

12
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA



*DIFRACCION DE ONDAS SISMICAS POR
DEPOSITOS TRIDIMENSIONALES DE
SUELOS BLANDOS.*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :

LUIS EDUARDO PEREZ ROCHA



MEXICO, D. F.

1 9 8 7 .



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	PAG.
ABSTARACT	1
RESUMEN	2
1. INTRODUCCION	3
2. ONDAS SISMICAS	5
3. FORMULACION DEL PROBLEMA	7
3.1 Campo libre	8
3.2 Campos refractados y difractados	9
3.3 Descomposicion azimutal	11
4. SOLUCION NUMERICA	14
5. RESULTADOS	16
5.1 Resultados en el dominio de la frecuencia	16
5.2 Resultados en el dominio del tiempo	19
6. CONCLUSIONES	23
7. AGRADECIMIENTOS	24
8. REFERENCIAS	25
FIGURAS	28
APENDICE A: EXPRESIONES DE LOS ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE EN COORDENADAS CARTESIANAS	
A.I: ONDAS P, SV Y DE RAYLEIGH	43
A.II: ONDAS SH	47
APENDICE B: EXPRESIONES DE LOS ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE EN COORDENADAS ESFERICAS	50
APENDICE C: EXPRESIONES DE LOS ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DIFRACTADOS Y REFRACTADOS EN TERMINOS DE LOS ELEMENTOS VECTORIALES $\vec{\omega}_{jrm}$	54
APENDICE D: FACTORES DE LA DESCOMPOSICION AZIMUTAL	60

ABSTRACT

1

A boundary method is applied in order to study the seismic - response of axisymmetrical alluvial valleys on the surface of an - isotropic, homogeneous and elastic half-space. The excitation is - given by incidence of plane waves.

The method makes use of the "completeness" of wave function families that are solutions of Navier's equation. These functions are expressed in terms of spherical Bessel or Hankel functions associated with trigonometric and Legendre functions. The reflected and scattered displacement fields are constructed with these families expressed by linear forms. Coefficients are obtained from a least-squares treatment of boundary conditions.

Axial symmetry of scatterer allows an azimuthal decomposition. This makes the solution of a three-dimensional problem possible by means of superposition of several two-dimensional problems, one for each azimuthal number.

Results are presented in both time and frequency domains.

Se aplica un método de frontera para estudiar la respuesta sísmica de valles aluviales axisimétricos sobre la superficie de un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo. La excitación está dada por la incidencia de ondas planas.

El método hace uso de la completez de familias de funciones de onda que son soluciones de la ecuación de Navier, las cuales están expresadas en términos de funciones esféricas de Bessel o de Hankel asociadas con funciones trigonométricas y de Legendre. Los campos de desplazamientos difractados y refractados se construyen con estas familias representadas en formas lineales cuyos coeficientes se obtienen de un ajuste de mínimos cuadrados en las condiciones de frontera.

La simetría axial de los difractores permite una descomposición azimutal. Esto hace posible que el problema tridimensional se resuelva mediante una superposición de varios problemas bidimensionales, uno para cada número azimutal.

Se presentan resultados en los dominios del tiempo y la frecuencia.

Se aplica un método de frontera para estudiar la respuesta sísmica de valles aluviales axisimétricos sobre la superficie de un semiespacio elástico, homogéneo e isotropo. La excitación está dada por la incidencia de ondas planas.

El método hace uso de la completéz de familias de funciones de onda que son soluciones de la ecuación de Navier, las cuales están expresadas en términos de funciones esféricas de Bessel o de Hankel asociadas con funciones trigonométricas y de Legendre. Los campos de desplazamientos difractados y refractados se construyen con estas familias representadas en formas lineales cuyos coeficientes se obtienen de un ajuste de mínimos cuadrados en las condiciones de frontera.

La simetría axial de los difractores permite una descomposición azimutal. Esto hace posible que el problema tridimensional se resuelva mediante una superposición de varios problemas bidimensionales, uno para cada número azimutal.

Se presentan resultados en los dominios del tiempo y la frecuencia.

1. INTRODUCCION

Es un hecho aceptado que los efectos de sitio pueden generar grandes ampli-ficaciones y variaciones espaciales relevantes durante el movimiento sísmico del te-rreno. Las heterogeneidades laterales en la superficie, así como en los suelos es-tratificados, han sido relacionadas con la distribución de daños ocurrida en algu-nos terremotos, (Poceski, 1969; Jackson, 1971; Rial, 1984). El reciente terremoto de Michoacán ($M_R = 8.1$) del 19 de septiembre de 1985, causó daños sin precedente en la ciudad de México. Aparte de las condiciones de fuente y los efectos producidos por la trayectoria (Singh, 1986), las formaciones lacustres del valle amplificaron gran-demente el movimiento. La mayoría de los efectos locales en la ciudad de México pue-den explicarse mediante modelos unidimensionales de la respuesta de los estratos su perificiales de suelo blando.

Sin embargo, la influencia de efectos bidimensionales y tridimensionales es poco conocida, pero sin duda su estudio es importante desde el punto de vista de la ingeniería sísmológica.

La respuesta sísmica de modelos bidimensionales de valles aluviales ha sido estudiada por varios autores (Trifunac, 1973; Wong y Trifunac, 1974; Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; Bard y Bouchon, 1980 a, b, 1982; Bravo et al. 1986; Sánchez-Sesma, 1986) considerando varios tipos de onda incidentes y diferentes confi-guraciones topográficas del basamento. El uso de modelos bidimensionales ha permiti-do comprender aspectos esenciales del problema.

Hasta ahora han sido pocos los trabajos que estudian modelos tridimensionales, ya que el grado de dificultad asociado se incrementa considerablemente. Lee (1982) y Lee y Langston (1983) utilizaron expansiones de funciones de onda y teoría de ra-yos, respectivamente, para estudiar irregularidades axisimétricas. Recientemente se ha propuesto una solución aproximada de la respuesta sísmica de irregularidades tri-

dimensionales superficiales, la cual se ha obtenido por medio de una expansión de funciones de onda y una descomposición azimutal (Sánchez-Sesma, 1983; Sánchez-Sesma et al. 1984). La formulación completa fue presentada por Sánchez-Sesma (1983), pero hasta ahora han sido presentados sólo algunos resultados numéricos para incidencia vertical de ondas P y SV en el dominio de la frecuencia.

En este trabajo se resuelve el problema bajo incidencia oblicua de ondas esferoidales (P, SV y Rayleigh) y toroidales (SH). La formulación se presenta brevemente y se describe la estructura esencial del tratamiento numérico. Se dan algunos resultados en los dominios del tiempo y la frecuencia.

2. ONDAS SISMICAS

Es frecuente en sismología que la superficie de la Tierra se considere como un semiespacio elástico lineal, homogéneo e isótropo. En este medio continuo la propagación de ondas de cuerpo P y S, así como superficiales de Rayleigh, puede representarse mediante la teoría de la elasticidad lineal.

Considerando que estas ondas son periódicas con dependencia del tiempo dada por el factor $e^{i\omega t}$, donde ω = frecuencia angular, $i = \sqrt{-1}$ y t = tiempo, el movimiento de las partículas del medio obedece la ecuación de Navier (Fung, 1965) cuya forma vectorial (sin considerar fuerzas de cuerpo) está dada por:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u} = 0 \quad (2.1)$$

donde \bar{u} = vector de desplazamientos, λ y μ = constantes de Lamé, ρ = densidad de masa y ∇ = operador diferencial vectorial.

Por medio del teorema de Lamé (Aki y Richards, 1980) se puede demostrar que la ecuación anterior se satisface si el campo de desplazamientos se expresa en términos de potenciales de Helmholtz, es decir,

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\psi} \quad \text{con} \quad \nabla \cdot \bar{\psi} = 0 \quad (2.2)$$

donde ϕ = potencial escalar y $\bar{\psi}$ = potencial vectorial.

Estos potenciales son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones de Helmholtz (ecuaciones reducidas de onda):

$$\nabla^2 \phi + q^2 \phi = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} + k^2 \bar{\psi} = 0 \quad (2.4)$$

aquí $q = \omega/\alpha$, $k = \omega/\beta$ $\alpha = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas longitudinales (P), $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ = velocidad de propagación de las ondas transversales (S). Estas ondas usualmente se descomponen según planos de polarización (ondas SV si están polarizadas verticalmente en el plano de incidencia y ondas SH si están polarizadas en el plano perpendicular a su trayectoria).

En la superficie de un medio homogéneo, se producen reflexiones de las ondas que inciden: esta superficie se encuentra libre de tracciones (condición de superficie libre). Por otro lado, puede aceptarse que lejos de la fuente sísmica los frentes de ondas son aproximadamente planos.

Bajo estas condiciones, la solución de campo libre, es decir, los desplazamientos producidos por las ondas incidentes y reflejadas puede obtenerse por medio de un análisis similar al presentado por White (1965). En el apéndice A se encuentran las expresiones de los desplazamientos y esfuerzos de dicha solución, en coordenadas cartesianas para incidencia de ondas P,SV,SH y de Rayleigh.

3. FORMULACION DEL PROBLEMA

Considérese una irregularidad tridimensional sobre la superficie de un semiespacio como se muestra en la fig 1. La inclusión y el semiespacio se denotan por R y E respectivamente siendo $\partial_1 E$ y $\partial_2 R$ las fronteras libres de las regiones y $\partial_2 E = \partial_2 R$ la frontera común entre ellas.

Los campos de desplazamientos se construyen superponiendo los campos difractados y refractados por la imperfección topográfica con la solución de campo libre, dada por los campos en ausencia de la irregularidad. Para la región E esto puede escribirse como:

$$\bar{u}^E = \bar{u}^0 + u^d \quad (3.1)$$

donde \bar{u}^0 = solución de desplazamientos de campo libre y \bar{u}^d = solución de desplazamientos del campo difractado; para la región R se tiene:

$$\bar{u}^R = \bar{u}^r \quad (3.2)$$

donde \bar{u}^r = solución de desplazamientos del campo refractado.

Para el campo difractado se impone la condición de irradiación elástica al infinito (Sommerfeld, 1949; Kupradze, 1965).

Los campos totales deben cumplir con las condiciones de frontera esto se logra haciendo nulas las tracciones en la superficie libre e imponiendo la continuidad de los desplazamientos y tracciones en la interfase de las regiones, es decir,

$$\bar{t}(\bar{u}^E) = 0 \text{ en } \partial_1 E \quad (3.3)$$

$$\bar{t}(\bar{u}^R) = 0 \text{ en } \partial_1 R \quad (3.4)$$

$$\bar{t}(\bar{u}^E) = \bar{t}(\bar{u}^R) \text{ en } \partial_2 E = \partial_2 R \quad (3.5)$$

$$\bar{u}^E = \bar{u}^R \text{ en } \partial_2 E = \partial_2 R \quad (3.6)$$

$$\text{con } \vec{t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

donde \vec{t} es el vector tracción asociado al vector normal \vec{n} de la frontera, $\vec{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos y \vec{u} el vector de desplazamientos. Los vectores normales se encuentran dirigidos hacia la región R.

3.1 CAMPO LIBRE

Considérese un sistema de coordenadas esférico (r, θ, ϕ) con vectores unitarios $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ como se muestra en la fig 2. En este sistema de referencia, el semiespacio ocupa la región $z > 0$, con la superficie libre en $z = 0$. Si el frente de las ondas planas incidentes es perpendicular al plano XZ, la solución de desplazamientos de campo libre para ondas P,S y de Rayleigh puede escribirse en la forma:

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{F}(z) \exp[i\omega (t - x/c)] \quad (3.7)$$

donde $\vec{F}(z)$ es una función vectorial que se define de acuerdo con el tipo de onda incidente y c es la velocidad de fase aparente de la onda en la dirección x .

El factor de propagación puede desarrollarse en coordenadas esféricas por medio de funciones cilíndricas (por ejemplo Abramowitz y Stegun, 1972), obteniéndose la identidad:

$$\exp(-\lambda \ell x) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m J_m(\ell r \cdot \sin \theta) \cos m\phi \quad (3.8)$$

donde ϵ_m = factor de Neumann ($= 1$ si $m = 0$; $= 2$ si $m > 0$) y $J_m(\cdot)$ = función de Bessel cilíndrica de primera especie y orden m ; $\ell = \omega/c$ = número de onda horizontal.

Esta expresión permite mostrar la paridad del factor de propagación con respecto a la coordenada azimutal ϕ .

Al referir los desplazamientos y esfuerzos debidos al campo libre al sistema de coordenadas esférico puede observarse que para ondas esferoidales (P, SV y de Rayleigh) los componentes de desplazamiento u_r y u_θ son pares y u_ϕ impar con respecto al ángulo azimutal ϕ . Los esfuerzos σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\phi\phi}$ y $\sigma_{r\theta}$ son también pares y $\sigma_{r\phi}$ y $\sigma_{\theta\phi}$ impares con respecto a ϕ . Para el caso de ondas toroidales (SH) se observa la situación opuesta de paridad e imparidad. Tales propiedades de los campos incidentes permiten una descomposición en términos del ángulo azimutal ϕ .

En la fig 3 se muestra la incidencia de ondas toroidales y esferoidales cuyo frente de onda es perpendicular al plano XZ.

En la fig 4 se observan los componentes del tensor esfuerzo en un elemento diferencial de volumen, en coordenadas cartesianas y esféricas.

En el apéndice B se expresan los esfuerzos y los desplazamientos del campo libre en coordenadas esféricas, verificándose las propiedades de paridad e imparidad descritas anteriormente.

3.2 CAMPOS REFRACTADOS Y DIFRACTADOS

Con objeto de construir los campos difractados y refractados, se hace uso de una familia completa de funciones de onda que sean soluciones de la ecuación de Navier (Takeuchi y Saito, 1972; Aki y Richards, 1980).

A través de combinaciones lineales de miembros de esta familia es posible aproximar los campos de desplazamientos; de esta forma los campos difractados y refractados de las ecs 3.1 y 3.2 pueden expresarse como:

$$\vec{u}(d) = \sum_{j=0}^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n A_{jnm}^E \vec{w}_{jnm}^E \quad (3.9)$$

$$\vec{u}(r) = \sum_{j=0}^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n A_{jnm}^R \vec{w}_{jnm}^R \quad (3.10)$$

donde A_{jnm} son coeficientes indeterminados; \vec{w}_{jnm} son elementos vectoriales de la familia completa de soluciones; los superíndices E y R denotan al semiespacio y a la inclusión respectivamente; n es el índice de la expansión radial cuyo orden es N; m es el índice de la descomposición azimutal; finalmente j es el índice que especifica el tipo de onda difractada o refractada: (j = 0 para ondas P; j = 1 para ondas SV; j = 2 para ondas SH). Las expresiones de \vec{w}_{jnm} para cada tipo de onda (con superíndices p, s y t para ondas P, SV y SH, respectivamente) pueden representarse por:

$$\vec{w}_{nm}^p = y_1^p(r) \vec{R}_n^m(\theta, \phi) + y_2^p(r) \vec{S}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.11)$$

$$\vec{w}_{nm}^s = y_1^s(r) \vec{R}_n^m(\theta, \phi) + y_2^s(r) \vec{S}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.12)$$

$$\vec{w}_{nm}^t = y_1^t(r) \vec{T}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.13)$$

donde las funciones y(r) son funciones radiales. Por otro lado, los armónicos esféricos vectoriales pueden expresarse como:

$$\vec{R}_n^m(\theta, \phi) = Y_n^m(\theta, \phi) \vec{e}_r \quad (3.14)$$

$$\vec{S}_n^m(\theta, \phi) = \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\Delta \epsilon n \theta} \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (3.15)$$

$$\vec{T}_n^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\Delta \epsilon n \theta} \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \vec{e}_\theta - \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{e}_\phi \quad (3.16)$$

$$\text{aquí } Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(i m \phi) \quad (3.17)$$

En esta ecuación $P_n^m(\cdot)$ = función asociada de Legendre de primera especie de grado n (número radial) y orden m (número azimutal) con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$. Las expresiones de los componentes de los campos de desplazamientos y esfuerzos refractados y difractados en términos de los elementos \vec{w}_{jnm} se encuentran en el apéndice C.

Puede demostrarse que cada uno de los vectores de desplazamiento \vec{w}_{jnm}^E no satisface por sí mismo las condiciones de superficie libre del semiespacio. Es por esta razón que el tratamiento numérico se extiende a una porción de esta región.

3.3 DESCOMPOSICION AZIMUTAL

Para difractores axialmente simétricos es posible establecer una dependencia especial con el ángulo azimutal ϕ , esto permite una descomposición del problema en términos del número azimutal m .

Las ecs 3.7 y 3.8 muestran que los componentes del campo libre, en coordenadas cartesianas, son pares con respecto al ángulo ϕ como consecuencia sus componentes en coordenadas esféricas adquieren propiedades de paridad e imparidad con respecto al mismo ángulo.

De acuerdo con el factor de propagación (ec 3.8) y las expresiones para esfuerzos y desplazamientos del campo libre (apéndice B, ecs B.11 - B.14) las condiciones de frontera para dicho campo pueden representarse como:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m (-i)^m J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \cos m\phi \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^2 a_j \cos j\phi \right] \quad (3.18)$$

para las funciones pares; y

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m (-i)^m J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \cos m\phi \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^2 a_j \text{sen } j\phi \right] \quad (3.19)$$

para las impares.

Estas expresiones pueden describirse, respectivamente, en las formas (ver apéndice D):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \{f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)}\} \cos m\phi \quad (3.20)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \{g_{m+j}^{(j)} - g_{m-j}^{(j)}\} \sin m\phi \quad (3.21)$$

Esta propiedad de paridad e imparidad también puede observarse en los campos difractados y refractados. Con base en las ecs 3.9 - 3.17, las soluciones para los campos difractados y refractados pueden escribirse en forma general como:

$$f_n(r) \vec{F}_n^m(\theta, \phi) \quad (3.22)$$

donde $f_n(r)$ es una función radial y está dada en términos de funciones esféricas de Hankel o Bessel para las regiones E o R, respectivamente (apéndice C) (Sánchez-Sesma, 1983). $\vec{F}_n^m(\theta, \phi)$ es una función vectorial en términos de la ec 3.17 y sus derivadas; esta ecuación tiene dependencia con el ángulo azimutal ϕ dada por el factor $e^{im\phi}$, y con el tipo de onda incidente, pues se sustituye por $\cos m\phi$ o $\sin m\phi$, si las ondas son esferoidales o toroidales, respectivamente.

De esta manera, en las condiciones de frontera los campos difractados y refractados pueden representarse como:

$$\sum_n f_n(r) \sum_m A_{nm} G_{nm}(\theta) \cos m\phi \quad (3.23)$$

para las funciones pares; y

$$\sum_n f_n(r) \sum_m A_{nm} G_{nm}(\theta) \sin m\phi \quad (3.24)$$

para las impares.

Para conocer los coeficientes indeterminados A_{nm} se toma un sistema de ecuaciones lineales, expresando en su término independiente la solución de campo libre, obteniendo ecuaciones de la forma:

$$\sum_{n=0}^N A_{nm} f_n(r) G_{nm}(\theta) = \sum_{j=0}^2 \{ f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)} \} \quad (3.25)$$

para las partes pares, y

$$\sum_{n=0}^N A_{nm} f_n(r) G_{nm}(\theta) = \sum_{j=0}^2 \{ g_{m+j}^{(j)} - g_{m-j}^{(j)} \} \quad (3.26)$$

para las impares; para cada m , donde $m = 0, 1, 2, \dots$ $f_{m\pm j}^{(j)}$ y $g_{m\pm j}^{(j)}$ son términos conocidos y su forma depende del componente del campo de esfuerzos o desplazamientos que se considere en cada una de las condiciones de frontera, siendo funciones sólo de las coordenadas r y θ ; ésto conduce a resolver un problema bidimensional para cada número azimutal. La solución completa se construye superponiendo las soluciones obtenidas.

Para incidencia vertical de ondas planas se requiere sólo un número azimutal; en el caso de ondas P sólo se necesita $m = 0$; para ondas SV o SH basta tomar $m = 1$. Si los campos incidentes son oblicuos o de ondas superficiales de Rayleigh, la solución requiere de varios números azimutales dependiendo de la longitud de onda horizontal.

La fig 5 obtenida a partir de la ec 3.8, muestra el número de términos de m necesarios para obtener un error entre 1% y 10% en la solución de campo libre, para diferentes longitudes de onda horizontal. Este resultado permite construir reglas sencillas para estimar los parámetros de cálculo en función de la frecuencia adimensional η (definida más adelante).

4. SOLUCION NUMERICA

Una vez obtenidas las expresiones de los campos difractados y refractados (ecs 3.9 y 3.10) se obtienen sus coeficientes a partir de las condiciones de frontera (ecs 3.3 - 3.6) en cada uno de los K, L y M puntos de las fronteras $\partial_1 R$, $\partial_2 R$ y $\partial_1 E$, respectivamente (fig 6). Se obtiene así un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes están dados en función de la solución del campo libre.

Este sistema se resuelve de manera que el error cuadrático en la satisfacción de las condiciones de frontera sea mínimo. Es conveniente para ello construir un sistema de ecuaciones sobredeterminado (más ecuaciones que incógnitas) de la forma:

$$[A] (x) = (B) \quad (4.1)$$

donde el número de ecuaciones depende del número de puntos en las fronteras y el número de incógnitas de los órdenes de las expansiones. Bajo estas condiciones la solución que minimiza el error cuadrático medio (Noble y Daniel, 1977) se obtiene al resolver el sistema:

$$[A^*]^T [A] (x) = [A^*]^T (B) \quad (4.2)$$

aquí el asterisco denota compleja conjugada.

Así la matriz de coeficientes resultante es hermitiana y positiva definida.

Debe recordarse que el tratamiento numérico debe extenderse a una porción de la superficie libre del semiespacio; si se toma una distancia de dos a tres veces la dimensión horizontal máxima de la irregularidad pueden obtenerse excelentes re-

sultados (Sánchez-Sesma et al., 1984).

Para problemas con alta frecuencia, irregularidades con profundidad muy pequeña o bien altos contrastes entre las propiedades elásticas de los medios, el tamaño de la matriz de coeficientes $[A]$ resulta muy grande, por lo que para un manejo adecuado de la misma conviene seccionarla en seis submatrices que se combinan separadamente para formar la matriz hermitiana. Este procedimiento se realiza para cada número azimutal.

Los desplazamientos en los puntos de interés se pueden representar mediante:

$$\{U\} = [D] \{x\} + \{U_L\} \quad (4.3)$$

donde $[D]$ = matriz de coeficientes que depende de las soluciones adoptadas, $\{x\}$ = solución de la ec. 4.2 y $\{U_L\}$ = solución de campo libre (nótese que en la región R ésta es nula). Superponiendo al final las soluciones parciales de los sucesivos vectores de desplazamiento $\{U\}$ de la ec. 4.3, se obtiene la solución total para una frecuencia específica en acuerdo con la descomposición azimutal.

Si se procede de esta forma para varias frecuencias, se obtienen tres funciones de transferencia para cada punto de interés sobre la superficie del semiespacio o la irregularidad (una para cada componente del desplazamiento).

Para obtener resultados en el dominio del tiempo, esto es sismogramas sintéticos de los tres componentes del desplazamiento total, basta convolucionar las funciones de transferencia con el espectro de frecuencias de una señal en el tiempo. En el presente trabajo se adopta un pulso de Ricker de la forma:

$$f(t) = (A-B) \exp(-A) \quad (4.4)$$

donde $A = \pi^2(t-t_s)^2/t_p^2$, $B = \pi^2 t_s^2/t_p^2$, t_p = periodo "característico" del pulso (Bard, 1982). Con objeto de controlar la forma del pulso se ha tomado la relación $t_s/t_p = 0.1983$. La frecuencia de corte utilizada en los cálculos con el algoritmo de transformada rápida de Fourier (Claerbout, 1976) fue $f_{\max} = 4/t_p$.

5. RESULTADOS

Se presentan resultados normalizados con respecto a la amplitud de la onda incidente en los dominios de la frecuencia y el tiempo para los casos de incidencia de ondas P, SV, SH y de Rayleigh en valles aluviales y promontorios.

La frecuencia de la onda incidente está normalizada con respecto a las dimensiones de la irregularidad mediante:

$$\eta = \frac{a \cdot k}{\pi} = \frac{2 \cdot a}{\lambda_s}$$

donde a = radio de la irregularidad, λ_s = longitud de onda de una onda S y $k = \omega/\beta$.

Los parámetros de cálculo se han determinado de acuerdo con reglas empíricas sencillas que dependen de la frecuencia de la onda incidente y los contrastes de propiedades entre las regiones.

En los ejemplos que aquí se presentan se han obtenido errores menores de 5% en la satisfacción de las condiciones de frontera.

Para obtener resultados en el dominio del tiempo se utiliza la transformada rápida de Fourier. Para ello es necesario contar con las soluciones para varias frecuencias.

En los casos estudiados se ha tomado como frecuencia adimensional inicial $\eta = 0.1$; la frecuencia máxima está determinada por dificultades numéricas y por los grandes recursos de cómputo requeridos.

5.1 RESULTADOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Se considera incidencia de ondas P verticalmente, con frecuen-

cia dimensional $\eta = 1.5$ en un depósito aluvial cuya forma en la interfase, está dada por:

$$z = h [1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3] \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

donde $\zeta = (x^2 + y^2)^{1/2}/a$ (fig 7). Las propiedades elásticas para los módulos de rigidez y densidades están dadas, respectivamente, por $\mu_R/\mu_E = 0.3$ y $\rho_R/\rho_E = 0.6$. Las relaciones de Poisson que se supusieron son $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$. Los subíndices E y R simbolizan al semiespacio y a la inclusión respectivamente.

La fig 8 muestra dos secciones del campo de desplazamiento en la superficie a lo largo de los ejes X y Y. En ellas se pueden ver amplificaciones hasta de 600% en el componente vertical y el surgimiento de movimientos horizontales importantes en las cercanías del centro del valle.

La distribución espacial del campo de desplazamiento se ilustra en la fig 9. Nótese que las amplitudes de los desplazamientos horizontales U_x y U_y son exactamente iguales si uno de ellas se gira 90° ; esta distribución es simétrica con respecto a los ejes X y Y. La amplitud del desplazamiento vertical es independiente de la coordenada azimutal ϕ . Todo esto se debe a la simetría axial del difractor y al hecho de que se tiene incidencia vertical de ondas P.

En contraste, se presenta la respuesta del mismo depósito ante la incidencia de ondas de Rayleigh con $\eta = 1.5$.

Como en el caso anterior, las amplificaciones máximas corresponden al desplazamiento vertical que presenta 500% de amplificación, en tanto que el desplazamiento horizontal U_x alcanza ampli-

ficaciones de 300%. Estas ampliificaciones pueden observarse en la fig 10, que muestra los contornos de las amplitudes de los desplazamientos superficiales U_x , U_y y U_z . En esta figura puede apreciarse la simetría que presentan las amplitudes del desplazamiento con respecto al eje X. Esta distribución resulta mucho más compleja que la presentada para el caso de incidencia vertical de ondas P en el mismo depósito, aun cuando la frecuencia considerada es la misma.

Para la incidencia de ondas de Rayleigh en este depósito se presentan resultados en el dominio del tiempo.

Ante incidencia vertical de ondas SV en un promontorio, con relación de Poisson $\nu = 0.25$ y cuya altura es igual a la mitad del semiancho en la base (fig 11), destacan ampliificaciones de 400% ó 600% en el componente U_x del desplazamiento superficial (fig 12). En esta figura es notoria la ausencia del desplazamiento horizontal U_y , debido a que, por simetría, este movimiento se cancela en los ejes X y Y. En cambio, en una sección a 45° de los ejes de referencia (fig. 13) puede observarse que este componente alcanza ampliificaciones cercanas a 300%.

En la fig 14 es aun más evidente la simetría particular que presenta el campo de desplazamiento en la superficie; en esta figura se observa claramente el comportamiento del componente U_y descrito anteriormente.

Finalmente se muestra la distribución espacial de las amplitudes del desplazamiento producido por una onda P que incide a 20° del eje Z en un valle aluvial cuya forma en la base es (fig 15):

$$z = h(1 - \zeta^2) \quad \text{con } \zeta = (x^2 + y^2)^{1/2} / a$$

Las propiedades físicas están dadas por $\mu_R/\mu_E = 0.1$ y $\rho_R/\rho_E = 0.8$ además las relaciones de Poisson consideradas son $\nu_R = 0.4$ y $\nu_E = 0.3$. La frecuencia adimensional de la onda es $\eta = 3.0$.

En la fig 16 son claras las simetrías que presentan los tres componentes del desplazamiento superficial con respecto al eje X. Además puede apreciarse que para el componente U_z , las mayores amplificaciones se presentan en el lado de la incidencia, mientras que para el componente U_x sucede lo contrario. Obsérvese cómo los patrones del campo de desplazamiento han sido afectados por el ángulo de incidencia.

5.2 RESULTADOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Para un promontorio cuya altura es de 100 m, al igual que el radio de su base, se ha supuesto incidencia de ondas SH verticalmente. El medio tiene una velocidad $\beta = 1000$ m/s y una relación de Poisson $\nu = 0.25$; la frecuencia adimensional máxima fue $\eta = 10.0$.

En la fig 17 se indica esta incidencia así como los puntos donde se evalúan los sismogramas sintéticos.

En las figs 18.a - 18.d se muestran las funciones de transferencia del componente horizontal U_y del desplazamiento para los puntos sobre la sección OX

Para el centro del promontorio se obtienen amplificaciones de casi 500% en frecuencias adimensionales cercanas a 1 y 6; no es así para frecuencias intermedias.

Los puntos 2 y 3 muestran lóbulos de amplificación con cierta periodicidad alcanzando amplificaciones entre 300% y 500% para algunas frecuencias. La fig 18.d corresponde a un punto fuera del

promontorio, por lo que su respuesta es parecida a la de superficie libre; las pequeñas oscilaciones son producidas por la presencia de esta irregularidad.

La fig 19 muestra los sismogramas sintéticos de la componente U_y en los puntos de la sección OX. Nótese la presencia de dos pulsos, uno correspondiente a la incidencia directa de la onda y el otro producto de la reflexión de ésta en el promontorio. Los resultados para la sección OX' son exactamente los mismos. Cabe mencionar que debido al tipo de incidencia, los desplazamientos U_x y U_z son nulos sobre el eje X.

En la sección OY, los desplazamientos horizontales U_x se anulan pues este componente cambia de fase según el signo de su coordenada y . Los sismogramas sintéticos de los componentes U_y y U_z se ilustran en la fig 20.

En el caso presentado, los desplazamientos verticales reflejados son pares con respecto al eje Y; estos desplazamientos se mantienen en fase en ambos lados de este eje, por lo que sobre él se superponen produciendo desplazamientos del tamaño del pulso original.

La fig 21 corresponde a los sismogramas sintéticos de los desplazamientos en los puntos de las secciones OA y OB; obsérvese el cambio de fase en el componente U_x así como la simetría de los componentes U_y y U_z con respecto al eje Y.

Considérese ahora la incidencia de ondas de Rayleigh en el valle aluvial con radio $a = 5000$ m de la fig 7. Para este caso la frecuencia adimensional máxima fue $\eta = 3.0$. Supóngase que la velocidad de una onda S que viaja en el semiespacio es $\beta_E = 1500$ m/s; entonces, de acuerdo con las propiedades elásticas consideradas, la ve-

lidad de propagación para las ondas P resulta $\alpha_E = 2600$ m/s. Dentro del depósito las velocidades de propagación son $\alpha_R = 1980$ m/s y $\beta_R = 1060$ m/s para las ondas P y S respectivamente.

La fig 22 muestra los puntos donde se han calculado sismogramas sintéticos. El máximo movimiento registrado corresponde al componente U_z . De este componente se muestra la función de transferencia en los puntos 2 y 4 de las secciones OX ($X > 0$) y OX' ($X < 0$) (figs 23 y 24 respectivamente). Comparando estas figuras se observa que las máximas amplificaciones aparecen en la sección OX. Nótese que para los puntos situados fuera del depósito, las respuestas son completamente diferentes; mientras que del lado de la incidencia la respuesta es casi la de superficie libre (fig 24), en la parte opuesta la función de transferencia es muy cercana a cero para frecuencias adimensionales mayores que $\eta = 1.5$ (fig 23).

Considerando el tipo de incidencia en este valle aluvial, los desplazamientos U_y son nulos sobre el eje X. Los sismogramas sintéticos de los componentes U_x y U_z obtenidos en los puntos de este eje se presentan en las figs. 25 y 26 respectivamente. En ambas figuras es evidente la presencia de dos pulsos que corresponden a los primeros arribos (ondas que se propagan en dirección positiva del eje X) y las reflexiones de éstos en la interfase de las regiones (ondas que se propagan en dirección opuesta). La velocidad de propagación de estos pulsos es la velocidad de las ondas S dentro del depósito. Nótese que las máximas amplificaciones ocurren en la parte positiva del eje X (sección OX).

La fig 27 muestra los sismogramas sintéticos de los tres componentes del desplazamiento en los puntos de la sección OY. En esta sección se hace evidente el desplazamiento U_y producido por las re-

flexiones tridimensionales que sufre la onda incidente. Obsérvese que la respuesta del punto 4 (fuera del depósito) es parecida a la de superficie libre.

6. CONCLUSIONES

Se ha extendido el alcance de un método de frontera para estudiar la respuesta sísmica de irregularidades tridimensionales con simetría axial. El método se desarrolló originalmente para tratar incidencia oblicua de ondas P, SV y de Rayleigh. La extensión se desarrolló para el caso de incidencia de ondas SH. Adicionalmente se ha introducido el análisis del problema al dominio del tiempo.

El método se basa en el uso de expansiones de funciones de onda en coordenadas esféricas así como en una descomposición en series de Fourier con respecto a la coordenada azimutal. Mediante la transformada rápida de Fourier se han obtenido resultados en el dominio del tiempo.

Algunos cálculos intermedios fueron ejecutados en una supercomputadora CRAY-1 en la Universidad de Grenoble, Francia. Gracias a ello, ha sido posible obtener parte de los resultados, que sin duda, muestran la factibilidad del método para describir en forma cuantitativa los mecanismos que controlan la respuesta tridimensional de depósitos aluviales y otras irregularidades tridimensionales.

Los grandes recursos de cómputo requeridos imponen restricciones severas a los cálculos para altas frecuencias; esto limita el uso del método presentado a calibrar otras técnicas más versátiles que no adolecen de este tipo de restricciones, tales como los métodos asintóticos, híbridos o experimentales.

7. AGRADECIMIENTOS

La dirección y el apoyo constante de Francisco J Sánchez-Sesma fueron esenciales durante el desarrollo del presente trabajo. Mis -- más sinceros agradecimientos por haberme depositado su confianza.

A Marcela Sánchez-Porta doy un franco agradecimiento por haber logrado una fiel producción de esta tesis. Su apoyo e interés fueron una motivación para mí.

Reconozco gratamente la participación crítica de Miguel A Bravo Díaz, así como su oportuna intervención en algunos aspectos de este trabajo.

Un agradecimiento especial a la Universidad de Grenoble, Francia, que facilitó el acceso a la supercomputadora CRAY-1 del Centre Vectoriale pour la Recherche. Hago una extensión particular de este agradecimiento al Department of Geology, University of Southern California, EUA, por poner a disposición una computadora VAX/VMS con graficadores de alta resolución.

Este trabajo formó parte del proyecto 6701 del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Agradezco las facilidades proporcionadas por su personal.

8. REFERENCIAS

Abramowitz M e I A Stegun (eds) (1972). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, U.S. National Bureau of Standards, Washington.

Aki, K y P G Richards (1980). Quantitative seismology. Theory and methods, W.H. Freeman and Co., San Francisco.

Bard, P Y (1982). Diffracted waves and displacement field over two-dimensional elevated topographies, Geophys. J.R. Astr. Soc. **71**, 731-760.

Bard, P Y and M Bouchon (1980a). The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. The case of the incident SH waves, Bull. Seism. Soc. Am. **70**, 1263-1286.

Bard, P Y and M Bouchon (1980b). The seismic response of sediment-filled valleys. Part 2. The case of the incident P and SV waves, Bull. Seism. Soc. Am. **70**, 1921-1941.

Bravo, M A , Sánchez-Sesma, F J y Chávez García, F (1986). Ground motion on stratified alluvial deposits for incidence SH waves, Bull. Seism. Soc. Am. (en trámite de publicación).

Claerbout (1976). Foundamentals of geophysical data processing, McGraw-Hill Book Company, Nueva York.

Fung Y C (1965). Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.

Jackson, P S (1971). The focusing of earthquakes, Bull. Seism. Soc. Am. **61**, 685-695.

Kupradze, V D (1965). Potential method in the theory of elasticity, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

- Lee, V W (1982). A note on the scattering of elastic plane waves by a hemispherical canyon, Soil Dynamics and earthquake engineering, 1, 122-129.
- Lee, J J and C A Langston (1983). Wave propagation in a three-dimensional circular basin, Bull. Seism. Soc. Am. 73, 1637-1655.
- Noble, B y J W Daniel (1977). Applied linear algebra, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Poceski, A (1969). The ground effects of the Skopje July 26, 1963 earthquake, Bull. Seism. Soc. Am. 59, 1-29.
- Rial, J A (1984). Caustics and focusing produced by sedimentary basins. Application of catastrophe theory to earthquake seismology; Geophys. J.R. Astr. Soc., 79, 923-938.
- Sánchez-Sesma, F J (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities, Bull. Seism. Soc. Am., 73, 1621-1636.
- Sánchez-Sesma, F J (1986). Site effects on strong ground motion. International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Aceptado.
- Sánchez-Sesma, F J y A Esquivel (1979). Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves, Bull. Seism. Soc. Am., 69, 1107-1120.
- Sánchez-Sesma, F J , S Chávez-Pérez y J Avilés (1984). Scattering of elastic waves by three-dimensional topographies, Proc. World Conf. Earthquake Eng... 8th, San Francisco, 2, 639-646. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs., N.J.
- Singh, S (1986). Some aspects of the source characteristics and the ground motion amplifications in and near Mexico city from the acceleration data of the eptember, 1985, Michoncan, Mexico earthquake, Bull. Seism. Soc. Am. (en trámite de publicación).
- Sommerfeld, A (1949). Partial differential equations in physics, Academic Press, Inc., Nueva York.

Takeuchi, H. y M. Saito (1972). Seismic surface waves, Methods in computational physics, 1, 11. B.A. Bolt, ed., Academic Press, Nueva York.

Trifunac, M.D. (1973). Scattering of plane SH waves by a semicylindrical canyon, Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 1, 267-261.

White, J.E. (1965). Seismic waves: radiation, transmission, and attenuation, McGraw-Hill, Inc., Nueva York.

Wong, H.L. y M.D. Trifunac (1974a). Scattering of plane SH wave by a semi-elliptical canyon, Int. J. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., 3, 157-169.

Wong, H.L. y M.D. Trifunac (1974b). Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH wave, Bull. Seism. Soc. Am., 64, 1389-1408.

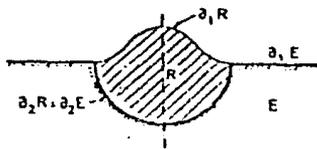


FIG 1. Definición de las regiones E y R y sus fronteras

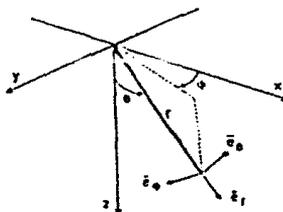


FIG 2. Sistema de coordenadas cartesianas y esféricas. Vectores unitarios en el sistema esférico

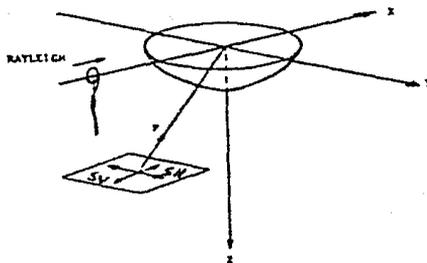


FIG 3. Incidencia de ondas P, SV, SH y de Rayleigh ante una irregularidad tridimensional axisimétrica

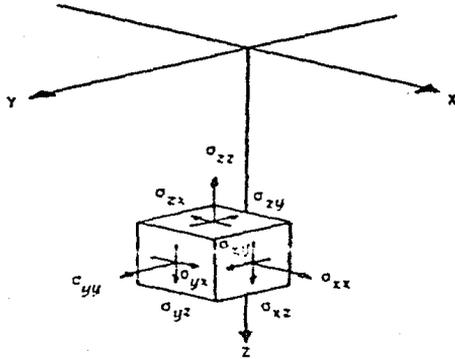


FIG 4A. Elementos del tensor esfuerzo en coordenadas cartesianas

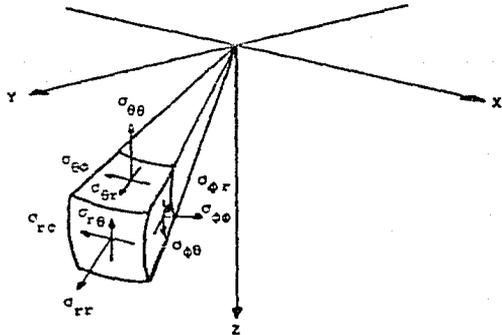


FIG 4B. Elementos del tensor esfuerzo en coordenadas esféricas

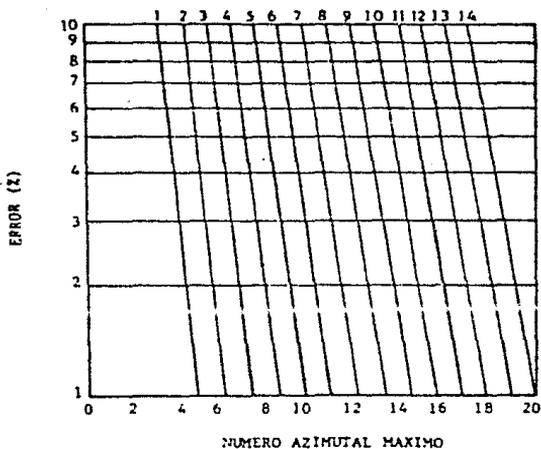
ARGUMENTO ($\eta\theta\alpha\epsilon\theta\gamma$)

FIG 5. Estimación del número azimutal máximo, dado un argumento, para obtener un error entre 12 y 10% en la solución de campo libre

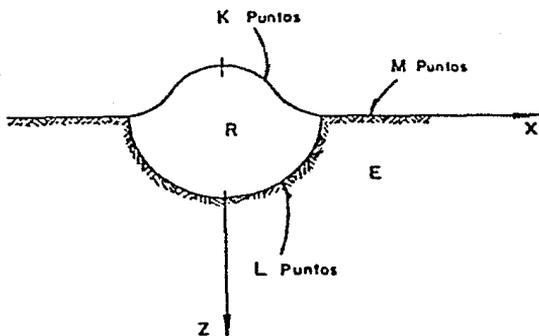


FIG 6. Puntos de colocación en la frontera

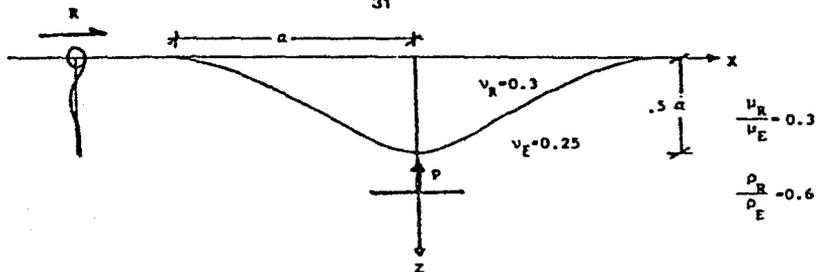


FIG. 7. Incidencia vertical de ondas P e incidencia de ondas de Rayleigh en un valle aluvial

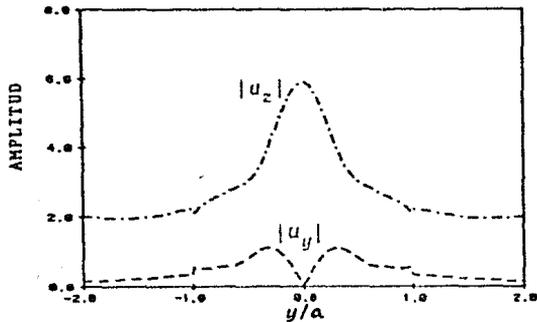
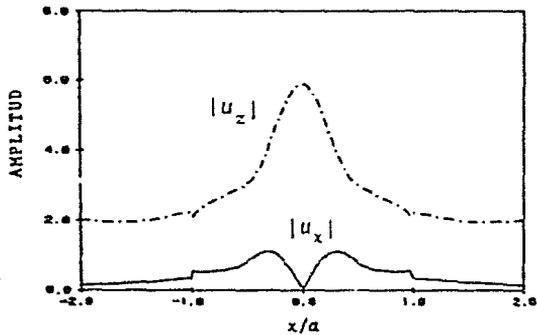


FIG. 8.

Desplazamientos superficiales normalizados a lo largo de los ejes X y Y sobre un valle aluvial ante incidencia vertical de ondas P

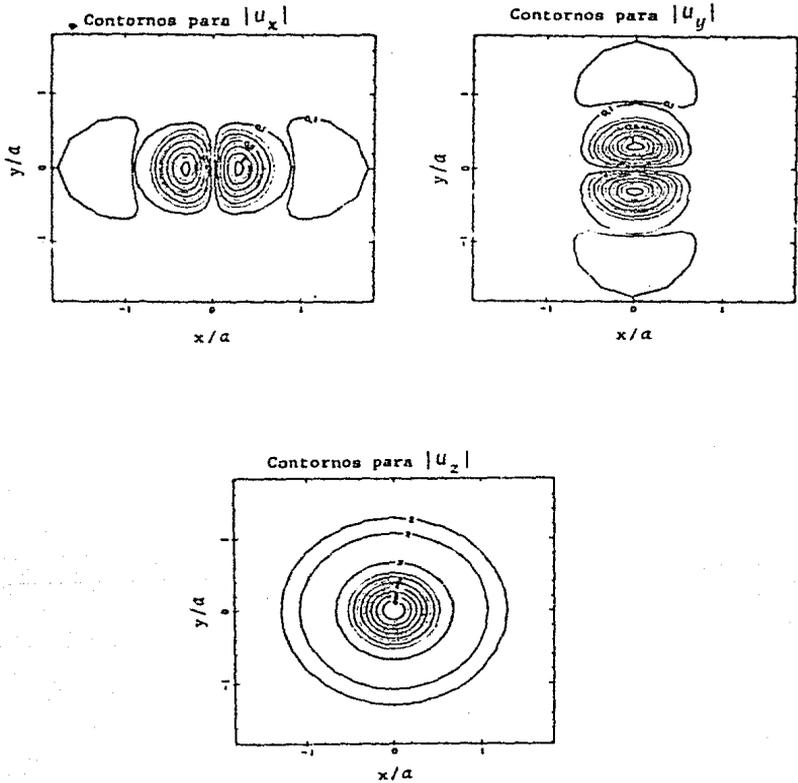


FIG 9. Contornos de los desplazamientos superficiales normalizados en un valle aluvial ante incidencia vertical de ondas P

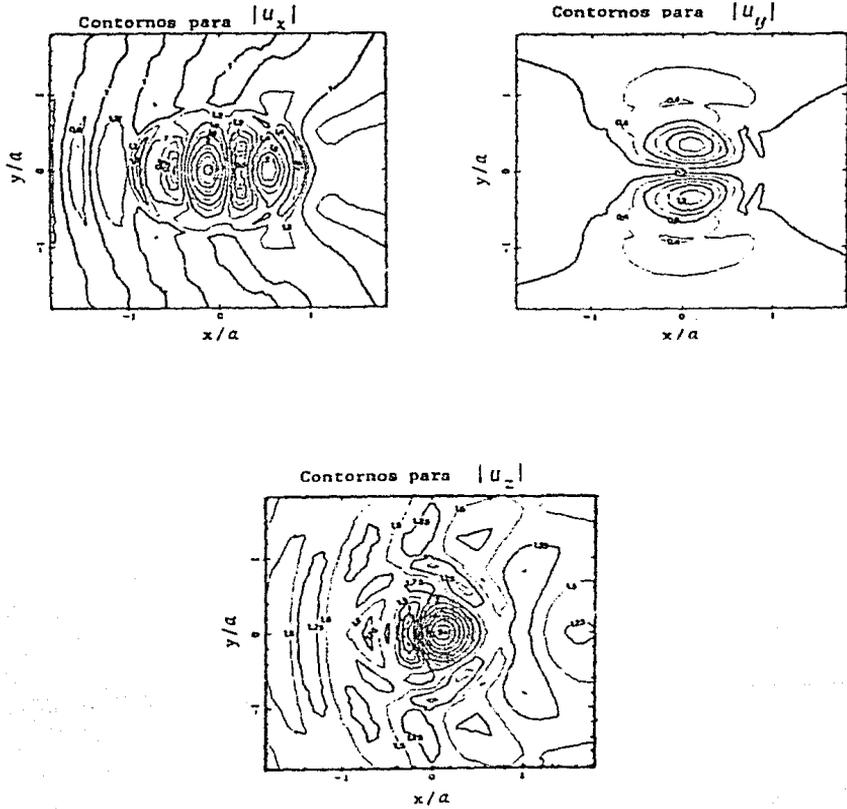


FIG 10. Contornos de los desplazamientos superficiales normalizados en un valle aluvial ante incidencia de ondas superficiales de Rayleigh

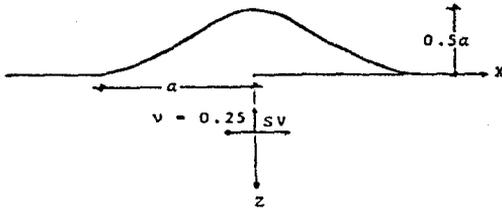


FIG 11. Incidencia vertical de ondas SV en un promontorio

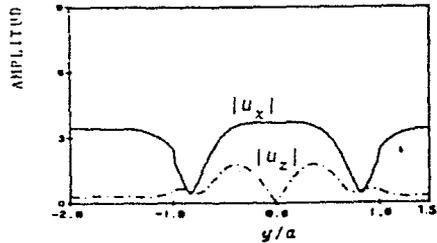
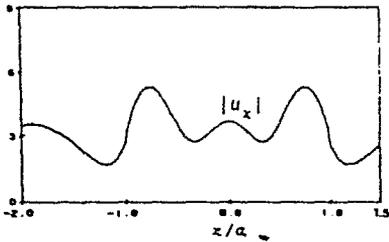


FIG 12. Desplazamientos superficiales normalizados a lo largo de los ejes X y Y sobre la superficie de un promontorio ante incidencia vertical de ondas SV

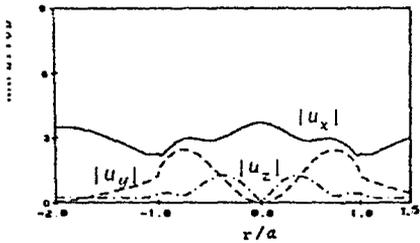


FIG 13. Desplazamientos superficiales normalizados a lo largo de la sección y-x. Incidencia vertical de ondas SV en un promontorio

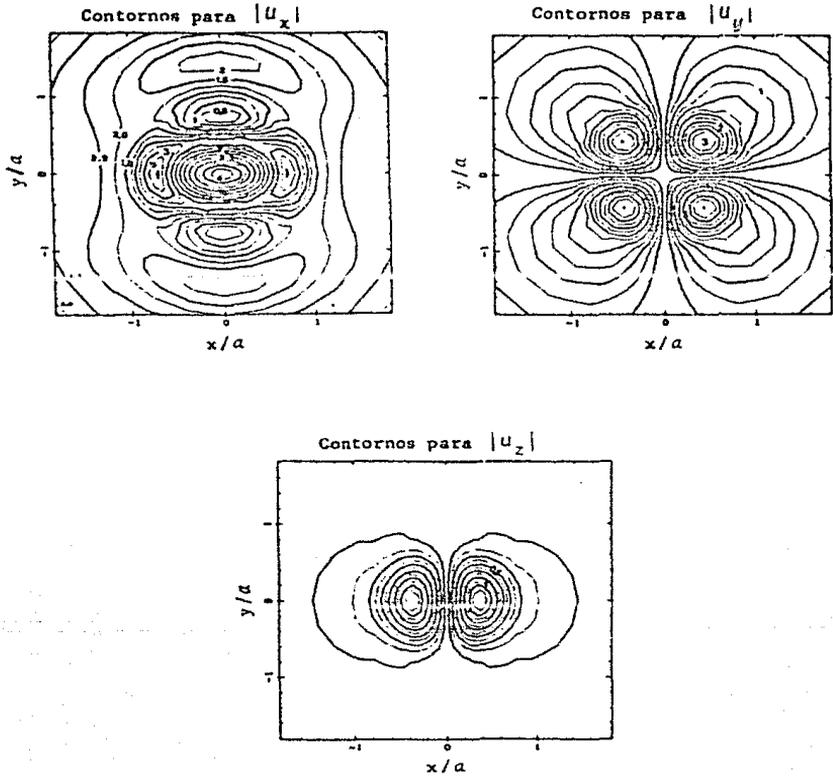


FIG.14. Contornos de los desplazamientos superficiales normalizados en un promontorio ante incidencia vertical de ondas SV.

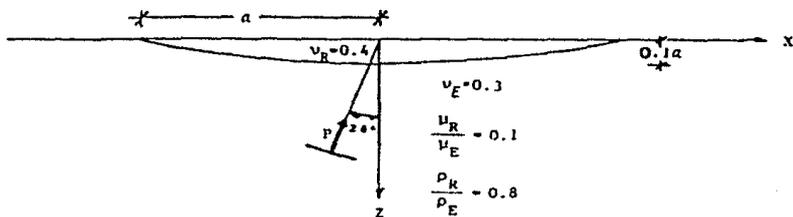


FIG 15. Incidencia de ondas P a 20° en un valle aluvial

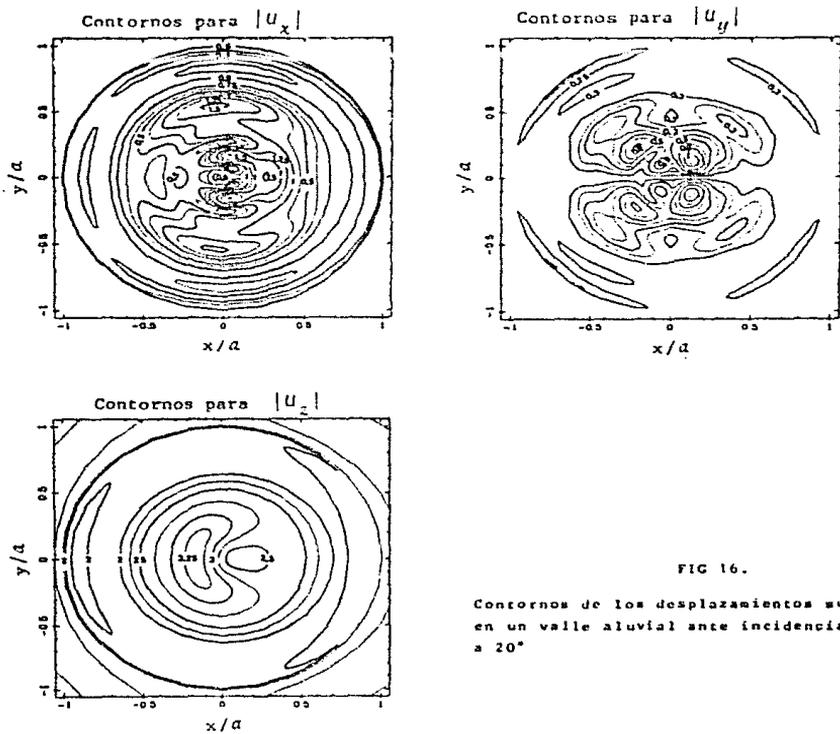


FIG 16.

Contornos de los desplazamientos superficiales en un valle aluvial ante incidencia de ondas P a 20°

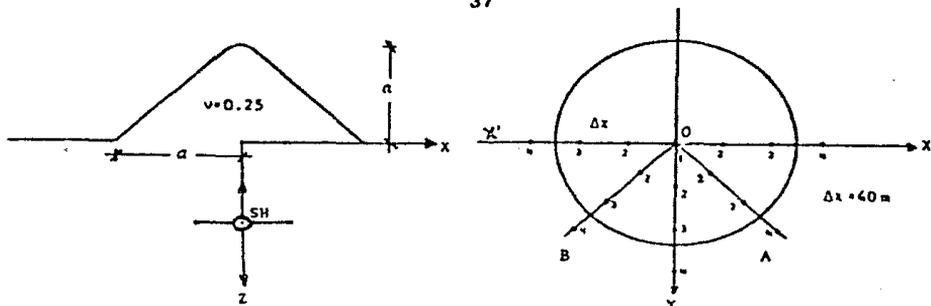


FIG 17. Incidencia vertical de ondas SH en un promontorio, a la derecha se indican los puntos donde se calculan los sismogramas sintéticos

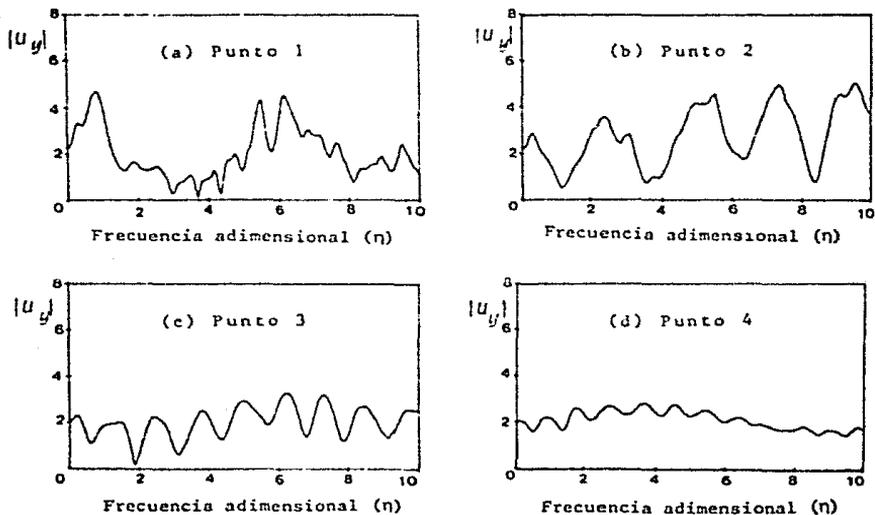


FIG 18.a - 18.d. Funciones de transferencia en los puntos propuestos sobre la sección OX del componente $|u_y|$ del desplazamiento superficial normalizado. Incidencia vertical de ondas SH en un promontorio

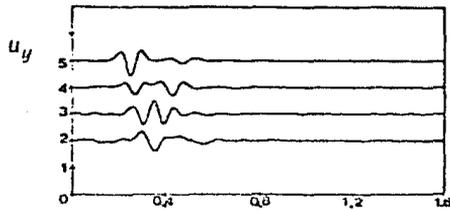


FIG 19. Sismogramas sintéticos del componente u_y del desplazamiento superficial normalizado en los puntos propuestos sobre la sección OX. Incidencia vertical de ondas SH en un promontorio

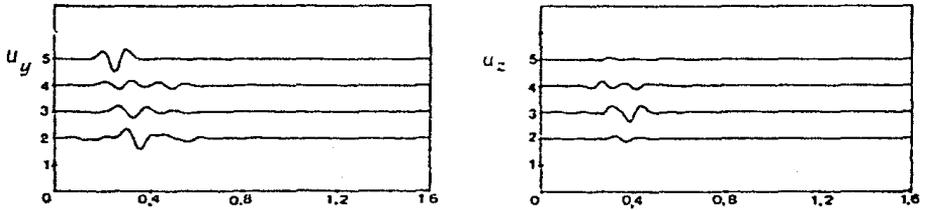


FIG 20. Sismogramas sintéticos de los componentes u_y y u_z del desplazamiento superficial normalizado en los puntos propuestos sobre la sección OY. Incidencia vertical de ondas SH en un promontorio

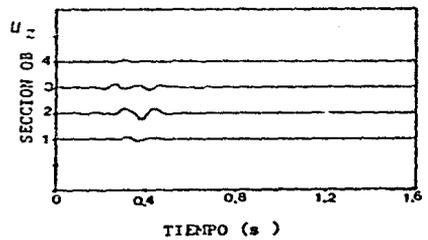
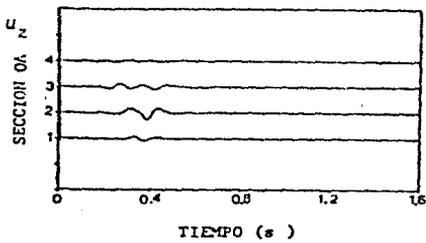
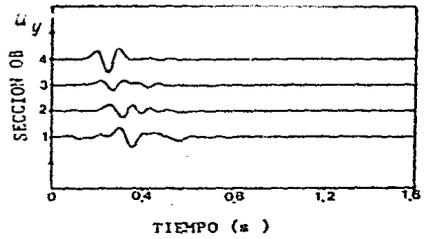
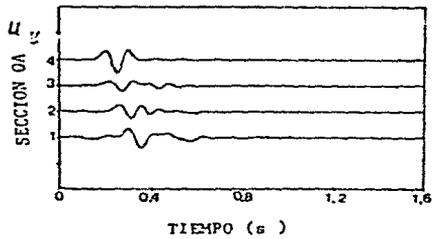
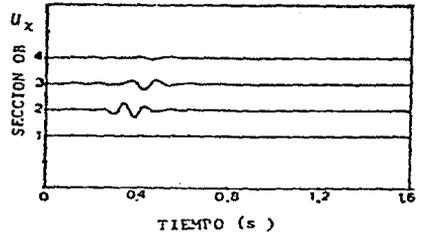
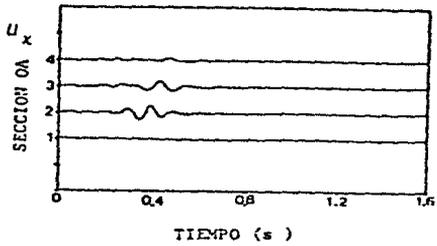


FIG 21. Sismogramas sintéticos de los componentes del desplazamiento superficial normalizado en los puntos propuestos sobre las secciones OA y OB. Incidencia vertical de ondas SH en un porratorio

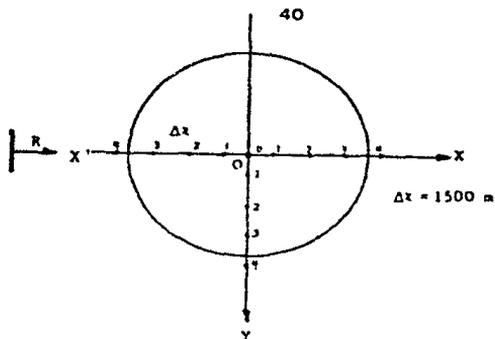


FIG 22. Puntos de interés sobre la superficie de un valle aluvial donde se calculan sismogramas sintéticos para incidencia de ondas superficiales de Rayleigh

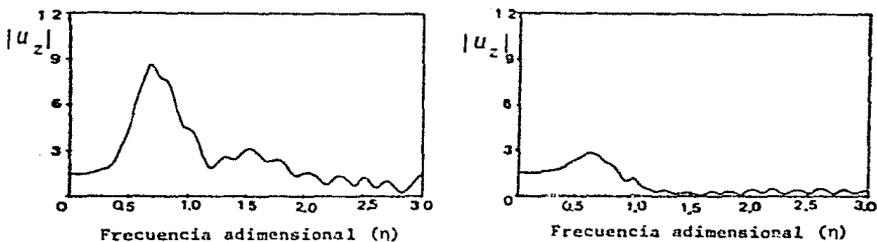


FIG 23. Funciones de transferencia obtenidas en los puntos 2 y 4 de la sección GX. Incidencia de ondas de Rayleigh en un valle aluvial

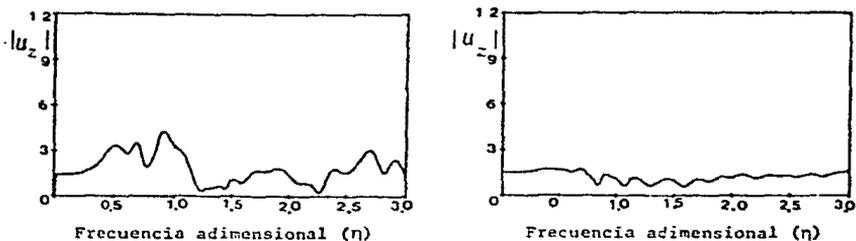


FIG 24. Funciones de transferencia obtenidas en los puntos 2 y 4 de la sección GX'. Incidencia de ondas de Rayleigh en un valle aluvial

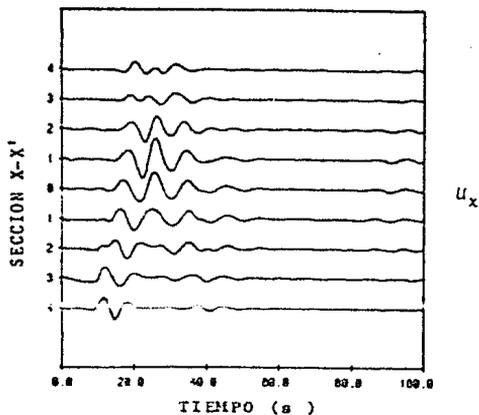


FIG 25. Sismogramas sintéticos del componente U_x del desplazamiento superficial normalizado en los puntos propuestos sobre el eje X. Incidencias de ondas de Rayleigh en un valle aluvial.

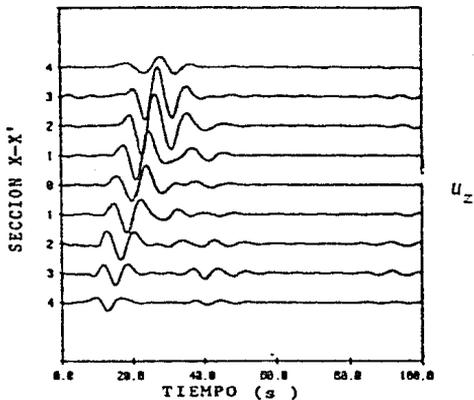


FIG 26. Sismogramas sintéticos del componente U_z del desplazamiento superficial normalizado en los puntos propuestos sobre el eje X. Incidencias de ondas de Rayleigh.

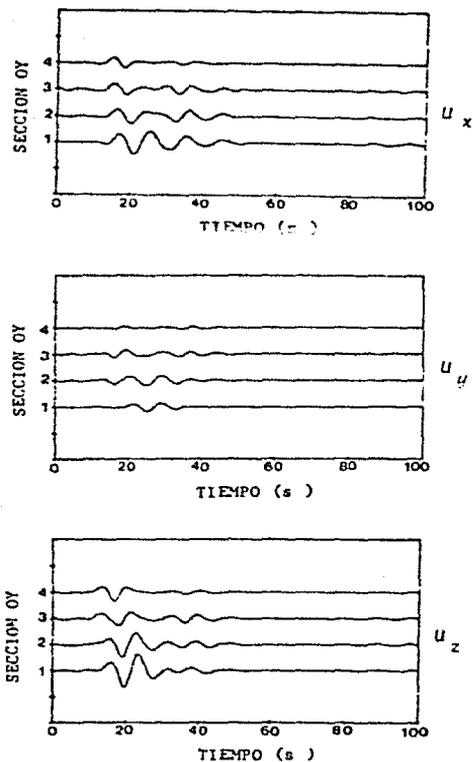


FIG 27. Sismogramas sintéticos de los tres componentes del desplazamiento superficial normalizado obtenidos en los puntos propuestos sobre la sección OY. Incidencia de ondas de Rayleigh en un valle aluvial

APENDICE A

EXPRESIONES DE LOS ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA SOLUCION DE CAMPO
LIBRE EN COORDENADAS CARTESIANAS

A.I. ONDAS P, SV Y DE RAYLEIGH

Si se considera que el plano de la incidencia de este tipo de ondas es perpendicular al plano xz , se puede afirmar que $\bar{\psi} = \psi_{,y} = \psi$

Entonces los potenciales pueden escribirse como:

$$\phi = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (\text{A.I.1})$$

$$\psi = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (\text{A.I.2})$$

donde $l = \omega/c$, $m = lf_\alpha$, $k = lf_\beta$, $\omega > 0$

$$f_\alpha = (c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{A.I.3})$$

$$f_\beta = (c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{A.I.4})$$

aquí c es la velocidad de fase aparente, dada por:

$$c = \frac{\alpha}{\delta \sin \gamma_p} = \frac{\beta}{\delta \sin \gamma_s} \quad (\text{A.I.5})$$

γ_p y γ_s son los ángulos de incidencia y reflexión para ondas P y S, respectivamente. (figs A.1 y A.2); los coeficientes A_1 y B_1 son las amplitudes de los potenciales de las ondas planas incidentes P y SV, respectivamente; en cambio A_2 y B_2 representan las amplitudes de las ondas reflejadas.

Una vez establecidas las funciones potenciales, los desplazamientos y esfuerzos de campo libre pueden expresarse como:

$$u_x^{(0)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{A.I.6})$$

$$u_z^{(0)} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A.I.7})$$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \lambda \left(\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} \quad (\text{A.I.8})$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \lambda \left(\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \quad (\text{A.I.9})$$

$$\sigma_{zx}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(0)} = \mu \left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.I.10})$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad (\text{A.I.11})$$

$$u_{yx}^{(0)} = \sigma_{yx}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$$

El tensor de esfuerzos queda entonces representado por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las ecuaciones A.I.1 y A.I.2 en las ecs A.I.6 - A.I.10, se obtiene:

$$u_x^{(0)} = -i\ell \phi_1 + ik \psi_2 \quad (\text{A.I.12})$$

$$u_z^{(0)} = im \phi_2 + i\ell \psi_1 \quad (\text{A.I.13})$$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = -\lambda(\ell^2 + m^2) \phi_1 + 2\mu[-\ell^2 \phi_1 + k\ell \psi_2] \quad (\text{A.I.14})$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -\lambda(\ell^2 + m^2) \phi_1 + 2\mu[-m^2 \phi_1 - k\ell \psi_2] \quad (\text{A.I.15})$$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \mu[2m\ell \phi_2 + (\ell^2 - k^2) \psi_1] \quad (\text{A.I.16})$$

omitiendo el factor $e^{i\omega t}$, los potenciales ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 , ψ_2 se pueden representar mediante:

$$\phi_1 = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-i\ell x} \quad (\text{A.I.17})$$

$$\phi_2 = (A_1 e^{imz} - A_2 e^{-imz}) e^{-i\ell x} \quad (\text{A.I.18})$$

$$\psi_1 = (B_1 e^{ikhz} + B_2 e^{-ikhz}) e^{-i\ell x} \quad (\text{A.I.19})$$

$$\psi_2 = (B_1 e^{ikhz} - B_2 e^{-ikhz}) e^{-i\ell x} \quad (\text{A.I.20})$$

Considerando incidencia de ondas P ($B_1=0$) y $\beta < \alpha < |c|$ y las condiciones de frontera libre ($\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(0)} = 0$), se obtienen las relaciones de amplitudes:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4 f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4 f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.I.21})$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{4 f_\alpha (f_\beta^2 - 1)}{4 f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.I.22})$$

para ondas P y SV reflejadas en términos de la amplitud de la onda P incidente.

Si la onda incidente es SV, $A_1=0$, se presentan dos casos:

$$a) \beta < \alpha < |c|$$

$$b) \beta < |c| < \alpha$$

En ambos casos, aceptando que $I_m(f_\alpha) < 0$, se obtiene:

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{4 f_\beta (f_\beta^2 - 1)}{4 f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.I.23})$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4 f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4 f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{A.I.24})$$

Otra condición resulta al considerar:

$$c) |c| < \beta < \alpha$$

donde f_α y f_β son imaginarias, aceptando que $I_m(f_\alpha) < 0$ e $I_m(f_\beta) < 0$ y tomando $A_1 = B_1 = 0$, al imponer condiciones de frontera se llega a la expresión:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2f_\beta}{(f_\beta^2 - 1)} = \frac{(1 - f_\beta^2)}{2f_\alpha} \quad (\text{A.I.25})$$

De esta igualdad se obtiene la ecuación:

$$4 f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2 = 0 \quad (\text{A.I.26})$$

conocida como la ecuación de Rayleigh, que es cúbica en c^2 y cuya raíz real c_R es la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh.

Estas ondas están compuestas por ondas P y SV, que viajan acopladas con velocidad $c_R < \beta$, y se atenúan con la profundidad. Las partículas en la superficie describen trayectorias elípticas retrógradas. En la fig. A.3 se esquematiza este movimiento.

Para resolver el problema basta conocer la velocidad de fase por medio de las ecs A.I.5 ó A.I.26, calculando f_{α} y f_{β} con las ecs A.I.3 y A.I.4 (con $I_m(f_{\alpha}) < 0$ e $I_m(f_{\beta}) < 0$) para así obtener las amplitudes correspondientes con las ecs A.I.21 -A.I.23, finalmente la solución del campo libre estará dada por las ecs A.I.12-A.I.16.

A.II ONDAS SH

Si el plano de incidencia es perpendicular al plano XZ resulta que $u = w = 0$;
 $v = v(x, y, z)$.

bajo estas condiciones la ecuación de onda resulta ser escalar del tipo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{A.II.1})$$

Si consideramos ondas periódicas con dependencia del tiempo dada por el factor $e^{i\omega t}$, los campos incidentes y reflejados (fig. A.4) pueden expresarse en la forma:

$$v^i = \exp \left[i\omega \left(t + \frac{z \cos \gamma - x \sin \gamma}{\beta} \right) \right] \quad (\text{A.II.2})$$

$$v^r = \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z \cos \gamma + x \sin \gamma}{\beta} \right) \right] \quad (\text{A.II.3})$$

donde γ es el ángulo de incidencia.

Los desplazamientos del campo libre pueden ser expresados como:

$$v(o) = v^i + v^r = 2 \cos \left(\frac{\omega}{\beta} z \cos \gamma \right) e^{-i\ell x} e^{-i\omega t} \quad (\text{A.II.4})$$

con $\ell = \omega/c$ y $c =$ velocidad de fase dada por la ec A.I.5

Finalmente los esfuerzos son obtenidos mediante:

$$\sigma_{yz}^{(o)} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = 2\mu \frac{\omega}{\beta} \cos \gamma \left[-\sin\left(\frac{\omega}{\beta} z \cos \gamma\right) \right] e^{-i\ell x} e^{i\omega t} \quad (\text{A.II.5})$$

$$\sigma_{yx}^{(o)} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = 2\mu \ell \left[-i \cos\left(\frac{\omega}{\beta} z \cos \gamma\right) \right] e^{-i\ell x} e^{i\omega t} \quad (\text{A.II.6})$$

$$\sigma_{yy}^{(o)} = \sigma_{xx}^{(o)} = \sigma_{zz}^{(o)} = \sigma_{xz}^{(o)} = 0$$

el tensor de esfuerzos se puede representar por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

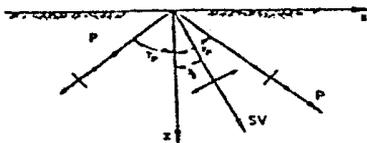


FIG A.I. Incidencia de ondas P en superficie libre

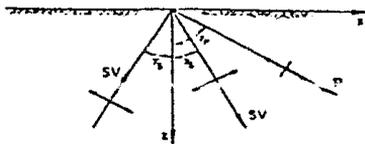


FIG A.II. Incidencia de ondas SV en superficie libre

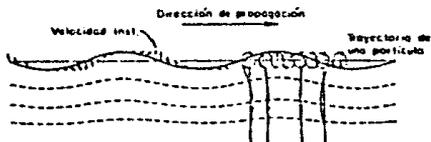


FIG A.III. Incidencia de ondas de Rayleigh en superficie libre

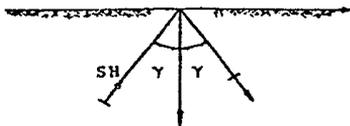


FIG A.IV. Incidencia de ondas SH en superficie libre

APENDICE B

EXPRESION DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA SOLUCION DE CAMPO LIBRE EN COORDENADAS ESFERICAS

Las transformaciones de los campos de desplazamientos y esfuerzos en coordenadas cartesianas, adoptando el sistema propuesto en la fig 2 , pueden escribirse como:

$$u'_i = \beta_{ij} u_j \quad (\text{B.1})$$

para el vector desplazamiento u_i ; y:

$$\sigma'_{ij} = \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{kl} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{con } \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}$$

para el tensor de esfuerzos σ_{ij} ; (Fung, 1965).

Considerando ondas P, SV y de Rayleigh, los componentes de dichos campos resultan ($\sigma_{\phi\phi} = 0$):

$$\sigma_{rr} = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \sin^2 \theta + \sigma_{zz} \cos^2 \theta \right) + \left(\sigma_{xz} \sin 2\theta \right) \cos \phi + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta \right) \cos 2\phi \right] e^{-i\ell x} \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_{r\theta} = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta - \sigma_{zz} \cos \theta \cdot \sin \theta \right) + \left(\sigma_{xz} \cos 2\theta \right) \cos \phi + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta \right) \cos 2\phi \right] e^{-i\ell x} \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \cos^2\theta + \sigma_{zz} \sin^2\theta \right) + (-\sigma_{xz} \sin 2\theta) \cos \phi + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos^2\theta \right) \cos 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (B.5)$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \left[(-\sigma_{xz} \cos \theta) \sin \phi + \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin \theta \right) \sin 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (B.6)$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \left[(\sigma_{xz} \sin \theta) \sin \phi + \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos \theta \right) \sin 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (B.7)$$

$$u_x = \left[(u_z \cos \theta) + (u_x \sin \theta) \cos \phi \right] e^{-ilx} \quad (B.8)$$

$$u_\theta = \left[(-u_z \sin \theta) + (u_x \cos \theta) \cos \phi \right] e^{-ilx} \quad (B.9)$$

$$u_\phi = \left[(-u_x) \sin \phi \right] e^{-ilx} \quad (B.10)$$

En estas ecuaciones son notorias las propiedades de paridad e imparidad de los componentes del campo libre; como puede verse, las ecs B.3 - B.5, B.8 y B.9 son pares con respecto al ángulo ϕ mientras que las ecs B.6, B.7 y B.10 resultan impares.

Por ello los componentes pares del campo libre (σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, u_r , u_θ) pueden escribirse en forma general como:

$$\sigma = e^{-ilx} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos j\phi \quad (B.11)$$

$$u = e^{-ilx} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos j\phi \quad (B.12)$$

y las impares ($\sigma_{r\phi}$, $\sigma_{\theta\phi}$, u_ϕ) mediante:

$$\sigma = e^{-ilx} \sum_{j=1}^2 a_j \operatorname{sen} j\phi \quad (\text{B.13})$$

$$u = a_1 \operatorname{sen} \phi e^{-ilx} \quad (\text{B.14})$$

Los términos a_j son conocidos y dependen de la componente que se considere (ecs B.3-B.10).

Para las ondas SH, las componentes del campo libre en coordenadas esféricas quedan:

$$\sigma_{rr} = \left[(\sigma_{yz} \operatorname{sen} 2\theta) \operatorname{sen} \phi + (\sigma_{xy} \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.15})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[(-\sigma_{yz} \operatorname{sen} 2\theta) \operatorname{sen} \phi + (\sigma_{xy} \cos^2 \theta) \operatorname{sen} 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \left[(-\sigma_{xy}) \operatorname{sen} 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.17})$$

$$\sigma_{r\theta} = \left[(\sigma_{yz} \cos 2\theta) \operatorname{sen} \phi + \left(\frac{1}{2} \sigma_{xy} \operatorname{sen} 2\theta\right) \operatorname{sen} 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.18})$$

$$\sigma_{r\phi} = \left[(\sigma_{yz} \cos \theta) \cos \phi + (\sigma_{xy} \operatorname{sen} \theta) \cos 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.19})$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \left[(-\sigma_{yz} \operatorname{sen} \theta) \cos \phi + (\sigma_{xy} \cos \theta) \cos 2\phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.20})$$

$$u_r = \left[(v \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.21})$$

$$u_{\theta} = \left[(v \cos \theta) \operatorname{sen} \phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.22})$$

$$u_{\phi} = \left[v \cos \phi \right] e^{-ilx} \quad (\text{B.23})$$

Estas ecuaciones pueden reducirse a la forma propuesta en las ecs B.11-
B.14, una vez determinados los correspondientes términos d_j .

APENDICE C

EXPRESIONES DE LOS ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS DIFRACTADOS Y REFRACTADOS
EN TERMINOS DE LOS ELEMENTOS VECTORIALES \vec{w}_{jnm}

Sustituyendo las ecs 3.11 - 3.17 en las ecs 3.9 y 3.10, los desplazamientos en coordenadas esféricas se representan por:

$$u_r = \sum A_{nm} y_1^p(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi) + \sum B_{nm} y_1^s(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi) \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} u_\theta = & \sum A_{nm} y_3^p(r) \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m(\cos \theta)) f_m(\phi) + \\ & + \sum B_{nm} y_3^s(r) \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m(\cos \theta)) f_m(\phi) + \\ & + \sum C_{nm} y_1^c(r) \frac{1}{\Delta c n \theta} P_n^m(\cos \theta) (\Delta ig \cdot m) f_m(\phi) \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} u_\phi = & \sum A_{nm} y_3^p(r) \frac{1}{\Delta c n \theta} P_n^m(\cos \theta) (\Delta ig \cdot m) g_m(\phi) + \\ & + \sum B_{nm} y_3^s(r) \frac{1}{\Delta c n \theta} P_n^m(\cos \theta) (\Delta ig \cdot m) g_m(\phi) + \\ & + \sum C_{nm} (-y_1^c(r)) \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m(\cos \theta)) g_m(\phi) \end{aligned} \quad (C.3)$$

donde $\Sigma = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n$; $f_m(\phi) = \cos m\phi$, $g_m(\phi) = \sin m\phi$ y $\Delta ig = 1$, si las ondas incidentes son P, SV y de Rayleigh, ó $f_m(\phi) = \Delta c n m\phi$, $g_m(\phi) = \cos m\phi$ y $\Delta ig = -1$ si las ondas incidentes son SH.

A_{nm} , B_{nm} y C_{nm} son los coeficientes indeterminados para ondas P, SV y SH respectivamente.

Las funciones radiales están dadas por:

$$y_1^p(r) = \frac{1}{r} [n \zeta_n(qr) - qr \zeta_{n+1}(qr)] \quad (C.4)$$

$$y_1^a(r) = \frac{1}{r} [-n(n+1)\xi_n(kr)] \quad (C.5)$$

$$y_1^c(r) = \frac{1}{r} [kr \xi_n(kr)] \quad (C.6)$$

$$y_3^p(r) = \frac{1}{r} \xi_n(qr) \quad (C.7)$$

$$y_3^s(r) = \frac{1}{r} \left[-(n+1)\xi_n(kr) + kr \xi_{n+1}(kr) \right] \quad (C.8)$$

donde $\xi_n(\cdot) = \begin{cases} j_n(\cdot) = \text{función de Bessel esférica de primera especie y orden} \\ \quad n \text{ (para la región R)} \\ h_n^{(2)}(\cdot) = \text{función de Hankel esférica de segunda especie y orden} \\ \quad n \text{ (para la región E)} \end{cases}$

Los esfuerzos asociados a estas componentes de desplazamientos son:

$$\sigma_{rr} = \Sigma A_{nm} y_2^p(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi) + \Sigma B_{nm} y_2^s(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi) \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \Sigma A_{nm} \left[y_3^p(r) + y_6^p(r) (\cot \theta \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} + \frac{1}{\Delta \epsilon n^2 \theta} (-m^2) P_n^m(\cos \theta)) \right] f_m(\phi) + \\ & + \Sigma B_{nm} \left[y_3^s(r) + y_6^s(r) (\cot \theta \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} + \frac{1}{\Delta \epsilon n^2 \theta} (-m^2) P_n^m(\cos \theta)) \right] f_m(\phi) + \quad (C.10) \\ & + \Sigma C_{nm} \left[y_3^c(r) \left(\frac{1}{\Delta \epsilon n \theta} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} - \frac{\cos \theta}{\Delta \epsilon n^2 \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (\Delta \epsilon g \cdot m) \right] f_m(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} = & \Sigma A_{nm} \left[y_3^p(r) P_n^m(\cos \theta) + y_6^p(r) \frac{d^2 P_n^m(\cos \theta)}{d \theta^2} \right] f_m(\theta) + \\ & + \Sigma B_{nm} \left[y_3^s(r) P_n^m(\cos \theta) + y_6^s(r) \frac{d^2 P_n^m(\cos \theta)}{d \theta^2} \right] f_m(\theta) + \quad (C.11) \\ & + \Sigma C_{nm} \left[y_3^c(r) \left(\frac{1}{\Delta \epsilon n \theta} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} - \frac{\cos \theta}{\Delta \epsilon n^2 \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (-\Delta \epsilon g \cdot m) \right] f_m(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\phi} = & \Sigma A_{nm} \left[y_4^p(r) \left(\frac{1}{\Delta c n \theta} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} - \frac{c \theta \Delta \theta}{\Delta c n^2 \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (\Delta \Delta g \cdot m) \right] g_m(\phi) + \\
& + \Sigma B_{nm} \left[y_5^p(r) \left(\frac{1}{\Delta c n \theta} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} - \frac{c \theta \Delta \theta}{\Delta c n^2 \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (\Delta \Delta g \cdot m) \right] g_m(\phi) + \\
& + \Sigma C_{nm} \left[\frac{1}{2} y_3^t(r) \left(-\frac{d^2 P_n^m(\cos \theta)}{d \theta^2} + \frac{c \theta \Delta \theta}{\Delta c n \theta} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} + \frac{1}{\Delta c n^2 \theta} (-m^2) P_n^m(\cos \theta) \right) \right] g_m(\phi)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\phi} = & \Sigma A_{nm} \left[y_4^p(r) \left(\frac{1}{\Delta c n \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (-\Delta \Delta g \cdot m) \right] g_m(\phi) + \\
& + \Sigma B_{nm} \left[y_5^p(r) \left(\frac{1}{\Delta c n \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (-\Delta \Delta g \cdot m) \right] g_m(\phi) + \\
& + \Sigma C_{nm} \left[(-y_2^t(r)) \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} \right] g_m(\phi)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta} = & \Sigma A_{nm} \left[y_4^p(r) \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} \right] f_m(\phi) + \\
& + \Sigma B_{nm} \left[y_5^p(r) \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} \right] f_m(\phi) + \\
& + \Sigma C_{nm} \left[y_2^t(r) \frac{1}{\Delta c n \theta} P_n^m(\cos \theta) \right] f_m(\phi)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

donde A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} , $f_m(\phi)$, $g_m(\phi)$ y $\Delta \Delta g$ se definen igual que para los desplazamientos.

Las funciones radiales se expresan:

$$y_2^t(r) = \frac{2}{r^2} \left[\frac{1}{2} k r (n-1) \zeta_n(kr) - \frac{1}{2} k^2 r^2 \zeta_{n+1}(kr) \right] \tag{C.15}$$

$$y_3^t(r) = \frac{2}{r^2} [k r \xi_n(kr)] \tag{C.16}$$

$$y_2^p(r) = \frac{2\nu}{r^2} \left[(n(n-1) - \frac{1}{2} k^2 r^2) \xi_n(qr) + 2qr \xi_{n+1}(qr) \right] \quad (C.17)$$

$$y_3^p(r) = \frac{2\nu}{r^2} \left[(n-1) \xi_n(qr) - qr \xi_{n+1}(qr) \right] \quad (C.18)$$

$$y_3^p(r) = \frac{2\nu}{r^2} \left[(q^2 r^2 - \frac{1}{2} k^2 r^2 - n^2) \xi_n(qr) - qr \xi_{n+1}(qr) \right] \quad (C.19)$$

$$y_4^p(r) = - \frac{2\nu}{r^2} \xi_n(qr) \quad (C.20)$$

$$y_2^s(r) = \frac{2\nu}{r^2} \left[-n(n+1) \left[(n-1) \xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr) \right] \right] \quad (C.21)$$

$$y_4^s(r) = \frac{2\nu}{r^2} \left[-(n^2 - 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2) \xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr) \right] \quad (C.22)$$

$$y_5^s(r) = \frac{2\nu}{r^2} \left[n(n+1) \left[n \xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr) \right] \right] \quad (C.23)$$

$$y_6^s(r) = - \frac{2\nu}{r^2} \left[-(n+1) \xi_n(kr) + kr \xi_{n+1}(kr) \right] \quad (C.24)$$

donde $\xi_n(\cdot) = j_n(\cdot)$ para la región R y $\xi_n(\cdot) = h_n^{(2)}(\cdot)$ para la región E.

El cálculo de estas funciones se basa en métodos recursivos. Consideremos primeramente las funciones esféricas de Bessel de primera especie. En este caso es necesario mencionar que las fórmulas de recurrencia acumulan errores considerables cuando se incrementa el orden de las funciones. Takeuchi y Saito (1972) proponen un método donde se supone un orden suficientemente grande con respecto al argumento, para el cual la función es muy cercana a cero; a partir de éste

se calculan los órdenes menores.

El método esencialmente consiste en tomar la relación recurrente:

$$z_{n+1}(x) = \frac{x^2}{(2n+1) - z_n(x)} \quad \text{con } z_n(x) = 0 \text{ y } n=n, n-1, \dots, 1, 0 \quad (\text{C.25})$$

así
$$j_n(x) = \frac{z_{n-1}(x) j_{n-1}(x)}{x} \quad \text{para } n=1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{C.26})$$

tomando la definición: $j_0(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

Para calcular las funciones de Hankel esféricas de segunda especie se requiere conocer las funciones esféricas de Bessel de segunda especie ($y_n(x)$), ya que las funciones de Hankel se definen mediante

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x) \quad (\text{C.27})$$

Las funciones esféricas de Bessel de segunda especie ofrecen mayor estabilidad numérica cuando se calculan incrementando el orden, por lo que es posible aplicar fórmulas recurrentes del tipo (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$y_n(x) = \frac{(2n-1) y_{n-1}(x)}{x} - y_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, 4, \dots, n \quad (\text{C.28})$$

con
$$y_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad (\text{C.29})$$

$$y_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen } x}{x} \quad (\text{C.30})$$

Por otro lado, el cálculo de las funciones de Legendre y sus derivadas resulta fácil si se consideran las relaciones (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$P_n^m(x) = \frac{(2n-1)x P_{n-1}^m(x) - (n+m-1)P_{n-2}^m(x)}{n-m}; \quad n \geq m \quad (\text{C.31})$$

$$y \quad \frac{dP_n^m(x)}{dx} = \frac{nxP_n^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x)}{(x^2-1)}; \quad |x| < 1 \quad (\text{C.32})$$

$$\text{con } P_0(x) = 1 \quad (\text{C.33})$$

$$P_1(x) = x \quad (\text{C.34})$$

APENDICE D

FACTORES DE LA DESCOMPOSICION AZINUTAL

Tomando las ecs 3.18 y 3.19, los componentes del campo libre pueden expresarse, para las funciones pares e impares, en la forma:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} c_m (-i)^m J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) a_j [\cos[(m+j)\phi] + \cos[(m-j)\phi]] \quad (\text{D.1})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} c_m (-i)^m J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) a_j [\text{sen}[(m+j)\phi] - \text{sen}[(m-j)\phi]] \quad (\text{D.2})$$

Desarrollando en estas expresiones la suma con índice j y reagrupando se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} a_0 \left[c_m (-i)^m J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \right] \cos m\phi + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} a_1 \left[c_m (-i)^{m+1} \left(J_{m+1}(\ell r \cdot \text{sen } \theta) - \frac{m}{\ell r \cdot \text{sen } \theta} J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \right) \right] \cos m\phi + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} a_2 \left[c_m (-i)^{m+2} \left[\left(\frac{2m(m-1)}{\ell r \cdot \text{sen } \theta} - \frac{1}{2} \right) J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) - \frac{(m-1)}{\ell r \cdot \text{sen } \theta} J_{m+1}(\ell r \cdot \text{sen } \theta) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} J_{m+2}(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \right] \right] \cos m\phi \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

para las funciones pares, y:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} a_1 \left[-2(-i)^{m+1} \frac{m}{\ell r \cdot \text{sen } \theta} J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \right] \text{sen} m\phi + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} a_2 \left[-2(-i)^{m+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2m(m-1)}{(\ell r \cdot \text{sen } \theta)^2} \right) J_m(\ell r \cdot \text{sen } \theta) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{m-1}{\ell r \cdot \text{sen } \theta} J_{m+1}(\ell r \cdot \text{sen } \theta) - \frac{1}{2} J_{m+2}(\ell r \cdot \text{sen } \theta) \right] \text{sen} m\phi \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

para las impares.

Estas últimas expresiones pueden reducirse si se agrupan los términos apropiados tales que esencialmente la forma para las funciones pares es:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{f_m^{(0)} + f_m^{(0)}\} \cos m\phi + \sum_{m=0}^{\infty} \{f_{m+1}^{(1)} + f_{m-1}^{(1)}\} \cos m\phi + \sum_{m=0}^{\infty} \{f_{m+2}^{(2)} + f_{m-2}^{(2)}\} \cos m\phi \quad (D.5)$$

y para las impares:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{g_{m+1}^{(1)} - g_{m-1}^{(1)}\} \sin m\phi + \sum_{m=1}^{\infty} \{g_{m+2}^{(2)} - g_{m-2}^{(2)}\} \sin m\phi \quad (D.6)$$

donde $f_m^{(j)} = g_m^{(j)} = \frac{1}{2} \epsilon_m(-\lambda)^m J_m(\lambda r) \sin \theta$

por lo que las expresiones del campo libre para las partes pares e impares son, respectivamente:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \{f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)}\} \cos m\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_0 A_{P0} + \alpha_1 A_{P1} + \alpha_2 A_{P2}) \cos m\phi \quad (D.7)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{g_{m+j}^{(j)} - g_{m-j}^{(j)}\} \sin m\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_1 A_{I1} + \alpha_2 A_{I2}) \sin m\phi \quad (D.8)$$

En estas expresiones finales, los factores azimutales se han representado en formas más simples para fines de cómputo; para los factores azimutales pares se tiene:

$$A_{P0} = \epsilon_m(-\lambda)^m J_m(\cdot) \quad (D.9)$$

$$A_{P1} = \epsilon_m(-\lambda)^{m+1} \left[-\frac{m}{(\cdot)} J_m(\cdot) + J_{m+1}(\cdot) \right] \quad (D.10)$$

$$A_{P2} = \epsilon_m(-\lambda)^{m+2} \left[\frac{2m(m-1)}{(\cdot)^2} J_m(\cdot) - \frac{m-1}{(\cdot)} J_{m+1}(\cdot) + \frac{1}{2} J_{m+2}(\cdot) \right] \quad (D.11)$$

y para las impares:

$$A11 = -2(-i)^{m+1} \left[\frac{m}{(\cdot)} J_m(\cdot) \right] \quad (D.12)$$

$$A12 = -2(-i)^{m+2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2m(m-1)}{(\cdot)^2} J_m(\cdot) + \frac{m-1}{(\cdot)} J_{m+1}(\cdot) + \frac{1}{2} J_{m+2}(\cdot) \right) \right] \quad (D.13)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$ y $(\cdot) = (kr \cdot \text{sen } \theta)$ en ambos casos.

Estos factores se utilizan al resolver los sistemas de ecuaciones surgidas de las condiciones de frontera, para cada número azimutal; de esta forma los términos $\cos m\phi$ y $\sin m\phi$, tal como aparecen en las ecuaciones D.7 y D.8, se eliminan permitiendo que el problema quede en términos de las coordenadas r y θ (ecs 3.20 y 3.21).

El cálculo de las funciones de Bessel cilíndricas resulta costoso y los algoritmos un tanto complicados; sin embargo si se cuenta con los valores $J_{m+2}(z)$ y $J_{m+1}(z)$, existen métodos recursivos para el cálculo de órdenes menores (Abramowitz y Stegun, 1972), uno de éstos resulta al considerar la relación:

$$J_m(z) = \frac{2(m+1)}{z} J_{m+1}(z) - J_{m+2}(z)$$

donde m es el orden de la función de Bessel cilíndrica ($m = m, m-1, m-2, \dots, 2, 1, 0$).

APENDICE D

FACTORES DE LA DESCOMPOSICION AZINUTAL

Tomando las ecs 3.18 y 3.19, los componentes del campo libre pueden expresarse, para las funciones pares e impares, en la forma:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \frac{1}{2} \epsilon_m (-\lambda)^m J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) a_j \{ \cos[(m+j)\phi] + \cos[(m-j)\phi] \} \quad (D.1)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \frac{1}{2} \epsilon_m (-\lambda)^m J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) a_j \{ \text{sen}[(m+j)\phi] - \text{sen}[(m-j)\phi] \} \quad (D.2)$$

Desarrollando en estas expresiones la suma con índice j y reagrupando se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} a_0 \left[\epsilon_m (-\lambda)^m J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) \right] \cos m\phi + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} a_1 \left[\epsilon_m (-\lambda)^{m+1} \left(J_{m+1}(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) - \frac{m}{\lambda r \cdot \text{sen } \theta} J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) \right) \right] \cos m\phi + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} a_2 \left[\epsilon_m (-\lambda)^{m+2} \left[\left(\frac{2m(m-1)}{\lambda r \cdot \text{sen } \theta} - \frac{1}{2} \right) J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) - \frac{(m-1)}{\lambda r \cdot \text{sen } \theta} J_{m+1}(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} J_{m+2}(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) \right] \right] \cos m\phi \end{aligned} \quad (D.3)$$

para las funciones pares, y:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} a_1 \left[-2(-\lambda)^{m+1} \frac{m}{\lambda r \cdot \text{sen } \theta} J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) \right] \text{sen} m\phi + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} a_2 \left[-2(-\lambda)^{m+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2m(m-1)}{(\lambda r \cdot \text{sen } \theta)^2} \right) J_m(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{m-1}{\lambda r \cdot \text{sen } \theta} J_{m+1}(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) - \frac{1}{2} J_{m+2}(\lambda r \cdot \text{sen } \theta) \right] \text{sen} m\phi \end{aligned} \quad (D.4)$$

para las impares.

Estas últimas expresiones pueden reducirse si se agrupan los términos apropiados tales que esencialmente la forma para las funciones pares es:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{f_m^{(0)} + f_m^{(0)}\} \cos m\phi + \sum_{m=0}^{\infty} \{f_{m+1}^{(1)} + f_{m-1}^{(1)}\} \cos m\phi + \sum_{m=0}^{\infty} \{f_{m+2}^{(2)} + f_{m-2}^{(2)}\} \cos m\phi \quad (D.5)$$

y para las impares:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{g_{m+1}^{(1)} - g_{m-1}^{(1)}\} \delta e^{i m \phi} + \sum_{m=1}^{\infty} \{g_{m+2}^{(2)} - g_{m-2}^{(2)}\} \delta e^{i m \phi} \quad (D.6)$$

$$\text{donde } f_m^{(j)} = g_m^{(j)} = \frac{1}{2} \epsilon_m(-\lambda)^m J_m(\lambda r \cdot \sin \theta) a_j$$

por lo que las expresiones del campo libre para las partes pares e impares son, respectivamente:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \{f_{m+j}^{(j)} + f_{m-j}^{(j)}\} \cos m\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 A_{P0} + a_1 A_{P1} + a_2 A_{P2}) \cos m\phi \quad (D.7)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{g_{m+j}^{(j)} - g_{m-j}^{(j)}\} \delta e^{i m \phi} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_1 A_{I1} + a_2 A_{I2}) \delta e^{i m \phi} \quad (D.8)$$

En estas expresiones finales, los factores azimutales se han representado en formas más simples para fines de cómputo; para los factores azimutales pares se tiene:

$$A_{P0} = \epsilon_m(-\lambda)^m J_m(\cdot) \quad (D.9)$$

$$A_{P1} = \epsilon_m(-\lambda)^{m+1} \left[-\frac{m}{(\cdot)} J_m(\cdot) + J_{m+1}(\cdot) \right] \quad (D.10)$$

$$A_{P2} = \epsilon_m(-\lambda)^{m+2} \left[\frac{2m(m-1)}{(\cdot)^2} - \frac{1}{(\cdot)} J_m(\cdot) - \frac{m-1}{(\cdot)} J_{m+1}(\cdot) + \frac{1}{2} J_{m+2}(\cdot) \right] \quad (D.11)$$

y para las impares:

$$A11 = -2(-i)^{m+1} \left[\frac{m}{(\cdot)} J_m(\cdot) \right] \quad (D.12)$$

$$A12 = -2(-i)^{m+2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2m(m-1)}{(\cdot)^2} \right) J_m(\cdot) + \frac{m-1}{(\cdot)} J_{m+1}(\cdot) + \frac{1}{2} J_{m+2}(\cdot) \right] \quad (D.13)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$ y $(\cdot) = (r \cdot \sin \theta)$ en ambos casos.

Estos factores se utilizan al resolver los sistemas de ecuaciones surgidas de las condiciones de frontera, para cada número armónico; de esta forma los términos $\cos m\phi$ y $\sin m\phi$, tal como aparecen en las ecuaciones D.7 y D.8, se eliminan permitiendo que el problema quede en términos de las coordenadas r y θ (ecs 3.20 y 3.21).

El cálculo de las funciones de Bessel cilíndricas resulta costoso y los algoritmos un tanto complicados; sin embargo si se cuenta con los valores $J_{m+2}(z)$ y $J_{m+1}(z)$, existen métodos recursivos para el cálculo de órdenes menores (Abramowitz y Stegun, 1972), uno de éstos resulta al considerar la relación:

$$J_m(z) = \frac{2(m+1)}{z} J_{m+1}(z) - J_{m+2}(z)$$

donde m es el orden de la función de Bessel cilíndrica ($m = m, m-1, m-2, \dots, 2, 1, 0$).