

2ej
18

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ENFOQUE A LA TEORIA DE REDES POR MEDIO DE MATROIDES

T E S I S
QUE PRESENTA
PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO
ELSA PATRICIA OMARA PULIDO.

México, D.F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

R E S U M E N

Se presentan las definiciones básicas de la teoría de gráficas que son necesarias para el resto del trabajo.

Se describe el problema del Arbol de Expansión Mínima, a continuación se obtienen los resultados que justifican la existencia de la solución al problema, así como los métodos de PRIM y TARJAN; también se describe el problema del Apareamiento Máximo y los correspondientes teoremas básicos y métodos de solución. Se desarrollan los conceptos y resultados más importantes de Matroides que permiten comprender claramente las siguientes secciones en las que se muestra la relación de matroides y gráficas, así como una solución al problema del árbol de expansión mínima por medio de esta teoría. Por último se plantea el problema de apareamiento como uno de intersección de matroides y se resuelve en este contexto.

I N T R O D U C C I O N

Una de las áreas de la investigación de operaciones mas elegantemente desarrolladas es la relacionada con la teoría de gráficas. La razón de este desarrollo se debe a la simplicidad con que pueden establecerse los problemas de este campo y su solución.

La optimización en gráficas simples surgió como una de las ramas de la programación matemática. Inovaciones en la decada de los setentas condujo a la teoría de gráficas como una herramienta de gran importancia en la planeación y solución a una amplia variedad de problemas en la administración y en la industria. Muchas de las aplicaciones son los problemas de distribución, transporte, planeación financiera, sistemas de inventarios, etc..

Los problemas en gráficas de tamaño moderado pueden ser resueltos cien veces mas rápido con algoritmos especializados en gráficas que con los algoritmos mas sofisticados de la programación lineal.

Por otro lado existe una variedad de problemas que surgen en la toma de decisiones y que tienen soluciones factibles de tipo discreto. Desde el punto de vista conceptual, manejar una región factible de tipo discreto proporciona la ventaja de ver con facilidad soluciones concretas al problema. Con frecuencia, el uso de gráficas elementales permite intuir el significado de una solución particular. Este hecho, sin embargo no garantiza que se pueda resolver trivialmente cualquier problema de tipo discreto, pues cuando el número de objetos

involucrados aumenta, resolver satisfactoriamente el problema representa manipular y evaluar un número explosivo de casos, posibilidades y combinaciones.

Un caso específico de análisis de problemas discretos se encuentra en el Análisis Combinatorio, que se considera como el estudio matemático del arreglo, agrupamiento, ordenamiento o selección de objetos.

En 1935 Hassler Whitney fundamentó la Teoría de Matroides como resultado de sus investigaciones de la dependencia lineal en la teoría algebraica. Esta teoría tiene extensiones en cristalografía, geometría proyectiva, redes eléctricas y programación lineal. En particular, Jack Edmonds fué el responsable de dirigir la teoría de matroides hacia los problemas de optimización combinatoria y demostró varios de los resultados básicos.

El propósito de este trabajo es analizar algunos problemas de Optimización Combinatoria, que aparecen con mucha frecuencia en algunas áreas de la Investigación de Operaciones, Ingeniería, y su solución por computadora en términos de gráficas y matroides. Para este fin se desarrolla un capítulo que permite al lector familiarizarse con la teoría de matroides.

En el primer capítulo se presentan los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas; en el segundo y tercer capítulo se plantean los problemas del Arbol de Expansión Mínima y Apareamiento Máximo respectivamente; en el penúltimo capítulo se desarrollan los resultados mas importantes sobre Matroides que conducen a obtener una solución al problema planteado en el capítulo dos; por último se muestra la realación del problema de apareamiento en gráficas bipartitas e intersección de matroides, asi como los principales resultados en este tópico. Al final se agregan los listados de algunos algoritmos y un anexo sobre programación lineal.

N O T A C I O N

$A \subseteq B$	A esta contenido en B
$A \subset B$	A esta contenido propiamente en B
$A \cup B$	A unión B
$A \cap B$	A intersección B
$A - B$	A menos B
$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$	Suma simétrica de A y B.
$\cup A_j$	Unión finita de conjuntos
$\# A$	Cardinalidad de A
$a \in A$	a pertenece a A
$a \notin A$	a no pertenece a A
V	Conjunto de vértices
E	Conjunto de aristas o arcos
$G=(V,E)$	Gráfica Finita
v_i	Nodos o vértices
(v_i, v_j)	Arcos o aristas
e_k	Arcos o aristas
P	Trayectorias y Cadenas
C	Circuitos o Ciclos
$F(v_i)$	Conjunto de sucesores
$F^{-1}(v_i)$	Conjunto de predecesores
$F(A) = \cup F(v_i)$	
$d(v_i)$	Grado del nodo v_i
G_P	Gráfica Parcial
G_s	Subgráfica
T	Arboles
$S=(E,I)$	Sistema de subconjuntos

I	Familia de subconjuntos
$M = (E, I)$	Matroide
I_j	Elementos de la familia I en una matroide
C^i	Circuitos de la matroide M_i

C O N T E N I D O

Dedicatorias	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Introducción	iv
Notación	vii
CAPITULO I CONCEPTOS BASICOS DE GRAFICAS	1
1.1 Definiciones	2
1.2 Cadenas, trayectorias, circuitos y ciclos	4
1.3 Tipos de gráficas y subgráficas	6
1.4 Representación matricial de Gráficas	11
CAPITULO II ARBOL DE EXPANSION MINIMA	17
2.1 Descripción del problema	18
2.2 Métodos de solución	21
2.2.1 Método Prim	21
2.2.2 Metodo Tarjan	24
2.3 Extensiones	28
2.3.1 El Problema del Arbol de Peso Máximo	28
2.3.2 El Problema de Steiner	29
2.3.3 Ejemplo	31
CAPITULO III EL PROBLEMA DEL APAREAMIENTO MAXIMO	33
3.1 Descripción del problema	34
3.2 Análisis del problema	36
3.3 Apareamiento en Gráficas Bipartitas	38
3.4 Algoritmo de solución	40

CAPITULO IV	GRAFICAS Y MATROIDES	44
4.1	Aspectos básicos de Matroides	45
4.2	Relación de Matroides y Gráficas	51
4.3	Matroides y el Arbol de Expansión Mínima	52
4.4	Algoritmo Glotón	55
CAPITULO V INTERSECCION DE MATROIDES Y EL PROBLEMA DE APAREAMIENTO EN GRAFICAS BIPARTITAS		56
5.1	Gráficas Bipartitas y Matroides	57
CONCLUSIONES		67
ANEXO A		
ANEXO B		
ANEXO C		

CONCEPTOS BASICOS DE GRAFICAS

Una variedad de problemas reales puede plantearse y analizarse usando el concepto de gráfica. Las propiedades analíticas que presenta esta estructura son muy simples e interesantes. Uno de los aspectos que ha detenido la popularización de los resultados del análisis de gráficas es la falta de unificación de la nomenclatura usada. El propósito de este capítulo es describir las definiciones de gráficas empleadas en este trabajo así como resumir algunos resultados matemáticos que permiten hacer más fluido el material que se presenta.

El capítulo se desarrolla como sigue: En las dos primeras secciones se describen e ilustran las definiciones básicas de gráficas y algunos conceptos asociados con las mismas. En la tercera sección se introduce el concepto de subgráfica, gráfica parcial y gráfica completa. Finalmente en la cuarta sección se trata el aspecto de representación matricial de una gráfica y las equivalencias de un árbol.

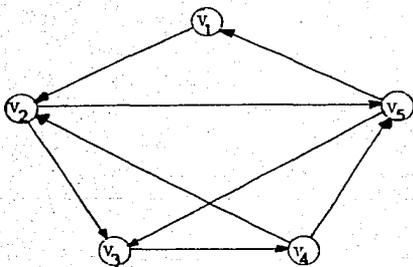
1.1 Definiciones.

Definición 1.1 Una gráfica dirigida finita $G=(V,E)$ esta formada por un conjunto $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y un subconjunto E del producto cartesiano $V \times V$. Los elementos del conjunto V se denominan **nodos** o **vértices** y los elementos del conjunto E se llaman **arcos** y se denotan por (v_i, v_j) .

En una gráfica $G=(V,E)$ el nodo v_i del arco (v_i, v_j) se llama **nodo inicial** y el nodo v_j **nodo final**. Una gráfica dirigida se puede reproducir en el plano por medio de círculos que representan a los nodos y líneas dirigidas, del nodo v_i al nodo v_j , que simbolizan los arcos. Existe otro tipo de gráficas en las cuales $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, estas se llaman **gráficas no dirigidas**, los elementos del conjunto E se denominan **aristas** para estas gráficas y se representan por medio de segmentos de línea sin dirección.

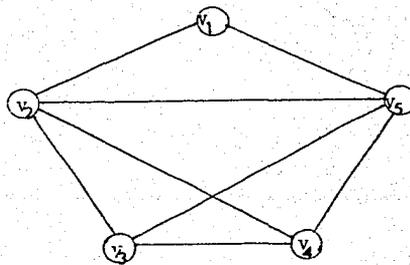
EJEMPLO 1.

Sea $G=(V,E)$ una gráfica, donde $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E=\{(v_1, v_2), (v_5, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_2), (v_5, v_5), (v_4, v_5), (v_3, v_4)\}$



Gráfica dirigida

fig. 1.1



Gráfica no dirigida

fig. 1.2

Una forma alternativa de describir una gráfica dirigida es por medio del conjunto V y la función F definida de V en V y la regla de correspondencia es el conjunto $F(v_1) = \{v_j, \dots, v_k\}$ de nodos terminales cuyo nodo inicial es v_1 . Esto es, $F(v_1) = \{v_j, \dots, v_k\}$ si existen los arcos $(v_1, v_j), \dots, (v_1, v_k)$ y $F(v_1) = \emptyset$ si no existen. La función F establece una relación de nodos y la gráfica esta definida ahora como (V, F) .

EJEMPLO 2.

Se considera la gráfica dirigida del ejemplo anterior.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$F(v_1) = \{v_2\}$$

$$F(v_3) = \{v_4\}$$

$$F(v_5) = \{v_1, v_3\}$$

$$F(v_2) = \{v_3, v_5\}$$

$$F(v_4) = \{v_2, v_5\}$$

Si la gráfica es no dirigida cada arista se sustituye por dos arcos en direcciones opuestas y se aplica la definición de F a esta nueva gráfica dirigida.

EJEMPLO 3.

Considérese la gráfica no dirigida del ejemplo 1.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$F(v_1) = \{v_1, v_2\}$$

$$F(v_3) = \{v_2, v_4, v_5\}$$

$$F(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$F(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$$

$$F(v_4) = \{v_2, v_3, v_5\}$$

Como F esta bien definida es natural pensar en la existencia de F^{-1} que asocia a cada nodo v_i los nodos para los cuales v_i es el nodo terminal.

EJEMPLO 4.

Examínese la gráfica no dirigida del ejemplo 1.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$F^{-1}(v_1) = \{v_5\}$$

$$F^{-1}(v_2) = \{v_2, v_5\}$$

$$F^{-1}(v_5) = \{v_2, v_4\}$$

$$F^{-1}(v_3) = \{v_1, v_4\}$$

$$F^{-1}(v_4) = \{v_3\}$$

Por medio de la relación F y su inversa F^{-1} se definen el grado exterior e interior de un vértice $v_i \in V$ como $\{F(v_i)\}$ y $\{F^{-1}(v_i)\}$ respectivamente.

Se observa que se puede definir $F(Q) = \cup F(v_i)$ para Q cualquier subconjunto de V .

1.2 Cadenas, trayectorias, circuitos y ciclos.

Definición 1.2. Una cadena P de un nodo v_i a un nodo v_j ($v_i \neq v_j$) es una sucesión de nodos y arcos, sin repetición, en donde el nodo final de un arco es el nodo inicial del siguiente, y se representa por:

$$P = \{v_i, (v_i, v_{i+1}), v_{i+1}, (v_{i+1}, v_{i+2}), \dots, (v_{j-1}, v_j), v_j\}.$$

Sin embargo, es posible determinar una cadena por medio de nodos y señalando que la gráfica en cuestión es dirigida, es decir:

$$P = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$$

representa la misma cadena del nodo v_i al nodo v_j

EJEMPLO 5.

Si se observa la siguiente gráfica:

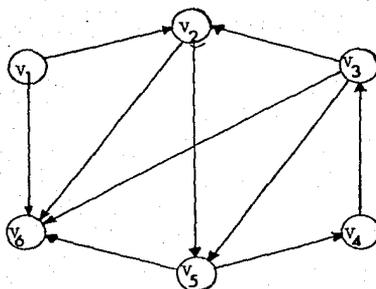


fig. 1.3

Entonces las cadenas existentes en la gráfica son:

$$P_1 = \{v_2, (v_2, v_5), v_5, (v_5, v_4), v_4, (v_4, v_3), v_3, (v_3, v_6), v_6\}$$

$$P_2 = \{v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_5), v_5, (v_5, v_4), v_4, (v_4, v_3), v_3\}$$

Cuando los arcos tienen un nodo terminal en común se denominan **adyacentes**, así (v_5, v_4) , (v_3, v_4) , (v_2, v_4) y (v_1, v_4) son arcos adyacentes por tener al nodo terminal v_4 en común. Se dice que un arco (v_i, v_j) es **incidente** en un nodo u si $(v_i, v_j) \in F(u) \cup F^{-1}(u)$. Ahora dos nodos son **adyacentes** si son incididos por el mismo arco.

Definición 1.3. Una trayectoria entre los nodos v_1 y v_j ($v_1 \neq v_j$) en una gráfica no dirigida es una sucesión de nodos y aristas, sin repetición, de la forma:

$$P = \{v_1, (v_1, v_{i+1}), v_{i+1}, (v_{i+1}, v_{i+2}), v_{i+2}, \dots, (v_{j-1}, v_j), v_j\}$$

ya que es una sucesión de aristas es posible identificar una trayectoria a partir de la sucesión de nodos:

$$P = \{v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j\}$$

EJEMPLO 6.

Considérese la gráfica del ejemplo 5 sin direcciones, entonces existe una trayectoria entre cada par de vértices.

Definición 1.4. Una cadena P del nodo v_i al nodo v_j se denomina **circuito** si $v_i = v_j$, es decir, un circuito es una cadena cerrada. Análogamente una trayectoria cerrada es un **ciclo** y un arco de la forma (v_i, v_i) se llama **rizo**.

EJEMPLO 7

En la figura 1.3 se tienen los circuitos:

$$C_1 = \{(v_5, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_5)\}$$

$$C_2 = \{(v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_2)\}$$

1.3 Tipos de gráficas y Subgráficas.

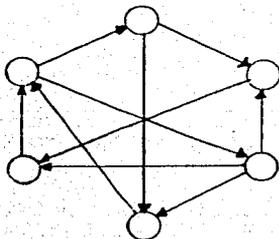
Definición 1.5. Una gráfica se llama **simple** si no contiene rizos.

Definición 1.6. Dada una gráfica $G=(V,E)$ una gráfica Parcial G_p de G es la gráfica (V, E_p) con $E_p \subseteq E$, es decir, una gráfica parcial contiene el mismo número de vértices pero con solo un subconjunto de los arcos de la gráfica original.

Definición 1.7. Dada una gráfica $G(V,F)$ una subgráfica G_u es la gráfica (V_u, F_u) con $V_u \subseteq V$ y para cualquier $v_i \in V_u$ $F_u(v_i) = V_u \cap F(v_i)$. Esto es, una subgráfica contiene solo un subconjunto de vértices de la gráfica original, pero contiene todos los arcos cuyos vértices inicial y final están contenidos en el subconjunto V_u .

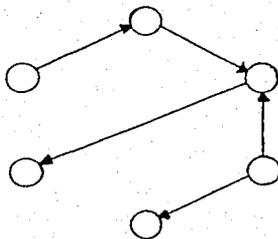
Al combinar las dos definiciones anteriores se obtienen las subgráficas parciales.

EJEMPLO 8.



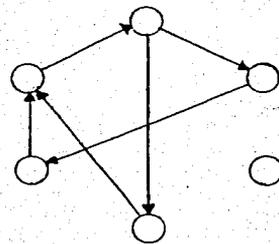
Gráfica

fig. 1.4



Gráfica Parcial

fig. 1.5

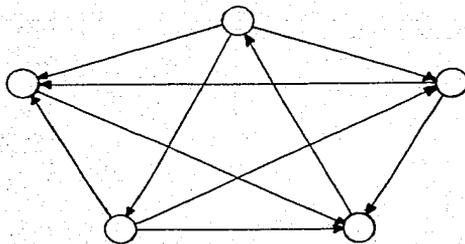


Subgráfica

fig. 1.6

Definición 1.8. Una gráfica $G=(V,E)$ es llamada completa si para cualquier par de vértices $v_i, v_j \in V$ existe una arista que los une en la gráfica no dirigida, esto es, hay al menos un arco uniendo cualquier par de vértices.

EJEMPLO 9.



Gráfica Completa

fig. 1.7

Definición 1.9. Una gráfica $G=(V,E)$ es llamada bipartita, si el conjunto V de sus vértices puede ser particionado en dos subconjuntos V_1 y V_2 , y además todos los arcos tienen sus nodos inicial y final en uno y otro conjunto respectivamente. Esto significa que la gráfica G sin direcciones es bipartita.

EJEMPLO 9

Un taller mecánico posee cinco diferentes taladros. Cierta día llegan cuatro trabajos que necesitan ser taladrados. El número de horas hombre requeridas para ejecutar cada trabajo en cada una de las máquinas no es el mismo. Si cada máquina se representa por un nodo v_i y cada trabajo por uno u_j , se desea asignar a cada nodo v_i uno u_j para obtener el mejor provecho.

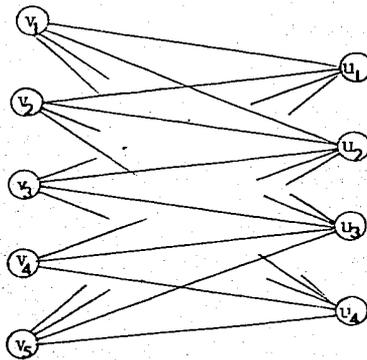


fig. 1.8

Definición 1.10. Una gráfica bipartita $G=(V_1 \cup V_2, E)$ es llamada completa si para cualquier par de vértices $v_{i1} \in V_1$ y $v_{j2} \in V_2$ existe una arista (v_{i1}, v_{j2}) .

Teorema 1.1. Una gráfica es bipartita si y solo si no contiene circuitos (ciclos) de cardinalidad impar.

Demostración

Supóngase que la gráfica es bipartita, entonces $V=V_1 \cup V_2$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Sea $C = \{(v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), \dots, (v_{1q-1}, v_{1q})\}$ un circuito (ciclo) de cardinalidad impar, sin pérdida de generalidad sea $v_{11} \in V_1$, de la definición de gráfica bipartita $v_{12} \in V_2$; en general $v_{1k} \in V_1$ si k es impar y $v_{1k} \in V_2$ si k es par, entonces $v_{1q} \in V_1$ lo cual implica que $v_{11} \in V_2$. Esto significa que $v_{11} \in V_1 \cap V_2$.

Ahora supongase que no hay circuitos de cardinalidad impar. Sea v_1 cualquier vértice, al que se le asigna la etiqueta "+" y los elementos del conjunto $F(v_1)$ se etiquetan con "-". Esta operación se efectúa hasta que una de las tres condiciones siguientes se satisfaga:

a) Todos los vértices están etiquetados en tal forma que al arco (v_i, v_j) se le asigna "+" a v_i y "-" a v_j .

b) Para algún vértice v_{1k} etiquetado con algún signo se le pueda etiquetar con algún otro signo desde otro vértice.

c) Para cualquier vértice v_1 el conjunto $F(v_1)$ es etiquetado pero existen otros vértices no etiquetados.

Si sucede a) todos los vértices etiquetados con "+" estarán en V_1 y los etiquetados con "-" en V_2 . Entonces todas las aristas existen entre nodos de etiqueta diferente y por tanto G es bipartita.

En el caso b) supóngase que el nodo v_{1k} obtuvo primero una etiqueta con "+" a lo largo de una trayectoria P_1 y obtuvo después la etiqueta "-" a través de una trayectoria P_2 . Sea v' el último vértice en común de ambas trayectorias; si v' es etiquetado con "+" (" - ") la longitud de la trayectoria sobre P_1 de v' a v_{1k} es par (impar) y la longitud de la trayectoria sobre P_2 de v' a v_{1k} es impar (par), entonces se forma un ciclo de longitud impar que consiste de la trayectoria de v' a v_{1k} sobre P_1 y de v_{1k} a v' sobre P_2 . Lo que contradice la hipótesis.

Al considerar el caso c), se observa que no existen trayectorias entre los nodos etiquetados, entonces G es desconexa en dos o más partes. Es decir, este caso no es factible.

Por tanto solo el caso a) puede existir.

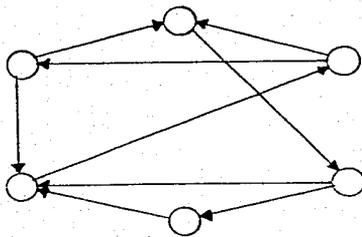
#

Definición 1.11.

-Una gráfica se llama fuertemente conexa si para cualquier par de vértices $v_i, v_j \in V$ existe al menos una cadena de v_i a v_j .

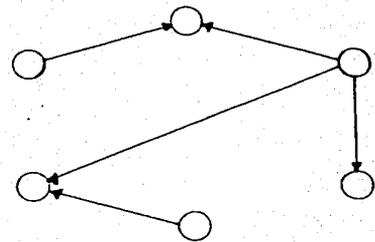
- Una gráfica es conexa o suavemente conexa si existe al menos una trayectoria entre cualquier par de vértices.

EJEMPLO 10



Gráfica Fuertemente conexa

fig. 1.9



Gráfica conexa

fig. 1.10

1.4 Representación de una gráfica, árboles y equivalencias.

Una gráfica dirigida se puede representar por medio de una matriz de incidencia en la forma siguiente:

Definición 1.12. Dada una gráfica dirigida G de n vértices y m arcos, se define la matriz de incidencia nodos-arcos $E=(b_{ij})$ de orden $n \times m$ como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo inicial es } v_i \\ -1 & \text{si el nodo final es } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJEMPLO 11

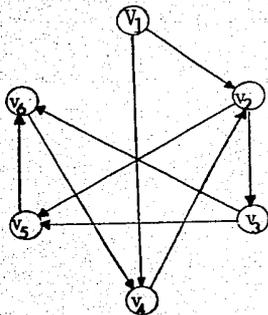


fig. 1.11

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	1							
v_2	-1		1	1	-1				
v_3			-1			1	1		
v_4		-1			1			-1	
v_5				-1			-1		1
v_6						-1		1	-1

Puesto que una gráfica se puede representar por medio de una matriz de incidencia, es claro que dicha matriz reproduce una gráfica.

EJEMPLO 12

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	-1		1			
v_2			-1		1	
v_3	1	-1		1	-1	
v_4				-1		1
v_5		1				-1

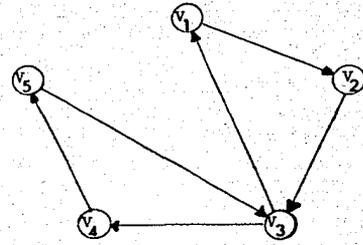


fig. 1.12

Ya que existe una equivalencia entre gráficas y matrices, cabe preguntar cuál es la relación entre los vectores linealmente independientes y arcos, o bien, entre bases y arcos, para contestar esta pregunta se hace necesaria la siguiente definición.

Definición 1.13. Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.

Teorema 1.2. Si $G=(V,E)$ es una grafica simple, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

- a) G es un árbol
- b) G es conexa y deja de serlo si alguna arista es eliminada
- c) Entre cada par de vértices $u,v \in V$ existe una única trayectoria
- d) G es acíclica y tiene $n-1$ aristas
- e) G es conexa y tiene $n-1$ aristas

Demostración

(a) implica (b)

Por definición G es conexa. Supóngase que la arista (u,v) es eliminada de G y que G permanece conexa, entonces existe una trayectoria $P=\{u,v_1,\dots,v_k,v\}$ de u a v , por lo que la trayectoria $P \cup \{(u,v)\}$ es un ciclo en G .

(b) implica (c)

Por ser G conexa existe al menos una trayectoria entre cada par de vértices. Sean u,u' tales que existen $P_1=\{u,u_1,\dots,u_k,u'\}$ y $P_2=\{u,u_1',\dots,u_l',u'\}$ trayectorias distintas. Sea k el mínimo entero tal que $u_k \neq u_k'$, k existe ya que $P_1 \neq P_2$, al eliminar la arista (u_{k-1},u_k) tenemos que u_{k-1},u_k siguen unidos por $P=\{u_{k-1},u_{k-2},\dots,u_1,u,u_1',\dots,u_{k+1},u_k\}$, lo cual contradice (b).

(c) implica (a)

G es conexa. Supóngase que existe un ciclo $C = \{u, u_1, \dots, u_k, u\}$, entonces para cualquier par de nodos en C existen al menos dos trayectorias diferentes que los unen.

Para demostrar que (d) y (e) son equivalentes a (a), (b) y (c), se necesita el siguiente lema.

Lema 1.1. Si G es una gráfica finita sin ciclos y con al menos dos vértices entonces existe un vértice adyacente a un solo vértice.

Demostración

Si el número de nodos es $k=2$ entonces v_1 es adyacente únicamente a v_2 . Si $k \geq 2$ sea $u=v_1$ un vértice arbitrario y sea v_2 un vértice adyacente a él; constrúyase una sucesión de vértices $\{v_k\}_{k \geq 2}$ tales que v_k es solo adyacente a v_{k-1} o a un vértice que no se encuentre en la sucesión, como G es finita el proceso debe terminar en un número finito de pasos, por lo que el último elemento satisface la condición.

#

(a) implica (d)

por hipótesis G no contiene ciclos.

Para $k=2$, por ser acíclica el número de arcos es uno.

Supóngase válido para $k \leq n-1$

sea G una gráfica con n nodos y acíclica, sea v_n un nodo expuesto, y denomínese v_{n-1} a su vértice adyacente, se eliminan el nodo v_n y la arista (v_n, v_{n-1}) , la gráfica restante contiene $n-1$ nodos y es árbol, por lo que contiene $n-2$ aristas. Y así contiene $n-1$ aristas.

(d) implica (e)

La proposición es válida para $n=2$.

Supóngase válida para $n \leq k$. Por demostrar para $n=k+1$.

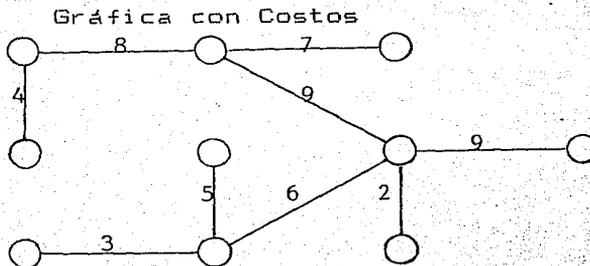
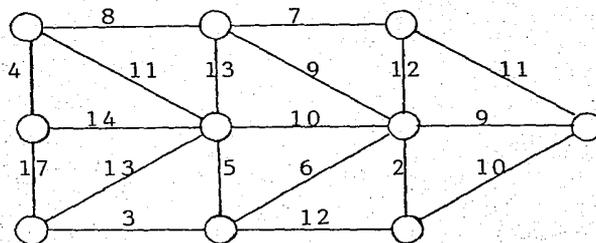
Sea G con $k+1$ nodos y k aristas, sea v_1 un nodo terminal de G . sea $G_1 = G - \{v_1\}$, G_1 tiene k vértices y $k-1$ aristas por lo que G_1 no tiene ciclos, esto a su vez implica que $G = G_1 \cup \{v_1\}$ no tiene ciclos.

#

Definición 1.14. Un bosque es una gráfica sin ciclos (no necesariamente conexa), un árbol generador es una subgráfica generadora la cual es árbol y un bosque generador de G es la unión de árboles generadores de sus componentes conexas.

EJEMPLO 13

Una red de televisión desea ordenar canales de video a varias ciudades, cada canal (i,j) tienen un costo c_{ij} , ¿Cómo construir la red a un costo total mínimo?



Se puede observar que la solución de este problema es un árbol y que la matriz asociada al árbol tiene nueve vectores columna linealmente independientes, y si se añade alguno de los vectores canónicos se completa una base para R^{10} . En general un árbol con n nodos tiene asociada una matriz de $n-1$ vectores columna linealmente independientes y al añadir un vector canónico se completa la base para R^n , en la gráfica se representa por un arco unido a la misma en un solo nodo. Esta nueva arista se llama raíz y el árbol se denomina árbol enraizado.

C A P I T U L O I I

EL ARBOL DE EXPANSION MINIMA

Uno de los problemas de gráficas que se considera totalmente resuelto es el denominado Arbol de Expansión Mínima, y consiste en la determinación de una subgráfica que conecte a todos los nodos de la gráfica original y cuya suma de "pesos" asociados con los arcos sea mínima. El problema resulta en una variedad de problemas de ingeniería y de comunicación y, quizás, es mas popular como subproblema de otros problemas de gráficas, la eficiencia con que se resuelve este problema lo hace atractivo. En este capítulo se motiva, analiza y describen los métodos de solución del árbol de expansión mínima y algunas de sus extensiones.

El capítulo se desarrolla como sigue: En la primera sección se define el problema mientras que los métodos de solución, PRIM y TARJAN, y extensiones se tratan en la segunda y tercera secciones.

2.1 Descripción del Problema del Arbol de Expansión Mínima (AEM).

Sea $G=(V,E)$ una gráfica no dirigida, simple y conectada y sea C una función que asocia a cada elemento de E un número real c_{ij} (costo, distancia, tiempo, etc.). El problema consiste en determinar el árbol $T=(V,E')$ con $E' \subseteq E$, y tal que la función de costo

$$C(T) = \sum_{(v_i, v_j) \in E'} c_{ij}$$

sea mínima.

Es conveniente mencionar que el problema planteado resulta en una unidad de problemas reales. Un ejemplo se tiene a continuación.

EJEMPLO 1

EL PROBLEMA DE LOS TELEFONOS.

Considérese una gráfica simple y no dirigida, en la que cada vértice representa una persona y cada arista (v_i, v_j) indica que v_i debe comunicarse con v_j y viceversa. Se requiere que un mensaje confidencial sea circulado entre las n personas de tal manera que minimice la probabilidad de que una persona ajena al grupo se entere. Para cada transmisión de un mensaje desde v_i a v_j existe una probabilidad p_{ij} de que el mensaje sea interceptado por una persona fuera de la red. Desde luego las trayectorias de la transmisión del mensaje forman un árbol de expansión mínima de G , el cual tiene por objeto minimizar la función $f_{ij} = 1 - (1 - p_{ij})$, donde el producto se considera sobre todas las aristas de G . Esta función es simultáneamente creciente y simétrica respecto a p_{ij} , entonces el árbol de expansión se determina al considerar p_{ij} como c_{ij} .

EJEMPLO 2

Se considera que la gráfica representa la problemática para $n=5$.

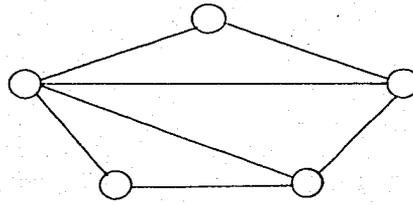
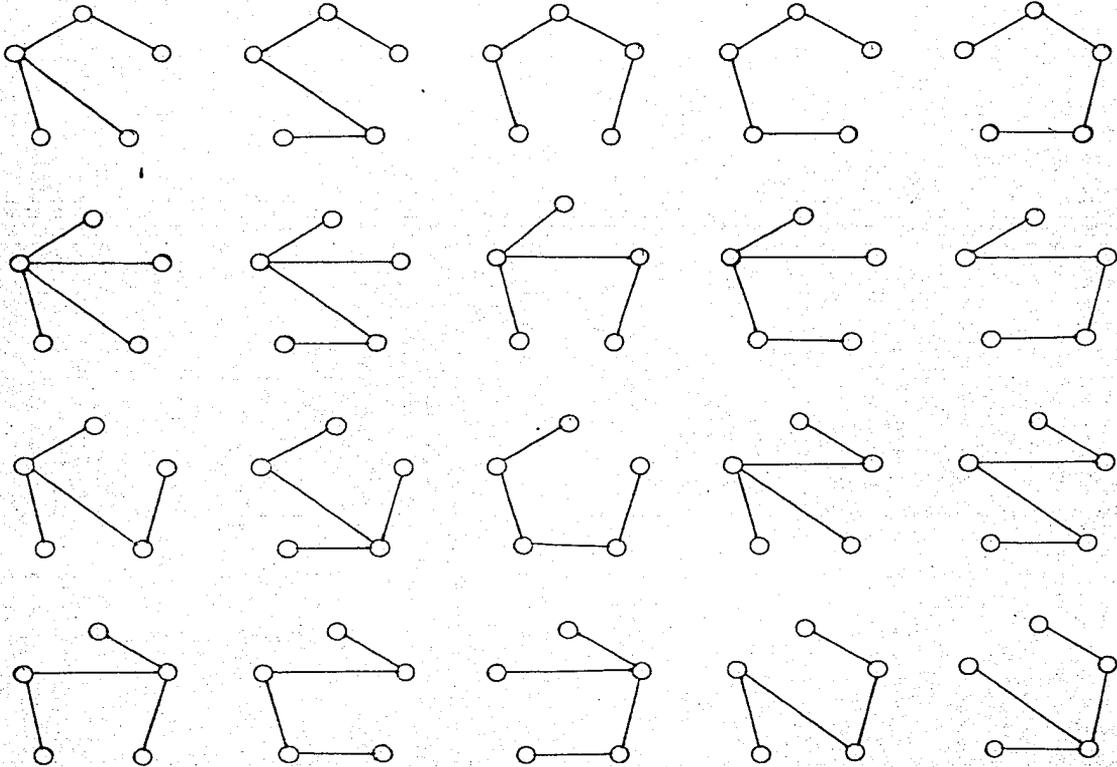


fig. 2.1

Se desea determinar el árbol de expansión mínima. Una forma de hacerlo es definir todos los árboles y seleccionar alguno de costo mínimo.



Si el número de personas aumenta, el número de posibles ligas crece y entonces distinguir todos los árboles es complicado, una alternativa para resolver el problema es por medio de algoritmos generales de gráficas, sin embargo se han desarrollado algoritmos especializados en la teoría de gráficas que prmiten obtener la solución más rápido. El resultado en el que se basan dichos algoritmos es el siguiente.

Teorema 2.1. Sea $\{(U_1, T_1), (U_2, T_2), \dots, (U_k, T_k)\}$ el bosque generador de V , y sea (u, v) la arista más corta de todas las que contienen un solo nodo U_1 . Entonces, entre todos los árboles generadores conteniendo el conjunto de aristas $T=UT_1$, existe uno que es óptimo y contiene a (u, v) .

Demostración

Se supone que existe un árbol generador (V, F) tal que $T \subset F$ y $(u, v) \notin F$ el cual es más corto que todos los árboles generadores que contienen a T . Si se añade (u, v) a F se forma un único ciclo que contiene nodos que no pertenecen a U_1 pues al menos existe $v \in U_1$. Como consecuencia existe una arista $(u', v') \in F$ tal que $u' \in V - U_1$ y $v' \in U_1$. Por hipótesis la arista (u, v) es menor que (u', v') y además $(u', v') \in T$. Así se forma un nuevo árbol (V, F') con $F' = (F \cup \{(u, v)\}) - \{(u', v')\}$ que contiene a T y a (u, v) con costo menor o igual que el costo de (V, F) lo cual contradice la suposición inicial. Por lo tanto si (V, F) es óptimo debe contener a la arista (u, v) .

#

2.2 Métodos de solución para el problema del AEM.

2.2.1 Método PRIM

Propósito

Determinar el árbol de expansión mínima para una gráfica $G=(V,E)$.

Es necesario partir del conjunto V , y para cada $v \in V$ es necesario conocer el conjunto de aristas que inciden en el, así como del parámetro d_v , asignado a cada arista (v_1, v_2) . En un principio se define el conjunto $U=\{v_1\}$ y en forma recursiva se añade el vértice de la arista más corta unida a un vértice interior de U hasta que $U=V$. Esto permite obtener el árbol de expansión mínima.

Descripción del Algoritmo PRIM.

BEGIN

$U:=\{v_1\}$, $T:=\emptyset$;

FOR ALL $v \in V - \{v_1\}$ DO $\text{closest}(v) := v_1$;

WHILE $U \neq V$ DO

BEGIN

$\text{min} := \infty$;

FOR ALL $v \in V - U$ DO

IF $d(v, \text{closest}(v)) < \text{min}$ THEN $\text{min} := d(v, \text{closest}(v))$,

$\text{next} := v$;

$U := U \cup \{\text{next}\}$, $T := T \cup \{(\text{next}, \text{closest}(\text{next}))\}$;

FOR ALL $v \in V - U$ DO

IF $d(v, \text{closest}(v)) > d(v, \text{next})$ THEN $\text{closest}(v) := \text{next}$

END

END

Teorema 2.2. El algoritmo PRIM resuelve correctamente el problema del árbol de expansión mínima en un esfuerzo computacional del orden de $O(\#V^2)$.

Demostración

La convergencia del algoritmo se demuestra por inducción sobre la cardinalidad del conjunto U , se hace notar que siempre existe un árbol de expansión mínima de G que contiene a $T=UT_j$.

Si $U=\{1\}$ $T=\emptyset$ se cumple el teorema. Supongase que el teorema es válido para algún valor j de la cardinalidad de V ($1 \leq j \leq \#V$).

Si (U, T) es el árbol que contiene al bosque $\{(U_1, T_1), \dots, (U_k, T_k)\}$ y tal que $U_1=U$ y $k=\#V-\#U+1$ y $T_2=T_3=\dots=T_k=\emptyset$, por el teorema 1.1 entre todos los árboles que contienen a T existe uno que contiene a la arista más corta que empieza en $U_1=U$ y es exactamente la que se une a T en el próximo estado a j , es decir cuando la cardinalidad de U es $j+1$.

El número de estados por los que pasa el algoritmo es $\#V-1$ y una arista se agrega en cada estado, por lo que el algoritmo converge en un número finito de pasos.

El inicio se lleva a cabo en un esfuerzo del orden $O(\#V)$ y la búsqueda del arreglo `next` requiere del mismo esfuerzo, finalmente se almacena el arreglo `closest` con un esfuerzo del orden $O(\#V)$. Por lo tanto el esfuerzo $O(\#V^2)$ se realiza al encontrar la solución.

#

EJEMPLO 3.

Se desea obtener el AEM.

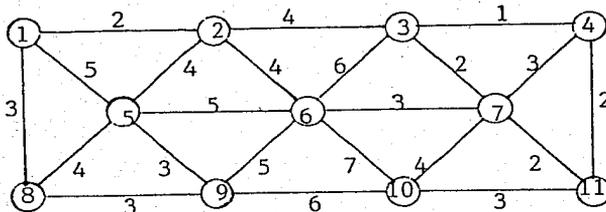


fig. 2.2

Siguiendo el algoritmo:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

iteración 1.

Sea $U_1 = \{1\}$ y $T = \emptyset$

Para toda $v \in V - 1$

$x(v)_1 = 1$, $U \neq V$ entonces

Para toda $v \in V - U$

$d(v, 1) = 2 < \infty$ entonces $\min = 2$, $\text{prox} = 2$

$U = \{1, 2\}$ y $T = \{(1, 2)\}$

Para toda $v \in V - U$

$d(3, 1) > d(3, 2)$ entonces $x(3) = 2$

$d(5, 1) > d(5, 2)$ " $x(5) = 2$

$d(6, 1) > d(6, 2)$ " $x(6) = 2$

para el resto $d(i, 1) < d(i, 2)$

iteración 2

$U = \{1, 2, 8\}$ $T = \{(1, 2), (8, 1)\}$

.

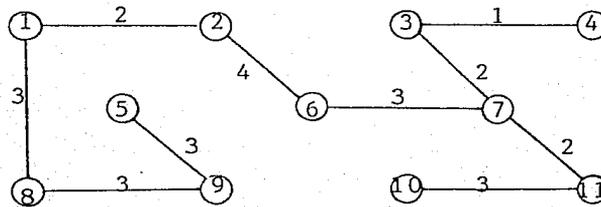
.

.

iteración 10

$U=\{1,2,3,\dots,11\}$ $T=\{(1,2), (8,1), (9,8), (5,9), (6,2), (7,6), (3,7), (4,3), (11,7), (10,11)\}$.

de donde $C(T)=26$.



Solución óptima

fig. 2.3

En algunas situaciones prácticas aplicar este algoritmo resulta ineficiente ya que si el número de arcos es mayor que C_2 el número de operaciones para determinar la solución óptima es del orden de $O(\#V^2)$. Para ello TARJAN desarrolló un algoritmo cuyo esfuerzo computacional es del orden de $O(\#E \log \#V)$ y se observa que $\#V(\#V-1)/2 \log \#V$ de donde se deduce que el esfuerzo es menor.

2.2.2 Método TARJAN.

Propósito

Determinar el AEM de una gráfica $G=(V,E)$.

Se requiere del conjunto de vértices y aristas, y para cada $(u,v) \in E$ el parámetro $d(u,v)$. La idea fundamental del algoritmo TARJAN está basada en el teorema 2.1, esto se debe a que en cada iteración se forman componentes conectadas S_1, S_2, \dots, S_k , y en el siguiente estado las une por medio de las aristas más cortas, haciendo que el árbol crezca en todas direcciones.

Descripción del algoritmo TARJAN.

BEGIN

T:= \emptyset , C:={{ v_1 }, ..., { v_n }};

WHILE #C \neq 1 DO

BEGIN

FOR ALL (u,v) \in E DO

BEGIN

sean S_i, S_j conjuntos conteniendo a u y v respectivamente;

IF $i \neq j$ THEN

BEGIN

IF $d(u,v) < \min(i)$ THEN $\min(i) := d(u,v)$, $\text{shortest}(i) := (u,v)$;

IF $d(u,v) < \min(j)$ THEN $\min(j) := d(u,v)$, $\text{shortest}(j) := (u,v)$;

END

END

FOR ALL $S_j \in C$ DO T:= $T \cup \{\text{shortest}(j)\}$;

END

END

La convergencia del algoritmo se establece en el siguiente teorema:

Teorema 2.3. El algoritmo TARJAN encuentra correctamente el AEM para una gráfica $G=(V,E)$ en un esfuerzo computacional del orden de $O(\#E \log \#V)$.

Demostración:

La convergencia del algoritmo se sigue del teorema 2.1, ya que al añadir a T la arista más corta con un nodo de (V,T) se garantiza obtener un árbol de expansión mínima. Se afirma que no se crean ciclos, ya que al unir dos componentes acíclicas S_i, S_j por medio de una arista (u,v) se forma una componente S_k acíclica.

Si cada ejecución del ciclo WHILE denota un estado, que consiste del cálculo del arreglo shortest y de las componentes conenctadas de (V,T) . Para los nodos se produce un arreglo **component**, en un esfuerzo $O(\#V)$, que contiene el nombre de la compenente a la cual pertenece y con la ayuda de este arreglo se puede determinar el arreglo shortest en un esfuerzo $O(\#V)$.

Por otro lado si K es el número de estados, el número de componentes conectadas de (V,T) esta dividido por al menos dos en cada estado, ya que cada componente esta formada por dos componentes del estado anterior, que fueron unidas via una arista del arreglo shortest. En el primer estado $k=\#V$ y k es dividido por dos o mas en cada estado hasta que K es uno. Entonces puede haber a lo más $\log \#V$ estados en el algoritmo. Por lo tanto el número de operaciones es del orden $O(\#E \log \#V)$.

#

EJEMPLO 4.

Con la misma gráfica del ejemplo anterior encontrar el AEM por medio del algoritmo TARJAN.

$$T = \emptyset \quad C = \{1, 2, \dots, 11\} \quad S_i = \{i\} \quad i = 1, \dots, 11$$

iteración 1

$$T = \{(v_1, v_2), (v_1, v_8), (v_3, v_4), (v_3, v_7), (v_4, v_{11}), (v_3, v_7), (v_6, v_7), (v_6, v_7), (v_{10}, v_{11})\}$$

$$S_1 = \{v_1, v_2, v_8\} \quad S_2 = \{v_3, v_7\} \quad S_3 = \{v_3, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}\}$$

$$C = \{S_1, S_2, S_3\}$$

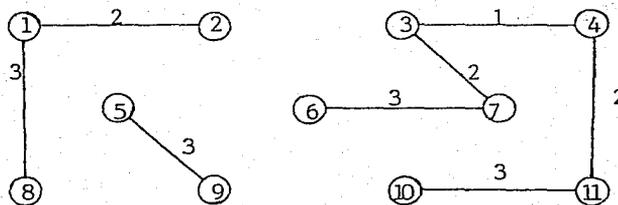
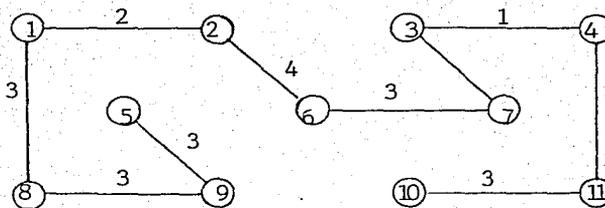


fig. 2.4

iteración 2

$$T = T \cup \{(v_2, v_4), (v_2, v_6)\}$$

$$S = S_1 \cup \{(v_2, v_4)\} \cup S_2 \cup \{(v_2, v_6)\} \cup S_3$$



Solución óptima

fig. 2.5

2.3 Extensiones

2.3.1 El Problema del Árbol de Peso Máximo (APM).

En la sección anterior se desarrollan técnicas para determinar la solución del problema del AEM. A continuación se plantea un problema alternativo llamado árbol de peso máximo.

Dada una gráfica $G=(V,E)$ y un parámetro de peso $w_{ij} \geq 0$ asociado a cada arista $(v_i, v_j) \in E$ se desea encontrar un árbol T tal que el peso $w(T)$ asociado al árbol sea máximo.

Resulta interesante verificar que la determinación del AEM y del APM tienen una estrecha relación. Considérese una gráfica $G=(V,E)$ y un peso $w \geq 0$ asociado a cada arista $(v_i, v_j) \in E$; si se define la distancia $d(v_i, v_j) = W - w_{ij}$, donde $W = \max\{w_{ij}\}$, al aplicar el algoritmo PRIM se selecciona en cada iteración la arista de distancia mínima, que es equivalente a seleccionar la arista de peso máximo en el problema del APM. Por tanto si T es el árbol asociado a G es posible relacionar directamente $w(T)$ y $d(T)$ mediante la expresión $w(T) = (\#V - 1)W - d(T)$. Esto conduce a enunciar los siguientes resultados.

Proposición 2.1. El árbol de peso máximo de G bajo el peso w , es la unión de los árboles de expansión mínima bajo d , donde d es la distancia definida anteriormente.

Teorema 2.4. Sea $\{(U_1, T_1), \dots, (U_k, T_k)\}$ un bosque generador de V y sea (u, v) un arco que sale de U_1 y que tiene peso máximo. Entonces de entre todos los árboles que están contenidos en $T=UT_1$ existe uno que es óptimo y que contiene a (u, v) .

Demostración

Es análoga a la demostración del teorema 2.1.

#

2.3.2 El Problema de Steiner

Un problema intimamente relacionado con el problema del AEM, pero mucho más difícil es el de Steiner en gráficas. En este problema el árbol T debe generar un subconjunto P de V . Los otros vértices en $V-P$ pueden ser generados o no por T . El problema en una gráfica consiste en determinar el árbol de expansión mínima de cualquier subgráfica $G_s = (V_s, E)$ de G con $P \subset V_s \subset V$.

El problema de Steiner fue propuesto originalmente en geometría así; dado un conjunto P de puntos sobre el plano Euclidiano conectados por líneas, se desea encontrar la conexión entre todos los puntos de tal manera que la longitud total de las líneas sea mínima. No se permite que dos líneas se encuentren donde quiera excepto en el conjunto P de puntos, entonces el problema es encontrar el AEM de una gráfica equivalente de $\#P$ vértices, y el parámetro asociado a cada arco son las distancias entre los puntos del conjunto P . Sin embargo cuando otros vértices artificiales son añadidos (P'), llamados puntos de Steiner, la longitud del AEM (árbol de Steiner) asociado al conjunto resultante $P' \cup P$ es de longitud menor que el original.

El problema de Steiner sobre el plano Euclidiano fue estudiado y muchas propiedades del árbol de Steiner son bastante conocidas, algunas de ellas son:

a) Para un punto de Steiner el grado es tres. Esto se demuestra al considerar que el ángulo entre las aristas incidentes en los puntos deben de ser de 120° y entonces exactamente tres aristas inciden en los puntos de Steiner. Estos puntos son además los circuncentros de triángulos imaginarios formados por los tres vértices de las aristas que inciden, se observa que estos puntos pueden ser a su vez puntos de Steiner.

b) Para un vértice $p_1 \in P$ el $d(p_1) \leq 3$. Si $d(p_1) = 3$ entonces el ángulo entre cualesquier par de aristas de p_1 es 120° , si $d(p_1) = 2$ el ángulo es mayor de 120° .

c) El número de puntos de Steiner en el árbol asociado es $0 \leq k \leq n-2$, donde n es el número de puntos en el plano.

A pesar de la atención de que fue objeto este problema, solo para aquellos donde el número de puntos es muy pequeño (alrededor de 10 puntos) se ha resuelto en forma óptima, por medio de los algoritmos mencionados en las secciones anteriores. Para problemas en donde $\#P$ es muy grandes no funcionan por lo que se considera no resuelto el problema de Steiner.

2.3.3 Ejemplo de Aplicación.

Considere el problema de los teléfonos con 12 personas y la red asociada como sigue:

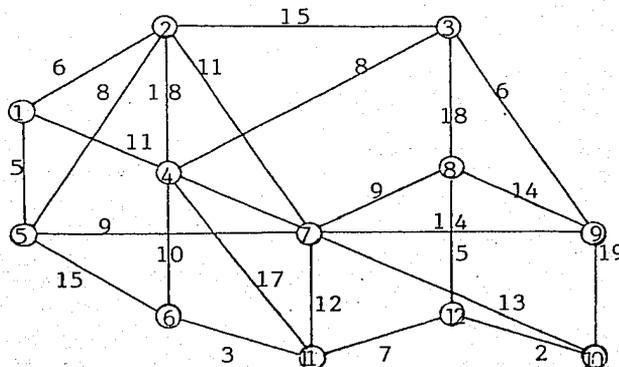


fig. 2.6

Se desea obtener la solución mediante los programas basados en los algoritmos Prim y Tarjan.

El arbol de expansion minima es :

Nodo	Nodo
Inicial	Final
1	2
1	9
3	4
4	11
5	6
6	7
6	12
7	8
9	11
10	11
11	12

La longitud del arbol es : 63

EL PROBLEMA DEL APAREAMIENTO MÁXIMO

Un problema básico de la optimización discreta es el denominado problema de apareamiento máximo cuya estructura conceptual es sencilla, pero determinar su solución es complicado. Un aspecto esencial de este problema es que siendo un problema combinatorio se puede resolver utilizando métodos de gráficas. Esta observación hace conjeturar que existen propiedades en este problema que son generalizables como veremos en el capítulo cinco, dicho problema tiene relación con algunos aspectos de matroides. En este capítulo se describe este problema, sin embargo se analiza el caso de gráficas bipartitas y su correspondiente solución.

Este capítulo se desarrolla como sigue: En la primera sección se describe el problema de apareamiento en cualquier gráfica, su análisis en la segunda sección, y en las otras dos secciones se analiza el caso de gráficas bipartitas y su correspondiente solución. Se incluyen ejemplos que se resuelven con los programas de computadora descritos en el apéndice.

3.1 Descripción del Problema

Definición 3.1. Dada una gráfica simple $G=(V,E)$, se dice que el conjunto $E_0 \subseteq E$ es un apareamiento en G si no existen dos aristas de E_0 adyacentes entre si.

Se observa que si E_0 es un apareamiento y $E_1 \subseteq E_0$, entonces E_1 es un apareamiento.

Definición 3.2. Un vértice v es saturado por un apareamiento E_0 si alguna arista de E_0 es unida a v , y $S(E_0)$ denota el conjunto de vértices saturados. Los nodos que no son incididos por ninguna arista de E_0 se llaman expuestos. Un apareamiento que satura todos los vértices de G es llamado perfecto.

EJEMPLO 1

Considérese la gráfica de la fig. 3.1 cuyo apareamiento es $E_0 = \{(v_2, v_5), (v_4, v_7), (v_5, v_6), (v_7, v_{10})\}$

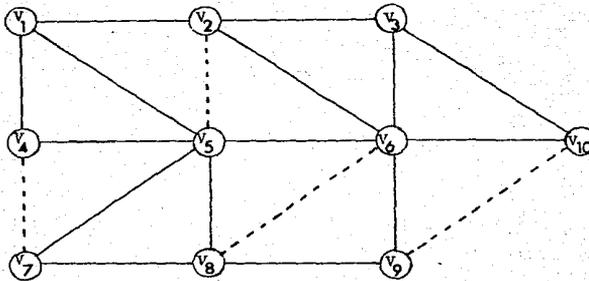


fig. 3.1

Definición 3.3. Dada una gráfica $G=(V,E)$ el problema del apareamiento máximo (PAM) consiste en determinar un apareamiento de máxima cardinalidad. Es claro que un apareamiento perfecto es máximo.

EJEMPLO 2

EL PROBLEMA DEL AJEDREZ TRUNCADO

Considérese un tablero de ajedrez que tiene truncados los extremos derecho inferior e izquierdo superior (fig. 3.2.a). Se tienen 31 fichas, cada una cubriendo dos cuadros adyacentes del tablero. ¿Es posible cubrir 62 cuadros con 31 fichas?. Este problema es equivalente a encontrar el apareamiento máximo en una gráfica cuyos vértices corresponden a los cuadros del tablero (fig. 3.2.b), y se dice que dos nodos son adyacentes si representan cuadros adyacentes.

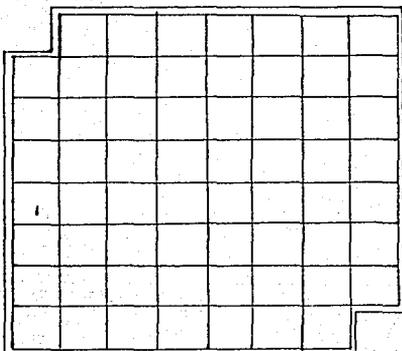


fig. 3.2.a

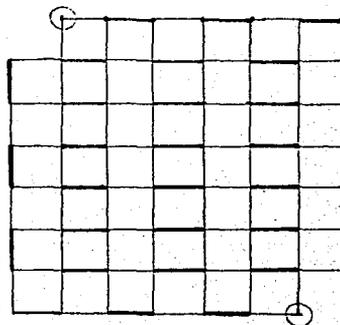


fig. 3.2.b

Por la forma en que se han eliminado los cuadros del tablero el número de cuadros negros y blancos no es el mismo, difieren en dos, debido a esto no existe un apareamiento perfecto, sin embargo cada arreglo de fichas cubre el mismo número de cuadros negros y blancos. Se observa que en el tablero completo se tienen el mismo número de cuadros negros y blancos por lo que el número de fichas necesarias para cubrir los cuadros no es fácil de calcular. Esto se debe a que se consideran todas las posibles combinaciones de aparear los cuadros. En problemas de este tipo es necesario recurrir a la teoría de apareamiento y los algoritmos desarrollados en este marco.

3.2 Análisis del problema de apareamiento máximo.

En esta sección se analizan los resultados básicos de la teoría en cuestión.

Definición 3.4. Una cadena $F = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ cuyas aristas pertenecen alternativamente a E_0 y $E - E_0$ se llama cadena alternante. Una cadena alternante entre un par de vértices expuestos se denomina aumentante.

EJEMPLO 3

Considérese la gráfica del ejemplo 1 (fig. 3.1).

$F = \{v_1, v_2, v_5, v_4, v_7, v_8, v_6, v_9, v_{10}\}$ es una cadena aumentante.

Lema 3.1. Sea $G = (V, E)$ una gráfica simple y no dirigida, sean E_0 y E_1 dos apareamientos de G . Considérese la gráfica parcial $G' = (V, E_0 \oplus E_1)$, entonces cada componente conectada de G' es de alguno de estos tipos:

- a) Un vértice aislado.
- b) Ciclos elementales de longitud par cuyas aristas están alternativamente en E_0 y E_1 .
- c) Cadenas alternantes cuyas aristas están alternativamente en E_0 y E_1 , los nodos inicial y final de la cadena son ambos no saturados en uno de los apareamientos.

Demostración

Sea $v \in V$ entonces:

Caso 1. Si $v \in S(E_0 - E_1)$ y $v \in S(E_1 - E_0)$, v es un nodo aislado.

Caso 2. Si $v \in S(E_0 - E_1)$ y $v \in S(E_1 - E_0)$, entonces v es el extremo de alguna arista en $E_0 - E_1$ y ninguna otra arista de $E_0 - E_1$ es unida a v , ya que E_0 es un apareamiento; y ninguna arista de $E_1 - E_0$ es unida a v . Se afirma que $v \in S(E_1)$, pues si $v \in S(E_1)$ alguna arista de E_1 es unida a v y entonces $v \in S(E_1 - E_0)$, lo cual es falso. De donde $v \in S(E_1)$ y por tanto existe una única arista en $E_0 - E_1$ unida a v .

Caso 3. Si $v \in S(E_1 - E_0)$ y $v \in S(E_0 - E_1)$ por el caso 2. existe una única arista de $(E_1 - E_0)$ y una única arista de $(E_0 - E_1)$ unida a v .

Puesto que los tres casos son exhaustivos el máximo grado de la gráfica parcial G' es dos. Por lo que las componentes conexas de G' debe ser de alguno de los tipos descritos.

#

Como consecuencia del lema anterior es posible establecer el resultado básico que caracteriza a un apareamiento máximo y sirve de base para establecer los métodos de solución.

Teorema 3.1. Un apareamiento E_0 es máximo si y solo si no existen cadenas aumentantes.

Demostración

Si E_0 es un apareamiento máximo para el cual existe una cadena aumentante, al intercambiar las aristas de E_0 por las que están en $(E-E_0)$ se obtiene un nuevo apareamiento E_1 tal que $\#E_1 = \#E_0 + 1$ por lo que E_0 no es máximo.

Supóngase que para el apareamiento E_0 no existen cadenas aumentantes. Sea E_1 un apareamiento máximo, entonces E_1 satisface la condición anterior y así $\#(E_0 - E_1) = \#(E_1 - E_0)$ entonces las cadenas alternantes de la gráfica parcial G' definida como en el lema, son de longitud par y por tanto $\#E_0 = \#E_1$, de donde el apareamiento es máximo.

#

3.3 Apareamiento en Gráficas Bipartitas

Teorema 3.2 (Kőnig). Para una gráfica bipartita $G=(U,V,E)$ el máximo número de aristas en un apareamiento es igual a $\min\{\#(V-A) + \#F^{-1}(A)\}$.

Demostración

Considérese la gráfica asociada a un problema de transporte con vértices $U \cup V$ y nodos fuente y sumidero s y t respectivamente, cada elemento $u_i \in U$ es unido a la fuente s por un arco (s, u_i) con capacidad uno y el nodo sumidero t es unido a cada nodo $v_j \in V$ por un arco (v_j, t) de capacidad uno. Por último cada nodo u_i es unido al nodo v_j por un arco (u_i, v_j) de capacidad uno si $v_j \in F(u_i)$ (fig. 3.3).

Para un conjunto $A \subseteq U$ la demanda total de A es $\#A$. El máximo flujo que puede ser enviado a A es igual a $\#F(A)$, así un flujo en la gráfica define un apareamiento. Se dice que u_i está apareado con v_j si la unidad de flujo pasa a través del arco (u_i, v_j) , inversamente cada apareamiento define un flujo.

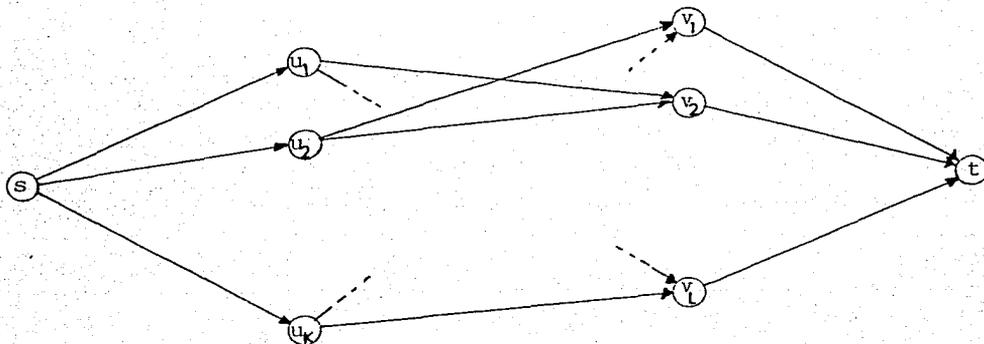


fig. 3.3

Al replantear el PAM como uno de flujo, se desea determinar el máximo flujo entre s y t . Por el teorema A.1

$$\begin{aligned} \text{Máx } \#E_0 &= \#U - \min \{ \#F(A) - \#A \} \\ &= \min \{ \#(U-A) + \#F(A) \} \end{aligned}$$

#

Definición 3.5. Si una gráfica bipartita $G=(U,V,E)$ tiene un apareamiento que satura a todos los vértices de U se dice que U puede ser apareado hacia el interior de V . Si este apareamiento también satura todos los nodos de V se dice que U puede ser apareado sobre V .

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema 3.2.

Teorema 3.3. En una gráfica bipartita $G=(U,V,E)$, U puede ser apareado hacia el interior de V si y solo si $\#F^{-1}(A) \geq A$ ($A \in V$)

Demostración

Por el teorema anterior U puede ser apareado con V si y solo si

$$\#U = \max \#E_0 = \min \{ \#(U-A) + \#F^{-1}(A) \}$$

equivalente a

$$\min \{ \#F^{-1}(A) - \#A \} = 0$$

o bien

$$\#F^{-1}(A) - \#A \geq 0$$

por tanto

$$\#F^{-1}(A) \geq \#A$$

#

3.4 Algoritmo para determinar el Máximo Apareamiento en Gráficas Bipartitas

Propósito. Determinar el máximo apareamiento.

El algoritmo esta basado es los teoremas 3.2 y 3.1, es decir, resuelve el problema como uno de máximo flujo y determina cadenas aumentantes sobre gráficas auxiliares que construye. El algoritmo requiere como datos la gráfica bipartita $G=(U,V,E)$.

Descripción del algoritmo

BEGIN

FOR ALL $v \in V \setminus U$ DO $\text{mate}(v) := 0$

BEGIN

FOR ALL $v \in V$ DO $\text{exposed}(v) := 0$;

$A := 0$

FOR ALL $(u,v) \in E$ DO

IF $\text{mate}(u) = 0$ THEN $\text{exposed}(v) := u$ ELSE

IF $\text{mate}(u) \neq v$ THEN $A := A \cup (v, \text{mate}(u))$;

```

Q:=∅ DO
FOR ALL v∈V DO IF mate(v)=0 THEN Q:=Qu{v}, label(v):=0;
WHILE Q≠∅ DO
BEGIN
Sea v un nodo en Q;
elimine v de Q;
    IF exposed(v)≠0 THEN augment(v), go to stage;
    FOR ALL v' no etiquetado tal que (v,v')∈E DO
        label(v'):=v, Q:=Qu{v'};
    END
END
END
END
END

```

PROCEDURE

```

IF label(v)=0 THEN mate(v):=exposed(v), mate(exposed(v)):=v;
ELSE BEGIN
    exposed(label(v)):=mate(v);
    mate(v):=exposed(v);
    augment(label(v))
END
END

```

Teorema 3.4. El algoritmo resuelve correctamente el problema de apareamiento para gráficas bipartitas $G=(U,V,E)$ en un esfuerzo computacional del orden de $O(\min(\#U,\#V)\#E)$.

Demostración

El algoritmo termina cuando no hay trayectorias en las gráficas auxiliares de un nodo expuesto de V a un nodo no etiquetado. por la construcción de las gráficas auxiliares no hay trayectorias aumentantes en G respecto al apareamiento y por el teorema 3.1 este es óptimo.

Se observa que el apareamiento en G no puede ser mayor que el $\min(\#U,\#V)$, ya que cada trayectoria aumentante agrega en uno el apareamiento de donde se tiene un esfuerzo computacional del orden de $\min(\#U,\#V)$. La construcción de la gráfica auxiliar y al cálculo del arreglo exposed requiere de un esfuerzo del orden de $O(\#E)$, esto se debe a que tiene $\#E$ aristas. Las trayectorias en las gráficas auxiliares son dadas en un esfuerzo $O(\#A)=O(\#E)$, finalmente el apareamiento requiere de un esfuerzo $O(\#V)$. Por tanto se sigue el teorema.

#

GRAFICAS Y MATROIDES

Las propiedades matemáticas que presentan los conjuntos de vectores linealmente independientes en un espacio son semejantes a las propiedades de los árboles y de sus subgráficas. Este hecho ha llamado la atención de algunos matemáticos y los motivó a construir una teoría que resumiera tales propiedades y sirviera de base para el estudio y solución de otros problemas matemáticos, esta teoría corresponde a las matroides. El propósito de este capítulo es describir la relación que existe entre gráficas y matroides, así como unificar algunos de los resultados que existen sobre métodos de solución de matroides aplicados a gráficas, específicamente el problema del árbol de expansión mínima (AEM).

Este capítulo se desarrolla como sigue: En la primera sección se describen aspectos básicos de matroides, la relación de matroides con gráficas en la segunda sección. La relación del método de solución del AEM con el algoritmo GLOTON en matroides se describe en la tercera y cuarta sección.

4.1 Aspectos básicos de matroides.

Definición 4.1 Un sistema de subconjuntos $S=(E,I)$ consiste de un conjunto finito E y una familia I de subconjuntos de E cerrada bajo la inclusión. A los elementos de I se les llama independientes, y al resto dependientes.

EJEMPLO 1

Sea E el conjunto de columnas de la matriz A de orden $n \times m$, y sea I la colección de columnas linealmente independientes de A . Entonces $S=(E,I)$ es un sistema de subconjuntos.

EJEMPLO 2

Sea $G=(V,E)$ una gráfica no dirigida y $T=(V_T, E_T)$ un subárbol de G , entonces $S=(E,M)$ es un sistema de subconjuntos donde M es la colección de subárboles.

EJEMPLO 3

Sea $G=(V,E)$ una gráfica como en el ejemplo anterior, sea M una colección de vértices apareados en G entonces $S=(E,M)$ es un sistema de subconjuntos.

A partir de la definición anterior es posible establecer el concepto de matroide que es de suma importancia en el presente trabajo.

Definición 4.2. Una matroide $M=(E,I)$ es un sistema de subconjuntos tales que:

a) $I \neq \emptyset$

b) Si I_p, I_{p+1} pertenecen a la familia I , conteniendo p y $p+1$ elementos respectivamente, entonces existe un elemento $e \in I_{p+1} - I_p$ tal que $I_p + e$ pertenece a I .

EJEMPLO 4

Considere el sistema de subconjuntos $S=(E,I)$ del ejemplo 1, entonces si I_p, I_{p+1} son conjuntos de vectores linealmente independientes con p y $p+1$ elementos ($p < m$) es claro que existe un vector $e \in I_{p+1} - I_p$ tal que $I_p + e$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Teorema 4.1. Sea $M=(E,I)$ un sistema de subconjuntos, entonces los siguientes postulados son equivalentes:

a) M es matroide

b) Si A es un subconjunto de E e I, I' son subconjuntos maximales independientes de A , entonces $\#I = \#I'$.

Demostración

Si M es matroide e I, I' son subconjuntos maximales independientes tales que $\#I < \#I'$, entonces existe un subconjunto I'' de I tal que $\#I'' = \#I - 1$. Ahora se aplica la definición de matroide a los subconjuntos I'', I' ; entonces existe un elemento $e \in I'' - I'$ tal que $I'' + e \in I'$, lo que contradice la condición de maximal del conjunto I' . Por tanto $\#I = \#I'$.

En forma inversa, sean I_p, I_{p+1} subconjuntos de I con p y $p+1$ elementos respectivamente; sea $A = I_p \cup I_{p+1}$, entonces para $A \in E$ existen subconjuntos maximales I, I' de A en I , y además existe $e \in I_{p+1} - I_p$ tal que $I_p + e$ pertenece a I , por tanto M es matroide.

#

El teorema anterior permite identificar una matroide sin recurrir directamente a la definición.

Definición 4.3. Sea $M = (E, I)$ una matroide y $A \in E$ el rango de A , denotado por $R(A)$, es la cardinalidad de los subconjuntos maximales contenidos en A .

En el ejemplo 1 el rango de la matriz A es el máximo número de vectores columna linealmente independientes; y en el ejemplo 2 los árboles para una gráfica con n nodos tienen $n-1$ arcos. Por un lado se sabe que el rango de una matriz y los árboles tienen una estrecha relación con algunos conceptos como el de base, dependencia e independencia lineal lo que permite intuir que algunos conceptos del algebra lineal pueden ser extendidos a la teoría de matroides. Por otro lado como consecuencia del teorema 4.1 el rango de los subconjuntos de E está bien definido lo que permite definir los conjuntos maximales independientes como bases.

Así como en el algebra lineal existen teoremas para caracterizar las bases, también existe uno con el mismo fin en la Teo. de Matroides.

Teorema 4.2. Sea B el conjunto de bases de una matroide entonces

a) $B \neq \emptyset$ y ningún conjunto de B contiene a otro propiamente.

b) Si $B_1, B_2 \in B$ y e_1 es cualquier elemento de B_1 , entonces existe un elemento e_2 de B_2 tal que $B_1 - e_1 + e_2 \in B$.

Demostración

El postulado a) es inmediato. Sea $p+1 = \#B_1 = \#B_2$ entonces $\#(B_1 - e_1) = p$ de la definición de matroide existe $e_2 \in B_2$ tal que $B_1 - e_1 + e_2 \in B$.

#

En el caso de una gráfica con n nodos si T_1 y T_2 son árboles diferentes, y e_1 es una arista arbitraria en T_1 , entonces existe una arista $e_2 \in T_2$ que al ser añadida a T_1 forma un único ciclo (teo. 1.2) con e_1 , pero al ser eliminada e_1 de $T_1 + e_2$ desaparece el ciclo formándose así un nuevo árbol. Se observa que este teorema establece los cambios de base lo cual es común en los algoritmos básicos de programación lineal.

Cabe señalar que una matroide M está completamente definida por la colección B de sus bases, es decir, dada B la familia I puede ser expresada como $I = \{I : I \subset B \text{ para alguna } B \in B\}$.

Otro concepto relacionado con el álgebra lineal y gráficas es el siguiente:

Definición 4.4. Sea $M = (E, I)$ un matroide, si $D \subset E$ es tal que $D \notin I$ entonces D es llamado dependiente y un conjunto C minimal dependiente es denominado **circuito**.

Un circuito en el ejemplo 1 es un conjunto A de vectores linealmente dependiente y tal que al ser eliminado cualquier elemento v de A , el nuevo conjunto es linealmente independiente; en el ejemplo 2 un circuito es un ciclo en un gráfica.

Un teorema relacionado con este concepto y muy importante en la teo. de matroides es el siguiente.

Teorema 4.3. Sea $I \in \mathcal{I}$ y $e \in E$. Entonces $I+e \in \mathcal{I}$ o $I+e$ contiene un único circuito.

Demostración

Supóngase que $I+e \in \mathcal{I}$, entonces I es base. Sea $C = \{c : I+e-c \in \mathcal{I}\}$, se afirma que C es un circuito.

a. C es dependiente. Supóngase que C es independiente entonces $C \in \mathcal{I}$, por lo que C puede ser extendido a una base es decir $\#C = \#I$. Así $C = I+e-d$ para alguna $d \in E$ (teo. 4.2), pero de la definición de C , $d \in C$ lo cual es una contradicción.

b. C es minimal ya que $C \setminus c \in \mathcal{I}$ y si $c \in C$ entonces $C - cc \in \mathcal{I} + e - c$ y como I es cerrado bajo la inclusión $C - c \in \mathcal{I}$, de donde C es minimal. Por tanto C es un circuito.

Sea D otro circuito entonces $D \subset C$ (ya que C es minimal), entonces existe $c \in C - D$ tal que $D \cup c \in \mathcal{I} + e - c$, pero $I+e-c \in \mathcal{I}$ por lo que D no puede ser circuito.

Por tanto C es un único circuito.

El último concepto que se presenta aquí sobre matroides relacionado con algebra lineales es el de generador.

Definición 4.5. Un generador de A ($A \subseteq E$) es un conjunto de máxima cardinalidad S de A tal que el rango de S es igual al rango de A .

En el ejemplo 1 un generador de A es cualquier subconjunto de máxima cardinalidad $A' \subseteq A$ que genera el mismo subespacio vectorial que A .

Teorema 4.4. Cualquier subconjunto A de E tiene un único generador definido como $Sp(A) = \{e \in E : R(A+e) = R(A)\}$

Demostración

Sea $e \in S$ un generador de A , se desea demostrar que $S = Sp(A)$.

Sea $e \in S$ y supóngase que $R(A+e) \neq R(A)$ entonces $R(A+e) > R(A)$; como S es un generador $R(S) = R(A+e)$ de donde $R(S) > R(A)$, lo cual es falso por lo que $S \subseteq Sp(A)$.

Sea $e \in Sp(A)$ entonces $R(A+e) = R(A)$ así una base de A es una base de $A+e$ y por ende del generador de A , $Sp(A)$, por lo tanto $R(Sp(A)) = R(A)$. Puesto que $R(A) = R(S)$ se tiene que $R(Sp(A)) = R(S)$ y ya que $S \subseteq Sp(A)$ se concluye que $Sp(A) = S$.

#

Es claro que si B es una base $Sp(B) = E$, esto significa que una matroide se puede generar a partir de una base. Un conjunto A que es igual a su generador se llama cerrado.

4.2 Relación de Matroides y Gráficas

En la sección 4.1 para ejemplificar cada uno de los conceptos se utilizan básicamente una matriz y una gráfica simple (ejemplos 1 y 2 respectivamente) así mismo para los teoremas. Esto no es casualidad pues existen dos clases de matroides, llamadas Matric y Gráficas, las que están relacionadas con estos ejemplos. Sin embargo en esta sección solo se explica la relación gráficas-matroides en el siguiente teorema.

Teorema 4.5. Considerese una gráfica simple y no dirigida $G=(V,E)$. Sea $M=(E,F)$ un sistema de subconjuntos, donde F es la familia de subconjuntos de E que son bosques generadores. Entonces M es una matroide, inversamente una matroide donde E es un subconjunto de parejas (u,v) y $u,v \in V$ y F como se definió anteriormente es la matroide asociada a una gráfica simple no conectada $G=(V,E)$.

Demostración

La condición a) del teorema 4.2 es obvia.

Sea A un subconjunto de E , En la gráfica A corresponde a una o más componentes conectadas, para cada una existe una familia de árboles generadores, por lo que existen una familia de bosques generadores de A que corresponden a las bases, y tienen la misma cardinalidad (teo. 4.1). Por tanto $M=(E,F)$ es una matroide.

Ahora si $M=(E,F)$ es una matroide de las características señaladas es obvio que se genera una gráfica simple y conectada.

#

4.3 Matroides y el Arbol de Expansión Mínima.

Ahora cabe preguntarse como establecer la realación del problema del AEM en términos de matroides. En lugar de recurrir directamente al problema se recurre al problema alternativo el árbol de peso máximo. Por el teorema 4.4 se sabe que la gráfica $G=(V,E)$ se puede representar por medio de una matroide $M=(E,F)$, donde F es la familia de de los bosques generadores. Por un lado un árbol se representa en una matroide por medio de una base para el conjunto E . Por otro lado el peso máximo de un árbol equivale a la asignación de un peso y un orden a los elementos de E , en consecuencia el problema del APM equivale a determinar una base de máximo peso, elemento a elemento, que cualquier otra base.

Al establecerse lo anterior es deseable encontrar un algoritmo basado en la teoria de matroides que resuelva correctamente el APM, a continuación se desarrolla la teoria necesaria para esto.

Definición 4.6. Una ponderación del conjunto E es la asignación de pesos a los elementos de E .

Cualquier ponderación de los elementos de un conjunto induce un orden lexicográfico sobre sus subconjuntos. En particular, si $M=(E,I)$ es una matroide una ponderación de E induce un orden lexicográfico sobre los conjuntos independientes de I .

Definición 4.7. Sean $I_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $I_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ($m \neq n$), dos subconjuntos independientes, los cuales están listados en orden decreciente respecto al peso. Entonces I_1 es mayor lexicográficamente que I_2 si existe alguna k tal que $w(a_i) \geq w(b_i)$ para $i=1, 2, \dots, k-1$ y $w(a_k) > w(b_k)$; en otro caso $w(a_i) = w(b_i)$ para $i=1, 2, \dots, n$ ($m > n$). Un conjunto que es mayor o igual que otro conjunto es llamado máximo lexicográficamente.

Es claro que un conjunto independiente máximo lexicográficamente es una base, y si todos los pesos de los elementos son distintos entre sí esta base es única.

Teorema 4.6 (Rado, Edmonds). Sea I una familia de conjuntos independientes de una matroide $M = (E, I)$, entonces

- Para cualquier ponderación no negativa de los elementos de E un conjunto máximo lexicográficamente tiene peso máximo.
- Si $M = (E, I)$ es un sistema de subconjuntos para el cual $I \neq \emptyset$ y que satisface a) es una matroide.

Demostración

Supóngase que existe una base $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ máxima lexicográficamente que no tiene peso máximo. Sea I la familia de conjuntos independientes de una matroide ponderada, y sea $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ otro conjunto independiente cuyos elementos son indexados en orden decreciente respecto al peso ($w(a_i) > w(a_{i+1})$), se afirma que no existe k tal que $w(b_k) < w(a_k)$, pues de existir alguna k es posible definir los siguientes conjuntos independientes

$$B_{k-1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$$

$$I_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

entonces para alguna i ($1 \leq i \leq k$) el conjunto

$$B' = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, a_k\}$$

es independiente y lexicográficamente mayor que B , lo cual es una contradicción. Entonces $w(b_k) \geq w(a_k)$ para toda k , por tanto B es un conjunto maximal independiente de máximo peso.

Ahora supóngase que M no es matroide, entonces existe $A \in E$ y dos subconjuntos maximales I, I' de A en I tales que $\#I < \#I'$. Para cada $e \in E$ sea $d > 0$ y suficientemente pequeño, entonces se define el peso como sigue:

$$w(e) = \begin{cases} 1+d & \text{si } e \in I \\ 1 & \text{si } e \in I' \setminus I \\ 0 & \text{si } e \in E - (I \cup I') \end{cases}$$

Entonces I está contenido en un conjunto máximo lexicográficamente cuyo peso es menor que el de I' . Es decir, para cualquier ponderación no negativa de elementos en E existe un conjunto máximo lexicográficamente en I que no tiene peso máximo. Por tanto M es matroide.

#

La demostración del teorema 4.5 afirma que una base máxima lexicográficamente no solo tiene peso máximo, sino que la base es mas pesada elemento a elemento que cualquier otro conjunto independiente. Es decir, si B es una base máxima lexicográficamente e I es un conjunto independiente el peso del elemento k mas pesado de B es al menos igual al elemento k mas pasado de I ; esto se cumple para cualquier k .

Ahora se sabe que para una matroide existe un óptimo, en particular para una matroide gráfica, y el objetivo es entonces determinarlo por medio de un algoritmo basado en la teoría de matroides llamado GLOTON.

4.4 Algoritmo GLOTON

Propósito.

Determinar un conjunto máximo lexicográficamente en una matroide $M=(E, I)$.

El algoritmo selecciona los elementos de la matroide en orden respecto al peso, rechazando aquellos que destruyan la independencia del conjunto hasta ahora determinado.

Descripción del algoritmo GLOTON.

BEGIN

$I := \emptyset$

 WHILE $E \neq \emptyset$ DO

 BEGIN

 Sea $e \in E$ cuyo peso es máximo;

 ENTONCES $E = E \setminus \{e\}$

 IF $I + e \in I$ THEN $I := I + e$

 END

 END

Se observa que el algoritmo PRIM es de este tipo.

EJEMPLO 5

Dada una gráfica $D=(V,E)$ y un peso $w(e) \geq 0$ para cada $e \in E$ se puede encontrar una base B de A con peso máximo, donde B es una base si y solo si dos arcos de B no tienen el mismo nodo terminal

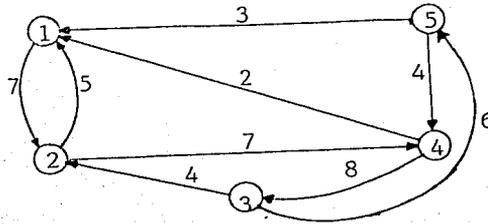


fig. 5.1

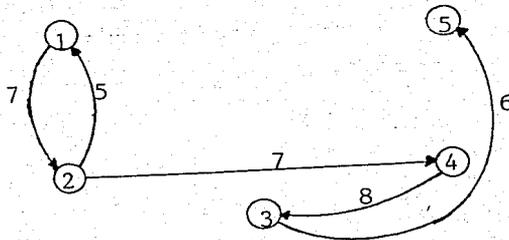
Al aplicar el algoritmo se tiene:

iteración 1

$$E = E - \{(4,3)\} \text{ e } I = \{(4,3)\}$$

iteración 5

$$E = E - \{(4,3), (2,4), (1,2), (3,5), (2,1)\} \text{ e } I = \{(4,3), (2,4), (1,2), (3,5), (2,1)\}$$



Solución óptima

APAREAMIENTO MAXIMO EN GRAFICAS BIPARTITAS Y MATROIDES

En este capitulo se analiza la relación del problema del apareamiento máximo con las matroides, este problema se plantea como la intersección de dos matroides partición y los conceptos utilizados en el PAM se generalizan.

El capítulo contiene dos secciones unicamente, en la primera se plantea el PAM y se definen los conceptos necesarios para llegar a los resultados básicos del apareamiento, estos resultados se presentan en la segunda sección.

5.1 Gráficas Bipartitas y Matroides

Considérese la gráfica bipartita $G=(U,V,E)$ y sea M una familia de apareamientos en G . SI $M=(E,M)$ es una matroide, entonces cualquier conjunto maximal independiente es máximo, es decir, una base de M es un apareamiento de máxima cardinalidad, sin embargo en la fig. 5.1 se muestra una gráfica bipartita en donde el apareamiento es una base de una matroide pero no es de cardinalidad máxima. Esto se debe a que una gráfica bipartita no es propiamente una matroide, pero es la intersección de dos matroides partición.

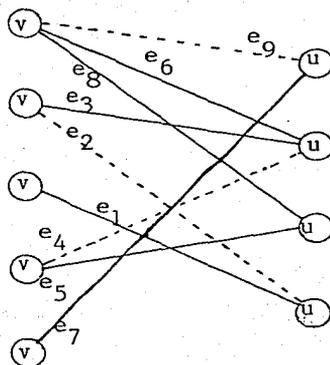


fig. 5.1

Para establecer la afirmación anterior es necesario enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.1. Sea E un conjunto finito y $P=\{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ una partición del conjunto E . Un subconjunto I de E es independiente si y solo si no existe n dos elementos de I en el mismo conjunto de P , es decir, $\#(I \cap E_j) \leq 1$ $j=1, \dots, p$. Entonces $M_P=(E, I)$ es una matroide llamada **partición**.

Demostración (se omite)

Considérese una gráfica bipartita, simple y no dirigida $G=(U, V, E)$. Sea P_1 una partición de E que define una relación de incidencia en los nodos de U , análogamente P_2 define una relación de incidencia en los nodos de V . Al considerar estas particiones es posible establecer el teorema que relaciona el FAM con la intersección de matroides.

Teorema 5.2. Sean $M_1=(E, I_1)$ y $M_2=(E, I_2)$ las matroides particionadas determinadas por las particiones P_1 y P_2 respectivamente, entonces un subconjunto I de E es un apareamiento en G si y solo si I es la intersección de M_1 y M_2 .

Demostración

Si I es un apareamiento no existen dos aristas de I que compartan el mismo nodo en U , y tampoco existen dos aristas en I que compartan el mismo nodo en V . Es obvio que $I \subseteq I_1 \cap I_2$.

En forma inversa sea $I \subseteq I_1 \cap I_2$ y sean $P_1=\{E_1, \dots, E_p\}$ $P_2=\{E_1, \dots, E_m\}$ entonces $\#(I \cap E_j) \leq 1$ $j=1, \dots, p$ y $\#(I \cap E_k) \leq 1$ $k=1, \dots, m$; por tanto I define un apareamiento.

EJEMPLO 1

Considérese la gráfica bipartita de la fig. 5.1 entonces las particiones son:

$$P_1 = \{(e_7, e_6, e_8), (e_2, e_3), (e_1), (e_4, e_5), (e_7)\} \quad y$$

$$P_2 = \{(e_7, e_7), (e_6, e_3, e_4), (e_8, e_5), (e_1, 2)\}$$

Definición 5.1. El problema del máximo apareamiento (PAM) consiste en determinar un subconjunto I independiente en la intersección $I_1 \cap I_2$ cuya cardinalidad sea máxima.

A continuación se establece en términos de matroides los conceptos equivalentes a las cadenas alternantes y aumentantes, cuyo nombre es ahora sucesiones.

Sea I cualquier subconjunto independiente en M_1 y M_2 , se desea construir una sucesión aumentante respecto a I como sigue.

El primer elemento e_1 de la sucesión es tal que $I+e_1$ es independiente en M_1 ; si $I+e_1$ independiente en M_2 la sucesión esta completa, pero si $I+e_1$ es dependiente en M_2 y entonces $I+e_1$ contiene un único ciclo en M_2 (teo. 4.3) y entonces existe un elemento $e_2 \neq e_1$ en el circuito tal que $I+e_1-e_2$ es independiente en M_1 y M_2 . Sea e_3 un elemento tal que $I+e_1-e_2+e_3$ es independiente en M_1 , mientras que $I+e_3$ no lo es, de donde tal elemento esta en el generador de I en M_1 ($Sp_1(I)$) y no esta en el generador de $I-e_2$ en M_1 ($Sp_1(I-e_2)$). Si $I+e_1-e_2+e_3$ es dependiente en M_2 , por el argumento anterior existe un elemento $e_4 \neq e_3$ tal que $I+e_1-e_2+e_3-e_4$ es independiente en M_1 y M_2 ; este procedimiento se continua sucesivamente hasta obtener $S=\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ la sucesión deseada. Se observa que al añadir los elementos e_1, e_3, e_5, \dots se preserva independencia en M_1 pero se crea dependencia en M_2 y al eliminar los elementos e_2, e_4, e_6, \dots se establece independencia en M_1 y M_2 simultaneamente. Esta forma de construir conjuntos independientes en M_1 y M_2 es enteramente análoga a la forma de construir la incidencia de arcos en el conjunto U , junto con la incidencia de los mismos arcos en el conjunto V en la formación de cadenas en el PAM. Lo anterior se puede escribir formalmente como sigue:

Definición 5.2. sea I en la intersección de dos matroides $M_1=(E, I_1)$ y $M_2=(E, I_2)$, y sea $S=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_s\}$ una sucesión de elementos diferentes, donde $e_i \in E-I$ para i impar y $e_i \in I$ para i par. Sea $S_i=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_i\}$ para $i \leq s$. Se dice que S es una sucesión alternante respecto a I si:

a) $I+e_1 \in I_1$.

b) Para cualquier i par, $Sp_2(I \oplus S_1) = Sp_2(I)$ entonces $I \oplus S_1 \in I_2$.

c) Para cualquier i impar, $Sp_1(I \oplus S_1) = Sp_1(I \oplus e_1)$ entonces $I \oplus S_1 \in I_1$.

Definición 5.3. Una sucesión S es aumentante respecto a I , si $\#S$ es impar e $I \oplus S \in I_2$.

EJEMPLO 2

Considérese la gráfica bipartita de la fig. 5.1 y el apareamiento $\gamma = \{e_2, e_4, e_7\} = I$.

a. $I+e_1 = \{e_1, e_2, e_4, e_7\} \in I_1$

b. $I+e_1-e_2 = \{e_1, e_4, e_7\} \in I_2$ y $I+e_1-e_2 = I \oplus S_2 \in I_2$

c. $I+e_1-e_2+e_3 = \{e_1, e_3, e_4, e_7\} \in I_1 - I_2$ $I+e_1-e_2+e_3 = I \oplus S_3 \in I_1$

d. $I+e_1-e_2+e_3-e_4 = \{e_1, e_3, e_7\} \in I_1 \cap I_2$ $I+e_1-e_2+e_3-e_4 = I \oplus S_4$

e. $I+e_1-e_2+e_3-e_4+e_5 = \{e_1, e_3, e_5, e_7\} \in I_1 \cap I_2$ $I+e_1-e_2+e_3-e_4+e_5 = I \oplus S_5 \in I_1 \cap I_2$

De lo anterior $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

De a. se obtiene la condición 5.2.a)

De b. y d. se obtiene $I \oplus S_2, I \oplus S_4 \in I_2$ condición 5.2.b)

De c. y e. se obtiene $I \oplus S_3, I \oplus S_5 \in I_1$ condición 5.2.c)

De e. se observa que $I \oplus S_5 \in I_2$ por lo que S es una sucesión aumentante.

De las definiciones 5.2 y 5.3 se concluye que si una intersección admite una sucesión aumentante esta no es de cardinalidad máxima. Esto es, se tiene una parte del teorema 3.1, sin embargo el inverso no es obvio. Para demostrar el inverso es necesario definir una gráfica frontera, este concepto permite construir una gráfica bipartita cuyos nodos son los elementos del conjunto I y los arcos del apareamiento en $G=(U,V,E)$.

Definición 5.4. Dada una intersección I , la Gráfica Frontera $BG(I)$ es una gráfica bipartita y dirigida construida en la siguiente forma:

a) Para cada $e_1 \in E-I$ tal que $e_1 \in Sp_1(I)$ existe un arco (e_2, e_1) dirigida o de cada $e_2 \in C_1^{-1} - e_1$, donde C_1^{-1} es el único circuito de $I + e_1$ en M_1 ; si $e_1 \notin Sp_1(I)$ entonces e_1 es una fuente en $BG_1(I)$.

b) Para cada $e_1 \in E-I$ tal que $e_1 \in Sp_2(I)$ existe un arco (e_1, e_2) dirigido a cada $e_2 \in C_1^2 - e_1$, donde C_1^2 es el único circuito en $I + e_1$ en M_2 . Si $e_1 \notin Sp_2(I)$, entonces e_1 es un sumidero en $BG_2(I)$.

Se observa que la subgráfica $BG_1(I)$ contiene los arcos dirigidos de I a $E-I$ y la subgráfica $BG_2(I)$ contiene los arcos en dirección inversa.

EJEMPLO 3

Se desea determinar las gráficas frontera de la intersección $I = \{e_2, e_4, e_7\}$ del ejemplo anterior.

$E-I = \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

a. $Sp_1(I) = \{e_7, e_8, e_6, e_5, e_4, e_3, e_2\}$

$\{e_1 \in E-I : e_1 \in Sp_1(I)\} = \{e_3, e_5, e_6, e_8\}$

$$I+e_2 = \{e_2, e_3, e_4, e_7\}$$

$$I+e_3 = \{e_2, e_4, e_6, e_7\}$$

$$I+e_4 = \{e_2, e_4, e_6, e_7\}$$

$$I+e_6 = \{e_2, e_4, e_6, e_7\}$$

$$\{e_i \in E-I : e_i \in Sp_1(I)\} = \{e_1, e_7\} \text{ (fuentes)}$$

$$b. Sp_2(I) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8\}$$

$$\{e_i \in E-I : e_i \in Sp_2(I)\} = \{e_1, e_3, e_4, e_7\}$$

$$I+e_1 = \{e_1, e_2, e_4, e_7\}$$

$$I+e_3 = \{e_2, e_3, e_4, e_7\}$$

$$I+e_4 = \{e_2, e_4, e_6, e_7\}$$

$$I+e_7 = \{e_2, e_4, e_7, e_8\}$$

$$\{e_i \in E-I : e_i \in Sp_2(I)\} = \{e_3, e_4\} \text{ (sumideros)}$$

Se hace notar que cualquier sucesión aumentante se identifica con una trayectoria fuente-sumidero en la gráfica frontera, pero el inverso no es obvio,; es decir, una gráfica frontera no necesariamente induce una sucesión aumentante, a menos que la sucesión en $BG(I)$ no admita atajos.

Definición 5.5. Se dice que una sucesión $S = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ admite atajos si existe un arco (e_k, e_j) en $BG(I)$, donde $1 \leq k \leq j-2 \leq m-2$.

5.2 Resultados Básicos.

Lema 5.1. Sea $S = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ una trayectoria fuente-sumidero en $BG(I)$ la cual no admite atajos, entonces S es una sucesión aumentante respecto a I .

Demostración

Puesto que S es una trayectoria fuente-sumidero e_1 es una fuente y así $I + e_1 \in I$ con lo que se obtiene 5.2.a).

Sea i par. Se desea demostrar que $Sp_2(I \ominus S_i) = Sp_2(I)$. Para demostrar esto se procede en orden inverso, es decir, se añaden los elementos $e_{i-1}, e_{i-3}, \dots, e_1$ y se eliminan los elementos $e_{i-2}, e_{i-4}, \dots, e_2$.

Si $I + e_{i-1}$ contiene un único circuito $C_{i-1} \in M_2$, donde $e_1 \in C_{i-1}$, entonces $Sp_2(I + e_{i-1} - e_1) = Sp_2(I)$. Supóngase que $Sp_2(I^{(k)}) = Sp_2(I)$, donde $I^{(k)} = I + e_k - e_{k+1} + e_{k+2} - \dots + e_{i-1} - e_1$. Si $I^{(k)} + e_{k-2}$ contiene un único circuito $C_{k-2} \in M_2$ en el cual $e_{k-1} \in C_{k-2}$ se sigue que $Sp_2(I^{(k-2)}) = Sp_2(I)$. Así $Sp_2(I^{(i)}) = Sp_2(I)$ donde $I^{(i)} = I \ominus S_i$ (i par), por tanto 5.2.b) se obtiene.

Para i impar la demostración es análoga.

#

Puesto que el objetivo del capítulo es llegar al teorema de existencia de un apareamiento máximo en términos de matroides se hace necesario el siguiente lema también debido a Krögdal.

Lema 5.2 (Krogdal). Sean I, J conjuntos independientes en M_1 y M_2 simultaneamente y tales que $\#J = \#I + 1$. Entonces existe una trayectoria fuente -sumidero S en $BG(I)$, donde $S \subseteq I \cup J$.

Demostración

Si J contiene un elemento e_1 tal que $e_1 \in Sp_1(I) \cup Sp_2(I)$ entonces e_1 es la trayectoria S fuente-sumidero en $BG(I)$, donde $S \subseteq I \cup J$.

Considérese la partición de $J - I$ en J_1, J_2, J_3 , donde J_1 es el conjunto de fuentes, J_2 los sumideros y J_3 los otros elementos en $J - I$. Sea $H_1 \subseteq BG_1(I)$ la subgráfica inducida sobre los nodos en $I \cup J$. Para cualquier subconjunto $J' \subseteq J_2 \cup J_3$ existen al menos $\#J'$ nodos en $I - J$ con arcos dirigidos hacia los nodos en J' , ya que J' no puede ser generado en M_1 por menos elementos que $\#J'$ en $I - J$. Por el momento se ignoran las direcciones en H_1 . Por el teorema de Philip Hall (teo.) se garantiza la existencia de un apareamiento E_0 en H_1 el cual cubre los nodos en $J_2 \cup J_3$.

Similarmente se puede formar una subgráfica $H_2 \subseteq BG_2(I)$ inducida sobre los nodos en $I \cup J$ para el cual existe un apareamiento E_1 en H_2 que cubre todos los nodos en $J_1 \cup J_3$.

Ahora considérese la subgráfica $H \subseteq BG(I)$ cuyo conjunto de nodos es $I \cup J$ y conjunto de arcos es $E_0 \cup E_1$.

Cada componente conectada de H es siempre una trayectoria dirigida o un ciclo dirigido. Puesto que $\#(I - J) < \#(J - I)$ al menos una componente debe contener uno o mas nodos en $\#(J - I)$ que en $\#(I - J)$, esta componente es la trayectoria fuente-sumidero S deseada en $BG(I)$.

Teorema 5.3. Sean I_p, I_{p+1} conjuntos independientes en M_1 y M_2 con p y $p+1$ elementos respectivamente. Entonces existe una sucesión aumentante $S \subseteq I_p \oplus I_{p+1}$ con respecto a I_p .

Demostración.

Por el lema 5.2 existe una trayectoria fuente sumidero en $EG(I)$ y donde $S \subseteq I_p \oplus I_{p+1}$, por el lema 5.1 S es una sucesión aumentante respecto a I_p .

#

Teorema 5.4. Una intersección es de máxima cardinalidad si y solo si no admite sucesiones aumentantes.

Demostración.

Si I es de máxima cardinalidad en M_1 y M_2 entonces $I + e_1 \notin I_1$ y por tanto no admite sucesiones aumentantes.

Para el inverso si I no es de máxima cardinalidad entonces existe J tal que $\#I = \#J + 1$, entonces por el teorema anterior anterior existe S una sucesión aumentante, lo cual es falso. Por tanto I es de máxima cardinalidad.

C O N C L U S I O N E S

Se describen los problemas del Arbol de Expansi3n M3nima (AEM) y del Apareamiento M3ximo (PAM) en Gr3ficas Bipartitas.

En forma inicial se resuelven los dos problemas a partir de la teor3a de gr3ficas, la soluci3n del AEM se basa en el teorema 2.1 y la correspondiente a el PAM en gr3ficas bipartitas en el teorema 3.1; posteriormente se resuelven los mismos problemas en el contexto de matroides obteniendose en el caso del AEM la misma soluci3n que por gr3ficas y la soluci3n se basa en el teorema 4.5 y para el apareamiento en el teorema 5.4.

Los algoritmos presentados a lo largo del trabajo se implantan en una computadora PC.

Problema de Flujo Máximo. Dada una gráfica simple $G=(U,E)$ con capacidades en los arcos u_{ij} , el problema consiste en determinar el máximo flujo continuo de un nodo fuente s a un nodo sumidero t que no viole las restricciones de capacidad. En este problema se considera $r_i=0$ para toda i , y existe un único arco cuyo costo es cero.

Problema de Ruta mas Corta. Dada una gráfica $G=(V,E)$ para la cual cada arco tiene asociado un parámetro de longitud c_{ij} , el problema consiste en encontrar la trayectoria mas corta de un nodo sumidero s a un nodo arbitrario t .

A N E X O A

Para una gráfica simple $G=(V,E)$ se definen los siguientes parámetros:

-Parámetros de los arcos.

x_{ij} Flujo que debe pasar através del arco o arista (v_i, v_j) , es una variable de decisión.

C_{ij} Costo unitario del flujo que pasa através del arco o arista (v_i, v_j) .

u_{ij} Capacidad del arco o arista (v_i, v_j) .

-Parámetros de los nodos.

r_i Requerimiento del nodo v_i .

Descripción de algunos problemas de redes.

Problema de transporte. Es un problema en una gráfica bipartita $G=(U,V,E)$ en el que cualquier punto es de oferta o de demanda y todos los arcos son dirigidos de los nodos de oferta a los de demanda.

Problema de Asignación. Caso especial del problema de transporte en el que los requerimientos son +1 o -1.

ANEXO B

```

($R+ $V+ $W+ $K+)
{PROGRAMA : ALGORITMO DE PRIM }
  const inf = 9999;
  maxnodos = 40;
  var  nodos,i,j,t6,t7,nnintree,il,jl,minarc:integer;
  arch,imp: text;
  st : integer;
  d : array[1..maxnodos,1..maxnodos] of integer;
  l : array[1..maxnodos] of boolean;
procedure decide;
var
  nomdisc : string[30];
  dec     : char;
begin
  clrscr;
  repeat
    gotoxy(1,1);
    write('Salida a video, impresora o disco v/i/d : ');
    read(dec);
  until dec in ['d','i','v'];
  gotoxy(1,2);
  case dec of
    'd' : begin
      write(imp,'nombre de archivo a disco : ');
      read(nomdisc);
      assign(imp,nomdisc);
    end;
    'i' : assign(imp,'LST:');
    'v' : assign(imp,'CON:');
  end;
  writeln;
  reset(imp);
end;
function diff(b1,b2 : boolean) : boolean;
begin diff := ((b1 and not b2) or (b2 and not b1));
end;
{-----PROGRAMA PRINCIPAL-----}
begin
decida;
assign(arch,'a:datk.dat');
reset(arch);
{
  Algoritmo de expansion minima : usando el Metodo de Prim
  (El algoritmo gloton)
  variables usadas:
  nodos           : numero de nodos
  i,j,t6,t7      : area de trabajo
  nnintree        : numero de nodos que no estan en el arbol
  il,jl           : extremos del arco que va anexarse
  minarc          : longitud del que a agregarse
  st              : longitud total del arbol creado
  d               : matriz de distancias
  l               : vector booleano para los nodos "verdad"
                  cuando un nodo esta en el arbol
}
  readln(arch,nodos);
  if (nodos > maxnodos) then
  begin
    writeln('El prog. ha sido dispuesto para redes que tengan a lo mas',
    writeln('nodos, si ud. quiere usar una red mayor,por ');
    writeln('favor cambie la constante maxnodos en el prog. ');
    writeln;
  end
end

```

```

begin
  for i := 1 to nodos do
    begin
      for j := 1 to nodos do d[i,j] := inf;
      l[i] := false;
    end;
  t6 := 0;
  minarc := inf;
  repeat
    t6 := t6 + 1;
    repeat
      readln(arch,i,j,t7);
      if (t7 < 0) then
        writeln('La longitud debe ser positiva,trate de nuevo');
      if ((i > nodos) or (j > nodos)) then
        writeln('Numero de nodo demasiado alto, trate de nuevo');
      if ((i < 0) or (j < 0)) then
        writeln('Numero de nodo demasiado bajo,trate de nuevo');
      until ((i in [0..nodos]) and (j in [0..nodos])
        and (t7 >=0));
      if (i <> 0) then
        begin
          d[i,j] := t7;
          if (t7 < minarc) then
            begin
              minarc:=t7;
              i1 := i;
              j1 := j;
            end
          end
        until (i = 0);

```

PASO 0

```

l[i1] := true;
l[j1] := true;
d[i1,j1] := -1;
st := minarc;
nnintree := nodos -2;
repeat
  minarc := inf;
  for i := 1 to nodos do
    for j := 1 to nodos do

```

PASO 1

```

if ((diff(l[i1],l[j1])) and (d[i,j] < minarc)) then
  begin
    minarc := d[i,j];
    i1 := i;
    j1 := j;
  end;
  l[i1] := true;
  l[j1] := true;
  st := st + minarc;
  d[i1,j1] := -d[i1,j1];
  nnintree := nnintree - 1
until ((minarc = inf) or (nnintree = 0));

```

PASO 2

```

if (minarc = inf) then
  writeln(imp,'No existe arbol de expansion ');
else
  begin

```

```
writeln(imp,'Inicial Final');
for i := 1 to nodos do
  for j := 1 to nodos do
    if (d[i,j] < 0) then
      writeln(imp,i:4,' ',j:4);
      writeln(imp,'La longitud del arbol es : ',st)
    end;
  end;
end;
close(imp);
end.
end.
```

ANEXO C

```

10  CLS
20  PRINT "                               Programa para obtener apareamientos maximos
21  PRINT
25  PRINT "                               en Graficas Bipartitas"
30  PRINT
35  INPUT " indique el numero de nodos fuente "; V
40  PRINT
45  INPUT " indique el numero de nodos sumidero "; U
50  PRINT
55  INPUT " indique el numero de arcos "; E
60  DIM M(U+V), EP(V), VU(E,2), LABEL (V), A(E,2), Q(V)
70  PRINT "para cada arco indique: origen destino"
75  PRINT
80  FOR I=1 TO E
85  PRINT " arco"; I;
90  INPUT " : "; VU(I,1), VU(I,2)
95  PRINT
110 NEXT I
115 X=1
120 FOR L=1 TO E:A(L,1)=0: A(L,2)=0: NEXT L
125 FOR K=1 TO V: EP(K)=0: NEXT K
130 FOR I=1 TO E
135 IF M(VU(I,2))=0 THEN EP(VU(I,1))= VU(I,2): GOTO 155
140 IF M(VU(I,2))< > VU(I,1) THEN A(X,1)=VU(I,1)
145 A(X,2)=M(VU(I,2)): X=X+1
150 NEXT I
155 Y=1
160 FOR L=1 TO V: Q(L)=0: NEXT L
165 FOR I=1 TO V
170 IF M(I)=0 THEN Q(Y)=I: LABEL(I)=0: Y=Y+1
175 NEXT I
180 IF Y+1 GOTO 300
185 Y=Y-1
190 B=Q(Y): Q(Y)=0
195 IF EP(B)=0 GOTO 210
200 GOSUB 400
205 GOTO 115
210 X=X-1
215 FOR J=1 TO X
220 IF A(J,1)=B AND LABEL(A(J,2))=0 THEN LABEL (A(J,1))=B
225 Q(Y)= A(J,2): Y=Y+1
230 NEXT J
235 X = X+1
240 GOTO 180
300 CLS: FOR I=1 TO V
310 PRINT: PRINT "   pareja ("I;" )="; M(I)
320 NEXT I
325 END
400 IF LABEL(B)=0 THEN M(B)= EP(B): M(EP(B))=B: RETURN
410 EP(LABEL(B))=M(B)
420 M(B)=EP(B): M(EP(B))=B: B=LABEL(B)
430 GOTO 400

```

B I B L I O G R A F I A

BERGE C., Graphs and Hipergraphs, North Holland Publish Company (Editors), 1979.

BONDY A., Graph Theory, Macmillan Press LTD, 1976.

CLAUSEN J., Matroid and Combinatorial Optimization, Datalogisk Institut, 1976.

CHRISTOPHIDES y STEIGLITZ K., Graph Theory: An Algorithmic Approach, Academic Press, New York, 1976.

EDMONDS J., Matroid and the Greedy Algorithm, Math. Programming 1, 1971.

KENNINGTON J. y HELGASON R., Algorithms For Network Programming, Wiley-Interscience Publication, 1980.

KNUTH D., The Art of Computer Programming Vol. I, Addison Wesley (Editors), 1969.

LAWLER E., Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Rinehart and Winston, New York, 1975.

PAPADIMITRIOU C. y STEIGLITZ K., Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, 1982.

WELSH D., Matroid Theory, Academic Press, London, 1976.