UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"REPRESENTACIONES EN SUMAS DIRECTAS DE MODULOS INYECTIVOS"

T E S I S

que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

WILLIAM JOSE GALLARDO

6697

México, D.F.

1979

INDICE

0. Preliminares.

A lo largo de este trabajo R representa un anillo con elemento unitario. Denotamos con Mod-R (R-Mod) a la categoría de los R-módulos derechos (izquierdos). Si $M \in$ Mod-R, denotamos con $E(M)$ a la cápsula inyectiva de M.

El producto de R-módulos derechos inyectivos es inyectivo. Sin embargo, la suma directa de R-módulos derechos inyectivos no es, en general, inyectivo. Tenemos ocasión de usar el siguiente teorema varias veces en lo sucesivo.

0.1. Teorema.- *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es noetheriano derecho.*

(b) *Cada suma directa de R-módulos derechos inyectivos es inyectivo.*

(c) *Cada suma directa numerable*

de R-módulos derechos inyectivos es inyectivo.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$, donde A es un conjunto y M_α es un R-módulo derecho inyectivo $\forall \alpha \in A$. Sea $I_R \subset R$ y $f: I \to M$ un homomorfismo. Como R es noetheriano, I es finitamente generado. Por lo tanto existe $X \subset A$ finito tal que $\operatorname{Im} f \subset \bigoplus_{\beta \in X} M_\beta$ que es un módulo inyectivo. Entonces f se puede extender a un homomorfismo $\bar{f}: R \to M$ tal que $\bar{f}|I = f$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ una cadena de ideales derechos de R. Sea $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Denotamos por $f_n: I \to E(R/I_n)$ a la composición $i_n \eta_n$, donde $\eta_n: I \to R/I_n$ es la proyección e $i_n: R/I_n \to E(R/I_n)$ es la inclusión $\forall n \in \mathbb{N}$. La familia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ induce un homomorfismo

$f: I \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} E(R/I_n)$. Notemos que $\operatorname{Im} f \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} E(R/I_n)$ ya que dado $x \in I$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_{k+t}$ $\forall t \in \mathbb{N}$ y $x \notin I_s$ $\forall s < k$.

Por (c), $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(R/I_n)$ es inyectivo, entonces existe $g: R \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{\infty} E(R/I_n)$ homomorfismo tal que $g|I = f$. Como R es cíclico existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(R) \subset \bigoplus_{j=1}^{n} E(R/I_j)$ y de aquí se sigue que $I_{n+1} = I_{n+t}$ $\forall t \in \mathbb{N}$ ya que si $x \in I_{n+t} - I_{n+1}$ para alguna $t \in \mathbb{N}$ entonces $0 \neq f_{n+1}(x) = p_{n+1} f(x) = p_{n+1} g(x) = 0$, donde $p_{n+1}: \prod_{m=1}^{\infty} E(R/I_m) \longrightarrow E(R/I_{n+1})$ es la proyección. Por lo tanto R es noetheriano derecho.

<u>Definición</u>.- <u>Un</u> R-<u>módulo</u> <u>derecho</u> <u>inyectivo</u> M <u>es</u> Σ-<u>inyectivo</u> <u>si</u> <u>la</u> <u>suma</u> <u>directa</u> <u>de</u> <u>un</u> <u>número</u> <u>arbitrario</u> <u>de</u> <u>copias</u> <u>de</u> M <u>es</u> <u>inyectivo</u>, <u>y</u> M <u>es</u> <u>numerablemente</u> Σ-<u>inyectivo</u> <u>si</u> <u>la</u> <u>suma</u> <u>directa</u> <u>de</u> $\aleph_0$ <u>copias</u> <u>de</u> M <u>es</u> <u>inyectivo</u>. En <u>la</u>

sección 6 usamos el siguiente teorema.

0.2. <u>Teorema</u>. - <u>Un módulo inyectivo M es Σ-inyectivo si y sólo si es numerablemente Σ-inyectivo</u>.

<u>Demostración</u>: ($\Longrightarrow$) Trivial.

($\Longleftarrow$) Sea M un módulo numerablemente Σ-inyectivo y sea $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ la suma directa de un número arbitrario de copias Q_i de M. Para cualquier $A \subset I$, sea $Q_A = \bigoplus_{\alpha \in A} Q_\alpha$, y sea $\pi_A : Q \to Q_A$ la proyección natural, entonces $\operatorname{Ker} \pi_A = Q_{I-A}$. En el caso que $A = \{a\}$, ponemos π_a en lugar de π_A.

Supongamos que Q no es inyectivo. Entonces $\exists\, S_R \subset R$ y $f : S \to Q$ un homomorfismo que no se puede extender a un homomorfismo $g : R \to Q$. En particular, $\nexists\, F \subset I$ finito tal que $f(S) \subset Q_F$, ya que Q_F es inyectivo y sumando directo de Q. Esto implica que $\exists\, A \subset I$ numerable tal que $\pi_a f \neq 0$ $\forall a \in A$, ya que como $f(S) \not\subset Q_F$ con F finito, implica que $f(S)$ intersecta al menos a un número numerable de sumandos de Q. Entonces $\pi_a \pi_A f = \pi_a f \neq 0$ $\forall\, a \in A$, por lo que $\pi_A f(S) \not\subset Q_B$ para cada $B \subset A$ finito. Como Q_A es inyectivo por hipótesis, $\exists\, h : R \to Q_A$ un homomorfismo que extiende al homomorfismo $\pi_A f : S \to Q_A$. Pero por ser $h(R)$ un submódulo cíclico de Q_A, $\exists$ $B \subset A$ finito tal que $h(R) \subset Q_B$. Entonces tenemos $\pi_A f(S) \subset h(R) \subset Q_B$ ⚡ Por lo tanto Q es inyectivo.

Aunque no usamos el siguiente teorema, lo damos por su relación con el teorema 0.2.

<u>Teorema</u>.- <u>Si</u> <u>cada</u> <u>módulo</u> <u>inyec-</u>

tivo en Mod-R es numerablemente Σ-inyectivo, entonces R es noetheriano derecho.

Demostración: Por el teorema 0.1.(c) basta probar que si $Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i$, donde Q_i es un módulo inyectivo $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces Q es inyectivo. Sabemos que $M = \prod_{i=1}^{\infty} Q_i$ es inyectivo, y, por hipótesis, una suma directa $P = \bigoplus_{j=1}^{\infty} M_j$ de un número numerable de copias $\{M_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$ de M es inyectivo. Pero M_j contiene como sumando directo una copia, digamos $Q_{j,j}$ de Q_j, $j = 1, 2, \ldots$, por lo tanto $M_j = Q_{j,j} \oplus P_j$. Entonces $P = \bigoplus_{j=1}^{\infty} M_j = \bigoplus_{j=1}^{\infty} (Q_{j,j} \oplus P_j) \cong \bigoplus_{j=1}^{\infty} Q_{j,j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} P_j$, así que Q, por ser isomorfo al sumando directo $\bigoplus_{j=1}^{\infty} Q_{j,j}$ de P, es inyectivo. Por lo tanto R es noetheriano por el teorema 0.1.

En la sección 1 usamos el siguiente teorema.

0.3. <u>Teorema</u>.- <u>Si R es un anillo noetheriano derecho, entonces cada R-módulo derecho inyectivo es suma directa de módulos inescindibles.</u>

<u>Demostración</u>: Probamos primero que cada R-módulo derecho inyectivo no cero contiene un submódulo no cero inyectivo e inescindible.

Sea $E \in$ Mod-R un inyectivo no cero. Sea $x \in E$, $x \neq 0$, por lo tanto $\langle x \rangle$ es noetheriano y $\langle x \rangle \subset E(\langle x \rangle) \subset E$. Afirmamos que $E(\langle x \rangle)$ es de rango finito, esto es, no existen sumas directas infinitas contenidas en $E(\langle x \rangle)$. Sea $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \subset E(\langle x \rangle)$, donde M_α es un módulo no cero $\forall \alpha \in I$ con I infinito. Por lo tanto $M_\alpha \cap \langle x \rangle \neq 0$ $\forall \alpha \in I$ por ser $\langle x \rangle$ esencial en $E(\langle x \rangle)$, por lo tanto $\bigoplus_{\alpha \in I} (M_\alpha \cap \langle x \rangle) \subset \langle x \rangle$. Sea $J \subset I$

numerable, $J=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. Entonces $M_{\alpha_1} \cap \langle x \rangle \subsetneq (M_{\alpha_1} \cap \langle x \rangle) \oplus (M_{\alpha_2} \cap \langle x \rangle) \subsetneq (M_{\alpha_1} \cap \langle x \rangle) \oplus (M_{\alpha_2} \cap \langle x \rangle) \oplus (M_{\alpha_3} \cap \langle x \rangle) \subsetneq \cdots$ es una cadena infinita en $\langle x \rangle$ que no se estaciona ∇. Por lo tanto $E(\langle x \rangle)$ es de rango finito. Si $E(\langle x \rangle)$ no es inescindible, entonces $E(\langle x \rangle) = E_1 \oplus E_2$, donde E_1 y E_2 son submódulos no cero. Si alguno E_1 o E_2 es inescindible, tenemos un submódulo inyectivo e inescindible no cero de E. Si E_1 y E_2 no son inescindibles entonces $E(\langle x \rangle) = E_1' \oplus E_1'' \oplus E_2$, donde E_1' y E_1'' son submódulos no cero. Si E_1' o E_1'' son inescindibles, tenemos un submódulo inyectivo e inescindible no cero de E. En caso contrario continuamos este proceso. Como $E(\langle x \rangle)$ es de rango finito, este proceso debe terminar, por lo tanto E tiene un submódulo no cero inyectivo e inescindible. Consideramos la familia $\mathcal{A}$ de los submódulos de E que son suma directa de submódulos no cero inyectivos e inescindibles de E. Como $\mathcal{A}$ es una familia inductiva, por el lema de Zorn existe un submódulo C de E que es máximo con respecto a la propiedad de ser suma directa de submódulos inyectivos e inescindibles. C es inyectivo ya que R es noetheriano, por lo tanto $E = C \oplus D$, donde D es un submódulo de E. Como D es un sumando directo de un inyectivo, es inyectivo. Si $D \neq 0$, entonces contiene un submódulo inyectivo e inescindible E_0 tal que $D = E_0 \oplus K$, por lo tanto $E = C \oplus (E_0 \oplus K) = (C \oplus E_0) \oplus K$! ya que C es máximo. Por lo tanto $D = 0$.

1. Caracterizaciones de Anillos Noetherianos.

1.1. Teorema.- *R es un anillo noetheriano derecho si y sólo si existe un número cardinal c tal que cada R-módulo derecho inyectivo es una suma directa de módulos cada uno generado por c elementos.*

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si R es noetheriano derecho, entonces por el teorema 0.3, cada módulo derecho inyectivo es suma directa de módulos inyectivos e inescindibles. Como un módulo derecho inyectivo e inescindible D es la cápsula inyectiva de cualquier submódulo cíclico no cero, basta que demostremos que existe un número cardinal c tal que cada módulo derecho inyectivo e inescindible está generado por c elementos. Como la colección de todas las clases de isomorfismo de módulos cíclicos es un conjunto, se sigue que la colección $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ de todas las clases de isomorfismo de módulos inyectivos e inescindibles es un conjunto. Si $M \in \mathfrak{M}_i$ está generado por c_i elementos, entonces $c = \sum_{i \in I} c_i$, la suma cardinal, es el cardinal que deseamos.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe un número cardinal con esta propiedad. Como R es noetheriano derecho si y sólo si cada suma directa de módulos inyectivos es inyectivo, por nuestra hipótesis basta que demostremos que si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, donde M_i es un módulo inyectivo generado por c elementos $\forall i \in I$, entonces M es inyectivo. Por simplicidad podemos suponer que c es un número cardinal infinito mayor o igual que $|R|$, el cardinal de R. Podemos suponer que I es infinito.

Sea B un conjunto tal que $|B| > 2^{cd}$, donde $d = |I|$. Para cada $i \in I$, sea $N_i = M_i^B$, y sea $P = \prod_{i \in I} N_i$. N_i es inyectivo $\forall i \in I$ y P es inyectivo. Por hipótesis, $P = \bigoplus_{g \in G} Q_g$, donde Q_g es un módulo generado por c elementos $\forall g \in G$. Le damos un buen orden a I y sea $b_1 \in B$, $i_{b_1} : M_1 \to N_1$ y $j_1 : N_1 \to P$ las inclusiones naturales. Como M_1 está generado por c elementos y como c es infinito, con estas inclusiones cada elemento de M_1 está contenido en una suma directa finita de $\{Q_g \mid g \in G\}$, entonces $j_1 i_{b_1}(M_1) \subset P_1 = \bigoplus_{g \in G_1} Q_g$, donde $G_1 \subset G$ y $|G_1| = c$. Por lo tanto P_1 está generado por $c^2 = c$ elementos, y en consecuencia $|P_1| \leq c|R| \leq c^2 = c$, así que P_1 tiene a lo más 2^c subconjuntos. Como $\{j_2 i_b(M_2) \cap P_1 \mid b \in B\}$ es una familia directa de submódulos de P_1, y como $|B| > 2^c$, entonces $\exists\, b_2 \in B$ tal que $j_2 i_{b_2}(M_2) \cap P_1 = 0$. Sea $\Phi : P \to \bigoplus_{g \notin G_1} Q_g$ la proyección natural, entonces $\Phi | j_2 i_{b_2}(M_2)$ es un monomorfismo, por lo que $\Phi(j_2 i_{b_2}(M_2)) \subset P_2 = \bigoplus_{g \in G_2} Q g$, donde $G_2 \subset G$, $|G_2| = c$ y $G_1 \cap G_2 = \phi$.

Para $\alpha \in I$, supongamos que existen subconjuntos mutuamente ajenos $\{G_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ de G tales que $|G_\gamma| = c$ y además que existe $b_\gamma \in B$ tal que $j_\gamma i_{b_\gamma}(M_\gamma) \subset P_\gamma = \bigoplus_{g \in G_\gamma} Q g$ $\forall \gamma < \alpha$. Sea $H_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma$, y sea $S_\alpha = \bigoplus_{g \in H_\alpha} Q g = \bigoplus_{\gamma<\alpha} P_\gamma$. Como cada P_γ está generado por c elementos, y como $|H_\alpha| \leq c \cdot d$, entonces $|S_\alpha| \leq c \cdot d \cdot c = c \cdot d$, así que S_α tiene a lo más 2^{cd} subconjuntos. Como $|B| > 2^{cd}$, por el razonamiento anterior, existe $b_\alpha \in B$ tal que $j_\alpha i_{b_\alpha}(M_\alpha) \cap S_\alpha = 0$. Así que existe $G_\alpha \subset G$ con $G_\alpha \cap H_\alpha = \phi$, $|G_\alpha| = c$ y tal que $j_\alpha i_{b_\alpha}(M_\alpha) \subset P_\alpha = \bigoplus_{g \in G_\alpha} Q g$. Por el Principio de Inducción Transfinita, G_α y P_α existen $\forall \alpha \in I$. Sea $H = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Entonces $P = (\bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha) \oplus (\bigoplus_{g \notin H} Q g)$ como $j_\alpha i_{b_\alpha}(M_\alpha) \subset P_\alpha$ y $j_\alpha i_{b_\alpha}(M_\alpha)$ es inyectivo, entonces $j_\alpha i b_\alpha(M_\alpha)$ es sumando directo de P_α $\forall \alpha \in I$. Como $\bigoplus_{\alpha\in I} P_\alpha$ es un sumando directo de P, y P es inyectivo, implica que $\bigoplus_{\alpha\in I} j_\alpha i b_\alpha(M_\alpha)$ es un sumando directo de P y por lo tanto inyectivo. Como $\bigoplus_{\alpha\in I} j_\alpha i b_\alpha(M_\alpha) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha = M$, concluimos que M es inyectivo.

1.2. Corolario.- Un anillo R es noetheriano derecho si y sólo si existe un número cardinal d tal que cada módulo inyectivo en Mod-R es suma directa de cápsulas inyectivas de módulos generados por d elementos.

Demostración: $(\Rightarrow)$ Inmediato del teorema anterior.

$(\Leftarrow)$ Sea $F = R^{(I)}$, donde $|I| = d$. Entonces cada módulo inyectivo es suma directa de cápsulas inyectivas de módulos de la forma F/K, donde K es un submódulo de F. Como $\{F/K \mid K$ es submódulo de $F\}$

es un conjunto, la familia $\{E(F/K) \mid K$ es submódulo de $F\}$ es un conjunto. Si $E(F/K)$ está generado por c_K elementos, entonces cada módulo en $\{E(F/K) \mid K$ es submodulo de $F\}$ está generado por $c = \sum c_K$ elementos. Así que existe un cardinal c con la propiedad establecida en el Teorema anterior, por lo tanto R es noetheriano derecho.

1.3. Corolario.- (Teorema de Papp). Sea R un anillo. Si cada módulo inyectivo en Mod-R es suma directa de módulos inescindibles, entonces R es noetheriano derecho.

Demostración: Sea N un módulo inyectivo e inescindible, entonces N es la cápsula inyectiva de cualquier submódulo cíclico no cero, así que R es noetheriano derecho por el corolario anterior.

Definición.- Una colección de módulos es una base de descomposición inyectiva para Mod-R, si cada módulo inyectivo en Mod-R es suma directa de cápsulas inyectivas de módulos en esta colección. En estos términos el corolario 1.2. dice

1.4. Corolario.- Un anillo R es noetheriano derecho si y sólo si existe un número cardinal d tal que los módulos en Mod-R generados por d elementos forman una base de descomposición inyectiva para Mod-R.

Existe una caracterización similar para los anillos artinianos. Para esto necesitamos algunos resultados.

Definición.- Un R-módulo derecho M es semiartiniano si cada imagen homomorfa no cero de M tiene zoclo no cero.

B. Stenstrom [12] prueba en la

proposición 8.2.5 que un anillo R es semi-artiniano si y sólo si cada R-módulo derecho lo es; y en la proposición 8.2.1. prueba que un R-módulo derecho semi-artiniano y noetheriano es artiniano. C. Hopkins [7] y J. Levitzki [9] prueban que cada anillo artiniano derecho es noetheriano derecho.

1.5. <u>Corolario</u>.- <u>Un anillo R es artiniano derecho si y sólo si los módulos simples en Mod-R forman una base de descomposición inyectiva para Mod-R.</u>

<u>Demostración</u>: Si R es artiniano derecho entonces R es noetheriano derecho, así que cada módulo inyectivo M ∈ Mod-R es suma directa de módulos inyectivos e inescindibles. Si M es un módulo inyectivo e inescindible, entonces M es la cápsula inyectiva de cualquier submódulo no cero.

Como R es artiniano derecho, cada módulo no cero contiene un submódulo simple. En consecuencia, cada módulo inyectivo e inescindible es la cápsula inyectiva de un módulo simple.

Inversamente, si los módulos simples en Mod-R forman una base de descomposición inyectiva para Mod-R, entonces R es noetheriano por el corolario anterior. Entonces, por el resultado de B. Stenström, es suficiente probar que R es semiartiniano.

Sea M un R-módulo derecho no cero, y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Como por hipótesis el zoclo de $E(M)$ es distinto de cero, entonces el zoclo de M es distinto de cero, por lo tanto R es semiartiniano.

2. Cápsulas Inyectivas de Módulos Finitamente Generados.

En esta sección encontramos la siguiente condición: Si C es un módulo cíclico o finitamente generado, entonces $E(C)$ es finitamente generado. Esta condición, para anillos artinianos, fue estudiada por Rosenberg y Zelinsky. Aquí probamos que cualquier anillo noetheriano que satisface esta condición es artiniano.

Definición.- Un anillo R es semiprimo si no tiene ideales nilpotentes no cero.

2.1. Lema.- Sea R un anillo semiprimo y noetheriano derecho tal que $E(R)$ es finitamente generado en Mod-R, entonces R es semisimple, y $R = E(R)$.

Demostración: Por el teorema de Goldie [14], R tiene un único anillo clásico de cocientes derecho $Q=\{ab^{-1} \mid a,b\in R$ y b es regular$\}$ que es un anillo semisimple, ya que R es semiprimo y noetheriano derecho. Si $q=ab^{-1}\in Q$ y $q\neq 0$, entonces $a=qb$ es un elemento no cero de $qR\cap R$, lo cual prueba que R es esencial en Q, y por lo tanto $Q_R\subset E(R)$. Ahora sea $x\in E(R)$, entonces $(R:x)$ es esencial en R y por el teorema de Goldie existe $b\in(R:x)$ regular y $xb=c\in R$, entonces $x=cb^{-1}\in Q$. Por lo tanto $Q_R=E(R)$.

Como $E(R)$ es finitamente generado, es noetheriano. Si $b\in R$ es regular, entonces $b^{-1}\in Q$, y $b^{-n}a=b^{-(n+1)}(ba)$ $\forall a\in R$, lo que prueba que $R\subset b^{-1}R\subset\cdots\subset b^{-n}R\subset\cdots$, por lo tanto $\exists\, n\in\mathbb{N}$ tal que $b^{-n}R=b^{-(n+1)}R$, así que $b^{-(n+1)}=b^{-n}a$ para alguna $a\in R$. Pero entonces $b^{-1}=a\in R$. Como esto es válido $\forall\, b\in R$ regular, se sigue que $Q=R$, esto es, R es semisimple.

Definición.- Un anillo R es semiprimario si $R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es nilpotente.

C. Hopkins[7] prueba que un anillo semiprimario R es noetheriano derecho si y sólo si es artiniano derecho. B. Stenstrom[12] prueba que en un anillo noetheriano derecho R, el radical primo N, es nilpotente y además $N = J(R)$.

2.2. Teorema.- Si R es un anillo noetheriano derecho, y N es su ideal nilpotente máximo, y si $E(R)$ es finitamente generado entonces R es artiniano derecho.

Demostración.- Sea Q la cápsula inyectiva de R/N en Mod-R/N. Entonces Q es un R-módulo que es una extensión esencial de R/N. Así que podemos considerar las inclusiones de R-módulos $R/N \subset Q \subset E(R/N)$.

Como $E(R/N)$ es finitamente generado y R es noetheriano, entonces Q es finitamente generado como R-módulo y por lo tanto como R/N-módulo. Por el lema anterior, R/N es semisimple. Esto implica que R es un anillo semiprimario y noetheriano derecho, así que por el teorema de Hopkins R es artiniano derecho.

2.3. Corolario.- Si R es noetheriano derecho, y si las cápsulas inyectivas de módulos cíclicos (finitamente generados) en Mod-R son finitamente generados, entonces R es artiniano derecho.

Demostración: R/N es cíclico.

2.4. Proposición.- Sean a, b números cardinales con $a > b$. Supongamos que $C \in$ Mod-R está generado por b elementos y que $E(C)$ está contenido en una suma directa de módulos cada uno generado por menos de a elementos. Entonces

(i) si $a = \aleph_0$, entonces $E(C')$ es finitamente generado;

(ii) si $b \geq \aleph_0$, entonces $E(C')$ está generado por a elementos.

Demostración: Sea $E(C') \subset \bigoplus_{i \in I} Q_i$, donde $\{Q_i \mid i \in I\}$ es una familia de módulos en Mod-R cada uno generado por a elementos. Como cada uno de los generadores de C está contenido en la suma directa de un número finito de Q_i, se sigue que $C \subset K = \bigoplus_{i \in I'} Q_i$, donde $I' \subset I$ con las propiedades:

$$b < \aleph_0 \Rightarrow c = |I'| < \aleph_0$$

$$b \geq \aleph_0 \Rightarrow c = |I'| = b$$

Ahora sea $f : \bigoplus_{i \in I} Q_i \to K$ la proyección natural. Como $\operatorname{Ker} f \cap C' = 0$, entonces $\operatorname{Ker} f \cap E(C') = 0$, por lo tanto $f / E(C')$ es monomorfismo. Si $a = \aleph_0$, entonces $b < \aleph_0$ y $c < \aleph_0$, así que K es suma directa de un número finito de módulos finitamente generados, esto es K es finitamente generado. Pero entonces también lo es cualquier sumando directo de K. Como $f(E(C)) \cong E(C)$ y $f(E(C))$ es sumando directo de K, entonces $E(C)$ es finitamente generado.

Si $b \geq \aleph_0$, entonces $c = b$, así que K está generado por $ba = a$ elementos, por lo tanto $E(C)$ también está generado por a elementos.

Si R es un anillo casi Frobenius, entonces cada módulo inyectivo e inescindible es isomorfo a un sumando directo de R. Como cada módulo inyectivo sobre un anillo casi Frobenius es proyectivo (sección 5) esto es un caso particular del siguiente,

2.5. <u>Corolario</u> - <u>Sea</u> R <u>un</u> <u>anillo</u>. <u>Entonces</u> <u>un</u> R-<u>módulo</u> <u>derecho</u> <u>proyectivo</u>, <u>inyectivo</u> <u>e</u> <u>inescindible</u> M <u>es</u> <u>isomorfo</u>

a un sumando directo de R.

Demostración: Sea $M = E(C)$, donde $C_R \subset M$ es cíclico. Como M es proyectivo, $E(C) \subset R^{(X)}$, y por la proposición anterior $E(C) \subset R^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Luego existe $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que R^k contiene una copia isomorfa B de $E(C)$. Como B es inescindible e inyectivo, es uniforme. Sea $i_\ell : R \to R^k$ la inclusión $\forall\, \ell = 1, \ldots, k$. Nótese que $(i_\ell(R) \cap B) \cap (i_{\ell'}(R) \cap B) = 0$ si $\ell \neq \ell'$, por lo tanto $k = 1$. Por ser B inyectivo, es sumando directo de R, así que $E(C) = M$ es isomorfo a un sumando directo de R.

3.- Sumas Directas de Módulos Finita y Numerablemente Generados.

Un teorema de Kaplansky [4] establece que si un módulo M es suma directa de módulos numerablemente generados entonces cada sumando directo de M tiene la misma propiedad. Usamos esto para probar el siguiente teorema que generaliza el teorema de Cohen-Kaplansky [4] y Chase [3].

3.1. Teorema.- Si cada módulo en Mod-R está contenido en una suma directa de módulos finitamente generados, entonces R es artiniano derecho.

Demostración: Si $M \in$ Mod-R es inyectivo, entonces M es sumando directo de cada módulo que lo contiene, así que M es suma directa de módulos numerablemente generados por el teorema de Kaplansky. Entonces el teorema 1.1 implica que R

es noetheriano derecho. Ahora sea $C \in$ Mod-R cíclico. Entonces $E(C)$ está contenido en una suma directa de módulos finitamente generados, así que $E(C)$ es finitamente generado por la proposición 2.4. Entonces R es artiniano derecho por el corolario 2.3.

3.2. Corolario.- Sea R un anillo conmutativo. Entonces R es artiniano si y sólo si cada R-módulo inyectivo es suma directa de módulos finitamente generados.

Demostración: $(\Leftarrow)$ Se sigue del teorema anterior.

$(\Rightarrow)$ Sea R un anillo conmutativo y artiniano. Entonces, como R es noetheriano, cada módulo inyectivo es suma directa de módulos inescindibles, por el teorema 0.3. Por un teorema de Morita [11], cada módulo inyectivo e inescindible sobre R es finitamente generado.

C. Walker [13] ha generalizado el teorema de Kaplansky como sigue: Si M es un módulo que es suma directa de módulos cada uno generado por c elementos, donde c es un número cardinal infinito, entonces cada sumando directo de M es suma directa de módulos cada uno generado por c elementos. Usamos este teorema para generalizar el teorema 1.1.

3.3. Teorema.- Un anillo R es noetheriano derecho si y sólo si existe un número cardinal c tal que cada R-módulo derecho está contenido en una suma directa de módulos generados por c elementos.

Demostración: ($\Rightarrow$) Si R es noetheriano derecho, el teorema 1.1 y el hecho que cada módulo está contenido en un injectivo nos da la c deseada.

($\Longrightarrow$) Supongamos que existe tal c. Entonces el teorema de Walker, junto con el teorema 1.1 implican que R es noetheriano derecho.

4. Cogeneradores.

En la sección 5 caracterizamos un anillo R con la propiedad que cada módulo injectivo es proyectivo. Como cada módulo sobre R está contenido en un módulo injectivo, se sigue que cada módulo está contenido en una suma directa de copias de R. En particular, R es entonces un cogenerador. Esta sección está dedicada a probar que si R es un cogenerador y $R/J(R)$, es semisimple, entonces R es autoinjectivo. Este último hecho facilita la caracterización arriba mencionada.

Definición. - Un módulo $C \in$ Mod-R es un cogenerador si tiene una de las siguientes propiedades equivalentes:

(1) Para cada $M \in$ Mod-R existe un conjunto X y un monomorfismo $f: M \longrightarrow C^X$.

(2) Si $M, N \in$ Mod-R, y $f: M \to N$ es un homomorfismo no cero, entonces existe un homomorfismo $g: N \to C$ tal que la composición $g \cdot f: M \to C$ es no cero.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $M, N \in$ Mod-R y $f: M \to N$ un homomorfismo no cero. Por (1) existe $h: N \to C^{X}$ monomorfismo para algún conjunto X. Entonces $hf \neq 0$ y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $p_x h f \neq 0$, donde $p_x: C^X \to C$ es la proyección. Ahora sea $g = p_x h$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $M \in$ Mod-R, $H = \mathrm{Hom}_R(M, C)$ y $f: M \to C^H$ el homomorfismo tal que $f(m)(h) = h(m)$ $\forall\, h \in H$ y $m \in M$. Supongamos que $\mathrm{Ker}\, f \neq 0$, entonces $i: \mathrm{Ker}\, f \to M$, la inclusión, es no cero. Por (2) existe $g: M \to C$ tal que $gi \neq 0$. Sea $m \in \mathrm{Ker}\, f$, entonces $f(m) = 0$, esto es, $0 = f(m)(h)$ $\forall\, h \in H$. En particular $0 = f(m)(g) = g(m)$, por lo tanto $gi = 0$ ☿

Entonces $\mathrm{Ker}\, f = 0$, esto es, f es monomorfismo.

También necesitamos el concepto dual de generador.

Definición.- Un módulo $G \in$ Mod-R es un generador si tiene una de las siguientes propiedades equivalentes:

(1) Para cada $M \in$ Mod-R existe un conjunto X y un epimorfismo $f: G^{(X)} \longrightarrow M$.

(2) Si $M, N \in$ Mod-R y $f: M \longrightarrow N$ es un homomorfismo no cero, entonces existe $g: G \longrightarrow M$ tal que la composición $fg \neq 0$.

Demostración: (1) $\Longrightarrow$ (2) Sean $M, N \in$ Mod-R y $f: M \to N$ un homomorfismo no cero, entonces existe un conjunto X y un epimorfismo $h: G^{(X)} \longrightarrow M$. Como $fh \neq 0$, existe $x \in X$ tal que $fhi_x \neq 0$, donde $i_x: G \longrightarrow G^{(X)}$ es la inclusión. Ahora sea $g = hi_x$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $M \in$ Mod-R, $X = \mathrm{Hom}_R(G, M)$ y $f: G^{(X)} \longrightarrow M$ el homomorfismo inducido por los homomorfismos $x: G \longrightarrow M$ $\forall\, x \in X$.

Supongamos que Coker $f \neq 0$, entonces la proyección $p: M \to \operatorname{Coker} f$ es no cero. Por (2) existe un homomorfismo $g: G \to M$ tal que $pg \neq 0$. Pero $g = f i_g$, donde $i_g : G \to G^{(X)}$ es la inclusión. Entonces $pg = p(f i_g) = (pf) i_g = 0$ ☇ Por lo tanto coker $f = 0$, esto es, f es un epimorfismo.

También usamos las siguientes caracterizaciones.

Proposición.- (1) Un módulo inyectivo $M \in$ Mod-R es un generador si y sólo si M contiene una copia de cada módulo simple en Mod-R. (2) Un módulo proyectivo $P \in$ Mod-R es un generador si y sólo si cada módulo simple en Mod-R es una imagen homomorfa de P.

Demostración:

(1) ($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Sea $N \in$ Mod-R. Para cada $x \in N$, Supongamos que $\operatorname{Coker} f \neq 0$, entonces la proyección $p: M \to \operatorname{Coker} f$ es no cero. Por (2) existe un homomorfismo $g: G \to M$ tal que $pg \neq 0$. Pero $g = f i_g$, donde $i_g : G \to G^{(X)}$ es la inclusión. Entonces $pg = p(f i_g) = (pf) i_g = 0$ ↯ Por lo tanto $\operatorname{coker} f = 0$, esto es, f es un epimorfismo.

También usamos las siguientes caracterizaciones.

Proposición.- (1) Un módulo inyectivo $M \in \text{Mod-}R$ es un generador si y sólo si M contiene una copia de cada módulo simple en Mod-R. (2) Un módulo proyectivo $P \in \text{Mod-}R$ es un generador si y sólo si cada módulo simple en Mod-R es una imagen homomorfa de P.

Demostración:

(1) $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Sea $N \in \text{Mod-}R$. Para cada $x \in N$,

$x \neq 0$ existe un epimorfismo $f : \langle x \rangle \to S$, donde S es algún módulo simple. Entonces el homomorfismo $gf : \langle x \rangle \to M$ es no cero, donde $g : S \to M$ es un monomorfismo. Como M es inyectivo, existe un homomorfismo $h_x : N \to M$ tal que $h_x | \langle x \rangle = gf$. Por la propiedad universal del producto directo existe un homomorfismo $h : N \to M^N$ tal que $p_x h = h_x \ \forall x \in N$, donde $p_x : M^N \to M$ es la proyección natural. Sea $x \in N$, $x \neq 0$, entonces $p_x h(x) = h_x(x) = gf(x) \neq 0$, por lo tanto $h(x) \neq 0$, esto es, $\operatorname{Ker} h = 0$. Así que M es un cogenerador.

(2) ($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Como R_R es un generador de Mod-R, basta probar que existe un conjunto X y un epimorfismo $\varphi : P^{(X)} \to R$.

Sea $Tr_R(P) = \Sigma \{ \operatorname{Im} h \mid h \in \operatorname{Hom}_R(P, R) \}$. Supongamos que $Tr_R(P) \neq R$, entonces existe $I_R \subset R$

máximo tal que $Tr_R(P) \subset I$. Puesto que R/I es un R-módulo simple, existe un epimorfismo $f: P \to R/I$. Como P es proyectivo, existe $\bar{f}: P \to R$ tal que $p\bar{f} = f$, donde $p: R \to R/I$ es la proyección natural. Pero esto es una contradicción ya que $\operatorname{Im} \bar{f} \subset Tr_R(P) \subset I$, por lo tanto $Tr_R(P) = R$. Sea ahora $\varphi: P^{(\underline{X})} \to R$ el homomorfismo inducido por $\underline{X} = Hom_R(P, R)$, y sea $r \in R$, por lo tanto existe $x \in P$ y $h \in Hom_R(P, R)$ tal que $h(x) = r$, Entonces $\varphi(i_h(x)) = h(x) = r$, donde $i_h: P \to P^{(\underline{X})}$ es la inclusión, por lo tanto φ es epimorfismo.

Para el teorema siguiente necesitamos dos resultados sobre módulos proyectivos.

I. <u>Sean</u> P <u>y</u> Q <u>módulos proyectivos finitamente generados en</u> Mod-R, <u>y sea</u> $J = J(R)$. <u>Entonces</u> $P/PJ \cong Q/QJ \iff P \cong Q$.

<u>Demostración</u>: Sean $\alpha_1: P \to P/PJ$,

$\alpha_2 : Q \to Q/QJ$ las proyecciones, y sea $f : P/PJ \cong Q/QJ$. Como P es proyectivo, existe un homomorfismo $g : P \to Q$ tal que $\alpha_2 g = f\alpha_1$. Para cada $x \in Q$, existe $y \in P$ tal que $f\alpha_1(y) = \alpha_2(x)$. Entonces $\alpha_2 g(y) = f\alpha_1(y)$, $\therefore \alpha_2(x - g(y)) = 0$, luego $x - g(y) = z \in QJ$, así que $x = z + g(y)$, esto es, $Q = QJ + \operatorname{Im} g$ $\therefore Q = \operatorname{Im} g$, es decir, g es un epimorfismo. Como $\operatorname{Ker} g \subset PJ$ y la sucesión exacta $0 \to \operatorname{Ker} g \to P \xrightarrow{g} Q \to 0$ se escinde, esto es $P = \operatorname{Ker} g \oplus P'$, donde $P' \cong Q$, entonces $P = P'$ $\therefore \operatorname{Ker} g = 0$ $\therefore g$ es isomorfismo.

II. <u>Sea P un módulo proyectivo finitamente generado en Mod-R</u>, $\Lambda = \operatorname{End}_R P$, $Q = J(\Lambda)$ y $J = J(R)$. <u>Entonces el anillo $\operatorname{End}_R(P/PJ)$ es isomorfo al anillo cociente</u> Λ/Q.

<u>Demostración</u>: Sea $f : P \to P$ un

homomorfismo, $x \in P$ y $a \in J$, entonces $f(xa) = f(x)a \in PJ$, esto es $f(PJ) \subset PJ$, por lo tanto $\pi f(PJ) = 0$, donde $\pi : P \to P/PJ$ es la proyección. Por lo tanto existe $g : P/PJ \to P/PJ$ un homomorfismo tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & P/PJ \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "\pi"] & P/PJ \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi : \Lambda \to \mathrm{End}_R(P/PJ)$ el homomorfismo tal que $\varphi(f) = g$. Como P es proyectivo, φ es un epimorfismo. $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{f \in \Lambda \mid f(P) \subset PJ\} = Q$, así que $\Lambda/Q \cong \mathrm{End}_R(P/PJ)$.

4.1. <u>Teorema</u>.- <u>Si</u> Mod-R <u>tiene un cogenerador proyectivo finitamente generado</u> P, <u>y si</u> $R/J(R)$ <u>es semisimple, entonces</u> P y R <u>son inyectivos en</u> Mod-R.

<u>Demostración</u>: Si U es cualquier módulo simple en Mod-R, $E(U)$ su cápsula

inyectiva y $g: E(U) \to P$ un homomorfismo tal que $g(U) \neq 0$, entonces $\operatorname{Ker} g \cap U = 0$ $\therefore \operatorname{Ker} g = 0 \therefore g$ es monomorfismo.

Como R/J es semisimple por hipótesis, existe sólo un numero finito de módulos simples no isomorfos $U_1, \ldots$ $\ldots, U_n$. Por lo que hemos probado podemos suponer que $E(U_1), \ldots, E(U_n)$ están contenidos en P. Como estos módulos son inyectivos, son sumandos directos de P, por lo tanto son finitamente generados y proyectivos. Como $U_1, \ldots, U_n$ son submódulos simples no isomorfos de P, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$. En consecuencia $\sum_{i=1}^{n} E(U_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E(U_i) = C$. Más aún, C, por ser suma directa de módulos inyectivos y proyectivos, es inyectivo y proyectivo. Como U_i es un módulo simple, $E(U_i)$ es inescindible, así que $\Lambda_i = \operatorname{End}_R E(U_i)$ es un anillo local. Por II $\Lambda_i / Q_i \cong \operatorname{End}_R \left(E(U_i) / E(U_i)J \right)$, donde $Q_i = J(\Lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Como $E(U_i)/E(U_i)J$ es un módulo semisimple cuyo anillo de endomorfismos es un anillo con división isomorfo a Λ_i/Q_i, entonces $E(U_i)/E(U_i)J$ es un módulo simple. Como $E(U_i)$ es finitamente generado y $E(U_i) \ncong E(U_j)$ $\forall i \neq j$, entonces por I $E(U_i)/E(U_i)J \ncong E(U_j)/E(U_j)J$ $\forall i \neq j$. Así, $\{E(U_1)/E(U_1)J, \ldots, E(U_n)/E(U_n)J\}$ es un conjunto de n módulos simples no isomorfos. Por lo tanto cada módulo simple es imagen homomorfa de C, es decir, C es un generador proyectivo de Mod-R. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y $f : C^k \to R$ un epimorfismo, así que R es isomorfo a un sumando directo de R^k por ser proyectivo, por lo tanto es inyectivo. Como P es finitamente generado y proyectivo, el mismo argumento demuestra que P es inyectivo.

4.2. <u>Corolario</u>.- <u>Si</u> R <u>es un cogenerador</u>

de Mod-R, y si $R/J(R)$ es semisimple, entonces R es autoinyectivo derecho.

5. Una Caracterización de Anillos Casi-Frobenius.

Si X es un subconjunto de un anillo R, sea $r(X) = \{a \in R \mid Xa = 0\}$ y $l(X) = \{a \in R \mid aX = 0\}$. Cualquier ideal derecho (izquierdo) de R de la forma $r(X)$ ($l(X)$) decimos que es un anulador derecho (izquierdo)

Definición.- Un anillo es QF, es decir, casi-Frobenius si:

(1) cada ideal derecho de R es un anulador derecho;

(2) cada ideal izquierdo de R es un anulador izquierdo;

(3) R es artiniano derecho (o izquierdo).

Ikeda [8], y Eilenberg-Nakayama [5] demuestran la equivalencia de las siguientes condiciones:

(1) R es QF.

(2) R es autoinyectivo derecho y arti-

mismo derecho.

5.1. Proposición.- Las siguientes condiciones sobre un anillo R son equivalentes:

(1) Cada módulo cíclico en Mod-R está contenido en un módulo proyectivo en Mod-R.

(2) Cada ideal derecho de R es el anulador derecho de un subconjunto finito de R.

Cuando (1) o (2) ocurren, entonces cada módulo cíclico está contenido en un módulo libre finitamente generado.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $A_R \subset R$ y $f: R/A \longrightarrow F$ un monomorfismo, donde $F \in$ Mod-R es libre. Como R/A es cíclico, podemos suponer que $F \cong R^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Si escribimos $1 + A = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, donde $x_i \in R$, $i = 1, \dots, n$, y si $r \in R$, entonces $r + A = (x_1 r, \dots, x_n r)$. Así que $r \in A$ si y sólo si $x_i r = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$. Entonces $A = r(\underline{X})$, donde $\underline{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Cada R-módulo cíclico tiene la forma R/A para algún ideal derecho A de R. Ahora $A = r(X)$ para algún subconjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de R. Entonces el homomorfismo $h : R/A \to R^n$ tal que $h(r+A) = (x_1 r, \ldots, x_n r)$ es monomorfismo. Esto prueba además la última afirmación.

El siguiente resultado se prueba de manera similar.

5.2. Proposición.- Las siguientes condiciones sobre un anillo R son equivalentes:

(1) Cada módulo cíclico en Mod-R, está contenido en un producto directo de copias de R.

(2) Cada ideal derecho de R es un anulador derecho.

5.3. Teorema.- Un anillo R es QF si y sólo si cada R-módulo derecho inyectivo es proyectivo.

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que R es QF, y sea M cualquier R-módulo derecho inyectivo. Como R es artiniano derecho, es noetheriano derecho, así que M es suma directa de módulos inyectivos e inescindibles. Por lo tanto basta que lo probemos en el caso cuando M es un módulo inyectivo e inescindible. Sea $M = E(C)$, donde C es cualquier submódulo simple de M. Por la proposición 2.5, $C \subset R^X$ para algún conjunto X, por lo tanto existe $x \in X$ tal que $p_x(C) \neq 0$, donde $p_x : R^X \longrightarrow R$ es la proyección, y entonces $p_x|C$ es monomorfismo, por lo tanto $E(C) \subset R$ ya que R es inyectivo, esto es, $M = E(C)$ es sumando directo de R $\therefore$ M es proyectivo.

($\Leftarrow$) Si cada módulo inyectivo en Mod-R es proyectivo, entonces cada módulo en Mod-R está contenido en un módulo libre, en particular, está contenido en una suma directa de módulos cíclicos así que R es artiniano derecho por el teorema 3.1. Pero como cada $M \in$ Mod-R está contenido en un producto directo, de hecho suma directa de copias de R, entonces R es un cogenerador de Mod-R y $R/J(R)$ es semisimple por ser R artiniano. Así que por el corolario 4.2., R es auto inyectivo derecho y por el teorema de Ikeda R es QF.

5.4. <u>Corolario</u>.- <u>Un anillo artiniano</u> R <u>es un cogenerador de</u> Mod-R <u>sí y sólo si</u> R <u>es</u> QF.

<u>Demostración</u>: Inmediato de la demostración del teorema 5.3.

5.5. <u>Teorema</u>.- <u>Un anillo</u> R <u>es</u> QF <u>sí y sólo si cada</u> R-<u>módulo derecho inyectivo es suma directa de módulos cíclicos que</u>

<u>son isomorfos a ideales derechos principales e inescindibles de R.</u>

<u>Demostración</u>: Si R es QF y M_R es inyectivo, entonces $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ donde M_i es un módulo inyectivo e inescindible $\forall i \in I$. Pero cada M_i es proyectivo por la proposición 5.3, y por lo tanto es isomorfo a un ideal derecho principal e inescindible por el corolario 2.5

($\Leftarrow$) Cada ideal derecho inyectivo de R es proyectivo

5.6. <u>Corolario</u>.- <u>Un anillo</u> R <u>es</u> QF <u>si y sólo si cada</u> R- <u>módulo derecho está contenido en un</u> R-<u>módulo derecho libre</u>.

<u>Demostración</u>: Inmediato del teorema 5.3.

5.7. <u>Corolario</u>.- <u>Si cada</u> R-<u>módulo derecho (inyectivo) está contenido en una suma directa de ideales derechos,</u>

entonces R es QF.

Demostración: Trivial.

5.8. Corolario.- Un anillo R es QF si y sólo si R es noetheriano derecho e izquierdo y R es un cogenerador de Mod-R.

Demostración: ($\Rightarrow$) Sólo nos falta demostrar que R es noetheriano izquierdo. Sea $_R I \subset R$. Entonces $r(I)$ es un ideal derecho de R. Por la proposición 5.1. existe $X \subset R$ finito, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $r(I) = r(x_1, \ldots, x_n) = r(Rx_1 + \cdots + Rx_n)$. Ahora $I = l(r(I)) = l(r(Rx_1 + \cdots + Rx_n)) = Rx_1 + \cdots + Rx_n$ $\therefore$ I es finitamente generado $\therefore$ R es noetheriano izquierdo.

($\Leftarrow$) Como R es un cogenerador de Mod-R, entonces para cada N_R existe $f: N \to R^X$ monomorfismo, en particular, si N es cíclico, entonces por la proposición 5.2., para cada $I_R \subset R$ $\exists S \subset R$ tal que $I = r(S)$ $\therefore$ $I = r(RS)$.

Supongamos que $I_1 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$ es una cadena de ideales derechos de R $\therefore$ $I_j = r(K_j)$ y $K_1 \subset \cdots \subset K_k \subset \cdots$, donde K_j es un ideal izquierdo $\forall j \in \mathbb{N}$. Ya que R es noetheriano izquierdo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = K_{n+l}$ $\forall l \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $I_n = I_{n+l}$ $\forall l \in \mathbb{N}$, es decir, R es artiniano derecho, y por el corolario 5.4 R es QF.

5.9. Corolario.- Las siguientes condiciones sobre un anillo R son equivalentes:

(1) Para cada ${}_RM$ y N_R cíclicos $\exists$ ${}_RP$ y Q_R proyectivos y $f: M \to P$, $g: N \to Q$ monomorfismos.

(2) Para cada $I_R \subset R$ y ${}_RJ \subset R$ $\exists$ $S_1, S_2 \subset R$ finitos tales que $I = r(S_1)$ y $J = l(S_2)$.

(3) R es QF.

Demostración: (1) y (2) son

equivalentes para un anillo R por la proposición 5.1.

(3) $\Rightarrow$ (1) Si R es QF, entonces cada módulo está contenido en un módulo proyectivo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea ${}_R I \subset R$, entonces $r(I) = r(x_1, \ldots, x_n) = r(Rx_1 + \cdots + Rx_n)$ donde $x_i \in R$ $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Así que $I = \ell(r(I)) = \ell(r(Rx_1 + \cdots + Rx_n)) = Rx_1 + \cdots + Rx_n$ $\therefore$ I es finitamente generado $\therefore$ R es noetheriano izquierdo.

Sea $I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ una cadena de ideales derechos de R. Entonces $I_j = r(K_j)$ y $K_1 \subset \cdots \subset K_j \subset \cdots$, donde K_i es un ideal izquierdo $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Ya que R es noetheriano izquierdo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = K_{n+l}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $I_n = I_{n+l}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$ $\therefore$ R es artiniano derecho, es decir R es QF.

5.10. Corolario.- Si R es un anillo conmutativo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Cada módulo cíclico está contenido en un R-módulo proyectivo.

(2) Cada ideal es el anulador de un subconjunto finito de R.

(3) R es QF.

5.11. Corolario.- Sea R un anillo. R es QF si y sólo si para cada M_R, $_RN$ cíclicos, se tiene que $E(M)$ y $E(N)$ son proyectivos.

Demostración: Inmediato de 5.3 y 5.10.

6. Módulos Completamente Escindibles.

Sea $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$, donde cada Q_i es un módulo inyectivo e inescindible $\forall\, i \in I$. Un módulo Q con esta propiedad se llama completamente escindible (c.e.). Si I es un conjunto finito entonces Q se llama completamente escindible finito (c.e.f.). Un teorema de Azumaya [1] afirma que cada submódulo inyectivo e inescindible de Q es isomorfo a alguna Q_i.

En [10] Matlis se pregunta: ¿ Es cada sumando directo S de Q también completamente escindible. Una respuesta afirmativa es dada por el teorema de Azumaya-Krull-Schmidt-Remak cuando el conjunto de índices I es finito. También, si R es noetheriano derecho, entonces Q es inyectivo por el teorema 0.1; S es entonces inyectivo, así que S es completamente escindible por el teorema 0.3. Damos respuestas afirmativas en algunos otros casos especiales. Comenzamos con un lema.

6.1. Lema.- Sea $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$, donde Q_i es un R-módulo derecho inyectivo e inescindible $\forall i \in I$, y sea S un submódulo tal que $Q = S \oplus T$. Entonces (1) Si M es un submódulo finitamente generado de S, entonces S contiene una copia isomorfa de $E(M)$ y además es completamente escindible finito. (2) Si S_1 es un submódulo de S tal que $S = S_1 \oplus N$, y si $y \in S$, entonces $y \in S_1 \oplus T_1$, donde T_1 es un sumando directo completamente escindible finito de N.

Demostración: Sea $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Para cada x_i $\exists J_i \subset I$ finito tal que $x_i \in \bigoplus_{k \in J_i} Q_k$ $\therefore$ $M \subset \bigoplus_{k \in J} Q_k$, donde $J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ es finito $\therefore$ $E(M) \subset \bigoplus_{k \in J} Q_k$ $\therefore$ $\bigoplus_{k \in J} Q_k = E(M) \oplus A$

Por lo tanto $E(M)$ es c.e.f.

(2) Sea $y = s + t$, $s \in S_1$, $t \in N$. Aplicamos (1) a N y a $tR \subset N$, entonces obtenemos un sumando directo T_1 de N que contiene a tR y que es c.e.f. tal que $y \in S_1 \oplus T_1$.

6.2. Proposición. - Sea S un sumando directo de un módulo Q completamente escindible. (1) Si S es numerablemente generado entonces S es c.e.; (2) Si S es la cápsula inyectiva de un submódulo finitamente generado, entonces S es c.e.f.; (3) Si S contiene un submódulo finitamente generado M tal que $S/E(M)$ es numerablemente generado, entonces S es c.e.

Demostración: (1) Sea $S = \langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$. Por el lema 6.1, S contiene una cadena $S_1 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots$ de sumandos directos tales que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y tal que cada S_n es c.e.f. Pero $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Si $S_0 = 0$, entonces

$S \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty}(S_{n+1}/S_n)$ es claramente suma directa de módulos c.e.f., esto es, S es c.e.

(2) se sigue del lema 6.1

(3) es consecuencia de (1) y (2) ya que $S \cong S/E(M) \oplus E(M)$.

6.3. Corolario.- Sea $Q = \bigoplus_{i\in I} Q_i$ donde Q_i es un módulo inyectivo e inescindible numerablemente generado $\forall i \in I$. Entonces cada sumando directo S de Q es c.e.

Demostración: Por el teorema de Kaplansky, S mismo es una suma directa de módulos numerablemente generados. Por lo tanto, es suficiente probar el corolario cuando S es numerablemente generado. Pero este caso se sigue de la proposición 6.2.(1).

6.4. Teorema.- Sea Q un R-módulo derecho inyectivo completamente escindible, es decir, $Q = \bigoplus_{i\in I} Q_i$, donde $\{Q_i \mid Q, i \in I\}$ es un conjunto de módulos inyectivos e inescindibles.

(1) Si S es un submódulo tal que $S = \bigoplus_{j \in J} S_j$, donde cada S_j es un submódulo inyectivo e inescindible $\forall j \in J$, entonces S es inyectivo y $|J| \leq |I|$

(2) Cada sumando directo P de Q es c.e.

Demostración: Para cada subconjunto A de I, sea $Q_A = \bigoplus_{a \in A} Q_a$, y sea $\pi_A : Q \to Q_A$ la proyección, entonces $\operatorname{Ker} \pi_A = Q_{I-A}$. Definimos una componente homogenea de Q como un submódulo Q_A, donde $A = \{b \in I \mid Q_b \cong Q_a$ para algún $a \in I$ fijo$\}$. Entonces $Q = \bigoplus_A Q_A$, donde Q_A es una componente homogenea de Q, y si S es un submódulo como en (1), entonces S es también suma directa de sus componentes homogeneas: $S = \bigoplus_K S_K$.

(1) Si $k \in K$, entonces S_k, por ser inyectivo,

es un sumando directo de Q, y por ser inescindible, es isomorfo a Q_a para alguna $a \in I$. Probamos primero:

(i) S_K es isomorfo a un submódulo de Q_A, la componente homogenea de Q determinada por a. Supongamos que $S_K \cap \operatorname{Ker} \pi_A \neq 0$. Si $y \in S_K \cap \operatorname{Ker} \pi_A$, $y \neq 0$, entonces $T = \langle x \rangle \subset S_{K'}$, donde $K' \subset K$ es finito y también $T \subset Q_B$, donde $B \subset (I - A)$ es finito. Como $S_{K'}$ (Q_B) es inyectivo, contiene una copia isomorfa E (F) de T. Como $S_{K'}$ es c.e.f. y es homogeneo, también lo es E. Como $E \cong F$, esto significa que E contiene un submódulo G, que es isomorfo a S_k, por lo tanto a Q_a, que es también isomorfo a Q_b para alguna $b \in I - A$. Pero, por la definición de A, esto es imposible. Esta contradicción demuestra que $\operatorname{Ker} \pi_A \cap S_K = 0$, así que $\pi_A | S_K$ es un monomorfismo. De aquí en adelante denotamos $\varphi_K = \pi_A | S_K$.

Probamos a continuación:

(ii) S_K <u>es</u> <u>inyectivo</u>. Si $|A| \geq \aleph_0$, entonces Q_a es numerablemente Σ-inyectivo por ser Q inyectivo, entonces por el teorema 0.2., Q_a es Σ-inyectivo. Esto implica que S_K es inyectivo. Ahora supongamos que $|A| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $|K| > n$, entonces S_K contiene como sumando directo un submódulo T que es suma directa de $n+1$ copias de Q_a. Más aún, T es entonces inyectivo, así que $\varphi_K(T)$ es un sumando directo de Q_A que es suma directa de $n+1$ copias de Q_a, lo que contradice el teorema de Krull-Schmidt-Remak. Entonces $|K| < \infty$, así que S_K es inyectivo en este caso también. Esto prueba (ii) y (iii) a continuación.

(iii) <u>Si</u> W <u>es</u> <u>un</u> <u>submódulo</u> <u>de</u> Q, <u>y</u> <u>si</u> W <u>es</u> <u>suma</u> <u>directa</u> <u>de</u> <u>submódulos</u>

isomorfos inyectivos e inescindibles, entonces W es inyectivo.

Para simplificar la notación, sea $X = Q_A$ y $U = \varphi_K(S_K)$. Como $U \cong S_K$, U es inyectivo, así que $X = U \oplus V$ para algún submódulo V. Por el lema de Zorn, existe una familia directa maxima de submódulos inyectivos e inescindibles de V. Sea W la suma de estos submódulos, entonces esta suma es directa. Como $X = Q_A$ es homogeneo, también lo es W, y por (iii) W es también inyectivo, por lo tanto W es sumando directo de V, y por la maximalidad de W, necesariamente $W = V$. Los módulos U y V que son completamente escindibles, nos dan una descomposición de $X = U \oplus V$ en una suma directa de módulos inescindibles, y el teorema de descomposición única implica que el número de sumandos inescindibles de $U = \varphi_K(S_K)$ es menor que $|A|$, esto es, $|K| \leq |A|$. Ahora, como S_K es isomorfo a un sumando directo de Q_A, $S = \bigoplus_K S_K$ es isomorfo a un sumando directo de Q. Esto prueba que S es inyectivo. Más aún, como J (I) es la unión ajena de las K (A) entonces $|K| \leq |A|$ implica que $|J| \leq |I|$. Esto prueba (1). (2) se prueba de la misma forma que probamos que V es completamente escindible.

BIBLIOGRAFIA

[1] AZUMAYA, G. On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem. Jap. J. Math. 19 (1949), 525-547.

[2] CARDENAS, H. y LLUIS, E. "Módulos semisimples y representaciones de grupos finitos". Editorial F. Trillas S. A. México, 1970.

[3] CHASE, S.U. Direct products of modules. Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457-473.

[4] COHEN, I.S. y KAPLANSKY, I. Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules. Math. Z. 54 (1951), 97-101.

[5] EILENBERG, S. y NAKAYAMA, T. On the dimension of modules and algebras. II (Frobenius algebras and quasi-frobenius rings). Nagoya Math. J. 9 (1955) 1-16.

[6] FAITH, C. y WALKER, E.A. Direct-sum representations of injective modules. J. Alg. 5 (1967), 203-221.

[7] HOPKINS, C. Rings with minimal condition for left ideals. Ann. Math. 40 (1939), 712-730.

[8] IKEDA, M. A characterization of quasi-Frobenius rings. Osaka Math. J. 4 (1952), 203-210.

[9] LEVITZKI, J. On rings which satisfy the minimum condition for right-hand ideals. Compositio Math. 7 (1939), 214-222.

[10] MATLIS, E. Injective modules over noetherian rings. Pacific J. Math. 8 (1958), 511-528.

[11] MORITA, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Repts.,

Tokyo Kyoiku Daigaku 6 (1958), 83-142.

[12] STENSTROM, B. "Rings of quotients." Springer Verlag. New York-Heidelberg-Berlin. 1975.

[13] WALKER, C. P. Relative homological algebra and abelian groups. Illinois J. Math. 10 (1966), 186-209.

[14] GOLDIE, A. W. Semi-prime rings with maximum conditions. Proc. London Math. Soc. (3) 10 (1960), 201-220.