \qquad 5.1.10$$

a partir de esta desigualdad tomando $x = 0$ obtenemos que:

$$\frac{1}{G(A_{m+1})} \le \frac{1}{G(z)} \le \frac{1}{G(A_m)}$$

así considerando esta desigualdad, la desigualdad 5.1.10 y el hecho de que la función G es negativa, obtenemos que:

$$\frac{G(A_{m+1} + x)}{G(A_m)} \le \frac{G(z + x)}{G(z)} \le \frac{G(A_m + x)}{G(A_{m+1})}$$

y por la identidad 5.1.6:

$$\frac{m\ G(x)}{[m + 1]\ G(0)} \leq \frac{G(z + x)}{G(z)} \leq \frac{[m + 1]\ G(x)}{m\ G(0)}$$

y como al tomar el límite cuando z tiende a infinito, m también tiende a infinito:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{G(z + x)}{G(z)} = \frac{G(x)}{G(0)} = G^{*}(x)\ .$$

Sean x y y números arbitrarios, entonces según la última identidad:

$$G^{*}(x + y) = \lim_{z\to\infty} \frac{G(z + x)}{G(z)}$$

multiplicando por uno:

$$G^{*}(x + y) = \lim_{z\to\infty} \frac{G(z + x + y)}{G(z + x)}\ \frac{G(z + x)}{G(z)}$$

haciendo un cambio de variable en el primer factor de esta igualdad ($u = z + x$):

$$G^{*}(x + y) = \lim_{u\to\infty} \frac{G(u + y)}{G(u)}\ \lim_{z\to\infty} \frac{G(z + x)}{G(z)} = G^{*}(y)\ G^{*}(x)$$

que precisamente es la ecuación 5.1.9.

Observemos que como la función G es negativa, entonces la función G^{*} es positiva y además también es monótona no decreciente y dado que satisface la ecuación 5.1.9, sabemos que para un número α positivo y

$$\forall\ x \geq 0 \qquad G^{*}(x) = e^{-\alpha x} \qquad 5.1.11$$

y que para todo número x no negativo, existe un número b positivo tal que:

$$\forall\ x \geq 0 \qquad G^{*}(-x) = e^{-bx}\ . \qquad 5.1.12$$

Ahora veamos que $a = b$. Tomemos $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación 5.1.9:

$$G^{*}(0) = G^{*}(0)\ G^{*}(0)$$

como la función G^{*} es positiva, entonces:

$$G^{*}(0) = 1$$

ahora, si tomamos $x = -y$ de nuevo en la ecuación 5.1.9:

$$1 = G^{*}(0) = G^{*}(-y)\ G^{*}(y)$$

y por las identidades 5.1.11 y 5.1.12:

$$1 = e^{-y(b-a)}$$

aplicando la función logaritmo:

$$0 = y(b - a)$$

por lo tanto

$$b = a\ .$$

Finalmente, considerando la identidad 5.1.8, tendremos que para algún número a positivo y

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad \log H(x) = G(x) = G(0)\ G^{*}(x) = G(0)\ e^{-ax}$$

y si expresamos el número $G(0)$ como $G(0) = -e^{-c}$ y aplicamos la función exponencial:

$$H(x) = \exp(-e^{-ax-c})$$

que evidentemente es una función del mismo tipo que la función $H_{3,0}$ (ver definición 4.3).

ii) Ahora buscaremos las soluciones de la ecuación 5.1.2 en el caso en el que existe un número natural M, tal que el número B_m que satisface la ecuación 5.1.2, es menor que uno.

Primero demostraremos que $\omega(H)$ es finito y de hecho demostraremos que vale:

$$\omega(H) = \frac{A_M}{1 - B_M} \qquad 5.1.13$$

Sea x un número real mayor o igual que $A_M / (1 - B_M)$. Dado que

$$B_M < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - B_M > 0$$

entonces:

$$x \geq A_M + B_M x$$

como la función H es monótona no decreciente:

$$H(A_M + B_M x) \leq H(x)$$

por la ecuación 5.1.2 y considerando que:

$$H^M(x) \leq H(x) = H^M(A_M + B_M x) \leq H^M(x) \qquad 5.1.14$$

por lo tanto:

$$H(x) = H^M(x)$$

así:

$$\forall\ x \geq \frac{A_M}{1 - B_M} \qquad H(x) = 1\ .$$

(Notemos que para todo número x mayor o igual que $A_M/(1 - B_M)$, la función H evaluada en el punto x, no puede tomar el valor cero, ya que en tal caso;

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad H(x) = 0\ ,$$

y sólo estamos analizando los casos en los que la función H es no degenerada). Para completar la demostración de la identidad 5.1.13 hay que probar que:

$$\forall\, x < \frac{A_M}{1 - B_M} \qquad H(x) < 1$$

lo cual probaremos por contradicción. Así pues, supongamos que

$$\omega(H) < \frac{A_M}{1 - B_M}$$

es decir que:

$$\omega(H) < y < A_M + B_M x < A_M + B_M \omega(H) \qquad 5.1.15$$

considerando la ecuación 5.1.2, la monotonía de la función de distribución H y la definición de $\omega(H)$:

$$H(x) = H^M(A_M + B_M x) \geq H(y) = 1$$

por lo tanto:

$$H(x) = 1 \quad \nabla$$

ya que según la desigualdad 5.1.15:

$$x < \omega(H)$$

entonces la función H evaluada en el punto x, debe ser menor que uno. Consecuentemente, la expresión 5.1.13 se cumpe.

Ahora deduciremos que bajo la condición de que:

$$\exists\, M \geq 1 \quad \Rightarrow \quad B_M < 1, \qquad \alpha(H) = -\infty\,. \qquad 5.1.16$$

Como la función H es monótona no decreciente:

$$\alpha(H) < \omega(H) = \frac{A_M}{1 - B_M}$$

es decir,

$$\alpha(H) < A_M + B_M\alpha(H) \ .$$

Si suponemos que $\alpha(H) > -\infty$, entonces existirá un número real x tal que:

$$x < \alpha(H)$$

y así:

$$x < \alpha(H) < A_M + B_M x \qquad 5.1.17$$

y por la definición de $\alpha(H)$ y por la ecuación 5.1.2 tendremos que:

$$0 = H(x) = H^M(A_M + B_M)$$

por lo tanto:

$$H^M(A_M + B_M) = 0 \ \nabla$$

ya que dada la desigualdad 5.1.17 y la definición de $\alpha(H)$:

$$H(A_M + B_M) > 0$$

por lo tanto:

$$\alpha(H) = -\infty \ .$$

Ahora probaremos que si existe un número natural M tal que el número B_m sea menor que uno, entonces para todo número natural M, el número B_m será menor que uno. Para probar ésto, analizaremos primero el caso en el que:

$$\exists \ s \in \mathbb{N} \quad \ni \quad B_s > 1$$

y como veremos, en tal caso $\alpha(H)$ es finito y $\omega(H)$ es infinito, lo cual contradice las expresiones 5.1.13 y 5.1.17 y por lo tanto, podremos concluir que:

$$\forall \ M \geq 1 \qquad B_M \leq 1 \ .$$

Probemos entonces que si:

$$\exists\ s \in \mathbb{N} \quad \ni \quad B_s > 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(H) = \frac{A_s}{1 - B_s} > -\infty . \qquad 5.1.18$$

Si:

$$x \leq \frac{A_s}{1 - B_s} \qquad \Rightarrow \qquad x \geq A_s + B_s x$$

ya que el número $1 - B_s$ es negativo. Como la función H es monótona no decreciente:

$$H(A_s + B_s x) \leq H(x)$$

y entonces tendremos que para todo número x menor o igual que $A_s/(1 - B_s)$ se cumple la desigualdad 5.1.14, luego:

$$\forall\ x \leq \frac{A_s}{1 - B_s} \qquad H(x) = H^M(x)$$

y en este caso tendremos que:

$$\forall\ x \leq \frac{A_s}{1 - B_s} \qquad H(x) = 0$$

de lo contrario, es decir, si:

$$\forall\ x \leq \frac{A_s}{1 - B_s} \qquad H(x) = 1$$

tendríamos que:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad\qquad H(x) = 1$$

y queremos que la función de distribución H sea no degenerada. Para terminar con la demostración de la expresión 5.1.18, nos falta mostrar que:

$$\forall\, x > \frac{A_s}{1 - B_s} \qquad H(x) > 0\ .$$

Supongamos que:

$$\frac{A_s}{1 - B_s} < \alpha(H) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(H) < A_s + B_s\alpha(H)$$

entonces podemos encontrar dos números reales x y y tales que:

$$x < \alpha(H) < y < A_s + B_s x \qquad\qquad 5.1.19$$

por la ecuación 5.1.2, la desigualdad 5.1.19 y la definición de $\alpha(H)$:

$$H(x) = H^s(A_s + B_s x) \geq H^s(y) > 0 \quad \nabla$$

porque de la definición de $\alpha(H)$:

$$H(x) = 0$$

por lo tanto la expresión 5.1.18 se cumple.

Ahora, bajo la condición de que:

$$\exists\ s \in \mathbb{N} \quad \ni \quad B_s > 1$$

demostraremos que:

$$\omega(H) = \infty\ . \qquad\qquad 5.1.20$$

Como la función H es monótona no decreciente:

$$\alpha(H) = \frac{A_s}{1 - B_s} < \omega(H)$$

entonces:

$$A_s + B_s\,\omega(H) > \omega(H)\ .$$

Si suponemos que $\omega(H)$ es finito, entonces podemos encontrar un número real x tal que:

$$x < \omega(H) < A_s + B_s x < A_s + B_s \omega(H) < \infty \qquad 5.1.21$$

fijándonos en la primera desigualdad de la expresión 5.1.21 y por la ecuación 5.1.2 y por la definición de $\omega(H)$:

$$H^s(A_s + B_s x) = H(x) < 1$$

entonces:

$$H(A_s + B_s x) < 1$$

pero:

$$\omega(H) < A_s + B_s x$$

y de nuevo por la definición de $\omega(H)$:

$$H(A_s + B_s x) = 1 \quad \nabla$$

por lo tanto:

$$\omega(H) = \infty .$$

Hasta el momento, hemos demostrado que si:

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \ni B_M < 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\, M \geq 1 \quad B_M \leq 1 .$$

Veamos ahora, que tampoco es posible que exista un número natural s tal que $B_s = 1$, ya que en tal caso por la ecuación 5.1.2:

$$\forall\, x < \omega(H) \qquad H(x) = H^s(A_s + x) < 1 \qquad 5.1.22$$

de donde se deduce fácilmente que el número A_s es positivo, entonces podríamos encontrar un número real x tal que:

$$x < \omega(H) < A_s + x$$

y por la definición de $\omega(H)$:

$$H(A_s + x) = 1$$

lo cual contradice la expresión 5.1.22.

Así hemos probado que si:

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \ni B_M < 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\, m \geq 1 \quad B_m \leq 1 \,.$$

por lo tanto, la igualdad 5.1.13 es válida para todo número natural m, es decir que:

$$\forall\, m \geq 1 \qquad \frac{A_m}{1 - B_m} = \omega(\mathrm{H}) \,. \qquad 5.1.23$$

A continuación definiremos una función G que nos permitirá reducir la ecuación 5.1.2 en la ecuación 5.1.3. Sea

$$\forall\, z \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}(z) = \mathrm{H}(\omega(\mathrm{H}) - e^{-z}) \qquad 5.1.24$$

dicha transformación. Sea

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad C_m = -\log B_m$$

entonces:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{G}^m(C_m + z) = \mathrm{H}^m[\,\omega(\mathrm{H}) - \exp(-(C_m + z))$$

substituyendo C_m:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{G}^m(C_m + z) = \mathrm{H}^m(\omega(\mathrm{H}) - B_m e^{-z}) \qquad 5.1.25$$

por la igualdad 5.1.23:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad A_m + B_m\omega(\mathrm{H}) = A_m + B_m \frac{A_m}{1 - B_m} = \frac{A_m}{1 - B_m} = \omega(\mathrm{H})$$

substituyendo en la ecuación 5.1.25:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{G}^m(C_m + z) = \mathrm{H}^m[\,A_m + B_m(\omega(\mathrm{H}) - e^{-z})]$$

por la ecuación 5.1.2:

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \qquad G^m(C_m + z) = H(\omega(H) - e^{-z}) = G(z)$$

que precisamente es la ecuación 5.1.3 y vimos que la solución de esta ecuación es:

$$\forall\ z \in \mathbb{R},\ a > 0 \qquad G(z) = exp(-e^{-az-c})$$

entonces, realizando el siguiente cambio de variable en la ecuación 5.1.24:

$$u = \omega(H) - e^{-z} \quad \Rightarrow \quad z = log\frac{1}{\omega(H) - u}$$

obtenemos que:

$$\forall\ z < \omega(H),\ a > 0$$

$$H(z) = G\left[log\frac{1}{\omega(H) - z}\right] = exp[-e^{-c}(\omega(H) - z)^a]$$

es solución de la ecuación 5.1.2 y tomando:

$$\gamma = a\ , \qquad A = -e^{-c/a}\omega(H) \quad y \quad B = e^{-c/a}$$

obtenemos que:

$$H(z) = H_{2,\gamma}(A + Bz)$$

por lo tanto, las funciones $H_{2,\gamma}$ y H son del mismo tipo.

iii) Solamente nos falta encontrar las soluciones de la ecuación en el caso en el que existe un número natural M tal que el número B_M es mayor que uno. En este caso, como analizamos en el transcurso de la demostración *ii)* (ver el párrafo entre las expresiones 5.1.18 y 5.1.20):

$$\alpha(H) = \frac{A_M}{1 - B_M} > -\infty \qquad y \qquad \omega(H) = \infty$$

y también demostramos que si existía un número natural m tal que el número B_m fuera menor que uno, entonces:

$$\omega(H) = \frac{A_m}{1 - B_m} < \infty \qquad y \qquad \alpha(H) = -\infty$$

por lo tanto si:

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \ni B_M > 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad B_m \geq 1 \,.$$

Ahora, veamos que no es posible que exista un número natural s tal que el número B_s sea igual a uno, ya que si fuera así, como $\alpha(H)$ es finito, entonces podríamos encontrar un número real x para el cual:

$$\text{si } A_s > 0 \qquad x < \alpha(H) < x + A_s$$

$$\text{si } A_s < 0 \qquad x + A_s < \alpha(H) < x$$

y por la ecuación 5.1.2 y la definición de $\alpha(H)$:

$$\text{si } A_s > 0 \qquad 0 = H(x) = H^s(x + A_s) > 0 \quad \nabla$$

$$\text{si } A_s < 0 \qquad 0 < H(x) = H^s(x + A_s) > 0 \quad \nabla \,.$$

El caso $A_s = 0$, tampoco es posible, debido a que por la ecuación 5.1.2:

$$H(x) = H^s(x)$$

entonces la función H sería una función de distribución degenerada. Por lo tanto:

$$\text{si } \exists\, M \in \mathbb{N} \ni B_M > 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad B_m > 1$$

y de esta forma, la ecuación 5.1.18 se cumple para todo número natural, es decir que:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \alpha(H) = \frac{A_m}{1 - B_m} \,. \qquad 5.1.26$$

Ahora al igual que en el inciso *ii)* (ver ecuación 5.1.24) definiremos una función G que nos permita transformar la ecuación 5.1.2 en la ecuación 5.1.3. Sean

$$\forall\, z \in \mathbb{R} \qquad G(z) = H(\alpha(H) + e^{z}) \qquad 5.1.27$$

y

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad C_m = -\log B_m$$

entonces, al igual que en el inciso *ii)*, pero ahora utilizando la relación 5.1.26 obtenemos que:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad G^{m}(C_m + z) = H(\alpha(H) + e^{z}) = G(z)$$

que precisamente es la ecuación 5.1.3 y cuya solución es:

$$\forall\, z \in \mathbb{R} \qquad G(z) = \exp(-e^{-az-c}) .$$

Así, realizando el siguiente cambio de variable en la ecuación 5.1.27:

$$u = \alpha(H) + e^{z} \quad \Rightarrow \quad z = \log u - \alpha(H)$$

obtenemos que:

$$H(z) = G[\log(z - \alpha(H)] = \exp[-e^{-c}(z - \alpha(H))^{-a}]$$

y tomando:

$$\gamma = a, \quad A = -\alpha(H)e^{c/a} \quad \text{y} \quad B = e^{c/a}$$

encontramos que:

$$H_{1,\gamma}(A + Bx) = H(x)$$

es decir, que las funciones H y $H_{1,\gamma}$ son del mismo tipo.

En los incisos *i)*, *ii)* y *iii)* demostramos que la ecuación 5.1.2 sólo tiene tres tipos de soluciones, a decir las funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$. Por lo tanto, si la

función F está en el dominio de atracción de la función H, entonces ésta pertenece a alguna de las tres clases de equivalencia generadas por las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$. ■

El siguiente corolario es el resultado presentado por Gnedenko:

Corolario 5.2 *Solamente existen tres tipos de funciones de distribución límite (no degeneradas) de la sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ y éstas son las funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$.*

Demostración.- Dado el teorema 5.1 las únicas funciones de distribución límite, son las funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$ $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$, por lo cual, lo único que nos falta comprobar, es que éstas sean funciones de distribución límite posibles, pero en los teoremas 6.1, 6.2 y 6.3 veremos que esto efectivamente es cierto, con lo cual el corolario 5.2 queda demostrado. ■

Para concluir con esta sección, enunciamos el resultado correspondiente al mínimo.

Teorema 5.3 *Sólo existen tres tipos de funciones de distribución límite (no degeneradas) de la sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ y éstas son las funciones del mismo tipo que $L_{1,\gamma}$, $L_{2,\gamma}$ y $L_{3,0}$. (ver reglas de correspondencia 1.12, 1.13 y 1.14).*

6. CRITERIOS DE PERTENENCIA

Como su nombre lo indica, esta sección está dedicada a dar un conjunto de condiciones o criterios necesarios y suficientes para que la función de distribución F (correspondiente a la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas) pertenezca al dominio de atracción de las funciones de distribución límite $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$ en los teoremas 6.1, 6.2 y 6.3 respectivamente.

Para demostrar que el conjunto de condiciones que daremos son suficientes, nos basaremos principalmente en los resultados obtenidos en la sección 2 (Condiciones Suficientes). Además daremos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ específicas y utilizaremos éstas, simplemente porque son relativamente fáciles de manejar.

Para demostrar que el conjunto de condiciones que enunciamos son necesarias, utilizaremos básicamente los resultados obtenidos en las secciones 3 y 4 (Términos de estandarización y Relación funcional de las funciones de distribución límite).

Para finalizar esta sección, mencionamos simplemente los teoremas correspondientes a la sucesión de mínimos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ y no incluímos las demostraciones, pero éstos se deducen a partir de los teoremas 6.1, 6.2 y 6.3 y de la relación 1.14 :

$$H(-x) = 1 - L(x).$$

Teorema 6.1 *La función de distribución F está en el dominio de atracción de la función de distribución* $H_{1,\gamma}$ *, cuya regla de correspondencia está dada por:*

si γ *es un número real positivo,*

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} si\ x \le 0 & 0 \\ si\ x > 0 & exp(-x^{-\gamma}) \end{cases}$$

si y solamente si

$$\omega(F) = \infty \qquad 6.1.1$$

y para todo número real x *positivo:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\gamma} . \qquad 6.1.2$$

En otras palabras, existen sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = H_{1,\gamma}(x)$$

si y sólo si las condiciones 6.1.1 y 6.1.2 se cumplen; y las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ se pueden elegir de la siguiente forma:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 0 \qquad y \qquad b_n = \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\}.$$

Demostración.- Primero demostraremos que las condiciones 6.1.1 y 6.1.2 son suficientes para que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = H_{1,\gamma}(x)$$

para lo cual utilizaremos el corolario 2.4 escogiendo las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente forma:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 0 \qquad y \qquad b_n = \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\}$$

y demostraremos que:

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(b_n x)) = u(x) = \begin{cases} \text{si } x > 0 & x^{-\gamma} \\ \text{si } x \le 0 & \infty \end{cases} \qquad 6.1.3$$

Así, si logramos probar la expresión 6.1.3, por el corolario 2.4 tendremos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le b_n x) = H_{1,\gamma}(x) = e^{-u(x)}.$$

Dado que $\omega(F) = \infty$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf\{x \mid 1 - \frac{1}{n} \le F(x)\} = \infty$$

entonces, para todo número x negativo:

$$\lim_{n\to\infty} b_n x = -\infty$$

y como:

$$\lim_{y\to-\infty} F(y) = 0$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} 1 - F(b_n x) = 1$$

por lo tanto:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^- \qquad \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n x)] = \infty .$$

Ahora, sea x un número positivo. Utilizando la condición 6.1.1 con $t = b_n$ y recordando que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n x = \infty$$

obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(b_n x)}{1 - F(b_n)} = x^{-\gamma} \qquad 6.1.4$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n x)] = \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n)]\ \frac{1 - F(b_n x)}{1 - F(b_n)}$$

$$= x^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n)]$$

así, si

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n)] = 1$$

habremos demostrado la suficiencia de las condiciones 6.1.1 y 6.1.2. Para demostrar que efectivamente este límite se cumpe, recordemos que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad\qquad b_n = \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\}$$

entonces:

$$\forall\ x \in (0,\ 1] \qquad\qquad b_n x \le b_n$$

por lo que:

$$1 - F(b_n) \le \frac{1}{n} \le 1 - F(b_n x)$$

de aquí que:

$$n\,[1 - F(b_n)] \le 1$$

y

$$\frac{1}{1 - F(b_n x)} \le 1$$

y de estas desigualdades obtenemos que:

$$\frac{1 - F(b_n)}{1 - F(b_n x)} \le n\,[1 - F(b_n x)] \le 1$$

y por la expresión 6.1.2 al tomar el límite cuando n tiende a infinito, en esta última desigualdad encontramos que:

$$x^{\gamma} \le \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n)] \le 1$$

y como $x \in (0, 1]$ es arbitrario, concluímos que:

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(b_n)] = 1.$$

Ahora, demostraremos que las condiciones 6.1.1 y 6.1.2 son necesarias. Así pues, supongamos que $F \in \mathcal{D}(H_{1,\gamma})$, es decir que existen sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$\gamma > 0 \qquad\qquad \lim F^n(a_n + b_n x) = H_{1,\gamma}(x)\ . \qquad\qquad 6.1.5$$

A partir de esta relación, deduciremos que $\omega(F) = \infty$ y que la condición 6.1.2 se cumple. Así, dada la condición 6.1.5 podemos aplicar el teorema 4.1 con $m = 2$, entonces los números A_2 y B_2 satisfacen la siguiente identidad:

$$H_{1,\gamma}^{2}(A_2 + B_2 x) = H_{1,\gamma}(x)$$

es decir que:

$$A_2 = 0 \qquad y \qquad B_2 = 2^{1/\gamma}$$

y a partir de las relaciones 6.1.5, 4.1.1 y 4.1.2 sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n} - a_n}{b_n} = 0 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n}}{b_n} = 2^{1/\gamma}.$$

Sea para todo número natural k, $n(k) = 2^k$, entonces estos límites los podemos escribir de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n(k+1)} - a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n(k+1)}}{b_{n(k)}} = 2^{1/\gamma}. \quad 6.1.6$$

A continuación demostraremos que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = 0\ .$$

Suponiendo que $a_{n(0)} = 0$, podemos expresar la diferencia $a_{n(k)} - a_{n(0)}$ como una suma telescópica, así:

$$\frac{a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_{n(j+1)} - a_{n(j)}}{b_{n(k)}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_{n(j+1)} - a_{n(j)}}{b_{n(j)}} \frac{b_{n(j)}}{b_{n(k)}} = S_k \qquad 6.1.7$$

de esta forma, para demostrar que el cociente $a_{n(k)}/b_{n(k)}$ converge a cero cuando k tiende a infinito, basta mostrar que la suma S_k converge a cero.

Sea M un número natural tal que para todo número ε positivo y para todo número natural j mayor que el número M

$$\left| \frac{a_{n(k+1)} - a_{n(k)}}{b_{n(j)}} \right| < \varepsilon . \qquad 6.1.8$$

Observemos que el número M lo podemos escoger de esta forma, dado que el primer límite de la expresión 6.1.6 es cero.

Por otra parte, como el segundo límite de la expresión 6.1.6 es $2^{1/\gamma}$ (que es mayor que uno), tenemos que para k suficientemente grande:

$$b_{n(k+1)} > b_{n(k)}$$

entonces:

$$\lim_{k\to\infty} b_{n(k)} = \infty \qquad 6.1.9$$

y además:

$$\gamma > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{b_{n(k)}}{b_{n(k+1)}} = 2^{-1/2} < 1 .$$

Sea $q = \frac{1}{2}(1 + 2^{-1/2})$ ($q < 1$), entonces existe un número natural N tal que:

$$\forall\, k \geq N \qquad \frac{b_{n(k)}}{b_{n(k+1)}} < q \qquad \mathbf{6.1.10}$$

y como el cociente $b_{n(j)} / b_{n(k)}$ ($k \geq j$) lo podemos expresar como el producto de $k - j$ factores:

$$\forall\, k \geq j \qquad \frac{b_{n(j)}}{b_{n(k)}} = \frac{b_{n(j)}}{b_{n(j+1)}} \frac{b_{n(j+1)}}{b_{n(j+2)}} \cdots \frac{b_{n(k-1)}}{b_{n(k)}}$$

considerando la desigualdad 6.1.10 este cociente estará acotado de la siguiente forma:

$$\forall\, k > j \quad \text{y} \quad \forall\, j \geq N \qquad \frac{b_{n(j)}}{b_{n(k)}} < q^{k-j}\,. \qquad \mathbf{6.1.11}$$

Hechas estas consideraciones, observemos que la suma S_k de la expresión 6.1.7 la podemos separar en dos sumas S_1 y S_2 de la siguiente manera:

$$\frac{a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = S_k = \sum_{j=0}^{M'} \frac{a_{n(j+1)} - a_{n(j)}}{b_{n(k)}}$$

$$+ \sum_{j=M'+1}^{k-1} \frac{a_{n(j+1)} - a_{n(j)}}{b_{n(j)}} \frac{b_{n(j)}}{b_{n(k)}} = S_1 + S_2$$

donde el número $M' = \max\{M, N\}$ y M y N son los números descritos en las expresiones 6.1.8 y 6.1.11. Probemos que cuando k tiende a infinito las sumas S_1 y S_2 convergen a cero. Empecemos analizando la suma S_2. Dadas las expresiones 6.1.8 y 6.1.11:

$$S_2 \leq \sum_{j=M'+1}^{k-1} \left| \frac{a_{n(k+1)} - a_{n(k)}}{b_{n(j)}} \right| \frac{b_{n(j)}}{b_{n(k)}} \leq \sum_{j=M'+1}^{k-1} \varepsilon' q^{k-j}$$

y como:

$$\forall\ k,j \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon' q^{k-j} > 0$$

entonces:

$$S_2 \leq \frac{\varepsilon}{1-q}$$

por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = 0.$$

Ahora analicemos la suma S_1 que es una suma telescópica, entonces:

$$S_1 = \frac{a_{n(M'+1)} - a_{n(M')} - a_{n(1)}}{b_{n(k)}} = \frac{C_{M'}}{b_{n(k)}}$$

donde $C_{M'}$ es una constante que depende del número M' y considerando el límite 6.1.9 obtenemos que:

$$\lim_{k\to\infty} S_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{C_{M'}}{b_{n(k)}} = 0$$

por lo tanto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = 0\ .$$

En estas condiciones podemos aplicar el lema 3.1 a la expresión 6.1.5 para la subsucesión $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty} = \{2^k\}_{k=1}^{\infty}$ tomando:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad C_n = a_n\ ;\ C_n^* = 0 \ \ \text{y} \ \ D_n = b_n$$

así:

$$\lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(b_{n(k)}x) = H_{1,\gamma}(x) \qquad 6.1.12$$

y recordando que:

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad b_{n(k)} > 0 \quad \text{y} \quad \forall\, x > 0,\quad 0 < H_{1,\gamma}(x) < 1 \qquad 6.1.13$$

concluímos que $\omega(F) = \infty$, ya que de lo contrario podríamos encontrar un número x positivo tal que:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad b_{n(k)}x > \omega(F)$$

y entonces:

$$1 = F^{n(k)}(b_{n(k)}x)$$

lo cual contradice las expresiones 6.1.12 y 6.1.13, por lo tanto la condición 6.1.1 se cumple.

Ahora, para probar que la condición 6.1.2 se satisface, consideremos la expresión 6.1.9; así, dado un número t suficientemente grande, podemos encontrar un número natural k tal que:

$$b_{n(k)} \leq t < b_{n(k+1)}$$

y como la función F es monótona no decreciente:

$$\forall\, x > 0 \qquad F(b_{n(k)}x) \leq F(tx) \leq F(b_{n(k+1)}x) \qquad 6.1.14$$

Sabemos que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad F(x) \in (0,\ 1),$$

entonces podemos aplicar la función logaritmo en la desigualdad 6.1.14 tomando $x > 0$, $x = 1$ y t suficientemente grande:

$$\forall\, x > 0 \qquad \log F(b_{n(k)}x) \leq \log F(tx) \leq \log F(b_{n(k+1)}x)$$

y recordando que para todo número real x , $\log F(x)$ es negativo

$$\text{si } x = 1 \qquad \frac{1}{\log F(b_{n(k)})} \geq \frac{1}{\log F(t)} \geq \frac{1}{\log F(b_{n(k+1)})}$$

y de estas dos últimas cadenas de desigualdades obtenemos que:

$$\frac{log F(b_{n(k)}x)}{log F(b_{n(k)})} \geq \frac{log F(tx)}{log F(t)} \geq \frac{log F(b_{n(k+1)}x)}{log F(b_{n(k+1)})} . \qquad 6.1.15$$

Ahora si aplicamos la función logaritmo en la expresión 6.1.12 tendremos que:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} n(k)\ log F^{n(k)}(b_{n(k)}x) = -x^{-\gamma}$$

en particular si $x = 1$,

$$\lim_{k\to\infty} n(k)\ log F^{n(k)}(b_{n(k)}) = -1$$

entonces:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{log F(b_{n(k)}x)}{log F(b_{n(k)})} = x^{-\gamma}$$

por lo tanto, al tomar el límite cuando k tiende a infinito en la expresión 6.1.15, encontramos que:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{log F(tx)}{log F(t)} = x^{-\gamma} \qquad 6.1.16$$

que es equivalente a la condición 6.1.2 como veremos a continuación:

expresemos $log F(tx)$ de la siguiente forma:

$$log F(tx) = log(1 - [1 - F(tx)]).$$

Sea $y = 1 - F(tx)$ y utilicemos el desarrollo de Taylor de la función:

$$f(y) = log[1 - (1 - y)]$$

alrededor del cero, entonces:

$$\log F(tx) = -[1 - F(tx)] - \frac{[1 - F(tx)]^2}{2} \ldots - \frac{[1 - F(tx)]^n}{n} \ldots$$

dividiendo entre $1 - F(tx)$:

$$\frac{-\log F(tx)}{1 - F(tx)} = 1 + \frac{[1 - F(tx)]}{2} \ldots \qquad 6.1.17$$

considerando que:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{t\to\infty} F(tx) = 1$$

y tomando el límite cuando t tiende a infinito en la identidad 6.1.17 obtenemos que:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{-\log F(tx)}{1 - F(tx)} = 1$$

entonces, si $x = 1$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-\log F(t)}{1 - F(t)} = 1$$

finalmente considerando la expresión 6.1.16 y estos dos últimos límites, obtenemos que:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\log F(tx)}{\log F(t)} \, \frac{1 - F(tx)}{\log F(tx)} \, \frac{\log F(t)}{1 - F(t)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\gamma}$$

como queríamos demostrar. ∎

Teorema 6.2 *La función de distribución* F *está en el dominio de atracción de la función de distribución* $H_{2,\gamma}$, *cuya regla de correspondencia está dada por:*

si γ *es un número real positivo:*

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} si\ x < 0 & exp(-(-x)^{\gamma}) \\ si\ x \geq 0 & 1 \end{cases}.$$

si y solamente si

$$\omega(F) \text{ es finito} \qquad 6.2.1$$

y si para todo número real x *positivo, la función de distribución* F^* *dada por:*

$$F^*(x) = F(\omega(F) - \tfrac{1}{x})$$

satisface la condición **6.1.2**, *es decir, si:*

$$\forall\ x > 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F^*(tx)}{1 - F^*(t)} = x^{-\gamma}. \qquad 6.2.2$$

Las constantes de estandarización se pueden escoger como:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad a_n = \omega(F) \ \text{ y } \ b_n = \omega(F) - \inf\{x \mid 1 - F(x) \leq \tfrac{1}{n}\}.$$

Demostración.- Primero demostraremos la suficiencia de las condiciones 6.2.1 y 6.2.2, para lo cual, empezaremos aplicando el teorema 6.1 a variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con función de distribución F^*, la cual está definida para todo número x positivo. Observemos que dada la definición de la condición 6.2.2, según el teorema 6.1 tenemos que:

$$\forall\ x > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F^{*n}(b_n^* x) = \lim_{n\to\infty} F^n\left[\omega(F) - \frac{1}{b_n^*}\right]$$

$$= H_{1,\gamma}(x) \qquad 6.2.3$$

donde

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad b^*_n = \inf\{x \mid 1 - F(\omega(F) - \tfrac{1}{x}) \le \tfrac{1}{n}\}$$

es decir que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad b^*_n = \inf\{x \mid 1 - F^*(x) \le \tfrac{1}{n}\}$$

y si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$y = \omega(F) - \tfrac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{\omega(F) - y}$$

tendremos que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad b^*_n = \inf\left\{\frac{1}{\omega(F) - y} \;\middle|\; 1 - F(y) \le \tfrac{1}{n}\right\}$$

por lo tanto

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad b^*_n = \left\{\frac{1}{\omega(F) - \inf\{y \mid 1 - F(y) \le \tfrac{1}{n}\}}\right\}$$

entonces, tomando:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \omega(F) \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{b^*_n}$$

por la igualdad 6.2.3:

$$\forall\ x > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F^n\left(a_n - \frac{b_n}{x}\right) = H_{1,\gamma}(x)$$

o bien:

$$\forall\ x > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = H_{1,\gamma}(-\tfrac{1}{x})$$

pero observemos que:

$$\forall\ x < 0 \qquad H_{1,\gamma}(-\tfrac{1}{x}) = exp(-(-x)^{\gamma}) = H_{2,\gamma}(x).$$

Ahora, para el caso en el que el número x es positivo, observemos que como:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = \omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\}$$

entonces para todo número y mayor que $\omega(F)$, la función de distribución F evaluada en y valdrá uno, y así, dado que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad b_n > 0 \qquad \text{y} \qquad x > 0$$

tenemos que:

$$F^n(\alpha_n + b_n x) \equiv 1$$

por lo tanto:

$$\forall\ x > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(\alpha_n + b_n x) = 1 = H_{2,\gamma}(x)$$

como queríamos demostrar.

Ahora demostraremos que las condiciones 6.2.1 y 6.2.2 son necesarias. Así pues, supongamos que la función de distribución F está en el dominio de atracción de la función $H_{2,\gamma}$, es decir, existen sucesiones de números reales $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$\forall\ x > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(\alpha_n + b_n x) = H_{2,\gamma}(x).$$

Primero probaremos que $\omega(F)$ es finito. Recurramos de nuevo al teorema 4.1 y considerando el caso en el que $m = 2$, entonces:

$$H^2_{2,\gamma}(A_2 + B_2 x) = H_{2,\gamma}(x)$$

es decir:

$$\forall\ x < 0,\ \gamma > 0 \qquad exp\left[-2(-A_2 - B_2 x)^{\gamma}\right] = exp(-(-x)^{\gamma})$$

de donde deducimos que: $A_2 = 0$ y $B_2 = 2^{-1/\gamma}$. En estas condiciones los límites 4.1.1 y 4.1.2 serán:

$$\text{si } \gamma > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n} - a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n}}{b_n} = 2^{-1/\gamma} .$$

Para todo número natural k sea $n(k) = 2^k$. De esta forma, tenemos para la subsucesión $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ que: si $\gamma > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n(k+1)} - a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{b_{n(k+1)}}{b_{n(k)}} = 2^{-1/\gamma} \qquad 6.2.4$$

A partir de la expresión 6.2.4 si logramos demostrar que para algún número real a:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a - a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = 0 \qquad 6.2.5$$

podremos aplicar el lema 3.1 tomando:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad C_n = a_{n(k)} \;;\; C_n^{*} = a \;;\; D_n = b_{n(k)}$$

y así obtener que:

$$\lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(a + b_{n(k)}x) = H_{2,\gamma}(x) .$$

Probemos que la expresión 6.2.5 se cumple. Como:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{n(k+1)}}{b_{n(k)}} < 1$$

entonces:

$$\lim_{k\to\infty} b_{n(k)} = 0$$

es decir, dado un número ε positivo menor que uno,

$$\exists\ N_1 \in \mathbb{N} \ni \forall\ k \ge N_1$$

$$b_{n(k)} < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b_{n(k)}} > 1. \qquad 6.2.6$$

Además como el primer límite de la expresión 6.2.4 es cero, dado

$$\varepsilon > 0\ \exists\ N_2 \in \mathbb{N} \ni \forall\ k \ge N_2$$

$$\left| \frac{a_{n(k+1)} - a_{n(k)}}{b_{n(k)}} \right| < \varepsilon . \qquad 6.2.7$$

Así, considerando las expresiones 6.2.6 y 6.2.7, tenemos que:

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ si } M = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall\ k \ge M$$

$$|a_{n(k+1)} - a_{n(k)}| < \left| \frac{a_{n(k+1)} - a_{n(k)}}{b_{n(k)}} \right| < \varepsilon$$

por lo tanto:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k+1)} - a_{n(k)} = 0$$

es decir, existe un número real a para el cual:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = a .$$

A partir de ésto y dado que el primer límite de la expresión 6.2.4 es cero, deducimos que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a - a_{n(k)}}{b_{n(k)}} = 0$$

entonces, como ya habíamos visto, por el lema 3.1:

$$\lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(\alpha + b_{n(k)}x) = H_{2,\gamma}(x). \qquad 6.2.8$$

Ahora bien, en vista de que:

$$\lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(\alpha) = H_{2,\gamma}(0) = 1$$

entonces:

$$F(\alpha) = 1$$

y por la definición de $\omega(F)$ tenemos que:

$$\omega(F) \leq \alpha .$$

Probemos que en realidad

$$\omega(F) = \alpha .$$

Obsevemos que según la regla de correspondencia de la función $H_{2,\gamma}$:

$$\forall\, x < 0 \qquad H_{2,\gamma}(x) < 1 .$$

Sea $y = \alpha + b_{n(k)}x$, entonces:

$$\forall\, x < 0 \quad \lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(y) = \lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(\alpha + b_{n(k)}x) = H_{2,\gamma}(x) < 1$$

entonces:

$$\forall\, y < \alpha \qquad F(y) < 1$$

por lo tanto

$$\omega(F) = \alpha < \infty .$$

Ahora, para demostrar que la condición 6.2.2 se cumple, reduzcamos la expresión 6.2.8 a la 6.1.12 de la siguiente manera, sabemos que:

$$\forall\, x > 0 \qquad\qquad F^{*}(x) = F(\alpha - \tfrac{1}{x})$$

sea

$$\forall\, k \in \mathrm{N} \qquad\qquad b^{*}_{n(k)} = \frac{1}{b_{n(k)}}.$$

Observemos que en estas condiciones:

$$\omega(F^{*}) = \infty$$

y que:

$$\lim_{k\to\infty} b^{*}_{n(k)} = \infty \qquad (b_{n(k)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty).$$

Sea $y = -\frac{1}{x}$, entonces por la identidad 6.2.8:

$$\lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(\alpha + b_{n(k)}y) = H_{2,\gamma}(y) = H_{2,\gamma}(-\tfrac{1}{x}) = H_{1,\gamma}(x) \qquad 6.2.9$$

y por otra parte:

$$F^{n(k)}(\alpha + b_{n(k)}y) = F^{n(k)}\left[\alpha - \frac{b_{n(k)}}{x}\right] = F^{*n(k)}\left[\frac{x}{b_{n(k)}}\right]$$

$$= F^{*}(b^{*}_{n(k)}x) \qquad 6.2.10$$

por lo tanto, por las expresiones 6.2.9 y 6.2.10:

$$\lim_{k\to\infty} F^{*}(b^{*}_{n(k)}x) = H_{1,\gamma}(x) \qquad 6.2.11$$

que precisamente es la expresión 6.1.12 y como ya demostramos en el teorema 6.1 , si la función F^{*} satisface la condición 6.2.11, entonces F^{*} satisface que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F^{*}(tx)}{1 - F^{*}(t)} = x^{-\gamma}$$

como queríamos probar.

■

Teorema 6.3 *La función de distribución* F *está en el dominio de atracción de la función de distribución* $H_{3,0}$, *cuya regla de correspondencia está dada por:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad H_{3,0}(x) = exp(-e^{-x}) \; .$$

si y solamente si

$$\exists\, a \in [\alpha(F), \omega(F)] \;\Rightarrow$$

$$\int_{a}^{\omega(F)} [1 - F(y)]\; dy < \infty \qquad\qquad 6.3.1$$

y si definimos la función R *como:*

$$\forall\, t \;\Rightarrow\; \alpha(F) < t < \omega(F)$$

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_{t}^{\omega(F)} [1 - F(y)]\; dy \qquad\qquad 6.3.2$$

se cumple que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F[t + xR(t)]}{1 - F(t)} = e^{-x}. \qquad\qquad 6.3.3$$

Las constantes de estandarización se pueden elegir de la siguiente forma:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \tfrac{1}{n}\} \quad \text{y} \quad b_n = R(a_n) \; .$$

Demostración.- Al igual que en los teoremas 6.1 y 6.2, primero demostraremos que las condiciones 6.3.1 y 6.3.2 son suficientes para que la función F esté en el dominio de atracción de la función $H_{3,0}$, para lo cual, seguiremos el mismo procedimiento que en la demostración del teorema 6.1 que a su vez, se redujo al corolario 2.4. Observemos que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n = \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \tfrac{1}{n}\} = \inf\{x \mid F(x) \ge 1 - \tfrac{1}{n}\}$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \omega(F).$$

Así, utilizando la condición 6.3.3 con $a_n = t$ y $b_n = R(a_n)$, tenemos que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(a_n + b_n x)}{1 - F(a_n)} = e^{-x} \qquad 6.3.4$$

entonces:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} n\,(1 - F(a_n + b_n x))$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n)]\, \frac{1 - F(a_n + b_n x)}{1 - F(a_n)} = e^{-x} \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n)]$$

Así, si demostramos que:

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n)] = 1 \qquad 6.3.5$$

tendremos que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} n\,(1 - F(a_n + b_n x)) = e^{-x} = u(x)$$

por lo tanto, por el corolario 2.4:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = e^{-u(x)} = exp(-e^{-x})$$

como establece el teorema 6.3.

Probemos la expresión 6.3.5. Dado que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \inf\{x \mid 1 - F(x) \le \tfrac{1}{n}\}$$

tenemos que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad 1 - F(a_n) \le \frac{1}{n} \le 1 - F(a_n + b_n \varepsilon)$$

entonces:

$$n\,[1 - F(a_n)] \le 1$$

y

$$\forall\, \varepsilon < 0 \qquad \frac{1}{1 - F(a_n + b_n\varepsilon)} \le n$$

de estas dos desigualdades se desprende que:

$$\forall\, \varepsilon < 0 \qquad \frac{1}{1 - F(a_n + b_n\varepsilon)} \le n\,[1 - F(a_n)] \le 1$$

y considerando la expresión 6.3.4 al tomar el límite cuando n tiende a infinito en esta última desigualdad obtenemos que:

$$e^{\varepsilon} \le \lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n)] \le 1$$

pero como el número ε es arbitrario, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n)] = 1$$

como queríamos demostrar.

Ahora supondremos que existen sucesiones de números reales $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ (con $B_n > 0$) tales que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(A_n + B_n x) = H_{3,0}(x) = exp(-e^{-x}) \qquad 6.3.6$$

y de aquí deduciremos que las condiciones 6.3.1 y 6.3.3 se cumplen. Dado que la demostración es un poco larga, la dividiremos en cinco pasos, a lo largo de los cuales utilizaremos continuamente la siguiente función:

$$\forall\, x \in (0, 1) \qquad G^*(x) = \sup\{y \mid F(y) \le 1 - x\} \qquad 6.3.7$$

y las siguientes sucesiones:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n = G^*(\tfrac{1}{n}) \quad y \quad b_n = G^*(\tfrac{1}{ne}) - a_n \qquad 6.3.8$$

Los cinco pasos consisten en lo siguiente: suponiendo que la función F está en el dominio de atracción de la función $H_{3,0}$, en el primero veremos que en el límite 6.3.6 podemos intercambiar las sucesiones de números $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ por las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. A partir de ésto, en el segundo paso, probaremos que si:

$$h(t) = G^{*}\left[\frac{1 - F(t)}{e}\right] - t$$

entonces:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F[t + xh(t)]}{1 - F(t)} = e^{-x} .$$

En el tercer paso, demostraremos que si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos que converge a cero cuando n tiende a infinito, entonces:

$$\forall\ u > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{G^{*}(z_n u) - G^{*}(z_n)}{G^{*}(z_n/e) - G^{*}(z_n)} = -\log u .$$

En el cuarto paso, con ayuda de los primeros tres resultados, mostraremos que si la función de distribución F es estrictamente creciente, continua y pertenece al dominio de atracción de la función $H_{3,0}$, entonces las condiciones 6.3.1 y 6.3.2 se cumplen. Y por último, en el quinto paso, veremos que existe una función de distribución F^{*} con las características de la función de distribución descritas en el paso cuatro y que además satisface que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - F(t)}{1 - F^{*}(t)} = 1$$

de donde deduciremos finalmente que las condiciones 6.1.1 y 6.1.3 se cumplen para la función de distribución F.

Paso 1.- Dado que se cumple la expresión 6.3.6 para algunas sucesiones de números reales $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, veremos que ésta también se cumple para las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en la expresión 6.3.8. Para ésto, según el lema 3.1 tendremos que demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - A_n}{B_n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{b_n} = 1 . \qquad 6.3.9$$

Antes de demostrar estos límites, mediante un argumento intuitivo, trataremos de justificar porque las sucesiones de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ las escogimos de esa forma: si en la expresión 6.3.6 tomamos $x = 0$, entonces para un número n suficientemente grande tendremos que:

$$F^n(A_n) \cong \frac{1}{e} \cong \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

de donde deducimos que para un número n suficientemente grande, el número $F(A_n)$ se aproxima a $1 - \frac{1}{n}$. Analogamente, tomando en la expresión 6.3.6 $x = 1$, obtenemos que:

$$F^n(A_n + B_n) \cong exp\left(- \frac{1}{e}\right) \cong \left(1 - \frac{1}{ne}\right)^n$$

es decir, para un número n suficientemente grande, el número $F(A_n + B_n)$ se aproxima a $1 - 1/ne$. Estas dos aproximaciones, son las que nos sugieren que las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ elegidas en la expresión 6.3.8, deben satisfacer el límite 6.3.6.

Para demostrar los límites 6.3.9, observemos que de las identidades 6.3.7 y 6.3.8 tenemos que:

$$F(a_n) = F(\sup\{y \mid F(y) \le 1 - \tfrac{1}{n}\})$$

así:

$$P(X_n < a_n) \le 1 - \frac{1}{n} \le F(a_n) = P(X_n \le a_n) . \qquad 6.3.10$$

Por otra parte, de la expresión 6.3.6, tomando $x = 0$, tenemos que:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad y \quad \forall\ \gamma > 0,\ \exists\ N_1 \in \mathbb{N} \ni \forall\ n \geq N_1$$

$$|F^n(A_n - B_n\varepsilon) - H_{3,0}(-\varepsilon)| < \gamma$$

y

$$|F^n(A_n + B_n\varepsilon) - H_{3,0}(\varepsilon)| < \gamma$$

de donde deducimos que:

$$F^n(A_n - B_n\varepsilon) < H_{3,0}(-\varepsilon) + \gamma$$

y

$$H_{3,0}(\varepsilon) - \gamma < F^n(A_n + B_n\varepsilon) \qquad 6.3.11$$

Ahora, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos que converja a cero cuando n tienda a infinito, entonces como cero es un punto de continuidad de la función $H_{3,0}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} H_{3,0}(x_n) = H_{3,0}(0)$$

de aquí que:

$$\forall\ \varepsilon,\ \gamma > 0 \quad \exists\ N_2 \in \mathbb{N} \ni \forall\ n \geq N_2$$

$$\left| H_{3,0}(\varepsilon) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right| < \gamma \quad y \quad \left| H_{3,0}(-\varepsilon) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right| < \gamma$$

de donde se sigue que:

$$H_{3,0}(-\varepsilon) + \gamma < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < H_{3,0}(\varepsilon) + \gamma \qquad 6.3.12$$

así, de las desigualdades 6.3.11 y 6.3.12 tenemos que:

$\forall\ \varepsilon > 0$ si $N = \{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall\ n \geq N$

$$F^n(A_n - B_n\varepsilon) < \left[1 - \frac{1}{n}\right]^n < F^n(A_n + B_n\varepsilon). \qquad 6.3.13$$

Sea z un número real tal que:

$$H_{3,0}(z) = exp(-e^{-z}) = \left[1 - \frac{1}{n}\right]$$

evidentemente el número z depende del número n y sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{n}\right]^n = e^{-1}$$

entonces, substituyendo la función $H_{3,0}$ evaluada en z, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} exp(-e^{-z}) = e^{-1}$$

y aplicando la función logaritmo:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-z} = 1$$

de donde concluímos que:

$$\lim_{n\to\infty} z = 0\ .$$

En estas condiciones, para un número fijo ε positivo y para n suficientemente grande:

$$-\varepsilon < z < \varepsilon\ .$$

Como la función $H_{3,0}$ es estrictamente creciente, podemos escoger en la desigualdad 6.3.11 el número γ de tal forma que:

$$\gamma < H_{3,0}(\varepsilon) - H_{3,0}(z)$$

y de esta forma, se satisface la desigualdad 6.3.13 para n

suficientemente grande:

$$F^n(A_n - B_n\varepsilon) < \left[1 - \frac{1}{n}\right]^n = H_{3,0}(z) < F^n(A_n + B_n\varepsilon) \qquad 6.3.14$$

esto, aunado a que de la desigualdad 6.3.10 tenemos que:

$$P^n(X_n < a_n) \leq \left[1 - \frac{1}{n}\right]^n = H_{3,0}(z) \leq F^n(a_n)$$

nos da el siguiente resultado:

dado $\varepsilon > 0 \quad \exists\, N \ni \forall\, n \geq N$

$$A_n - B_n\varepsilon \leq a_n \leq A_n + B_n\varepsilon$$

es decir:

$$\left|\frac{a_n - A_n}{b_n}\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - A_n}{b_n} = 0 .$$

Para demostrar que el segundo límite de la expresión 6.3.9 es uno, hay que realizar un razonamiento análogo al que hicimos para demostrar que el primer límite de dicha expresión es cero, pero ahora hay que tomar $x = 1$ en el límite 6.3.6, entonces haciendo el mismo procedimiento, podemos deducir que:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1 \ni \forall\, n \geq N_1$

$$P^n(X_n < a_n + b_n) \leq \left[1 - \frac{1}{ne}\right]^n \leq F^n(a_n + b_n)$$

y que:

$$F^n(A_n - B_n(1 + \varepsilon)) < \left[1 - \frac{1}{ne}\right]^n < F^n(A_n + B_n(1 + \varepsilon))$$

(que son las desigualdades equivalentes a la 6.3.10 y 6.3.14) y de estas desigualdades se deduce que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1 \;\ni\; \forall\, n \geq N_1$$

$$A_n - B_n(1 + \varepsilon) \leq a_n + b_n \leq A_n + B_n(1 + \varepsilon)$$

o equivalentemente:

$$-\varepsilon \leq \frac{a_n - A_n}{B_n} + \frac{b_n}{B_n} - 1 < \varepsilon \qquad 6.3.15$$

pero en virtud de que el primer límite de la expresión 6.3.9 es cero, sabemos que dado un número ε positivo:

$$\exists\, N_2 \;\ni\; \forall\, n \geq N_2$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n - A_n}{B_n} < \varepsilon$$

entonces, considerando la desigualdad 6.3.15 y esta última, tenemos que:

$$\text{dado } \varepsilon' > 0 \quad \text{si } \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} \quad \text{y} \quad N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall\, n \geq N$$

$$\left| \frac{b_n}{B_n} - 1 \right| < 2\varepsilon = \varepsilon'$$

es decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{B_n} = 1$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{b_n} = 1$$

como queríamos demostrar. Por lo tanto, por el lema 3.1, el límite 6.3.6 se cumple para las sucesiones de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = H_{3,0}(x).$$

□

Paso 2.- Supongamos que $F \in \mathcal{D}(H_{3,0})$, es decir que la función F satisface la expresión 6.3.6, entonces demostraremos que si:

$$h(t) = G^*\left[\frac{1 - F(t)}{e}\right] - t \qquad 6.3.16$$

entonces:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t + xh(t))}{1 - F(t)} = e^{-x} \qquad 6.3.17$$

pero antes de demostrarlo, observemos que este límite es similar al límite 6.3.3, sólo que $h(t) \neq R(t)$. Sin embargo, más adelante demostraremos que:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{h(t)}{R(t)} = 1$$

y así, podremos intercambiar la función R por la función h en la expresión 6.3.17 sin alterar el resultado.

Tratemos de relacionar la función h con la sucesión de números $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida en la expresión 6.3.8. Observemos que ambas están dadas en términos de la función G^* de la siguiente forma:

$$J(x) = G^*(\frac{x}{e}) - G^*(x) \qquad (G^*(x) = \sup\{y \mid F(y) \leq 1 - x\})$$

al evaluarla en $x = \frac{1}{n}$, obtenemos b_n y al evaluarla en $x = 1$ obtenemos $h(t)$:

$$J(\frac{1}{n}) = b_n \qquad y \qquad J(1 - F(t)) = h(t).$$

Para demostrar la identidad 6.3.17, hay que probar que ésta se cumple para toda sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales, que converja a $\omega(F)$ cuando n tiende a infinito. Primero consideremos la sucesión particular $t_n = a_n$, donde el número a_n se definió en la expresión 6.3.8, la cual evidentemente converge a $\omega(F)$ cuando n tiende a infinito. Para tal efecto, consideremos la identidad 6.3.6; como para todo número real x, el miembro derecho de ésta es positivo, para n suficientemente grande podemos aplicar la función logaritmo a ambos miembros de dicha identidad, así:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} n\ log F(a_n + b_n x) = -e^{-x} \qquad 6.3.18$$

además:

$$\lim_{n\to\infty} log F(a_n + b_n x) = \lim_{n\to\infty} n\ log F(a_n + b_n x) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = log 1$$

y aplicando la función exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} F(a_n + b_n x) = 1. \qquad 6.3.19$$

Consideremos el desarrollo de Taylor de la función:

$$f(y) = log(1 - y)$$

tomando $y = 1 - F(a_n + b_n x)$:

$$log F(a_n + b_n x) = log\Big(1 - [1 - F(a_n + b_n x)]\Big)$$

$$= -[1 - F(a_n + b_n x)] - \frac{[1 - F(a_n + b_n x)]^2}{2} - \ldots$$

dividiendo entre $-[1 - F(a_n + b_n x)]$:

$$-\frac{log F(a_n + b_n x)}{1 - F(a_n + b_n x)} = 1$$

$$+ \frac{[1 - F(a_n + b_n x)]^2}{2} \ldots \qquad 6.3.20$$

En virtud de que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} G^*(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \sup\{x \mid F(x) \le 1 - \tfrac{1}{n}\} = \omega(F)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} G^*(\frac{1}{ne}) - a_n = 0$$

tenemos que:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} F(a_n + b_n x) = 1$$

entonces, al tomar el límite cuando n tiende a infinito en la identidad 6.3.20 obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} - \frac{\log F(a_n + b_n x)}{1 - F(a_n + b_n x)} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(a_n + b_n x)}{\log n\ F(a_n + b_n x)} = -1$$

entonces multiplicando este límite y el 6.3.18 encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n + b_n x)] = e^{-x} \qquad 6.3.21$$

y en el caso particular en el que $x = 0$, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n\,[1 - F(a_n)] = 1 \qquad 6.3.22$$

si dividimos los límites 6.3.21 y 6.3.22 obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(a_n + b_n x)}{1 - F(a_n)} = e^{-x}\,. \qquad 6.3.23$$

Este resultado será suficiente para demostrar que la condición 6.3.17 se satisface para cualquier sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a $\omega(F)$ cuando n tiende a infinito. Sea pues $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales arbitraria tal que:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \omega(F) \qquad 6.3.24$$

y sea $m = m(t_n)$ un número entero tal que:

$$m\,[1 - F(t_n)] \leq 1 < (m + 1)\,[1 - F(t_n)] \qquad 6.3.25$$

entonces, por un lado tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} m\,[1 - F(t_n)] = 1 \qquad 6.3.26$$

debido a que según la desigualdad 6.3.25:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad m\,[1 - F(t_n)] \leq 1 < m\,[1 - F(t_n)] + 1 - F(t_n)$$

y al tomar el límite cuando n tiende a infinito en esta desigualdad, por el límite 6.3.24 y de la definición de $\omega(F)$:

$$\lim_{n\to\infty} 1 - F(t_n) = 0$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} m\,[1 - F(t_n)] \leq 1 < \lim_{n\to\infty} m\,[1 - F(t_n)]$$

por lo tanto, el límite 6.3.26 es uno.

Por otro lado, a partir de las definiciones 6.3.7 y 6.3.8:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad a_m \leq t_n \leq a_{m+1} \qquad 6.3.27$$

porque:

$$a_m = G^*(\tfrac{1}{m}) = \sup\{y \mid F(y) \leq 1 - \tfrac{1}{m}\}$$
$$= \sup\{y \mid 1 \leq m\,[1 - F(y)]\}$$

entonces considerando la desigualdad 6.3.25:

$$m\,[1 - F(t_n)] \leq 1 < m\,[1 - F(a_m)] \quad \Rightarrow \quad F(a_m) \leq F(t_n)$$

y como la función F es monótona no decreciente:

$$a_m \leq t_n$$

y el hecho de que el número t_n sea menor o igual que a_{m+1}, se sigue inmediatamente de la desigualdad del lado derecho de la expresión 6.3.25 y de la definición de a_{m+1} (a_{m+1} = $\sup\{y \mid 1 \leq (m+1)\,[1 - F(y)]\}$) por lo tanto, la desigualdad 6.3.27 se cumple. Además tenemos que:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad b_m + a_m - a_{m+1} \leq h(t_n) \leq b_{m+1} + a_{m+1} - a_m \qquad 6.3.28$$

y de la desigualdad 6.3.25 se sigue que:

$$\frac{1}{m} \geq 1 - F(t_n) > \frac{1}{m+1}$$

luego:

$$1 - \frac{1}{me} \leq 1 - \frac{1 - F(t_n)}{e} \leq 1 - \frac{1}{(m+1)e}$$

entonces:

$$\sup\left\{y \mid F(y) \leq 1 - \frac{1}{me}\right\} \leq \sup\left\{y \;\middle|\; F(y) \leq 1 - \frac{1 - F(t_n)}{e}\right\}$$

$$\leq \sup\left\{y \mid F(y) \leq 1 - \frac{1}{(m+1)e}\right\}$$

y recordando quien era la función G^*:

$$G^*(\tfrac{1}{me}) \leq G^*\left[\frac{1 - F(t_n)}{e}\right] - t_n \leq G^*\left[\frac{1}{(m+1)e}\right]$$

(Observemos que la función G^* es monótono no creciente) multiplicando la desigualdad 6.3.27 por menos uno y sumándola a esta última obtenemos que:

$$G^*(\tfrac{1}{me}) - a_{m+1} \leq G^*\left[\frac{1 - F(t_n)}{e}\right] - t_n \leq G^*\left[\frac{1}{(m+1)e}\right] - a_m$$

sumando y restando a_m y a_{m+1} en los miembros extremos de esta desigualdad obtenemos que:

$$\left[G^*(\frac{1}{me}) - a_m\right] + a_m - a_{m+1} \leq G^*\left[\frac{1 - F(t_n)}{e}\right] - t_n$$

$$\leq \left[G^*\left[\frac{1}{(m+1)e}\right] - a_{m+1}\right] + a_{m+1} - a_m$$

y recordando quienes eran b_n y $h(t_n)$ (ver identidades 6.3.8 y 6.3.16) obtenemos la desigualdad 6.3.28.

Ahora, como el límite 6.3.23 existe y vale e^{-x} para la sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, en particular para la subsucesión $\{m(t_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{m\}_{n=1}^{\infty}$ el límite 6.3.23 también existe y vale e^{-x}, es decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(a_m + b_m x)}{1 - F(a_m)} = e^{-x}$$

y dados los límites 6.3.22 y 6.3.26 tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(a_m + b_m x)}{1 - F(t_m)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(a_m + b_m x)}{1 - F(a_m)} \; \frac{m\,[1 - F(a_m)]}{m\,[1 - F(t_m)} = e^{-x} . \qquad 6.3.29$$

Observemos que este resultado, es un teorema de distribución límite, esto es, si:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n(y) = \begin{cases} \text{si } y > t_n & 1 - \dfrac{1 - F(y)}{1 - F(t_n)} \\ \text{si } y \leq t_n & 0 \end{cases} \qquad 6.3.30$$

la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de distribución[1] y la expresión 6.3.29 es una forma límite de la sucesión $\{F_n(a_m + b_m x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Recordando el lema 3.1, tendremos que la expresión 6.3.29 implica la 6.3.17 (que es lo que queremos demostrar en este paso), si para $m = m(t_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m - t_n}{b_m} = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{h(t_n)}{b_m} = 1 \qquad 6.3.31$$

y notemos que en tal caso, la expresión 6.3.17 también será una forma límite de la sucesión $\{F_n[t_n + h(t_n)x]\}_{n=1}^{\infty}$. Para demostrar que los límites 6.3.31 valen cero y uno respectivamente, a partir de la desigualdad 6.3.27 observemos que si restamos a_m y dividimos entre b_m ($b_m > 0$) obtenemos que:

$$0 \le \frac{t_n - a_m}{b_m} \le \frac{a_{m+1} - t_n}{b_m}$$

y si en la desigualdad 6.3.28 dividimos entre b_m obtenemos que

$$1 + \frac{a_m - a_{m+1}}{b_m} \le \frac{h(t_n)}{b_m} \le \frac{b_{m+1}}{b_m} + \frac{a_{m+1} - a_m}{b_m}$$

[1] Verifiquemos que la función F_n es función de distribución recordando que la función F lo es:

i) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1 - 0 = 1$

ii) $\lim_{n\to-\infty} F_n(x) = 1 - 1 = 1$

iii) La función F es continua por la derecha, entonces la función $1-F$ es continua por la izquierda, así como la función $\frac{1-F}{1-F(tn)}$, entonces la función F_n es continua por la derecha.

iv) La función F es monótona no decreciente, entonces la función $1-F$ es monótona no creciente y como $1-F(tn)$ es positivo, la función $\frac{1-F}{1-F(tn)}$ también es monótona no creciente, por lo tanto, la función F_n es monótona no creciente.

por lo tanto, para demostrar la expresión 6.3.31 basta mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m - a_{m+1}}{b_m} = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} = 1 \qquad 6.3.32$$

y estos límites los podemos deducir facilmente a partir del resultado del paso 1, de la identidad 6.3.19 y del lema 3.2 de la siguiente forma, según el paso 1:

$$\lim_{n\to\infty} F^m(a_m + b_m x) = H_{3,0}(x) \qquad [= \lim_{n\to\infty} F^{m+1}(a_{m+1} + b_{m+1}x)]$$

y considerando la identidad 6.3.19 tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} F^m(a_{m+1} + b_{m+1}x) = \lim_{n\to\infty} F^m(a_{m+1} + b_{m+1}x)\, F(a_{m+1} + b_{m+1}x)$$

$$= H_{3,0}(x)$$

por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} F^m(a_m + b_m x) = \lim_{n\to\infty} F^m(a_{m+1} + b_{m+1}x) = H_{3,0}(x)\ .$$

Finalmente, aplicando el lema 2.3.2 tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m - a_{m+1}}{b_m} = A \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} = B$$

donde los números A y B deben satisfacer que:

$$H_{3,0}(x) = H_{3,0}(A + Bx)$$

entonces, evidentemente $A = 0$ y $B = 1$ como queríamos demostrar. Por lo tanto:

$$\lim_{t\to\omega(F)} \frac{1 - F(t + xh(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}\ .$$

□

Paso 3.- Supongamos que la función de distribución F está en el dominio de atracción de la función $H_{3,0}$. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos, tal que converja a cero cuando n tienda a infinito, entonces la función G^* dada en la expresión 6.3.7 satisface que:

$$\forall\, u > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{G^*(z_n u) - G^*(z_n)}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)} = -\log u \qquad 6.3.33$$

Primero demostraremos este resultado para la sucesión:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad z_n = \frac{1}{n}\,.$$

Sea s un número real mayor que uno y sea $x = y \log s$, entonces según el paso 1 tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} F^n[a_n + (b_n \log s)] = exp(-e^{-\log s}) = exp(-s^{-y}) \qquad 6.3.34$$

Ahora, si definimos dos nuevas sucesiones de números reales $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ como:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n^* = G^*(\tfrac{1}{n}) = a_n \qquad y \qquad b_n^* = G^*(\tfrac{1}{ns}) - a_n$$

al igual que en el paso 1, podemos demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n^* + b_n^* y) = exp(-s^{-y}) \qquad 6.3.35$$

entonces, dados los límites 6.3.34 y 6.3.35 por el lema 3.2 tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^*}{b_n \log s} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^*}{b_n} = \log s \qquad 6.3.36$$

es decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^*(\frac{1}{ns}) - G^*(\frac{1}{n})}{G^*(\frac{1}{ne}) - G^*(\frac{1}{n})} = \log s$$

que precisamente es el límite 6.3.33 en el caso en el que:

$$u = \frac{1}{s} < 1 \qquad y \qquad z_n = \frac{1}{n}$$

pero si el límite 6.3.33 se cumple para la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, se cumple también para cualquier subsucesión $\{\frac{1}{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ donde la sucesión $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión arbitraria de números naturales. Consecuentemente, si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de números positivos que converge a cero, si substituímos para cada número natural n, $\frac{1}{m_n}$ por z_n, donde el número m_n sea la parte entera del número $\frac{1}{z_n}$, y si el número u está entre cero y uno, entonces la expresión 6.3.33 se cumple.

Ahora, el hecho de que podamos considerar la propia sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ (en lugar de la sucesión $\{\frac{1}{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$) se sigue de una desigualdad similar a la 6.3.28, tomando $m = m_n$ y $G^*(z_n u) - G^*(z_n)$ en lugar de $h(t_n)$; efectivamente, dado que la función G^* es monótona no creciente, tenemos que si:

$$\frac{1}{m+1} \leq z_m \leq \frac{1}{m} \qquad y \qquad 0 < u < 1$$

entonces:

$$G^*(\frac{u}{m}) \leq G^*(z_n u) \leq G^*(\frac{u}{m+1})$$

y

$$a_m = G^*(\frac{1}{m}) \leq G^*(z_n) \leq G^*(\frac{1}{m+1}) = a_{m+1}$$

multiplicando esta desigualdad por menos uno y sumándosela a la primera obtenemos que:

$$G^*(\frac{u}{m}) - G^*(\frac{1}{m+1}) \leq G^*(z_n u) - G^*(z_n) \leq G^*(\frac{u}{m+1}) - G^*(\frac{1}{m})$$

o bien:

$$G^*(\frac{u}{m}) - G^*(\frac{1}{m}) + G^*(\frac{1}{m}) - G^*(\frac{1}{m+1}) \leq G^*(z_n u) - G^*(z_n)$$
$$\leq G^*(\frac{u}{m+1}) - G^*(\frac{1}{m+1}) + G^*(\frac{1}{m+1}) - G^*(\frac{1}{m})$$

e identificando los números b^*_n y a_n, esta desigualdad la podemos reescribir como:

$$b^*_m + a_m - a_{m+1} \le G^*(z_n u) - G^*(z_n) \le b^*_{m+1} + a_m - a_{m+1}$$

dividiendo entre b_m y tomando el límite cuando n tiende a infinito, recordando los límites 6.3.32 y 6.3.36 obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^*(z_n u) - G^*(z_n)}{b_n} = \log s \qquad 6.3.37$$

en particular, si $u = \frac{1}{e}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)}{b_n} = 1$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)} = 1 \qquad 6.3.38$$

y como el producto de los límites (el 6.3.37 y 6.3.37) es el límite del producto, obtenemos finalmente que si:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad y \qquad 0 < u < 1$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^*(z_n u) - G^*(z_n)}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)} = \log s = -\log u \ . \qquad 6.3.39$$

Aún nos falta demostrar el límite 6.3.39, en el caso en el que el número u es mayor o igual a uno. Sin embargo, el caso en el que el número u es igual a uno, es inmediato. Supongamos entonces, que el número u es mayor que uno y construyamos una sucesión $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos de la forma

siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad z'_n = z_n u \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

entonces:

$$\frac{G^*(z_n u) - G^*(z_n)}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)} = \frac{G^*(z'_n) - G^*(z'_n/u)}{G^*(z'_n/ue) - G^*(z'_n/u)}$$

y multiplicando y dividiendo por $G^*(z') - G^*(z'/e)$:

$$\frac{G^*(z_n u) - G^*(z_n)}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)}$$

$$= \frac{G^*(z'_n) - G^*(z'_n/u)}{G^*(z'_n) - G^*(z'_n/e)} : \frac{G^*(z'_n/ue) - G^*(z'_n/u)}{G^*(z'_n) - G^*(z'_n/e)}$$

si sumamos y restamos $G^*(z'_n)$ en el numerador del segundo término del miembro derecho de esta igualdad, al tomar el límite cuando n tiende a infinito, como los números $\frac{1}{u}$ y $\frac{1}{ue}$ están entre cero y uno, podemos utilizar el resultado 6.3.39, así:

$$\frac{G^*(z_n u) - G^*(z_n)}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)} = -log\frac{1}{u} : (-\,logu - 1 + logu) = -logu$$

con lo cual terminamos la demostración del tercer paso. □

Paso 4.- Sea x_0 un número real menor que $\omega(F)$. Supongamos que la función F es una función de distribución continua y estrictamente creciente para todo número real x en el intervalo $[x_0, \omega(F)]$ y que además pertenece al dominio de atracción de la función de distribución $H_{3,0}$. En estas condiciones, las expresiones 5.1.1 y 5.1.2 se cumplen como demostraremos a continuación. Sea

$$g(z) = G^*(\frac{z}{e}) - G^*(z)$$

Probaremos que:

$$\forall\ 0 < x < 1 \qquad \int_0^x g(z)\, dz < \infty \qquad 6.3.40$$

de donde se desprende que la función G^* es integrable en el intervalo $(0, x)$ y por lo tanto, la función:

$$K(x) = \frac{1}{x}\int_0^x G^*(z)\, dz - G^*(x)$$

está bien definida en el intervalo (0, 1). Observemos que si:

$$x = 1 - F(t) \quad \Rightarrow \quad K(x) = R(t) \qquad 6.3.41$$

Verifiquemos que efectivamente esta identidad se cumple, entonces necesitamos probar que:

$$\frac{1}{1 - F(t)}\int_0^{1-F(t)} G^*(z)\, dz - G^*(1 - F(t)$$

$$= \frac{1}{1 - F(t)}\int_0^{\omega(F)} (1 - F(y)\, dy\ . \qquad 6.3.42$$

Ahora, observemos que como la función F es estrictamente creciente y continua:

$$G^*(z) = \sup\{x \mid F(x) \le 1 - z\} = \sup\{x \mid F(x) = 1 - z\}$$

entonces:

$$G^{*}[1 - F(t)] = t$$

y separando la integral del lado derecho de la expresión 6.3.42 y resolviéndola, obtenemos que, probar la identidad 6.3.41 es equivalente a probar que:

$$\frac{1}{1 - F(t)} \left[\omega(F) - t - \int_{t}^{\omega(F)} F(y)\, dy \right]$$

$$= \frac{1}{1 - F(t)} \left[\int_{0}^{1-F(t)} G^{*}(z)\, dz - [1 - F(t)]t \right]$$

o bien que:

$$\int_{0}^{1-F(t)} G^{*}(z)\, dz + \int_{t}^{\omega(F)} F(y)\, dy = \omega(F) - tF(t) \qquad 6.3.43$$

Resolvamos la primera integral de esta ecuación. Sea

$$y = G^{*}(z) = \sup\{x \mid F(x) = 1 - z\}$$

entonces:

$$z = 1 - F(y)$$

y como:

$$0 < z < 1 - F(t) \quad \Rightarrow \quad \omega(F) < y < t$$

por lo tanto:

$$\int_{0}^{1-F(t)} G^{*}(z)\, dz = \int_{\omega(F)}^{t} y\, d[1 - F(y)] = \int_{t}^{\omega(F)} y\, dF(y) \qquad 6.3.44$$

Substituyendo la integral 6.3.44 en la expresión 6.3.43 obtenemos que:

$$\int_{t}^{\omega(F)} y\, dF(y) + \int_{t}^{\omega(F)} F(y)\, dy = \omega(F) - tF(t)$$

y esta igualdad se sigue inmediatamente a partir del «teorema de integración por partes» para la integral de Riemann-Stieljes, que nos dice que si f y g son dos funciones tales que f sea g-integrable y g sea f-integrable, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dg(x) + \int_a^b g(x)\ df(x) = f(x)\ g(x) \Big]_a^b$$

entonces tomando:

$$f(y) = y \quad \text{y} \quad g(y) = F(y)$$

como las funciones f y g son continuas y estrictamente crecientes, f es g-integrable y g es f-integrable, por lo tanto:

$$\int_t^{\omega(F)} y\ dF(y) + \int_t^{\omega(F)} F(y)\ dy = yF(y)\Big]_t^{\omega(F)} = \omega(F) - tF(t)$$

como queríamos demostrar. Entonces la integral 6.3.1 es finita ya que K(x) lo es.

Probemos pues, que la integral 6.3.40 existe y es finita. Sea

$$t = \frac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad dt = -v^{-2}$$

así:

$$\int_0^x g(t)\ dt = \int_{1/x}^{\infty} g\left(\frac{1}{v}\right)v^{-2}\ dv\ .$$

Sea

$$g_1(v) = v^{-2}g\left(\frac{1}{v}\right)$$

entonces, dado el límite 6.3.33 tenemos que para todo número u positivo:

$$\lim_{z\to 0} \frac{g(zu)}{g(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{G^*(zu/e) - G^*(z) + G^*(z) - G^*(zu)}{G^*(z/e) - G^*(z)}$$

así,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(zu)}{g(z)} = -log\frac{u}{e} + logu = 1$$

entonces:

$$\lim_{\upsilon\to\infty} \frac{g_1(4\upsilon)}{g_1(\upsilon)} = \lim_{\upsilon\to\infty} \frac{4\upsilon^{-2}\ g(4\upsilon^{-1})}{\upsilon^{-2}\ g(\upsilon)} = \frac{1}{16}$$

es decir, dado un número ε positivo, existe un número υ_0, tal que para todo número υ mayor o igual a υ_0:

$$\left| \frac{g_1(4\upsilon)}{g_1(\upsilon)} - \frac{1}{16} \right| < \varepsilon$$

sea $\varepsilon = 1/16$, entonces: $\forall\ \upsilon \geq \upsilon_0$

$$g_1(4\upsilon) < \frac{1}{8}\ g_1(\upsilon)\ . \qquad 6.3.45$$

Como la función g_1 es continua (ya que la función F también es continua) y toma valores en los reales para todo intervalo (a, b) contenido en los reales, para probar que la integral 6.3.40 es finita, basta mostrar que dado un número natural m fijo:

$$\int_{4^m}^{\infty} g_1(\upsilon)\ d\upsilon = \sum_{k=m}^{\infty} \int_{4^k}^{4^{k+1}} g_1(\upsilon)\ d\upsilon < \infty \qquad 6.3.46$$

para lo cual mostraremos que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{4^k}^{4^{k+1}} g_1(\upsilon)\ d\upsilon = 0\ .$$

Analicemos el k-ésimo término de esta sucesión. Haciendo el cambio de variable $\upsilon = 4z$ y considerando la desigualdad 6.3.45 tenemos que si:

$\upsilon_0 \leq 4^m \quad (\upsilon_0 \leq 4^m < \upsilon)$

$$\int_{4^k}^{4^{k+1}} g_1(v)\, dv = 4 \int_{4^{k-1}}^{4^k} g_1(z)\, dz \le \frac{1}{2} \int_{4^{k-1}}^{4^k} g_1(z)\, dz$$

así, realizando recursivamente este procedimiento, es decir, realizando el cambio de variable y aplicando la desigualdad 6.3.45, llegamos a que para un número natural m fijo, si:

$$v_0 \le 4^m \Rightarrow \int_{4^k}^{4^{k+1}} g_1(v)\, dv \le \left[\frac{1}{2}\right]^{k-m} \int_{4^m}^{4^{m+1}} g_1(v)\, dv$$

y al tomar el límite cuando k tiende a infinito:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{4^k}^{4^{k+1}} g_1(v)\, dv = 0$$

por lo tanto, la serie 6.3.45 converge, lo cual prueba que la integral 6.3.40 es finita y que la condición 6.3.1 se cumple como ya habíamos mencionado.

Ahora, para comprobar que la condición 6.3.3 se cumple, probaremos que dadas las funciones R y h definidas en las expresiones 6.3.2 y 6.3.16, éstas satisfacen que:

$$\lim_{t\to\omega(F)} \frac{R(t)}{h(t)} \qquad 6.3.47$$

y como ya vimos en el paso 2 que la expresión 6.3.17 es una forma límite de la sucesión de funciones de distribución $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en la expresión 6.3.30 evaluadas en los puntos $t + h(t)x$, dado el límite 6.3.47, estaremos en condiciones de aplicar el lema 3.1 a dicha sucesión de funciones de distribución y así obtener como resultado la condición 6.3.3, es decir que:

$$\lim_{t\to\omega(F)} \frac{1 - F[t + R(t)x]}{1 - F(t)} = e^{-x} .$$

Para probar que el límite 6.3.47 es uno, observemos que si:

$z = 1 - F(t)$

$$g(z) = G^*(\frac{z}{e}) - G^*(z)$$

$$= G^*\left[\frac{1 - F(t)}{e}\right] - \sup\{y \mid F(y) \le 1 - [1 - F(t)]\}$$

como la función F es continua:

$$g(z) = G^*\left[\frac{1 - F(t)}{e}\right] - t = h(t)$$

y en virtud de la identidad 6.3.41, basta mostrar que:

$$\lim_{z \to 0} \frac{K(z)}{g(z)} = 1 .$$

Realicemos en la siguiente integral el cambio de variable $y = zs$:

$$K(z) = \frac{1}{z}\int_0^z G^*(y)\, dy - G^*(z) = \int_0^1 G^*(zs)\, ds - G^*(z)$$

dividamos entre $g(z)$ (observemos que la función g nunca se anula, porque como la función F es estrictamente creciente, la función G^* es estrictamente decreciente, entonces de hecho $\forall \; z$ $g(z) > 0$):

$$\frac{K(z)}{g(z)} = \int_0^1 \frac{G^*(zs) - G^*(z)}{G^*(z/e) - G^*(z)}\, ds$$

el integrando es una función de s estrictamente decreciente y dado el límite 6.3.33, es decir, dado que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G^*(z_n s) - G^*(z_n)}{G^*(z_n/e) - G^*(z_n)} = -\log s$$

por el teorema de Convergencia Dominada (ver teorema 1.13

capítulo I) tenemos que:

$$\lim_{z\to 0} \frac{K(z)}{g(z)} = \int_0^1 -\log s \, ds$$

e integrando por partes:

$$\lim_{z\to 0} \frac{K(z)}{g(z)} = -x \log x + x \Big|_0^1 = 1$$

como queríamos demostrar. □

Paso 5.- Este es el último paso de esta demostración y por fin, probaremos que si la función de distribución F pertenece al dominio de atracción de la función $H_{3,0}$, entonces las condiciones 6.3.1 y 6.3.3 se cumplen.

Para tal propósito, demostraremos primero que existe una función F^* estrictamente creciente y continua tal que pertenece al dominio de atracción de la función de distribución $H_{3,0}$ y para la cual, el siguiente límite se cumple:

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{1 - F(x)}{1 - F^*(x)} = 1 \qquad 6.3.48$$

y a partir de la existencia de dicha función, concluiremos que las condiciones 6.3.1 y 6.3.3 se cumplen.

Probemos entonces que existe una función F^* con las características descritas previamente. La función F, es una función de distribución, entonces a lo más tiene un número numerable de puntos de discontinuidad. Supongamos que t_1, t_2, t_3, t_4,... son dichos puntos (sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$). Para cada punto t_j, construyamos un intervalo $[t_j, s_j]$, donde el punto s_j está dado en términos de la función h dada en la expresión 6.3.16 de la siguiente forma:

sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} = \{x_j(t_j)\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos (que dependen de t_j) que converja a cero cuando t_j converja a $\omega(F)$ (si $\omega(F) = \infty$, podemos escoger $\forall\, j \in \mathbb{N}\ x_j = 1/t_j$ y si $\omega(F) < \infty$, podemos escoger $x_j = \omega(F) - t_j$), entonces sea:

$$s_1 = t_1 + x_1 h(t_1) .$$

Una vez definido el número s_1, tenemos dos casos para el número t_2:

$$i)\quad t_1 < t_2 \le s_1$$

o

$$ii)\quad t_1 < s_1 < t_2 .$$

Si ocurre el primer caso, definimos $s_2 = t_2$ y de lo contrario definimos $s_2 = t_2 + x_2 h(t_2)$ y así sucesivamente definimos cada término de la sucesión $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, es decir, una vez definidos los primeros $j - 1$ términos $s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}$ si:

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \ni t_j \in (t_k, s_k) \quad \Rightarrow \quad s_j = t_j$$

y de lo contrario, es decir si:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad s_k < t_j \quad \Rightarrow \quad s_j = t_j + x_j h(t_j) .$$

Ahora, suprimamos todos los puntos para los cuales $t_j = s_j$ y fijémonos sólo en aquellos, para los cuales $t_j < s_j$; renumerémoslos de tal forma, que los extremos t_j queden ordenados en forma creciente y consecutiva, así consideraremos únicamente el conjunto de puntos:

$$T_1 = \{t_j \mid \forall\, j \quad t_j < s_j \ \text{ y } \ t_j < t_{j+1}\} .$$

Sea j_0 un número natural tal que:

$$F\left(t_{j_0}\right) > 0$$

y omitamos ahora del conjunto T_1, todos aquellos puntos tales que:

$$t_j < t_{j_0}$$

y consideremos la sucesión de intervalos correspondientes a dichos puntos:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad t_{j_m} < t_{j_{m+1}} \qquad A = \left\{\left[\, t_{j_m}, s_{j_m} \,\right]\right\}_{m=0}^{\infty}$$

entonces, si el punto t_{j_k} es un punto de discontinuidad de la función de distribución F, mayor que t_{j_0}:

$$\left[\, t_{j_k}, s_{j_k} \,\right] \in A \;.$$

Sea F_1^* una función de distribución continua con las siguientes características:

1) $\forall\, t \ni t < t_{j_0}$, la función F_1^* es estrictamente creciente en el intervalo $\left[\, t, t_{j_0} \right]$.

2) $\forall\, m \in \mathbb{N}$ y $\forall\, t \notin \left[t_{j_m}, s_{j_m}\right] \qquad F_1^*(t) = F(t)$

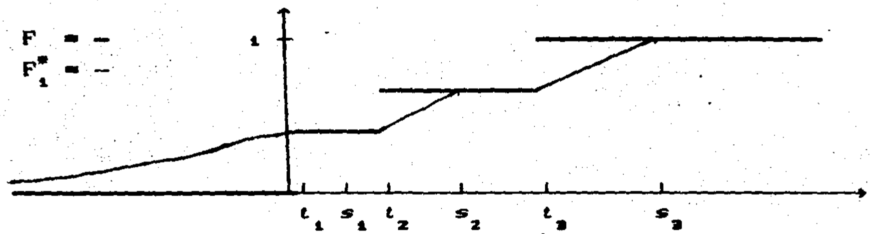
3) $\forall\, m \in N$ y $\forall\, t \in \left[t_{j_m}, s_{j_m}\right]$, la función F_1^* es una función lineal (ver gráfica 1).

Sea

$$T = \bigcup_{m=0}^{\infty} \left[\, t_{j_m}, s_{j_m} \,\right]$$

entonces para todo punto t que no pertenezca al conjunto T, la función F_1^* es continua (por definición) y por el inciso 2):

$$1 - F(t) = 1 - F_1^*(t) \;.$$



Gráfica 1

> En la gráfica, tenemos j=1 y observemos que:
> i) $\forall\ t < t_1$, F_1^* es estrictamente creciente.
> ii) $\forall\ t \in [t_{jm}, s_{jm}]$ F_1^* es lineal.
> iii) $\forall\ t \notin (t_{jm}, s_{jm})$ $F_1^*(t) = F_1(t)$.

Además, si $t_{j_m} \leq t \leq s_{j_m}$:

$$F_1^*\left(t_{j_m}\right) \leq F_1^*(t) \leq F_1^*\left(s_{j_m}\right)$$

multiplicando esta desigualdad por menos uno, sumándole uno y de nuevo por el inciso 2) obtenemos que:

$$1 - F\left(t_{j_m}\right) \geq 1 - F_1^*(t) \geq 1 - F\left(t_{j_m} + \varkappa_{j_m} h(t_{j_m})\right)$$

y considerando los inversos:

$$\left[1 - F\left(t_{j_m}\right)\right]^{-1} \leq [1 - F_1^*(t)]^{-1}$$

$$\leq \left[1 - F\left(t_{j_m} + \varkappa_{j_m} h(t_{j_m})\right)\right]^{-1} . \qquad \textbf{6.3.49}$$

Por otro lado, en ese mismo intervalo $\left[t_{j_m}, s_{j_m}\right]$, **la**

función F es no decreciente, por lo tanto:

$$1 - F\left[t_{j_m} + x_{j_m} h(t_{j_m})\right] \leq 1 - F(t) \leq 1 - F\left[t_{j_m}\right] \qquad 6.3.50$$

de las desigualdades 6.3.49 y 6.3.50 se sigue que:

$$\frac{1 - F\left[t_{j_m} + x_{j_m} h(t_{j_m})\right]}{1 - F\left[t_{j_m}\right]} \leq \frac{1 - F(t)}{1 - F_1^*(t)}$$

$$\leq \frac{1 - F\left[t_{j_m}\right]}{1 - F\left[t_{j_m} + x_{j_m} h(t_{j_m})\right]}$$

y al tomar el límite cuando j tiende a infinito, t_j converge a $\omega(F)$ y x_j converge a cero, entonces por la expresión 6.3.17:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t)}{1 - F_1^*(t)} = 1 \ .$$

Observemos que la función F_1^* es continua, pero no necesariamente creciente (en ese caso, no lo sería en algún intervalo de la forma $\left[s_{j_m}, t_{j_{m+1}}\right]$, en donde $F_1^*(t) = F(t)$). Si la función F_1^* no es estrictamente creciente, digamos que existen dos números r y t (con $t_{j_0} < s_{j_0} < r < t$) tales que:

$$F(t) = F(r)$$

entonces, de manera análoga a como construímos la función F_1^*, podemos construir una función F_2^*, pero ahora el papel que desempeña el punto t_{j_0}, lo desempeñará el punto s_{j_m} y la sucesión de intervalos, que nos servirá para construir la función F_2^*, será la sucesión de intervalos de la forma $\left[s_{j_m}, t_{j_{m+1}}\right]$, en donde la función F_1^* sea constante. Si la función F_2^* no es aún estrictamente creciente, analogamente construímos una función F_3^* y así nos seguimos hasta que para algún número natural k la función F_k^* cumpla con las características requeridas.

De esta forma, podemos construir una función F^* que sea continua, estrictamente creciente y que satisfaga el límite 6.3.48. Solamente nos falta comprobar que dicha función pertenece al dominio de atracción de la función $H_{a,0}$. Utilicemos las expresiones 6.3.17 y 6.3.48 tomando:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad h_n = h(t_n)$$

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F^*(t_n + x h_n)}{1 - F^*(t_n)}$$

$$= \lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t_n + x h_n)}{1 - F(t_n)} \; \frac{1 - F(t_n)}{1 - F^*(t_n)} \; \frac{1 - F^*(t_n + x h_n)}{1 - F(t_n + x h_n)}$$

$$= e^{-x} \cdot 1 \cdot 1$$

por lo tanto:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F^*(t_n + x h_n)}{1 - F^*(t_n)} = e^{-x} \qquad 6.3.51$$

y si el número t , es un número tal que el número:

$$m = \frac{1}{1 - F^*(t_n)}$$

es un número entero, tomando:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad t_n = a_m \quad \text{y} \quad h_n = b_m$$

el límite 6.3.51 se convierte en:

$$\lim_{m \to \infty} m\, [1 - F^*(a_m + b_m x)] = e^{-x}$$

y aplicando el corolario **2.4**, concluímos que la función F^* pertenece al dominio de atracción de la función $H_{3,0}$, es decir que:

$$\lim_{m\to\infty} F^{*^m}(a_m + b_m x) = exp(-e^{-x}) .$$

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar que si la función F está en el dominio de atracción de la función $H_{3,0}$, las condiciones **6.3.1** y **6.3.3** se cumplen.

Como la función F^*, con las características mencionadas existe, por el paso **4**, sabemos que la función F^* satisface las condiciones **6.3.1** y **6.3.3**, es decir:

$$\alpha(F^*) < t < \omega(F^*) \qquad \int_t^{\omega(F^*)} (1 - F^*(y))\, dy < \infty$$

y que:

$$\lim_{t\to\omega(F^*)} \frac{1 - F^*(t + R(t)x)}{1 - F^*(t)} = e^{-x} .$$

Además, dado el límite **6.3.48**, tenemos que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0(\varepsilon) \quad \ni \quad \forall\, x \geq x_0$$

$$(1 - \varepsilon)[1 - F^*(x)] < 1 - F(x) < (1 + \varepsilon)[1 - F^*(x)]$$

integrando la desigualdad superior de esta desigualdad, obtenemos la condición **6.3.1**:

$$\int_t^{\omega(F)} (1 - F(x))\, dx < (1 + \varepsilon) \int_t^{\omega(F)} (1 - F^*(x))\, dx < \infty .$$

Ahora bien, si integramos ambas desigualdades tenemos que el siguiente límite existe y vale uno:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{\int_t^{\omega(F)} [1 - F(x)]\ dx}{\int_t^{\omega(F)} [1 - F^*(x)]\ dx} = 1 . \qquad 6.3.52$$

Del límite 6.3.48 se deduce facilmente que:

$$\omega(F) = \omega(F^*)$$

y recordando que:

$$R(t, F) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{\omega(F)} (1 - F(y))\ dy$$

(ver expresión 6.3.3) el límite 6.3.52 lo podemos reescribir como:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{R(t , F)}{R(t , F^*)} = 1 \qquad 6.3.53$$

y realizando el mismo razonamiento que en el paso 4, en éste vimos que la expresión:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F^*(t + R(t, F^*)x)}{1 - F^*(t)} = e^{-x}$$

es una forma límite de la sucesión $\{F_n[t + R(t, F^*)x]\}_{n=1}^{\infty}$ (la función F_n se dió en la expresión 6.3.30), así, dado el límite 6.3.53, aplicando una vez más el lema 3.1, obtenemos que:

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t + R(t)x)}{1 - F(t)} = e^{-x}$$

con lo cual, concluímos la demostración del teorema 6.3. ∎

A continuación enunciamos simplemente los resultados correspondientes al mínimo.

Teorema 6.4 *La función de distribución* F *está en el dominio de atracción de la función de distribución* $L_{1,\gamma}$, *cuya regla de correspondencia está dada por:*

si γ *es un número real positivo,*

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} si\ x < 0 & 1 - exp[-(-x)^{-\gamma}] \\ si\ x \geq 0 & 1 \end{cases} .$$

si y solamente si

$$\alpha(F) = -\infty \qquad 6.4.1$$

y para todo número real x *positivo:*

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} . \qquad 6.4.2$$

Las sucesiones de números reales $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ **y** $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ **se pueden elegir de la siguiente forma:**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad c_n = 0 \qquad y \qquad d_n = \sup\{x \mid F(x) \leq \frac{1}{n}\} .$$

Teorema 6.5 *La función de distribución* F *está en el dominio de atracción de la función de distribución* $L_{2,\gamma}$, *cuya regla de correspondencia está dada por:*

si γ *es un número real positivo:*

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} si\ x < 0 & 0 \\ si\ x \geq 0 & 1 - exp(-x^{\gamma}) \end{cases} .$$

si y solamente si

$$\alpha(F) \text{ es finito} \qquad 6.5.1$$

y si para todo número real x *positivo, la función de distribu-*

ción F^* *dada por:*

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - \frac{1}{x})$$

satisface la condición **6.4.2**, *es decir, si:*

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = x^{-\gamma}. \qquad 6.5.2$$

Las constantes de estandarización se pueden escoger como:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad c_n = \alpha(F) \quad \text{y} \quad d_n = \sup\{x \mid F(x) \le \tfrac{1}{n}\} - \alpha(F).$$

Teorema 6.6 *La función de distribución* **F** *está en el dominio de atracción de la función de distribución* $L_{3,0}$ *cuya regla de correspondencia está dada por:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad L_{3,0}(x) = 1 - exp(-e^{x}) .$$

si y solamente si

$$\exists\, a \in [\alpha(F),\, \omega(F)] \ni$$

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)\, dy < \infty \qquad 6.6.1$$

y si definimos la función **r** *como:*

$$\forall\, t \ni t > \alpha(F)$$

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)\, dy \qquad 6.6.2$$

se cumple que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{t\to\alpha(F)} \frac{F[t + xr(t)]}{F(t)} = e^{x} . \qquad 6.6.3$$

Las constantes de estandarización se pueden elegir de la

siguiente forma:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sup\{x \mid F(x) \leq \tfrac{1}{n}\} \qquad \text{y} \qquad d_n = r(c_n)\ .$$

Para concluir con el presente capítulo, queremos señalar unicamente que a partir de la teoría aquí desarrollada para el máximo y el mínimo, podemos encontrar facilmente las funciones de distribución límite para otras variables aleatorias, por ejemplo, para la sucesión de la k-ésima estadística de orden $\{X_{k:n}\}_{n=1}^{\infty}$ o bien para sucesiones de variables aleatorias que sean transformaciones del mínimo y del máximo, las cuales suelen tener también muchas aplicaciones, como la sucesión de rangos $\{R_n\}_{n=1}$, donde:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad R_n = Z_n - W_n$$

y la sucesión $\{M_n\}_{n=1}$ de valores intermedios, donde:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad M_n = \frac{Z_n - W_n}{2}\ .$$

CAPITULO III

EJEMPLOS DEL CASO INDEPENDIENTE E IDENTICAMENTE DISTRIBUIDO

1. INTRODUCCION

El objetivo del presente capítulo, es tratar de ilustrar con ayuda de algunos ejemplos, los alcances y las limitaciones de la teoría desarrollada en el capítulo II. Por ejemplo, veremos que los modelos de variables aleatorias continuas tradicionales satisfacen alguno de los teoremas 6.1, 6.2 o 6.3; daremos ejemplos de variables aleatorias que no los cumplen y finalmente expondremos algunas aplicaciones. Así, consideraremos una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con función de distribución F, la cual se especificará en cada ejemplo y trataremos de establecer a qué dominio de atracción pertenece dicha función, si al de la función $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$ o al de la función $L_{1,\gamma}$, $L_{2,\gamma}$ o $L_{3,0}$ o si no pertenece a ninguno, es decir, si no existen sucesiones de términos no aleatorios $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que la sucesión $\{F_n(a_n + b_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ converja a una función de distribución no degenerada.

En la sección 2, analizaremos algunos de los modelos de las variables aleatorias más conocidas que sí tienen función de distribución límite; entre otros modelos veremos el de la variable aleatoria normal, el cual utilizaremos en el capítulo IV. En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos en la sección 6 del capítulo II. El procedimiento que seguiremos, consiste en calculrar primero los valores $\alpha(F)$ y $\omega(F)$ (ver expresiones 5.1 y 5.2 del capítulo anterior) y dependiendo de si estos valores son finitos o no, eligiremos alguno de los teoremas 6.1 o 6.2 y el 6.3, o alguno de los teoremas 6.4 o 6.5 y el 6.6 para el máximo y el mínimo respectivamente y trataremos de ver, cuáles de las hipótesis restantes se cumplen.

Las sucesiones de términos de estandarización $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ las construiremos a partir de las reglas de correspondencia que dimos al final de cada uno de los teoremas previamente mencionados . Recordemos que las sucesiones de términos de estandarización no son únicas (ver lema 3.1 del capítulo II). A partir de las sucesiones que aquí presentamos, podemos construir otras sucesiones, por ejemplo, consideremos las sucesiones $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, de tal forma que la sucesión $\{F_n(a_n^*+b_n^*x)\}_{n=1}^{\infty}$ también converja, utilizando las relaciones 3.1.2 y 3.1.3 del capítulo II.

En la tercera sección presentaremos algunos modelos de variables aleatorias que no tienen función de distribución límite.

Finalmente, los ejemplos de la cuarta sección tienen también como objetivo resaltar algunos problemas simples relacionados con el máximo y el mínimo, que se pueden presentar en la práctica.

2. MODELOS DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCIONES LIMITE

Ejemplo 2.1 - Caso Uniforme

Sea F una función de distribución con regla de correspondencia dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \text{si} & x \le 0 & 0 \\ \text{si} & 0 \le x < 1 & x \\ \text{si} & x \ge 1 & 1 \end{cases} .$$

Calculemos $\alpha(F)$ y $\omega(F)$:

$$\alpha(F) = \inf\{x \mid F(x) > 0\} = 0$$

y

$$\omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\} = 1 .$$

Analicemos primero cómo se comporta la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dado que el valor $\omega(F)$ es finito, la función F sólo podrá pertenecer al dominio de atracción de las funciones $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$ si también se cumplen las condiciones 6.2.2 o 6.3.3 (del capítulo II) respectivamente. Verifiquemos si se cumplen esta última condición:

$$\frac{1 - [t + xR(t)]}{1 - t} = 1 - \frac{xR(t)}{1 - t} \qquad 2.1.1$$

donde:

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{\omega(F)} [1 - F(y)]\, dy = \frac{1}{1 - t} \int_t^1 (1 - y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} .$$

Substituyendo $R(t)$ en la ecuación 2.1.1 y tomando el límite cuando n tiende a uno:

$$\lim_{t\to 1} \left(1 - \frac{x}{1 - t} \left[\frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} \right]\right) \ne e^{-x}$$

por lo tanto:

$$F \notin \mathcal{D}(H_{3,0}) \; .$$

Entonces, si la sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones de distribución del máximo converge, tendrá que converger a la función $H_{2,\gamma}$. Probemos que se satisface la condición 6.2.3 del capítulo II, es decir, probemos que la función F^* dada por:

$$\forall\; x \geq 1 \qquad\qquad F^*(x) = F(1 - \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x}$$

satisface que para algún número γ positivo:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F^*(tx)}{1 - F^*(t)} = x^{-\gamma}$$

pero:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F^*(tx)}{1 - F^*(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{tx} = x^{-1}$$

entonces por el teorema 6.2 (del capítulo II):

$$\lim_{n \to \infty} H_n(a_n + b_n x) = \lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq a_n + b_n x) = H_{2,\gamma}(x)$$

donde:

$$\forall\; n \in \mathbb{N} \qquad\qquad a_n = \omega(F) = 1$$

$$b_n = \omega(F) - \inf\{x \mid 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n}$$

por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq 1 + \frac{1}{n} x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & e^{x} \\ \text{si } x \geq 0 & 1 \end{cases} .$$

Ahora, consideremos la sucesión de mínimos $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dado que:

$$\alpha(F) = 0$$

sólo podemos aplicar uno de los teoremas 6.5 o 6.6. De hecho, el teorema 6.5 es el que se cumple. Analicemos la condición 6.5.2; tenemos que si la función F^* es tal que:

$$\forall\ x < 0 \qquad F^*(x) = F(\omega(F) - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{x}$$

entonces:

$$\lim_{t \to \alpha(F)} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{tx} = x^{-1}$$

por lo tanto:

$$F \in \mathcal{D}(L_{2,1}) \ .$$

Y utilizando las reglas de correspondencia para construir las sucesiones de números $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ dadas en el teorema 6.5, obtenemos que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \alpha(F) = 0$$

$$d_n = \sup\{x \mid F(x) \le \frac{1}{n}\} - \alpha(F) = \frac{1}{n}$$

por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} P(V_n \le \frac{1}{n}\, x) = L_{2,1}(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & 0 \\ \text{si } x \ge 0 & 1 - exp(-x) \end{cases} .$$

Ejemplo 2.2.- <u>Caso Exponencial</u>

Sea F una función de distribución con regla de correspondencia dada por:

$$\forall\ x > 0,\ \lambda > 0 \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Calculemos $\omega(F)$:

$$\omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\} = \infty \ .$$

Entonces, la función F estará en el dominio de atracción de la función $H_{1,\gamma}$ o $H_{3,0}$ dependiendo de cual de las dos condiciones, la 6.1.2 o la 6.3.3 de los teoremas 6.1 y 6.3 respectivamente se cumpla. Analicemos la condición 6.1.2:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t\to\infty} exp[-t\lambda(x - 1)] = 0$$

entonces:

$$F \notin \mathcal{D}(H_{1,\gamma}) .$$

Ahora veamos si podemos aplicar el teorema 6.3:

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{\omega(F)} [1 - F(y)]\ dy = \frac{1}{e^{-\lambda t}} \int_t^{\infty} e^{-\lambda y}\ dy$$

$$= - \frac{1}{\lambda e^{-\lambda t}}\ e^{-\lambda y} \Big]_t^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

así:

$$\frac{1 - F[t + xR(t)]}{1 - t} = \frac{e^{-\lambda t - x}}{e^{-\lambda t}} = e^{-x}$$

por lo tanto, la condición 6.3.3 se cumple:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - [t + xR(t)]}{1 - t} = e^{-x}$$

$$\therefore F \in \mathcal{D}(H_{3,0}) .$$

Ejemplo 2.3.- <u>Caso Normal</u>

Sea F una función de distribución con regla de correspondencia dada por:

$$\forall \in \mathbb{R} \qquad F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\ dy .$$

Calculemos primero $\alpha(F)$ y $\omega(F)$:

$$\alpha(F) = \inf\{x \mid F(x) > 0\} = -\infty$$

y

$$\omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\} = \infty .$$

Entonces, la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface alguno de los teoremas 6.1 o 6.3. Aquí demostraremos que se satisface el teorema 6.3 para las sucesiones de números reales:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = (2\log n)^{1/2} - \frac{\frac{1}{2}\,(\log\log n + \log 4\pi)}{(2\log n)^{1/2}} \qquad 2.3.1$$

y

$$b_n^* = (2\log n)^{-1/2} . \qquad 2.3.2$$

Utilicemos la siguiente desigualdad[1]:

$$\forall\, x > 0$$

$$\frac{e^{-x^2/2}}{(2\pi)^{1/2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right] < 1 - F(x) < \frac{e^{-x^2/2}}{(2\pi)^{1/2}x} \qquad 2.3.3$$

de donde se sigue que:

$$\forall\, x > 0 \quad (2\pi)^{-1/2}\left[1 - \frac{1}{x^2}\right] < x(1 - F(x))e^{x^2/2} < (2\pi)^{-1/2}$$

y al tomar el límite cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x))e^{x^2/2} = (2\pi)^{-1/2} . \qquad 2.3.4$$

Hagamos un paréntesis para verificar, que dado el límite 2.3.4, el teorema 6.1 no se cumple. En virtud de que el límite

---

[1] Ver Feller, W., Introducción a la teoría de probabilidad y sus aplicaciones, pag. 184.

6.1.2 no es finito:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{tx(1 - F^*(tx))}{t(1 - F^*(t))} e^{t^2/2(x^2-1)} \circ e^{t^2/2(1-x^{-1})} \frac{1}{x} = \infty$$

por lo tanto, la función F sólo podría estar en el dominio de atracción de la función $H_{3,0}$. Comprobemos entonces que las hipótesis del teorema 6.3 se satisfacen. Observemos que por la desigualdad 2.3.3, la integral 6.3.1 es finita, por ejemplo, para $a = 1$:

$$\int_a^{\omega(F)} [1 - F(y)]\, dy < \infty .$$

Nos falta verificar que la hipótesis 6.3.3 se cumple, para lo cual necesitaremos demostrar que los siguientes límites para la función R definida en la expresión 6.3.2 son verdaderos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} R(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} tR(t) = 1 \qquad 2.3.5$$

Tenemos que para $n = -1, 0, 1$:

$$t^n R(t) = \frac{t^n}{1 - F(t)} \int_t^{\infty} [1 - F(y)]\, dy$$

$$= \frac{(2\pi)^{1/2}\, t^{n+1}\, e^{t^2/2}}{(2\pi)^{1/2}\, t\, exp(t^2/2)\, (1 - F(t))} \int_t^{\infty} [1 - F(y)]\, dy$$

pero en virtud del límite 2.3.4:

$$\lim_{t\to\infty} t(1 - F(t))e^{t^2/2} (2\pi)^{1/2} = 1$$

entonces para mostrar que los límites 2.3.5 se cumplen, basta

probar que:

$$\lim_{t\to\infty} t^{n+1}e^{t^2/2}\ (2\pi)^{1/2} \int_t^\infty [1 - F(y)]\ dy$$

$$= \begin{cases} \text{si } n = -1,\ 0 & 0 \\ \text{si } n = 1 & 1 \end{cases} . \qquad 2.3.6$$

Integremos la desigualdad 2.3.3. Como:

$$\int_t^\infty x^{-1}e^{-x^2/2}\ dx = t^{-2}e^{-t^2/2} - \int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}\ dx$$

entonces:

$$\forall\ t > 0 \qquad t^{-2}e^{-t^2/2} - 3\int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}\ dx$$

$$\leq (2\pi)^{1/2} \int_t^\infty [1 - F(y)]\ dy \leq t^{-2}e^{-t^2/2} - 2\int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}\ dx$$

multiplicando por $t^{n+1}e^{t^2/2}$ obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$t^{n-1} - 3t^n e^{t^2/2}\int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}dx \leq (2\pi)^{1/2} t^{n+1}e^{t^2/2}\int_t^\infty [1 - F(y)]\ dy$$

$$\leq t^{n-1} - 2\ t^{n+1}\ e^{t^2/2} \int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}dx \qquad 2.3.7$$

así, para $n = -1,\ 0,\ 1$:

$$\lim_{t\to\infty} t^{n+1}e^{t^2/2} \int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}dx = 0 \qquad 2.3.8$$

como:

$$\lim_{t\to\infty} t^{n-1} = \begin{cases} \text{si } n = -1,\,0 & 0 \\ \text{si } n = 1 & 1 \end{cases}$$

al tomar el límite cuando t tiende a infinito en la desigualdad 2.3.7, obtenemos los límites 2.3.6 y en ese caso, como ya dijimos, los límites 2.3.5 se cumplen.

Probemos entonces que efectivamente el límite 2.3.8 es cero. Esto lo podemos deducir a partir de las siguientes desigualdades:

$\forall\ t > 0 \quad (t < x)$

$$0 < t^{n+1}e^{t^2/2}\int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}dx \le t^{n+1}e^{t^2/2}\int_t^\infty e^{-x^2/2}dx$$

como:

$$\forall\ t > 0 \qquad \int_t^\infty e^{-x^2/2}\,dx = t^{-1}\,e^{-t^2/2} - \int_t^\infty e^{-x^2/2}\,dx$$

y dado que la integral del lado derecho de esta igualdad es positiva, tenemos que:

$\forall\ t > 0$

$$0 < t^{n+1}e^{t^2/2}\int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}\,dx \le t^{n-2}e^{t^2/2}\left[t^{-1}e^{-t^2/2}\right] = t^{n-2}$$

y al tomar el límite cuando t tiende a infinito en esta desigualdad, obtenemos que:

$$\forall\ n \le 2 \qquad \lim_{t\to\infty}\left[\int_t^\infty x^{-3}e^{-x^2/2}dx\right]t^{n+1}e^{t^2/2} = 0$$

como queríamos demostrar.

Entonces, el hecho de que la hipótesis 6.3.3 se cumpla se deduce de los límites 2.3.4 y 2.3.5 de la siguiente forma: observemos que,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F[t + xR(t)]}{1 - F(t)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{[t + xR(t)]\ [1 - F[t + xR(t)]\ exp[\frac{1}{2}(t + xR(t))^2]}{t[1 - F(t)]\ exp(t^2/2)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{t\to\infty} \frac{t\ exp(t^2/2)}{[t + xR(t)]\ exp[(t + xR(t))^2/2]}$$

Dado el límite 2.3.4, el primer límite del lado derecho de esta expresión es uno y simplificando en el segundo límite, tenemos que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F[t + xR(t)]}{1 - F(t)} .$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 + xR(t)/t}\ exp\left[-xR(t)[t + \frac{1}{2}\ xR(t)]\right]$$

y como los límites 2.3.5 se cumplen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F[t + xR(t)]}{1 - F(t)} = e^{-x}$$

por lo tanto:

$$F \in \mathcal{D}(H_{3,0})$$

y sabemos por el teorema 6.3 que las sucesiones de términos no aleatorios se pueden escoger como:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n \text{ es tal que } \qquad 1 - F(a_n) = \frac{1}{n}$$

y

$$b_n = R(a_n) .$$

Ahora, para probar que también podemos escoger las sucesiones $\{a^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en las expresiones 2.3.1 y 2.3.2, en virtud del lema 3.1 del capítuo II, basta demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a^*_n}{b_n} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b^*_n}{b_n} = 1 \;.$$

Para tal efecto, consideremos la desigualdad 2.3.3 con $x = a_n$ y apliquemos la función logaritmo, entonces:

$$\log n + \log\left[1 - \frac{1}{a_n^2}\right] < \frac{a_n^2}{2} + \log a_n + \frac{\log 2\pi}{2} < \log n \;.$$

Tratemos de expresar el número a_n como la suma de términos cuya magnitud sea cada vez más pequeña. Tomemos a $(\log n)^{1/2}$ como el primer término de dicha suma y representemos con K la suma de los otros términos, entonces:

$$\log\left[1 - \frac{1}{[(2\log n)^{1/2} + K]^2}\right] < \log n + 2K(2\log n)^{1/2} + K^2$$

$$+ \log\left[(2\log n)^{1/2} + K\right] + \frac{\log 2\pi}{2} < 0 \;. \qquad 2.3.10$$

Evidentemente, esta desigualdad se cumple si K es negativo y si es la suma de términos de magnitud menor que $(2\log n)^{1/2}$. Esto ya nos permite intercambiar la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ por la sucesión $\{b^*_n\}_{n=1}^{\infty}$. Observemos que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad b_n = R(a_n)$$

y como:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

por el tercer límite de la expresión 2.3.5:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n R(\alpha_n) = 1 \;. \qquad 2.3.11$$

Además:

$$\alpha_n(2logn)^{-1/2} = \frac{(2log2\pi)^{1/2} + K}{(2logn)^{1/2}} = 1 - \frac{K}{(2logn)^{1/2}}$$

y al tomar el límite cuando n tiende a infinito, como K es la suma de términos de magnitud menor que $(2logn)^{1/2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(2logn)^{-1/2} = 1 \;. \qquad 2.3.12$$

Entonces, considerando los límites 2.3.11 y 2.3.12:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^*}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2log2\pi)^{-1/2}}{R(\alpha_n)} = \frac{\alpha_n\ (2log2\pi)^{-1/2}}{\alpha_n\ R(\alpha_n)} = 1$$

por lo tanto, por el lema 3.1 (capítulo II):

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\alpha_n + b_n^* x) = H_{3,0}(x) \;.$$

Para poder intercambiar la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ por la sucesión $\{\alpha_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ necesitamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_n^*}{b_n^*} = 0$$

entonces, necesitamos que los términos que forman parte de la suma de α_n, sean de magnitud menor que $(2logn)^{-1/2}$(y de magnitud mayor que $(2logn)^{1/2}$ para que la desigualdad 2.3.10 se siga cumpliendo) de tal forma que al dividirlos entre b_n^* converjan a cero, por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\alpha_n^* + b_n^* x) = H_{3,0}(x) \;.$$

Ejemplo 2.4.- Caso lognormal

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes positivas tales que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \log X_n = \log X$$

tenga distribución normal estandar; en estas condiciones decimos que la variable aleatoria X_n es una variables aleatoria lognormal y:

$$\forall\, x > 0 \qquad P(\log X \le \log x) = \int_{-\infty}^{x} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-u^2/2}\, du\ .$$

Como veremos a partir del ejemplo anterior, podemos encontrar facilmente sucesiones de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (con $b_n > 0$) tales que la sucesión de variables aleatorias:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \frac{Z_n - a_n}{b_n} \qquad (Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\})$$

converja en distribución.

Sean $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ las constantes de estandarización definidas en las expresiones 2.3.1 y 2.3.2, entonces por el ejemplo 2.3:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n^* + b_n^* x) = \exp(-e^{-x})$$

o bien:

$$\lim_{n\to\infty} P[Z_n \le \exp(a_n^* + b_n^* x)] = \exp(-e^{-x})\ .$$

Realizando el desarrollo de Taylor de la función $\exp(a_n^* + b_n^* x)$ obtenemos que:

$$\exp(a_n^* + b_n^* x) = \exp(a_n^*) + b_n^* \exp(a_n^*) x + \frac{{b_n^*}^2 \exp(a_n^*)}{2!} x^2 + \ldots$$

luego:

$$exp(a^*_n + b^*_n x) = exp(a^*_n) + b^*_n exp(a^*_n) x \left[1 + \frac{x b^*_n}{2!} + \frac{b^{*2}_n exp(a^*_n)}{2!} x^2 + \ldots \right]$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[Z_n \le exp(a^*_n) + b^*_n exp(a^*_n) x \left[1 + \frac{x b^*_n}{2!} + \ldots \right] \right] = exp(-e^{-x})$$

y como:

$$\lim_{n\to\infty} b^*_n = \lim_{n\to\infty} (2 \log n)^{-1/2} = 0$$

tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^*_n \; exp(a^*_n)}{b^*_n \; exp(a^*_n)} \left[1 + \frac{x b^*_n}{2!} + \ldots \right] = 1$$

y por el lema 3.2 del capítulo II:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[Z_n \le exp(a^*_n) + b^*_n exp(a^*_n) x \left[1 + \frac{x b^*_n}{2!} + \ldots \right] \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(Z_n \le exp(a^*_n) + b^*_n exp(a^*_n) x \right) = exp(-e^{-x})$$

por lo tanto, tomando:

$$\forall \; n \in \mathbb{N} \qquad a_n = exp(a^*_n) \quad y \quad b_n = b^*_n \; exp(a^*_n)$$

encontramos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = H_{3,0}(x) \; .$$

Ejemplo 2.3.5.- Caso Cauchy

Sea F una función de distribución con regla de correspondencia:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, arctan\; x\, .$$

Calculemos $\alpha(F)$ y $\omega(F)$:

$$\alpha(F) = \inf\{x \mid F(x) > 0\} = -\infty$$

y

$$\omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\} = \infty$$

entonces, la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface el teorema 6.1 o 6.3; pero la condición 6.3.1 no se cumple, debido a que si integramos por partes la función $1 - F$:

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)]\; dx$$

tomando:

$$u = 1 - F(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\, dx$$

y

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

así:

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)]\; dx = x\, [1 - F(x)]\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\, dx = \infty\, .$$

Analicemos entonces si la condición 6.1.2 del teorema 6.1 se cumple; por la regla de L'Hôspital:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1 + t^2}{1 + (tx)^2}\, x = \lim_{t\to\infty} \frac{1/t^2 + 1}{1/t^2 + x^2}\, x = x^{-1}.$$

En estas condiciones, podemos aplicar el teorema 6.1 con $\gamma = 1$ entonces:

$$\forall\, x > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(Z_n \le b_n x) = exp(-x^{-1})$$

donde los términos $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, según la regla dada en este teorema, se pueden escoger como:

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n$ es tal que:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\, arctan\, b_n = \frac{1}{n}$$

o bien:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad b_n = tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}) \; .$$

En vista de que la función de distribución F es simétrica, podemos evitar el hecho de tener que estudiar la sucesión de mínimos $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ con detalle, dado que:

$$\forall\, x > 0 \qquad P(W_n \le -x) = P(Z_n > x)$$

entonces:

$$\forall\, x < 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(W_n \le d_n x) = 1 - exp(x^{-1})$$

donde:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad b_n = d_n \; .$$

3. MODELOS DE VARIABLES ALEATORIAS SIN DISTRIBUCION LIMITE

Ejemplos 3.1

Sea F una función de distribución con regla de correspondencia dada por:

$$\forall\ x \geq e \qquad F(x) = 1 - \frac{1}{\log x} \qquad 3.1.1$$

A continuación demostraremos que no existen sucesiones de términos no aleatorios $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que la sucesión $\left\{\dfrac{Z_n - a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converja en distribución. En vista de que:

$$\omega(F) = \sup\{x \mid F(x) < 1\} = \infty$$

las únicas funciones de distribución límite posibles son $H_{1,\gamma}$ y $H_{3,0}$ (ver teoremas 6.1 y 6.3, capítulo II). Sin embargo, la condición 6.3.3 no se cumple, ya que la función $(1/\log x)$ no es integrable en el intervalo (e, ∞) y la condición 6.1.2 tampoco se cumple porque:

$$\forall\ x > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{x \log t} = 1 \neq x^{-\gamma} \qquad (\forall\ \gamma\ > 0).$$

A pesar de que la función F no está en el dominio de atracción de alguna de las funciones $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$, el teorema 2.2 del capítulo anterior, nos permitirá dar una buena estimación de la «cola» de la función de distribución H_n.

Analizando la estimación de $H_n(x)$ dada en el teorema 2.2,

observamos que:

$$H_n(x) \in \left[\Gamma(x) - 4n[1 - F(x)] \; F^n(x), \;\; \Gamma(x) \right]$$

donde

$$\Gamma(x) = e^{-n(1-F(x))}$$

entonces, si deseamos que el error sea menor a 0.05, basta tomar:

$$4n[1 - F(x)]^2 = 16(\log x)^{-2} < 0.05 \; .$$

Así, el número x debe satisfacer esta desigualdad y sorprendentemente encontramos que:

$$x > 58\,734\,861$$

Estimemos $H_n(60 \times 10^6)$. En virtud de que para este valor de x la condición 2.2.1 (capítulo II) se satisface, por el teorema 2.2 tenemos que para $n = 4$:

$$\Gamma(x) = 0.7998 \qquad \text{y} \qquad 4n[1 - F(x)]^2 \, F^n(x) = 0.0396$$

entonces:

$$0.7602 < H_n(x) < 0.7998$$

de donde deducimos que:

$$P(Z_n > x) > 0.2002$$

es decir que entre cuatro observaciones independientes, en más del 20% de los casos, el máximo (la observación más grande) será mayor a sesenta millones.

Realizando el mismo procedimiento para $n = 6$ y $n = 10$, obtenemos que en más del 24.5% y del 30% de los casos, el máximo excede 3.2×10^9 y 1.9×10^{12} respectivamente. Por lo tanto, podemos concluir, que no es sorprendente que la variable aleatoria Z_n no se estabilice conforme n crece, en el sentido de que exista una función de distribución límite.

4. ALGUNAS APLICACIONES

Ejemplo 4.1

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con función de distribución F cuya regla de correspondencia es la dada en la expresión 3.1. Sean:

$$\forall\ j = 1, \ldots, n \qquad\qquad Y_j = \log X_j$$

y

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Z_n^* = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} .$$

A continuación mostraremos que la sucesión $\{Z_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una función de distribución límite, en el sentido de la expresión 1.5 (capítulo II).

Encontremos la función de distribución de la variable aleatoria Y_j.

$$\forall\ x \geq 1 \qquad\qquad F_{Y_j}(x) = P(X_j \leq e^{x}) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Verifiquemos que las condiciones 6.1.1 y 6.1.2 (capítulo II) se cumplen. Como:

$$\omega(F_{Y_j}) = \sup\{x \mid F_{Y_j}(x) < 1\} = \infty$$

la primera condición se satisface y dado que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F_{Y_j}(tx)}{1 - F_{Y_j}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{tx} = x^{-1}$$

la condición 6.1.2 se cumple para $\gamma = 1$, entonces tomando:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad\qquad b_n = \inf\{x \mid 1 - F_{Y_j}(x) \leq \tfrac{1}{n}\}$$

$$= \inf\{x \mid \tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{n}\} = n .$$

por el teorema 6.1:

$$\forall\, x > 0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} P(Z^*_n < nx) = exp(-x^{-1}) \,. \qquad\qquad 4.1.1$$

Sin embargo, este resultado no tiene una aplicación práctica para la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ (donde para todo número natural n, $Z_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$) debido a que como:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Z^*_n = log\; Z_n$$

por la expresión 4.1.1, tenemos que para un número n suficientemente grande, si $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$P(e^{n/y} < Z_n \le e^{nx}) \approx exp(-x^{-1}) - exp(-y^{-1})$$

y por ejemplo, si:

$$y = \frac{1}{2} \qquad y \qquad x = 15$$

$$P(e^{n/2} < Z_n \le e^{15n}) \approx 0.80 \,.$$

las cotas de la variable aleatoria están demasiado alejadas para tener algún uso práctico, digamos que $n = 10$, entonces:

$$P(148 < Z_{10} < 1.394 \times 10^{65}) \approx 0.80 \,.$$

Evidentemente, esta aproximación no nos da mayor información sobre la variable aleatoria Z_n; por lo tanto, podemos afirmar que si el logaritmo de las observaciones originales $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se comportan bien, en el sentido de que exista una función de distribución límite, no tiene porque aportar información útil sobre las observaciones originales.

Ejemplo 4.2

El objetivo del presente ejemplo, es resaltar el hecho de que el máximo Z_n se comporta de manera distinta para distribuciones diferentes, por muy «parecidas» que éstas sean, por lo que hay que tener mucho cuidado al decidir como se distribuye la cantidad aleatoria que queramos estudiar, debido a que, como veremos a continuación, dependiendo de la función de distribución que elijamos, ésta nos puede conducir a un resultado sustancialmente diferente del que podríamos obtener al considerar otra función de distribución.

Un individuo toma una muestra aleatoria de alguna cantidad aleatoria X. El individuo supone que la variable aleatoria X tiene distribución normal estandar y realiza una «prueba de hipótesis» para ver si su suposición es válida o no. Supongamos que dicha prueba sostiene su hipótesis, a pesar de que la verdadera distribución de la variable aleatoria X es la de la variable aleatoria:

$$\sigma \in \mathbb{R}^+ \qquad \frac{Y^{\sigma} - 1}{\sigma}$$

donde la variable aleatoria Y tiene distribución lognormal, es decir:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\ln y} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-u^2/2}\, du$$

y supongamos que el número σ es tan pequeño que la prueba de hipótesis no puede detectar la diferencia (se puede probar que cuando σ tiende a cero:

$$X = \frac{Y^{\sigma} - 1}{\sigma} \xrightarrow{D} Z$$

donde Z es una variable aleatoria normal estandar).

Consideremos

$$Z_{50} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{50}\}$$

donde $\{X_n\}_{n=1}^{50}$ es la muestra aleatoria y $\sigma = 0.10$, y comparemos el comportamiento del máximo Z_{50} bajo la conclusión de dicho individuo y la situación real.

Como el individuo supone que la variable aleatoria X tiene distribución normal estandar (ver ejemplo 2.3) calcula los números a_{50} y b_{50} con las reglas dadas en las expresiones 2.3.1 y 2.3.2 y obtiene que:

$$a_{50} = 2.1009 \quad y \quad b_{50} = 0.3575$$

y por lo tanto concluye que:

$$P(Z_{50} \leq 2.1009 + 0.3575x) \approx exp(-e^{-x}) . \qquad 4.2.1$$

Ahora obtengamos la aproximación correcta. Por hipótesis tenemos que:

$$\forall\ n = 1, \ldots, 50 \qquad\qquad X_n = \frac{Y_n^{\sigma} - 1}{\sigma}$$

entonces:

$$Z_{50} = \max_{1<n<50} \{X_n\}_{n=1}^{50} = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\max_{1<n<50}\{Y_n\}\right)^{\sigma} - 1\right]$$

$$= \frac{(Z_{50}^{*})^{\sigma} - 1}{\sigma}$$

despejando Z_{50}^{*}:

$$Z_{50}^{*} = \left[\sigma\ Z_{50} + 1\right]^{1/\sigma} = \max_{1<n<50}\{Y_n\} . \qquad 4.2.2$$

Por un lado, como el conjunto de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n=1}^{50}$ tienen distribución lognormal, por el ejemplo 2.4 sabemos que:

$$P(Z_{50}^{*} \leq a_{50}^{*} + b_{50}^{*}x) \approx H_{1,0}(x)$$

donde

$$a_{50}^{*} = exp(a_{50}) \qquad y \qquad b_{50}^{*} = b_{50}exp(a_{50})$$

entonces;

$$P(Z^*_{50} \leq 8.1735 + 2.9220) \approx H_{3,0}(x)$$

y por otro lado, considerando la igualdad 4.2.2:

$$P\left[\left[\sigma Z_{50} + 1\right]^{1/\sigma} \leq 8.1735 + 2.9220x\right] \approx H_{3,0}(x)$$

tomando $\sigma = 0.10$:

$$P[Z_{50} \leq 10(8.1735 + 2.9220x)^{0.1} - 10] \approx H_{3,0}(x) \,. \qquad 4.2.3$$

Comparemos los dos resultados obtenidos (las expresiones 4.2.1 y 4.2.2). Supongamos que queremos calcular la probabilidad:

$$P(Z_{50} \leq 2.6) \,.$$

Para la expresión 4.2.1, encontramos que:

$$x = 1.3961$$

por lo tanto:

$$P(Z_{50} \leq 2.6) \approx exp(-e^{-1.3961}) = 0.7807$$

mientras que utilizando la expresión correcta 4.2.3, calculamos que:

$$x = 0.6544$$

por lo tanto:

$$P(Z_{50} \leq 2.6) \approx exp(-e^{-0.6544}) = 0.5947$$

Como podemos observar, la diferencia entre ambos resultados realmente es considerable. Este error lo podemos atribuir a que el método utilizado por el individuo para ver si su suposición era válida o no, es decir, la prueba de hipótesis, dificilmente puede distinguir entre dos funciones de distribución que se encuentren «cercanas» de manera uniforme.

entonces;

$$P(Z^{*}_{50} \leq 8.1735 + 2.9220) \approx H_{3,0}(x)$$

y por otro lado, considerando la igualdad 4.2.2:

$$P\left[\left(\sigma Z_{50} + 1\right)^{1/\sigma} \leq 8.1735 + 2.9220x\right] \approx H_{3,0}(x)$$

tomando $\sigma = 0.10$:

$$P[Z_{50} \leq 10(8.1735 + 2.9220x)^{0.1} - 10] \approx H_{3,0}(x) \; . \qquad 4.2.3$$

Comparemos los dos resultados obtenidos (las expresiones 4.2.1 y 4.2.2). Supongamos que queremos calcular la probabilidad:

$$P(Z_{50} \leq 2.6) \; .$$

Para la expresión 4.2.1, encontramos que:

$$x = 1.3961$$

por lo tanto:

$$P(Z_{50} \leq 2.6) \approx exp(-e^{-1.3961}) = 0.7807$$

mientras que utilizando la expresión correcta 4.2.3, calculamos que:

$$x = 0.6544$$

por lo tanto:

$$P(Z_{50} \leq 2.6) \approx exp(-e^{-0.6544}) = 0.5947$$

Como podemos observar, la diferencia entre ambos resultados realmente es considerable. Este error lo podemos atribuir a que el método utilizado por el individuo para ver si su suposición era válida o no, es decir, la prueba de hipótesis, dificilmente puede distinguir entre dos funciones de distribución que se encuentren «cercanas» de manera uniforme.

Ejemplo 4.3

Sea X una variable aleatoria que represente el tiempo que «vive» o funciona un cierto artículo. Evidentemente, la variable aleatoria X tiene que ser continua y no negativa, por lo tanto, debe satisfacer que:

$$\forall\ x < 0 \qquad F(x) = P(X \leq x) = 0 \qquad 4.3.1$$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n observaciones independientes de la variable aleatoria X. Una de las primeras preguntas que nos podríamos plantear acerca de estas observaciones, sería el comportamiento de

$$W_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

(ver ejemplo 5.2, capítulo I).

Analicemos la sucesión de mínimos $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si existen sucesiones de números $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que la variable aleatoria:

$$\frac{W_n - c_n}{d_n}$$

tenga una función de distribución límite, dada la condición 4.3.1:

$$\alpha(F) = 0$$

y en consecuencia, por los teoremas 6.5 y 6.6 las funciones de distribución límite posibles son $L_{2,\gamma}$ y $L_{3,0}$. Ahora, para averiguar cuál de estas dos funciones es la función límite, necesitaríamos estudiar el comportamiento de la función F evaluada en un punto x, cuando éste tiende a cero, es decir, habría que ver cual de las condiciones satisface la función F (condiciones 6.5.2 o 6.6.3):

$$\forall\ x > 0,\ \gamma > 0 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{\gamma} \qquad 4.3.2$$

o

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{t \to 0} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^{x}$$

(la función r se definió en la expresión 6.6.2), entonces:

$$F \in \mathcal{D}(L_{2,\gamma}) \qquad o \qquad F \in \mathcal{D}(L_{3,0})$$

respectivamente.

En general, la experiencia ha demostrado que la función de distribución límite más adecuada, en el sentido de que refleja mejor el comportamiento de la vida de un artículo, es la función $L_{2,\gamma}$, no sólo porque existen muchas funciones de distribución que satisfacen la condición 4.3.2.

Es por ésto, entre otras razones, que la familia de funciones de distribución $L_{2,\gamma}(\frac{x - a}{\beta})$ que reciben el nombre de Weibull, se utilizan con mucha frecuencia en ingeniería.

Observemos que la función:

$$\forall\, x > 0,\ \gamma > 0 \qquad L_{2,\gamma}(x) = 1 - exp[(-x)^{\gamma}]$$

con $\gamma = 1$, es precisamente la función de distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$ (ver ejemplo 2.1). Este modelo suele reflejar muy bien la duración de vida de muchos artículos y como veremos a continuación, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con función de distribución exponencial F, entonces, para todo número natural n, el mínimo W_n también tiene función de distribución exponencial y en consecuencia la función de distribución límite de $\left\{\frac{W_n - c_n}{d_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (donde las sucesiones $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ serán sucesiones de números convenientemente escogidas) también tendrá distribución exponencial.

Mostremos que efectivamente la variable aleatoria V_n tiene distribución exponencial. Por la relación 1.15 del capítulo II y el ejemplo 2.1 (ver regla de correspondencia de la función de distribución exponencial):

$$P(V_n \leq x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - e^{-\lambda n x}$$

entonces, la variable aleatoria V_n tiene función de distribución exponencial con parámetro λn.

Sin embargo, existen otras sucesiones de variables aleatorias tales que su función de distribución F (que no es exponencial) pertenece al dominio de atracción de la función $L_{2,\gamma}$. Por ejemplo, la función:

$$F(x) = 2\Phi(x) - 1$$

donde la función Φ es la función de distribución normal estandar. Aplicando la regla de L'Hôspital, la condición 4.3.2 se cumple para $\gamma = 1$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(tx)}{F(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(tx)}{F'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{x \, exp[-(tx)^2/2] \, (2\pi)^{-1/2}}{exp[-(t^2)/2] \, (2\pi)^{-1/2}}$$

$$= \lim_{t \to 0} x \, exp\left[- \frac{t^2}{2}(x^2 + 1)\right] = x$$

y por el teorema 6.5 del capítulo II, tomando:

$$\forall \, n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \alpha(F) = 0$$

y

$$d_n = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$$

[d_n es tal que $F(d_n) = \frac{1}{n}$], tenemos que:

$$\lim_{n \to \infty} P(V_n \leq d_n x) = 1 - e^{-x} .$$

CAPITULO IV

CONVERGENCIA EN DISTRIBUCION DEL MAXIMO Y EL MINIMO DE UNA SUCESION DE VARIABLES ALEATORIAS DEPENDIENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS

1. INTRODUCCION

Sea $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espacio de probabilidad y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias. En los capítulos anteriores, estudiamos la convergencia en distribución del máximo y el mínimo de una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, en el caso particular, en el que dicha sucesión es de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas y como vimos, este problema está totalmente resuelto.

El siguiente paso natural, es tratar de encontrar condiciones bajo las cuales la sucesión de máximos y de mínimos converja en distribución, pero ahora debilitando alguna de las hipótesis del modelo, es decir, omitir la hipótesis de independencia o bien, la de que las variables aleatorias sean identicamente distribuídas.

En el presente capítulo, nos ocuparemos sólo de un caso un poco más general que el del capítulo II. Omitiremos la hipótesis de independencia y trabajaremos con una sucesión « estrictamente estacionaria » $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de variables aleatorias, es decir, con una sucesión de variables aleatorias identicamente distribuídas y cuya estructura la podemos describir de la siguiente forma (en la sección 2 daremos la definición exacta): supongamos que vamos a observar n variables aleatorias consecutivas en la sucesión; entonces, sin importar cual sea la primera variable aleatoria que observemos, las n variables aleatorias tendrán la misma estructura probabilística; más precisamente, tendrán la misma función de distribución conjunta.

Además, solamente analizaremos dos clases de sucesiones estacionarias. En la sección 2, veremos las sucesiones «mezclantes», cuya estructura de dependencia la podemos describir como el hecho de que las variables aleatorias sean asintoticamente independientes; más especificamente, entre más lejos se encuentren las variables aleatorias en la sucesión, unas de otras, menos dependientes serán. Y en la sección 3, analizaremos aquellas sucesiones estacionarias que tienen distribución finita normal o gaussiana.

Así, deseamos encontrar condiciones para que el máximo[1] de de las sucesiones estacionarias que acabamos de mencionar converja en distribución y averiguar cuales serían las funciones de distribución límite. Aquí surge la pregunta:

¿ siquen siendo las funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$ las únicas funciones de distribución límite ?

En el caso en el que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es mezclante y cumple una serie de condiciones (ver teorema 2.8), la respuesta a esta pregunta es afirmativa; sin embargo en el caso estacionario gaussiano no lo es, de hecho, como veremos en la sección 3, para el máximo de dichas sucesiones se encontró todo un conjunto de nuevas familias de funciones de distribución límite.

Como el objetivo de este capítulo, es simplemente ilustrar brevemente cómo se ha desarrollado el estudio de la convergencia del máximo en el caso estacionario, no incluímos las demostraciones de los resultados que enunciaremos, solamente proporcionaremos las referencias en donde se pueden consultar.

---

[1] No analizaremos la convergencia del mínimo, porque la teoría que se pueda desarrollar para el máximo es equivalente a la del mínimo en virtud de la relación:

$$\min\{x_i\}_{i=1}^{n} = -\max\{-x_i\}_{i=1}^{n} .$$

2. CASO ESTACIONARIO

Usaremos la misma notación que en el capítulo II; así $(\Omega,\mathcal{A},P)$ es un espacio de probabilidad, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias sobre dicho espacio,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y H_n y H representarán las funciones de distribución de Z_n y la función de distribución límite respectivamente. Además, si los números enteros $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ son tales que:

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$$

representaremos la función de distribución del vector aleatorio $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ de la siguiente forma:

$\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

$$F_{i(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P\left(\bigcap_{s=1}^{k} \{\omega \in \Omega \mid X_{i_s}(\omega) \le x_s\}\right)$$

y

$$G_{i(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P\left(\bigcap_{s=1}^{k} \{\omega \in \Omega \mid X_{i_s}(\omega) > x_s\}\right)$$

y si para todo número natural s, $x_s = x$, entonces abreviaremos:

$$F^{*}_{i(k)}(x) = F_{i(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\ .$$

Finalmente, consideraremos que:

$$i_{(k)+s} = (i_1 + s,\ i_2 + s,\ \ldots,\ i_k + s)$$

y si; $\forall\, m \le k$, $i_m < j_1$:

$$i_{(k)}, j_{(t)} = (i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_t)\ .$$

Introduzcamos la definición de sucesiones estacionarias de variables aleatorias, que son las que analizaremos a lo largo de este capítulo.

Definición 2.1 Decimos que la *sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *estacionaria (en el sentido estricto)* si:

$\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

$$F_{i(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{i(k)+s}(x_1, x_2, \ldots, x_k) .$$

Observemos que si la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estacionaria, entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ será una sucesión de variables aleatorias identicamente distribuídas.

Nos referimos a la estacionariedad estricta, porque existe otro concepto de estacionariedad que es el siguiente: decimos que la *sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *estacionaria* si:

$$\forall\ s, t \quad \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)\, E(X_t) = f(t-s) \qquad 2.2$$

es decir, que la covarianza está en función de $t - s$. Sin embargo, trabajaremos unicamente con la primera definición, por lo cual, no necesitaremos hacer tal distinción.

A continuación, veremos una clase particular de sucesiones estacionarias de variables aleatorias, que reciben el nombre de «mezclantes». Para tal efecto, consideremos el conjunto de índices separados $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots j_t\}$ donde:

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k, i_{k+s} \le j_1 < j_2 < \ldots < j_t$$

y la función τ con las siguientes características:

i) $\tau: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

ii) $\tau(s,u)$ es no creciente en s

iii) para al menos una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales, que converja a $\omega(F)$ (ver definición 5.1, capítulo II) cuando n tienda a infinito, existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a infinito tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \tau(s_n, u_n) = 0 .$$

En estas condiciones tenemos la siguiente definición:

Definición 2.3 Decimos que la sucesión estacionaria de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *mezclante (en la cola superior de* F), si existe una función τ como la descrita en el párrafo anterior tal que:

$$\left| F^*_{i_{(k)},j_{(t)}}(u) - F^*_{i_{(k)}}(u)\, F^*_{j_{(t)}}(u) \right| \le \tau(j_1 - i_k\,, u) . \qquad 2.3.1$$

para cuales quiera $i_{(k)}$ y $j_{(t)}$ separados.

A la condición 2.3.1 se le llama condición de mezclado.

Este concepto nos dice que las variables aleatorias de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ son cada vez menos dependientes, conforme más lejos se encuentren en la sucesión unas de otras. Un caso particular de las sucesiones mezclantes son las sucesiones m-dependientes definidas por:

Definición 2.4 Sean $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$ independientes e identicamente distribuídas y g una función definida del conjunto $\mathbb{R}^n$ en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, medible. Construyamos una nueva sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal forma que:

$$\forall\ j \ge 1 \qquad\qquad X_j = g(Y_j,\ Y_{j+1},\ \ldots,\ Y_{j+m-1}) .$$

y consideremos el conjunto de índices separados

$$\{i_1, i_2, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_k\}$$

con:

$$i_t + m \le j_1$$

entonces, decimos que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión estacionaria m-dependiente*, si los vectores:

$$(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_t}) \quad y \quad (X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_t})$$

son independientes.

En otras palabras, la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es m-dependiente, si dados dos vectores seperados por al menos m índices, éstos son independientes.

Por ejemplo, una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas es una sucesión 1-dependiente.

Evidentemente, toda sucesión de variables aleatorias m-dependiente, es mezclante, debido a que:

$$\forall\, s \ge m \qquad\qquad \tau(s,u) = 0$$

y por lo tanto, las sucesiones de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas, también serán mezclantes ($\forall\, s \ge 1$, $\tau(s,u) = 0$).

Veamos ahora para las sucesiones mezclantes, un conjunto condiciones que garantizan que la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene función de distribución límite del mismo tipo que las obtenidas en el caso independiente e identicamente distribuído.

Supongamos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estacionaria de variables aleatorias con función de distribución F, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de números reales y τ una función tal que si:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + b_n x \quad \text{y} \quad s_n \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \tau(s_n, u_n) = 0 \,.$$

En estas condiciones tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5 *Si la sucesión estacionaria* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es tal que:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} n\,[\,F(a_n + b_n x)] = u(x) \,, \qquad 2.5.1$$

es mezclante 2.5.2

donde la condición de mezclado se cumple para la función τ *que describimos previamente, y cuando M tiende a infinito:*

$$\limsup_{n\to\infty}\, n \sum_{j=2}^{n} P\left(X_1 > u_{nM} \,;\, X_j > u_{nM}\right) = o\left(\frac{1}{M}\right)^{1} \qquad 2.5.3$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = e^{-u(x)} = H(x) \,. \qquad 2.5.4$$

Hagamos algunas observaciones.

Si la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es indepen-

---

[1] Una función f es o(h) si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(h)}{h} = 0$$

es decir, f es una función o(h) si converge a cero más rápido que h.

diente e identicamente distribuída, entonces sólo se necesita la hipótesis 2.5.1, debido a que en tal caso, el teorema 2.5 se reduce al corolario 2.4 del capítulo II. Esto implica que la función de distribución límite H, es una función del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$ $H_{2,\gamma}$ o $H_{3,0}$.

Si la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es m-dependiente, entonces es mezclante como ya mencionamos, por lo tanto en tal caso, las únicas hipótesis necesarias serían la 2.5.1 y la 2.5.3.

Así, la hipótesis 2.5.1 la conocemos del capítulo II, la 2.5.2 pide que las variables aleatorias sean asintoticamente independientes y finalmente, la hipótesis 2.5.3, es más bien una condición técnica, la cual pide que las colas de las distribuciones conjuntas indicadas, converjan rapidamente a cero.

Aquí es importante enfatizar, que las únicas funciones de distribución límite para las sucesiones mezclantes, siguen siendo las funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$ $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$.

Para concluir esta sección, queremos comentar brevemente, como evolucionó el estudio de esta clase de sucesiones de variables aleatorias.

El estudio lo comenzó G. S. Watson (1954), quien demostró un caso particular del teorema 2.5. El mostró que si la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es m-dependiente y las condiciones 2.5.1 y una equivalente a la 2.5.3 se cumplen, entonces la sucesión de máximos converge en distribución (es decir, la expresión 2.5.4 se cumple). La necesidad de estas condiciones fue demostrada por G. O'Brien (1974). R. M. Loynes (1965), fue el primero en realizar un estudio a fondo de las sucesiones mezclantes. Fue él, quien encontró la forma de la hipótesis 2.5.3, aunque

no exactamente bajo las mismas condiciones del teorema 2.5. La forma del teorema 2.5 se debe a M. R. Leadbetter, quien lo demostró en 1974.

3. CASO ESTACIONARIO GAUSSIANO

Introduzcamos las siguientes definiciones:

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

- R una matriz de $n \times n$ positiva definida, cuya (i,j)-ésima entrada está dada por:

$$r(i,j) = Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)\, E(X_j)$$

- R^{-1} la matriz inversa de la matriz R

- $|R|$ el determinante de la matriz R

- $\bar{\mu} = [\, E(X_1),\, E(X_2),\, \ldots, E(X_n)]$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

y

- $\bar{x}'$ el vector transpuesto del vector $\bar{x}$.

Definición 3.1 Decimos que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen *distribución gaussiana* o *normal* *(n-variada)* si su función de densidad conjunta está dada por:

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(\bar{x}) = (2\pi)^{-n/2} |R|^{1/2} exp[\, -\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{\mu})\, R^{-1}(\bar{x} - \bar{\mu})'\,].$$

Definición 3.2 Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias. Decimos que la *sucesión* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *es gaussiana* o *normal*, si cualquier subconjunto finito de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tiene distribución gaussiana o normal k-variada.

Sin pérdida de generalidad, trabajaremos unicamente con sucesiones gaussianas, para las cuales:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mu_n = E(X_n) = 0 \quad y \quad \sigma_n^2 = Var(X_n) = 1$$

debido a que si la variable aleatoria Y_n tiene función de distribución normal con parámetros μ y σ^2, la variable aleatoria

$$X_n = \frac{Y_n - \mu}{\sigma}$$

es una variable aleatorià normal estandar, es decir que:

$$E(X_n) = 0 \qquad y \qquad Var(X_n) = 1$$

y además, como estamos interesados en el comportamiento de la sucesión de máximos y sabemos que:

$$\max\{X_i\}_{i=1}^{n} = \max\left\{\frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right\}_{i=1}^{n} = \frac{\max\{Y_i\}_{i=1}^{n} - \mu}{\sigma}$$

si conocemos el comportamiento de la sucesión de máximos correspondiente a la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, conoceremos el comportamiento de la sucesión de máximos correspondiente a la sucesión $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$.

A lo largo de este capítulo, trataremos con sucesiones gaussianas estacionarias, por lo cual, a continuación hacemos algunas observaciones a cerca de dichas sucesiones.

1. Dada la siguiente proposición,

Proposición 3.3 *La sucesión gaussiana $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ es estacionaria (en el sentido estricto), si y sólo si:*

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N} \qquad Cov(X_m, X_n) = Cov(X_{m-n}, X_0) .$$

las dos definiciones que dimos de estacionariedad (estacionariedad en el sentido estricto y estacionariedad, ver definiciones 2.1 y 2.2 respectivamente) son equivalentes para una sucesión gaussiana.

2. Observemos que la matriz R (ver definición 3.1) que recibe el nombre de *matriz de covarianzas*, adquiere la siguiente forma:

$$\forall\ i,j \qquad r(i,j) = \mathrm{Cov}(X_i,\ X_j) = r_m \qquad \text{donde } m = |i-j| \geq 1$$

y dado que: $\quad \forall\ i \quad E(X_i) = 0 \quad$ y $\quad \mathrm{Var}(X_i) = 1$

$$\forall\ j \qquad\qquad r(j,j) = \mathrm{Cov}(X_j,\ X_j) = 1\ .$$

Es importante hacer notar, que la distribución de $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ queda totalmente determinada por la matriz de covarianzas, por lo tanto, la distribución de la sucesión $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ está totalmente determinada por la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Por último, recordemos que si X_i y X_j son variables aleatorias normales, entonces serán independientes si y sólo si su covarianza es nula (en general, el recíproco no es cierto).

En el capítulo III, ejemplo 2.3, analizamos la convergencia de la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, en el caso en el que la sucesión gaussiana $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, es una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas y encontramos que si:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad a_n = (2\log\ n)^{1/2} - \frac{\log(\log\ n) + \log\ 4\pi}{(2\log\ n)^{1/2}}$$

y

$$b_n = (2\log\ n)^{-1/2} \qquad\qquad 3.4$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n + b_n x) = \exp(-e^{-x}) = H_{3,0}(x)\ .$$

En esta sección, vamos a analizar el comportamiento límite de la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ gaussiana estacionaria. En virtud de que la distribución de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ está totalmente determinada por la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ver observación 2), los criterios que se dan para que la sucesión de máximos converja en distribución, están dados en términos de la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$; más específicamente, dichos criterios se refieren a la velocidad de convergencia de dicha sucesión al cero. Aquí vale la pena hacer notar, que si la sucesión estacionaria $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es mezclante, entonces, como habíamos mencionado, las variables aleatorias serán asintoticamente independientes (en el sentido de que entre más alejadas esté una variable aleatoria de otra en la sucesión, éstas serán menos dependientes), lo cual implica que la sucesión de covarianzas converge a cero (en general, el inverso no es cierto, es decir, si la sucesión de covarianzas converge a cero, la sucesión estacionaria de variables aleatorias no tiene porque ser mezclante). Sin embargo, en el caso particular en el que la sucesión estacionaria $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es gaussiana, la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero si y sólo si la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es mezclante (ver observación 3). En virtud de lo anterior, no es sorprendente encontrar que las condiciones sobre la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, sean llamadas condiciones de mezclado.

El primer resultado importante para sucesiones gaussianas estacionarias, lo obtuvo Berman (1964), el cual enunciamos a continuación:

Teorema 3.5 *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión gaussiana estacionaria y sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de números dadas en la expresión 3.4, si:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n \log n = 0 \qquad 3.5.1$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty \qquad 3.5.2$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n + b_n x) = H_{3,0}(x) .$$

Berman afirma que la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución, si la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge suficientemente rápido a cero. Este resultado seguía fortaleciendo la hipótesis de que las únicas funciones de distribución límite para el máximo eran funciones del mismo tipo que $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ y $H_{3,0}$. No fue sino hasta el año de 1965, cuando se encuentra por primera vez, la posibilidad de que la función de distribución límite no fuera ninguna de las obtenidas en el caso independiente e identicamente distribuído. El trabajo en cuestión es de Pickands (1965), en el cual establece los siguientes dos resultados importantes:

El primero de ellos, se refiere a la velocidad de convergencia de la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dado el teorema de Berman, surge la siguiente pregunta: ¿ es la condición

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

(sin incluir ninguna hipótesis sobre la velocidad de convergencia) una condición suficiente para que la sucesión de máximos converja ? Pickands demuestra que no es así, con lo cual establece que el resultado de Berman es esencialmente inmejorable.

El segundo resultado de Pickands (el cual podría ser considerado como una de las contribuciones más importantes a la teoría asintótica del máximo después del trabajo de Gnedenko) consiste en la exhibición de una sucesión gaussiana estacionaria $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface la condición:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

y para la cual, existe una subsucesión de números naturales $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($= \{N(k)\}_{k=1}^{\infty}$) tal que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{1}{r_{N(k)}}\left[Z_n - \sqrt{2(1 - r_{N(k)})\log N_k}\right] \le x\right] = \Phi(x) \quad 3.6$$

donde Φ es la función de distribución normal estandar; es decir, Pickands exhibe una sucesión gaussianas estacionaria de de variables aleatorias para la cual existe una subsucesión de máximos $\{Z_{N(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge en distribución a una variable aleatoria normal estandar, por lo cual, es evidente, que si la sucesión de máximos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución, no lo hará a la función $H_{3,0}$, como se hubiera podido esperar.

Así, a pesar de que la expresión 3.6, tampoco implique que la función Φ sea una función de distribución límite para la sucesión de máximos, debido a que el resultado es para una subsucesión, por lo pronto, ésta se convierte en un «serio» candidato a serlo y precisamente en esto radica la importancia del trabajo de Pickands, debido a que hasta antes de éste, todos los esfuerzos por estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión de máximos (en el caso dependiente) se habían concentrado y limitado a encontrar condiciones para que dicha sucesión convergiera a $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ o a $H_{3,0}$.

Antes de continuar con los resultados obtenidos en esta nueva dirección, vale la pena observar, que el resultado 3.6 no es una generalización del caso independiente e identicamente distribuído, porque:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad r_n = E(X_0, X_n) = E(X_0)\, E(X_n) = 0$$

y por lo tanto, el cociente $\frac{1}{r_n}$ ni siquiera está definido.

Finalmente, mencionaremos dos resultados importantes obtenidos por Mittal y Ylvisaker (1975), que se podrían considerar como una continuación del trabajo de Pickands.

En el primero de ellos, encuentran condiciones (sobre la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$) para que el máximo de una sucesión gaussiana estacionaria de variables aleatorias converja a una variable aleatoria normal estandar. El resultado es el siguiente:

Teorema 3.7 *Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de covarianzas de una sucesión gaussiana estacionaria de variables aleatorias. Supongamos que:*

i) *cuando n tiende a infinito* $r_n \to 0$

ii) $r_n = O(1)$[1]

iii) para un número n suficientemente grande, la función

$$\frac{1}{r_n \log n}$$

es monótona y $O(1)$, *es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n \log n} = 0 \ ;$$

y sea:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad c_n = (2\log n)^{1/2} - \frac{\log(4\pi \log n)}{(2 \log n)^{1/2}}$$

[1] Una función f es O(g) si existe un número real A (finito) tal que:

$$\left|\frac{f}{g}\right| = A \ .$$

Si f es O(1), estamos pidiendo que la función f sea acotada.

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[Z_n \le (1 - r_n)^{1/2} c_n + \sqrt{r_n}\; x\right] = \Phi(x)$$

donde Φ es la función de distribución de una variable aleatoria normal.

Por lo tanto, <u>**la función de distribución normal es otra función de distribución límite para la sucesión estandarizada de máximos.**</u>

En el segundo resultado, Mittal y Ylvisaker encuentran toda una nueva familia de funciones de distribución límite:

Teorema 3.8 *Supongamos que la sucesión de covarianzas $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n \log n = O(1)$$

y que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \#\{1 \le k \le n \mid |r_k \log k - \gamma| > \varepsilon\} = o(n)\,.$$

Sea

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n = (2\log n)^{1/2} \quad y \quad a_n = b_n - \frac{\log(4\pi \log n)}{2(2\log n)^{1/2}}$$

entonces para $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le a_n + b_n x) = (2\gamma)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} H_{3,0}(x - z)\, \Phi'\!\left(\frac{z + \gamma}{2\gamma}\right) dz\,.$$

Dicho sea en otras palabras, la sucesión de máximos converge a la convolución de las funciones $H_{3,0}$ y Φ, y como ésta depende del parámetro γ, obtenemos todo un conjunto de nuevas familias de funciones de distribución límite para el máximo.

Berman, S.M. (1964). "Limit theorems for the maximum term in stationary sequences", Ann. Math. Statist. 35, 502-516.

Bhat, R.B. (1981). Modern probability theory, John Wiley & Sons.

Feller, W. (1983). Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones, Vol. I., Editorial Limusa.

Fisher, R.A. y L.C.H. Tippett (1928). "Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample", Proc. Cambridge Philos. Soc. 24, 180-190.

Fréchet, M. (1927). "Sur la loi de probabilité de l'écart maximum", Ann. de la Sec. polonaise de Math. (Cracow), 6, 93.

Galambos, J. (1978). The asymptotic theory of extreme order statistics, Wiley, New York.

Gnedenko, B.V. (1943). "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire", Ann. Math. 44, 423-453.

Gnedenko, B.V. (1962). The theory of probability , Chelsea 9ª ed., 1968.

Gnedenko, B.V. y A.N. Kolmogorov (1949). Limit distributions for sums of independent random variables, reimpresión Addison- Wesley, 1968.

Haan, L. de (1970). "On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes", Mathematical Center Tracts, Vol. 32, Amsterdam.

Haan, L. de (1971). "A form of regular variation and its application to the domain of attraction of the double exponential distribution", Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 17, 241-258.

Harris, B. (1966). The theory of probability, Addison-Wesley.

Leadbetter, M. R. (1974). "On extreme values in stationary sequences", Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 28, 284-303.

Loeve, M. (1963). Probability theory, D. van Nostrand Company, 3ª ed.

Loynes, R. M. (1965). "Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes", Ann. Math. Statist., 36, 993-999.

Mises, R. von (1936). "La distribution de la plus grande de n valuers", reimpreso en Selected Papers II. Amer. Math. Soc Providence, R.I., 1954, pag. 271-294.

Mittal, Y. and D. Ylvisaker (1975). "Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes", Stochastic Processes Appl. 3, 1-18.

O'Brien, G.L. (1974). "Limit theorems for the maximum of a stationary processes", Ann. Probability 2, 540-545.

Petrov, V. V. (1975). Sums of independent random variables, Springer Verlag.

Pickands, J. III (1967). "Maxima of stationary Gaussian Processes ", Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 7, 190-233.

Watson, G. S. (1954). "Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes", Ann. Math. Statist. 25, 798-800.