2ej
11

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

DESCRIPCION DE LAS LEYES DE MORTALIDAD POR MEDIO DE LAS FUNCIONES ESTABLES DE LEVY

Tesis que presenta

VICTOR MANUEL DEL CASTILLO DAVILA

Para Obtener el Título de Actuario

Ciudad Universitaria 1987

INDICE

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este espacio, para agradecer al Act. Aurora Valdés Michel, por la dirección brindada a este trabajo de tesis.

También a la compañera Luisa María Lagos, por la paciencia brindada durante las discusiones y sugerencias.

Agradezco los consejos de los señores Dr. Luis Felipe Del Castillo D. y al Ing. Carmin Marino, ya que sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Agradezco las observaciones y correciones hechas al presente trabajo por el Act. Manuel Roman Enriquez y el Act. F. Alonso Pérez Tejada López.

OBJETIVOS

En las referencias actuariales generales se estudian las leyes de Gompertz y de Makeham, como una función continua que pretenden resolver el problema de los ajustes que requieren las tablas de mortalidad, asi como el problema de predicción por medio de proyecciones. El objetivo del presente trabajo es dar un modelo alternativo que satisfaga las necesidades de explicación y de ajuste a los datos empíricos de supervivencia, dados en las tablas de mortalidad.

Es decir la búsqueda de una ecuación que tenga las características de las leyes de mortalidad y cuyo comportamiento satisfaga los datos expresados mediante una tabla de mortalidad, es lo que motiva la presentacion de este trabajo tésis, en primer instancia se ofrece una expresion matemática que trata de cumplir los requerimientos que demanda los ajustes de las tablas de mortalidad. Estos ajustes se efectúan mediante mecanismos de interpolación y de extrapolación, con una correlación entre la tabla y modelo, bastante aceptable.

El modelo matemático que aqui se presenta para su estudio y análisis, es la del exponente fraccionado, el cual ha tenido un correlato teórico en la teoría de las distribuciones estables de Levy y en la teoría estadítica de Weibull.

INTRODUCCION

El comportamiento de la mortalidad es estudiado por la actuaría, ya que un individuo que demanda protección a una compañía de seguros está sujeto a una serie de riesgos que necesariamente tienen que ser calculados, para que en el momento de las reclamaciones se tengan las reservas que demandan los casos de los asegurados que fallecieron.

Asimismo es necesario hacer mas reales los cáculos de las primas por una parte, y el cálculo de las reservas por el otro, asi como otros valores conmutados que tienen su fundamento en las tablas de mortalidad.

El trabajo se enfocará poniendo énfasis en el parámetro TASA DE MORTALIDAD en vista de que por medio de él se calculan los datos que construyen una tabla de mortalidad.

En la prática a la tasa de mortalidad se le asocia una ley empírica y mediante este procedimiento es como se permite dar continuidad a una serie de datos obtenidos directamente de las observaciones estadísticas, asi como también se tiene el criterio para la eliminación de los datos discordantes.

Hasta la fecha no ha sido posible encontrar una expresión matemática que describa en forma precisa el comportamiento real del fenómeno de la mortalidad.

Las mejores aproximaciones han sido dadas por Gompertz y Makeham, en la actualidad los ajustes son todavía mas precisos pero tienen la desventaja de ser una serie de polinomios que no permiten encarar el problema con sencillez y fácil manipulación, ya que para encontrar las constantes y las variables que conforman la expresión es necesario trabajo arduo y complejo, además la dificultad de encontrar un significado claro a cada una de las constantes, ya sea actuarial, demográfico, etc., lo hace sentir más alejado de los propósitos prácticos.

En este trabajo se presentará la ley del exponente fraccionado como una alternativa en la resolución del problema de la descripción de las tablas de mortalidad, asi como solución al problema de rectificación que demanda una tabla de mortalidad, en un afán por eliminar las discontinuidades. Además se darán criterios para que los ajustes efectuados representen soluciones aceptables desde un punto de vista teórico, este criterio se adopta de acuerdo con la teoría de Paul Levy.

El plan de la tesis consta de cinco capítulos; en el primero se mencionan algunas generalidades relativas a una tabla de mortalidad; en el segundo se dan las condiciones de estabilidad propuestas por Levy y se transcriben unos ejemplos que ilustran el manejo del criterio.

En el capítulo tres se retoman las leyes de mortalidad y se presenta la Ley del Exponenta Fraccionado o Fraccionario.

En los capítulos Cuatro y Cinco se presentan los resultados y pruebas a los que fue sometida la Ley del Exponente Fraccionado asi como sus análisis.

CAPITULO 1

GENERALIDADES SOBRE LA MORTALIDAD

1.1.-INTRODUCCION

En este capitulo analizaremos las tablas de mortalidad por dos razones muy importantes:

a).- La aplicación de la tabla de mortalidad como un instrumento para calcular las primas en el seguro de vida, da la base para el cálculo de anualidades y otras operaciones dentro del cálculo actuarial.

b).- Necesitamos conocer los comportamientos biométricos como son las tasas de mortalidad, ya que son estas las que dan la pauta para la formación de las tablas de mortalidad y esta a su vez elige la mejor ley que la describe, porque de esta manera las poblaciones que sean sometidas a regímenes de seguridad esperaremos que la "experiencia" recabada en las tablas se reproduzca con lo estipulado en las mismas.

El objetivo de este capítulo es mostrar de una manera somera lo que es una tabla de mortalidad: sus tipos, su construcción y la búsqueda de una función de supervivencia que cumpla con ciertos requisitos, como de sencillez de expresión y la fácil manipulación, mismas que ya son material del capítulo 3 ,pero que se inicia en este apartado su introducción, primeramente desde el punto de vista del cálculo actuarial y posteriormente desde el punto de vista de las probabilidades,debido a la gran cantidad de elementos teóricos que apoyan el enfoque.

1.2.-TIPOS DE TABLAS DE MORTALIDAD

Hay varios tipos de tablas de mortalidad que las compañías de seguros aplican en sus cálculos actuariales ,como son las tablas de mortalidad "SELECTAS" y "ULTIMAS".

Se llaman tablas de mortalidad selectas porque la población que la integra fue seleccionada mediante la aplicación de exámenes médicos o sometida a un cuestionario exhaustivo hasta cubrir los requisitos que las compañías de seguros consideran viables.

Dependiendo del periodo en que las personas participan o no en su selección, las tablas se clasifican en TABLAS SELECTAS, FINALES Y AGREGADAS:

1.- Selectas, cuando la población está dentro del periodo de selección.

2.- Finales, cuando la población está fuera del periodo de selección.

3.- Agregadas, cuando la población asegurada ha sido recibida sin distinción alguna.

Las tablas de mortalidad última, también se las conoce como tablas de MORTALIDAD ORDINARIAS, a este grupo pertenecen la tabla Experiencia Americana, de los Hombres Americanos, las Tablas CSO-58, Experiencia Mexicana, etc.

1.3.-CONSTRUCCION DE LA TABLA DE MORTALIDAD

La tabla de mortalidad es una tabla compuesta de varias columnas, correspondiendo a los elementos que tienen mayor aplicación.

La primera columna está encabezada por una "x" o sea la columna llamada de las edades, mismas que van apareciendo de manera progresiva en la forma creciente, esta columna es la que da el orden a los demás elementos.

Seguidamente, dependiendo de las necesidades e intereses de la compañía que manda construir la tabla , pueden aparecer la columna "NUMERO DE VIVOS" cuyo encabezado está denotado por "lx",esta columna da información del número de sobrevivientes al iniciar el periodo bajo estudio. Al valor inicial de "lx" se le conoce como: RADIX, que se expresa por "lo" e indica el número de personas que inician el estudio .

La columna denotada por "dx" es conocida como el "NUMERO DE MUERTOS" que se produjeron a lo largo del año o periodo de observación de que se trate.

Una columna muy importante es la de la tasa de mortalidad, a la cual está sujeta la población durante el año en estudio, esta columna está encabezada por "qx".

Hay otra columna encabezada por μx que corresponde a la fuerza de mortalidad del periodo correspondiente.

Otras columnas están reservadas a los valores conmutados para cada una de las edades: Dx, Nx, Sx, Cx,Mx y Rx.

Hay tablas que agregan la esperanza de vida, que se define como el tiempo promedio de vida de cada uno de los que sobrevivieron a la edad "x" y está denotada por " ex".

La forma en que se construye una tabla de mortalidad es procediendo a conocer primero las tasas de mortalidad.

La tasa de mortalidad se define como la razón entre el número de muertos y los expuestos al riesgo, esto es:

qx = número de personas que fallecen entre x y x=l / riesgo de muerte para cada edad . . . .(1)

Dado que qx es obtenida directamente de las investigaciones que sobre la mortalidad se efectúan, pueden ocurrir desviaciones accidentales y discontinuidades que no se desean, por lo que es necesario efectuar ciertos ajustes, haciendo importante el suponer una expresión algebraica que permita las determinaciones de los parámetros que rectifiquen, "alisen" y den "continuidad" a la función qx. Las expresiones algebraicas mas conocidas son las leyes de Gompertz y las de Makeham, mismas que serán tratadas en el capítulo 3.

Una vez determinadas las tasas de mortalidad, serán aplicadas al radix obteniendo el primer dato sobre el número de muertos (dx), asi:

do =lo , qo ....(2)

Donde lo es el radix y qo es la tasa de mortalidad con la que se inicia el proceso.

Posteriormente se efectúa una resta entre el radix y el número de muertos.

$$l1 = lo - do \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Donde l1 es el número de sobrevivientes que llegan al año 1.

Para completar el renglón 1 es necesario calcular d1, el cual se obtiene de multiplicar q1 con l1 ,asi:

$$d1 - l1.qx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

y nuevamente la diferencia entre d1 y l1 nos da el número de sobrevivientes que llega al año 2, asi:

$$l2 = l1 - d1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Los restantes renglones pueden obtenerse de la misma manera.

GENERALIZANDO EL PROCESO SE PUEDE VER:

$$\begin{array}{ll} l1=lo-do & do=lo\ qo. \\ l2=l1-d1 & d1=l1\ q1. \\ l3=l2-d2 & d2=l2\ q2. \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ lx+1=lx-dx & dx=lx\ qx. \quad \ldots\ldots(6) \end{array}$$

Como puede apreciarse la construcción de una tabla de mortalidad depende de las tasas de mortalidad que se van obteniendo de la gran cantidad de estudios e investigaciones que se hacen de una población de la que se desea conocer el comportamiento de su mortalidad, es por esto que la base de una tabla de mortalidad es empírica, aunque se hacen intentos por conocer el comportamiento de la mortalidad humana. Las tasas y funciones que se le asocien son de inmediato reemplazados por los cambios de las esperanzas de vida, por lo que los polinomios que pretenden describir este proceso no satisfacen totalmente las necesidades que exige el comportamiento real.

La búsqueda de un modelo que llene los requisitos, será una expresión matemática sencilla que facilite los cálculos actuariales y además que tenga una alta correlación con el comportamiento real, lo cual no ha sido una labor fácil.

Otro enfoque que ayuda bastante en la búsqueda de funciones que se acercan al comportamiento real, es el de considerar a qx como una razón de probabilidad de muerte (1-qx), sería la razón de probabilidad de vida, se puede construir la tabla de mortalidad partiendo de (1-qo):

$$l1 = lo\ (1-qo) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Si a (1-qx-1), la expresamos como x -1, es decir
$1 - qx\text{-}1 = \delta x\text{-}1$

$$\text{entonces } lx = lx\text{-}1 \,.\, \delta x\text{-}1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Donde δx es conocida como función de supervivencia aun sin embargo seguiría existiendo un problema: ¿cual es la δx que mejor describe el comportamiento real de la mortalidad?. Darle una respuesta aceptada a este problema, es darle una base más sólida, o menos empírica a muchos problemas que surgen en el Seguro de vida, en el Cálculo Actuarial, que tiene como fundamento las tablas de mortalidad.

1.4.-FUNCION DE SUPERVIVENCIA lx

El principio básico de la tabla de mortalidad esta dada por la ley de los grandes números en vista de que al hacer un radix grande, la probabilidad de que el número de sobrevivientes promedio se desvíe a P. en mas de cualquier > 0 , asignada previamente, tiende a cero.

Si $lo \dashrightarrow \infty$ entonces $P \{ lx > lo\,(P+\epsilon) \} \dashrightarrow 0$.

La ley de los grandes números dice: que entre mayor sea el número de casos considerados más nos aproximamos a la función de distribución de probabilidad verdadera.

Hay que notar que por el hecho de que un grupo de personas del radix sobrevivan a los 99 años y que era de esperarse su fallecimiento dentro de ese lapso de tiempo, se debe a que cada persona se le interpreta como un evento independiente y que la esperanza de vida de cualquier ser elegido al azar no tiene nada que ver con la esperanza de vida del grupo en un momento dado.

Aceptar esta aclaración permite la posibilidad optimista de crear para el futuro tablas que excedan los 99 años, de hecho la Standar annuity de 1937 tiene una w=109 años, esto por dar un ejemplo.

De acuerdo con los objetivos del presente trabajo, lx es la función que mayor interés reviste de la tabla de mortalidad.

Diremos que lx es un conjunto de personas con las características de que todos sus elementos tienen la edad x.

A lx se le considera cerrado ante el proceso migratorio, ya que lo que importa son sus modificaciones con respecto al tiempo, mismos que serán llevados en registros estadísticos hasta que todos sus elementos se destruyen por la acción de la mortalidad, observándose que el número de sobrevivientes con respecto al tiempo es decreciente.

1.5.- PROPIEDADES DE lx

lx es una función continua ya que lim lx=la...(11)

lx es diferenciable en todos sus puntos.

$$\frac{d}{dx}\, lx = \lim_{\Delta t \to 0} lx\,(t+\Delta t) - lx\,(t) \;/\; (\Delta t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

De las generalizaciones inductivas para obtener los valores que componen la tabla de mortalidad hechas en (8) y (7), se obtienen otras propiedades que recordaremos aqui:

$lx + 1 = lx - dx$ ....(13)

Donde $dx = lx.qx$ ....(14)

sustituyendo dx en (13), se obtiene $lx + 1 = lx - lx.qx$.

$lx + 1 = lx\,(1-qx)$ ....(15)

que es la expresión (9)

Haciendo x =1-qx Nos queda:

$lx + 1 = lx\ x$ ....(16)

Donde de acuerdo a la ley de los grandes números la diferencia entre $lx-lo\ (P+\epsilon)=0$. Será válida cuando $x=P$ y $\epsilon=0$ Donde P es la función de distribución de probabilidad que describe el proceso.

A continuación hablaremos un poco mas acerca de la función de distribución de probabilidad, por que nos puede dar luz en lo concerniente a la búsqueda de un modelo que interpreta la mortalidad.

Si tomamos en cuenta la probabilidad de que una persona de edad cero sobreviva hasta alcanzar la edad X(xPo), podemos escribir $lx=lo\ xPo=lo\ x$..........................(17).

Donde x se conoce como función de supervivencia.

Definida asi la función de supervivencia, cumple las siguientes condiciones:

i) ES UNA FUNCION DECRECIENTE

Ya que $\delta x= lx/lo$ es una función decreciente y lo es una constante por lo tanto (x) es una función decreciente.

ii) ES UNA FUNCION CONTINUA Y DIFERENCIABLE EN EL INTERVALO (0,W).

iii) $0<\delta(x)<1$. Por ser una probabilidad, se conocen los valores extremos que apoyan la desigualdad, debido a que cuando se inicia el proceso, la probabilidad de vida en el instante 0 es 1. $\delta x=1$, cuando $x=0$.

Y la probabilidad de supervivencia despues de que se han agotado todos los elementos del radix es 0.

$\delta(x)=0$ CUANDO $x=w$.

El quehacer actuarial, entre otros aspectos está encaminado a determinar una expresión matemática que cumpla las condiciones antes mencionadas y el encontrar un comportamiento que refleje su comportamiento con respecto al comportamiento real de la mortalidad, hasta la fecha no ha sido cosa fácil.

Las funciones biométricas no se han computado de una manera constante, es decir bajo las mismas condiciones, se obtengan exactamente los mismos resultados, por consiguiente, se dan y se proponen, expresiones polinomiales, que en cierta manera solucionan el problema, solo que lo hacen de manera parcial.

CAPITULO 2

FUNCIONES ESTABLES DE LEVY

2.1.-INTRODUCCION

William Feller en su libro "INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES " de 1950 dice: "Aunque la teoría moderna lleva el sello de los trabajos pioneros de Cauchy y de Paul Levy, no obstante que muchos autores han contribuído con mejoras y nuevos resultados. En el capítulo XVIII se hace un tratamiento de la teoría por los ahora clásicos métodos de Fourier, en tanto que en el capítulo IX se presenta la misma teoría mediante un enfoque directo, que sigue mas la línea de los métodos modernos en los procesos Markov."

El espíritu de Feller es la de atacar al problema por diferentes enfoques, de esta manera el cálculo actuarial se vería beneficiado enormemente, porque le darían recursos mas formales.

Hay tres teorías que han atacado desde su peculiar punto de vista a las funciones estables de Levy .Cada una de ellas las ha desarrollado y aplicado en la resolución de los problemas que le atañen.

Estos tres campos de la investigación que utilizan de alguna forma funciones estables de Levy y que son identificadas con otros nombres en cada uno de esos ,son:

1.- Teoría de la probabilidad: que es donde está soportada la teoría general de las funciones estables y la teoría de los procesos estocásticos del tipo de los modelos de caminante al azar.

2.-Teoría estadística matemática que es la que permite la descripción de los modelos Weibull, que de alguna manera están relacionadas con las funciones de supervivencia y que es el punto de vista que mayor aportación pueden generar al cálculo actuarial

3.-Mecánica estadística de no-equilibrio donde las propiedades de las funciones estables de Levy fueron estudiadas por Williams-Watts, quien da una gama de aplicaciones a las funciones de Weibull.

2.2.-ANTECEDENTES

Los primeros intentos por estudiar las funciones estables, los de Cauchy, en el año de 1853, cuando trata de generalizar la teoría de los errores de los mínimos cuadrados.

Cauchy menciona como transformada de Fourier a las funciones estables simétricas, haciendo la observación de que dichas funciones corresponden a distribuciones de probabilidad.

Posteriormente G. Polya redujo la generalización dada por Cauchy a las funciones estables simétricas, señalando que todas corresponden a distribuciones de probabilidad.

A principios del siglo XX, Holtsmark resolvió un problema astronómico sin grandes complicaciones, utilizando elementos dados por Cauchy, no obstante, la distribución obtenida por Holtsmark no fue conocida por los matemáticos de ese tiempo, por lo que su desarrollo tardó en llegar a una dinámica fructífera misma que fue dada por Paul Levy en 1924, quien encontró las transformadas de Fourier de todas las funciones estrictamente estables, tal como observó Cauchy, salvo que da el rango de estabilidad y formula su teoría general de las funciones estables, lo que permitió iniciar desde entonces una gama de aplicaciones , como las introducidas en el año de 1928 por Fisher y Tippet en su trabajo "EN CONEXION CON VALORES EXTREMOS DE LAS DISTRIBUCIONES", en el cual manejan un tipo muy especial de funciones estables de Levy, las cuales fueron retomadas por Walloddi Weibull, dándole un enfoque estadístico a las funciones encontradas por Fisher and Tippett y que puede permitir un puente entre la teoría general de las funciones estables y las funciones estables de supervivencia.

2.3.- DISTRIBUCIONES DE WEIBULL Y LAS FUNCIONES ESTABLES DE LEVY.

El presente trabajo es una aplicación de las distribuciones de Weibull, ya que el problema de la supervivencia está demandando modelos matemáticos que describan su naturaleza y las funciones de Weibull se presentan como una alternativa en la búsqueda de soluciones a los problemas de la mortalidad.

Las funciones de Weibull son una familia de funciones que se propusieron a partir de las funciones estables de Levy, teniendo las siguientes formas:

$$\mathcal{L}(x) = \exp(-x^{\alpha}) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (18)$$

donde x generalmente es definida por P.t y P es dado como un parámetro de escala.

Otra forma de presentación de una función de una distribución de Weibull es tomar la derivada de (18).

$$f(x) = \alpha . p . (x^{\alpha}) \exp (-x^{\alpha}) \quad . . . . (19)$$

Y otro tipo de funciones Weibull es eliminar el factor exponencial de la función propuesta en (19).

$$f(x) = \alpha . p . (x^{\alpha - 1}) \quad . . . . (20)$$

Las tres ecuaciones presentadas son reconocidas como distribuciones de Weibull, mismas que ofrecen una gran facilidad en cuanto a su manipulación en la aplicación de trabajos empíricos como lo es el comportamiento de la mortalidad.

La función de Weibull expresada mediante una exponencial de la forma (18) describe la presencia de un número desconocido de causas que producen el mismo efecto. En el caso de la supervivencia ,son múltiples las causas por las cuales los individuos de un espacio muestral pueden fallecer; Weibull tiene una manera muy especial de explicarlo, mediante el argumento de la cadena él dice que una cadena es tan resistente como lo sea el eslabón mas débil, conceptualizando esta analogía diremos que un individuo puede fallecer por cualquier causa de muerte.

Formalmente cada eslabón es un factor que lleva al mismo resultado, por consiguiente la probabilidad de muerte será el producto de las probabilidades de cada uno de los factores.

Las relaciones entre la teoría de la probabilidad y las funciones de Weibull son tema de estudio reciente, el doctor D. R. Cox y el doctor D. Oakes, en 1984, hicieron un trabajo en el que dan una teoría general de la supervivencia en términos de distribuciones muy generales, como lo son las funciones Hazard.

2.4.-FUNCION ESTABLE DE LEVY

Daremos ahora una definición de función estable de Levy y estableceremos lo que se entiende por estable.

Retomando la función (18) de Weibull y lo expresamos como definimos la transformada de Fourier, de acuerdo a la siguiente operación:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F_{\alpha}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots(21)$$

Entonces la función estable de Levy estará dada mediante la siguiente identidad:

$$F_{\alpha}(Z) = \{e^{|x|^{\alpha}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx}\, e^{-x}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots(22)$$

donde $0 < \alpha <= 2$

Efectuando la integración que se propone en (22) sobre Z de - + , implica que F (Z) es una función de probabilidad.

Elliot W. Montroll y John T. Bendler (1983) dicen que la integral (22) corresponde a una función normalizada:

$$F(Z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-|x|^{\alpha}}\,dx = 1 \quad \ldots\ldots\ldots(23)$$

Si en la función anterior se toma "α" con un valor particular, por ejemplo 2, se tiene que en efecto la función de distribución obtenida es una Gausiana con media cero y dispersión estandard 2.

$$F(Z) = 1/2\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx}\, e^{-x}\,dx = (4\pi)^{-1/2}\, e^{-z^{2}/4} \quad \ldots\ldots\ldots(24)$$

Lo que Cauchy hacía en 1853 en su intento por generalizar la teoría de los mínimos cuadrados, era la de asignar valores arbitrarios a las alfas y estudiar los resultados que se obtienen en cada una de las sustituciones. No obstante, Cauchy, al no hacer descriminación en cuanto al valor de las alfas no se enteró de que al sobre pasar el valor de 2. $F_\alpha(z)$ no es propiamente una función de probabilidad, ya que en estas condiciones es posible que para algunos valores de Z se le asocien probabilidades negativas, lo que carece de sentido y que vino a ser establecido por G. Polya, tiempo después para el caso de alfa menor que uno .

Y fue Paul Levy quien contempla el carácter de estable cuando alfa es menor o igual a dos, que es la forma como se define y que nosotros describimos en (22).

Cuando alfa es igual a uno se tiene el siguiente desarrollo matemático, partiendo de la definición (22):

$$F(Z) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} e^{-x} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-izx} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-izx} e^{-x} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{izx} e^{-x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(iz+1)x} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(iz-1)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(iz+1)x} dx =$$

$$1/ iZ-1 \; e^{(iz-1)x} \Big|_{-\infty}^{0} + 1/-(iZ+1) \; e^{-(iz+1)x} \Big|_{0}^{\infty} =$$

$$-1/ iZ -1 + 1/iZ +1 = 1/iZ+1 -1/ iZ -1 =$$

$$iZ -1-(iZ +1)/ (iZ)^2 -1 =$$

$$-2 / -Z^2 -1 = 2/ 1+Z^2$$; dividiendo por 2

nos queda $F(Z)=1/ (1+ Z^2)^{-1}$. . . . .(25).

Que es conocida como Lorenziana.

Para el caso alfa igual a un medio, que fue estudiado en 1937 por Paul Levy, el caso alfa igual a dos tercios fue encontrado por Zolotarev en 1954 y publicado en una revista científica rusa.

CAPITULO 3

LEYES DE MORTALIDAD

3.1.- INTRODUCCION

El trabajo actuarial demanda una ley matemática simple que reproduzca la experiencia de la mortalidad generalizada a un grupo de vida, en cualquier tiempo, pidiéndole tan solo un grado suficiente de exactitud y manipulación.

Se dice que una "Ley de Mortalidad", es una expresión matemática tanto para l_x, como para μ_x, que reproduzca el comportamiento de un grupo inicial ante el evento muerte.

3.2.- LEY DE MOIVRE

Moivre fue quiza el primero en hacer estudios formales acerca del problema de encontrar una ley matemática de una expresión simple que reproduzca la experiencia de la mortalidad dada una tabla de mortalidad.

Fue por el año de 1725 cuando salió a la luz su famosa hipótesis de los decrementos uniformes, es decir, presuponía que el número de vivos (l_x), decrecía en progresión aritmética de la edad (x) hasta (w), por lo que gráficamente l_x se puede representar como una línea recta, esto es:

$$lx=K\ (w-x)\ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde $y=lx$, $M=K$ y $x=w-x$

y $b=0$, entonces se tiene una recta pasando por el origen.

Se observa que la probabilidad de que (x) fallezca entre las edades x y x+1 (qx), es igual a la fuerza de mortalidad (μx), esto es:

$$qx = \mu x \text{ para toda } x$$

$$\text{como} \quad qx=lo-lx$$

$$\text{entonces}\ \mu x=lo-lx$$

la expresión de Moivre se recomendaba para el uso práctico en las edades que fluctúan de 12 a 86 años.

Pero la expresión de Moivre tiene una correlación nada aceptable con respecto a la experiencia verdadera y aunque facilita los cálculos está muy lejos de tener una aplicación satisfactoria.

3.3.- LEY DE GOMPERTZ

Fue ante esta necesidad que Gompertz, un siglo mas tarde (1825), lanza una ley que dice "Las probabilidades de morir en intervalos infinitesimales sucesivos de tiempo crecen en progresión geométrica es decir, que la fuerza de mortalidad $\mu(x)$ se incrementa en forma geométrica.

$$\mu x = B.C^{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Donde x es igual a la edad en un momento dado y BC, son constantes.

Gompertz decia "Es posible que la muerte pueda ser la consecuencia de dos causas generales coexistentes, una la casualidad sin una inclinación previa a la muerte o deterioración y la otra, una deterioración o creciente incapacidad para resistir la muerte".

Puede apreciarse en la ley dada por Gompertz que el ajuste dado por la primera causa no está expresado.

La fórmula de lx bajo la ley de Gompertz se obtiene mediante la definición de x.

$$\mu x = -d\ (\mathrm{Log}\ lx/lx)/dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

La cual nos ofrece la expresión para calcular lx en términos de μx, integrando tenemos:

$$\int_0^x \mu y\, dy = -\int_0^x d/dy \log y\ Ly\, dy = -\log Ly \Big|_0^x$$

$$= \mathrm{Log}\ lx/lo \quad \text{de donde}$$

$$lx = lo\ e^{-\int_0^x \mu y\, dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

haciendo las sustituciones de (2) en (4)

$$lx = lo\ e^{-\int_0^x BC^y dy}$$

$$lx = lo\ e^{-B\int_0^x C^y dy} \quad \text{haciendo } B^{ax}\ dx = B^{ax}/a \log B$$

$$lx = lo\ e^{-B(C^y / \log e \big|_0^x)}$$

$$lx = lo\ e^{-B(C^x/\log C - C^0/\log C)}$$

$$lx = lo\ e^{-B\ (C^x/\log C - 1/\log C)} \quad \text{haciendo } q = B/\ \mathrm{Log}\ C$$

$$lx = lo\ e^{-\log g\, c^{x-1}} = lo\ e^{-\log g\, c^{x}/g}$$

$$lx = lo\ g^{c^{x}}/g \qquad \text{haciendo } K = lo/\ q$$

$$lx=Kg^{c^{x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Que es la expresión de lx bajo la ley de Gompertz.

Gompertz demostró que (5) proporciona valores aceptables para edades comprendidas entre 20 y 60 años por lo cual se deben efectuar ajustes fuera de este rango.

3.4.- LEYES DE MAKEHAM

En el año de 1860, Makeham sugiere modificar la ley de Gompertz agregando la primera causa de muerte o sea al azar, que el autor anterior no había considerado y la expresa:

$$\mu_x = A + B.\ C^{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Donde A es el factor de azar enunciado por Gompertz.

Expresaremos lx en términos de x, bajo la ley de Makeham.

$$\int_0^x \mu_y dy = \int_0^x (A + BC^{y})\ dy$$

$$= \int_0^x A\ dy + \int_0^x BC^{y}\ dy$$

$$= Ay \Big|_0^x + B \int_0^x C^{y}\ dy$$

$$= Ax + B\ C^{y} / \text{Log } c \Big|_0^x$$

$$= Ax + (BC^{x} / Log\ c - B\ C^{o} / Log\ c$$

$$= Log\ c \quad Ax / Log\ c + BC^{x} / Log\ c - B / Log\ c$$

$$= Log\ c\ Ax + B\ (C^{x} - 1) / Log\ c$$

Haciendo $Log\ S = -A$ y $log\ g = B\ Log\ c$

$$\int_{o}^{x} \mu_y\ dy = log\ S^{x} - log\ g^{c^{x}-1}$$

$$\text{como } lx = Lo\ e^{-\int_{o}^{x} \mu_y\ dy}$$

$$\text{entonces} \quad lx = lo\ (e^{log\ s^{x} + log\ g^{c^{x}-1}/g})$$

$$lx = lo\ (e^{log\ s^{x} + log\ g^{c^{x}}/g})$$

$$lx = lo\ (e^{log\ s^{x}\ g^{c^{x}}/g})$$

$$lx = lo\ S^{x}\ g^{c^{x}} / g \quad \text{haciendo } K = lo/g$$

$$\text{Nos queda : } lx = K\ S^{x}\ g^{c^{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

Que es la lx bajo la ley de Makeham.

La ley de Makeham proporciona valores aceptables para edades mayores o iguales a 20.

Hay además otras leyes que se han propuesto como la segunda ley de Makeham, que hace un pequeño ajuste a la primera.

$$\mu_x = A + Hx + BC^{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

donde A es el elemento constante, Hx es un elemento con progresión aritmética $B.C^{x}$ es el elemento con progresión geométrica.

Tambien puede ponerse a lx en términos de x.

Sabemos que $lx = lo\ e^{-\int_0^x \mu_y\, dy}$

$$lx = lo\ e^{-\int_0^x (A+HY+BC^y)dy}$$

Resolviendo la integral se tiene:

$$\int_0^x (A + Hy + BC^Y)\ dy = AY + Y\ HY\ /2 + BC^Y\ \text{Log}\ C \Big|_0^x$$
$$= AX + HX^2/2 + B(C^x - 1)\ /\text{Log}\ C$$

Haciendo A=-LogC, H=-2LogH, y B=-LogC.LogY

$$= -\ x \log S - x^2 \log H \_ (\ C^x - 1) \log g$$

$$y \quad lx = lo\ e^{x \log S + x^2 \log H + C^x - 1 \log g}$$

$$lx = lo\ S^x\ W^{x^2}\ g^{c^x - 1} \qquad \text{haciendo } K = lo\ g$$

$$lx = lo/g.\ S^x\ W^{x^2}\ g^c$$

$$lx = KS^x\ W^{x^2}\ g^{c^x} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8)$$

Esta ley vió la luz en 1889.

3.5.- OTRAS LEYES DE MORTALIDAD

En 1931 Perks da una generalización a la fórmula dada por Makeham:

$$\mu_x = (A + B.C^x)/(1 + KC^{-x} + OC^x) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

En 1935 Lazarus emite su expresión:

$$\mu_x = A + B_1 . C_1^x + B_2 . C_2^x \text{..............................} (10)$$

y en 1953 Ogborn sugiere que μ_x se expresa como:

$$\mu_x = A + x \; / B_o + Bx + B_2 x^2 + B_3 x^3 \text{........................} (11)$$

Como puede apreciarse las leyes que pretenden describir la mortalidad se aproximan al comportamiento real a través de x y se trata en cada caso de un polinomio, donde el más simple es el dado por Moivre, pero que con el transcurrir del tiempo van perdiendo simpleza matemática que es lo que pide el cálculo actuarial. Estas complicaciónes se vienen dando en la misma medida que se pretende dar mayor aproximación y precisión a los ajustes reales y que son dadas por la gran cantidad de variables que van introduciendo para describir a μ_x. Gracias a la gran cantidad de trabajo que hay detras de Gompertz y de Makeham en cuanto a ajustes y calculos de parámetros se refiere, es posible que dichas leyes sigan teniendo vigencias, aun conociendo sus limitantes.

3.6.- LEY DEL EXPONENTE FRACCIONADO

De acuerdo a los ajustes de los datos de las tablas de mortalidad, basado en Weibull se propone la siguiente expresión para $\mu(x)$: $\mu_x = m . x^{\alpha - 1}$ ....(12)

Donde m y α son dos parámetros (constantes), que tienen un significado:

m, es una constante de proporcionalidad de α y μ es decir m= $\mu \cdot \alpha$ ....(13)

Asi, α es el parámetro de ajuste, y μ es la fuerza de mortalidad en un periodo determinado.

Cuando μ_α igual a 1 entonces $\mu x = \mu(1)x^0 = \mu$

Para ser consecuentes daremos una expresión a lx, en términos de μ_x tal y como se efectuó en los párrafos anteriores.

$$lx = lo\ e^{-\int_0^x \mu y\, dy}$$

$$lx = lo\ e^{-\int_0^x m y^{\alpha-1} dy}$$

$$lx = lo\ e^{-m \int_0^x y^{\alpha-1} dy}$$

$$lx = lo\ e^{-m \left. y^\alpha/\alpha \right]_0^x}$$

$$lx = lo\ e^{-mx^\alpha/\alpha} \quad \text{expresando } m = \mu \cdot \alpha$$

$$lx = lo\ e^{-\mu \cdot \alpha \cdot x^\alpha/\alpha}$$

Por lo tanto $lx = lo\ e^{-\mu x^\alpha}$

Ahora determinaremos el valor para μx, para las cuales el número de muertos alcanza el valor máximo o mínimo.

Como $dx \doteq (lx + 1/2)(\mu x + 1/2)$

y recordando que: $\mu x = -Dlx/lx$

$d(\mu x lx) = \mu x\ dlx/dx + lx\ d\mu x/dx$

$= -1x\mu_x^2 + 1x d/dx\ (mx^{\alpha-1})$

$= -1x\mu_x^2 + 1x\ (mx^{\alpha-2}\alpha-1)$

$= -(mx^{\alpha-1})\ 1x + (\alpha-1)\ (mx^{\alpha-2})1x$

$= (m1xx^{\alpha-2}) * (-mx^{\alpha}+(\alpha-1)) = 0$

como $m1xx^{\alpha-2} \neq 0$ se sigue que

ya que $m\neq 0$, $1x\neq 0$, $x\neq 0$

$-mx^{\alpha}+(\alpha-1) = 0$

$-mx^{\alpha} = -(\alpha-1)$

$mx^{\alpha} = \alpha-1$

$x^{\alpha} = \alpha-1/m$

$x = \sqrt[\alpha]{\alpha-1/m}$ para toda alfa $>= 1$

Veremos el criterio de la segunda derivada para observar si dicho punto es máximo o mínimo.

$d(\mu_x 1x)\ /dx = (m1x * x^{\alpha-2})\ (-mx^{\alpha} + (\alpha-1))$

$d^2(\mu_x\ 1x)\ /dx = d(-m^2\ 1x\ x^{2\alpha-2} + m\ 1x\ x^{\alpha-2}\alpha-1)$

$d^2(\mu_x\ 1x)\ /dx = -m^2\ [1x\ dx^{2\alpha-2}/dx + x^{2\alpha-2}\ d\ 1x/\ dx] +$
$m(\alpha-1)\ [1x\ \ dx^{\alpha-2}\ /dx + x^{\alpha-2} d\ 1x/dx]$

$d^2(\mu_x\ 1x)\ /dx = -m^2[1x\ (\ 2\alpha-2)\ x^{2\alpha-3} + x^{2\alpha-3} d\ 1x/dx]+$
$m(\alpha-1)\ (1x\ (\alpha-2)\ x^{\alpha-3} + x^{\alpha-2}\ d1x/dx)$

$d^2(\mu_x\ 1x)\ /dx = -\ m^2[1x\ (2\alpha-2)\ x^{2\alpha-3} + x^{2\alpha-2}\ \mu_x\ 1x]+$
$m\ (\alpha-1)\ [1x * (\alpha-2)\ x^{\alpha-3} + x^{\alpha-2}\ x\ 1x]$

$d^2(\mu_x\ 1x)\ /dx = -m^2\ 1x\ [(2\alpha-2)\ x^{2\alpha-3} + x^{2\alpha-2}\ m\ x^{\alpha-1}] +$
$m(\alpha-1)\ 1x\ [(\alpha-2)\ x^{\alpha-3} + x^{\alpha-2}\ m\ x^{\alpha-1}]$

$d^2(\mu_x\ 1x)\ /dx = (-m^2 1\ 1x * x^{2\alpha-3})\ (\ 2\alpha-2 + x^{\alpha} m) +$
$m(\alpha-1)\ 1x\ x^{\alpha-3})\ (\ (\alpha-2) + x^{\alpha}\ m))$

sustituyendo el punto crítico $x^{\alpha} = \alpha - 1/m$

$$d2(\mu x\ lx)/dx = -m^2\ lx\ x^{2\alpha-3}((2\alpha-2) + (\alpha-1)) + m(\alpha-1)\ lx\ x^{\alpha-3})*$$

$$((\alpha-2) + (\alpha-3))$$

$$d\ (\mu x\ lx)/dx = -m^2\ lx\ x^{2\alpha-3}(3\alpha-3) + m^2\ x^{\alpha} lx\ x^{\alpha-3}(2\alpha-3)$$

$$= -m^2\ lx\ x^{2\alpha-3}(3\alpha-3) + m^2\ lx\ x^{2\alpha-3}(2\alpha-3)$$

$$= -m^2\ lx\ x^{2\alpha-3}\alpha$$

ahora se puede analizar el resultado:

$m > 0$, $lx > 0$, $x^{2\alpha-3} > 0$

Por lo tanto $d^2\ (\mu x\ lx)/dx < 0$ entonces existe un máximo en el punto crítico.

CAPITULO 4

RESULTADOS

4.1.- INTRODUCCION

En este capítulo se pretende comprobar, que las funciones de mortalidad, pueden ser descritas mediante las funciones Weibull, después se pretende bajar el error sin perder las cualidades de las funciones de Weibull, el objetivo de hacer ésto es hallar el mejor dominio que pueda ser descrito por una función Weibull ya que perderían el carácter de estable según la definición dada por Levy, capítulo 2.

4.2.- CORRELACIONES

Para el análisis de este apartado se usaron 6 tablas disgreadas de mortalidad: Tabla de vida Inglesa # 10, tabla de mortalidad CSO-58, experiencia Mexicana (62-67), tabla de los comisionados 1941, hombres americanos y tabla estandar de anualidades de 1937.

Las cuales presentan las siguientes correlaciones entre los comportamientos de la misma tabla y una función de Weibull.

tabla	coef. de correl.	error	Alfa
vida inglesa	.777952139	.36145602	1.1052463
C S 0-58	.862627241	.4066122257	1.71438214
Exp. Mex	.97110599	.218504159	4.0743254
Comisionados 41	.890564888	.3643336538	1.77003135
Hombres Amer	.855363302	.3383740449	1.37983786
Standar 1937	.982041772	.252993172	2.78592342

TABLA # 1

La correlación promedio es del orden del 88%, con un error del 32%; en cuanto a las s´ se observa que todas están adentro del rango que define a las funciones estables de Levy, o sea, <2, excepto en dos tablas que no tienen este comportamiento:

1).- En la tabla experiencia Mexicana, ya que le falta considerar los primeros 15 años, de ahí su alfa tan elevada, y

2).- En el standar de anualidades de 1937, no obstante de tener una alfa no muy elevada sobrepasa el límite definido, en este caso la experiencia que le falta es la de los 5 años. Se hace el comentario por que es de suponerse que si las experiencias de las tablas citadas estuvieran completas, entonces podría esperarse que tuviera un carácter estable.

Puede tambien observarse que estas dos tablas tienen las más altas correlaciones con errores bajos lo que se debe a dos razones muy importantes:

Que los autores o compañías que publicaron esas tablas:

1).- Renuncian a considerar la parte mas conflictiva y problemática de las tablas, como es la niñez.

2).- Los comportamientos, después de superada la niñez, siguen una distribución de Weibull.

De aqui se desprende un resultado que es muy importante:

La misma distribución de Weibull puede servir como ajuste particular para la obtención de una mayor correlación en la tabla bajo estudio.

A continuación se notan las correlaciones que se efectuaron a modo particular, con la finalidad de conocer el porcentaje con que se aproxima una función tipo Weibull (20) a una tabla de mortalidad.

TABLA	PERIODO	CORRELACION	ERROR STD.
Inglesa	1- 10	.994084639	.0069943893
CSO-58	- - -	.692796915	.0183290503
Comisionados	- - -	.996952495	.0251346517
H. Americ.	- - -	.898664969	.00774666537

TABLA # 2

Puede observarse, que hay una gran correlación del 99% con un error mínimo de tan solo el 1% de promedio.

Esto quiere decir que el comportamiento de la mortalidad infantil puede ser descrito por una función de Weibull (20), con un 99% de correlación.

Se tomó un periodo semejante para observar si la correlación era igualmente satisfactoria como lo fue en el caso de la infancia, y se llegó a los siguientes resultados que son mostrados en la tabla # 3.

TABLA	PERIODO	CORRELACION	ERROR EST. DE CORREL.
INGLESA	11-20	.97846098	.00471141094
CSO-58	----	.997216695	.0058097587
COMISIONADOS	---	.998607165	.003974927
H.AMERICANOS	---	.990029259	.00739977
E. DE ANUALI	---	.998731931	.0071406

TABLA # 3

Cuando los errores mostrados en la tabla # 2, nos damos cuenta que han disminuido por las razones comentadas cuando se trató la problemática de la infancia y su comportamiento en las tablas de mortalidad.

El periodo se ha incrementado a 20 años esperando que la función de Weibull (20), siga teniendo un efecto de representatividad en cuanto a la descripción este efecto se puede observar en la tabla # 4.

TABLA	PERIODO	CORRELACION	ERROR DE CORRELACION
INGLESA	11-30	.977739817	.0111729955
CSO-58	----	.996467829	.0110865983
EXP.MEX	16-30	.988747639	.09090070992
COMISIONADOS	11-30	.896201936	.011279802
H.AMERICANOS	----	.988902193	.0150484906
E. DE ANUALID	---	.999480713	.0064642191

TABLA # 4

Aunque se sigue teniendo una buena correlación, el error de correlación se ha incrementado, no obstante sigue siendo bastante aceptable. Se puede observar que el error en los datos proporcionados en la tabla Experiencia Mexicana, es el mas alto de todas; lo que se debe a la falta de los primeros datos que están dados durante la niñez y la adolescencia. De alguna manera están incidiendo para que la mortalidad tenga una tasa mas alta que las tablas analizadas en la tabla # 4.

Incrementaremos el periodo, con en mismo espíritu de consulta que en la tabla anterior; los resultados obtenidos se pueden ver en la tabla # 5.

TABLA	PERIODO	CORRELACION	ERROR DE CORRELACION
INGLESA	11-40	.977942147	.0168548054
CSO-58	----	.995517867	.01872292
EXP.MEX	16-40	.973226815	.0924905771
COMISIONADOS	11-40	.991082453	.0244431249
H.AMERICANOS	----	.986430781	.0244856295
E. DE ANUALID	---	.997278674	.0195722635

TABLA # 5

Las correlaciones siguen sin variar significativamente no obstante los errores se han modificado pero sin llegar a los extremos, la experiencia mexicana llegó al 9% de error, a pesar de haberse ampliado el periodo se nota la ausencia de los primeros datos que no fueron examinados.

TABLA	PERIODO	CORRELACION	ERROR DE CORRELACION
INGLESA #10	11-50	.961547669	.0322917722
CSO-58	11-50	.986555686	.077112283
EXP.MEX	16-50	.981861208	.0841645391
COMISIONADOS	11-50	.982151929	.0460199108
H.AMERICANOS	11-50	.887020282	.0300789536
E. DE ANUALID	11-50	.989696683	.0489282495

TABLA # 6

Las correlaciones se mantienen altas, pero los errores se siguen incrementando el descartamos los datos proporcionados por EXP. MEX. Aunque ha mejorado notablemente dado la amplitud de rango a la que fue sometida. Observamos que todavía no llegamos al 5% de error standar global, y si al 5% lo fijamos como límite, es obvio que el cuadro está llegando a extremos, esto con la finalidad de efectuar ajustes.

Por la tabla # 1, nos dimos cuenta que la mortalidad en general, sigue un comportamiento tipo Weibull, y lo que estamos analizando son casos particulares de comportamiento, que nos permite en ciertos periodos a efectuar ajustes para una mayor correlación.

Las correlaciones para periodos de tiempo mucho mas largos en llegar al periodo global, para los cuales las funciones Weibull sigan teniendo sentido, buena correlación y un error aceptable, se analizó, el periodo 11-88 y las observaciones se apuntan en la tabla # 7.

TABLA	CORRELACION	ERROR DE CORRELACION	ALFA
INGLESA #10	.874771431	.215433452	1.58
CSO-58	.926327032	.234306745	2.35
EXP.MEX	- - - - -	- - - - -	- -
COMISIONADOS	.946104559	.162161937	2.90
H.AMERICANOS	.920612817	.192418092	1.85
E. DE ANUALID	.962216831	.190780176	2.75

TABLA # 7

Aunque se han incrementado las correlaciones y disminuido los errores, con respecto a la tabla global, las alfas en promedio nos advierten que carecen del comportamiento estable definido por Levy, por esta arriba de 2, por consiguiente hacen necesario realizar un nuevo análisis que nos permita hacer ajustes en las alfas, ahi donde puede ser aceptable, para esto se elaboró la tabla # 8, que comprende el periodo de 11-80 años.

TABLA	CORRELACION	ERROR DE CORRELACION	ALFA
INGLESA #10	.886928936	.157879197	1.29
CSO-58	.833142037	.18614304	2.00
EXP.MEX	- - - - -	- - - - -	- -
COMISIONADOS	.946104559	.162161937	2.00
H.AMERICANOS	.933992325	.143105878	1.59
E. DE ANUALID	.966699645	.157336743	2.50

TABLA # 8

Se ha mejorado la correlación, el error estandar de correlación se ha reducido en mas de la mitad comparativamente al global, hasta en un 15% y las alfas estan dentro del rango de 2.

4.3.- INTERPOLACIONES Y EXTRAPOLACIONES

Un requisito indispensable para cualquier ley de mortalidad es la de generar la disgregación de una tabla agregada.

Supongamos que conocemos los datos de una tabla abreviada por quinquenios, como son las columnas lx y qx, respectivamente.

es decir x_{15}, q_{15} ....(1)

x_{20}, q_{20}

Las qx. que las (m), representan, están dadas por las siguientes expresiones:

$$\mu x_i = \mu \cdot \alpha \cdot X_i^{\alpha-1}$$
$$\mu x_i = \mu \cdot \alpha \cdot X_{i+5}^{\alpha-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Para determinar alfa se efectúa la resolución del sistema (2), por cualquier método algebráico, despejando en ambas ecuaciones obtenemos:

$$\mu = \frac{\mu x_i}{\alpha \cdot X_i^{\alpha-1}}$$
$$\mu = \frac{\mu x_{i+5}}{\alpha \cdot X_{i+5}^{\alpha-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

se igualan las μ y se obtiene:

$$\frac{\mu x_i}{\alpha \cdot X_i^{\alpha-1}} = \frac{\mu x_{i+5}}{\alpha \cdot X_{i+5}^{\alpha-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

desarrollando algrebráicamente

$$\frac{\mu x_i}{\mu x_{i+5}} = \frac{X_i^{\alpha-1}}{X_{i+5}^{\alpha-1}}$$

aplicando la ley de los exponentes en el segundo miembro de la ecuación:

$$\frac{\mu x_i}{\mu x_{i+5}} = \left(\frac{x_i}{x_{i+5}}\right)^{\alpha-1}$$

tomando logaritmos en ambos miembros:

$$\ln\left(\frac{\mu x_i}{\mu x_{i+5}}\right) = (\alpha - 1) \cdot \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+5}}\right)$$

despejando alfa nos queda:

$$\alpha = 1 + \frac{\ln\left(\dfrac{\mu x_i}{\mu x_{i+5}}\right)}{\ln\left(\dfrac{x_i}{x_{i+5}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

y para obtener el valor de μ (mu), ya conocido el valor de alfa se sustituye en la primera ecuación y se obtiene:

$$\mu = \frac{\mu x_i}{\alpha \cdot x_i^{\alpha-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Ejemplo de aplicación: para la tabla CSO-58 donde, los años tomados van del 25-30

x_i +25 , μx_i = .00193

x_{i+5} = 30, μx_{i+5} =.00213

Calculando ALFA y mu, mediante (5) y (6) se tiene:

ALFA = 1 + ln (.00193/.00213) / ln (25/30) = 1.5408135

Mu = .00193 / (1.5408135) (25)^ .5480135 = 0.0002197

α-1 = 0.5408136

m = $\mu \cdot \alpha$ = 0.0003385

Mu 25 = 0.0019301

Mu 26 = 0.0019715

Mu 27 = 0.0020121

Mu 28 = 0.0020521

Mu 29 = 0.0020914

Mu 30 = 0.0021301

A continuación se da una lista de datos extrapolados obtenidos con el mismo metodo comparándolos con valores correspondientes de la tabla CSO-58:

VALORES CALCULADOS	VALORES DE TABLAS CSO-58
M16=0.0015162	q16=0.00154
M17=0.0015668	q17=0.00162
M18=0.0016159	q18=0.00169
M19=0.0016639	q19=0.00174
M20=0.0017107	q20=0.00179
M21=0.0017564	q21=0.00183
M22=0.0018012	q22=0.00186
M23=0.001845	q23=0.00189
M24=0.001888	q24=0.00191
M25=0.0019301	q25=0.00193
M26=0.0019715	q26=0.00196
M27=0.0020121	q27=0.00199
M28=0.0020521	q28=0.00203
M29=0.0020914	q29=0.00208
M30=0.0021301	q30=0.00213
M31=0.0021682	q31=0.00219
M32=0.0022058	q32=0.00225
M33=0.0022428	q33=0.00232
M34=0.0022793	q34=0.00240
M35=0.0023153	q35=0.00251

TABLA IV-1

CAPITULO 5

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

5.1.- INTRODUCCION

Se buscó una ley que exprese los criterios para comprender el comportamiento de la mortalidad dada mediante tablas de mortalidad y decidir mediante estos criterios su aceptación. La ley ofrecida en este trabajo es la ley del exponente fraccionado, el cual fue inspirado de los trabajos de Weibull, teniendo criterio de aceptación el principio de estabilidad dado por Paul Levy a las funciones de distribución, para cierto tipo de funciones a las cuales les aplicó la transformada de Fourier.

5.2.- PRESENTACION DE RESULTADOS

La ley del exponente fraccionado, de acuerdo como fue propuesta en el capítulo # 3, es:

$$\mu_x = mx^{\alpha-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Con un requisito de estabilidad dado por Paul Levy en que:

$$0 < \alpha <= 2 \quad .$$

El ajuste de esta ecuación a los datos de las tablas de mortalidad, se realizó de la siguiente manera:

Se buscó representar a los datos en un juego de variables tal que se obtenga una línea recta, para lo cual se utilizó una escala logarítmica.

A continuación se observará el comportamiento lineal de 6 tablas de mortalidad mostradas en las gráficas.

En la gráfica 1 se puede observar el comportamiento de la tabla CSO-58, en la cual puede observarse que para las primeras edades la pendiente se mantiene constante y crece con rapidez en las edades avanzadas, lo que indica un cambio considerable en las tasas de mortalidad. De acuerdo con la curvatura que presenta en la gráfica Log. Log., el ajuste hecho mediante una ecuación, presenta la conveniencia de utilizar al menos 2 rectas, para incrementar su correlación y reducir el error estandar de correlación.

Por el momento la ecuación que ajusta el comportamiento global para esta tabla de mortalidad, es la siguiente:

$F(x) = -3.4277673 + 1.71438214\ x$ ....(2)

donde 1.71438214 puede ser interpretado como la alfa de la cual nos habla Paul Levy, ya que los datos fueron procesados de acuerdo a las funciónes Weibull que siguen un comportamiento de las funciones estables de Levy.

La correlación con que fue obtenida la ecuación (2), fue de 86.26% con un error del 40.66%.

En la gráfica 2 puede observarse un comportamiento análogo al visto en la gráfica 1. Esta gráfica representa la tabla de mortalidad de vida Inglesa # 10, la cual tiene una representación global dada por:

$F(x) = -2.08503418 + 1.11052463\ x$, lo cual, es igual que la

CSO-58 están dentro de los límites dados por Levy.

La correlación con que fue obtenida la ecuación (2) fue de 86.26% y con error de 40.66%.

En la gráfica 2 puede observarse un comportamiento análogo al visto en la gráfica 1. Esta gráfica representa la tabla de mortalidad de Vida Inglesa # 10, el cual tiene una representación global dado por:

$$F(x) = -2.08503418 + 1.1052463\ x \quad \text{.......................(3)}$$

Su correlación es de 77.79% de determinabilidad con un error del 36.14%, su alfa es igual a 1.1052463, lo cual, al igual que la CSO-58 están dentro de los límites dados por Levy.

La gráfica 3 es la que corresponde a la Experiencia Mexicana.

Su análisis fue un tanto delicado porque siempre hay que estar recordando la falta de 16 datos que son los que corresponden a la niñez, a la adolescencia y a que alguna manera están afectando el comportamiento global, pues la gráfica que se dibuja aparece con una curvatura adicional en la parte que corresponde a las primeras edades, por consiguiente, para su determinación con un mínimo de error se requiere para su descripción de al menos 3 rectas; puede compararse con lo visto en los dos casos anteriores, primero por la fórmula de la línea recta que la describe:

$$F(x) = -7.62610509 + 4.0743647\ x \quad \text{.........................(4)}$$

y lo primero que se observa es su alfa tan elevada 4.0743647, que al aplicarle el criterio de Levy, nos informa que ya dejó de ser una función estable. Lo cual hace resaltar el hecho previsto de que la falta de datos sacan de proporción a la distribución resultando que no se ajusta a las condiciónes previstas por la teoría.

La correlación con que fue determinada esta recta es : 97.11% y con un error del 21.85%.

En la gráfica 4 se describe a la tabla de mortalidad Hombres Americanos teniendo como ajuste la ecuación que la describe en forma de línea recta:

$F(x) = -2.62760246 + 1.37983786\ x$ ....(5)

Donde alfa esta dado por 1.37983786 es decir cumple con los requisitos dados por Paul Levy, anotados en la parte superior.

La correlación con que es descrita es: 85.53% y el 33.83%, de error estimado.

En la gráfica # 5 están representados los datos de la tabla de mortalidad llamada Standar de Anualidad de 1937, usadas en los Estados Unidos por esas mismas épocas.

La ecuación que la determina en lo global es:

$F(x) = -5.35007752 + 2.78592342\ x$ ....(6)

Al igual que el análisis hecho a la tabla Experiencia Mexicana el alfa que determina su función de distribución es muy alto comparado con el rango aceptado por Paul Levy, como estable ya que es de 2.78592342, con un error de 15%.

La gráfica # 6, es la que describe a los datos proporcionados por la tabla de mortalidad de los Comisionados de 1941, tiene un comportamieanto similar a las primeras tablas, la ecuación que la describe es:

$F(x) = -3.36940872 + 1.77003435\ x$ ....(7)

Su alfa es de 1.77003435 la cual esta dentro del rango de 2 que fue el dado por Paul Levy.

Su correlación es de .890564888 y su error de 36.43% está dentro del margen de las funciónes estables.

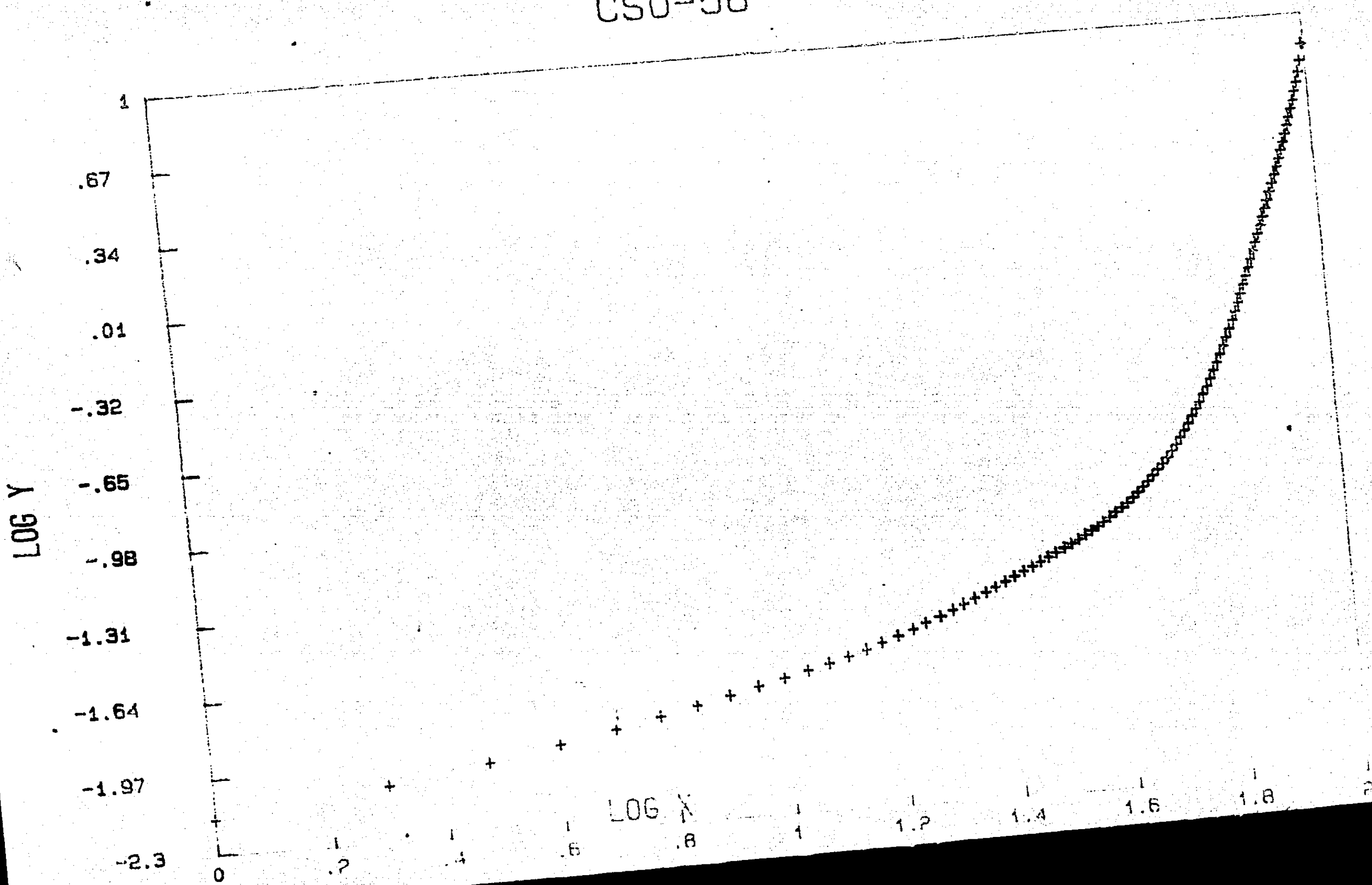
Recapitulando, se puede decir, que el análisis efectuado a las 6 tablas de mortalidad puede mejorarse sustancialmente, si en lugar de ser analizado mediante una recta que es la que describe el comportamiento global, es analizádo por dos rectas, por que de esta manera se obtiene una mayor correlación en cuanto a la descripción de las tablas se refiere, el error estándar de correlación tambien se ve favorable.

El éxito de este método, indica que puede ser utilizado para descriminar datos que al elaborarse una tabla fueron tomados en cuenta de una manera arbitraria.

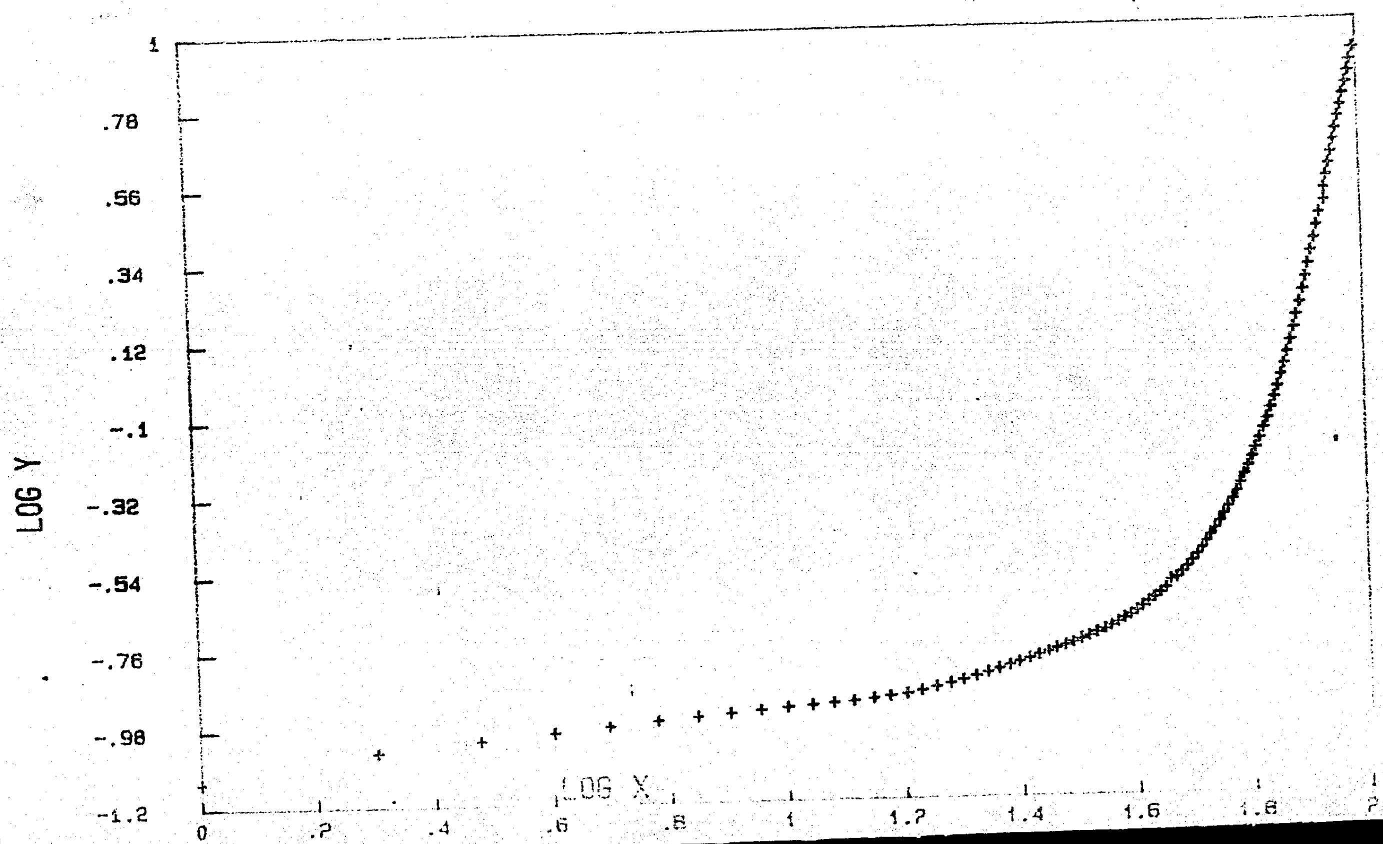
O de otras posibles fallas que aparecen cuando métodos rudimentarios fueron utilizados para suplir la falta de algunos datos. Siguiendo el método aqui indicado, dichos datos pueden ser extrapolados siguiendo la ley del exponente fraccionado,con un error de interpolaciónbastante aceptable.

GRAFICA 1

CSO-58

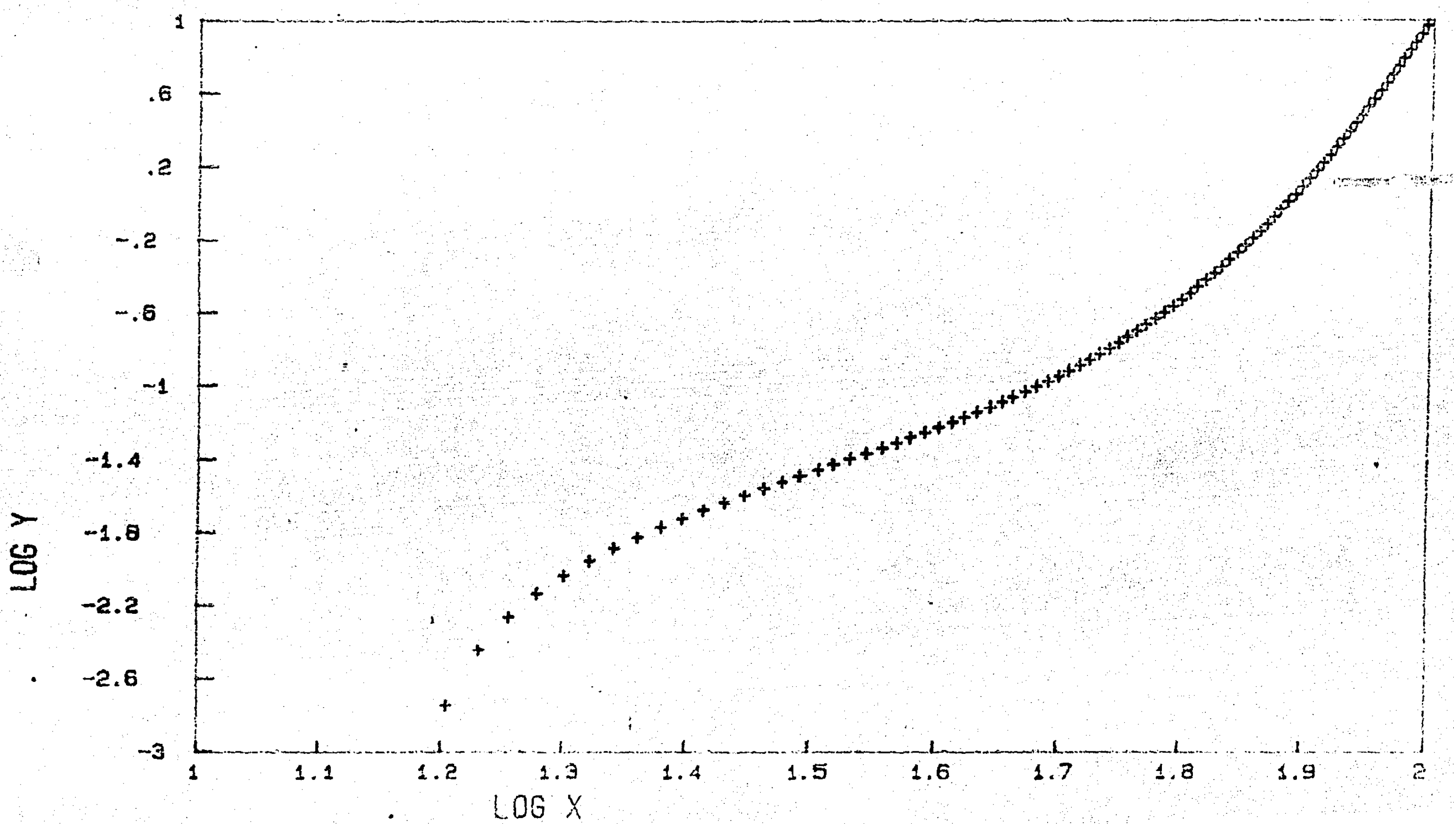


GRAFICA 2
VIDA INGLESA NO.10



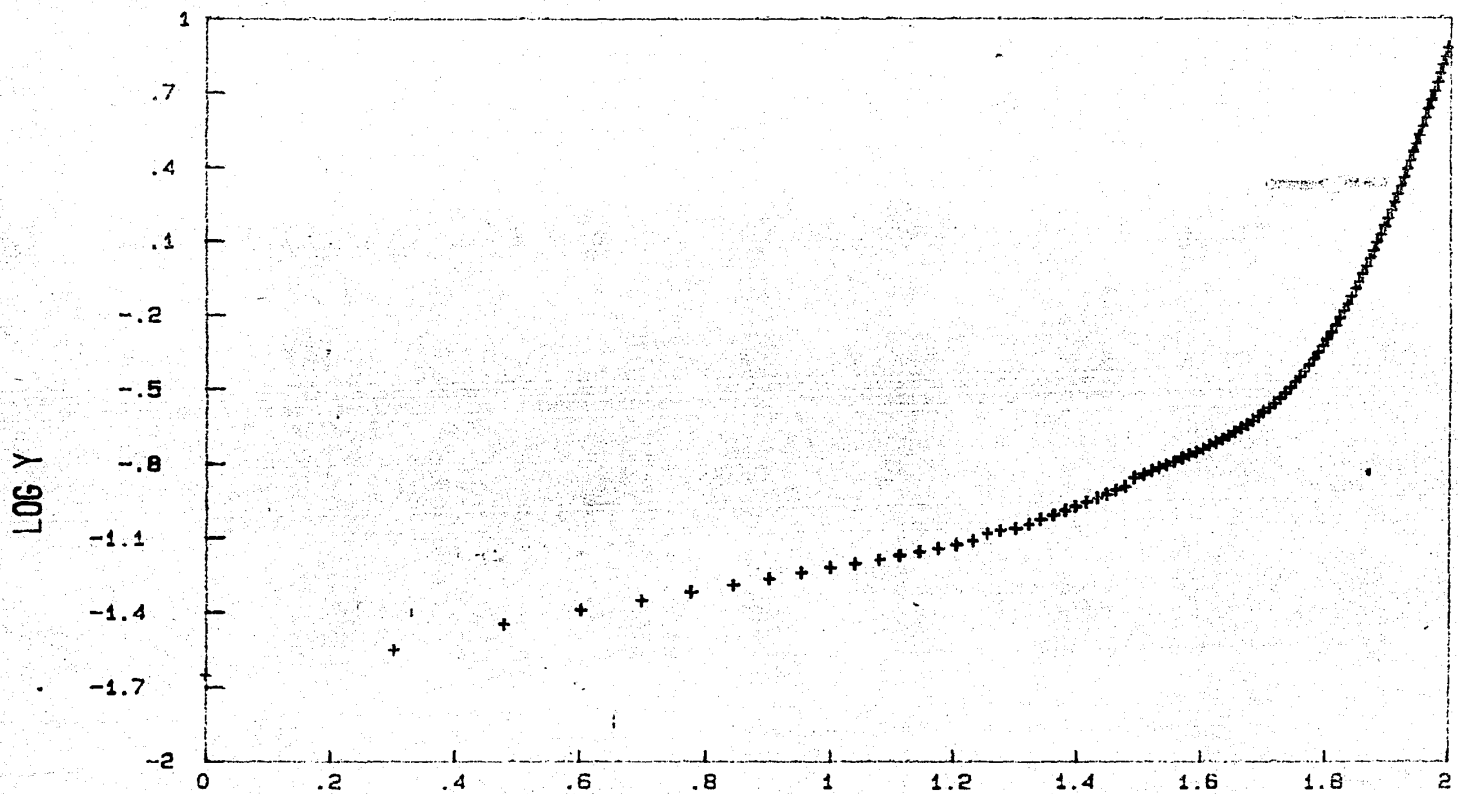
GRAFICA 3

EXP. MEXICANA (62-67)



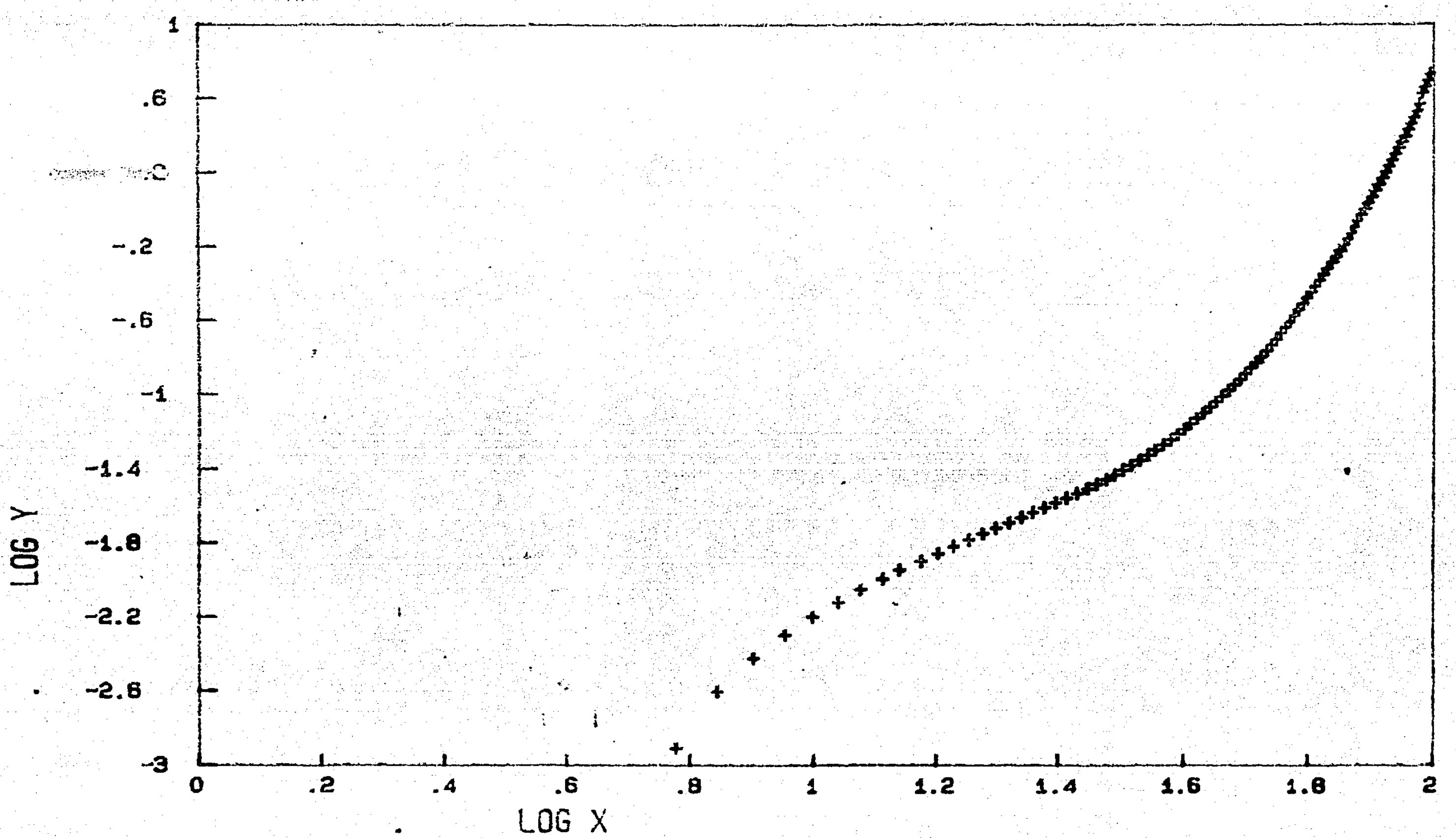
GRAFICA NO.4

HOMBRES AMERICANOS



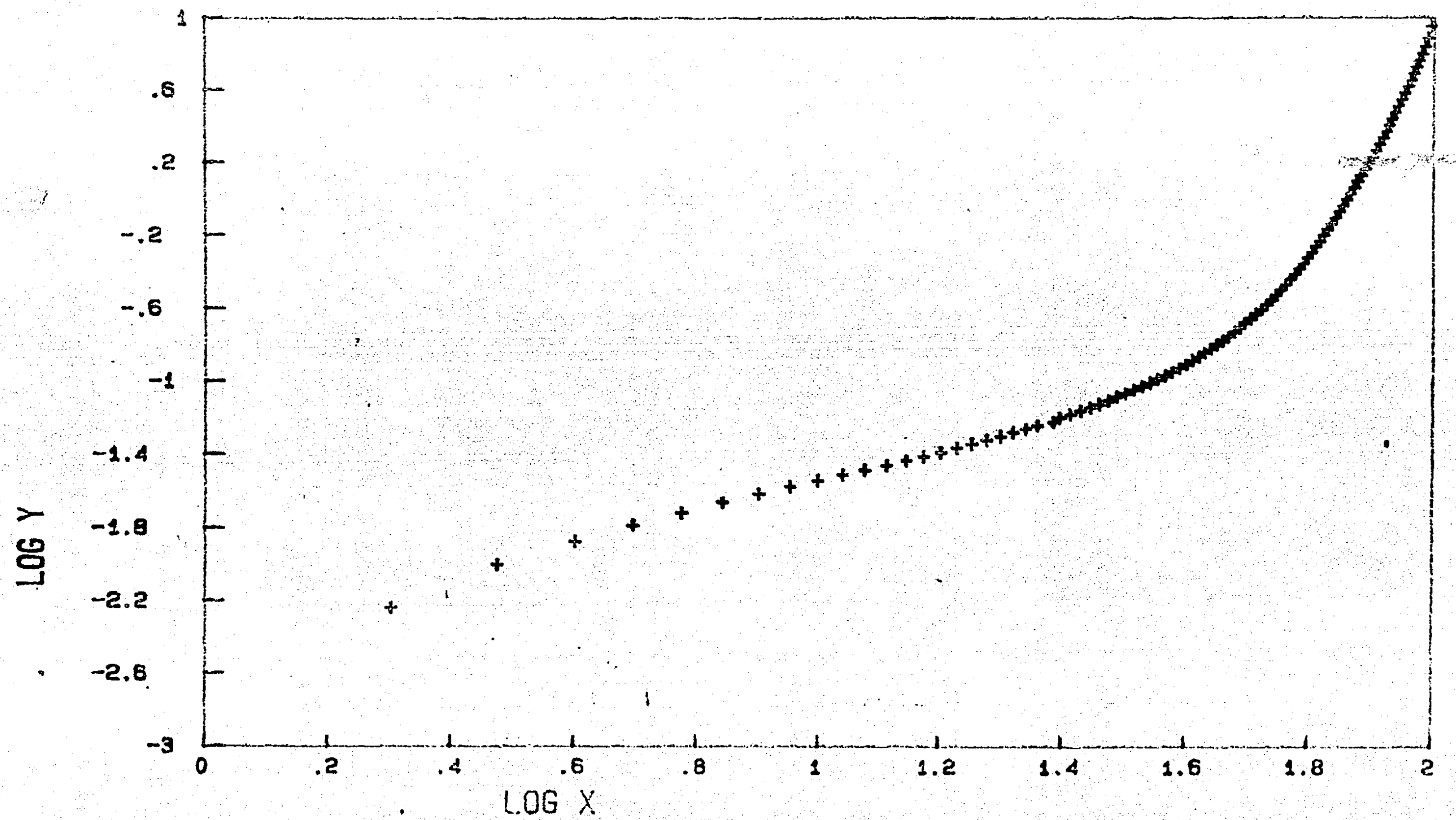
GRAFICA NO.5

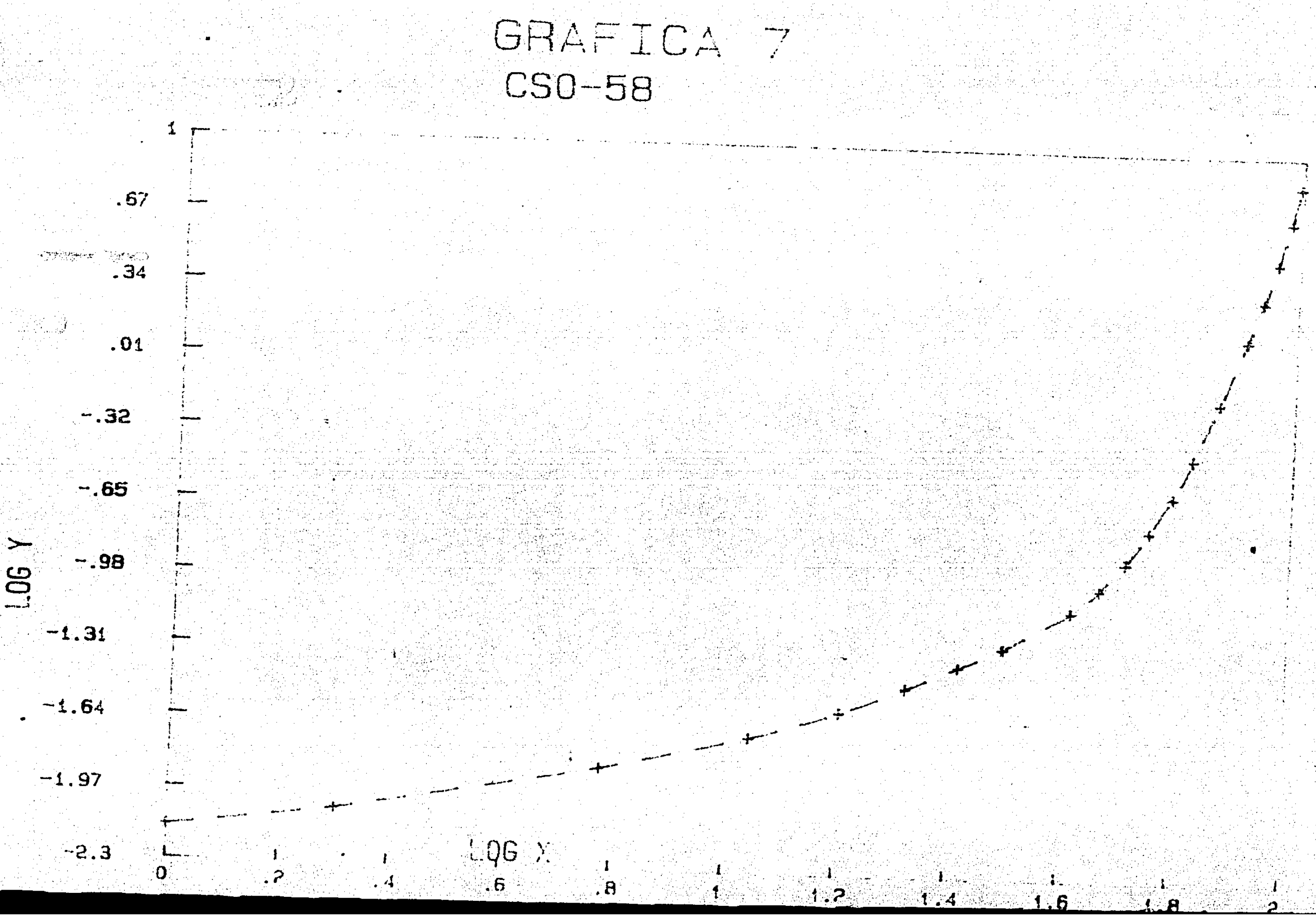
ESTANDAR 1937



GRAFICA NO. 6

COMISIONADOS 1941




GRAFICA 7
CSO-58
LOG Y
1
.67
.34
.01
-.32
-.65
-.98
-1.31
-1.64
-1.97
-2.3
LOG X
0
.2
.4
.6
.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis, se propuso la Ley del Exponente Fraccionado como una alternativa en la resolución del problema de ajuste y descripción de las tablas ordinarias de mortalidad.

Esta ley fue revisada siguiendo los criterios a los que fueron sometidos la ley de Gompertz y la de Makeham. Se logró expresar a lx bajo la Ley del Exponente Fraccionado.

La descripción gráfica del comportamiento de la mortalidad demuestra que tiene un máximo, por consiguiente la ley del exponente fraccionario fue sometida al criterio de la segunda derivada, la cual aprueba satisfactoriamente al reconocer que tiene un máximo en uno de sus puntos.

Fueron examinadas seis tablas de mortalidad bajo el esquema de la ley del Exponente Fraccionario, primeramente para observar si era posible aplicarles los principios de estabilidad dados por Paul Levy.

Se apreció que cuatro de las tablas siguen el criterio de estabilidad anunciado por Paul Levy. La tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana y la Tabla de Mortalidad Estandar de 1937 no cumplen con los requisitos de estabilidad. Porqué?.Para contestar a esta pregunta hay que recordar a Weibull que nos dice que existe una cantidad no precisada de eventos por los cuales una cadena se puede romper. Análogamente, las desviaciones presentadas por las tablas de mortalidad pueden ser detectadas, pero jamás mediante este criterio conocerse las causas.

Por consiguiente hubo necesidad de examinar ambas tablas y se encontró que las dos estaban incompletas.

Lo que se concluye de estas observaciones es la existencia de un criterio para discernir entre tablas completas y tablas incompletas, ya que el criterio de Paul Levy es muy tajante, fuera del rango de estabilidad se corre el riesgo de estar manejando funciones de distribución irreales.

Otra cuestión que se palpó muy de cerca, fueron las interpolaciones y extrapolaciones como una aplicación de la ley del Exponente Fraccionario. Se hizo un ejemplo comparativo entre los datos que fueron calculados mediante la ley en cuestión y los datos observados en la tabla de mortalidad CSO-58. Se observólo siguiente: si al comportamiento global se le hace un ajuste por cada diez datos , se obtiene una correlación del 99 % con un error del 1 %.

Estas observaciones se fueron dando cuando se examinó una tabla de mortalidad CSO-58 y los datos presentados por dicha tabla fueron procesados de la siguiente manera:

Para el eje de las ordenadas se aplicó el logaritmo en base 10 a Y, donde Y es obtenida mediante la diferencia entre el logaritmo natural del radix y el logaritmo natural de los lx:

$$Lg\ Y \text{ VS } Lg\ X \quad . . . . (1)$$

$$\text{donde } Y = Ln\ lo - Ln\ lx \quad . . . . (2)$$

Este procedimiento se efectuó tratando de conseguir una línea recta que la describiera, el resultado fue la siguiente ecuación de primer grado:

$$F(x) = -3.4277673 + 1.71438214\ x \quad . . . . (3)$$

obtenida mediante una correlación del 86.26 % y con un error del 40.66 %, lo cual, para los fines que pretendemos, cumple con los requisitos de estabilidad, pero nos informa que el error es muy alto, por lo que se sugiere, para efectos de ajuste, la asociación de dos rectas que la defina:

1.- Una recta para el primer periodo que nosotros distinguimos entre el año 1 y el 55:

$$F(x) = -2.49694095 + .86989697\,x \quad \ldots\ldots (4)$$

2.- Una recta para el segundo periodo, que va del año 56 al 99:

$$F(x) = -11.7630277 + 6.267449622\,x \quad \ldots\ldots (5)$$

con un coeficiente de correlación del 99.56% y un error estandar del 4%.

Para tres periodos se nota también un gran aumento en la correlación:

PERIODO	CORRELACION	ERROR DE CORRELACION
1-10 Años	99 %	1.83 %
11-55 "	98 %	3.77 %
56-99 "	99 %	4.0 %

TABLA 1

Las conclusiones a estos resultados nos dicen que es posible de rehacer una tabla de mortalidad desagregada mediante una misma ley, con una aproximación deseada.

BIBLIOGRAFIA

1.- INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES.
WILLIAM FELLER
VOLUMEN I
ED. LIMUSA (1973)

2.- INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES
WILLIAM FELLER
VOLUMEN II
ED. LIMUSA (1978)

3.- TEORIA DE LAS PROBABILIDADES Y ESTADISTICA MATEMATICA.
V.E. GMURMAN.
ED. MIR. (1974)

4.- ANALYSIS OF SURVIVAL DATA
D.R. COX Y D. OAKES
ED. CHAPMAN AND HALL (1984)

5.- EL SEGURO DE VIDA
JOSEPH B. MACLEAN
ED. CECSA (1962)

6.- TABLAS FINANCIERAS
ACT. BENJAMIN DE LA CUEVA
ED. CAPRICORNIO (1972)

7.- DEMOGRAFIA ESTADISTICA
ROLAND PRESSAT
ED. ARIEL (1979)

8.- PROCESOS ESTOCASTICOS
R. COLEMAN
ED. LIMUSA (1976)

9.- PROGRAMA PARA CIENCIA E INGENIERIA PARA APPLE II
JOHN HEILBORN
ED. OSBORNE/MC GRAW-HILL

10.- PROYECTO DE TEXTO PARA CALCULO ACTUARIAL 1
TESIS.- FACULTAD DE CIENCIAS
F. ALONSO TEJEDA LOPEZ (1985)

11.- LIFE CONTINGENCIES
CHESTER W. JORDAN
SOCIETY OF ACTUARIES

12.- LEVY (STABLE) PROBABILITY DENSITIES AND MECHANICAL RELAXATION IN SOLID POLYMERS.
JOHN T. BENDLER
VOL. 36 Nums. 5/6 SEPTIEMBRE DE 1984
BELGICA

13.- E.W. MONTROLL AND J.T. BENDLER
JOURNAL STAT. PHYS. 34 ; 129 (1984)

14.- A STATISTICAL DISTRIBUTION FUNCTION OF WIDE APLICABILITY .
WALODDI WEIBULL. ESTOCOLMO, SUECIA.
J. APPL. MECH. No. 18 . 293 (1951)