2 Ejem

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGON

DISEÑO ESTRUCTURAL DE UNA CUPULA GEODESICA.

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

INGENIERO CIVIL

presenta

JORGE GONZALEZ RAMIREZ

México, D. F. 1984

I N D I C E .

I.- INTRODUCCION.

La necesidad de tener estructuras de grandes claros, provoca que a mediados de este siglo, se tenga un gran avance en los estudios acerca de las estructuras espaciales.

El caso de las cúpulas geodésicas es muy interesante, ya que siendo una estructura cuyos elementos son barras y mudos, su comportamiento se rige de acuerdo a la teoría general de membranas. Como resultado de este análisis y sus respectivas consideraciones, se obtiene una estructura estética, de gran luz, muy ligera y por ende bastante económica, que nos permite tener un abaratamiento en los costos de construcción y enfocar su utilidad a cualquier fin que redunde en beneficio de la colectividad.

Una cúpula geodésica es el resultado de la subdivisión de las caras (triangulos esféricos) de un icosaedro inscrito en una esfera, dando como resultado mallas de una capa.

Así, el motivo de este trabajo es el de proporcionar un método de diseño para una cúpula geodésica, empleando las herramientas que nos proporciona la estática y dimensionando de acuerdo a las normas de diseño del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal.

II.- CALCULO GEOMÉTRICO.

II.1.- DETERMINACIÓN DE LAS COORDENADAS NODALES DEL ICOSAEDRO.- Toda estructura requiere primeramente de una ubicación de las partes que la integran, para tener un conocimiento adecuado de sus dimensiones, la cual generalmente es referida a ejes cartesianos ortogonales. Los elementos a analizar forman en conjunto lo que se ha dado en llamar una malla espacial, de la cual se determinarán las coordenadas de sus puntos nodales, así como la longitud de las barras que unen estos puntos.

Para hacer más general el caso, se obtendrán los vértices de una malla triangulada, considerandola inscrita en una esfera de radio unitario, para dejar las expresiones matemáticas, abiertas a cualesquier valor del radio del área que se desee cubrir.

La esfera se dividirá en veinte partes, que recibirán el nombre de triángulos esféricos, los cuales, agrupados dan origen a un icosaedro. Para formar la malla se efectuara una segunda división de los triángulos esféricos, sobre sus lados y en frecuencias (nombre que recibe esta división) de 2, 4, 8,16, etc. partes iguales.

Partiendo de la consideración que:

$$\text{Area de una esfera} = 4\pi R^2$$

donde R = radio de la esfera y de acuerdo a la trigonometría esférica.

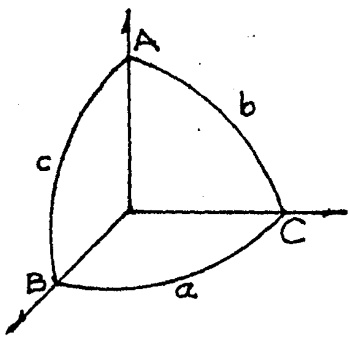
$$\text{Area de un triángulo esférico} = \frac{\pi R^2 E}{180^\circ}$$

definiendo E = exceso esférico (valor del ángulo en que la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico exce cede a 180°)

igualando ambas ecuaciones $\frac{\pi R^2 E}{180^{\circ}} = \frac{4\pi R^2}{20}$

y resolviendo, **se obtiene** $E = 36$

Los triángulos esféricos que se apoyan en los vértices del icosaedro inscrito, resultan ser equiláteros; llamando A, B, C, a los ángulos y a, b, c, a los lados del triángulo, con las caracteristicas de que el ángulo A es opuesto al lado a, el ángulo B al lado b y el C al c como se muestra en la fig., se tiene que:



$E = A + B + C - 180^{\circ}$

$E = 36^{\circ}$ como

$A = B = C$

La expresión se puede - escribir:

$3A - 180^{\circ} = 36^{\circ}$

luego entonces

$A = 72^{\circ}$

y por ende

$A = B = C = 72^{\circ}$

Una vez determinados los ángulos, nos falta conocer el valor de los lados; con base en los principios de trigonometría esférica y tratando al triángulo equilátero como isósceles, las reglas de Neper y el conocimiento de los tres ángulos, nos permite determinar el valor de los tres lados - mediante las expresiones:

$$\text{Tan } M = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\ \cos(S-B)\ \cos(S-C)}{-\cos S}}$$

$$S = \frac{1}{2}\ (A + B + C)$$

$$\cot \frac{1}{2} a = \frac{\operatorname{Tan} M}{\cos (S-A)}$$

substituyendo el valor de los ángulos

$$S = \frac{1}{2}(72^\circ + 72^\circ + 72^\circ) = 108^\circ$$

$$\operatorname{Tan} M = \sqrt{\frac{\cos (108^\circ - 72^\circ)^3}{- \cos 108^\circ}}$$

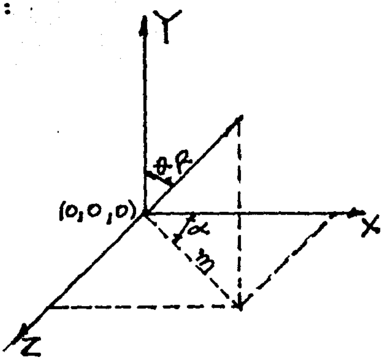
$$= 1.309017$$

$$\cot \frac{1}{2} a = \frac{1.309017}{\cos (108^\circ - 72^\circ)} = 1.618034$$

finalmente

$$a = b = c = 63.434949^\circ$$

Las ecuaciones para localizar un punto en el espacio, teniendo como origen el punto de coordenadas (0,0,0) son :



$Y = R \cos \theta$

$m = R \operatorname{sen} \theta$

pero

$X = m \cos \alpha$

substituyendo el valor de m

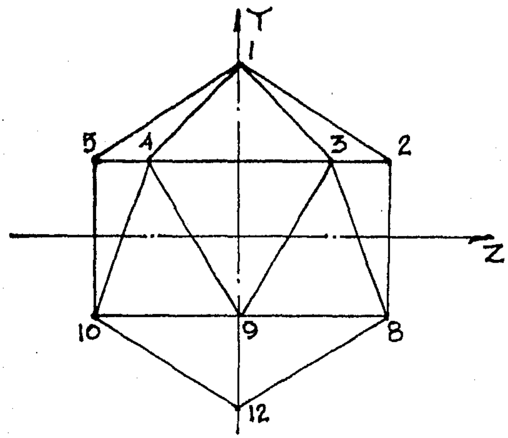
$X = R \operatorname{sen} \theta \cos \alpha$

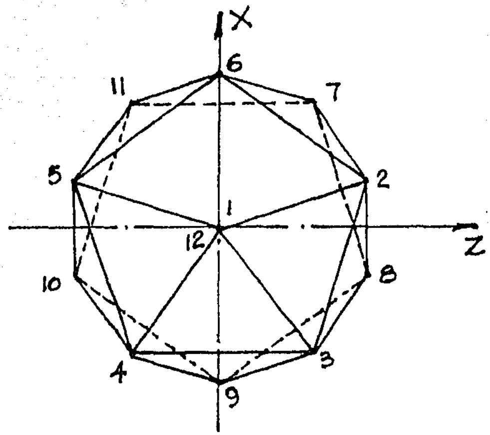
y de manera similar

$Z = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha$

Observando las figuras de las proyecciones del icosaedro, el punto 1 esta situado al igual que el 12 sobre los polos de la esfera y los puntos restantes en un plano que se encuentra a 63.434949° de los polos hacia el ecuador y sobre planos meridianos cuyo ángulo de separación es de 72° en los hemisferios superior e inferior de la esfera.

En la tabla siguiente se muestran los valores -





Figuras en los planos X-Z y Y-Z que nos muestran la localización de los 12 vértices del icosaedro, y las triangulaciones formadas entre ellos.

de las coordenadas de los 12 puntos.

punto	θ	α	X (Rsenθcosα)	Y (Rcosθ)	Z (Rsenθsenα)
1	0°	0°	0	R	0
2	63.434949°	72°	0.2764R	0.4472R	0.8507R
3	63.434949°	144°	-0.7236R	0.4472R	0.5257R
4	63.434949°	216°	-0.7236R	0.4472R	-0.5257R
5	63.434949°	288°	0.2764R	0.4472R	-0.8507R
6	63.434949°	360°	0.8944R	0.4472R	0
7	-63.434949°	36°	0.7236R	-0.4472R	0.5257R
8	-63.434949°	108°	-0.2764R	-0.4472R	0.8507R
9	-63.434949°	180°	-0.8944R	-0.4472R	0
10	-63.434949°	252°	-0.2764R	-0.4472R	-0.8507R
11	-63.434949°	324°	-0.7236R	-0.4472R	-0.5257R
12	180°	0°	0	-R	0

Entre el punto 2 y el 7 existe un defasamiento de 36° lo que justifica que los puntos 8, 9, 10, 11, tengan el mismo defasamiento respecto a los nudos superiores.

El siguiente paso es la determinación de las coordenadas para la subdivisión del lado en 2, 4, 8 ó n partes

II.2.- SUBDIVISION DE LOS LADOS DEL ICOSAEDRO.

La división se efectuará, encontrando las coordenadas del punto medio de un segmento de círculo máximo que pasa por dos puntos conocidos, secuenciando este proceso para cada par de puntos que estén localizados sobre el círculo máximo que conformen los lados del icosaedro.

A continuación se obtienen las expresiones que permitirán encontrar las coordenadas de estos puntos, llamese A1 al punto conocido que tiene las coordenadas

$$X = R\,a_1 \quad , \quad Y = R\,b_1 \quad , \quad Z = R\,c_1 \qquad \text{y}$$

A2 al otro punto conocido y de coordenadas

$$X = R\,a_2 \quad , \quad Y = R\,b_2 \quad , \quad Z = R\,c_2$$

de la ecuación de la esfera;

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

por otro lado, apoyandonos en las coordenadas para el punto medio de cualquier segmento.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} \; ; \; \bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \; ; \; \bar{Z} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

Estas coordenadas, nos serviran como números directores de un radio R_1 que une el centro de coordenadas y el punto medio del segmento de recta, y que ademas sera proyectado en la superficie esférica; de tal manera que la ecuación de la esfera se podra escribir como:

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{R^2} = \frac{\left(\frac{Ra_1 + Ra_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Rb_1 + Rb_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Rc_1 + Rc_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{Ra_1 + Ra_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Rb_1 + Rb_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Rc_1 + Rc_2}{2}\right)^2}$$

eliminando $R/2$ la expresión queda:

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{R^2} = \frac{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2} R^2$$

que se puede escribir:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R^2 (a_1 + a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2} +$$

$$\left(\frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2}\right) \left(\frac{R^2 (b_1 + b_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2}\right) +$$

$$\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{(a_1+a_2)^2}\right)\left(\frac{R^2\,(c_1+c_2)^2}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}\right)$$

igualando términos

$$X^2 = \frac{R^2\,(a_1+a_2)^2}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}$$

$$Y^2 = \left(\frac{(b_1+b_2)^2}{(a_1+a_2)^2}\right)\left(\frac{R^2\,(a_1+a_2)^2}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(a_1+c_2)^2}\right)$$

$$Z^2 = \left(\frac{(c_1+c_2)^2}{(a_1+a_2)^2}\right)\left(\frac{R^2\,(a_1+a_2)^2}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}\right)$$

finalmente

$$X = \frac{R}{\sqrt{1+\dfrac{(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}{(a_1+a_2)^2}}}$$

$$Y = \frac{R}{\sqrt{1+\dfrac{(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}{(a_1+a_2)^2}}}\quad \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} = X\left(\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}\right)$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1+\dfrac{(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}{(a_1+a_2)^2}}}\quad \frac{c_1+c_2}{a_1+a_2} = X\left(\frac{c_1+c_2}{a_1\;a_2}\right)$$

mediante estas expresiones, se podrán calcular - las coordenadas de todos los puntos de división de los lados del triángulo esférico, que servirán de apoyo para efectuar la división interna de la superficie triangular. La frecuencia adoptada para nuestro caso es de 8, que a su vez con -- tiene a las frecuencias de 2 y de 4, si se requiere dividir en 16 o más partes, solo restará aplicar correctamente las - expresiones matemáticas citadas.

A continuación se anotan las coordenadas de los puntos resultantes de la frecuencia de 8, tomando como - base los doce puntos del icosaedro.

	No. de Nodo	X	Y	Z
Nodos principales	1	0.0000	1.0000	0.0000
	2	0.2764	0.4472	0.8507
	3	-0.7236	0.4472	0.5257
	4	-0.7236	0.4472	-0.5257
	5	0.2764	0.4472	-0.8507
	6	0.8944	0.4472	0.0000
	7	0.7236	-0.4472	0.5257
	8	-0.2764	-0.4472	0.8507
	9	-0.8944	-0.4472	0.0000
	10	-0.2764	-0.4472	0.8507
	11	0.7236	-0.4472	0.5257
	12	0.0000	-1.0000	0.0000
entre nodos 1 y 2	13	0.1625	0.8506	0.5000
	14	0.0845	0.9619	0.2600
	15	0.0427	0.9904	0.1314
	16	0.1247	0.9151	0.3837
	17	0.2281	0.6745	0.7021
	18	0.1972	0.7766	0.6069
	19	0.2547	0.5725	0.7839
entre nodos 1 y 3	20	-0.4253	0.8506	0.3090
	21	-0.2211	0.9619	0.1606
	22	-0.1116	0.9904	0.0811
	23	-0.3263	0.9150	0.2371
	24	-0.5972	0.6745	0.4339
	25	-0.5162	0.7766	0.3750
	26	-0.6668	0.5725	0.4844
entre nodos 1 y 4	27	-0.4253	0.8506	-0.3090
	28	-0.2211	0.9619	-0.1606
	29	-0.1116	0.9904	-0.0811
	30	-0.3263	0.9151	-0.2371
	31	-0.5972	0.6745	-0.4339
	32	-0.5162	0.7766	-0.3750
	33	-0.6668	0.5725	-0.4844

entre nodos 1 y 5	34	0.1625	0.8506	-0.5000
	35	0.0845	0.9619	-0.2600
	36	0.0427	0.9904	-0.1314
	37	0.1247	0.9151	-0.3837
	38	0.2281	0.6745	-0.7021
	39	0.1972	0.7766	-0.6069
	40	0.2547	0.5725	-0.7839
entre nodos 1 y 6	41	0.5257	0.8506	0.0000
	42	0.2733	0.9619	0.0000
	43	0.1380	0.9904	0.0000
	44	0.4034	0.9151	0.0000
	45	0.7382	0.6745	0.0000
	46	0.6381	0.7766	0.0000
	47	0.8242	0.5725	0.0000
entre nodos 2 y 3	48	-0.2629	0.5257	0.8090
	49	0.0070	0.5056	0.8606
	50	0.1432	0.4809	0.8647
	51	-0.1293	0.5205	0.8436
	52	-0.5128	0.5057	0.6938
	53	-0.3916	0.5207	0.7587
	54	-0.6242	0.4810	0.6156
entre nodos 3 y 4	55	-0.8507	0.5257	0.0000
	56	-0.8183	0.5056	0.2732
	57	-0.7784	0.4809	0.4033
	58	-0.8425	0.5205	0.1379
	59	-0.8183	0.5057	-0.2732
	60	-0.8425	0.5207	-0.1379
	61	-0.7784	0.4810	-0.4033
entre nodos 5 y 6	62	0.6882	0.5257	-0.5000
	63	0.5014	0.5056	-0.7021
	64	0.3926	0.4809	-0.7839
	65	0.6005	0.5205	-0.6068
	66	0.8226	0.5057	-0.2599
	67	0.7627	0.5207	-0.3836
	68	0.8668	0.4810	-0.1312
entre nodos 4 y 5	69	-0.2629	0.5257	-0.8092
	70	-0.5127	0.5056	-0.6938
	71	-0.6241	0.4809	-0.6157
	72	-0.3915	0.5205	-0.7587
	73	0.0070	0.5057	-0.8627
	74	-0.1292	0.5207	-0.8439
	75	0.1431	0.4810	-0.8644
entre nodos 6 y 2	76	0.6882	0.5257	0.5000

	77	0.8226	0.5057	0.2599
	78	0.8668	0.4811	0.1312
	79	0.7627	0.5207	0.3836
	80	0.5014	0.5057	0.7021
	81	0.6005	0.5207	0.6068
	82	0.3926	0.4810	0.7839
entre nodos 2 y 7	83	0.5878	0.0000	0.8090
	84	0.4492	0.2324	0.8627
	85	0.3663	0.3431	0.8649
	86	0.5235	0.1173	0.8439
	87	0.6817	-0.2325	0.6938
	88	0.6409	-0.1174	0.7586
	89	0.7094	-0.3431	0.6156
entre nodos 6 y 7	90	0.9511	0.0000	0.3090
	91	0.8705	-0.2324	0.4339
	92	0.8047	-0.3431	0.4844
	93	0.9196	-0.1173	0.3750
	94	0.9593	0.2325	0.1606
	95	0.9644	0.1174	0.2371
	96	0.9358	0.3431	0.0811
entre nodos 8 y 2	97	0.0000	0.0000	1.0000
	98	-0.1437	-0.2324	0.9619
	99	-0.2121	-0.3431	0.9151
	100	-0.0725	-0.1173	0.9904
	101	0.1437	0.2325	0.9619
	102	0.0725	0.1174	0.9904
	103	0.2121	0.3431	0.9151
entre nodos 8 y 3	104	-0.5878	0.0000	0.8090
	105	-0.6817	0.2324	0.6938
	106	-0.7094	0.3431	0.6156
	107	-0.6409	0.1173	0.7586
	108	-0.4492	-0.2325	0.8627
	109	-0.5235	-0.1174	0.8439
	110	-0.3663	-0.3431	0.8649
entre nodos 9 y 3	111	-0.9511	0.0000	0.3090
	112	-0.9593	-0.2324	0.1606
	113	-0.9358	-0.3431	0.0811
	114	-0.9644	-0.1173	0.2371
	115	-0.8705	0.2325	0.4339
	116	-0.9196	0.1174	0.3750
	117	-0.8047	0.3431	0.4844

entre nodos 9 y 4	118	-0.9511	0.0000	-0.3090
	119	-0.9593	-0.2324	-0.1606
	120	-0.9358	-0.3431	-0.0811
	121	-0.9644	-0.1173	-0.2371
	122	-0.8705	0.2324	-0.4339
	123	-0.9196	0.1173	-0.3750
	124	-0.8047	0.3431	-0.4844
entre nodos 10 y 4	125	-0.5878	0.0000	-0.8090
	126	-0.6817	0.2325	-0.6938
	127	-0.7094	0.3431	-0.6156
	128	-0.6409	0.1174	-0.7586
	129	-0.4492	-0.2324	-0.8627
	130	-0.5235	-0.1173	-0.8439
	131	-0.3663	-0.3431	-0.8649
entre nodos 10 y 5	132	0.0000	0.0000	-1.0000
	133	-0.1437	-0.2324	-0.9619
	134	-0.2121	-0.3431	-0.9151
	135	-0.0725	-0.1173	-0.9904
	136	0.1437	0.2324	-0.9619
	137	0.0725	0.1173	-0.9904
	138	0.2121	0.3431	-0.9151
entre nodos 11 y 5	139	0.5878	0.0000	-0.8090
	140	0.6817	-0.2325	-0.6938
	141	0.7094	-0.3431	-0.6156
	142	0.6409	-0.1174	-0.7586
	143	0.4492	0.2325	-0.8627
	144	0.5235	0.1173	-0.8439
	145	0.3663	0.3431	-0.8649
entre nodos 11 y 6	146	0.9511	0.0000	-0.3090
	147	0.9593	0.2324	-0.1606
	148	0.9358	0.3431	-0.0811
	149	0.9644	0.1173	-0.2371
	150	0.8705	-0.2324	-0.4339
	151	0.9196	-0.1173	-0.3750
	152	0.8047	-0.3431	-0.4547
entre nodos 8 y 7	153	0.2629	-0.5257	0.8090
	154	0.5128	-0.5057	0.6938
	155	0.6242	-0.4810	0.6156
	156	0.3916	-0.5207	0.7587
	157	-0.0070	-0.5057	0.8627
	158	-0.1292	-0.5207	0.8439
	159	-0.1431	-0.4810	0.8649

entre nodos 8 y 9	160	−0.6882	−0.5257	0.5000
	161	−0.5014	−0.5057	0.7021
	162	−0.3926	−0.4810	0.7839
	163	−0.6005	−0.5207	0.6068
	164	−0.8225	−0.5057	0.2599
	165	−0.7627	−0.5207	0.3836
	166	−0.8668	−0.4811	0.1312
entre nodos 9 y 10	167	−0.6882	−0.5257	−0.5000
	168	−0.8226	−0.5057	−0.2599
	169	−0.8668	−0.4811	−0.1312
	170	−0.7627	−0.5207	−0.3836
	171	−0.5014	−0.5057	−0.7021
	172	−0.3926	−0.4810	−0.7839
	173	−0.6005	−0.5207	−0.6068
entre nodos 10 y 11	174	0.2629	−0.5257	−0.8090
	175	0.5128	−0.5057	−0.6938
	176	0.6242	−0.4811	−0.6156
	177	0.3916	−0.5207	−0.7587
	178	−0.0070	−0.5057	−0.8627
	179	−0.1292	−0.5207	−0.8439
	180	−0.1431	−0.4810	−0.8649
entre nodos 11 y 7	181	0.8507	−0.5257	0.0000
	182	0.8183	−0.5057	−0.2732
	183	0.7784	−0.4811	−0.4033
	184	0.8425	−0.5207	−0.1379
	185	0.8183	−0.5057	0.2732
	186	0.8425	−0.5207	0.1379
	187	0.7784	−0.4811	−0.4033
entre nodos 7 y 12	188	0.4253	−0.8506	0.3090
	189	0.2211	−0.9619	0.1606
	190	0.1116	−0.9904	0.0811
	191	0.3236	−0.9151	0.2371
	192	0.5972	−0.6745	0.4339
	193	0.5162	−0.7766	0.3750
	194	0.6668	−0.5725	0.4844
entre nodos 8 y 12	195	−0.1625	−0.8506	0.5000
	196	−0.0845	−0.9619	0.2600
	197	−0.0427	−0.9904	0.1314
	198	−0.1247	−0.9151	0.3837
	199	−0.2281	−0.6745	0.7021
	200	−0.1972	−0.7766	0.6069
	201	−0.2547	−0.5725	0.7839

entre nodos 9 y 12	202	-0.5257	-0.8506	0.0000
	203	-0.2733	-0.9619	0.0000
	204	-0.1380	-0.9904	0.0000
	205	-0.4034	-0.9151	0.0000
	206	-0.7382	-0.6745	0.0000
	207	-0.6381	-0.7766	0.0000
	208	-0.8242	-0.5725	0.0000
entre nodos 10 y 12	209	-0.1625	-0.8506	-0.5000
	210	-0.0845	-0.9619	-0.2600
	211	-0.0427	-0.9904	-0.1314
	212	-0.1247	-0.9151	-0.3837
	213	-0.2281	-0.6745	-0.7021
	214	-0.1972	-0.7766	-0.6069
	215	-0.2547	-0.5725	-0.7839
entre nodos 11 y 12	216	0.4253	-0.8506	-0.3090
	217	0.2211	-0.9619	-0.1606
	218	0.1116	-0.9904	-0.0811
	219	0.3263	-0.9150	-0.2371
	220	0.5972	-0.6745	-0.4339
	221	0.5162	-0.7766	-0.3750
	222	0.6568	-0.5725	-0.4844

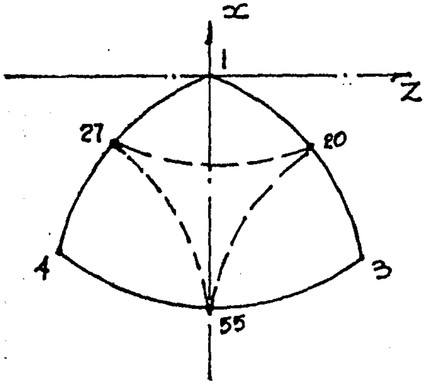
Obsérvese que, los 222 puntos mantienen una simetría. El ordenamiento de los nodos conserva el requisito de las fórmulas antes citadas, de tener dos puntos extremos, para ir determinando los correspondientes puntos medios, de ahí que se antepone como referencia, los nudos entre los cuales están comprendidos los puntos calculados.

Con estos puntos podemos trazar cualquier cara del icosaedro como triángulo esférico y proceder a calcular los puntos intermedios del mismo y así formar mallas de una sola capa. De igual manera todas estas caras tendrán características similares, por lo cual, solo bastará determinar la geometría de una y mediante una simple rotación de ejes las características de las 19 restantes.

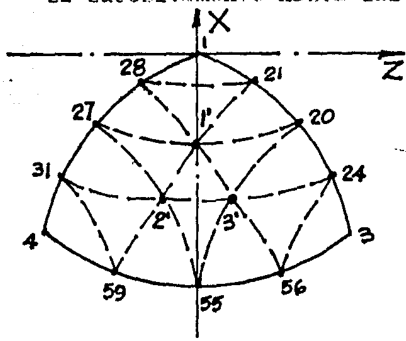
II.3.- SUBDIVISION DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO.

Existen diferentes formas de calcular la trian-gulación interna, a continuación se mencionan algunos de estos métodos.

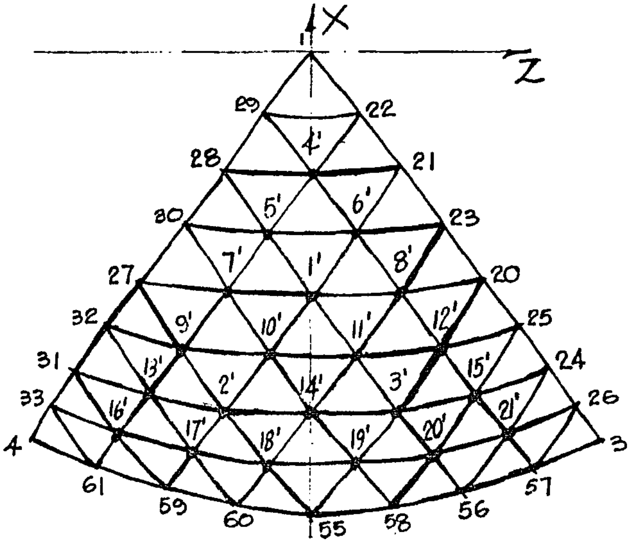
II.3.1.- Método de los puntos medios.- con las expresiones anteriormente encontradas se puede seguir la subdivisión, tomando ahora como puntos extremos del arco de circunferencia máxima , los puntos ya encontrados; por ejemplo, se tiene el triángulo esférico 1-4-3 que contiene los puntos 20 a 26 en el lado 1-3, 27-33 en el lado 1-4 y 55-61 en el 3-4; ahora se toman los arcos formados por los puntos 20-27 y 55 como se muestra en la fig. de manera tal que el triángulo queda dividido en 4 partes, que pueden seguir subdividiendose mediante el cálculo de los puntos medios de los nuevos arcos y así sucesivamente hasta las subdivisiones deseadas, siguiendo la secuencia esquemática mostrada.



Para la frecuencia que estamos trabajando, se triangula finalmente usando los siete puntos calculados para cada lado del triángulo esférico 1-3-4 y los corres



pondientes puntos medios de los nuevos arcos.



NODO	X	Y	Z
1'	-0.4472	0.8944	0.0000
2'	-0.6708	0.7235	-0.1624
3'	-0.6708	0.7235	0.1624
4'	-0.2242	0.9746	0.0000
5'	-0.3376	0.9377	-0.0811
6'	-0.3376	0.9377	0.0811
7'	-0.4417	0.8834	0.1564
8'	-0.4417	0.8834	-0.1564
9'	-0.5649	0.7889	-0.2367
10'	-0.5766	0.8119	-0.0823
11'	-0.5766	0.8119	0.0823
12'	-0.5649	0.7889	0.2367
13'	-0.6406	0.7063	-0.3013
14'	-0.6799	0.7333	0.0000
15'	-0.6406	0.7063	0.3013
16'	-0.7171	0.5979	-0.3582
17'	-0.7523	0.6210	-0.2201
18'	-0.7703	0.6324	-0.0822
19'	-0.7703	0.6324	0.0822
20'	-0.7523	0.6210	0.2201
21'	-0.7171	0.5979	0.3582

II.3.2.- Método de la intersección de planos. Este método tiene sus fundamentos en el álgebra vectorial del plano y consisteen lo siguiente: conocidos 3 puntos (condición necesaria y suficiente para la determinación de un plano), encontrar las ecuaciones de dos planos y determinar los números directores de la recta que los intersecta, que en nuestro caso no es otra más que el radio R, para despues igualar sus cosenos directores con las correspondientes coordenadas y encontrar las expresiones que nos ayudarán a efectuar esta subdivisión.

Sea un plano de ecuación vectorial

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \bullet (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \times (\bar{p}_2 - \bar{p}_0) = 0$$

donde $\bar{p}_0$, $\bar{p}_1$, y $\bar{p}_2$ son los vectores de posición de los tres puntos conocidos, de manera tal que el plano 1 tiene por puntos

$$\bar{p}_0 = (0,0,0) \ ; \ \bar{p}_1 = (u_1,v_1,w_1) \ \text{ y } \ \bar{p} = (u_2,v_2,w_2)$$

$$\bar{p} - \bar{p}_0 = (X,Y,Z) - (0,0,0) = (X,Y,Z)$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_0 = (u_1,v_1,w_1) - (0,0,0) = (u_1,v_1,w_1)$$

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_0 = (u_2,v_2,w_2) - (0,0,0) = (u_2,v_2,w_2)$$

$\therefore$ efectuando el producto punto y el producto cruz

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \bullet (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \times (\bar{p}_2 - \bar{p}_0) = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (v_1w_2 - v_2w_1)X + (u_2w_1 - u_1w_2)Y + (u_1v_2 - u_2v_1)Z = 0$$

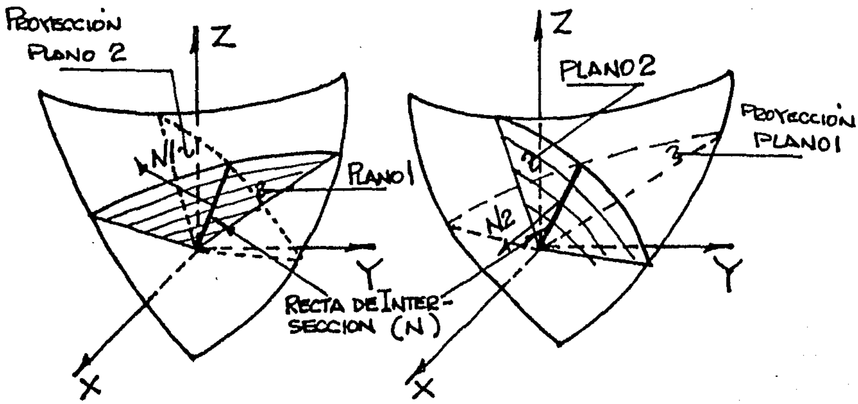
que es la ecuación vectorial del plano 1. De manera similar para el plano 2, de puntos,

$$\bar{p}_0 = (0,0,0) \ ; \ \bar{p}_1 = (r_1, s_1, t_1) \ ; \ \bar{p}_2 = (r_2,s_2,t_2)$$

la ecuación será:

$$(s_1t_2 - s_2t_1)X + (r_2t_1 - r_1t_2)Y + (r_1s_2 - r_2s_1)Z = 0$$

para encontrar la recta de intersección de estos dos planos solo resta efectuar el producto cruz de las normales a estos planos, ya que la recta de intersección será perpendicular a la normal N1 del plano 1 y a la normal N2 del plano 2 pues pertenece a ambos. Esta consideración se ilustra en las figuras siguientes.



por lo tanto los números directores de la recta N serán:

$$N = N1 \quad X \quad N2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ (v_1w_2 - v_2w_1) & (u_2w_1 - u_1w_2) & (u_1v_2 - u_2v_1) \\ (s_1t_2 - s_2t_1) & (r_2t_1 - r_1t_2) & (r_1s_2 - r_2s_1) \end{vmatrix}$$

desarrollando:

$$(u_2w_1 - u_1w_2)(r_1s_2 - r_2s_1) - (u_1v_2 - u_2v_1)(r_2t_1 - r_1t_2)\ i\ +$$

$$(s_1t_2 - s_2t_1)(u_1v_2 - u_2v_1) - (v_1w_2 - v_2w_1)(r_1s_2 - r_2s_1)\ j\ +$$

$$(v_1w_2 - v_2w_1)(r_2t_1 - r_1t_2) - (s_1t_2 - s_2t_1)(u_2w_1 - u_1w_2)\ k$$

Estos coeficientes son los números directores de la recta normal a ambos planos, si denominamos a , b y c a - los coeficientes de i, j y k respectivamente, llegamos a las expresiones $N = ai + bj + ck$ de cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

siendo α el ángulo que forma el radio R con el eje X, β el de R con el eje Y y γ el de R con el eje z. Se tiene

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}\ ;\quad \cos\beta = \frac{Y}{R}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}$$

igualando las expresiones anteriores:

$$\frac{X}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{despejando} \quad X = \frac{R\,a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

dividiendo entre a

$$X = \frac{\frac{R\,a}{a}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a}} \quad \text{y por tanto} \quad X = \frac{R}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}}$$

por otra parte :

$$\frac{Y}{R} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{despejando} \quad Y = \frac{R\,b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

dividiendo entre a

$$Y = \frac{\frac{R\,b}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}}$$

ecuación que se puede expresar como

$$Y = X\left(\frac{b}{a}\right)$$

efectuando un analisis similar, se obtiene la ecuación para

$$Z = X\left(\frac{c}{a}\right)$$

adoptando la nomenclatura.

$$\frac{b}{a} = L \quad y \quad \frac{c}{a} = P$$

las ecuaciones se pueden expresar como:

$$X = R\frac{1}{\sqrt{1 + L^2 + P^2}}$$

$$Y = X\,L$$

$$Z = X\,P$$

estas formulas nos dan los siguientes valores de coordenadas para los 21 puntos anteriormente calculados.

NODO	X	Y	Z
1'	-0.4870	0.8734	0.0000
2'	-0.6887	0.7095	-0.1494
3'	-0.6887	0.7095	0.1494
4'	-0.2394	0.9709	0.0000
5'	-0.3606	0.9293	-0.0803
6'	-0.3606	0.9293	0.0803
7'	-0.4716	0.8677	-0.1575
8'	-0.4716	0.8677	0.1575
9'	-0.5701	0.7888	-0.2296
10'	-0.5969	0.7986	-0.0772
11'	-0.5969	0.7986	0.0772
12'	-0.5701	0.7888	0.2296
13'	-0.6528	0.6983	-0.2938
14'	-0.7004	0.7137	0.0000
15'	-0.6528	0.6983	0.2938
16'	-0.7241	0.5923	-0.3534
17'	-0.7614	0.6119	-0.2141
18'	-0.7815	0.6198	-0.0721
19'	-0.7815	0.6198	0.0721
20'	-0.7614	0.6119	0.2141
21'	-0.7241	0.5923	0.3534

II.3.3.- Método de la división de rectas.- Este método parte del conocimiento de dos puntos, que obviamente pueden ser - los vértices de cualquier triángulo esférico del icosaedro. Auxiliandomos de las ecuaciones paramétricas de la recta -- que une a estos dos puntos, se procede a dividirla en tan-- tas partes iguales se requiera.

$$X - X_0 = t\,a \quad ; \quad Y - Y_0 = tb \quad ; \quad Z - Z_0 = tc$$

En estas ecuaciones a, b y c son los números directores de - la recta de unión de los dos puntos p_1 y p_2 de coordenadas

$$p_1\,(u_1, v_1, w_1) \quad ; \quad p_2\,(u_2, v_2, w_2)$$

$$a = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2 + (w_2-w_1)^2}}$$

$$b = \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2 + (w_2-w_1)^2}}$$

$$c = \frac{w_2 - w_1}{\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2 + (w_2-w_1)^2}}$$

t es el valor paramétrico que nos permitira conocer cualquier punto p sobre la recta, y (X_0, Y_0, Z_0) son coordenadas de un punto conocido de la recta.

Con estas expresiones, tendremos los valores de los puntos deseados y que se encuentran localizados en un -- plano triangular; para encontrar las proyecciones de estos - puntos sobre la superficie esférica, solo resta multiplicar- los por la magnitud existente entre el radio de la esfera y la distancia entre el punto y el origen, o sea :

$$K = \frac{R}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

y así tener.

$$X = K\,(ta + X_0)\ ;\quad Y = K\,(tb + Y_0)\ :\quad Z = K\,(tc + Z_0)$$

para que el valor del nuevo punto este contenido en la recta del plano triangular, es necesario que t no sea mayor que la distancia entre los dos puntos conocidos, por lo cual

$$t = n\cdot\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1\ )^2}$$

donde $n \leq 1$

substituyendo el valor del parámetro en las ecuaciones del - punto sobre el plano, y el valor de a tambien,

$$X = ta + X_0 = \left(n\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}\right)\cdot \left(\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}}\right) + u_1$$

$$X = n\ (\ u_2 + u_1) + u_1$$

de manera análoga;

$$Y = n\ (\ v_2 + v_1) + v_1$$

$$Z = n\ (\ w_2 - w_1) + w_1$$

que proyectados a la esfera quedarían de la forma:

$$X = K\ (ta + X_0) = \frac{R\cdot(\ n\ (\ u_2 - u_1) + u_1)}{\sqrt{(n(u_2-u_1) + u_1)^2 + (n(v_2-v_1) + v_1)^2 + (n(w_2-w_1) + w_1)^2}}$$

dividiendo entre $n(u_2 - u_1) + u_1$ el miembro de la derecha

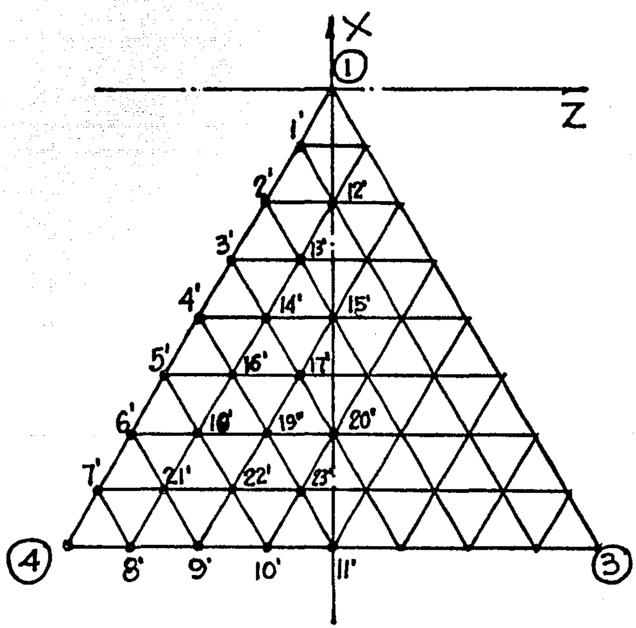
$$X = R\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\ (v_2 - v_1) + v_1}{n\ (u_2 - u_1) + u_1}\right)^2 + \left(\frac{n\ (w_2 - w_1) + w_1}{n\ (u_2 - u_1) + u_1}\right)^2}}$$

siguiendo el mismo proceso para Y y Z se tendrá.

$$Y = X \cdot \frac{n\,(v_2 - v_1) + v_1}{n\,(u_2 - u_1) + u_1}$$

$$Z = X \cdot \frac{n\,(w_2 - w_1) + w_1}{n\,(u_2 - u_1) + u_1}$$

Al calcular los valores de las coordenadas de los nodos por este método, éstos se numeraron atendiendo al plano triangular mostrado y solo se calcularon los puntos de un sólo lado por sus caracteristicas de simetría.



NODO	X	Y	Z
1'	-0.0965	0.9929	-0.0701
2'	-0.2032	0.9679	-0.1477
3'	-0.3152	0.9210	-0.2291
4'	-0.4253	0.8507	-0.3090
5'	-0.5254	0.7604	-0.3817
6'	-0.6096	0.6575	-0.4428
7'	-0.6753	0.5506	-0.4906
8'	-0.7718	0.4770	-0.4205
9'	-0.8127	0.5023	-0.2953
10'	-0.8407	0.5195	-0.1527
11'	-0.8507	0.5257	-0.0000
12'	-0.2055	0.9787	-0.0000
13'	-0.3228	0.9431	-0.0798
14'	-0.4417	0.8827	-0.1605
15'	-0.4475	0.8943	-0.0000
16'	-0.5520	0.7984	-0.2406
17'	-0.5667	0.8198	-0.0823
18'	-0.6458	0.6965	-0.3128
19'	-0.6708	0.7236	-0.1624
20'	-0.6799	0.7333	-0.0000
21'	-0.7190	0.5864	-0.3730
22'	-0.7533	0.6145	-0.2346
23'	-0.7724	0.6301	-0.0802

Comparando los resultados obtenidos en la aplicación de los tres métodos, podemos concluir que los valores son de bastante confiabilidad no importando el método empleado; es decir la discrepancia entre los valores no es significativa.

Es necesario volver a aclara que para obtener el valor real de las coordenadas de los puntos, se deberán multiplicar estos coeficientes por el valor del radio seleccionado.

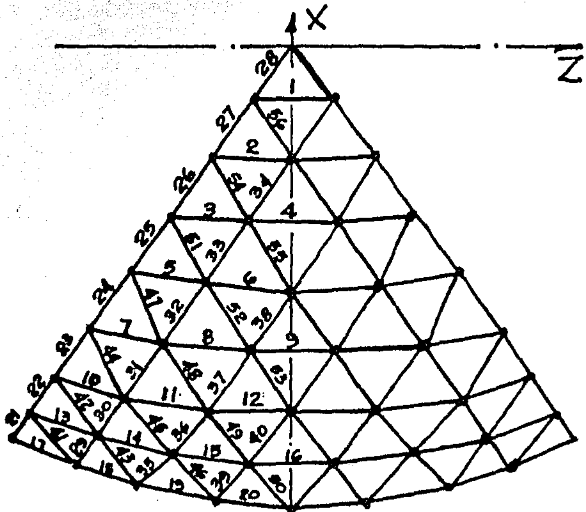
Como último punto se calcularán las longitudes de las barras usando la expresión que nos determina la distancia entre dos puntos,

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

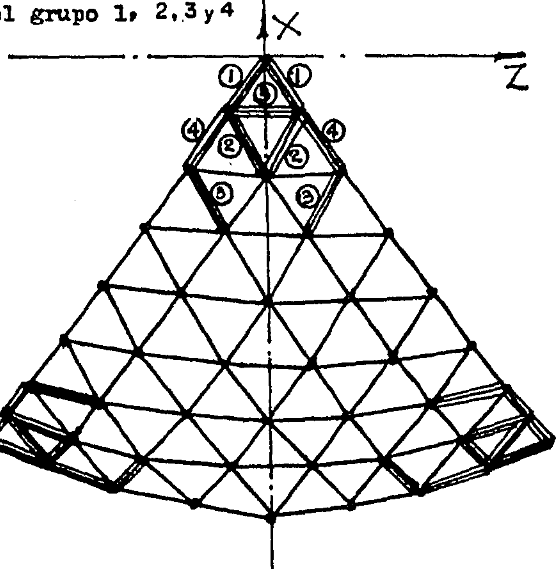
De la misma forma que para los nudos, las barras deberán ser multiplicadas por el valor del radio escogido. La tabla siguiente nos reporta los coeficientes para las barras - que se numeran en la figura anexa.

BARRA	L / radio	BARRA	L / radio
1	0.1402	29	0.1304
2	0.1481	30	0.1453
3	0.1511	31	0.1562
4	0.1596	32	0.1602
5	0.1528	33	0.1559
6	0.1610	34	0.1463
7	0.1485	35	0.1407
8	0.1604	36	0.1547
9	0.1646	37	0.1628
10	0.1405	38	0.1628
11	0.1549	39	0.1488
12	0.1629	40	0.1601
13	0.1305	41	0.1402
14	0.1453	42	0.1480
15	0.1564	43	0.1480
16	0.1604	44	0.1527
17	0.1195	45	0.1562
18	0.1341	46	0.1529
19	0.1463	47	0.1532
20	0.1532	48	0.1607
21	0.1195	49	0.1607
22	0.1343	50	0.1532
23	0.1463	51	0.1489
24	0.1532	52	0.1603
25	0.1532	53	0.1645
26	0.1463	54	0.1397
27	0.1343	55	0.1559
28	0.1195	56	0.1304

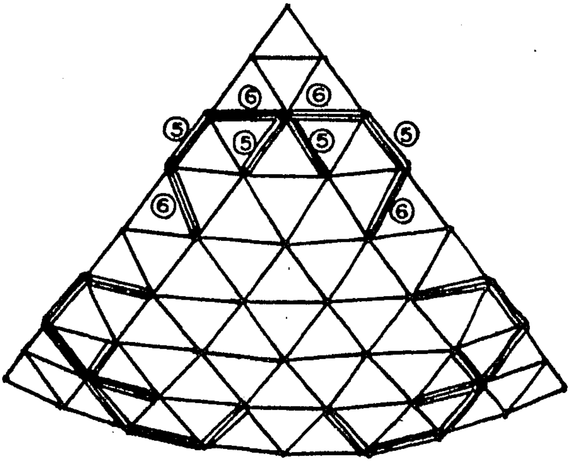
La variación en las longitudes de las barras, deberá tomarse en cuenta en el diseño de los nodos, para hacer posible la estandarización de algunos grupos, como se muestra en las figuras siguientes.



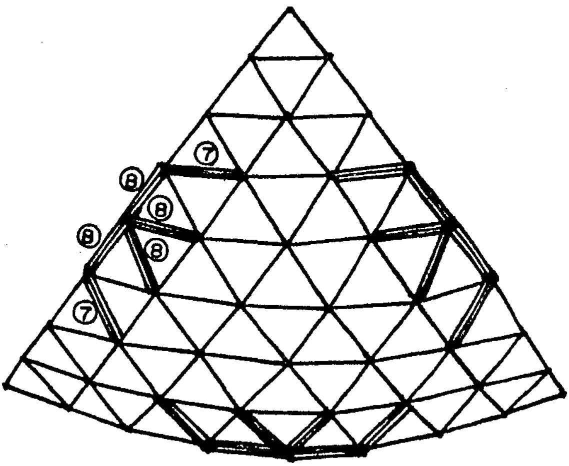
barras del grupo 1, 2,3 y 4



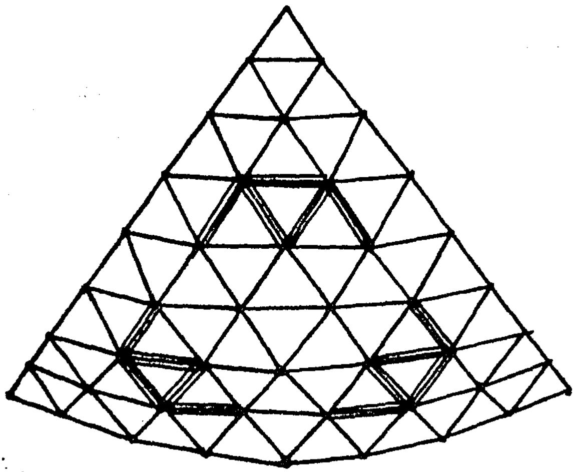
barras del grupo 5 y 6



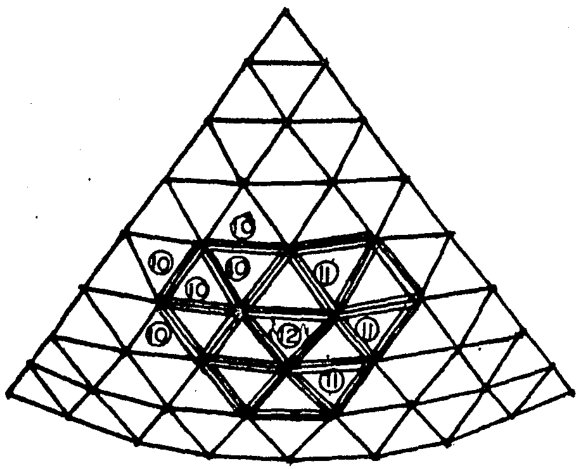
barras del grupo 7 y 8



barras del grupo 9



barras del grupo 10, 11 y 12



III.- SOLICITACIONES.

Los tipos más comunes de carga que deberá soportar esta estructura son:

a).- peso propio

b).- cargas vivas

c).- cargas accidentales.

III.1.- Cargas por peso propio.- Para considerar los efectos del peso propio, se deberá efectuar una cuantificación a -- priori del peso de todo el material que componga la cúpula, como son las barras y las superficies laminares de la cubierta, para dividirlo entre el área de la esfera, y obtener un valor del peso uniformemente repartido en kg/m2.

La diversidad de los materiales de construcción pueden hacer más o menos ligera la cúpula dependiendo del material seleccionado, así para las barras puede emplearse, el otate, la madera, el aluminio, el acero, etc. y para la cubierta, acrilico, lámina galvanizada, lámina de asbesto, ferrocemento, etc.

III.2.- Cargas vivas.- Los máximos valores de carga viva suelen presentarse durante el proceso de construcción, aunque el Reglamento de las construcciones para el Distrito Federal, mediante una serie de consideraciones, nos permite usar las siguientes cargas vivas para diseño. Estas consideraciones toman en cuenta la variación de la pendiente de la cubierta, pues como es fácil observar la cúpula esférica tiene variaciones de pendiente casi nulas en los polos, que se van incrementando a medida que se aproxima al ecuador. Con estas consideraciones el Reglamento señala para cubiertas con pendientes no mayores del 5 % un valor de 100 kg/m2., para cu--

biertas con pendiente mayor de 5 % y menor de 20 % un valor de 60 kg/m2. y finalmente para cuando la pendiente excede - el 20 % 30 kg/ m2.

III.3.- Cargas accidentales.- El caso de las cargas accidentales puede ser dividido en cargas sísmicas y cargas de viento. Dado que estas estructuras son muy ligeras, los efectos del sismo no son significativos, excepto para la estructura de apoyo, es por eso que se considera más razonable analizar la estructura bajo los efectos de las fuerzas de viento.

De acuerdo al Reglamento[1], este tipo de estructuras cae dentro del tipo I según clasificación de las estructuras por viento, y por ende sólo deberá tomarse en cuenta los empujes y/o succiones estáticas proporcionadas por la - ecuación.

$$p = 0.00118\ C\ V_{10}^{2}\ Z^{2/3}$$

donde

C = factor de empuje

V_{10} = Velocidad del viento a una altura de 10 m. (D.F.)
(para estructuras del grupo B, V_{10} = 80 Km/h.)
(para estructuras del grupo A, V_{10} = 92 Km/h.)

y Z = altura a la que se esta calculando el valor de la presión

Los factores de empuje sobre la cúpula, dependen de la altura a la que esté desplantada, así pues, cuando se desplanta sobre la superficie del terreno, sus valores serán:

1.- El Reglamento a que se hace alusión en este capítulo es el de construcciones para el Distrito Federal (1976).

en, zona de barlovento $C = 0.7$ (presión)

zona central $C = -1.2$ (succión)

zona de sotavento $C = -0.55$ (succión)

Las zonas se delimitan en las figuras anexas, En las que se observa la zona de barlovento, que se extiende desde el nivel de piso terminado (N.P.T.), hasta el punto en que la tangente al arco, forma un ángulo de 45^{o} respecto a la horizontal, la zona central entre los 45^{o} y 135^{o} respecto a la horizontal, y a partir del límite de esta zona, la de sotavento.

Ahora, si la estructura se desplanta a otra altura, digamos por ejemplo, sobre muros, y la relación flecha de la cubierta a altura total de la construcción es menor que 0.3 , para:

zona de barlovento $C = 0.25$ (presión)

zona central $C = -1.25$ (succión)

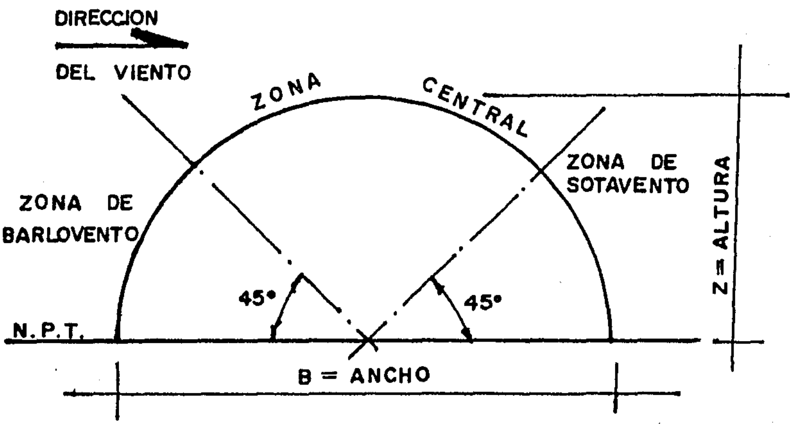
zona de sotavento $C = -0.55$ (succión)

y para relaciones intermedias de flecha a altura, se interpolará linealmente entre los grupos de valores antes mencionados.

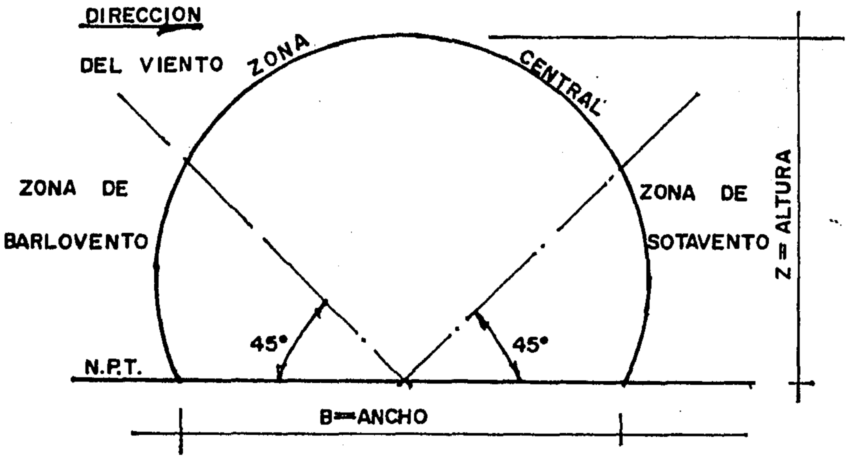
En el caso de que existan aberturas y éstas representen más de un 30 % de la superficie en el nivel analizado, habra un efecto adicional que provoque un coeficiente $C = 0.8$ si la abertura es en el lado de barlovento y de -0.6 si es del lado de sotavento.

Las siguientes figuras nos muestran las diferentes consideraciones que se pueden presentar en el análisis por viento de la cúpula.

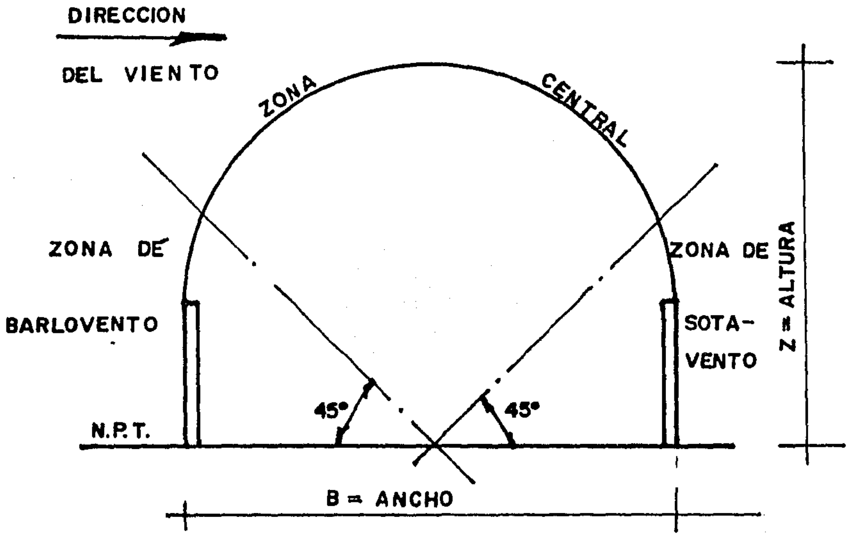
Caso 1.- Superficie formando un semicirculo.



Caso 2.- Desplante a cualquier altura de la esfera.



Caso 3.- Desplante sobre muro o cualquier otro elemento.[2]



2.- ver el Reglamento de construcciones para el Distrito Federal (1976).

IV.- ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

Para tener un análisis más refinado de este tipo de cúpulas, se requiere de un computador electrónico que nos permita determinar con mayor grado de exactitud, los elementos mecánicos y las deformaciones de esta estructura.

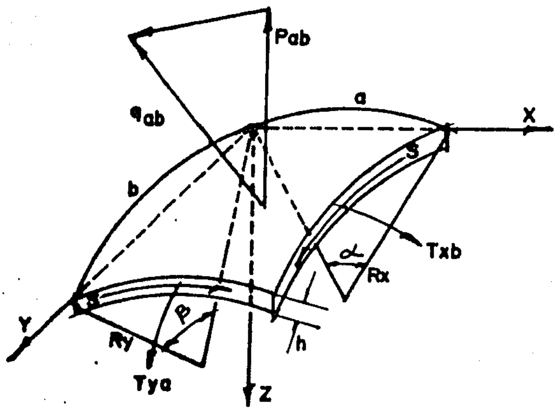
Una herramienta teórica que nos es de mucha utilidad para poder realizar un análisis simplificado, es disponer de un sinnúmero de triangulaciones sobre la superficie, lo cual, permite suponer con bastante certeza, que la estructura se comporta como un cascarón y como consecuencia de la aplicación de la teoría de la membrana, se obtendrán elementos mecánicos y deformaciones conservadoras, aplicables al diseño de la cúpula.

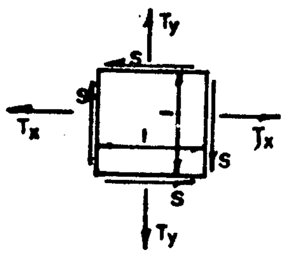
Anteriormente se determinaron las solicitaciones actuantes, en este capítulo se desarrollarán los principios fundamentales de la teoría de membranas y cascarones, que son aplicables bajo ciertas consideraciones a las acciones que obran sobre la estructura en cuestión.

Toda carga que actúe sobre una cúpula, se descompone en elementos tangenciales que actuan sobre la superficie y están distribuidos a través del espesor, teniendo por dimensiones, fuerzas por unidad de longitud (kg./cm.).

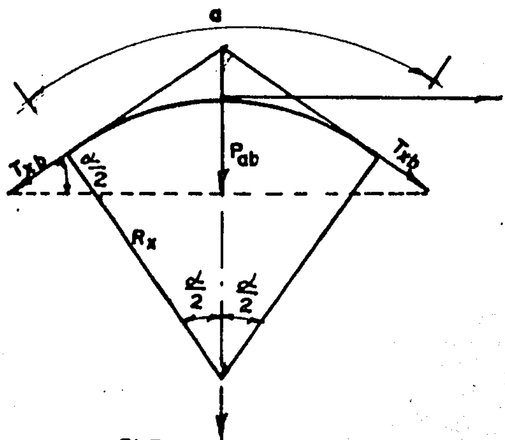
Estas tres fuerzas llamadas de membrana son generalmente identificadas por **Tx, Ty y S**, elementos estáticamente determinados por el equilibrio del elemento de membrana a analizar y que se muestra en la siguiente figura.

Observando las figuras, si α y β son muy pequeños se puede decir que:





Planta unitaria



ELEVACION

$$\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha \quad y \quad \operatorname{sen}\beta \approx \beta \quad \text{y por tanto}$$

$$a = Rx\,\alpha \quad y \quad b = Ry\,\beta$$

considerando solo la resultante de las tensiones en la dirección Z, pues las resultantes sobre X o Y se anulan mutuamente, se tendrá,

$$2\ Tx\ b\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \approx 2\ Tx\ b\ \frac{\alpha}{2} = Tx\ \frac{ba}{Rx}$$

y de manera similar

$$\frac{Ty\ a\ b}{Ry}$$

es la resultante en Z de Tya.

La suma de éstas dos resultantes equilibra una carga normal Pab sobre el eje Z considerado.

$$Pab = \frac{Tx\ a\ b}{Rx} + \frac{Ty\ a\ b}{Ry}$$

eliminando ab

$$P = \frac{Tx}{Rx} + \frac{Ty}{Ry}$$

Expresiones donde Rx y Ry son los radios de curvatura en X y Y, o bien manejando sus curvaturas.

$$Cx = \frac{1}{Rx} \quad ; \quad Cy = \frac{1}{Ry}$$

$$P = Tx\ Cx + Ty\ Cy$$

Donde P es la carga normal soportada por la acción de las tensiones Tx y Ty.

Para el caso de cargas simétricas como son la carga muerta y la viva, se omiten los efectos normales que pudieran ocasionar el cortante, y más aún, en el caso particular de la esfera, para este tipo de cargas, las torsiones geométricas no se presentan, ya que cualquier meridiano que se tome, tendrá una variación ortogonal de pendiente -

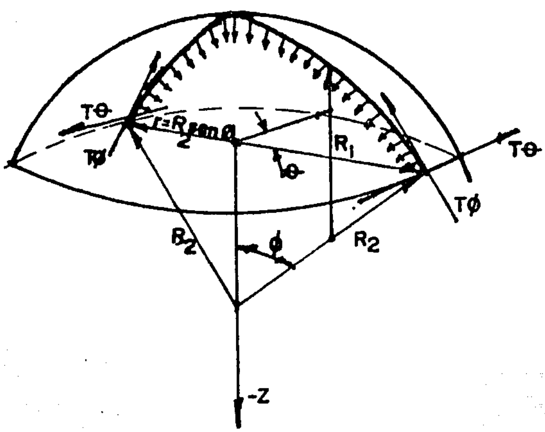
nula y por tanto la ecuación de carga total será:

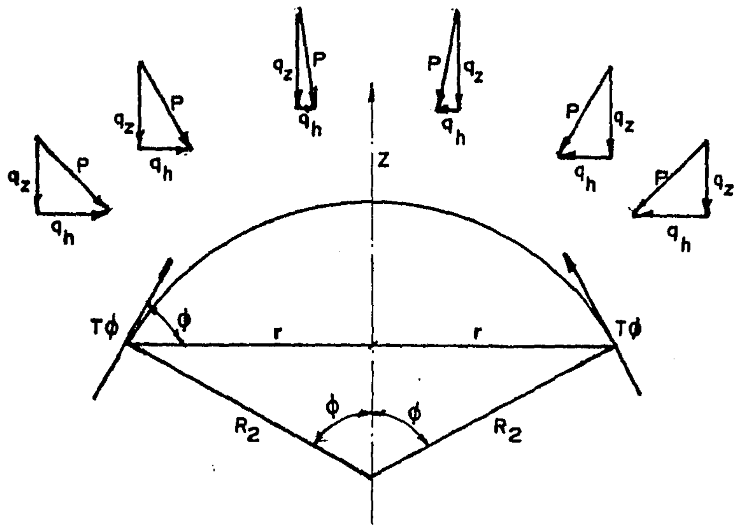
$$P = \frac{Tx}{Rx} + \frac{Ty}{Ry}$$

Comúnmente la fuerza Ty se considera actuando sobre los meridianos y se le llama TØ, de igual forma, a la Tx que actua sobre los paralelos se le llama TΘ, ambas son fuerzas por unidad de longitud. También, en una esfera Ry= Rx = R, por lo cual la componente normal P de la carga total queda:

$$P = \frac{1}{R} \left(T\phi + T\theta \right)$$

Para determinar los valores de TØ y TΘ, se establece el equilibrio de un sector de membrana sobre el paralelo que está a un ángulo Ø respecto a un eje vertical, como se ilustra en la figura, sólo se considera la componente vertical, ya que por la condición axisimétrica las componentes horizontales se anulan.





La resultante de todas las cargas q, es una fuerza vertical Qz y la resultante vertical de esfuerzos $T\phi$ aplicados a la frontera circular de sector de radio r, es igual a :

$$T\phi\ (\ 2\pi r\ )\ \mathrm{sen}\ \phi \ = \ 2\pi T\phi\ R_2\ \mathrm{sen}^2\phi$$

e igualando con Qz

$$T\phi \ = \ \frac{Qz}{2\pi R_2\ \mathrm{sen}^2\phi}$$

para una membrana esférica $R_1 = R_2 = R$

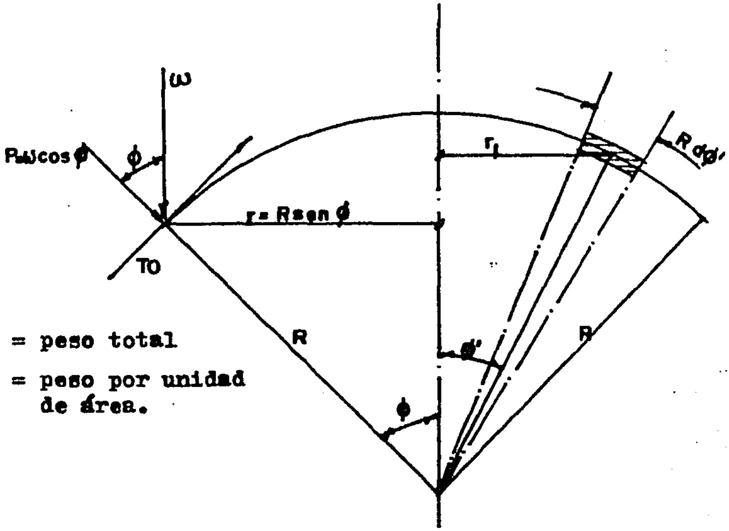
$$T\phi \ = \ \frac{Qz}{2\pi R\ \ \mathrm{sen}^2\phi}$$

y

$$T\theta \ = \ PR \ - \ T\phi$$

IV.1.- Análisis por peso propio (uniformemente repartido).

Considerando el sector de cúpula citado, el peso W, puede calcularse mediante los pesos de un número determinado de anillos paralelos infinitesimales de ancho $Rd\phi'$



W = peso total

ω = peso por unidad de área.

$$dW = (2\pi r_1)\, Rd\phi'\omega = 2\pi\omega R^2 \operatorname{sen}\phi' \cdot d\phi'$$

$$W = \int_0^{\phi} dW = 2\pi\omega R^2 \int_0^{\phi} \operatorname{sen}\phi'\, d\phi'$$

$$= 2\pi\omega R^2 \;(1 - \cos\phi)$$

por equilibrio vertical.

$$T\phi\; 2\pi R \operatorname{sen}^2\phi = -2\pi\omega R^2\,(1 - \cos\phi)$$

despejando: $$T\phi = \omega R\,\frac{(1 - \cos\phi)}{\operatorname{sen}^2\phi}$$

$$= \omega R\,\frac{(1 - \cos\phi)}{(1 - \cos^2\phi)}$$

$$= \omega R\,\frac{(1 - \cos\phi)}{(1 - \cos\phi)\,(1 + \cos\phi)}$$

y finalmente.

$$T\phi = \frac{\omega R}{(1 + \cos\phi)}$$

que siempre nos darán esfuerzos de compresión.

Por otra parte como $P = \omega \cos\phi$

$$T\theta = \omega R \left(\cos\phi - \frac{1}{1 + \cos\phi} \right)$$

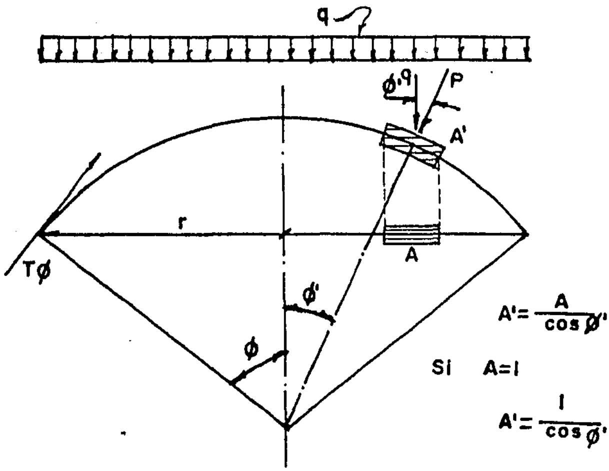
lo cual indica que existen compresiones para:

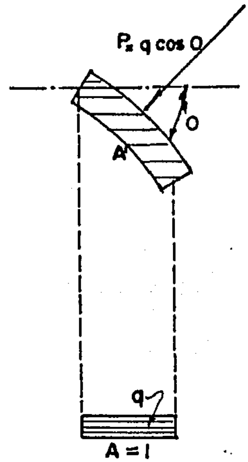
$$\cos\phi \geqslant \frac{1}{1 + \cos\phi}$$

que sólo sucede si $\phi \leqslant 51\ 49'$ en caso contrario se presentarán tensiones.

IV.2.- Análisis por carga viva (cargas distribuidas sobre un plano horizontal).

Observando la figura;





el equilibrio vertical del sector requiere que:

$$Q_z = q\pi r^2 = q\pi R^2 \operatorname{sen}^2\phi$$

igualando con las expresiones generales.

$$T\phi = \frac{q\pi R^2 \operatorname{sen}^2\phi}{2\pi R \operatorname{sen}^2\phi} = \frac{qR}{2}$$

entonces
$$T\phi = \frac{qR}{2}$$

y también siempre serán compresiones. La componente normal P de la carga por unidad de área, es la componente q en la dirección normal, o sea P' = q cos ϕ sobre el área A'

$$P = \frac{P'}{A'} = \frac{q \cos\phi}{\frac{1}{\cos\phi}} = q \cos^2\phi$$

por lo que

$$T\theta = q\,R\,(\cos^2\phi - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\,q\,R \cos 2\,\phi$$

$$T\theta = \frac{1}{2}\quad q\,R \cos 2\,\phi$$

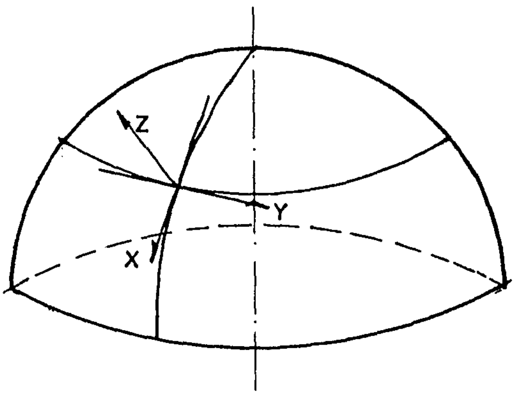
ésto indica que para $\phi = 45^\circ$ también habra tensiones.

Es conveniente, aclarar que estas simplificaciones son válidas dado la simetría con que se considera a las cargas permanentes, el caso más complicado de analizar es - el que provoca la acción del viento, pues como se sabe es una acción irregular sobre la estructura.

IV.3.- Análisis por viento.[1]

El viento es una fuerza sin simetría radial, "al faltar la simetría, en las secciones según los paralelos o meridianos existen también tensiones tangenciales" llamadas $t_{12} = t_{21}$. "Dirigidas según el paralelo o el meridiano (ésto es, contenidas en el plano tangente) y, por consiguiente, esfuerzos tangenciales $T_{12} = T_{21} = (t_{12}\ s)$. Así, se tienen en todo punto de la membrana, los esfuerzos de membrana S_1, S_2 y T_{12}, que ahora son funciones no solo de la colatitud ϕ sino también de la longitud θ. Estas tres funciones incógnitas, están ligadas por tres ecuaciones de equilibrio, por lo que también en este caso, el equilibrio de un elemento genérico de la membrana es posible con los solos esfuerzos de membrana indicados; ésto es; sin que sea necesaria la intervención de momentos flectores y esfuerzos cortantes normales a la membrana".

"Las fuerzas exteriores por unidad de superficie están definidas por las componentes X, Y, Z, según el meridiano, según el paralelo y según la normal a la membrana.

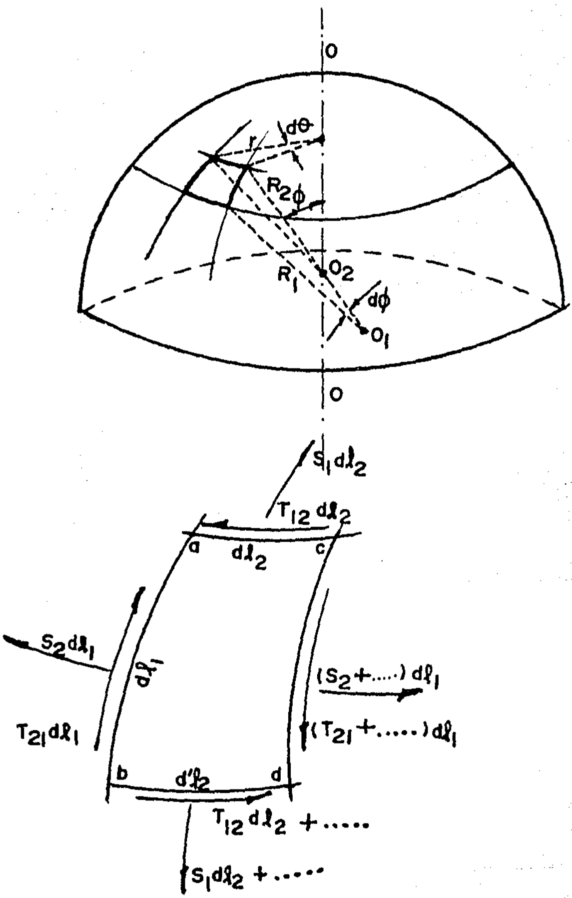


Consideremos un elemento de membrana a-b-c-d limitado por dos meridianos y dos paralelos muy próximos, de lados $ab = cd = d\ell_1 = R_1\ d\phi$; $ac = d\ell_2 = r\ d\theta$, $bd = d'\ell_2 = (r + dr)\ d\theta$, como se muestra en la figura siguiente.

Sobre éste elemento actúan las fuerzas exteriores $X\ d\ell_1\ d\ell_2$, $Y\ d\ell_1\ d\ell_2$, $Z\ d\ell_1\ d\ell_2$, donde $d\ell_1\ d\ell_2 = R_1\ r\ d\theta\ d\phi$

1.- El análisis por viento, fue investigado en el libro "La Ciencia de la Construcción de Odone Belluzi, Ed. Aguilar, Madrid España.

Equilibrio en la dirección X.- sobre el lado ac se tiene el esfuerzo normal S_1 d $_2$ = S_1 r dθ , mientras que sobre el bd este esfuerzo se transforma en (S_1 r dθ) + (d(S_1r)) dθ (habiendo variado tanto S_1 como r).



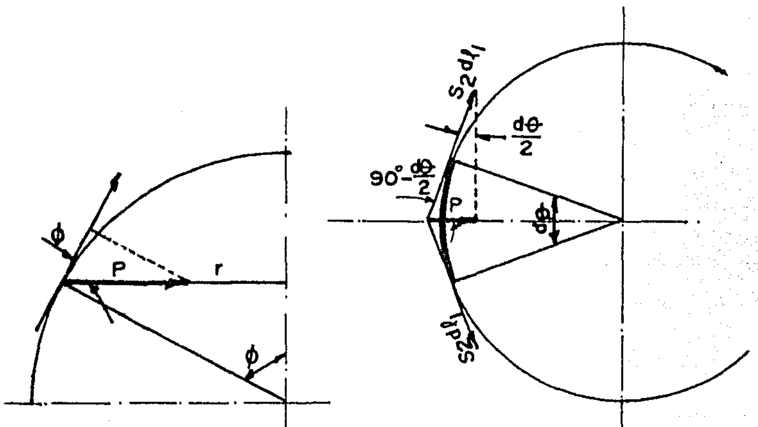
Por consiguiente se mantiene la diferencia, o sea el incremento.

$$d(S_1 r)\, d\theta = \frac{\partial (S_1 r)}{\partial \phi}\, d\phi\, d\theta$$

Sobre los lados cd y ab actuán dos esfuerzos tangenciales cuya diferencia es.

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial \theta}\, d\theta\, d_{1} = \frac{\partial T_{21}}{\partial \theta}\, d\theta\, R_1\, d\phi$$

Por último, los esfuerzos normales que actuán sobre los lados ab y cd tienen la resultante dirigida según r, que vale (salvo infinitésimos de orden superior) $S_2\, d\ell_1\, d\theta$ como se demuestra a continuación:



$$P = S_2\, d\ell_1 \cos(90° - \frac{d\theta}{2}) = S_2\, d\ell_1 \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2}$$

$$\text{en ángulos pequeños} \quad \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} \doteq \frac{d\theta}{2}$$

y considerando los dos esfuerzos.

$$P = 2S_2\, d\ell_1 \frac{d\theta}{2} = S_2\, d\ell_1\, d\theta$$

cuya componente según X es:

$$-S_2\, d\ell_1\, d\theta \cos\phi = -S_2\, R_1\, d\phi \cos\phi$$

de aquí se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial(S_1\ r)}{\partial \phi}\ d\phi\ d\theta + \frac{\partial T_{21}}{\partial \theta}\ R_1\ d\phi\ d\theta - S_2\ R_1\ d\phi\ d\theta \cos\phi\ +$$

$$+\ X\ R_1\ r\ d\phi\ d\theta = 0$$

Equilibrio en dirección Y.- La diferencia de los esfuerzos normales que actuán sobre los lados cd y ab es :

$$\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\ d\theta\ d\ell_1 = \frac{\partial S_2}{\partial \theta}\ d\theta\ R_1\ d\theta$$

Sobre el lado ac se tiene el esfuerzo tangencial $T_{12}\ d\ell_2 = T_{12}\ r\ d\theta$, en tanto que sobre el bd éste esfuerzo se trans-- forma en $T_{12}\ r\ d\theta + d(T_{12}\ r)\ d\theta$. Por consiguiente, subsis te el incremento.

$$d\ (T_{12}\ r)\ d\theta = \frac{\partial(T_{12}\ r)}{\partial \phi}\ d\phi\ d\theta$$

Finalmente los esfuerzos tangenciales que actuán sobre los lados ab y cd, inclinados entre sí un ángulo ($d\theta \cos\phi$), -- tienen la resultante dirigida según Y, y de magnitud, prescindiendo de infinitésimos de orden superior:

$$T_{21}\ d\ell_1\ d\theta\ \cos\phi = T_{21}\ R_1\ d\phi\ d\theta \cos\phi$$

de donde se obtiene la ecuación.

$$\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\ R_1\ d\phi\ d\theta + \frac{\partial(T_{12} r)}{\partial \phi}\ d\phi\ d\theta + T_{21}\ R_1\ d\phi\ d\theta \cos\phi\ +$$

$$+\ Y\ R_1\ r\ d\phi\ d\theta = 0$$

Equilibrio en dirección Z.- Para el equilibrio del elemento abcd en la dirección normal(positiva hacia afuera) a la superficie media de la membrana, la suma de las componentes - según Z de los esfuerzos internos debe ser igual y contra-- ria a la componente de las fuerzas externas. Los esfuerzos $S_1\ d_2$ y $(S_1 + dS_1)d_2$ están inclinados entre sí un ángulo $d\phi$. por lo que salvo infinitésimos de orden superior, la

suma de sus componentes según -Z es $S_1 d\ell_2 \; d\phi$.
Análogamente, los esfuerzos $S_2 d\ell_1$ tienen su resultante en el plano del paralelo, y su valor es $S_2 \; d\ell_1 \; d\theta$, por lo que la componente de esta según -Z es $S_2 \; d\ell_1 \; d\theta$ sen ϕ. Si Z es la componente según z de las fuerzas exteriores, por unidad de área de membrana, positiva si está dirigida hacia fuera, - la fuerza exterior es $Z d\ell_1 d\ell_2$. Por consiguiente, deberá ser

$$S_1 d\ell_2 d\phi + S_2 d\ell_1 d\theta \text{ sen } \phi = Z d\ell_1 d\ell_2$$

o sea,

$$S_1 \; (R_2 \text{ sen } \phi \; d\theta) \; d\phi + S_2 \; (R_1 \; d\phi) \; d\theta \text{ sen } \phi = Z \; (R_1 \; d\phi)(R_2 \text{ sen } \phi \; d\theta)$$

Dividiendo por $d\theta d\phi$sen ϕ, se obtiene

$$S_1 R_2 + S_2 R_1 = Z R_1 R_2$$

que para fines prácticos puede escribirse como:

$$\frac{S_1 \; r}{R_1} + \frac{S_2 \; r}{R_2} = Z \; r$$

Así, dividiendo las ecuaciones de equilibrio en X, y Y entre $d\theta d\phi$ y sustituyendo $R_2 = r \;/\; \text{sen } \phi$ en la de Z, se obtiene el sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas S_1, S_2 y $T_{12} = T_{21}$;

$$\frac{\partial (S_1 r)}{\partial \phi} + R_1 \frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} - S_2 \; R_1 \cos \theta = -X \; R_1 \; r$$

$$\frac{\partial (T_{12} r)}{\partial \phi} + R_1 \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + T_{12} \; R_1 \cos\theta = -Y \; R_1 \; r$$

$$S_1 \; r + S_2 \; R_1 \text{ sen } \phi = Z \; R_1 \; r$$

De la tercera se despeja S_2 y se sustituye en las dos prime ras, encontrandose:

$$\frac{\partial S_1 \; r}{\partial \phi} + R_1 \frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + S_1 \; r \text{ cotg } \phi = -(X - Z\text{cotg } \phi) \; R_1 \; r$$

$$\frac{\partial(T_{12}r)}{\partial\phi} - \left(\frac{r}{\operatorname{sen}\phi}\right)\frac{\partial S_1}{\partial\theta} + T_{12}\, R_1 \cos\phi = -\left(Y + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right)\right)(R_1\, r)$$

ecuaciones de dos incógnitas que se pueden escribir también en la forma.

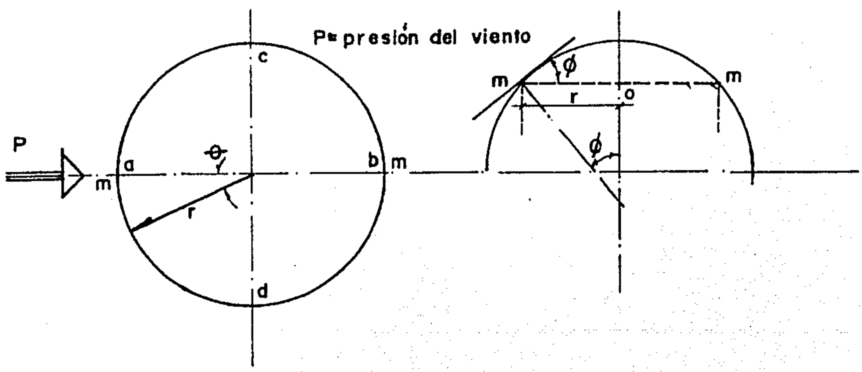
$$\frac{\partial S_1}{\partial\phi} + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi} + \operatorname{cotg}\phi\right) S_1 + \frac{R_1}{r}\frac{\partial T_{12}}{\partial\theta} = -(X - Z\operatorname{cotg}\phi)\, R_1$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi} + \frac{R_1}{r}\cos\phi\right) T_{12} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\right)\frac{\partial S_1}{\partial\phi} = -\left(Y + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right) R_1$$

Consideremos el caso en que las componentes X, Y, Z, de las fuerzas exteriores tengan las expresiones.

$X = Xo \cos\theta$; $Y = Yo \operatorname{sen}\theta$; $Z = Zo\cos\theta$ donde Xo, Yo y Zo son funciones únicamente del ángulo ϕ, pues son antisimétricas respecto al plano vertical que contiene el diámetro cd. En este caso, también los esfuerzos S_1, T_{12}, S_2 tienen expresiones análogas; es decir:

$S_1 = S_{1\phi}\cos\theta$, $T_{12} = T_{12\phi}\operatorname{sen}\theta$, $S_2 = S_{2\phi}\cos\theta$



Donde $S_{1\phi}$, $T_{12\phi}$, $S_{2\phi}$ son funciones sólo de ϕ, sustituyendo en las expresiones anteriores y suprimiendo los factores comunes respectivos, cos θ, sen θ, cos θ, se hacen independientes de θ y se transforman en ecuaciones ordinarias, además considerando que para la esfera, $R_1 = R_2 = R$, el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{dS_{1\phi}}{d\phi} + 2\text{cotg}\,\phi\,(S_1\phi) + \frac{1}{\text{sen}\,\phi}(T_{12}\,\phi) = -R\,(X_\phi - Z_\phi\,\text{cotg}\,\phi)$$

$$\frac{dT_{12\phi}}{d\phi} + 2\text{cotg}\,\phi\,(T_{12}\,\phi) + \frac{1}{\text{sen}\,\phi}(S_1\phi) = -R(Y_\phi - \frac{Z_\phi}{\text{sen}\,\phi})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, sumando y restando ambas, y poniendo

$$S_{1\phi} + T_{12\phi} = U_1 \quad ; \quad S_{1\phi} - T_{12\phi} = U_2$$

Se obtienen dos ecuaciones, cada una de ellas con una incógnita, pues se considera a los esfuerzos del viento, normales a la cúpula, o sea $X_\phi = Y_\phi = 0$ y $Z_\phi = -p\,\text{sen}\,\phi$

$$\frac{dU_1}{d\phi} + (2\text{cotg}\,\phi + \frac{1}{\text{sen}\,\phi})\,U_1 = -R\,p\,(1 + \cos\phi)$$

$$\frac{dU_2}{d\phi} + (2\text{cotg}\,\phi + \frac{1}{\text{sen}\,\phi})\,U_2 = R\,p\,(1 - \cos\phi)$$

como se comprueba fácilmente, las soluciones generales de la ecuación diferencial son:

$$U_1 = \frac{1 + \cos\phi}{\text{sen}^3\,\phi}\left[C_1 + R\,p\,(\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3})\right]$$

$$U_2 = \frac{1 - \cos\phi}{\text{sen}^3\,\phi}\left[C_2 - R\,p\,(\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3})\right]$$

Resolviendo para $S_{1\phi}$ y $T_{12\phi}$ y sutituyendo en las ecuaciones de esfuerzos S_1, S_2 y T_{12}

$$S_1 = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\phi}\left[\frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{C_1 - C_2}{2}\cos\phi + R\,p\left(\cos^2\phi - \frac{\cos^4\phi}{3}\right)\right]$$

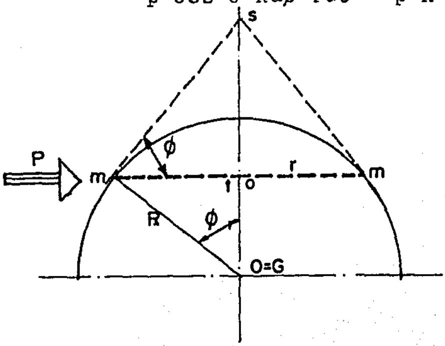
$$T_{12} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^3\phi}\left[\frac{C_1 - C_2}{2} + \frac{C_1 + C_2}{2}\cos\phi + R\,p\left(\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right)\right]$$

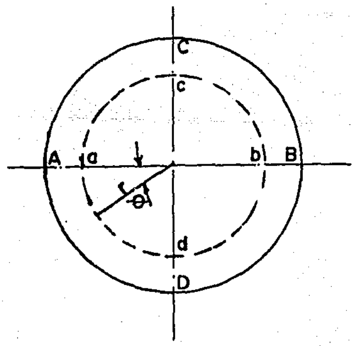
Las constantes C_1 y C_2 se determinan fácilmente considerando el equilibrio de la cúpula supuesta semiesférica. En los puntos del ecuador ($\phi = 90°$) se tiene.

$$S_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}\cos\theta \quad ; \quad T_{12} = \frac{C_1 - C_2}{2}\operatorname{sen}\theta$$

La suma de los momentos de los esfuerzos S_1 respecto al diámetro CD debe equilibrar el momento de las fuerzas exteriores, que es nulo porque la presión en todo punto es normal a la superficie; ésto es, pasa por el centro de la esfera. La suma de las componentes de los esfuerzos T_{12} según el diámetro AB debe equilibrar la resultante de las fuerzas exteriores, que está dirigida según AB, por lo que se multiplica -- por $\operatorname{sen}\phi \cos\theta$ y se tiene $p\,R^2 \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\theta \, d\theta \, d\phi$; ya que la fuerza del viento por área es:

$$p\cos\theta\, R d\phi\; r d\theta = p\,R^2 \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\theta\, d\theta\, d\phi$$





cuya resultante es:

$$T = p\,R^2\,4\int_0^{\phi_o} sen^3\phi\,d\phi\int_0^{\pi/2} cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi p R^2}{3}\,(2-2cos\,\phi o + cos^3\phi o)$$

si también $\phi o = \pi/2$ (en el ecuador).

$$T = \frac{2\pi\,p\,R}{3}$$

de ésta se obtiene:

$$\frac{C_1 + C_2}{2} = 0 \qquad \frac{C_1 - C_2}{2} = -\frac{2\,R\,p}{3} \qquad \text{o sea}$$

$$C_1 = -C_2 = -\frac{2\,R\,p}{3}$$

y las ecuaciones resultantes son:

$$S_1 = -\frac{p\,R\,cos\,\theta\,cos\,\phi}{3\,sen^3\phi}\,(\,2 - 3\,cos\,\phi + cos^3\phi\,)$$

$$S_2 = -\frac{p\,R\,cos\,\theta}{3\,sen^3\phi}\,(\,3\,sen^2\phi + 2\,cos^4\phi - 2\,cos\,\phi\,)$$

$$T12 = \frac{p\,R\,sen\,\theta}{3\,sen^3\phi}\,(\,2 - 3\,cos\,\phi + cos^3\phi\,)$$

iguales a sus similares $T\phi$, $T\theta$ y $T\theta\phi$ respectivamente.

Al efectuar la interacción de las ecuaciones anteriormente obtenidas, de acuerdo a las tres solicitaciones impuestas, se obtienen las siguientes ecuaciones que nos ayudarán en la determinación de los elementos mecánicos sobre las barras y nudos.

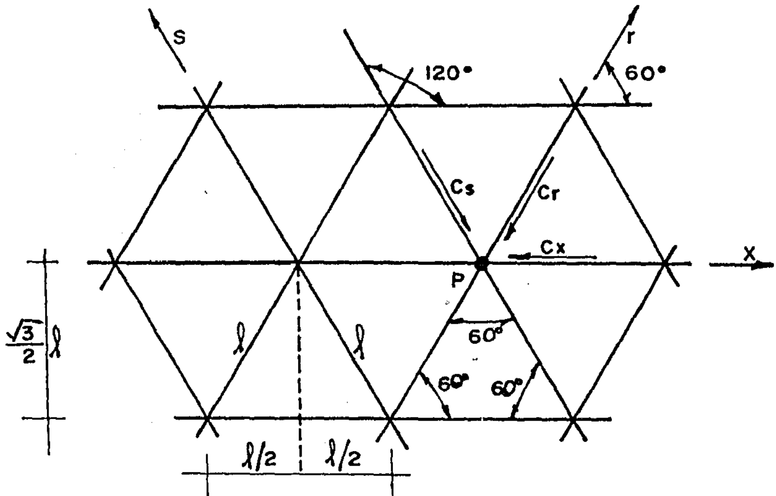
$$T\phi = \frac{\omega R}{1 + cos\,\phi} + \frac{q\,R}{2} + \frac{-\,p\,R\,cos\,\theta\,cos\,\phi}{3\,sen^3\phi}\,(\,2 - 3\,cos\,\phi + cos^3\phi)$$

$$T\theta = \omega R\,(cos\,\phi - \frac{1}{1 + cos\,\phi}) + \frac{1}{2}\,q\,R\,cos\,2\phi\; - \; -\frac{p\,R\,cos\,\theta}{3\,sen^3\phi}\,(\,3\,sen^2\phi + 2\,cos^4\phi - 2\,cos\,\phi)$$

$$T\theta\phi = \frac{p\ R\ \mathrm{sen}\ \theta}{3\ \ \mathrm{sen}^3\phi}\ (\ 2 - 3\cos\ \phi + \cos^3\phi)$$

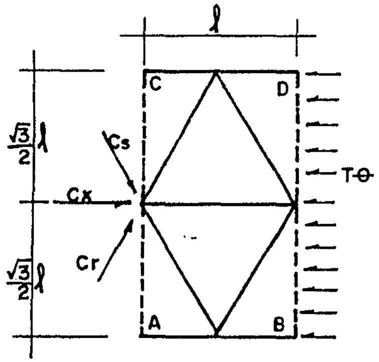
en estas ecuaciones, ω = carga muerta , q = carga viva y p = presión del viento, todas en Kg/m2.

Notese, que para obtener las fuerzas en las barras se establecerá una equivalencia entre la cúpula retiçulada y los elementos encontrados como cascarón delgado; para nuestro caso podemos considerar que se tiene una retícula triangular equilátera de barras, apoyandonos en las longitudes de barras encontradas en el capítulo II, las cuales obedecen a las siguientes propiedades dentro de una parte de la retícula.



Las barras estarán actuando sobre las direcciones x, r y s y Cx, Cr y Cs son las fuerzas de las barras sobre el nudo P, la equivalencia entre el cascarón y la retícula se establece considerando que hay equilibrio en las direcciones X y Y, entre las fuerzas unitarias $T\phi$, $T\theta$ y $T\theta\phi$ aplicadas a los lados de un elemento de cascarón ABCD y las fuerzas Cx, Cr y Cs.

De esta forma, el equilibrio en la dirección X requiere que:

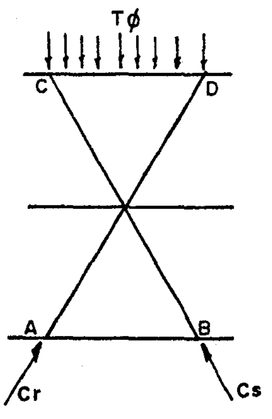


$$\frac{Cx}{2} + \frac{Cx}{2} + Cx + \frac{1}{2}\,Cr + \frac{1}{2}\,Cs = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\,\ell\right) T\theta$$

ó

$$4\,Cx + Cr + Cs = T\theta\,(2\sqrt{3}\,\ell)$$

El equilibrio en la dirección Y requiere que:

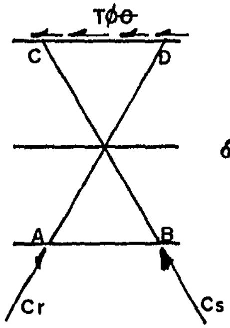


$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,Cr + \frac{\sqrt{3}}{2}\,Cs = T\phi\,\ell$$

ó

$$Cr + Cs = T\phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\ell\right)$$

además del equilibrio de fuerzas cortantes



$$\frac{1}{2}\,Cr - \frac{1}{2}\,Cs = T\Theta\phi\ell$$

ó

$$Cr - Cs = 2\,T\Theta\phi\ell$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a:

$$Cx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,(\,3T\Theta - T\phi\,)$$

$$Cr = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\,T\phi + \sqrt{3}\,T\Theta\phi\,)$$

$$Cs = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\,T\phi - \sqrt{3}\,T\Theta\phi\,).$$

ecuaciones que nos permiten finalmente conocer las fuerzas en las barras.

IV.4.- Deformaciones.- Las deformaciones de las barras se pueden obtener fácilmente, una vez conociendo las fuerzas que actuán sobre ellas, por medio de la ley de Hooke aplicada a elementos sometidos a carga axial, o sea:

$$\Delta = \frac{F\ L}{A\ E}$$

correspondiendo las literales a:

F = valor de la fuerza aplicada a la barra.

L = longitud de la barra ; A = área de la sección transversal de la barra y E = Módulo de elasticidad del material de fabricación de la cúpula.

V.- DISEÑO ESTRUCTURAL.

Conocidas las fuerzas que actuán sobre las barras y nudos, el diseño de estas piezas se efectuará de acuerdo a las ecuaciones para carga axial que marca el Reglamento de construcciones del Distrito Federal. Si el elemento esta sujeto a fuerzas de tensión, su sección neta deberá tener una área (**usando como material el acero**):

$$A = \frac{Pt}{f_y \; F_R}$$

Pt = intensidad de la fuerza de tensión en la barra.

f_y = esfuerzó correspondiente al límite inferior de fluencia del **acero**

F_R = Factor de resistencia = 0.9

Por otro lado, si la barra es sometida a fuerzas de compresión, la fórmula del Reglamento que nos determina la sección efectiva, estará afectada por la relación de esbeltez de la pieza, así pues:

si $\frac{K\,L}{r} \geqslant \left(\frac{K\,L}{r}\right)_c$

$$A = \frac{Pc \left(\frac{K\,L}{r}\right)^2}{\pi^2 \; E \; F_R} = \frac{Pc \left(\frac{K\,L}{r}\right)^2}{20{,}134{,}000 \; F_R}$$

si $\frac{K\,L}{r} \leqslant \left(\frac{K\,L}{r}\right)_c$

$$A = \frac{Pc}{\left[1 - \frac{\left(\frac{K\,L}{r}\right)^2}{2\left(\frac{K\,L}{r}\right)_c^2}\right] F_R \; f_y}$$

Para estas expresiones $\left(\frac{K\,L}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}} =$ $= 6340/\sqrt{f_y}$

expresión que resulta de sustituir el valor de 2.1 x 10^6 - del módulo de elasticidad (E) del acero. Este valor característico de la relación de esbeltez, separa los intervalos de pandeo elástico e inelástico. Cuando el valor de la relación de esbeltez se encuentra entre 0 y $6340/\sqrt{f_y}$, el factor de resistencia (F_R), se determina interpolando linealmente entre los valores de 0.85 que corresponde a una $\frac{KL}{r}$ = 0 y de 0.75 para $\frac{KL}{r}$ = $6340/\sqrt{f_y}$.

V.1.- Inestabilidad.- Un aspecto muy importante dentro del diseño de estructuras espaciales, y en particular de una cúpula geodésica, es la inestabilidad. La forma en que se presenta este fenomeno es mediante la aparición de cualquiera de los tres pandeos siguientes.

Pandeo de barra.- El pandeo de barra está regido por la ecuación de esfuerzo crítico de Euler, que nos proporciona el valor de la carga de falla de la barra, y de acuerdo con el Reglamento de las construcciones para el D.F. es:

$$P_E = \frac{F_R \pi^2 E I}{L^2}$$

donde

E = módulo de elasticidad del material.

I = momento menor de inercia de la barra.

L = longitud de la barra

F_R = factor de resistencia = 0.85

y se considera que este esfuerzo se presenta comunmente en miembros flexocomprimidos.

Para los casos de pandeo local y pandeo general, se establece una equivalencia entre el módulo de elasticidad del material de la cúpula, el espesor de la barra de la misma y los correspondientes, módulo de elasticidad y espesor de un cascarón mediante las expresiones.

$$h' = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{(espesor equivalente)}$$

$$E' = \frac{A}{3L\sqrt{\frac{I}{A}}} E \quad \text{(módulo de elasticidad equivalente)}$$

ecuaciones donde

I = momento menor de inercia de la barra

A = área de la sección transversal de la barra

L = longitud de la barra

E = módulo de elasticidad del material.

El pandeo local se refiere a una parte específica de la cúpula y se rige por la ecuación desarrollada por Timoshenko afectada por un factor F_R de resistencia[1] como se hace con la fórmula de Euler.

$$P_{cr} = F_R \; 3.7 \; \frac{E' \, h'^2}{a^2}$$

siendo a la distancia menor entre dos anillos paralelos. El valor de $F_R = 0.85$

Para que una cúpula falle por pandeo general, se presentarán antes las fallas por esfuerzos de tensión o compresión en los miembros, los científicos Von Karman y Tsien H. proponen se revise el pandeo general mediante la expresión. (afectada por el mismo factor que la de Euler)

$$P_{cr} = F_R \; 0.365 \; E' \left(\frac{h'}{R}\right)^2$$

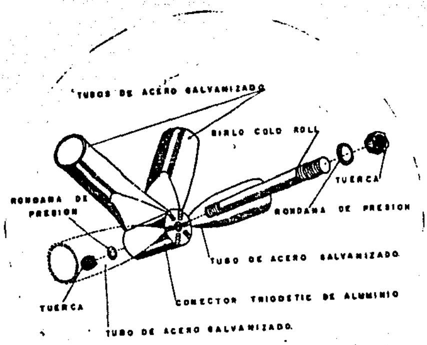
y recomienden que $h' > R/500$ donde R es el radio de la cúpula.

1.- Originalmente las ecuaciones de pandeo local y general no consideran el F_R, se introduce este factor como resultado de la inspección de la fórmula de Euler que cita el Reglamento de construcciones del D.F., ya que sólo modifica a la fórmula de Euler en el valor de F_R

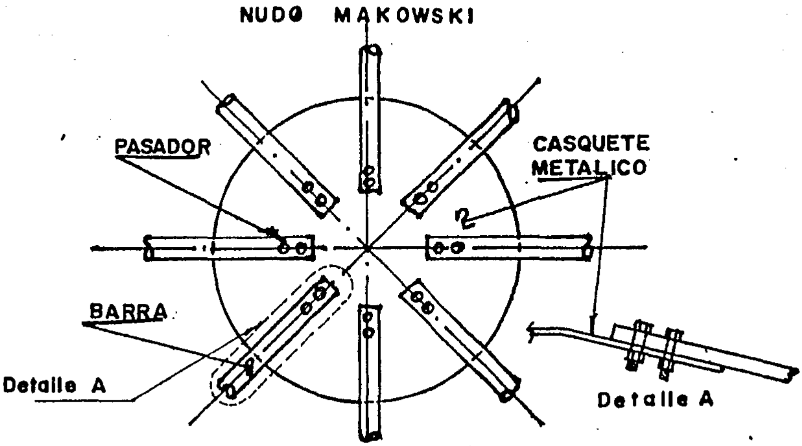
V.2.- El nudo.- Esta impertantísima pieza deberá asegurar la transmisión efectiva de los esfuerzos de las barras que concurren en él, por lo tanto, su diseño deberá regirse por las condiciones más críticas de los elementos mecánicos que le transmiten las barras, además como se mencionó en el capitulo II, el nudo presentará ciertas caracteristicas geométricas que nos permitan tipificar un determinado número de barras y así facilitar y economizar en la construcción.

A continuación se ilustran los nudos más típicos empleados en la construcción de mallas de una sola capa, como es el caso de la malla que aquí se trata.

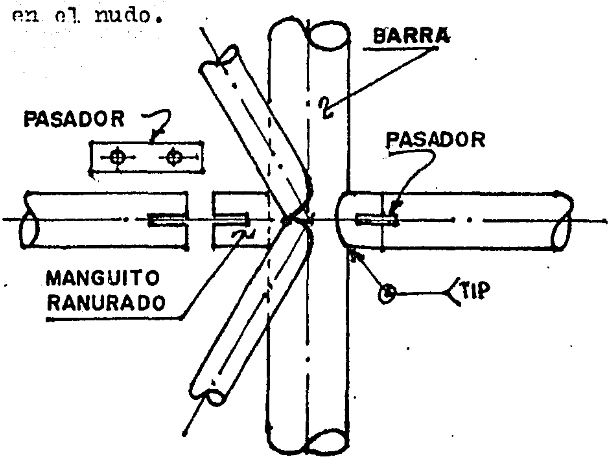
"Nudo Triodetic.- las barras son planas en sus extremos y se introducen a presión en las ranuras del nudo. La unión se realiza, sin soldadura ni pasadores.



Nudo Makowski.-Barras tubulares sujetas por pasadores en casquetes metálicos.

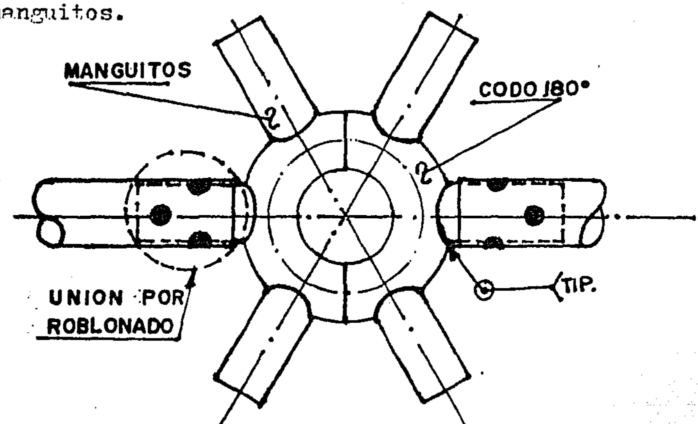


Nudo Tubaccord.- Las barras pueden soldarse directamente o bien fijarse mediante un pasador que encaja en unas ranuras situadas en el extremo de las barras y en un manguito soldado, previamente, a la barra tubular de mayor diámetro concurrente en el nudo.



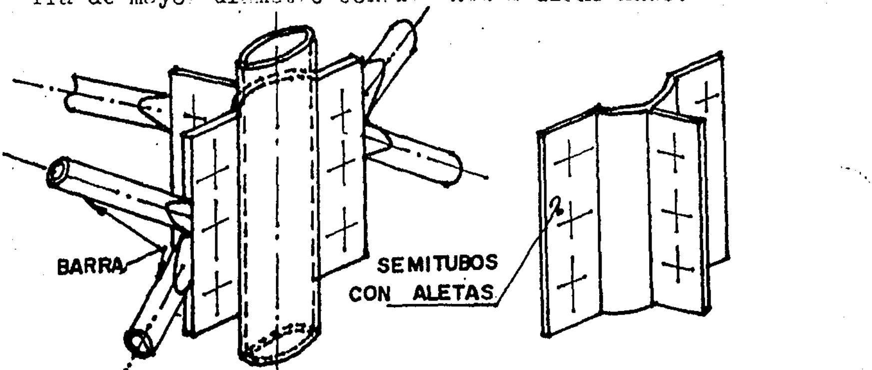
NUDO TUBACCORD

Nudo Bourquardez.- Es obtenido mediante la unión de dos codos de 180°, y manguitos tubulares soldados a los codos. Las barras concurrentes en el nudo se unen, por roblonado, a los manguitos.



NODO BOURQUARDEZ

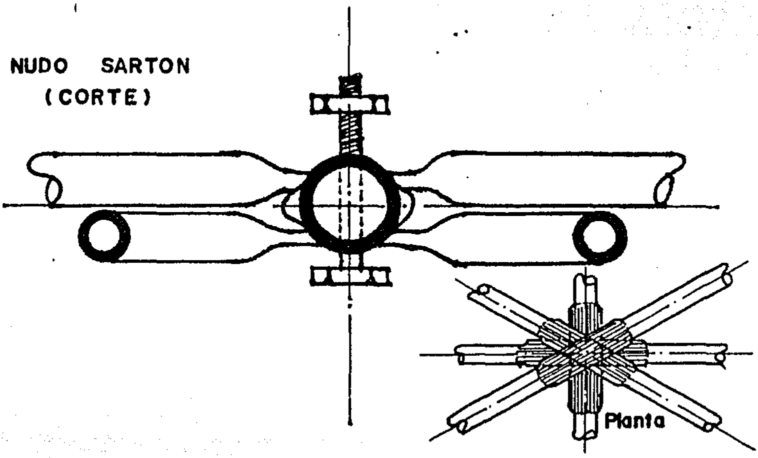
Nudo Delacroix-Glotin-Monier-Sejournet.- Este nudo está formado por uno o dos semitubos con aletas soldadas que indican las direcciones de las barras concurrentes. Estos (o este) semitubos se unen mediante roblonado o soldadura a la barra de mayor diámetro concurrente a dicho nudo.



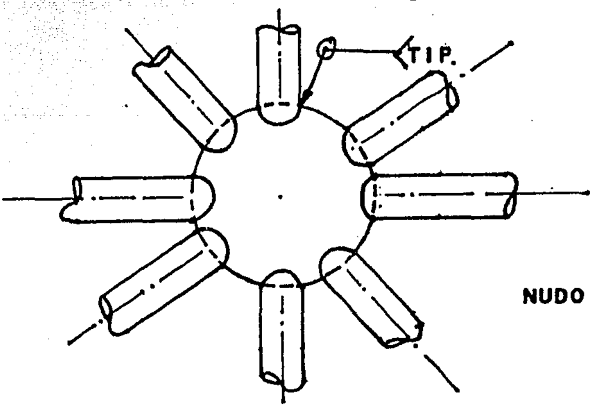
NUDO DELACROIX-GLOTIN-MONIER-SEJOURNET.

Nudo Sarton.- El procedimiento para obtenerlo consiste en - aplanar los tubos en los puntos correspondientes a un nudo, con el fin de poderlos cruzar cómodamente y colocar un pasa dor, con rosca, de fijación.

NUDO SARTON
(CORTE)

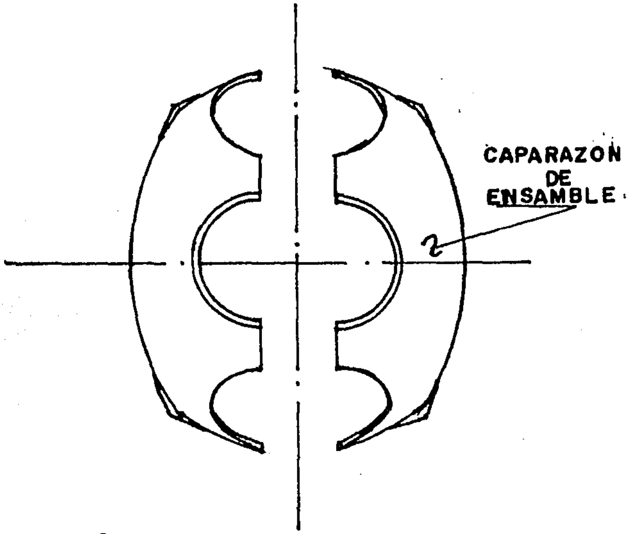


Nudo esférico.- constituido por una esfera a la que se unen por soldadura, barras en cualquier dirección. para absor ber diferencias en las longitudes de los tubos se sueldan en el nudo manguitos de diámetro superior al de aquéllos.

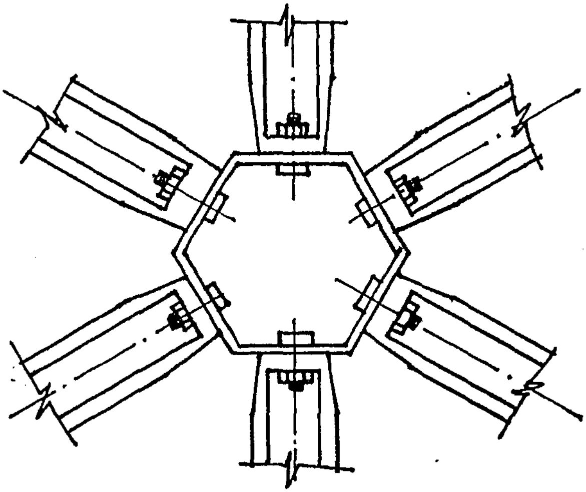


NUDO ESFERICO

Nudo S.D.C. .- preparados para el ensamblaje y soldadura de las barras concurrentes.



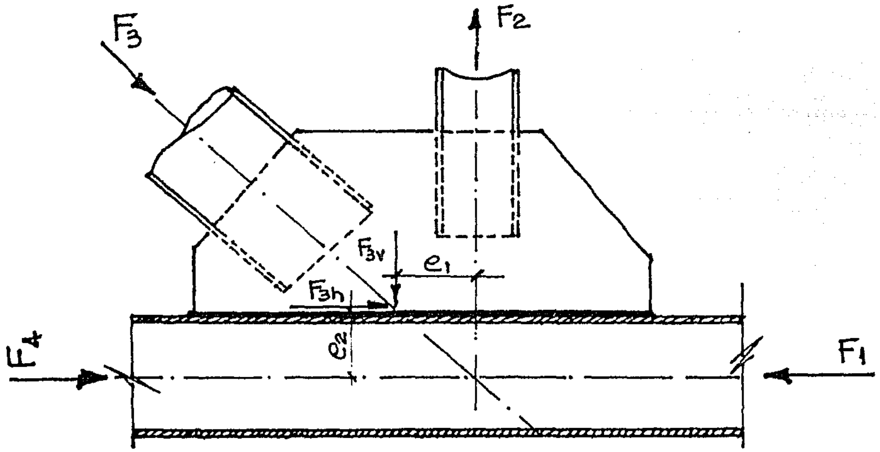
Nudo Wuppermann.[2]- Está formado por un hexágono al que se atornillan las barras concurrentes en seis direcciones posibles.



Las consideraciones para el diseño de los nudos, tiene sus variantes de acuerdo al tipo de nudo a diseñar, lo más común es determinar el momento que se produce, o bien debido a la excentricidad de aplicación de la carga al nudo o al provocado durante su proceso constructivo, a continuación - se presenta la forma de diseñar un nudo formado por tubos - como puede ser el caso de el Tubaccord, el Bourquardez o el Delacroix que fueron descritos anteriormente.

Como se observa en las figuras, el nudo estará sujeto a los momentos.

$$M_1 = F_{3v}\ e_1 \quad ; \quad M_2 = F_{3h}\ e_2$$



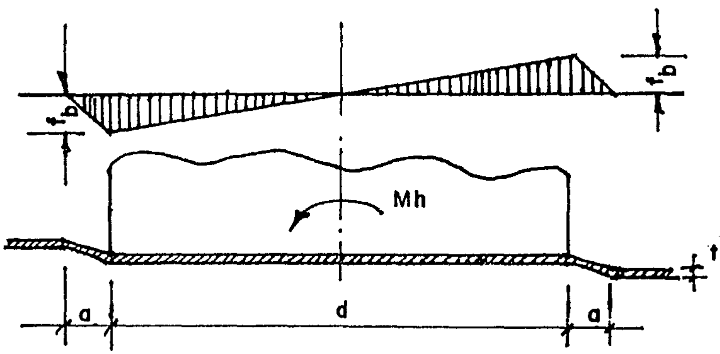
Ya que se considera que el nodo está en equilibrio y

$$F_{3h} = F_4 - F_1 \qquad y \qquad F_{3v} = F_2$$

en general, dependiendo del número de barras que llegan, se tendrán momentos

$$M_i = F_i\ e_i$$

los cuales estarán actuando sobre la barra-nudo provocan--- dole un alabeo en las fronteras de unión de las barras con currentes, como se muestra en la figura y que abarca una -- distancia $a = 12\ t$, donde t es el espesor del tubo. El mo-- mento mayor es el que se considera para el diseño y provoca un diagrama de esfuerzos como el mostrado.



Del análisis de la figura se obtiene una fuerza de tensión f_b que estará actuando sobre un aro unitario de tubo, la -- magnitud de esta fuerza se obtiene de igualar el momento es tático del diagrama de esfuerzos con el valor del momento a plicado.

$$2\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{f_b}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\ \frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{a\ f_b}{2}\right)\left(\frac{d}{2} + \frac{a}{3}\right) = M_h$$

$$\frac{f_b\ d^2}{6} \quad \frac{f_b\ d\ a}{2} \quad \frac{f_b\ a^2}{3} = M_h$$

factorizando

$$f_b \left(\frac{d^2}{6} + \frac{d\,a}{2} + \frac{a^2}{3} \right) = M_h$$

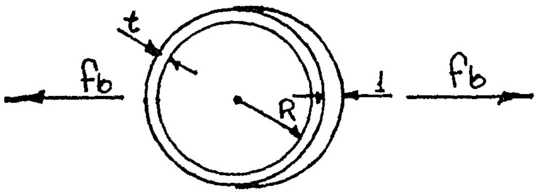
despejando

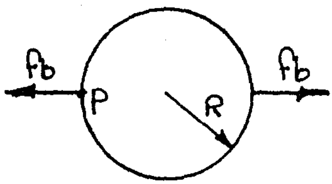
$$f_b = \frac{6\,M_h}{d^2 + 3da + 2a^2}$$

finalmente

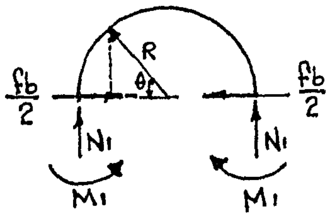
$$f_b = \frac{6\,M_h}{(d + a)(d + 2a)}$$

como se mencionó anteriormente esta fuerza estará actuando sobre un aro de ancho unitario y de espesor t como lo muestra la figura.





EI= CTE.



POR SIMETRÍA

Del corte de la estructura, como se indica, teniendo presente la simetría se tiene la expresión.

$$M_\theta = M_1 + N_1 R\,(1 - \cos\theta) + \frac{f_b}{2} R \operatorname{sen}\theta \quad ; \; 0 \leq \theta \leq \pi$$

empleando las estructuras siguientes por no existir desplazamiento vertical ni giro en el punto p.

$m\theta = R(1-\cos\theta)$ $\qquad$ $m\theta = 1$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq \pi$

y efectuando el recorrido de izquierda a derecha se tiene:

$$E I \delta_{1p} = \int_0^{\pi} M\theta \; R \; (1 - \cos \theta) \; R \; d\theta = 0$$

es decir

$$\int_0^{\pi} M\theta \; (1 - \cos \theta) \; d\theta = 0$$

también

$$E I \; \theta_p = \int_0^{\pi} M\theta \; R \; d\theta = 0$$

entonces

$$\int_0^{\pi} M\theta \; d\theta = 0$$

teniendo en cuenta esto, resulta que

$$\int_0^{\pi} M\theta \cos \theta \; d\theta = 0$$

sustituyendo la expresión de Me

$$\int_0^{\pi} (M_1 + N_1 R (1 - \cos \theta) + \frac{fb}{2} R \operatorname{sen} \theta) \cos \theta \; d\theta = 0$$

se obtiene

$$(M_1 + N_1 R) \theta - N_1 R \operatorname{sen} \theta - \frac{fb}{2} R \cos \theta \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$(M_1 + N_1 R) \operatorname{sen} \theta - N_1 R \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right) + \frac{fb}{4} R \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

es decir

$$M_1 \pi + N_1 R \pi + f b R = 0$$

$$N_1 R \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{entonces } N_1 = 0 \text{ y } M_1 = - \frac{f b R}{\pi} = - 0.318 \; f b R$$

y en general

$$M = - 0.318 \; f b R$$

El espesor se determinara en base a la ecuación de momento plástico que nos menciona el Reglamento de construcciones para el D.F.

$$M_p = F_R \; Z \; f_y$$

en donde

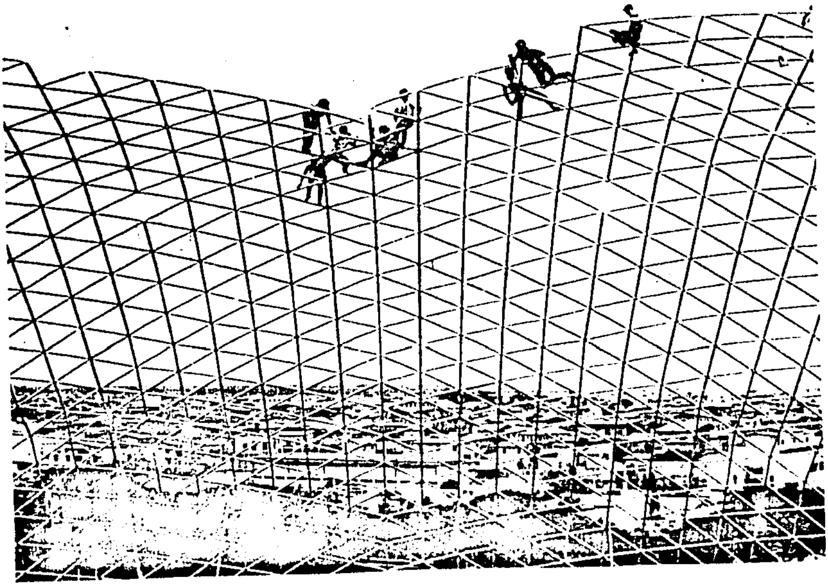
F_R = factor de resistencia = 0.9

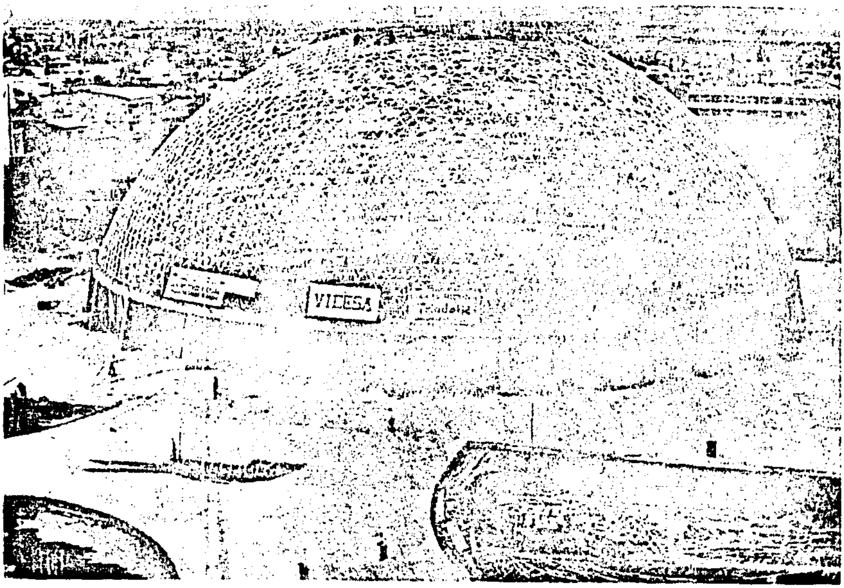
Z = Módulo de sección plástica.

2.-La información acerca de la diversidad de los nudos, puede complementarse en el libro: Las mallas espaciales en arquitectura de J.Margarit y C. Buxade.

VI.- RECOMENDACIONES CONSTRUCTIVAS.

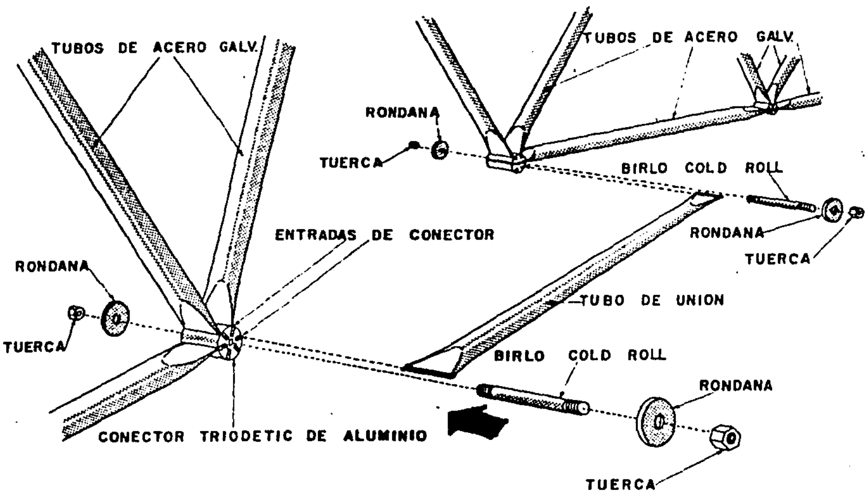
Lo práctico de estas estructuras que permite un ahorro de tiempo y costo, es el hecho de que deben ser construidas sin el uso de cimbras, comenzando desde los apoyos y localizando los nudos en el espacio mediante la colocación de las barras de los anillos inferiores, es decir paralelo tras paralelo como puede observarse en las ilustraciones.





En ocasiones cuando la cúpula es muy grande, en una etapa avanzada de la construcción, resulta conveniente apuntalar estratégicamente algunos nudos, para evitar movimientos que dificulten el proceso constructivo, estas barras de apuntalamiento también pueden observarse en las ilustraciones anteriores.

Para el caso del nudo triodetic el proceso de unión de las barras, consiste en colocar los extremos del tubo en las respectivas entradas de los conectores, golpeando con un mazo de madera, despues se coloca el birlo, rondana, y tuerca para dejar bien asegurada la barra. De esta manera se va conformando la cúpula hasta el cerramiento en su parte superior.



VII.- CONCLUSIONES .

Actualmente, los factores de vital importancia para una construcción como son el costo y el tiempo, están siendo muy difíciles de cubrir. Las constantes alzas inflacionarias en los materiales de construcción, han encarecido las obras, repercutiendo inevitablemente en el plazo de terminación de las mismas. Las estructuras espaciales al estar conformadas por barras y nodos, permiten un ahorro en peso de los materiales, por resultar éstas muy esbeltas y por -- tanto ligeras, ademas, el casí nulo empleo de cimbra, reduce el tiempo de edificación permitiendonos una economía más en la estructura.

El impacto mayor, sería encaminar su uso hacía las clases de bajos recursos, para la provisión de conjuntos habitacionales, esta observación está comprobada por -- los proyectos del Sr. Buckminster Fuller en los Estados Unidos, durante la epoca de los años 60's, pues repercutió grandemente en el monopolio de la construcción al estar minimizando los costos.

Por lo que respecta a su seguridad estructural, baste una comparación burda de su resistencia con la resistencia que tiene el cascarón de un huevo.

En resumen, con esta estructura se tienen cu -- biertos requisitos tales como, estética, grandes areas cu-- biertas, estructura muy ligera, bajos costos, ahorro en --- tiempos de construcción, estructura resistente y muy poco deformable.

BIBLIOGRAFIA

Ayres Frank, Jr.- Trigonometría plana y esférica.- Ed. Mc. Graw-Hill.-México, 1970. 144-183 pp.

Blodgett, Omer W.- Design of welded structures.- The James F. Lincoln Arc Welding Foundation.- Ohio U.S.A., 1966. Seccion 5.

Buchert, Kenneth P.- Buckling of shell and shell-like ---- structures.-Ed. K.P. Buchert and associates.- Columbia Missouri U.S.A. 1973 41-66 pp.

Flügge, Guillermo.- Estática y dinámica de cascarones.- Ed. Avance.-México 1969. 37-43 pp.

Haaser, La Salle y Sullivan.- Análisis matemático (tomo II) Ed. Trillas.- México 1970.

Margarit, J y C Buxadé.- Las mallas espaciales en arquitectura.- Ed. Gustavo Gili, S.A..- Barcelona España 1972 121-158 pp.

Odone, Belluzi.- La ciencia de la construcción.- Ed Aguilar México 1970 Vol.-III 691 pp.

Paduart, A. y F.H. Turner.- Shell roof analysis.- CR Books LTD.- Londres Inglaterra 1966.- 61-92 pp.

Rainville, Earl D..- Ecuaciones diferenciales elementales.- Ed. Trillas.- México 1976.- 29-58 pp.

Salvadori, Mario George.- Diseño estructural en arquitectura.- Ed C.E.C.S.A..- México 1975.- 325-467 pp.

Turner, C.E..- Plate and shell theory.- Ed. Longmans, Green and Co. LTD. Londres Inglaterra.- 1965

U.N.A.M..- Diseño y construcción de estructuras metálicas.- U.N.A.M..- México 1978 2a. Edición 15-30 pp.

Reglamento de construcciones para el D.F..- Ed. Porrúa.- México 1976 2a. Edición 87-133 pp.