Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

ESTUDIO DE VIBRACIONES LIBRES Y FORZADAS EN ESTRUCTURAS DE PARED DELGADA APLICADO AL DESFOGUE DE LA PRESA HIDROELECTRICA MANUEL MORENO TORRES "CHICOASEN"

Tesis Profesional

INGENIERA CIVIL

NORMA AVIÑA LEMUS

México, D. F. 1987

INDICE

NOMENCLATURA

T	Período
f	Frecuencia
ω_{mn}	Frecuencia natural para el modo mn.
ω_o	Frecuencia a la cual ocurre el máximo desplazamiento.
g	aceleración de la gravedad
E, E_c	Módulo de elasticidad del acero y del concreto respectivamente.
ρ	Densidad
ν	Módulo de Poisson.
a, b	dimensiones de una placa rectangular.
R_1	radio menor del cono truncado
R_2	radio mayor del cono truncado
$\bar{R}$	$(R_1+R_2)/2$
α	ángulo del semivértice de abertura del cono.
u, v, w	desplazamientos longitudinal, circunferencial y radial.
h, t	espesor
L	longitud meridional del cono.
K	$\sqrt{L/R}\sqrt{h/R}$
U_{imnk}	función coordenada
$\eta_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}$	factor de participación modal
q_i	carga
Φ_{mn}	ángulo de fase.
Λ_{mn}	magnitud de la respuesta.
m	número modal natural longitudinal.
n	número modal natural circunferencial.
δ	desplazamiento transversal de una placa.
δ^*_{max}/b	aproximación para grandes amortiguamientos.
A_{ij}	coeficientes de la rigidez a esfuerzos normales.
D_{ij}	coeficientes de la rigidez a flexión.

INDICE DE FIGURAS

página

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO I

INTRODUCCION

I.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA.

La Presa Hidroeléctrica Manuel Moreno Torres, "Chicoasén", se encuentra en funcionamiento desde 1980. Desde entonces se han detectado problemas de vibración en las tuberías de desfogue de sus turbinas debido al flujo de agua que se descarga a través de ellas y que les induce efectos dinámicos de frecuencia relativamente baja. Es necesario reforzar estas tuberías de desfogue con atiezadores longitudinales y circunferenciales a fin de asegurar que sus frecuencias naturales de vibración sean suficientemente altas para evitar efectos de resonancia que dañarían seriamente las instalaciones.

En el desarrollo de esta tesis se dará una primera solución al problema de vibración forzada de la estructura de desfogue . Es por esto que resulta importante primeramente, plantear el problema estructural sobre el que se va a trabajar y en seguida definir algunos de los términos que se utilizarán en los capítulos subsecuentes.

I.2 EFECTOS GLOBALES Y LOCALES.

Desde el punto de vista estructural se cuenta con una tubería de pared muy delgada a la salida de las turbinas Francis (fig.1.1) cuya geometría describe un cono corto truncado y que se encuentra sujeta a vibración forzada. La literatura que existe a este respecto no es muy extensa y algunas investigaciones son cuestionables.- El cascarón cónico en investigación se encuentra rigidizado por costillas de acero tanto longitudinal como circunferencialmente.

Cabe hacer notar que se ha observado una degradación en el acero de las paredes internas del cascarón en algunos puntos, lo que hace pensar en la posible existencia de efectos locales que no aparecen en el análisis general del cono. Es decir, que es importante también el estudio de las placas definidas por la retícula de atiezadores. Por ejemplo: el cascarón cónico truncado y rigidizado tiene su forma propia de vibrar y puede no encontrarse en resonancia en algún momento en que las placas, por condiciones locales propias, se comporten como sistemas independientes y presenten fenómenos de resonancia.

Esta investigación surgió de la necesidad de conocer el comportamiento dinámico de las tuberías de desfogue de las turbinas instaladas en Chicoasén. Se encuentran aún dentro de su tiempo estimado de vida útil y sin embargo se han tenido que "parchar" y reforzar en algunos puntos e inclusive revestir con una capa de concreto en un intento por elevar las frecuencias naturales y resolver el problema.

La figura I.1 muestra las dimensiones y propiedades generales de la estructura en estudio.

I.3 DEFINICIONES.

HOMOGENEO. Homogéneo es aquel cuerpo o sistema constituido por un solo material.

ISOTROPO. Se dice que es isótropo aquel material, cuerpo o sistema cuyas propiedades mecánicas son independientes de la dirección considerada.

ORTOTROPIA. La ortotropía se define cuando el sistema presenta diferencias en sus propiedades mecánicas en dos direcciones ortogonales.

CASCARON. Cascarón o estructura de pared delgada es un cuerpo tridimensional en el que el espesor es pequeño comparado con las dimensiones de su superficie. Un cascarón queda geométricamente definido por una superficie media y un espesor en cada uno de los puntos de dicha superficie. (Ref.4)

PLACA. Un cuerpo o sistema definido por dos superficies planas y un espesor es denominado como placa. Las placas pueden estar sujetas a esfuerzos normales y tangenciales a sus superficies.

MOVIMIENTO PERIODICO. Todo aquel movimiento que se repite en intervalos de tiempo iguales se llama movimiento periódico. Una función f(t) es periódica, de período T si: f(t) está definida para toda t y si f(t)=f(t+T) para toda t (fig. 1.2a).

MOVIMIENTO OSCILATORIO. Movimiento oscilatorio es aquel que describe un cuerpo en torno a un punto fijo (fig. 1.2b).

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE. Un movimiento oscilatorio periódico que puede ser representado por una función senoide o cosenoide se conoce como movimiento armónico simple (fig. 1.2c).

El matemático francés J.Fourier demostró que cualquier movimiento periódico de una partícula puede representarse como una combinación lineal de movimientos armónicos simples.

PERIODO T. El período de un movimiento armónico simple es el tiempo requerido para completar una oscilación completa o ciclo.

FRECUENCIA f. La frecuencia del movimiento es el número de oscilaciones por unidad de tiempo que efectúa una partícula y es por lo tanto el recíproco del período f=1/T.

FRECUENCIA NATURAL. Las frecuencias naturales de oscilación son propiedades del sistema dinámico y dependen de su distribución de masa y rigidez. Un sistema tiene tantas frecuencias naturales de oscilación como grados de libertad asignados. (Ref.3)

GRADOS DE LIBERTAD. El número de grados de libertad de un sistema determina el número de coordenadas independientes que se utilizan para definir aproximadamente la configuración de un sistema, que generalmente es un medio continuo.

VIBRACION LIBRE. Vibración libre es la que ocurre cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas inherentes al sistema mismo y cuando las fuerzas externamente aplicadas son inexsistentes. (Ref. 3)

VIBRACION FORZADA. Vibración forzada es la que tiene lugar bajo la excitación de fuerzas externas. Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es obligado a vibrar a la misma frecuencia de excitación. Si esta frecuencia está cerca de alguna de las frecuencias naturales del sistema se produce lo que se conoce como resonancia y ocurren oscilaciones o desplazamientos peligrosamente grandes. (Ref. 1,3)

MODO NATURAL. Modo natural o modo normal de oscilación de un sólido elástico discretizado es la configuración del sistema cuando cada punto al que ha sido asignado una masa, experimenta un movimiento armónico de la misma frecuencia, pasando simultaneamente por la posición de equilibrio. (Ref. 3)

La figura 1.3 muestra un sistema de dos grados de libertad y sus posibles modos naturales de oscilación.

A cada una de las frecuencias naturales de oscilación del sistema se les asocia un modo natural de oscilación. Un sistema con un número infinito de grados de libertad como lo son los sistemas continuos (vigas, placas, cascarones, etc.) tienen también un número infinito de modos naturales de oscilación.

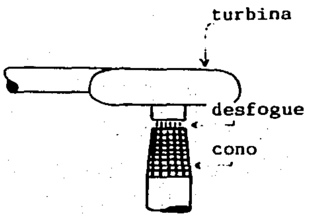
AMORTIGUAMIENTO. La fuerza de amortiguamiento trata de restablecer el equilibrio de la estructura o sistema en vibración.

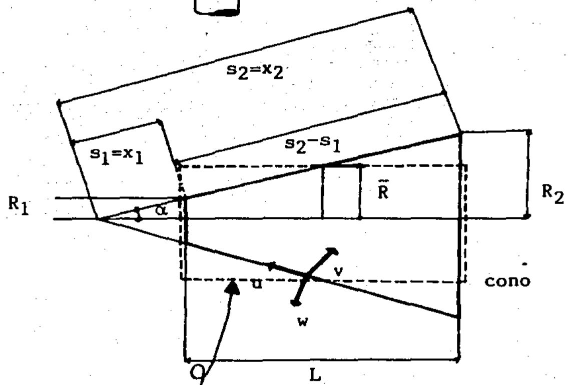
El amortiguamiento del movimiento oscilatorio de un sólido elástico se dá en todos los casos en mayor o menor medida, puesto que la energía se disipa debido a resistencias del mismo sistema como fricción entre sus superficies o componentes, acción del agua o viento, fricción interna debida a imperfecciones en la elasticidad del material, etc.

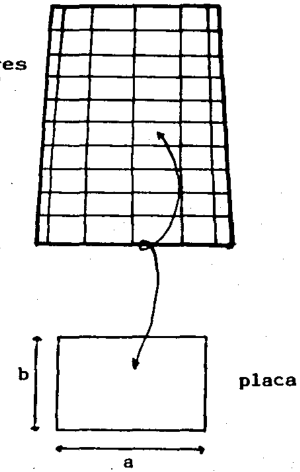
En el caso de fricción entre dos superficies secas generalmente es aplicable la ley de Coulomb-Morín que considera que la fuerza de fricción es directamente proporcional a la componente de la presión normal a la superficie, es decir $F=\mu N$, donde μ es el coeficiente de fricción que depende del material y de la rugosidad de las superficies.

AMORTIGUAMIENTO CRITICO. Se denomina amortiguamiento crítico a aquél para el cual el movimiento pierde su carácter vibratorio. En vibración libre se define como amortiguamiento crítico a aquél para el cual el sistema, después de desplazado volvería a su posición de reposo en forma monotónica y sin oscilar.

La constante de amortiguamiento puede expresarse como una fracción del amortiguamiento crítico $\lambda = C/C_{crítico}$. (Ref. 2,3)







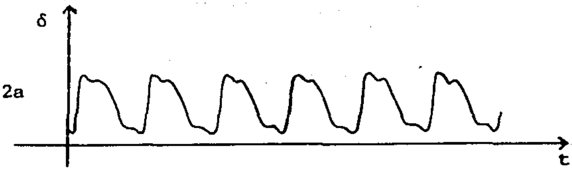
R_1= 94.52"
R_2=112.40"
$\bar{R}$ =103.46"
L =176.02"
s_1=935.32"
s_2=1112.25"
α=5.8°
h =3/8"

E = 29,000,000 lb/ in²
ρ = 0.000734 lb/ in³
ν = 0.3
a = 52.0"
b = 16.5"

figura 1.1

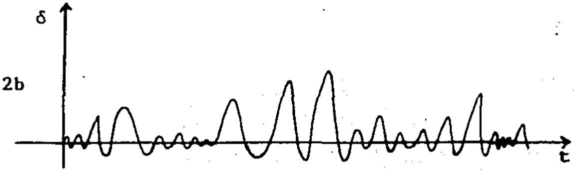
Dimensiones y propiedades generales
de la estructura en estudio

figura 1.2a



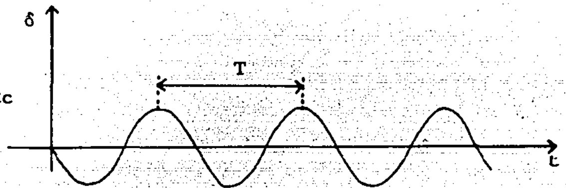
movimiento
periódico

figura 1.2b



movimiento
oscilatorio

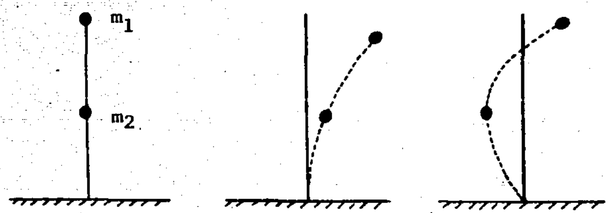
figura 1.2c



movimiento
armónico simple

Configuración modal

modo fundamental   segundo modo



sistema de dos grados de libertad

figura 1.3

CAPITULO II

REVISION BIBLIOGRAFICA

El estudio de vibraciones libres y frecuencias naturales de cascarones cónicos es en realidad complejo. Diversos investigadores han aplicado simplificaciones al análisis logrando resultados que representan en forma aproximada el comportamiento real de la estructura. Sin embargo , muchas de estas teorías presentan serias restricciones en su aplicación.

Con la finalidad de unificar la nomenclatura, todos los parámetros geométricos estarán referidos a los presentados en la figura 1.1 .

V.I.Weingarten en su artículo "Vibraciones libres de cascarones cónicos" (Ref.5) proporciona datos experimentales de vibración de cascarones cónicos para diferentes condiciones de apoyo en sus bordes. Se basa en las ecuaciones lineales de Donnell, modificadas para incluir los términos de inercia. Considera que los efectos de las inercias longitudinal y circunferencial son despreciables para un número de modo circunferencial mayor a tres, por lo que sólo toma en cuenta la inercia radial, incluyendo los efectos de alargamiento y acortamiento y de flexión del cono debidos a la vibración. Utiliza el método de Galerkin y considera a los desplazamientos como series de potencias. Los valores que obtuvo para las frecuencias a partir del análisis teórico fueron menores a los obtenidos de los experimentos. Esto lo explica Weingarten como una consecuencia de un cierto grado de empotramiento en los apoyos de borde de los conos experimentales. Sin embargo estos datos solo siguen el comportamiento teórico cuando el número de modo circunferencial es pequeño. Realizó también experimentos para un "cilindro equivalente" y los resultados obtenidos son satisfac torios para números de modo circunferenciales bajos; $n \leq 7$ para $m=1$ y $n \leq 4$ para $m=2$.

Las características de ese cascarón cilíndrico equivalente, fig 1.1, son: longitud $L= s_2-s_1$ igual a la longitud meridional o inclinada del cono, radio $R=\bar{R}$ igual al radio de curvatura medio del cono e igual espesor h. Paul Seide (Ref.8) comenta que la proposición del cilindro equivalente ha demostrado, en investigaciones de estabilidad de cascarones cónicos, ser de utilidad. Los resultados de este trabajo indican que las frecuencias naturales del cilindro equivalente son aproximadamente iguales para conos cuyo ángulo α sea menor a 17°.

Paul Seide en su artículo "Vibraciones libres en cascarones cónicos truncados simplemente apoyados" (Ref.8) plantea las expresiones que determinan las frecuencias naturales de vibración y las formas modales de cascarones cónicos simplemente apoyados a partir de una solución aproximada con el método de Rayleigh-Ritz a la ecuación de movimiento de cascarones. Considera dos tipos de soportes, uno para el cual los desplazamientos en los bordes de la circunferencia son nulos y el segundo caso cuando los esfuerzos cortantes son nulos. Señala que el desplazamiento circunferencial es despreciable comparado con los cambios de curvatura de la superficie media y por lo tanto sólo toma en cuenta la energía cinética del movimiento normal a dicha superficie. Para conos muy abiertos, Seide hace notar que no es suficiente tomar uno o dos términos de las aproximaciones de Galerkin o Rayleigh-Ritz. La solución aproximada, para las frecuencias naturales del cascarón cónico que presenta, proporcionó un importante parametro de comparación con la teoría que se presentará en el capítulo siguiente, y los resultados serán analizados en el capítulo IV. La ecuación que presenta Seide es la siguiente:

$f = \omega/2\pi$

$$\omega = \frac{K_c}{h \tan^2\alpha} \sqrt{[12(1-\nu^2)E/\rho]} \qquad (2.1)$$

$$K_c^2 = \left(\frac{2}{U(1+S)}\right)^4 \left\{\left(\frac{m\pi}{2}\,\frac{1+S}{1-S}\right)^2 + \eta^2\right\}^2 + \frac{\left(\frac{2}{U(1+S)}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{2}\,\frac{1+S}{1-S}\right)^4}{\left\{\left(\frac{m\pi}{2}\,\frac{1+S}{1-S}\right)^2 + \eta^2\right\}^2} \qquad (2.2)$$

m: número de modo longitudinal

n: número de modo circunferencial

$S = R_1/R_2$

$U = \sqrt{12(1-\nu^2)}\ \frac{R_2/\cos\alpha}{h} \cot^2\alpha$

$\eta = n/\mathrm{sen}\alpha$

Garnet, Goldberg y Salerno (Ref. 6) estudiaron el movimiento axisimétrico de un cascarón cónico doblemente empotrado. Presentan el parámetro de frecuencia como la raiz de una ecuación caracte-rística con funciones de Bessel, que no es función del ángulo α.- Proporcionan una tabla con las primeras cinco raíces de la ecua-ción característica para valores de η de 1 a 50, siendo $\eta = s_2/s_1$. Para los modos torsionantes incluyeron los efectos de deformación por cortante e inercia rotacional.

Por su parte Keefe (Ref.6) considera el caso de movimiento o vibración meridional en que se considera que la sección transver-sal del cono permanece plana y que el movimiento solo ocurre en la dirección indicada, es decir que w=0. Esto, por supuesto, es solo una aproximación. Presenta una gráfica con las primeras cua-tro raíces de su ecuación del parámetro de frecuencia $\Omega_2 = \omega(s_2 - s_1)\sqrt{\rho/E}$, en función de la relación de radios R_1/R_2.

Otra condición de borde que se presenta en la literatura de cascarones es aquella apoyada en diafragmas de cortante, figura 2.1. Linholm y Hu (Ref.6) realizaron un extenso estudio para cascarones con esta condición de apoyo. La ecuación de comportamiento de cascarones desarrollada por Hu incluye los efectos de deformación por cortante, de inercia rotacional en la dirección meridional y desprecia los efectos en la dirección circunferencial al igual que Garnet, Goldberg y Salerno. Esta teoría es de suponerse sólo aplicable a cascarones cortos con número modal circunferencial pequeño y así lo demuestran los ejemplos numéricos que presenta. Por otra parte Lindholm y Hu señalan que la mínima frecuencia ocurre para valores de 'n' relativamente grandes (≥ 5), y que la posición del desplazamiento máximo se corre hacia el extremo ancho del cono a medida que aumenta 'n'.

Herrman y Mirsky (Ref.6) utilizaron también el método de Ritz para analizar las vibraciones libres de cascarones cónicos apoyados en diafragmas de cortante. El parámetro de frecuencia lo presentan como una fracción de la frecuencia de un cascarón cilíndrico equivalente (ω/ω_o) y es independiente de $h/\bar{R}$. Señalan que en un cascarón delgado tendrá mayor influencia el ángulo α que en uno más grueso. Mientras tanto Grigolyuk (Ref.6) presenta una tabla de valores de su parámetro de frecuencia, similar al de Keefe $\Omega_3 = \omega(s_2 - s_1)\sqrt{(1-\nu^2)/E}$ para el modo fundamental longitudinal para diferentes valores del ángulo α y relaciones h/R_2. Indica además el número de modo circunferencial para el que ocurre la frecuencia mínima. Señala que para cascarones con poca conicidad la representación mediante cascarones cilíndricos equivalentes es adecuada.

Hyman Garnet y Joseph Kempner en 1964 estudiaron las vibraciones libres axisimétricas de cascarones cónicos (Ref.7) en términos del procedimiento de Rayleigh-Ritz. Señalan que la influencia de la inercia rotacional es pequeña comparada con la influencia de la deformación a la tensión en la vibración de conos cortos. La investigación se restringió a deformaciones axisimétricas y despreciaron el esfuerzo normal transversal. Solo mantuvieron los grados de libertad que permiten la deformación por tensión e inercia rotacio nal. Incluyen un parámetro de completez del cono $\delta = \frac{1}{2}(L/R)\tan\alpha$. Si δ es igual a la unidad indica un cono completo no truncado. La ecuación del número modal que presentan es:

$$\xi_m = m\pi/y_2 \qquad (2.3)$$

donde $y_2 = \ln(x_2/x_1)$ y el parámetro de frecuencia es:

$$\lambda = \rho(1-\nu^2)x_1^2\omega^2/E \qquad (2.4)$$

La ecuación matricial para la obtención de las frecuencias naturales por el análisis de eigenvalores es:

$$[G]\ \{x\} = \{\lambda\}[H]\ \{x\}$$

donde [G] es la matriz de rigideces, [H] es la matriz de inercia y {x} es el vector de coeficientes de los desplazamientos u,w y de la rotación β_x.

Las ecuaciones para la obtención de los 3n por 3m valores de las matrices [G] y [H] son muy extensas y complicadas. Esto, aunado a la necesidad de una subrutina de solución de eigenvalores para matrices no simétricas (ésto para valores de 'm' o 'n' mayores a 5) requiere de un mayor tiempo de proceso que cualquiera de las teorías revisadas en este capítulo e incluso que el que requiere la teoría de Soedel presentada en el capítulo siguiente. Los resultados del análisis de Garnet y Kempner son satisfactorios para conos largos, gruesos o delgados, con L/R mayor o igual a la unidad.

En este sentido se encontró que un parámetro adecuado para clasificar un cilindro como largo o corto es $K = \sqrt{L/R\ \sqrt{t/R}}$ (Ref.15). Si K>2 un cascarón cilíndrico se transforma en una simple viga, independientemente del valor y tipo de la carga.

Los resultados de la teoría de Garnet y Kempner para valores de K<0.5 no convergen y como el cono que pretendemos estudiar es precisamente un cono corto de pared delgada con K=0.33, dicha teoría no es aplicable.

En el congreso de la Asociación Internacional para cascarones y estructuras espaciales de 1985 en Moscú (Ref.14) se presentaron dos trabajos relacionados con la vibración forzada de estructuras. V.A.Smirnov presentó un estudio experimental para placas ortotrópicas mientras Budak Valery lo hizo para cascarones cilíndricos. Ambos obtienen resultados para casos muy particulares de resonancia a bajas frecuencias y formas de vibrar mediante métodos holográficos.

En 1970 David Miller y Franklin D.Hart (Ref.18) realizaron un extenso estudio de densidad de eigenvalores en cascarones cilíndricos. La densidad de eigenvalores es un concepto que surge de un número infinito de frecuencias naturales de una estructura continua, e indica la densidad de frecuencias en torno a la frecuencia de la excitación. Utilizan la solución aproximada de Godzevich para la ecuación de frecuencia.

El caso de vibración libre de una placa simplemente apoyada se encuentra con frecuencia en la literatura. Tomando como referencia el estudio de S.Timoshenko (Ref.1) la deformación de la placa durante la vibración se representa por la serie infinita:

$$w = \sum_m \sum_n \phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (2.5)$$

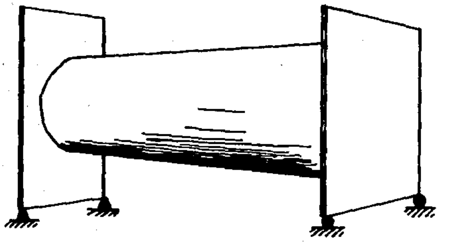
La ecuación de desplazamiento anterior satisface las condiciones de desplazamiento y momento flexionante nulos en las fronteras. Las frecuencias naturales de vibración de la placa están dadas por la siguiente ecuación:

$$p = \pi^2 \sqrt{gD/\gamma h}\,(m^2/a^2 + n^2/b^2) \qquad (2.6)$$

donde 'm' y 'n' son los números modales en las dos direcciones ortogonales de la placa, figura 2.2 .

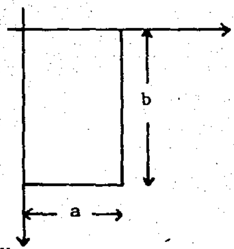
Como se puede observar, sólo existen estudios de vibraciones libres en cascarones cónicos y cilíndricos. La vibración forzada de los mismos sólo se trata en estudios experimentales para corroborar las frecuencias de resonancia y para obtener resultados de esfuerzos o desplazamientos en casos particulares.

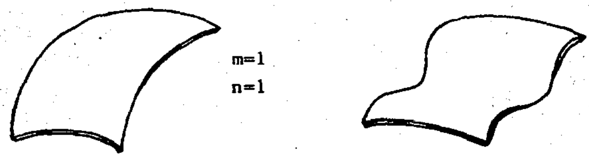
Debido a ésto, en el siguiente capítulo se estudia el caso más general de movimiento de cascarones con las simplificaciones pertinentes para un estudio paramétrico de vibración forzada de placas, como un primer paso, y para la obtención de las frecuencias naturales de un cascarón cónico.



Condición de apoyo

figura 2.1





configuración modal
figura 2.2

CAPITULO III

TEORIA GENERAL PARA UN SOLIDO ELASTICO

3.1 VIBRACIONES FORZADAS EN CASCARONES.

La teoría de vibraciones forzadas para un sólido elástico que se empleará, será la que presentó Werner Soedel en 1981 (Ref.10). - Dicha teoría, en base a sus parámetros, es aplicable a cualquier — geometría, condición de carga o de frontera. En el presente capítulo se seguirá la teoría de Donnell-Mushtari-Vlasov que presenta Soedel, aplicada al problema particular que trata esta tesis.

Una perturbación excitará varias de las formas naturales de vibración de un cascarón. La cantidad o magnitud de la participación de cada una de ellas en la respuesta dinámica general, está determinada por el factor de participación modal $\eta_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}$. Esto es que los modos naturales de un cascarón representan vectores ortogonales que - satisfacen las condiciones de frontera de la estructura. Cualquier comportamiento de la misma puede ser representado en este espacio - vectorial.

Para sistemas continuos, como es el caso de cascarones o placas, el número de grados de libertad es infinito. Esto quiere decir que la solución general será una serie infinita como la siguiente:

$$u_i(\alpha_1,\alpha_2,t) = \eta_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}(t) \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} U_{imnk}(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (3.1)$$

donde i=1,2,3

m y n=1,2,3...

k=k(i)

α_1,α_2 y t son las coordenadas de espacio, figura -- 3.3, y tiempo.

$\eta_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}$ es el factor de participación modal en función del tiempo que será determinado en seguida.

U_{imnk} es una función coordenada que depende de las condiciones de frontera. Para un espacio tridimensional, el equilibrio de un cascarón se puede reducir a tres ecuaciones diferenciales simultáneas en los tres desplazamientos U_{imnk} y por lo tanto se obtendrán tres funciones coordenadas 'i' independientes entre sí para los tres valores característicos o eigenvalores 'k' de cada modo natural de vibración 'mn'.

Por ejemplo, para el caso más simple de una viga en flexión simplemente apoyada, se puede demostrar (Ref.11) que sus funciones coordenadas adoptan la siguiente forma general:

$$\phi(x) = A \text{ sen } Bx$$

donde A y B dependen de la geometría del sistema y de sus frecuencias naturales.

Similarmente, para una placa también en flexión, simplemente apoyada, sus funciones coordenadas serían de la siguiente forma:

$$\phi(x,y) = A \text{ sen } Bx \text{ sen } Cy$$

donde $B=m\pi/a$ y $C=n\pi/b$, siendo 'a' y 'b' las dimensiones de la placa y 'm' y 'n' los números modales a lo largo de los dominios de longitud 'a' y 'b', figura 3.2 .

Las ecuaciones operacionales de movimiento aplicables a cualquier geometría son:

$$L_i(u_1,u_2,u_3) - \lambda\dot{u}_i - \rho h\ddot{u}_i = -q_i \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.2)}$$

donde:

$i=1,2,3$

λ es el factor de amortiguamiento. Se considera que tiene el mismo valor en cualquier dirección.

q_i es la componente de la carga en la dirección 'i'. L_i pueden ser los operadores de Love (Ref.10) que son función de los esfuerzos cortantes y normales, de los radios de curvatura y de los parámetros de Lamé. En el presente trabajo no se estudiarán más a fondo los operadores L_i ni los parámetros de Lamé, se puede encontrar mayor información en la referencia 20.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.1) se tiene:

$$\dot{u}_i = \dot{\eta}_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} U_{imnk}$$

$$\ddot{u}_i = \ddot{\eta}_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} U_{imnk} \qquad \text{(3.3)}$$

Haciendo hincapié en que tanto la función coordenada como el factor de participación modal dependen del eigenvalor 'k' considerado, en lo sucesivo no se anotará más. Además, teniendo en cuenta que los subíndices i,m y n de la función coordenada U_{imnk} son índices libres, mientras que los del factor de participación modal $\eta_{\hat{m}\hat{n}\hat{k}}$ indican tan solo que se encuentra asociado a los valores de los mismos, se entenderá que $\eta_{mn}\Sigma\Sigma U_{imn}$ no es un escalar como solución de un producto punto, sino un tensor de orden tres.

Tomando en cuenta lo anterior y rescribiendo la ecuación (3.2) se tiene que:

$$L_i(\Sigma\Sigma U_{1mn}\eta_{mn}, \Sigma\Sigma U_{2mn}\eta_{mn}, \Sigma\Sigma U_{3mn}\eta_{mn}) - \lambda\Sigma\Sigma U_{imn}\dot{\eta}_{mn} - \rho h\Sigma\Sigma U_{imn}\ddot{\eta}_{mn} = -q_i \qquad \text{(3.4)}$$

Por otra parte, del análisis de eigenvalores se conoce que:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) \doteq U_{imn}(\alpha_1, \alpha_2)e^{j\omega t}$$

entonces, $L_i(U_{1\,mn}, U_{2\,mn}, U_{3\,mn}) = -\rho h\omega_{mn}^2 U_{imn}$ ______(3.5)

Sustituyendo (3.5) en (3.4),

$$\Sigma\Sigma\rho h\omega_{mn}^2 U_{imn}\eta_{mn} + \Sigma\Sigma\lambda U_{imn}\dot{\eta}_{mn} + \Sigma\Sigma\ hU_{imn}\ddot{\eta}_{mn} = q_i \qquad (3.6)$$

Realizando la sumatoria a lo largo del dominio infinito $M\to\infty$ y $N\to\infty$.

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} U_{imn}(\ \rho h\ddot{\eta}_{mn} + \lambda\dot{\eta}_{mn} + \rho h\omega_{mn}^2\eta_{mn}\ ) = q_i \qquad (3.7)$$

Lo que en notación matricial se puede indicar como:

$$[U_{imn}]\{\psi_{mn}\} = \{q_i\} \qquad (3.8)$$

donde $\psi_{mn} = \rho h\ddot{\eta}_{mn} + \lambda\dot{\eta}_{mn} + \rho h\omega_{mn}^2\eta_{mn}$

Premultiplicando ambos términos de la ecuación (3.8) por la matriz $[U_{imn}]$ y tomando en cuenta que cada vector U_{imn} es perpendicular a $U_{\underline{imn}}$ si $i\neq\underline{i}$ y $mn\neq\underline{mn}$, se obtiene:

$$(U_{1mn}^2+U_{2mn}^2+U_{3mn}^2)\ \psi_{mn} = U_{1mn}q_1 + U_{2mn}q_2 + U_{3mn}q_3 \qquad (3.9)$$

Integrando punto a punto a lo largo de toda la superficie,

$$\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1} (U_{1mn}^2+U_{2mn}^2+U_{3mn}^2)\psi_{mn}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2 = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}(U_{1mn}q_1+U_{2mn}q_2+U_{3mn}q_3)\ A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2$$

y despejando ψ_{mn} se llega a:

$$\psi_{mn} = \frac{\int\int\ (U_{1mn}q_1+U_{2mn}q_2+U_{3mn}q_3)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2}{\int\int\ (U_{1mn}^2+U_{2mn}^2+U_{3mn}^2)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2} \qquad (3.10)$$

Finalmente:

$$\ddot{\eta}_{mn} + \frac{\lambda}{\rho h}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = F_{mn}(\alpha_1,\alpha_2,t) \qquad (3.11)$$

$$F_{mn}(\alpha_1,\alpha_2,t) = \frac{1}{\rho h N_{mn}}\int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}(U_{1mn}q_1+U_{2mn}q_2+U_{3mn}q_3)A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2 \qquad (3.12)$$

$$N_{mn} = \int_{\alpha_2}\int_{\alpha_1}(U_{1mn}^2+U_{2mn}^2+U_{3mn}^2)A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2 \qquad (3.13)$$

La ecuación (3.11) puede ser escrita en términos del coeficiente de amortiguamiento modal ζ_{mn},

$$\zeta_{mn} = \frac{\lambda}{2\rho h\omega_{mn}} \qquad (3.14)$$

La expresión que involucra al factor de participación modal es:

$$F_{mn}(\alpha_1,\alpha_2,t) = \ddot{\eta}_{mn} + 2\zeta_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} \qquad (3.15)$$

donde ω_{mn} es la frecuencia natural de vibración del sistema para los modos naturales 'm' y 'n'.

Si la carga varía armónicamente con el tiempo y la parte transitoria es despreciable, su función será de la forma:

$$F_{mn}(\alpha_1,\alpha_2,t) = F_{mn}^*(\alpha_1,\alpha_2)\,e^{i(\omega t-\phi_{mn})}$$

$$= F_{mn}^*(\alpha_1,\alpha_2)[\cos(\omega t-\phi_{mn}) + i\,\mathrm{sen}(\omega t-\phi_{mn})]$$

y si se considera que la carga de excitación del sistema es simétrica en el tiempo, sólo se toma en cuenta la parte real de la expresión anterior, es decir:

$$F_{mn}^*(\alpha_1,\alpha_2)\cos(\omega t-\phi_{mn})$$

donde el ángulo de fase ϕ_{mn} se obtiene de la siguiente expresión, -(Ref.10):

$$\phi_{mn} = \text{arc tan} \frac{2\zeta_{mn}(\omega/\omega_{mn})}{1-(\omega/\omega_{mn})^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.16)}$$

siendo ω la frecuencia de la excitación.

Se puede demostrar que la magnitud de la respuesta es:

$$\Lambda_{mn} = \frac{F^{*}_{mn}}{\omega^2_{mn}\sqrt{[1-(\omega/\omega_{mn})^2]^2 + 4\zeta^2_{mn}(\omega/\omega_{mn})^2}} \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.17)}$$

con lo que el factor de participación modal es:

$$\eta_{mn} = \Lambda_{mn}\cos(\omega t-\phi_{mn}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.18a)}$$

por lo que los desplazamientos serán calculados como sigue:

$$u_i = U_{imn}\Lambda_{mn}\cos(\omega t-\phi_{mn}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.18b)}$$

3.2 VIBRACIONES LIBRES.

3.2.1 Cálculo de frecuencias naturales y funciones coordenadas en placas.

A partir de las tres ecuaciones operacionales de movimiento (3.2) se obtiene la ecuación de vibraciones libres de una placa. Se tomarán en cuenta, por lo tanto, sólo las fuerzas verticales de inercia pués se supone que el desplazamiento transversal 'w' del sistema es el dominante. Se puede demostrar que para un amortiguamiento y fuerzas externas nulas, las ecuaciones (3.2) se reducen a la siguiente expresión:

$$\nabla^4 u_z + \frac{\rho h}{D}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(3.19)}$$

donde u_z es la deflexión.

Para una placa simplemente apoyada $u_z = u_o(x,y)$ y $\partial u_z/\partial t = v_o(x,y)$, siendo u_o y v_o las condiciones iniciales de deflexión y velocidad.

Ahora, de la misma forma en que la ecuación (3.5) satisface a (3.4), se sustituye (3.19) en (3.20). Simplificando se obtiene:

$$(m\pi/a)^4 + 2(mn\pi^2/ab)^2 + (n\pi/b)^4 - \rho h \omega_{mn}^2/D = 0$$

y de aquí que las frecuencias naturales de oscilación de la placa son:

$$\omega_{mn} = (\pi/ab)^2 \sqrt{D/\rho h}\,(m^2b^2 + n^2a^2) \qquad \text{(3.20)}$$

V.G.Rekach (Ref.19) investiga las oscilaciones propias de una placa rectangular (a×b) con sus cuatro lados articulados, figura 3.3. La función coordenada que satisface dichas condiciones de frontera es:

$$U_{mn} = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(3.21)}$$

Para otro tipo de apoyos, las funciones coordenadas serán más complicadas. Por ejemplo para una placa con tres bordes simplemente apoyados y el cuarto, en x=a, libre, su función coordenada será -- (Ref.11):

$$U_{mn} = A(\operatorname{sen}\alpha x + \operatorname{senh}\alpha x)(\operatorname{sen}\beta y)$$

3.2.2 Vibraciones libres en cilindros y conos ortotrópicos.

El estudio de vibraciones libres en sistemas complejos como cilindros, conos, esferas, etc. no es tan sencillo y no se tratará en detalle en esta tesis.

Debido a la necesidad de obtener las frecuencias naturales para la tubería de Chicoasén se utilizarán las expresiones disponibles en la literatura.

Werner Soedel obtiene (Ref.10) la siguiente expresión para el cálculo de las frecuencias naturales de oscilación de un cascarón circular cilíndrico ortotrópico, para aquellos modos naturales en los que predomina la deformación transversal.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left(D_{11}(m\pi/L)^4 + 2(D_{12}+2D_{33})(n/a)^2(m\pi/L)^2 + D_{22}(n/a)^4 + \frac{(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)(m\pi/L)^4}{a^2\left(A_{11}(m\pi/L)^4 + A_{22}(n/a)^4 + \frac{(A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2A_{12}A_{33})}{A_{33}}(n/a)^2(m\pi/L)^2\right)}\right) \qquad (3.22)$$

donde ρ es la densidad

h es el espesor

m es el número modal natural longitudinal

n es el número modal natural circunferencial

L es la longitud meridional

a es el radio de curvatura

A_{ij} son los coeficientes de la rigidez a esfuerzos normales.

D_{ij} son los coeficientes de la rigidez a la flexión, es decir que:

$$M_{xx} = D_{11}K_{xx} + D_{12}K_{yy}$$
$$M_{yy} = D_{12}K_{xx} + D_{22}K_{yy}$$
$$M_{xy} = D_{33}K_{xy}$$

$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_{xx} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta}$$
$$N_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{xx} = A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}$$
$$N_{x\theta} = A_{33}\varepsilon_{x\theta}$$

Wilhelm Flügge (Ref.11) realizó un estudio para cascarones cilíndricos ortotrópicos con anillos y atiezadores. Presenta las siguientes expresiones de elasticidad para rigideces:

$$N_\phi = D_\phi(\dot{v}+w)/a + D_\nu\acute{u}/a - S_\phi\ddot{w}/a^2$$
$$N_x = D_x\acute{u}/a + D_\nu(\dot{v}+w)/a - S_x\acute{\acute{w}}/a^2$$
$$N_{\phi x} = D_{\phi x}(\dot{u}+\acute{v})/a$$

$$M_\phi = K_\phi\ddot{w}/a^2 + K_\nu\acute{\acute{w}}/a^2 - S_\phi(\dot{v}+w)/a$$
$$M_x = K_x\acute{\acute{w}}/a^2 + K_\nu\ddot{w}/a^2 - S_x\acute{u}/a$$
$$M_{\phi x} = K_{\phi x}\dot{\acute{w}}/a^2$$

Los términos de las rigideces de momentos S_ϕ y S_x están en función de las distancias centroidales c_ϕ y c_x, las cuales son nulas si la superficie media se considera que está localizada en $R= a+ c_x$, figura 3.4 .

Entonces corresponden las ecuaciones de Flügge y Soedel de la siguiente forma:

$$D_{11}= K_x= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E(I_x+A_xc_x^2)}{b_2} \qquad (3.23)$$

$$D_{22}= K_\phi= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E(I_\phi+A_\phi c_\phi^2)}{b_1} \qquad (3.24)$$

$$D_{12}= K_\nu= \frac{Et^3}{12(i-\nu^2)} \qquad (3.25)$$

$$D_{33}= K_{\phi x}= \frac{Et^3}{12(1+\nu)} + \frac{GJ_x}{b_2} \qquad (3.26)$$

$$A_{11}= D_x= \frac{Et}{1-\nu^2} + \frac{EA_x}{b_2} \qquad (3.27)$$

$$A_{22}= D_\phi= \frac{Et}{1-\nu^2} + \frac{EA_\phi}{b_1} \qquad (3.28)$$

$$A_{12}= D_\nu= \frac{Et}{(1-\nu^2)} \qquad (3.29)$$

$$A_{33}= D_{\phi x}= \frac{Et}{2(1+\nu)} \qquad (3.30)$$

donde: E: módulo de elasticidad

ν: módulo de Poisson

t: espesor

A ,A_x: área transversal de anillos y atiezadores .

b_1,b_2: separación entre anillos y atiezadores.

c_ϕ,c_x: distancia de la superficie media al centroide de anillos y atiezadores.

G : coeficiente de Lamé, $G=E/2(1+\nu)$.

J_ϕ, J_x: momento polar de inercia de anillos y atiezadores.

Todos los parámetros anteriores están referidos a la figura 3.4.

Modificaciones al análisis anterior.

Debido a las grandes vibraciones que se registraron en el desfogue de las tuberías de Chicoasén, se tomó la decisión en campo de recubrir las tuberías con una capa de concreto. Para revisar el comportamiento de este nuevo sistema y analizar las frecuencias naturales del cascarón cónico rigidizado con atiezadores de acero y un recubrimiento de concreto es necesario modificar algunos de los términos que intervienen en la ecuación (3.22) en lo referente a la masa y a la rigidez del sistema.

La densidad por unidad de superficie será la que se obtenga de sumar las rigideces del contreto y del acero como se indica a continuación:

$$\rho t + \rho_c t_c$$

donde el subíndice 'c' indica propiedades del concreto, figura 3.4.

Los términos de la rigidez se modificarán en las ecuaciones:

(3.23c) $$D_{11c} = D_{11} + E_c(I_{xc}+A_{xc}c_{xc}^2)/b_2$$

(3.24c) $$D_{22c} = D_{22} + E_c(I_{\phi c}+A_c c_{\phi c}^2)/b_1$$

(3.27c) $$A_{11c} = A_{11} + E_c A_{xc}/b_2$$

(3.28c) $$A_{22c} = A_{22} + E_c A_{\phi c}/b_1$$

Como se verá más adelante, el uso de materiales como el concreto aumenta excesivamente la masa y aporta una contribución muy pequeña de rigidez.

En vista de que esta medida no dió los resultados esperados y dado que es importante aumentar la rigidez del sistema con el mínimo aumento de la masa, se proponen atiezadores de acero de sección 'T', sin recubrimiento de concreto. Las ecuaciones (3.23) a (3.30) no se modifican. Los resultados se presentan y analizan en el siguiente capítulo.

Debido a la falta de información del comportamiento de cascarones en vibración forzada, se analiza a fondo el caso más simple: vibración forzada de una placa rectangular simplemente apoyada. Se obtiene de esta forma una cota superior al comportamiento real del sistema.

3.3 Aplicación a vibración forzada de placas.

En este ejemplo se realizará el análisis de una placa simplemente apoyada y sujeta a carga unitaria uniformemente distribuida y de variación armónica en el tiempo.

Se puede demostrar (ref.10) que para sistemas coordenados cartesianos rectilíneos, como es el caso de placas, $A_1=A_2=1$, $d\alpha_1=dx$ y $d\alpha_2=dy$.

Debido a que la carga se encuentra uniformemente distribuida en la superficie de la placa, $q_1=q_2=0$, mientras que $q_3=1$, figura 3.3 .

Tomando la siguiente función coordenada para una placa simplemente apoyada en sus bordes,

$$U_{mn}= \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(3.31)}$$

y resolviendo la integral de la ecuación (3.13),

$$N_{mn} = \int_y \int_x \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy$$

$$N_{mn} = ab/(4m^2n^2)[m\pi x/a - \operatorname{sen}(m\pi x/a)\cos(n\pi x/a)]_{x=0}^{a} \, [n\pi y/b -$$

$$- \operatorname{sen}(n\pi y/b)\cos(n\pi y/b)]_{y=0}^{b}$$

$$N_{mn} = (ab)/4$$

Resolviendo ahora la ecuación (3.12),

$$F^*_{mn} = \frac{1}{h(ab/4)} \iint \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy$$

$$F^*_{mn} = 4/(\rho hab)[\; ab/mn\pi^2 \cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)]_{x=0}^{a}\;]_{y=0}^{b}$$

para 'm' y 'n' impares $\quad F^*_{mn} = 16/(\rho h\pi^2 mn)$

para 'm' ó 'n' pares $\quad F^*_{mn} = 0$

Para placas en las que las oscilaciones transversales son dominantes, se propone entonces la siguiente secuencia de cálculo para la obtención del desplazamiento de una placa simplemente apoyada de dimensiones (aXb) sujeta a vibración forzada por una carga unitaria uniformemente distribuida sobre su superficie en forma oscilatoria para los modos naturales 'm' y 'n' impares:

1 Rigidez a la flexión

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.32)}$$

2 Frecuencias naturales.

$$\omega_{mn} = (\pi/ab)^2 \sqrt{D/\rho h}\ (m^2b^2+n^2a^2) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.33)}$$

3 Matriz de carga.

$$F^*_{mn} = 16/(\pi^2 mn\ \rho h) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.34)}$$

4 Coeficiente de amortiguamiento modal.

$$\zeta_{mn} = \lambda\ /(2\ \rho h\ \omega_{mn}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.35)}$$

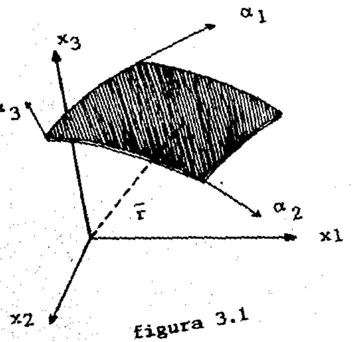
5 Magnitud de la respuesta, ecuación (3.17).
6 Angulo de fase, ecuación (3.16).
7 Factor de participación modal, ecuación (3.18).
8 Desplazamiento.

$$\delta_{mn} = \eta_{mn}\ \text{sen}(m\ \pi x/a)\ \text{sen}(n\ \pi y/b) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.36)}$$

9 Desplazamiento total de la placa en el punto de coordenandas (x_o, y_o) para el tiempo t_o.

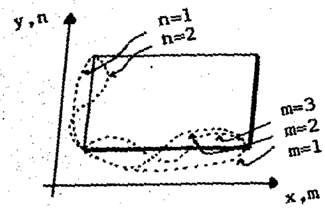
$$\delta = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \delta_{mn}(x_o, y_o, t_o) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3.37)}$$

La secuencia anterior es fácil de programar. Más adelante se darán algunas modificaciones para optimizar la obtención de los datos significativos en el análisis del comportamiento dinámico de placas.



sistema coordenado tridimensional.

figura 3.1



configuración modal.

figura 3.2

sistema de cargas.

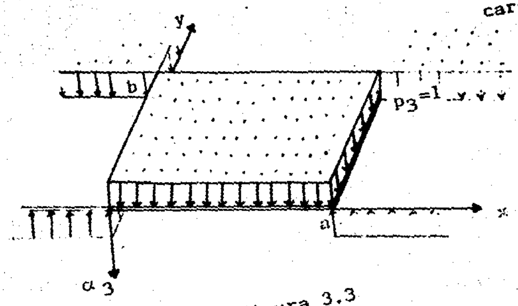
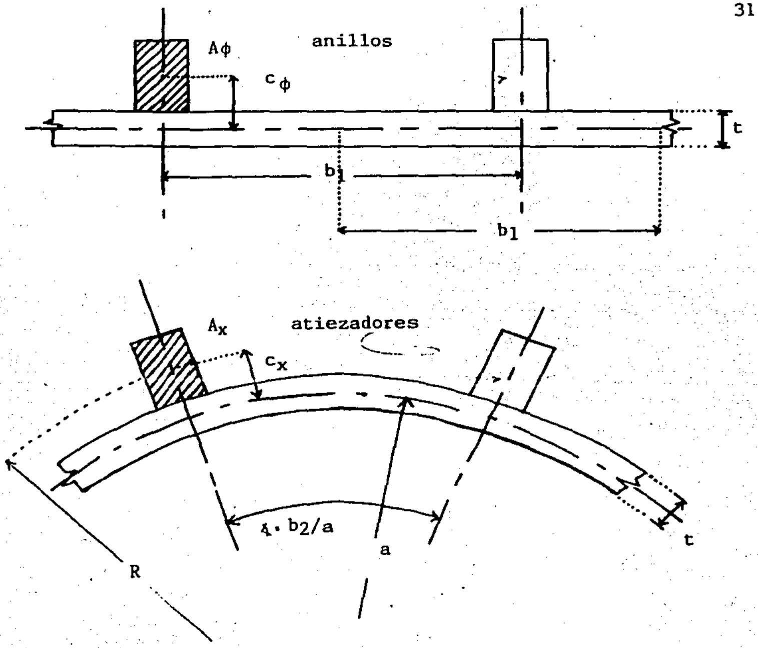


figura 3.3



Parámetros geométricos del cilindro rigidizado

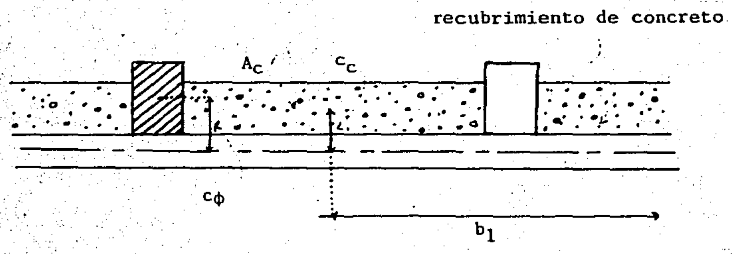


figura 3.4

CAPITULO IV

ANALISIS NUMERICO

4.1 FRECUENCIAS NATURALES EN CONOS Y CILINDROS.

Para obtener las frecuencias naturales de vibración del cascarón cónico en estudio, se utilizó la teoría de Donnell-Mushtari -Vlasov presentada en el capítulo anterior (Ref.10) para un cascarón cilíndrico. De acuerdo con resultados analíticos de esta teoría y de los resultados experimentales que presenta Seide (Ref.8) el "cilindro equivalente" es aplicable a conos cuyo ángulo de semivértice sea pequeño. Por ejemplo, para un cono cuyo radio medio $\bar{R}$=50", su longitud L=100" y su espesor h=5", las frecuencias naturales para ángulos de 0° a 20°, para m=1 y n=1 en conos y cilindros son las siguientes:

α	cono [1]	cilin. [2]	$\frac{\%\ \text{cono}}{\text{cilin}}$
0°	451 cps	451 cps	100%
5	450	451	99
10	445	451	98
15	437	451	96
20	425	451	94

Y si se tiene en cuenta que para cualquier valor de α entre $-\pi/6$ y $+\pi/6=15°$, el error en aproximar sen$\alpha \approx \alpha$ es menor al 2.4%, la teoría del cilíndro equivalente es aplicable a conos cuyo ángulo α sea menor a 17° aproximadamente. Por lo tanto es perfectamente válida su aplicación al estudio del cascarón cónico de Chicoasén, aún cuando éste es un cascarón ortotrópico.

A continuación se presentan sus resultados como un caso particular de aplicación.

[1] ec(2.2), [2] ec(3.22)

4.2 FRECUENCIAS NATURALES DEL TUBO DE DESFOGUE DE LA P.H. DE CHICOASEN.

Las frecuencias naturales del cascarón de diseño, figura 1.1, se presentan en la tabla 4.1 para los primeros modos naturales de vibración. La frecuencia natural mínima es de 113.7 cps, lo que equivale a 713 rad/seg y ocurre para m,n=1,3 , es decir para el primer modo natural longitudinal y el tercer modo natural circunferencial, figura 4.1.

Como primer propuesta de refuerzo a los atiezadores, se propone aumentar al doble el espesor de las costillas de acero que rigidizan al cono, tabla 4.2. La menor frecuencia natural ocurre para m,n=1,2 y es de 126.9 cps. Sólo aumenta un 12%.

Se sabe que para áreas iguales una sección 'T' es más eficiente que una sección rectangular al ofrecer un mayor momento de inercia con un aumento bajo del área transversal y por lo tanto de masa. Es por esto que como segunda medida se proponen anillos y atiezadores de acero de sección 'T'. En la tabla 4.3 se presentan las frecuencias naturales del cono en estudio, rigidizado con anillos y atiezadores de sección 'T', formados por dos costillas de acero de 6" por $\frac{3}{8}$", figura 4.2. Es decir que es la misma cantidad de material que la que se utilizó en los resultados de la tabla 4.2. La menor frecuencia natural es de 141.9 cps para m,n=1,2 y representa un incremento del 25% a la menor frecuencia del diseño original.

En realidad la estructura que ofrecería un mejor comportamiento dinámico, sería la conformada por dos cascarones concéntricos - ensamblados por costillas de acero, figura 4.2. Las frecuencias naturales de este sistema se presentan en la tabla 4.4 para 2 cascarones de $\frac{3}{8}$" de espesor, ensamblados con el diseño original de la - retícula de atiezadores. La menor frecuencia es de 180.4 cps= 1133 rad/seg, 59% mayor que la del diseño original.

Las posibilidades de sistemas de rigidización con costillas y cascarones de acero son múltiples. En las tablas 4.5 y 4.6 se presentan los resultados para otros dos casos.

A fin de investigar el comportamiento del tubo de desfogue recubierto con concreto se presentan en la tabla 4.7 las frecuencias naturales de oscilación del cascarón cónico de diseño atiezado con costillas de acero y revestido con una capa de concreto de 10 pulgadas. Como se puede observar, la decisión que se tomó en campo no era la adecuada, ya que el concreto es un material que ofrece poco incremento de rigidez en relación con el aumento de masa. La menor frecuencia natural es de 86.96 cps, 23% menor a la menor frecuencia del diseño original, sin revestimiento de concreto. En la tabla 4.8 se muestran las frecuencias naturales de un cascarón cónico de concreto de 10" de espesor, con la finalidad de comparar los resultados con los anteriores y demostrar que la capa de concreto domina el comportamiento general del cascarón de acero rigidizado.

TABLA 4.1
costillas de 6" ×3/8",
atiezadores a cada 52", anillos a cada 16.5".

m \ n	1	2	3
1	218.7559	132.3837	113.6984
2	284.9618	237.7578	214.4085

TABLA 4.2
costillas de 6" ×3/4",
atiezadores a cada 52", anillos a cada 16.5".

m \ n	1	2	3
1	204.7318	126.8931	127.6482
2	282.1900	235.7716	229.6879

TABLA 4.3
sección 'T' con almas y patines de 6" ×3/8",
atiezadores a cada 52", anillos a cada 16.5".

m \ n	1	2	3
1	207.1270	141.9102	171.1868
2	295.9580	267.1554	291.8823

TABLA 4.4
sección 'T' con almas de 6" ×3/8" y patines de 3/8" de espesor,
atiezadores de 52" a cada 52", anillos de 16.5" a cada 16.5".

m \ n	1	2	3
1	202.1304	180.4107	254.2468
2	370.5074	388.5953	474.5010

TABLA 4.5
sección 'T' con almas de 12" ×3/8" y patines de 3/8" de espesor, atiezadores de 52" a cada 52", anillos de 16.5" a cada 16.5".

m \ n	1	2	3
1	235.1289	294.1552	463.1685
2	549.5844	655.3516	852.5215

TABLA 4.6
sección 'T' con almas de 12" ×3/8" y patines de 3/16" de espesor, atiezadores de 52" a cada 52", anillos de 16.5"a cada 16.5".

m \ n	1	2	3
1	224.8095	243.3613	372.7817
2	457.9296	526.8234	676.9608

TABLA 4.7
costillas de 6" ×3/8",
atiezadores a cada 52", anillos a cada 16.5", 10" recubrimiento de concreto.

m \ n	1	2	3
1	124.8363	86.9481	112.3990
2	231.3347	199.4590	202.9556

TABLA 4.8
cascarón de concreto de 10" de espesor.

m \ n	1	2	3	4
1	101.9205	64.3115	52.0776	60.0327
2	143.3736	124.0995	112.6890	113.6999

El estudio del comportamiento de un sistema en vibración forzada va más allá de la simple obtención de sus frecuencias naturales. Debido a que en la literatura no existen estudios que proporcionen parámetros para diseño de tubos y conos en vibración forzada; se tomó la decisión de comenzar esa investigación. Se inicia con el caso más sencillo: una placa rectangular simplemente apoyada.

4.3 VIBRACION FORZADA EN PLACAS RECTANGULARES.

Las condiciones de frontera reales de las placas en vibración, no son sencillas de establecer por lo que se propone estudiar una cota superior al suponerlas simplemente apoyadas en sus bordes.

Una placa como cuerpo que posee masa y rigidez es capaz de vibrar. Cuando esta vibración tiene lugar bajo una excitación oscilatoria, la placa es obligada a vibrar a la frecuencia de excitación.

La respuesta de la placa se mide con el máximo desplazamiento que presenta durante un ciclo de carga cualquiera. Este desplazamiento máximo se encuentra en el centro geométrico de una placa rectangular, homogénea, isótropa y simplemente apoyada en sus bordes. Por lo tanto, las coordenadas (x,y), figura 2.2, para las cuales se analiza el desplazamiento son (a/2,b/2).

El máximo desplazamiento al que se hizo referencia se obtiene en forma analítica de la secuencia de cálculo presentada en el capítulo III, ecuaciones (3.20) a (3.25). Por ejemplo, para una placa de dimensiones a=50", b=16" y espesor h= $\frac{3}{8}$", bajo la excitación de una carga unitaria aplicada con una frecuencia de 9 rad/seg y considerando un 10% del amortiguamiento crítico, los valores obtenidos son:

ec(3.20)	D= 140045.5 lb·in
ec(3.21)	ω_{11}= 958.67 rad/seg
ec(3.22)	F_{11}= 5889.69
ec(3.23)	ζ_{11}= 0.1894

ec(3.17)	Λ_{11}= 0.0064089
ec(3.16)	ϕ_{11}= 0.00356 rad
ec(3.18)	η_{11}=-0.005829 para t=1.0 seg
ec(3.24)	δ_{11}=-0.005829 para t=1.0 seg

El valor máximo del desplazamiento a lo largo del tiempo es – δ_{11}= 0.0064 y ocurre para t=0.0 y 0.7 seg, es decir que su periodo es de 0.7 seg y su frecuencia de 2π/0.7=9 rad/seg. Este último valor verifica lo dicho en el primer párrafo de este inciso.

La figura 4.4 muestra los resultados de un análisis similar – al anterior con gráficas de desplazamiento en el tiempo, de la placa que forma parte del cascarón cónico en estudio, figura 1.1, cuyas dimensiones son 16.5×52×$\frac{3}{8}$". Se considera que existe un amortiguamiento del 10% del crítico y que la placa se encuentra bajo la excitación dinámica, a diferentes frecuencias, de una carga uniformemente distribuida en su superficie. Se observa claramente un aumento en la respuesta de la placa a medida que la frecuencia de la excitación se asemeja a la primera frecuencia natural ω_{11}= 900.047 — rad/seg. Cabe hacer notar que la frecuencia a la que ocurre el mayor de los desplazamientos no siempre coincide con la frecuencia – fundamental. En algunos casos, y en específico para placas delgadas con amortiguamiento mayor al 10% del crítico se presenta un corrimiento hacia una frecuencia un poco menor como es el caso que – se presenta en la misma figura 4.4.

Si para diferentes frecuencias encontramos el valor máximo de la respuesta de una placa en particular, no importando en que instante ocurre, contaremos con las coordenadas de un punto en una — gráfica que muestre la respuesta máxima contra la frecuencia de excitación correspondiente, es decir, el espectro de respuesta de — desplazamientos de la placa.(Ref.16)

Al aumentar el espesor de la placa los valores de sus frecuencias naturales aumentan, por lo que el valor máximo del espectro de respuesta se corre hacia frecuencias mayores, como se muestra en la figura 4.5. Otro parámetro importante en la respuesta del sistema - es el valor de la fracción del amortiguamiento crítico. El amorti-- guamiento del sistema abate la respuesta desde infinito para 0.0% a 0.1798" para 1% y 0.018" para 10%, figuras 4.5 a 4.12.

Las cotas de desplazamiento estático que se muestran en las -- mismas figuras 4.5 a 4.12 son las que propone S.Timoshenko (Ref.17) para placas simplemente apoyadas y cargadas uniformemente. Se observa que los valores de Timoshenko son menores a los obtenidos con el análisis propuesto en esta tesis. Para éste último se realizó la sumatoria de los desplazamientos de todos los modos que intervienen - en la vibración de la placa. Se encontró que para 'm' y 'n' de 1 a 7 se logra la aproximación de cuatro cifras significativas.

En la figura 4.13 se resumen en doce puntos los máximos desplazamientos de las diferentes placas de las figuras 4.5 a 4.12 y las frecuencias a las que ocurren, en una envolvente de los espectros - de respuesta. Estas envolventes sólo dependen del valor del coefi-- ciente de amortiguamiento, es decir, que una misma curva representa todos los valores de diferentes placas con el mismo amortiguamiento.

Estas envolventes trazadas en escala doble logarítmica son rectas de pendiente unitaria negativa, paralelas entre sí y que guar-- dan una relación logarítmica con el coeficiente de amortiguamiento, figura 4.14a. Esta gráfica representa en realidad un ESPECTRO DE ESPECTROS.

Se encontró que los parámetros adimensionales más adecuados para trazar las gráficas de las figuras 4.14a y 4.14b son: a/b, h/b y $\omega_o b$.

La figura 4.14b representa la relación que existe entre a/b y $\omega_o b$, es decir, la relación de los parámetros geométricos con la frecuencia a la que ocurre el desplazamiento máximo. Esta relación está dada por curvas que son función de h/b y paralelas entre sí en forma también logarítmica.

De las dos gráficas 4.14 se puede obtener una gran cantidad de información por lo que resulta interesante encontrar la expresión matemática que las gobierna.

Una recta en escala doble logarítmica sigue siendo una recta por lo que sus ecuaciones paramétrica y punto-pendiente son sencillas de obtener.

La relación entre $\omega_o b$ y δ_{max}/b es una recta cuya pendiente es: $m=[Ln(\delta_{max}/b)_1 - Ln(\delta_{max}/b)_2]\div[Ln(\omega_o b)_1 - Ln(\omega_o b)_2]$ y es igual a -1.

Utilizando la ecuación punto-pendiente;

$$Ln(\delta_{max}/b)= m\ Ln(\omega_o b)+ B \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.1)$$

y para puntos en diferentes rectas se tiene que:

$B=2.785$ para $\lambda=0.1$

$B=2.078$ para $\lambda=0.2$

$B=1.658$ para $\lambda=0.3$

esta variación de B con respecto a λ en escala normal-logarítmica es una recta de pendiente $m'=[Ln(\lambda_1)- Ln(\lambda_2)]\div(B_1-B_2)=-1$. Su ecuación punto-pendiente es entonces:

$$Ln(\lambda)= -B+ C$$

donde $C=0.47$ y por lo tanto,

$$B= 0.47- Ln(\lambda) \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.2)$$

Sustituyendo (4.2) en (4.1),

$$Ln(\delta_{max}/b)= -Ln(\omega_o b)+ [0.47- Ln(\lambda)],$$

de donde:

$$\delta_{max}/b = 1.6/\ \omega_o b \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.3)$$

Por otra parte la relación entre h/b y $\omega_o b$ es una recta en escala doble logarítmica de pendiente +1, con lo que:

$$\log(h/b)= \log(\omega_o b)+ F \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.4)$$

La constante F se tabula a continuación para diferentes valores de (a/b).

a/b	F
1	-6.074
2	-5.870
3	-5.819
4	-5.800
5	-5.788
6	-5.784
7	-5.782
10	-5.777

La expresión matemática que los representa es:

$$(a/b) = [-F-5.777]^{-1/e} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.5)$$

de donde

$$F = -(a/b)^{-e}-5.777 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.4) y despejando,

$$\omega_o b = (h/b)\cdot 10^{(a/b)^{-e}+5.777} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.7)$$

Finalmente, sustituyendo (4.7) en (4.3), la ecuación que relaciona al máximo desplazamiento de una placa simplemente apoyada sometida a vibración forzada por una carga uniforme, con sus parámetros geométricos es:

$$(\delta_{max}/b) = \frac{1.6}{(h/b)\lambda\cdot 10^{[(a/b)^{-e}+5.777]}} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4.8)$$

donde e=2.71282

La expresión anterior define el desplazamiento máximo en vibración forzada de cualquier placa rectangular simplemente apoyada en sus bordes, en función de los parámetros geométricoa (a/b) y (h/b) y del coeficiente de amortiguamiento λ. Incluye los resultados de otros autores y es general para el modelo empleado.

Analizando la confiabilidad de los resultados, se encontró que es práctica común considerar al desplazamiento dinámico máximo igual al desplazamiento estático amplificado $1/2\lambda$ veces, cuando λ es grande (Ref.21).

La fórmula que propone Timoshenko (Ref.1) para desplazamiento bajo carga estática de placas rectangulares simplemente apoyadas, se afectó por el factor $1/2\lambda$ y se dividió entre la longitud b. Esto último con el fin de observar su comportamiento en la gráfica de la figura 4.15. La ecuación resultante es:

$$\delta^*_{max}/b \simeq (1/2\lambda)(\delta_{est}/b) = 6(1-\nu^2)\;[\lambda\pi^4 Eh^3 b(1/a^2+1/b^2)^2] \quad \text{\_\_\_\_\_}(4.9)$$

En la tabla 4.9 se dán los resultados de desplazamiento máximo de las ecuaciones (4.8) y (4.0) para diferentes placas.

Los resultados de la ecuación (4.9), suponiendo que la frecuencia a la que ocurre el máximo desplazamiento está cercana a la primera frecuencia natural, se grafica sobre los resultados generales de la ecuación (4.8) en la figura 4.15. Los ▲ representan los valores para λ=0.3, para diferentes relaciones (h/b). Se tomó sólo una relación (a/b)=10 y las relaciones (h/b)=0.006,0.01,0.02,0.03 y 0.04 con amortiguamientos de 0.3,0.1,0.07,0.05,0.03 y 0.01. Estos valores se han unido con rectas para cada valor del coeficiente de amortiguamiento.

Se observa que la ecuación (4.9) representa un espacio de curvas que cortan al espacio de rectas de la teoría que presenta esta tesis. Es decir que las soluciones de ambas sólo coinciden en un punto para cada valor de λ.

Estos valores para los que coinciden las dos teorías se representan por la linea punteada en la misma figura 4.15. De ellos mismos se concluye que la ecuación (4.9) sólo es aplicable cuando $\omega_o b$ es aproximadamente igual a 16000.

Tal vez en algunos casos en la práctica se ha coincidido al estar cerca de ese valor y los resultados obtenidos han sido más o menos satisfactorios. Sin embargo se debe tener cuidado al aplicarla lejos de ese valor. Si $\omega_o b$ es menor a 16000 el resultado real se estará sobrestimando, mientras que si es mayor, el resultado estará subestimado, con las consecuencias de cada uno de estos dos casos.

Se puede concluir entonces que la fórmula (4.9) no sólo es aplicable cuando el coeficiente de amortiguamiento es grande, sino para cualquier valor de éste siempre y cuando el valor de la frecuencia a la que ocurre el máximo desplazamiento multiplicado por la longitud b, se encuentre en torno al valor de 16000.

TABLA 4.9

a	100	100	100	100	100
b	10	10	10	10	10
h	0.06	0.1	0.1	0.2	0.1
λ	0.3	0.3	0.1	0.1	0.07
ω_o	360	600	600	1200	600
ec 4.8	0.001478	0.000887	0.002662	0.001331	0.003803
ec 4.9	0.029240	0.006316	0.018940	0.002368	0.027068
%error	1977	612	612	78	612
fig.4.15	▲ 0	▲ 1	■ 1	■ 2	● 1

a	100	50	100	100	100	100
b	10	5	10	10	10	10
h	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2	0.3
λ	0.07	0.07	0.07	0.05	0.05	0.05
ω_o	1200	1200	1800	600	1200	1800
ec 4.8	0.001901	0.001901	0.001268	0.005324	0.002662	0.001775
ec 4.9	0.003383	0.003383	0.001003	0.037895	0.004737	0.001404
%error	78	78	-21	612	78	-21
fig.4.15	● 2	● 2	● 3	□ 1	□ 2	□ 3

a	100	100	100	100	100
b	10	10	10	10	10
h	0.2	0.3	0.2	0.3	0.4
λ	0.03	0.03	0.01	0.01	0.01
ω_o	1200	1800	1200	1800	2400
ec 4.8	0.004437	0.002958	0.013310	0.008873	0.006655
ec 4.9	0.007895	0.002339	0.023684	0.007018	0.002961
%error	78	-21	78	-21	-56
fig.4.15	✱ 2	✱ 3	○ 2	○ 3	○ 4

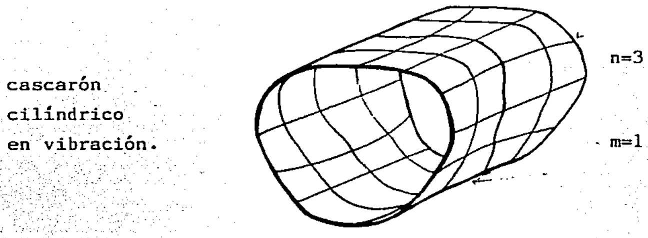


figura 4.1

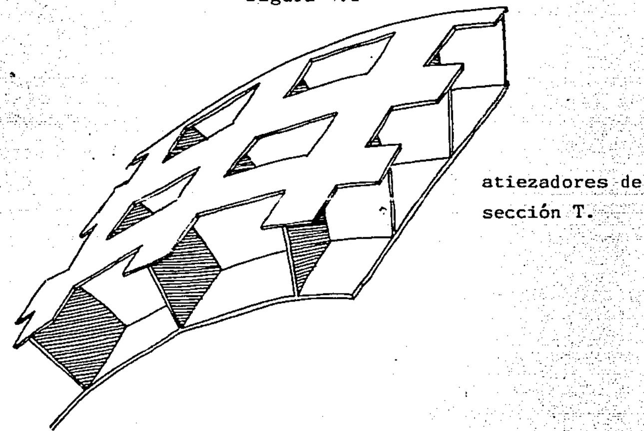


figura 4.2

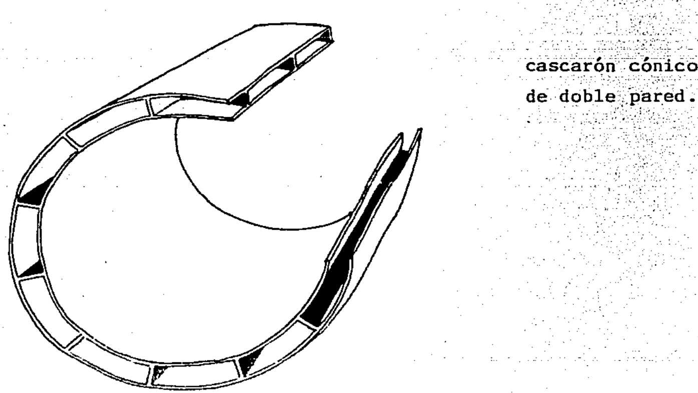


figura 4.3

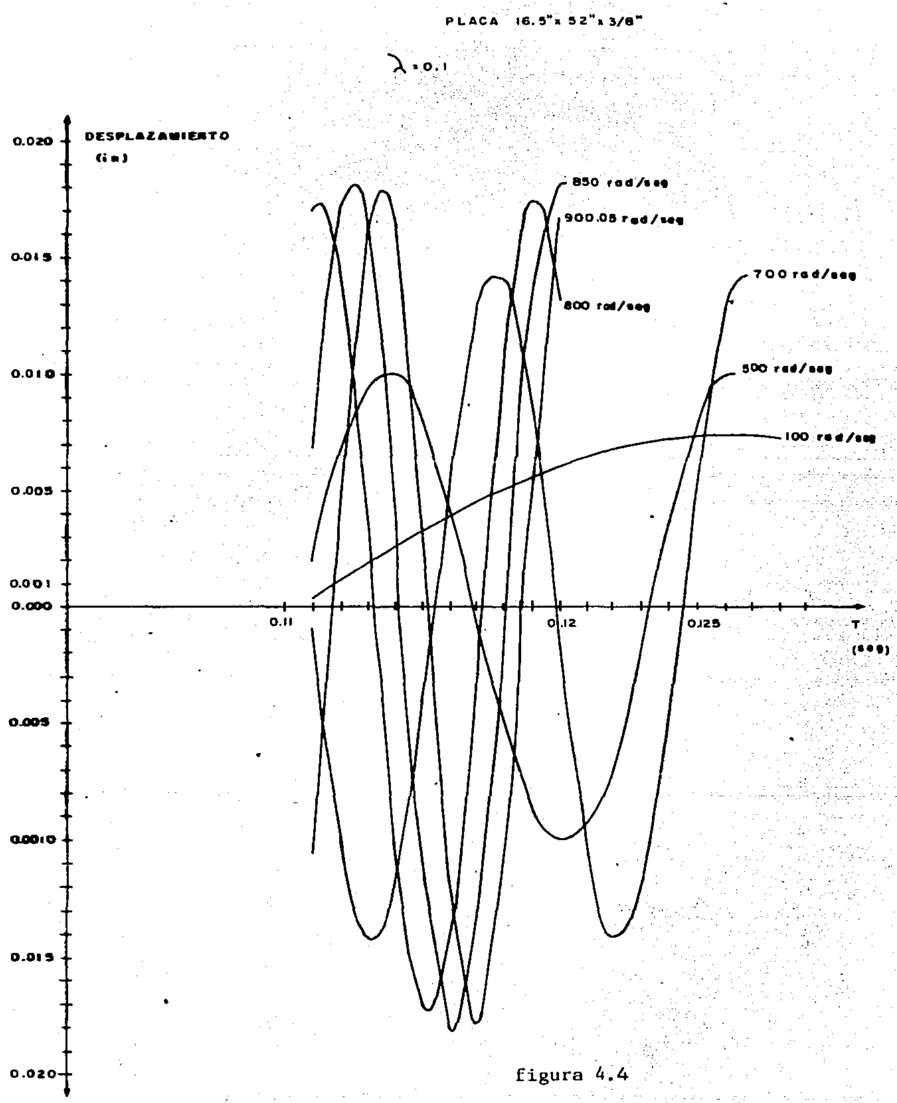

PLACA 16.5" x 52" x 3/8"
λ = 0.1
DESPLAZAMIENTO
(in)
0.020
0.015
0.010
0.005
0.001
0.000
0.005
0.0010
0.015
0.020
0.11
0.12
0.125
T
(seg)
850 rad/seg
900.05 rad/seg
800 rad/seg
700 rad/seg
500 rad/seg
100 rad/seg

figura 4.4

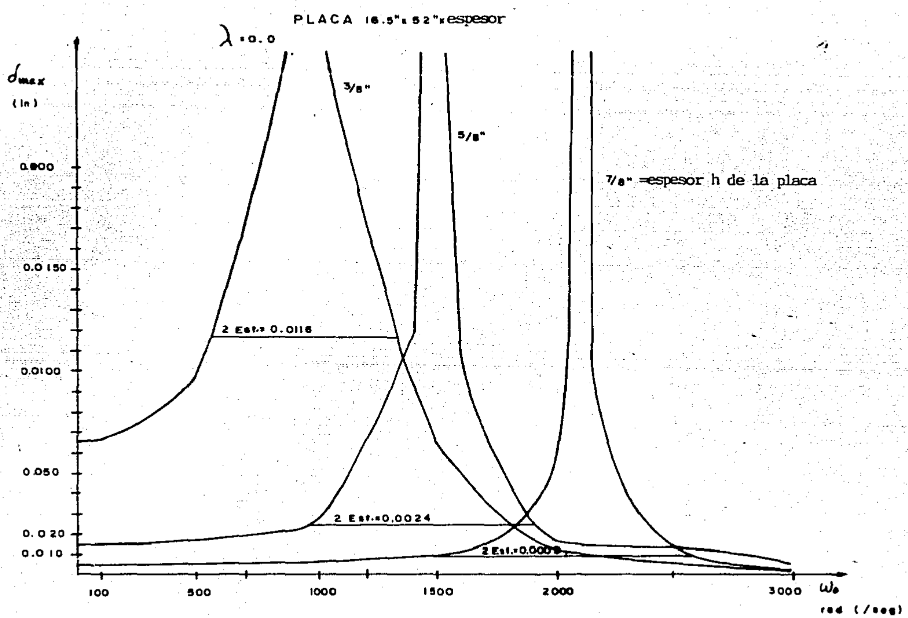

PLACA 16.5"x 52"x espesor
λ = 0.0
δ_{max}
(in)
3/8"
5/8"
7/8" =espesor h de la placa
0.800
0.0150
0.0100
0.050
0.020
0.010
2 Est.= 0.0116
2 Est.=0.0024
2 Est.=0.0008
100
500
1000
1500
2000
3000
ω_o
rad (/seg)

figura 4.5

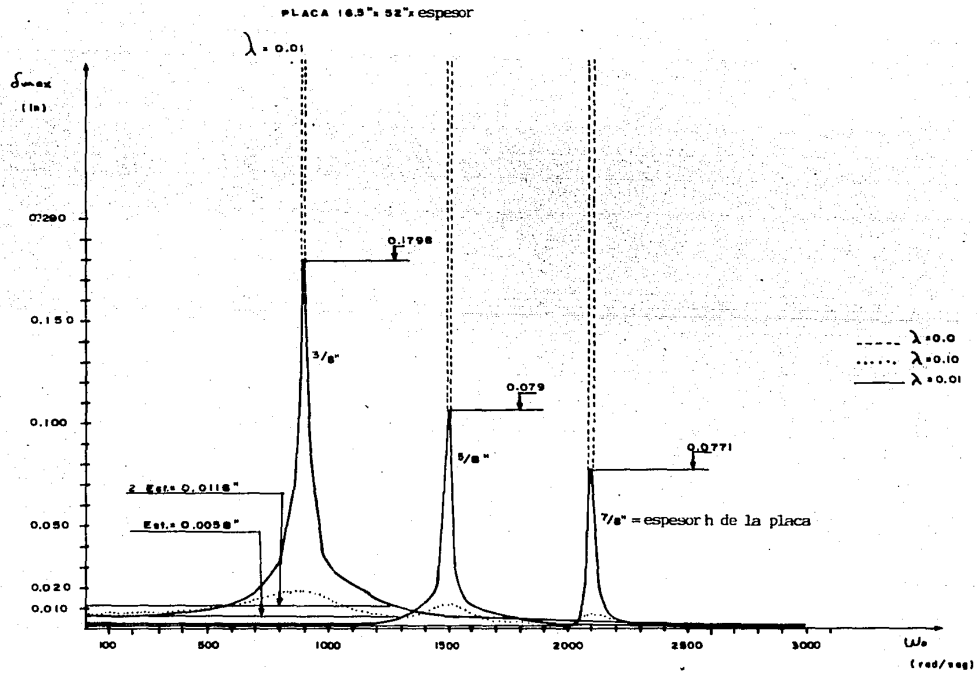

PLACA 16.5" x 52" x espesor
λ = 0.01
δmax
(in)
0.290
0.150
0.100
0.050
0.020
0.010
0.1798
0.079
0.0771
3/8"
5/8"
7/8" = espesor h de la placa
2 Est.= 0.0116"
Est.= 0.0058"
λ = 0.0
λ = 0.10
λ = 0.01
100
500
1000
1500
2000
2500
3000
ωo
(rad/seg)

figura 4.6

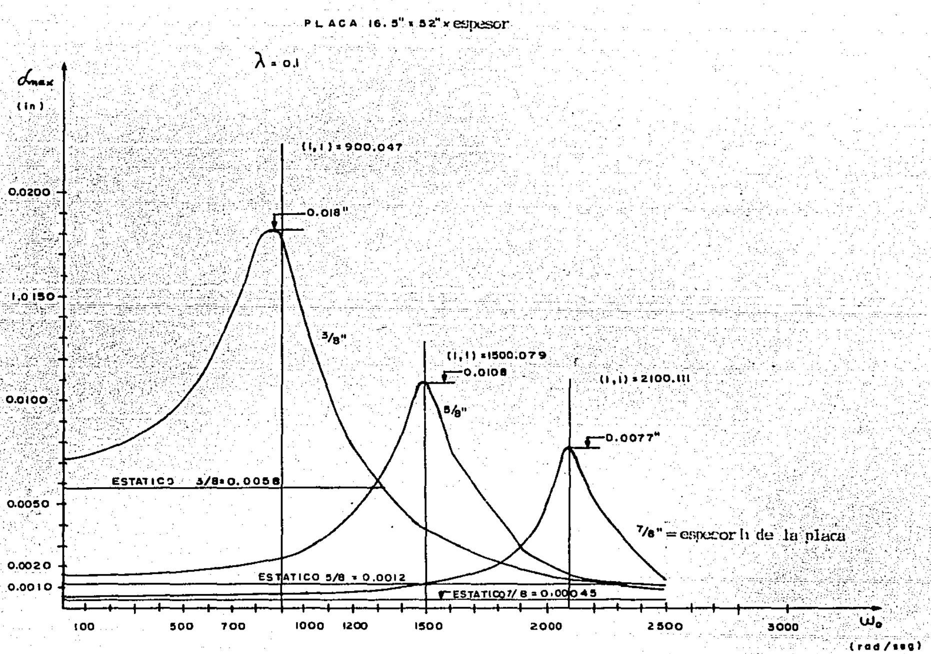

PLACA 16.5" x 52" x espesor
λ = 0.1
d_{max}
(in)
0.0200
1.0150
0.0100
0.0050
0.0020
0.0010
(1,1) = 900.047
0.018"
3/8"
(1,1) = 1500.079
0.0108
5/8"
(1,1) = 2100.111
0.0077"
ESTATICO 3/8 = 0.0058
7/8" = espesor h de la placa
ESTATICO 5/8 = 0.0012
ESTATICO 7/8 = 0.00045
100
500
700
1000
1200
1500
2000
2500
3000
ω_o
(rad/seg)

figura 4.7

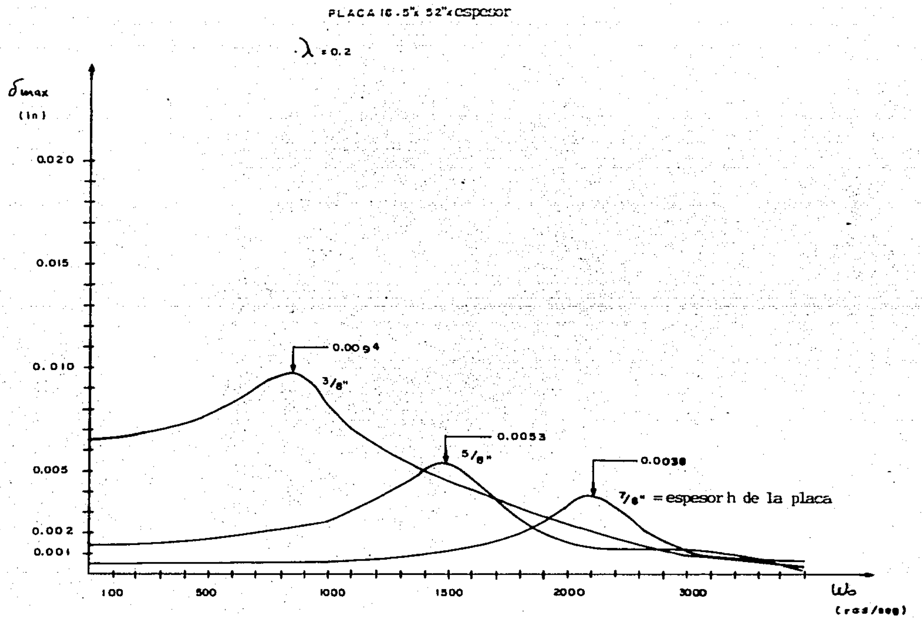

PLACA 16.5"x 32"x espesor
λ = 0.2
δmax
(in)
0.020
0.015
0.010
0.005
0.002
0.001
0.0094
3/8"
0.0053
5/8"
0.0038
7/8" = espesor h de la placa
100
500
1000
1500
2000
3000
ω₀
(rad/seg)

Figura 4.8

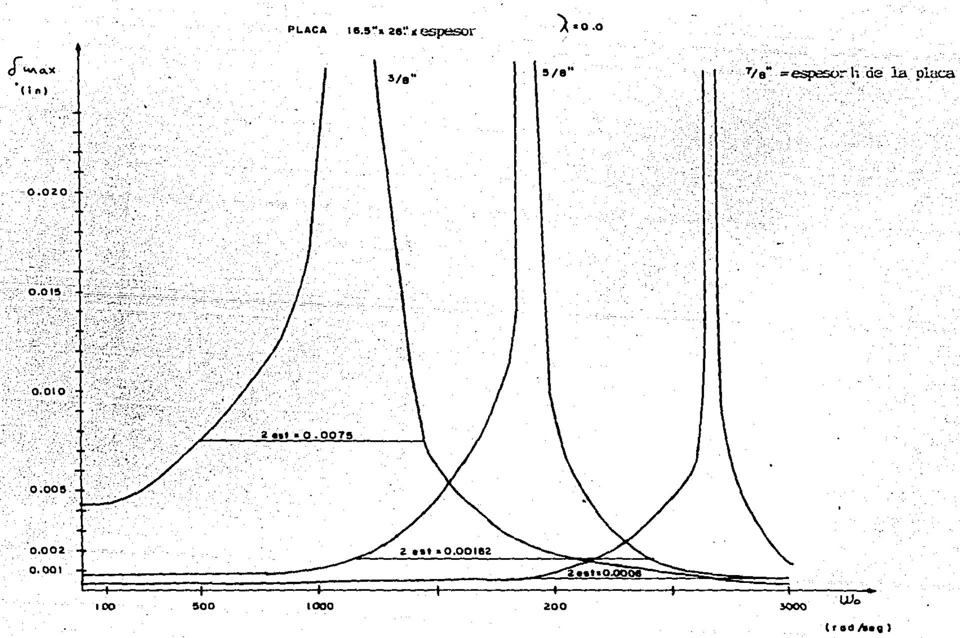

PLACA 16.5"x 26" x espesor
λ=0.0
δmax
(in)
3/8"
5/8"
7/8" = espesor h de la placa
0.020
0.015
0.010
0.005
0.002
0.001
2 est = 0.0075
2 est = 0.00182
2 est=0.0006
100
500
1000
200
3000
ωo
(rad/seg)

figura 4.9

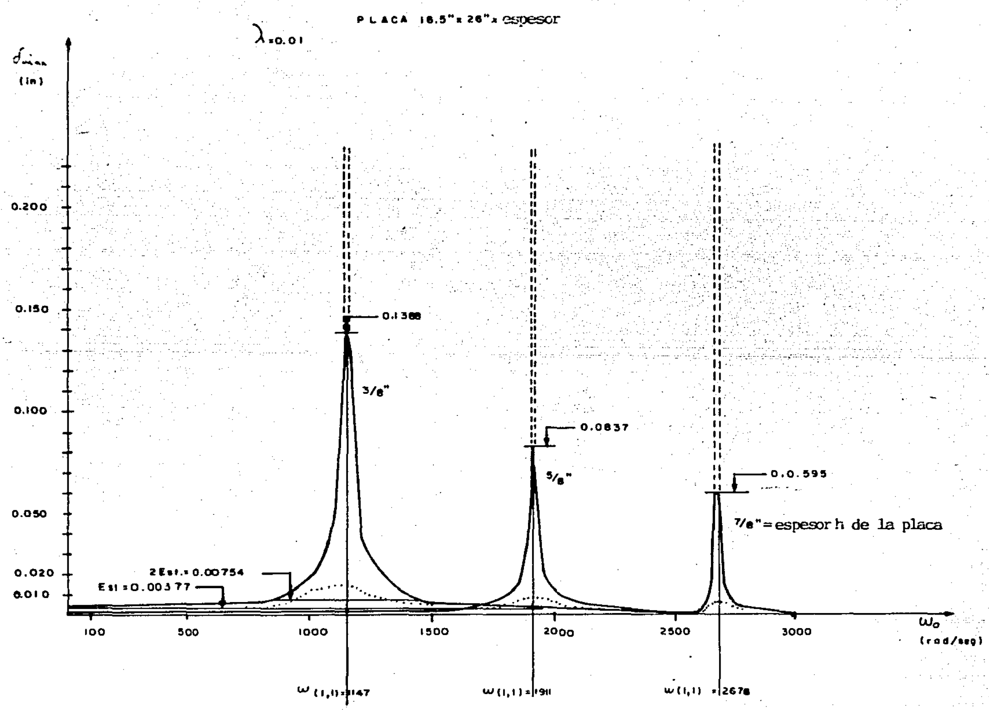
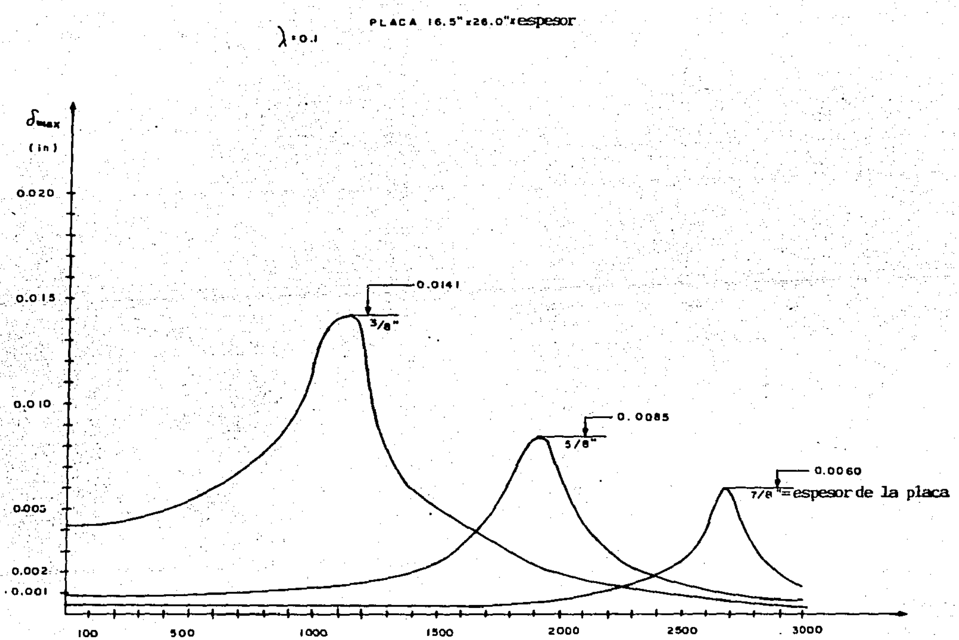

PLACA 16.5" x 26" x espesor
λ=0.01
(in)
0.200
0.150
0.100
0.050
0.020
0.010
0.1388
3/8"
0.0837
5/8"
0.0.595
7/8"=espesor h de la placa
2Est.=0.00754
Est=0.00377
100
500
1000
1500
2000
2500
3000
ω(1,1)=1147
ω(1,1)=1911
ω(1,1)=2678
(rad/seg)

figura 4.10



PLACA 16.5"x26.0"xespesor
λ=0.1
δmax
(in)
0.020
0.015
0.010
0.005
0.002
0.001
0.0141
3/8"
0.0085
5/8"
0.0060
7/8"=espesor de la placa
100
500
1000
1500
2000
2500
3000

figura 4.11

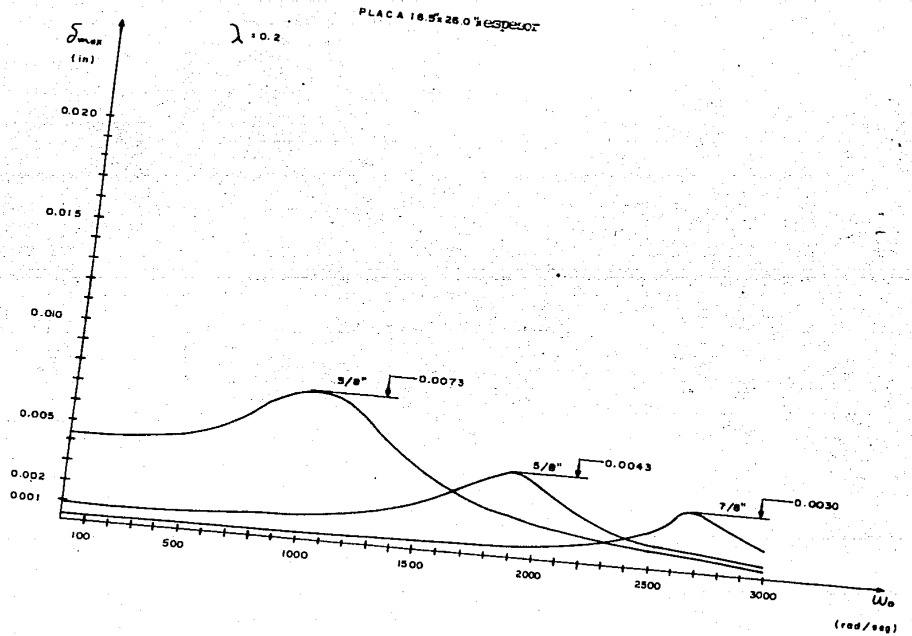
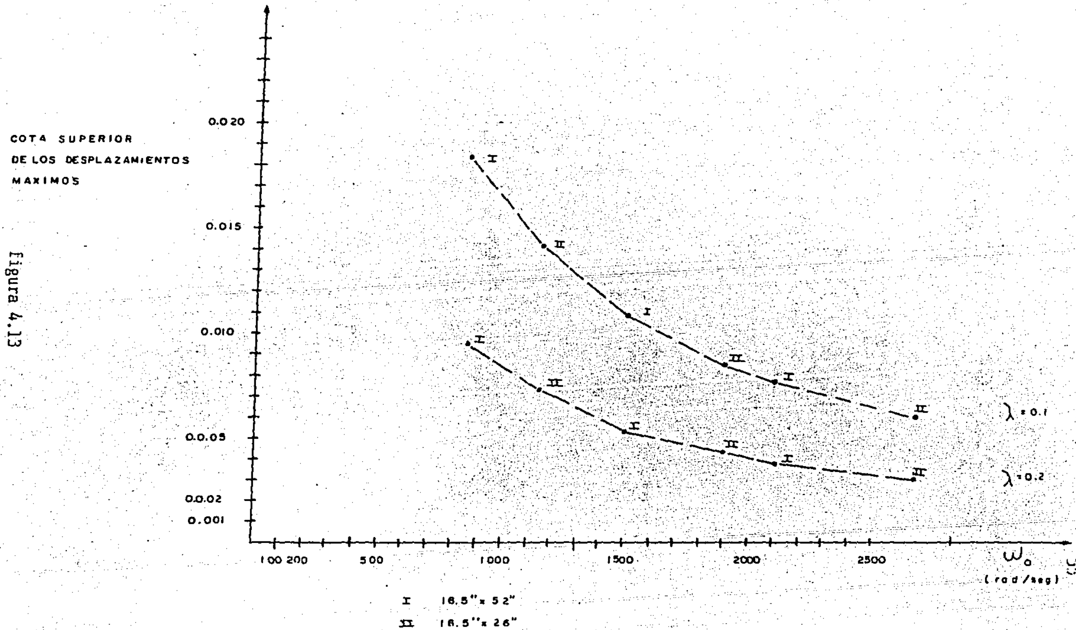
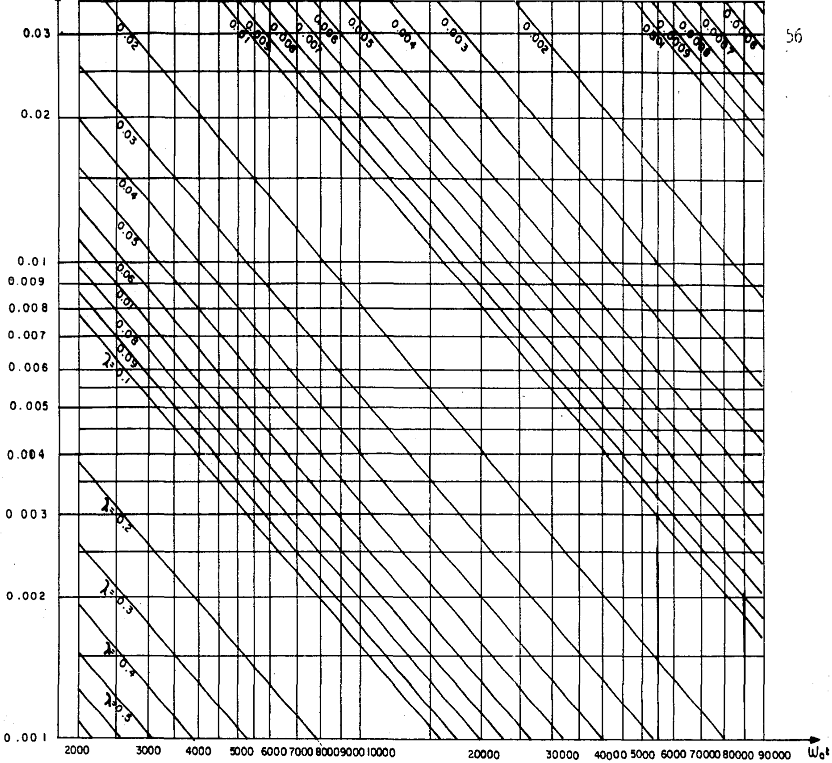
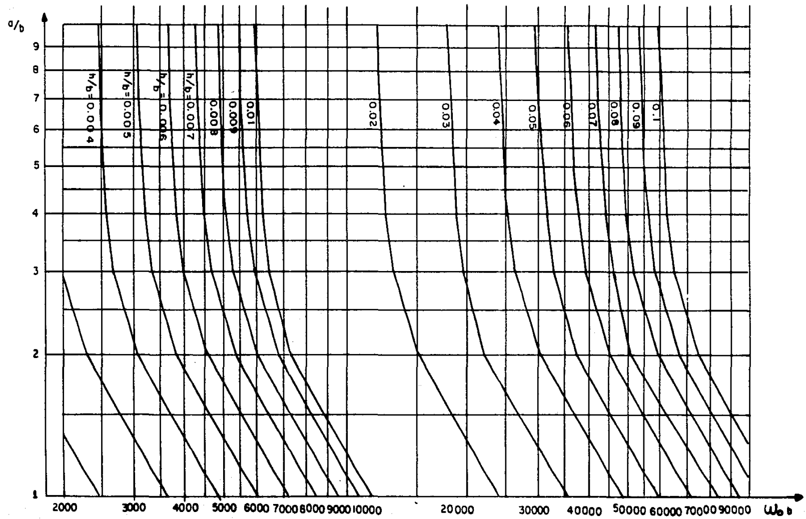

PLACA 16.5"x26.0"x espesor
$\lambda = 0.2$
δ_{max}
(in)
0.020
0.015
0.010
0.005
0.002
0.001
100
500
1000
1500
2000
2500
3000
ω_o
(rad/seg)
3/8"
0.0073
5/8"
0.0043
7/8"
0.0030

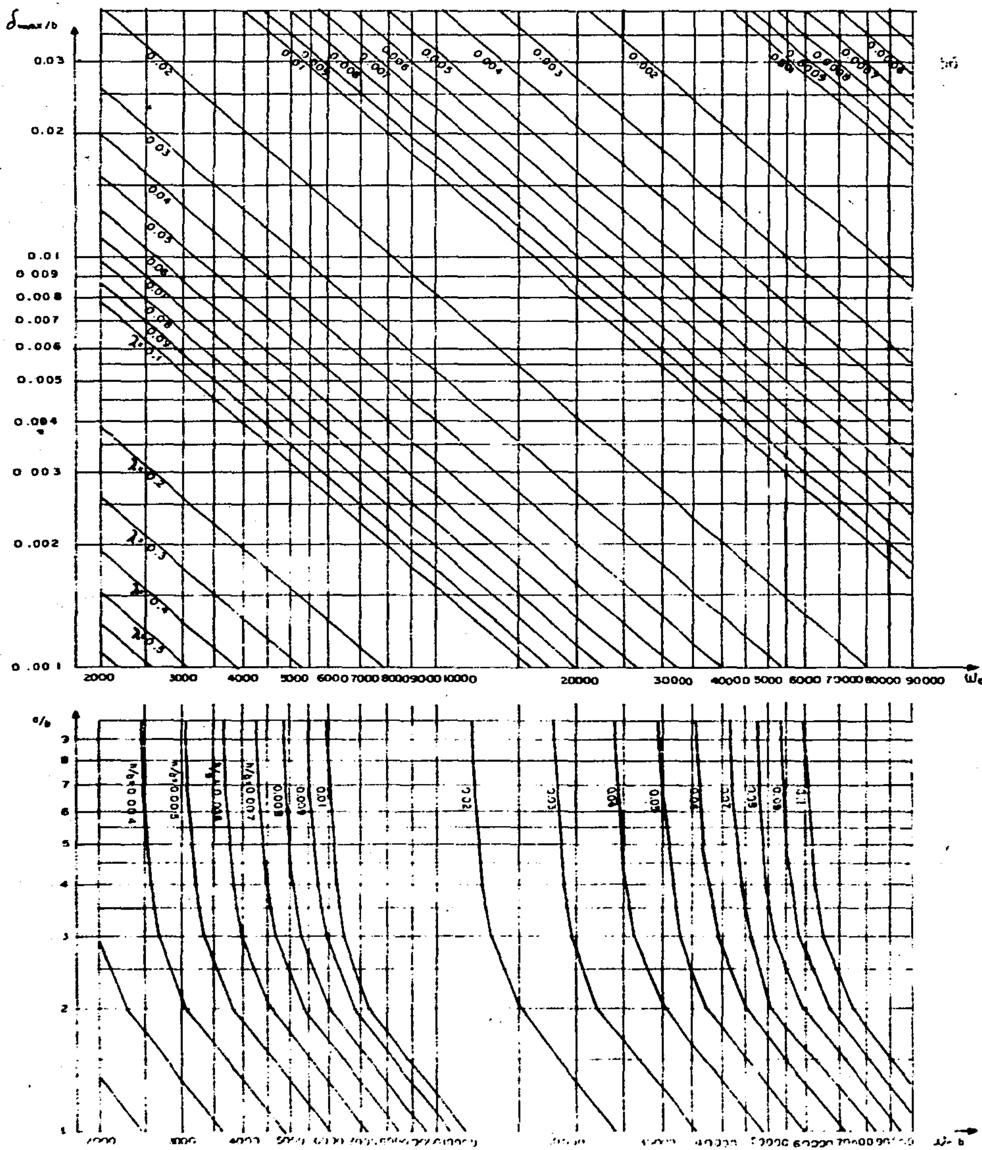
figura 4.12

Figura 4.13


COTA SUPERIOR
DE LOS DESPLAZAMIENTOS
MAXIMOS
0.020
0.015
0.010
0.0.05
0.0.02
0.001
100 200
500
1000
1500
2000
2500
ω₀
(rad /seg)
λ = 0.1
λ = 0.2
I 16.5"x 52"
II 16.5"x 26"


0.03
0.02
0.01
0.009
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
λ=0.1
λ=0.2
λ=0.3
λ=0.4
λ=0.5
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.01
0.009
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.0009
0.0008
0.0007
0.0006
2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000 20000 30000 40000 5000 6000 70000 80000 90000
Wa


a/b
9
8
7
6
5
4
3
2
1
h/b=0.004
h/b=0.005
h/b=0.006
h/b=0.007
0.008
0.009
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000 20000 30000 40000 50000 60000 70000 90000
Wob



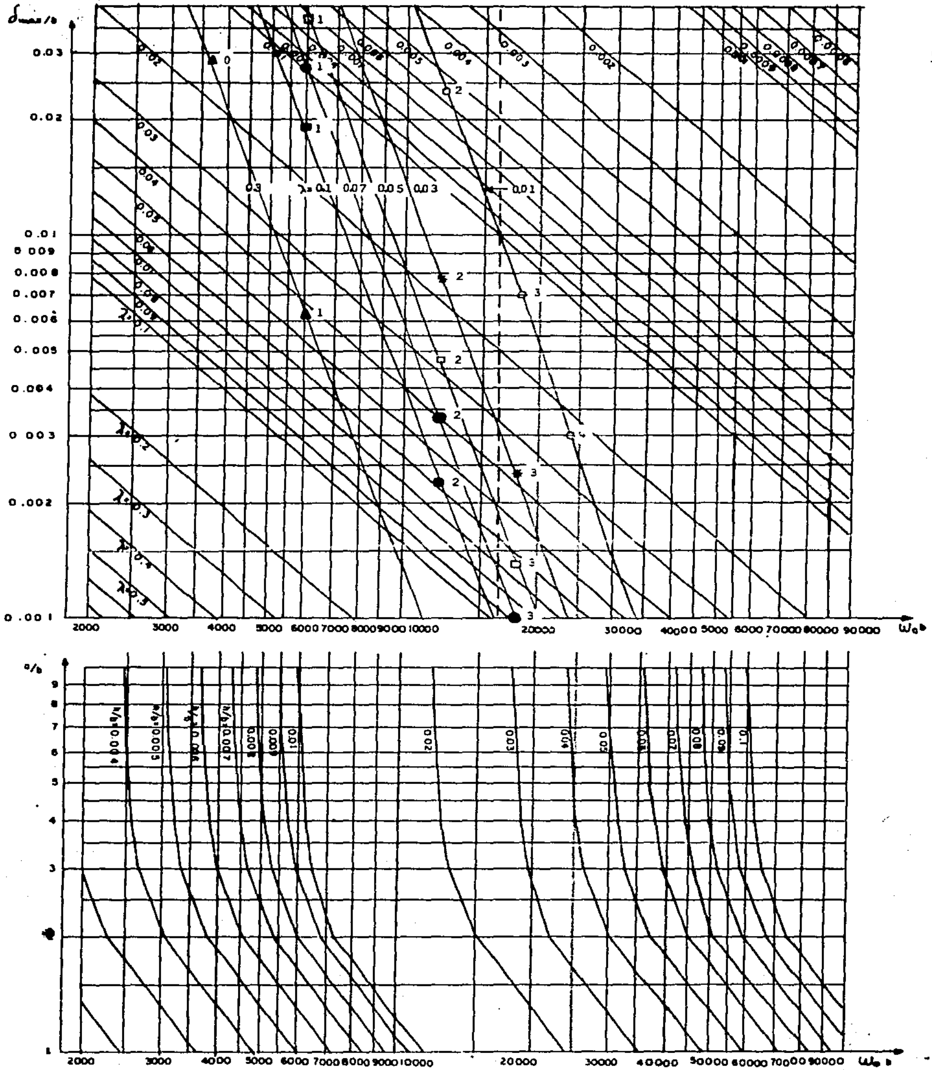


figura 4.15

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DE DISEÑO

Las conclusiones que se derivan de este trabajo son muy variadas y se refieren tanto al comportamiento dinámico general de cascarones y placas, como al problema en particular de vibración de la tubería de desfogue de las turbinas de Chicoasén.

Como se vió en los resultados del capítulo anterior las frecuencias naturales del cascarón cónico atiezado se pueden elevar suficientemente si se retira el recubrimiento de concreto, de ser posible, y si se rigidiza eficientemente. En diseños futuros por ningún motivo debe usarse concreto en las tuberías de desfogue a menos que se haga un análisis adecuado y se demuestre su factibilidad.

Esta rigidización depende principalmente de las propiedades del material que se utilice. Los materiales pesados y con módulo de elasticidad bajo disminuyen las frecuencias naturales del sistema. Existen materiales ligeros y de gran resistencia como los que se utilizan en la construcción de aviones; desde el punto de vista estructural es el más adecuado. Ahora que trabajando con acero, se puede buscar la solución más económica para rigidizar el cascarón cónico en estudio. Esto es, con una retícula de anillos y atiezadores de sección 'T', figura 4.2, adicionando patines de $6'' \times \frac{3}{8}''$ en ambos sentidos y removiendo la capa de concreto que le fué colocada, se logra elevar en un 25% el valor de la frecuencia fundamental.

Cabe hacer notar que estructuralmente se pueden controlar las vibraciones y los desplazamientos del sistema, sin embargo el desgaste de la superficie interna debido al flujo de agua y a la cavitación no se pueden impedir. A este respecto sólo se puede recomendar aumentar al doble el espesor de la tubería para aumentar en igual medida su vida útil y, por supuesto, se recomienda REVISAR el diseño hidráulico.

Por otra parte, la retícula de anillos y atiezadores conforma el sistema de placas simplemente apoyadas analizadas en el capítulo anterior. De ese análisis se desprenden las siguientes conclusiones. La relación (a/b) de una placa juega un papel importante en la respuesta de la misma. Para tres placas con la misma área, mismo espesor y mismo grado de amortiguamiento, pero diferente ralación largo ancho, sus desplazamientos máximos son muy diferente. Por ejemplo, para $(a/b)_1=1$, $(a/b)_2=5$ y $(a/b)_3=9$, sus desplazamientos máximos son δ_1, $\delta_2=0.38\delta_1$ y $\delta_3=0.21\delta_1$. De ello se concluye que es más conveniente una retícula alargada.

Los resultados de desplazamientos máximos obtenidos al centro de las placas simplemente apoyadas son mayores a los que se dan en la realidad puesto que existe un cierto grado de empotramiento en sus bordes al ser una estructura continua. Esto sin embargo representa un primer paso en el estudio del comportamiento dinámico de cascarones. El esquema de las figuras 4.14 será similar para otras condiciones de apoyo en placas, y el análisis del inciso III.3 será similar, aunque más complicado, para una nueva función coordenada U_{imn}.

Yendo un poco más adelante, se espera un esquema similar de comportamiento para estructuras como cilindros, conos y esferas. La razón de estas afirmaciones se encuentra con detalle en la referencia 20.

REFERENCIAS

1 S.Timoshenko; "Vibration problems in engineering"; D.van Nos-- trand Company, Inc.; 1956.

2 David Halliday & Robert Resnick; "Fundamentos de Física"; C.E. C.S.A.; 1974.

3 William T.Thomson; "Theory of vibrations and applications"; -- Prentice Hall, Inc.; 1965.

4 Teófilo Vargas; "Estabilidad de placas curvas"; tesis de docto rado, UNAM; 1965.

5 V.I.Weingarten; "Free vibrations of conical shells"; Journal - of the Mechanic Engineering division ASCE; agosto 1965.

6 A.W.Leissa; "Vibration of shells"; NASA SP-288,U.S.; Goverment Printing office; Washington D.C. 1973.

7 Hyman Garnet & Joseph Kempner; "Axisymetric free vibrations of conical shells"; Journal ASME; Septiembre 1964.

8 Paul Seide; "Free vibrations of simply supported frustum conical shells"; Israel Journal of Technology; Febrero 1965.

9 P.M.Naghdi; "On the theory of thin elastic shells"; Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics; Vol 3, 1950.

10 Werner Soedel; "Vibration of shells and plates"; Marcel Dekker, Inc.;1981

11 Francis Tse, Ivan Morse & Roland Hinkle; Mechanical vibrations"; Allyn and Bacon; 1978.

12 Wilhelm Flügge; "Tensor analysis"; Springer Verlag;1973.

13 Wilhelm Flügge; "Stresses in shells"; Springer Verlag;1973.

14 International Congress; "Theory and experimental investigation of spatial structures, application of shells in engineering structures"; USSR, Moscú; Septiembre 1985.

15 J.L.Urrutia-Galicia & A.N.Sherbourne; "Analysis of stresses in internally loaded cylindrical shells"; Department of Civil Engineering, University of Watwrloo; Waterloo,Ontario,Canada; Computer & Structures, Vol.15,No3; 1982.

16 C.E.Calderón; "Desarrollo de espectros de respuesta sísmica en los pisos de una estructura"; Tesis profesional, UNAM; 1977.

17 S.Timoshenko;"Theory of plates and shells"; Mc Graw Hill International; 1959.

18 David Miller & Franklin Hart; "The density of eigenvalues in thin circular conical shells"; NASA; 18 Mayo 1970.

19 V.G.Rekarch; "Problemas de la teoría de la elasticidad"; Editorial Mir, Moscú; traducción al español 1978.

20 J.L.Urrutia-Galicia y N.Aviña; "Forced vibration analysis of plates simply supported under harmonic uniform load"; artículo en preparación.

21 Ralph Burtos; "Vibration and impact"; Dover Publications,Inc.;1968.