2ej. 28

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Universidad Nacional Autónoma

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

" SOBRE LA INTUICION Y EL INTUICIONISMO MATEMATICO "

T E S I S que para obtener el título de

M A T E M A T I C O presenta:

José Guadalupe Zaragoza Ramírez

México, D. F 1 9 8 7

INDICE

INTRODUCCION 2

I. SOBRE LA INTUICION MATEMATICA

I.1 Bosquejo Histórico. Panorama Filosófico 5
I.2 La Intuición en Matemáticas 9
I.3 El Intuicionismo como Corriente de Pensamiento Matemático 12
I.4 Los Números Naturales 18
I.5 Principio del Tercero Excluido. Reducción al Absurdo. 22
I.6 Constructibilidad 24

II. DIFERENTES TIPOS DE INTUICION

II.1. Intuición Analógica 26
II.2. Inducción 30
II.3. Principio de Inducción Completa 38

III. LA INTUICION EN EL QUEHACER MATEMATICO

III.1. Pañel de la Intuición en el quehacer Matemático ... 43
III.2. Heurística 44
III.3. Ventajas y Limitaciones 46

IV. INTUICION Y RIGOR MATEMATICO

IV.1. El Rigor en las Matemáticas 51
IV.2. Rigor Matemático 57
IV.3. El Rigor Matemático en la Intuición y el Intuicionismo 60

Conclusiones 62
Bibliografías 63

INTRODUCCION

Cuando se trata de conocer, de aprender, existen distintas maneras mediante las cuales abordamos estos procesos por ejemplo, de un modo empírico, experimental, o bien de manera discursiva según el fenómeno u objeto que nos interesa conocer. En esto interviene la observación a partir de la cual procedemos a establecer comparaciones con otros fenómenos u objetos, o conceptos ya conocidos, estableciendo de este modo analogías o inducciones si extendemos nuestras observaciones a un mayor número de casos similares sobre el fenómeno que nos interesa. La actitud en matemáticas es similar no obstante la naturaleza de los objetos que trata.

En este proceso del conocimiento matemático interviene la intuición. ¿ Qué es la intuición ? , ¿ Qué papel juega la intuición en matemáticas ? , ¿ Constituye la intuición un método de conocimiento matemático verdadero, o es solo un factor importante en ese proceso ? , ¿ Podemos hablar de un conocimiento matemático intuitivo válido ? y si tal es el caso, ¿ es riguroso un conocimiento así ?. Estas son las preguntas a las que tratamos de responder en el desarrollo del presente trabajo, desde una perspectiva del quehacer matemático con una idea subyacente de la enseñanza de las matemáticas en los niveles medios y medio superior cap. III.

El primer capítulo se inicia con un concepto general sobre la intuición comprendiendo además un breve bosquejo histórico -- en el que en primer lugar, describimos suscintamente lo que algunos pensadores concebían a cerca de la intuición y en segundo desarrollamos una pequeña introducción en que se trata de los razgos principales sobre el intuicionismo matemático. En el cap.II, se trata sobre algunos diferentes tipos de intuición y se desarrolla una exposición sobre el tama de la inducción e inducción matemática y que apoyándonos en algunos ejemplos se pretende de cierta manera mostrar el papel heurístico de la intuición en matemáticas.

Se considera que la intuición en el quehacer matemático constituye un recurso de naturaleza heurística a través del cual podemos visualizar formas o caminos a seguir en el aprendizaje de los objetos matemáticos bajo cierta posibilidad de aproximarnos en el conocimiento de esos objetos, sin que esto signifique el logro de una comprensión total del objeto en un sentido demostrativo que - es lo que confiere validez en matemáticas.

Pensamos que las matemáticas en su proceso de desarrollo constituyen una acumulación de intuiciones matemáticas basadas en el trabajo y resultado e la experiencia del matemático. De esta manera tal acumulación de intuiciones nos hace pensar en dos momentos que resumimos en el siguiente enunciado; primero intuir, luego probar, estos dos momentos no los visualizamos en un sentido mecánico, sino en permanente interacción, es decir, que la intuición y formalización de conceptos están implícitos en el quehacer matematico ya que habitualmente procedemos iniciando son una actitud- más heurística para luego abordar los procesos de formalización - de conceptos. Aunque aquí no tratamos la cuestión del formalismo- o los procesos de formalización, se sugiere la lectura de la tesis " A Cerca del Formalismo Matemático " de Juan Tamayo Zaragoza en la cual se trata de los principales razgos del formalismo matemático.

En el cuarto capítulo se aborda el problema del rigor en matemáticas desde una perspectiva histórica en la cual se muestra el problema que en ciertas etapas, ha representado en el desarrollo del pensamiento matemático. Los esfuerzos que han realizado los grandes matemáticos por liberar a esta ciencia de la aparición de paradojas. En estos se originaron varios movimientos que se llegaron a cinstituir en escuelas de pensamiento matemático en las primeras décadas del presente siglo. Una de ellas fué la Escuela Intuicionista a cerca de la cual tratamos en este trabajo.

Para terminar, queremos señalar que este trabajo no se orienta a la cuestión de fundamentos de las matemáticas, sino que considerando la intuición y los razgos pricipales del intuicionismo matemático intentamos dar respuesta a las preguntas que planteamos en principio. Si lo logramos creemos que ello redundará en beneficio de nuestro trabajo en la enseñanza de las matemáticas y habremos cumplido nuestro objetivo.

I. SOBRE LA INTUICION MATEMATICAS.

1.1. Bosquejo Histórico. Panorama Filosófico

Literalmente, la palabra intuición proviene del latín (intuitio, de in, en, y tueri, ver). Conocimiento claro y recto o inmediato de verdades que penetran en nuestro espíritu sin necesidad de razonamiento. (10) p. 93. Podríamos resumir lo anterior en la siguiente acepción "ver por dentro". La intuición consistiría entonces en que a través de ella se aprende el objeto inmediatamente percibiéndolo en su totalidad. A continuación mostramos algunos momentos históricos sobre la evolución de este concepto desde un punto de vista filosófico a través de la concepción que a este respecto encontramos en algnunos pensadores desde la antigua grecia clásica hasta nuestros tiempos modernos. Finalizando con algunos aspectos históricos sobre la escuela intuicionista en el quehacer matemático.

Platón (428-348 a.c.) hablaba ya de una intuición espiritual en el sentido según él, de que las ideas son intuídas espiritualmente (percibidas inmediatamente) por la razón. Así, al ser una función del intelecto, representa una actividad rigurosamente teórica, intelectual. En esa misma dirección, más tarde Plotino nacido aproximadamente 205 d.c., un renovador del platonismo estableció que la intuición del Nus (pensamiento puro) reemplaza a la intuición de las Ideas, esta intuición (del Nus) es una actividad puramente del intelecto como la intuición platónica de las Ideas, pero según Plotino, conoce además (del Nus) una intuición del principio supremo de la realidad de lo uno (como fundamento y causa de todo ser que se manifiesta).

Aristóteles (324-322 o 21 a.c.) quien fué discípilo de Platón reconocía la intuición (5)...una facultad innata de juzgar. ..si ella es una intuición, hemos de decir que en su filosofía-no se consideraría precisamente un elemento primordial como lo-fué después en la filosofía moderna. En la era moderna, René -- Descartes (1596-1650), considerado el iniciador de la filosofía moderna, bajo exigencias similares al fundamentalismo aristotélico, propone que solo empleando la intuición y la deducción - llegamos a obtener un conocimiento de las cosas sin miedo a e-- quivocarnos. Así en su principio "Cogito ergo sum" sintetiza el reconocimiento de la intuición como un medio autónomo de conocimiento. Constituye una autointuición inmediata referente a un - hecho metafísico. Para él la intuición consiste en "la concep-- ción de un espíritu atento, tan clara y distinta que no le que- de duda alguna acerca de lo que entiende; o lo que es lo mismo, la concepción de un espíritu sano y atento, y que es tanto más- cierto cuanto es más simple que la deducción misma". Como vemos se trata de una intuición racional a través de la cual ciertas- verdades son aprehendidas de un modo tal e inmediato. Como ejemplo, mensiona

" $2+2=4$, $3+1=4$, y su consecuencia $2+2=3+1$ ". De- donde hemos de comprender intuitivamente, es decir, sin análi-- sis que la última proposición es una consecuencia necesaria de las dos anteriores o sea (la transitividad de la igualdad). Sin embargo tanto él como Aristóteles insisten en que solo la inteligencia es capaz de alcanzar la verdad.

Baruch Spinoza (1632-1677) contemporáneo de Descartes. Distingue más niveles en la actividad del conocimiento y señala -- tres géneros:

1º de conocimiento (trátese ya de objetos físicos individuales o signos)

2º de la razón

3º de la ciencia intuitiva: "El supremo esfuerzo del Alma y su suprema virtud es conocer las cosas en el tercer género de conocimiento".(15),(5).

Spinoza ofrece el siguiente ejemplo " $a:b::c:x, \therefore x=\frac{bc}{a}$. Pero si se trata de números simples por ejemplo 1,2,3 para Spinoza "nadie puede dejar de ver que el cuarto proporcional es 6, y tanto más claramente cuando de la propia relación -la cual vemos de inmediato- que el primero tiene con el segundo, concluimos el cuarto". La operación es tan rápida que para una persona de cierta cultura parecería un destello de intuición, siendo -- que se trata de una operación lógico-matemática. Vemos pues que la intuición de Spinoza solo es una inferencia rápida, apoyada en la observación de signos (marcas físicas) que representan -- las relaciones implicadas.

Immanuel Kant (1724-1804) quien parece retomar los tres niveles Spinozistas considera además la "intuición pura" que sin el auxilio de los sentidos, constituye la fuente de los juicios sintéticos a priori, la posibilidad misma de la experiencia sensible. Para Kant, esta "...experiencia externa es posible solo por la representación que ha sido pensada" (5). A diferencia de las intuiciones Cartesiana y Spinozista que son formas o especies de la razón, la "intuición pura" de Kant, trasciende la razón, lo que constituye el gérmen del intuicionismo actual como una puerta al irracionalismo, de manera que los intuicionistascontemporáneos tienden a denigrar tanto la experiencia sensorial a la que Kant le admitía cierto valor, así como a la razón la - cual consideraba insuficiente más no impotente.

Edmundo Husserl (1859-1938) en su obra IDEAS (1913) renace el fundamentalismo del pensamiento platónico y aristotélico que busca la esencia invariable de las cosas más allá de sus propiedades y leyes. Sustenta que tal esencia o eidós (lo uno dentro-de lo múltiple que el método dialéctico intenta captar como forma, en un sentido platónico) es consecuencia de una facultad especial es decir, intuición intelectual no racional y que denomina visión de esencias.

Así, la intuición empírica (individual) y la intuición --- esencial (universal) son principios de justificación última de cualquier juicio, pues lo que es intuído cono esencia o conexión entre esencias no puede por tanto, anularse por la observación o por la deducción, ni ser mejorado o perfeccionado. La cência propiamente con la carencia de prejuicios que la caracterizan necesita de juicios propiamente válidosderivados de intuiciones originarias. Mientras que el racionalista tradicional encuentra la certeza en las ideas innatas de la razón; Husserl la atribuye a una intuición "que ve las cosas mismas", que aprehendiendo las esencias inmutables, no se detiene ya en detalles -- fastidiosos orientados a corroborar la existencia o verificación empírica.

Actualmente un intuicionismo claro lo encontramos en Henri L. Bergson (1859-1941). Según Bergson, el intelecto no es capaz de penetrar en la esencia de las cosas. Solo puede aprehender - la forma matemático-mecánica de la realidad, no su núcleo y contenido intrínseco el cual solo puede ser captado por la intui--

ción. Así pues, mediante la intuición captamos la esencia de lo real.

Para Bergson la intuición es " la simpatía por la cual uno se transporta al interior de un objeto para coincidir con aquello que tiene de único y en consecuencia de inexpresable " de tal manera que por medio de ella entramos en contacto "...con el núcleo y centro de todas las cosas", Siendo de este modo la clave de la metafísica. Refiere además que lo que nos apropiamos intuitivamente, podemos expresarlo de dos manera distintas: por la imagen y por el concepto. Todo esto bajo las incitaciones de la inteligencia pues de otra manera la intuición quedaría en el puro instinto que se concentra en lo singular del movimiento.

1.2. La Intuición : Matemáticas

En las matemáticas, es Kröneckor (1823-1891) quien primero argumentó críticamente en contra de R. Dedekind (1831-1916), el rigor de C. Weierstras (1815-1897) y en especial sobre los Trabajos de Teoría de Conjuntos u números transfinitos de G. Cantor (1845-1918), señalando que si los objetos que se manejan no pueden ser construídos entonces el contenido de los teoremas es vacío y sus especulaciones carentes de sentido. El sustentaba que:

a) Los números naturales son evidentes a la intuición

b) Todos los teoremas de análisis matemático deberían ser interpretados en términos de los números naturales y sus relaciones

c) En-las matemáticas deberían darse métodos constructivos mediante los cuales se pueda determinar en un número finito de pasos los objetos que se establecen

d) Las pruebas de existencia deberían permitir el cálculo con cualquier grado de exactitud del objeto que está siendo establecido como existente.

Kronecker criticaba de esa manera las demostraciones de existencia de un objeto matemático que no permitían determinarlo de un modo directo.

Poco después H. Poincaré (1854-1912) en 1905 destacaba el papel esencial de la intuición del principio matemático de inducción completa en la construcción y fundamentación de la matemática. Criticaba a la corriente logicista el considerar que la matemática descansaba sobre la lógica, con lo cual terminaría por reducir la matemática a una inmensa tautología. Sostenía muy similarmente a los puntos dados por Kronecker que:

a) El axioma de elección es inaceptable. Los objetos matemáticos no pueden entrar en la difinición -por ejemplo, el conjunto de todoslos conjuntos-

b) La aritmética no puede ser justificada mediante una fundamentación axiomática ya que nuestra intuición precede tal estructura. La inducción matemática es una intuición fundamental, no precisamente un axioma

c) Las demostraciones deben ser constructivas

Por la misma época L.E.J. Brower (1881-1966) a quie se con sidera.. el fundador del intuicionismo sistematizado sostiene lo siguiente

a) La intuición fundamental delos matemáticos tiene su origen en la percepción de un movimiento del tiemp el -- cual se disgrega en dos cosas diferentes surgiendo así - las matemáticas cuando tal dualidad es obstraída de toda cualidad. Tal intuición por ser básica no puede ser esclarecida, las ideas matemáticas están inmersas en la mente humana. Además los puntos b), c) y d) expresados por Kronecker. Uno delos méritos de Brower tal vez mejor que su concepción filosófico-matemática envuelta en cierto misticismo son sus contribuciones para rescatar partes del análisis en una forma constructiva.

Herman Weyl (1885-1955) decía "Mediante el proceso mental del pensamiento intentamos averiguar la verdad; el esfuerzo de nuestra mente consiste en procurar su propia iluminación mediante la evidencia adecuada" (18). Observando acerca del uso de la lógica en la matemática clásica señalaba " la lógica clásica -- fué abstraída de las matemáticas de los conjuntos finitos, olvidando por completo de esta manera su origen modesto, uno posiblemente confundió la lógica como algo que era anterior a todas las matemáticas, y finalmente las aplicó sin justificación, a las matemáticas de conjuntos finitos. Esta es la falla y el - pecado original de las matemáticas por lo que fué precisamente castigada con el surgimiento de las antínomias" (2).

M.A. Heyting (1898-) uno de los mejores expositores - del intuicionismo contemporáneo, sostiene que el principio de - construcción efectiva es la base del intuicionismo matemático - de manera que el trabajo del intuicionista se fundamenta en desarrollar esa construcción mental lo mejor posible considerando además su formalización dentro de lo que es solo un proceso-de aproximación al objeto. Así, el pensamiento matemático se ocupa esencialmente de la construcción mental sin que ello implique verdad alguna respecto del mundo externo.

Erret Bishop el mejor intuicionista conocido en la actualidad se autoconcidera un constructivista más bien que un intuicionista, dedicándose como el dice al análisis constructivo. No comparte del todo las tesis de Brower, y le preocupa más la actividad matemática propiamente, como el mismo lo señala "....en el sistema de Brower existen trazos de idealismo, y peor aún, de especulación metafísica. Hubo tal preocupación con los aspectos filosóficos del constructivismo a expensas de la actividad matemática concreta". Sin que esto signifique desconocer los esfuerzos de gran mérito realizados por Brower.

1.3. El Intuicionismo como Corriente de Pensamiento Matemático

El principio básico del intuicionismo matemático afirma que la matemática estudia un cierto tipo -matemático- de "construcciones mentales". No define claramente lo que significa una "construcción mental" como construcción matemática. Así pues, el trabajo del intuicionista consiste en desarrollar esa "construcción mental", en estructurarla y formularla lo mejor posible consciente de que todo eso es solo un proceso de aproximación y lo hace constructivamente en el papel. Por ejemplo, al afirmarse que

$$3+2=4+1$$

habrá que interpretarlo de modo que se han realizado las "construciones mentales" de cada miembro y encontrado que dan el mis mo resultado.

La "construcción mental" como tal es considerada como originaria, es decir, que no puede ser reducida en algo matemático anterior que sea más primitivo. Por consiguiente está convencido por ejemplo, de que el número natural es una intuición fundamental que no requiere de demostración alguna, luego entonces,- el pensamiento matemático se carateriza porque se ocupa solo de la "construcción mental" y no implica verdad alguna en lo relativo al mundo exterior he ahí el carácter existencial. De este modo, se infiere que la matemática intuicionista procede al mismo tiempo de manera genética, existencial y categórica. Entendiendo su carácter existencial por la exigencia de un modo explícito (efectivo) de construcción del objeto. Genética en un sentido apriorístico, es decir como una intuición que nos representa los conceptos matemáticos de una manera inmediatamente - clara considerándose, una "facultad de tratar por separado ciertos conceptos y consecuencias que se presentan normalmente en la manera corriente de razonar".. Su naturaleza categórica se -- considera en que una vez dada la intuición matemática, las proposiciones así originadas tienen un carácter de verdad universal y necesario.

De esta manera, llevada a cabo una construcción matemática, la entidad que resulta goza de aquellas propiedades que le son otorgadas por la construcción matemática. Entonces considera -- que la lógica es posterior a la intuición matemática y que pertenece al lenguaje y ofrece un sistema de reglas que permiten - la deducción de conexiones verbales, que los principios lógicos son la regularidad observada a posteriori en el lenguaje. Estas reglas son un instrumento para manipular el lenguaje y una teoría de representación de esto y que los mejores logros en matemática no se obtienen por el perfeccionamiento de la forma lógi ca sino por la modificación de la teoría básica misma. Luego la lógica es posterior a la creatividad matemática.

Brower notable matemático y fundador sistemático de esta corriente, no reconoce cualquier principio lógico como obligatorio ni reconoce la tarea matemática de deducir concluciones a partir de axiomas. Para él y su escuela las matemáticas no están limitadas con respecto a las reglas de la lógica y por esta razón las paradojas carecen de importancia al igual que los conceptos y construcciones que las impliquen.

Los matemáticos intuicionistas solo aceptan una parte de los principios de la lógica que les permiten expresar propiamente expresiones correctas en una matemática finita. A continuación nos referimos a uno de los principios lógico-formales que no usan y no aceptan en general como un método básico de demostración, se trata del principio del tercer excluido (tertio excluso). Exponemos en forma resumida las ideas más generales en las que se enmarca este principio dado el papel tan importante que juega en el método de demostración indirecta -conocido como método de reducción al absurdo-

Dentro de la lógica formal se consideran tres principios básicos, el de identidad, el de contradicción y el del tercero excluido. En el principio de identidad uno de los más importantes, se afirma que toda cosa es siempre idéntica a sí misma. En símbolos diremos $A=A$. La idea esencial que se contiene en éste principio es la de invariabilidad, es decir, una cosa sigue siendo la misma bajo cualquiera condiciones. Considerada en términos absolutos, o sea, la identidad absoluta, excluyendo la diferencia esencial de las cosas, de los conceptos. Esto es, si $(A=A)$ entonces, $A\neq\sim A$. Como ejemplos, un libro es idéntico siempre a él mismo, $3=3$, si $a,b\in N$, $a=7$ y $a=b$, entonces $b=7$.

Algunos axiomas de la geometría euclideana

a) si a iguales agregamos iguales, obtenemos iguales

b) si a iguales quitamos iguales, obtenemos iguales, etc.

no solo en matemáticas sino en otras ciencias encontramos aplicaciones de éste principio de identidad.

Del principio de identidad se desprende en forma inmediata el segundo que llamamos principio ó ley de contradicción. En este se afirma: A no es no-A, esto es, $A \neq \sim A$. Sobra decir que se trata solo de la expresión negativa del principio de identidad, de este modo el principio de contradicción constituye el complemento del de identidad. Este principio de contradicción significa básicamente la exclusión de la diferencia entre lo esencial de los objetos y los pensamientos que de ellos se tienen, es decir, siendo A siempre idéntica a sí misma, entonces no puede ser diferente de sí misma. De acuerdo a los dos principios el de identidad y el de contradicción inferimos que la diferencia y la identidad son excluyentes entre sí. Ejemplos

a) un número racional no puede ser no racional (irracional)

b) un triángulo no puede ser un cuadrado (un no triángulo) etc.

Dada la exclusión mutua entre la identidad y la diferencia tenemos entonces el tercer principio que llamamos del tercero excluido (tertio excluso), en él se afirma: si $A=A$ entonces, A no puede ser igual a no-A. Esto es $(A=A) \Rightarrow \sim(A=\sim A)$. O sea, cada cosa o es igual a sí misma, o bien es otra, considerada la disjunción en un sentido exclusivo. Por ejemplo dado A un número real, o A es racional o A es no racional, pero no secede que

A sea racional e irracional a la vez, pues dentro del conjunto de los números reales, considerando el de los números racionales respecto del de los irracionales, estos son conjuntos mutuamente excluyentes luego entonces, dado cualquier número real A, o A es racional y entonces no es no-racional, o bien A es irracional y entonces no es no-irracional, queda excluída cualquiera otra posibilidad. Encontramos pues que los principios de identidad y el de contradicción se combinan en el principio del tercero excluído. Ejemplo

Existen a y b irracionales tal que a^b es racional

Dado $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o irracional

1.- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional entonces $a=\sqrt{2}$ y $b=\sqrt{2}$ resuelve el problema.

2.- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional entonces $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b=\sqrt{2}$ resuelve el problema.

Esto sirve como un ejemplo de como una disjunción $P \vee Q$ tiene un significado diferente en matemáticas del que se considera en matemática constructiva. Por ejemplo sea

$P =$ "$a=\sqrt{2}$ y $b=\sqrt{2}$ tal que a,b son irracionales y a^b es racional"

$Q =$ "$a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b=\sqrt{2}$ son tales que a y b son irracionales y a^b es racional". Para probar $P \vee Q$ procedemos como sigue:

Ya sea P o $\sim P$. Pero $\sim P \Rightarrow Q \quad \therefore P \vee Q$

Esto no es aceptable porque no hemos probado realmente ni P ni Q, hemos supuesto únicamente que la ley del tercero excluido es necesariamente cierta.

Los tres principios anteriores constituyen los elementos de la lógica formal y es a partir de ellos que se ha desarrollado el edificio de la ciencia lógica en la cual existen otras leyes y desarrollos pormenorizados que para un estudio de la lógica si ese fuese nuestro objetivo podemos encontrar en los libros de texto. Una finalidad en este trabajo es buscar una mejor comprensión de los principios expuestos como base del método de reducción al absurdo y en la demostración indirecta, y así captar más aproximadamente el rechazo parcial a este método por parte del matemático intuicionista. Lo cual hacemos en la última sección del capítulo.

De momento diremos que el matemático intuicionista se restringe en el uso del principio del tercer excluído cuando se trata de aplicarlo a la demostración de existencia de conceptos que involucren entidades finitas ya que estas demostraciones son suceptibles de desarrollarse en un número finito de pasos y rechazan el uso de este principio de demostraciones que involucran entidades infinitas para ello según el intuicionismo es necesario proceder a realizar un número infinito de construcciones para demostrar así la existencia de un objeto matemático. Por ejemplo la demostración de existencia de un número infinito de números primos, que el vacio es subconjunto de cualquier conjunto, el teorema fundamental del álgebra, etc.

No aceptan la teoría trnasfinita de conjuntos de Cantor, sin embargo la negación de la ley del tercero excluído ha dado origen a una nueva posibilidad con el surgimiento de proposiciones indecidibles, como son el axioma de elección de Zermelo (1904) el cual dice "A todo conjunto S, cuyos elementos sean conjuntos no vacios, corresponde al menos una función f(x) tal que para cada elemento x de S, f(x) es un elemento del conjunto S. Se llama a f en este caso función de elección. O como la conjetura de Goldbach (1690-1764) referente a los números primos -

en que proponía a Euler en una carta (1742) si era capaz de probar la propiedad de que todo número par (exepto el 2 que es primo) puede ser representado como suma de dos números primos.

Esta corriente del intuicionismo matemático de la cual hemos señalado algunas limitaciones de orden metodológico que en ella se han adaptado por sus seguidores y con relación a la matemática clásica que ellos critican, en algunos puntos fundamentales, hay que decir que tales críticas no carecen del todo de razón si tomamos en cuenta que los intuicionistan han tratado de construir una nueva matemática sobre las bases de construcciones que ellos aceptan buscando con ello de encontrar bases sólidas para evitar algunas fisuras en los fundamentos de ésta ciencia al intentar rescatar a la matemática de las exageraciones del logicismo y el formalismo con que se vió amenasada a principios de este siglo con la aparición de paradojas en la teoría de conjuntos. Este intento no ha sido estéril como tampoco y en la misma dirección sucedió con las corrientes logicista con B. Russell y Withehead a la cabeza y la formalista comandada por D. Hilbert.

1.4. Los Números Naturales

¿Qué es el número natural? y ¿Qué es para el matemático intuicionista el número natural?. Abordaremos la primera pregunta a través de un bosquejo de la evolución histórica en el desarrollo de este concepto hasta la definición que hoy conocemos.

Los orígenes del número están diluídos en el transcurrir de las distintas etapas del desarrollo humano, el cual podría iniciarse desde la prehistoria. Considerando la mentalidad de --

tribus salvajes actuales muchas de ellas en Australia, otras de las Islas del Pacífico Sur, en América del sur o en Africa se - ha encontrado que poseen un sentido rudimentario del número, -- que no facultad de contar, el cual no rebasa el de algunos animales, entre los pájaros el cuervo por ejemplo, la abispa solitaria etc., el cual es muy limitado. A propósito me permito -- transcribir un caso narrado por Tobías Dantzig en su libro EL - NUMERO LENGUAJE DE LA CIENCIA.

"Un terrateniente estaba decidido a matar a un cuervo que-había hecho su nido en el mirador de la finca. Repetidas veces-había intentado sorprender al pájaro, pero en vano: cuando el - hombre se aproximaba, el cuervo abandonaba su nido para posarse a la expectativa en un árbol distante y no volvía al mirador -- hasta que el hombre se hubiera alejado. Un día el propietario - recurrió a un ardid: dos hombres entraron en la torre; uno quedó adentro y el otro salió y se alejó. Mas el pájaro no se dejó engañar y esperó hasta que el segundo hubo salido a su vez. El-experimento se repitió los días siguientes con dos, tres y cuatro hombres, pero siempre infructuosamente. Por fin, cinco hombres entraron en la torre y cuatro de ellos después salieron, - mientras el quinto quedaba adentro. Entonces el pájaro perdió - la cuenta; incapaz de distinguir entre cuatro y cinco, volvió - en seguida a su nido" (8).

Por ejemplo, Curr, citado por T. Dantzig, sostiene que al-estudiar a los australianos primitivos "pocos indígenas tienen-capacidad para discernir el cuatro, y que ningún salvaje australiano es capaz de percibir el siete, como número de objetos de un conjunto. Los hombres del Africa del sur no poseen otras palabras numéricas que uno, dos y muchos..." (8).

Siguiendo con T. Dantzig "Un ejemplo notable de carácter -

extremadamente concreto del concepto primitivo de número nos está dado por la antigua lengua Thismshian de una de las tribus de la Columbia Británica. Existen en ella siete conjuntos de términos numéricos diferentes: uno para los objetos chatos y los animales, otro para contar personas, otro para los objetos grandes y árboles, otro para las canoas, otro para las medidas, y finalmente otro para contar los objetos distintos de los anteriores. El último es probablemente el resultado de un desarrollo posterior; los otros son reliquias de tiempos antiguos en los que los indígenas no habían aprendido a contar" (8) p. 21.

En muchos pueblos antiguos y en distintas épocas según su grado de desarrollo se ha encontrado la acción de contar mediante los dedos de la mano como antecedente a lo que llamaríamos una técnica de contar. No vayamos más lejos, en la actualidad podemos observar cómo los niños de losprimeros años escolares se les enseña a contar con los dedos de sus manos para que se ayeden al realizar operaciones sencillas de sumas. Este hecho encuentra una explicación en el campo de la sicología y nos remite a representarnos al hombre primitivo el cual en alguna época fué su únuco medio de realizar simples cálculos que le eran necesarios en su vida cotidiana.

Según nos refiere T. Dantzig en su ya citada obra acerca de los vestigios de la operación de contar que se encuentran en "...la mayoría de los idiomas primitivos, así el número cinco está representado por la palabra mano,diez por la expresión dos manos y algunas veces por hombre. En muchos otros los nombres de los primeros cuatro números son idénticos a los nombres dados a los cuatro dedos..." . (8)

pese a la gradual pérdida del sentido de las palabras aún subsisten las" impresiones digitales " por ejemplo si comparamos del sánscrito las palabras pantcha (cinco) con la palabra persa pentcha (mano), en el ruso la palabra piat (cinco) con otra del mismo idioma piast que significa la mano derecha extendida.(8), p.25.

De esta manera, cuando el hombre al ir desarrollando y enriqueciendo cada vez más su lenguaje, las palabras fueron sustituyendi las imágenes, y los objetos concretos considerados - como modelos originales, a través de un largo proceso de abstracción fueron siendo adoptados como nombres de los números. - El desarrollo del concepto de número es así un largo preceso -- que en los pueblos primitivos hubo de darse a través de apariamientos al hacer incisiones o marcas en una vara o algún tronco, o bien tomar un buen puño de piedrecillas para hacer corresponder por cada marca o piedra un objeto de otra colección (de flechas, pieles, etc.) hasta agotar una de las colecciones o que se agotaran las dos al mismo tiempo.

Pecisamente en la realización de ese apareamiento están - implícitos dos de los conceptos más importantes dentro del pensamiento matemático, a saber: correspondencia y sucesión, los cuales constituyen la síntesis de una experiencia de siglos a partir de la cual habría de irse formando el concepto de número como una correspondencia biunívoca (apareamiento) entre los elementos de dos conjuntos hasta llegar a establecer en forma concreta y heterogénea esa noción de pluralidad tan característica del hombre primitivo, en lo que hoy es para nosotros el - concepto abstracto de número como una propiedad de correspondencia de los elementos de una colección al hacer corresponder

corresponder uno y solo un número a cada elemento del conjunto- que no es sino la operación de contar. Todo este proceso llegaría a encontrar una mejor expresión en la India donde con la incorporación del cero y la posterior introducción delos números- por los Arabes en España han llegado hasta nosotros: esto es,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

que conocemos como números naturales.

1.5. Principio del Tercero Excluido. Reducción al Absurdo

El principio de tercero excluído el cual es una combinación de los principios de identidad y de contradicción como ya se ha asentado en la sección 1.3 anterior, afirma que dada una proposición A, o A es verdadera, o bien, A es Falsa, pero A no puede ser verdadera y falsa a la vez, es el fundamento lógico del método de demostración por reducción al absurdo o también llamado de demostración indirecta (12).

Este método consiste en lo siguiente: dada una proposición P, la cual queremos demostrar a partir de un conjunto de premisas S. Si no es posible deducir la proposición P diremos del - conjunto de premisas S, hemos considerado que P es falsa y podemos supOner que no-P ha de ser cierta, luego entonces la agregamos como una nueva premisa más al conjunto de premisas originales S. Si a partir del conjunto de premisas $S \wedge (\sim P)$ podemos deducir una contradicción cualesquiera digamos $A \wedge \sim A$. Tenemos - entonces que $\sim P \Rightarrow A \wedge \sim A$ lo cual es un absurdo ya que $\sim P$ se supuso cierta, de donde concluimos que la proposición P es verdadera.

Algunos ejemplos:

1.- Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen dos - enteros $[p\ ,\ q]=1$ tales que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ de donde $(\sqrt{2})^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$, por tanto, $2=\frac{p^2}{q^2} \longrightarrow p^2=2q^2 \longrightarrow p^2$ es par y enton_ ces p debe ser par, luego es de la forma $p=2m$, $m \in Z$. Tene_ entonces que $4m^2=2q^2 \longrightarrow 2m^2=q^2 \longrightarrow q^2$ es par y por tanto q debe ser también par, y es de la forma $q=2n$, $n \in Z$. Encontramos que p , q tienen el factor común 2, lo cual -- contradice la hipótesis de que eran irreducibles.

2.- Que el conjunto vacío ϕ es subconjunto de cualquier- subconjunto.

Demostración: Sea A cualquier conjunto, y ϕ el con_ junto vacío. Supongamos que $\phi \not\subset A$. Si $\phi \not\subset A$, existe al - menos $x \in \phi$ (que no tiene elementos) tal que $x \notin A$, lo cual es una contradicción.

3.- Euclides. Prueba de la infinitud del conjunto de los - números primos. Suponemos que la hipótesis es falsa. Significaría entonces que existe un número finito de nú meros primos.

Demostración: Supongamos que el número de números primos es finito, es decir,

$$2, 3, 5, 7, \dots, P$$

en donde P es el mayor número primo. Si construimos un número $B = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots P + 1$ donde B es distinto de los P primos, es claro que ningún número primo P divide a B ya que el residuo siempre es 1, como B no es primo, habrá de ser divisible por algún número primo incluso B mismo, el cual no está en la lista, lo que contradice nuestra hipótesis de que el número de primos es finito.

1.6. Constructibilidad

Constructibilidad real en matemática intuicionista significa existencia del objeto matemático que se establece como existente, de modo tal que el objeto o "construcción matemática" sea exhibida explícitamente de acuerdo al criterio de constructibilidad. Tal criterio es considerado como el resultado de practicar la matemática intuicionista ya que solamente los objetos constuidos de esta manera tienen existencia matemática.

Los objetos así determinados son categóricos, es decir, constituyen verdades necesarias, universales que no requieren justificación de su legitimidad mediante el elnguaje de la lógica o la formalización, pues esto último es solo la expresión lingüística para comunicar tales construcciones.

Para el intuicionista la matemática se inicia a partir de la intuición básica del conjunto de los números naturales 1,2,3, ... los cuales afirma son claros a la intuición. Estos son construcciones originales, esto es, entidades abstractas que nacende la pura intuición y con el sustrato común a partir del cual-se desarrolla toda la matemática. Para finalizar, decpués de la exposición en las secciones precedentes sobre los razgos más importantes del intuicionismo desarrollamos a continuación algunos ejemplos de matemáticas constructivas

En la sección 1.5 se demostró de manera no constructiva que $\sqrt{2}$ es un irracional. Ahora se da una prueba constructiva

Demostración: Dado $\sqrt{2}=\{a_n\}$, donde $\{a_n\}$ se define como un-

número real igual a una sucesión racional constante.

Un número real α es irracional si $\alpha \# r,\ \forall\ r \in Q$.

$$\left|\frac{p^2}{q^2}-2\right| \geqslant \frac{1}{q^2}\ \forall\ p,q \quad \text{dado } \sqrt{2}=\{a_n\} \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{p^2}{q^2}-a_n^2\right| > \frac{1}{(q+1)^2} \quad . \quad \text{Supongamos que } 0<\frac{p}{q}<2$$

para n grande

$$\left(\frac{p}{q}+a_n\right)\left(\frac{p}{q}-a_n\right) > \frac{1}{(q+1)^2} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}+a_n\right) > \frac{1}{\left(\frac{p}{q}-a_n\right)(q+1)^2} >$$

$$\frac{1}{4(q+1)^2}$$

$$\frac{p}{q} \neq 2 \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} \neq a_n^2 \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} \neq 2 \Longrightarrow \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}.$$

II. DIFERENTES TIPOS DE INTUICION

2.1. Intuición Analógica

Hemos dado una acepción del término "intuición al inicio del primer capítulo en el cual se presentan además distintas concepciones de varios filósofos y de algunos principales matemáticos intuicionistas. Al referirnos a los diferentes tipos de intuición se considera que partiendo de la observación de los objetos, o relaciones entre objetos, críticas y deducciones intervienen todas las disposiciones de orden sicológico incluyendo los diversos tipos de intuición o inducciones que ayudan a la comprensión o interpretación de los objetos en general y en particular los objetos matemáticos.

En gran parte el matemático no puede apoyar sus razonamientos abstractos sobre intuiciones visuales o geométricas que se apoyan en ellas, dado que intervienen las diferencias de temperamento y previa experiencia máximo que en todo trabajo teórico se impone la capacidad de interpretación y de representación al intervenir un conjunto de ideas representables por medio de signos verbales o visuales. El que en las fases iniciales del trabajo se recurra al uso de elementos intuitivos, constituye un refuerzo sicológico más que de orden lógico, y que en la enseñanza matemática tiene como fin generar y comunicar ideas sin que ellos sustituya al pensamiento matemático.

Entre los diferentes tipos de intuición a los que se recurre más frecuentemente nos referimos a la intuición analógica. Este método orienta al investigador en la analogía observada los aspectos de semejanza y diferencia entre los elementos, siendo este aspecto lo primordial del descubrimiento. Este tipo de intuición sugiere algunas similitudes entre dos nociones matemá ticas, o dos problemas, o dos teorías para lo cual, es necesa-- rio ser cuidadosos para evitar caer en contradicciones.

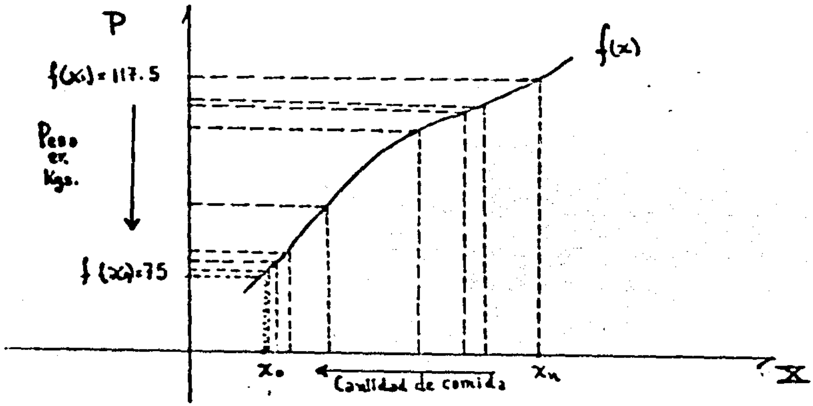
A continuación nos referimos a la palabra "límite", respec to a la cual establecemos una analogía entre distintos usos en lenguaje y como un concepto matemático.

i) Una persona del D.F. que se dirija al estado de Queré- taro, en cualquier medio, en la medida que avanza se va aproximando cada vez más a la frontera o límite con el estado - mensionado.

ii) En la fiesta de cumpleaños de Jesus, Juan infla un glo bo y ante su curiosidad de verlo crecer más le sigue - soplando pero su mamá lo ve y le exclama Juan, ¡espera que puedes reventar ese globo! -y le comenta a su ami- ga- casi lo truena, ya estaba pasándose el límite.

iii) Se trata de una persona con problemas de obesidad que- pesa por ejemplo 117.5 Kgs. y al consultar al especia- lista, este le somete a una dieta en la que tendrá que reducir gradualmente las cantidades de comida habitua- les del paciente con el fin de que este adquiera su -- "peso normal" digamos de 75 Kgs. Después de unas sema- nas de tratamiento, el especialista le dice que ya se- aproxima a los límites de su peso normal. Podemos ex-- presar lo anterior mediante una idea gemétrica en un - plano cartesiano en la siguiente figura.

Si consideramos una función f, de peso en relación a - la cantidad de comida x



Observamos que a medida que la cantidad de comida x disminuye (tiendo) a una cierta cantidad x_0, el peso f(x) se aproxima al "peso normal" $f(x_0)=75$ Kgs. Análogamente, en el caso contrario, que estando muy por abajo do su peso tenga que aumentar gradualmente la cantidad de comida habitual para adquirir su peso normal digamos 7 Kgs. podemos observar que mientras en el caso del obeso $x \to x_0$ por la derecha, en este caso $x \to x_0$ por la izquierda, de tal manera que f(x) se aproxima a $f(x_0)=75$ Kgs.

Matemáticamente en los escritos de Cauchy se encuentra la definición siguiente de límite (6) p. 312.

"Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama el límite de todos los demás."

La cual expresa con exactitud la idea intuitiva de límite aunque es verbal más que numérica.

De los ejemplos dados y la definición de Cauchy encontramos una analogía entre el uso cotidiano de la palabra límite -

con el concepto matemático de límite ya en ambos observamos la idea de aproximación.

Si recordamos a Arquímedes (287-212 a.c.) matemático genial y gran inventor. De entre sus valiosos trabajos científicos mensionamos un manuscrito dirigido a Eratóstenes (276?-195? a.c.) el cual hoy conocemos bajo el título de "El método", hallado casulmente en un pergamino en Constantinopla (1906) (5). Allí relata como descubrió algunos teoremas sobre curvatura y cuadratura. En él expone un procedimiento por métodos geométrico-mecánicos rigurosos a través de los cuales llegó a descubrir propiedades como áreas, vólumenes, centros de gravedad que después demostraba rigurosamente con recursos puramente geométricos (cfr. 2').

Puede decirse que en El Método, Arquímedes en cierta forma relata parte del proceso mental que consiste en un método-mecánico aplicado por él en sus descubrimientos pero que no mensiona en sus escritos científicos . (cfr. 1) Reproducimos lo que en una parte de la carta, previa a los lemas y proposiciones matemáticas relata. (...Por otra parte, reconociéndote, como ya he dicho, un estudioso y excelente maestro de filosofía y que sabes apreciar, llegado el caso, las investigaciones matemáticas que se te presentan, he pensado en exponerte e ilustrar en este mismo libro la naturaleza particular de un método que te permitirá eventualmente adquirir con cierta facilidad, proposiciones matemáticas mediante consideraciones mecánicas. Por lo demás estoy convencido de que éste método mostrará también su utilidad en la demostración misma de las proposiciones, pues algunas de ellas que se tornaron para mi evidentes primero mediante este método mecánico, las demostraciones de inmediato por la --

geometría, pues la investigación mediante este método no comporta una verdadera demostración. Pues sin duda es más fácil encontrar la demostración después de haber adquirido con éste método un cierto conocimiento del asunto, que buscarla sin tener conocimiento previo alguno) (cfr.)

Vemos que para Arquímedes el método de procedimientos mecánicos constituían una base de exploración de teoremas y no de prueba matemática dada la naturaleza del espiritu griego, reacio a la aplicación empírica-experimental.

En particular el matemático además de intuir también se enfrenta a la solución de problemas y a la necesidad de verificar sus intuiciones. Desde luego teniendo siempre en mente no confiar absolutamente en la intuición ya sea de tipo heurístico o conjetural, pues aceptar sin pruebas la verdad de nuestras intiociones puede resultar contraproducente, pero aplicar nuestra intuición bajo la posibilidad de su certeza, es más razonable - por ejemplo Arquímedes (287-212 a.c.). En resumen, es natural - que la etapa inductiva preceda la fase demostrativa -o mejor dicho, constructiva-. Esto es, primero intuir, luego demostrar. - Conlcuiremos diciendo que en el proceso inductivo en un primer momento adquirimos un conocimiento parcial de los objetos individualizados y a partir de ahí en una última fase abordar otro nivel de conocimiento sobre una clase de objetos al establecer su demostración general de una cierta propiedad.

2.2. Inducción

En términos generales la inducción se concibe como el paso de lo particular a lo general. Más precisamente, un razonamiento en el que a partir de proposiciones particulares se infiere una proposición general cuya validez se deduce de la validez de las primeras (9). En las ciencias experimentales la inducción se considera como un proceso de síntesis de observaciones y experimentos aislados a través del cual llega a establecerse un principio o una ley general, por ejemplo la ley de gravitación universal como una síntesis de observaciones de la caída de los cuerpos hacia el centro de la tierra. El experimento de Galileo del deslizamiento de un cuerpo sobre un plano inclinado etc. El grado de certeza de la inducción empírica llega a establecerse dependiendo del número de observaciones particulares y de confirmación del fenómeno (7).

En esta sección nuestro interés reside en estudiar la inducción desde un punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, tomando en cuenta la naturaleza heurística de este tipo de razonamiento además de la importancia que tiene en sus aplicaciones dentro de las matemáticas como método de demostración de proposiciones de las ramas que se tratan de explicar en términos de los números enteros, pues basta considerar lo esencial que resulta en el estudio y desarrollo de la aritmética.

La inducción como un modo de razonamiento basado en la observación de hechos particulares conforma un proceso a través del cual es posible identificar ciertas regularidades del fenómeno por medio de las cuales podemos llegar a enunciar o establecer una idea general o una hipótesis en la cual se plantea un hecho que puede ser muy general. En cierto modo permite adivinar cuál debe ser según todas las apariencias, la solución, como señala I.S. Sominski (16). Precisamente en este hecho se revela el aspecto heurístico-intuitivo el cual esta implícito en el proceso mismo de observación mediante el cual es posible captar más claramente alguna propiedad o regularidad del fenómeno, con visos de generalidad. Hay que decir que al proceder inductivamente podemos llegar, tanto a ceclusiones válidas, o como en otros casos a conclusiones no válidas. Lo esencial empero es la riqueza heurística implícita en la acción orientada a determinar una nueva propiedad general. Lo anterior se precisa mejor con algunos ejemplos de inducción no plausible y en seguida otras de inducción admisible

1. Si consideramos las sigu ientes proposiciones particulares de la sucesión que inicia en 125 en la siguiente - forma

(1)	125	es	divisible	por	5	esto es,	$25 \times 5 = 125$
(2)	130	"	"	"	5	" "	$26 \times 5 = 130$
(3)	135	"	"	"	5	" "	$27 \times 5 = 135$
(4)	140	"	"	"	5	" "	$28 \times 5 = 140$
(5)	145	"	"	"	5	" "	$29 \times 5 = 145$

de las proposiciones (1), (2), (3), (4), (5) obtenemos la proposición, todos los numeros de tres cifras que -- terminan en 5 ó 0 son divicibles por 5, y si de aqui -- concluimos la proposición general, todos los números de tres cifras son divicibles por 5, tal proposición es falsa.

2. L. Eules (1707-1783) estudió el siguiente trinomio -- x^2+x+41, (16). Si x la sustituimos sucesivamente por los enteros no negativos 0,1,2,3,....,14,..etc., obtene respectivamente

$0^2+0+41=41$ $\quad 5^2+5+41=71$ $\quad 10^2+10+41=151$

$1^2+1+41=43$ $\quad 6^2+6+41=83$ $\quad 11^2+11+41=173$

$2^2+2+41=47$ $\quad 7^2+7+41=97$ $\quad 12^2+12+41=197$

$3^2+3+41=53$ $\quad 8^2+8+41=113$ $\quad 13^2+13+41=223$

$4^2+4+41=61$ $\quad 9^2+9+41=131$ $\quad 14^2+14+41=251$ etc.

los números 41, 43, 47,...,251 que son primos. ¿Podríamos inferir que si continuamos sustituyendo a x por los enteros sucesivos siempre vamos a obtener un número primo?, veamos, para

$x=15,\quad 15^2+15+41=281$ $\qquad x=20,\quad 20^2+20+41=461$

$x=16,\quad 16^2+16+41=313$ $\qquad x=21,\quad 21^2+21+41=503$

$x=17,\quad 17^2+17+41=347$ $\qquad x=22,\quad 22^2+22+41=547$

$x=18,\quad 18^2+18+41=383$ $\qquad x=23,\quad 23^2+23+41=593$

$x=19,\quad 19^2+19+41=421$ $\qquad x=24,\quad 24^2+24+41=641$,

etc.

Todo parece indicar que así es, pero al llegar a 40 veamos qué sucede

$x=40,\quad 40^2+40+41=1681=41^2$ el cual es un número compuesto. Encontramos pues 40 casos particulares válidos pero inmediatamente después cuando sustituimos $x=40$, no se cumple lo que parecía ser un procedimiento general para determinar números primos.

3.- Este otro ejemplo dado por I.S. Somiski en su ya citada obra (16). Si en la expresión $991n^2+1$ sustituyendo n sucesivamente por los naturales 1,2,3,... ¿Podríamos obtener el cuadrado de un número? ¡ Por ejemplo, -

realizando sucesivas sustituciones

$991(1)^2+1=992$ no

$991(2)^2+1=3965$ no

$991(3)^2+1=8920$ no

$991(4)^2+1=15857$ no

$\vdots$

$991(19)^2+1=357752$ no

$991(20)^2+1=396401$ no

$\vdots$

Parecería que jamás obtendríamos el cuadrado de un número, no obstante que dedicáramos muchos días o meses tal vez hasta años pero, esto no es razón para deducir que ningún número de este tipo es un cuadrado, bien puede tratarse de que el valor mínimo de n para que $991n^2+1$ sea un cuadrado, sea muy grande. Tal hecho sucede efectivamente para

$$n=12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767.$$

Los ejemplos anteriores nos aclaran algunos puntos, por ejemplo nos ilustra cómo, aplicar la inducción con descuido obtenemos una conclución sin valides. Los ejemplos 2 y 3 resultan interesantes, así, en el 2 el proceso inductivo es válido para un número finito de casos, mientras que en el 3, bien pareciera que jamás podríamos encontrar un valor de n tal que un número tipo $991n^2+1$ fuera el cuadrado de otro, sin embargo llega a --

cumplirse para un enorme valor de n. Se trata de inducciones incompletas como sucede en las ciencias experimentales. De estos ejemplos deducimos lo siguiente:

- Se muestra claramente que en muchos casos la intuición que tenemos a cerca de la posibilidad de lo que pareciera llegar a ser una idea general -en que se dé un comportamiento regular- eslimitada, y que la inducción apoyada en nuestra intuición como recurso debe realizarse cuidadosamente.

- La intuición constituye, en todo caso un recurso importante, de valor relativo, mediante el cual nos ayudamos a visualizar y deducir algunos resultados, los cuales han de someterse a prueba para verificar su validez.

A continuación presentamos un ejemplo en el que se muestra una inducción completa. Si consideramos el cuadrado de cada número de la sucesión de enteros no negativos 0,1,2,3,... tenemos

$$
\begin{array}{ll}
0^2=0 & \\
 & ;\ 1-0=1=2(0)+1 \\
1^2=1 & \\
 & ;\ 4-1=3=2(1)+1 \\
2^2=4 & \\
 & ;\ 9-4=5=2(2)+1 \\
3^2=9 & \\
 & ;\ 16-9=7=2(3)+1 \\
4^2=16 & \\
 & ;\ 25-16=9=2(4)+1 \\
5^2=25 & \\
 & ;\ 36-16=11=2(5)+1 \\
6^2=36 & \\
 & ;\ 49-36=13=2(6)+1 \\
7^2=49 & \\
 & ;\ 64-49=15=2(7)+1 \\
8^2=64 & \\
 & ;\ 81-64=17=2(8)+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
11^2=121 & \\
 & ;\ 144-121=23=2(11)+1 \\
12^2=144 & \\
 & ;\ 169-144=25=2(12)+1 \\
13^2=169 & \\
 & ;\ 196-169=27=2(13)+1 \\
14^2=196 & \\
 & ;\ 225-196=29=2(14)+1 \\
15^2=225 & \\
 & ;\ 256-225=31=2(15)+1 \\
16^2=256 & \\
 & ;\ 289-256=33=2(16)+1 \\
17^2=289 & \\
 & ;\ 324-289=35=2(17)+1 \\
18^2=324 & \\
 & ;\ 361-324=37=2(18)+1 \\
19^2=361 & \\
 & ;\ 400-361=39=2(19)+1
\end{array}
$$

$$9^2=81 \qquad ;100-81=19=2(9)+1 \qquad 20^2=400 \qquad ;\ 441-400=41=2(20)+1$$
$$10^2=100 \qquad ;121-100=21=2(10)+1 \qquad 21^2=441 \qquad ;\ \text{etc.}$$
$$11^2=121$$

Comparando la diferencia entre el cuadrado de un número y el cuadrado del anterior, como se puede ver en la tabla anterior, tales diferencias, son un subconjunto -el de los números impares positivos-. Además cada una de estas diferencias es respectivamente el doble producto del número anterior en la serie original más 1, por ejemplo

$17=9^2-8^2$ y $17=2(8)+1$ esto sucede regularmente

en cada caso como puede observarse. Intuímos que si a cada diferecnia entre dos cuadrados consecutivos agregamos el cuadrado del menor obtenemos el cuadrado de su sucesor, por ejemplo

$17+8^2=17+64=81=9^2$. Seguimos observando que esto sucede regularmente en todos y cada uno de los casos que se muestran. Por ejemplo el último

$41+20^2=41+400=441=21^2$. Nos vemos tentados a suponer que esto puede ser válido más en general. Lo haremos con elementos de segmentos más adelante. Por ejemplo,

$$125^2=15625$$
$$;\ 251=2(125)+1$$
$$126^2=15876$$
$$;\ 253=2(126)+1$$
$$127^2=16129$$
$$;\ 255=2(127)+1$$
$$128^2=16384$$

•

•

•

$$387^2 = 149760 \quad ; \; 775 = 2(387) + 1$$
$$388^2 = 150544 \quad ; \; 777 = 2(388) + 1$$
$$389^2 = 151321 \quad ; \; 779 = 2(389) + 1$$
$$390^2 = 152100$$

Observamos que las diferencias entre dos cuadrados consecutivos siguen siendo números impares sucesivos y que en cada caso la diferencia es el doble producto del número anterior en la secesión original más 1, y además que si a cada diferencia, le agregamos el cuadrado del número anterior en la sucesión obtenemos el cuadrado de su sucesor, por ejemplo,

$$251 + 125^2 = 251 + 15625 = 15876 = 126^2$$
$$253 + 126^2 = 253 + 15876 = 16129 = 127^2$$
$$255 + 127^2 = 255 + 16129 = 16384 = 128^2 \quad \text{etc.}$$

de lo anterior podemos exrepsar la siguiente conclusión

Si a, b son dos enteros consecutivos mayores que cero, entonces $b^2 = a^2 + 2a + 1$. Vamos a ensayar con cualesquier número,- por ejemplo

Si $b = 35428$ deberemos verificar que

$$(35428)^2 = (35427)^2 + 2(35427) + 1 =$$

$$(35428)^2 = 1\ 255\ 072\ 329 + 70854 + 1 = 1\ 255\ 243\ 184$$

lo cual se verifica al realizar el producto $(35428)^2$.

Podemos entonces establecer la expresión $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

mediante la cual conocemos cierto comportamiento entre los cuadrados de números enteros consecutivos mayores que cero, esto es, que el cuadrado de un entero $b > 0$ cualesquiera es su número anterior más uno al cuadrado o sea $b^2 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ y esta fórmula es bien conocida por cualquier estudiante de la secundaria.

Queda una pregunta, ¿es cierta esta propiedad en general? pues el proceso puede extenderse en una infinidad de casos, ¿qué nos puede garantizar que se cumpla para todos?. Respondemos a esa pregunta en el siguiente apartado.

2.3. Principio de Inducción Completa

Maurolico (1494-1574) fué el iniciador del llamado método de inducción completa perfeccionado en el siguiente siglo por Jeacs Beornoulli de la familia de matemáticos. Según nos refiere Francisco Vera (17) p. 151. Este método consiste en el hecho de que podemos considerar a todo número natural como suma de unidades pues partiendo del cero se forman todos los números naturales por adiciones sucesivas de la unidad, de manera que al verificarse una propiedad para 1, y si se supone verdadera para cierto valor, pasamos a demostrarla para el siguiente, y así la habremos demostrado para todos los valores.

En matemáticas, para afirmar la validez general de una proposición recurrimos a veces al llamado método de inducción matemática el cual se basa en el principio deinducción completa, este consiste en lo siguiente: Una proposición es válida para todo número natural n si,

a) es válida para $n = 1$ (base de inducción)

b) Suponemos que sea válidad para $n = k$ (hipótesis de -inducción o paso inductivo)

c) Y hemos de demostrar que es válida para $n = k+1$

de manera que una demostración basada en el principio anterior-la llamamos demostración por el método de inducción matemática-y bajo el cumplimiento de las condiciones señaladas habremos --establecido que la proposición es válidad para todo número natural n.

Debe decirse que la expresión "inducción matemática" corresponde a una asociación con los razonamientos inductivos en las-ciencias empíricas, naturales (y sociales), en las cuales la inducción es incompleta, ahí, las síntesis elaboradas son el más-fiel reflejo de manifestaciones de sucesos o fenómenos observados, y estudiadas s. ı regularidades que se repiten en un cierto proceso. De la observación y estudio de esas regularidades ---siempre en número finito- llégase a establecer principios o leyes para explicarnos el fenómeno, de aquí que se consideren inducciones incompletas.

En la inducción matemática en todo caso se comprueba la base inductiva como un caso particular, el siguiente, paso in--ductivo, es una proposición general que no requiere de hipóte--sis particular alguna y se demuestra de acuerdo a los rigurosos patrones de razonamiento deductivos, de aquí que la inducción -matemática se considere una inducción completa. Es un método de demostración matemática esencial para la demostración de teoremas en aritmética y también en otras ramas de las matemáticas -que esten fundadas sobre la aritmética de los números naturales, como la teoría de los números racionales o los números reales o tal vez demostración de teoremas de naturaleza geométrica y otros atendiendo a su contenido (16).

En resumen, la importancia de la inducción matemática se revela en su naturaleza constructiva y heurística como ya vimos en el apartado anterior de esta sección, que se realiza en el paso de uno o varios objetos particulares a nuevos objetos, mediante una o varias operaciones, lo cual puede considerarse como base de un método inductivo de definición o de demostración.

En seguida tenemos algunos ejmplos en donde se aplica la inducción matemática.

1.- Encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados. (no necesariamente convexo)

Solución. En principio sabemos que la suma delos ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^{o} y que la suma de los ángulos interiores de todo cuadrilátero es igual a 360^{o}, pues todo cuadrilátero puede ser dividido por dos triángulos. (fig. 1)

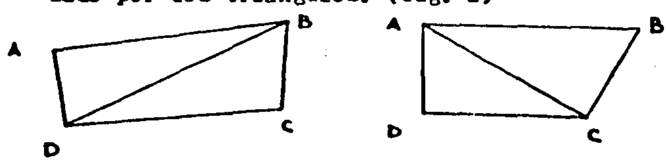
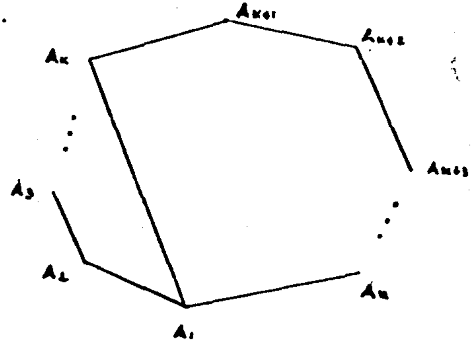


Fig. 1

Supongamos demostrado que para un polígono de k-lados, donde $k<n$. La suma de los ángulos interiores-

es $(k-2)180^{\circ}$ y considérese un polígono de n lados - cualesquiera $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en la figura



Trazando en el polígono (fig. anterior) la diagonal $A_1 A_k$ que lo divide al polígono de n lados en dos uno de k lados y otro de n-k 2 lados

Por hipótesis de inducción, la suma de los ángulos interiores del polígono de k lados es $(k-2)180^{\circ}$ y la del polígono de $n-k+2$ lados es $[(n-k+2)-2]180^{\circ} = (n-k)180^{\circ}$ de donde obtenemos que la suma de los ángulos interiores del polígono de n lados es

$$(k-2)180^{\circ} + (n-k)180^{\circ} = (n-2)180^{\circ}.$$

2.- Demostrar que

$$1.2+2.3+3.4+ \ldots\ldots + (n-1).n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Solución. para $n=2$

1.- $1.2 = \frac{1.2.3}{3}$ base de inducción

2.- Si $1.2+2.3+3.4+\ldots.+(n-1).n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

hipótesis de inducción.

3.- Por Demostrar que se cumple para $n+1$.

Tenemos

$$1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-1).n \quad n(n\ \ 1) \quad \frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)+3n(n+1)}{3}$$

$$\frac{n(n+1)((n-1)+3)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

con lo que se termina la demostración.

III.-LA INTUICION EN EL QUEHACER MATEMATICO

3.1. Papel de la Intuición en el Quehacer Matemático

En un sentido amplio, la expresión quehacer matemático la consideramos dada en varios tipos de actividad, principalmente la investigación en el terreno teórico y de aplicación así como el de la enseñanza de las matemáticas. Intentaremos en este capítulo mostrar brevemente algunas ventajas a la intuición como recursi heurístico así como sus limitaciones que tiene en las matemáticas.

Los profesores que nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio - Colegio de Ciencias y Humanidades, Colegio de Bachilleres o la Escuela nacional preparatoria - así como en los primeros años de una carrera que en su plan de estudios incluye cursos de matemáticas, enfrentamos la necesidad de que los objetos que enseñamos- conceptos, definiciones, demostraciones etc.,- sean comprendidos por los alumnos lo más claramente posible. Para tal fin, nos auxiliamos del empleo de deversos elementos como son; expresiones o giros del lenguaje familiar al alumno, figuras, analogías con algunos conceptos matemáticos u otros objetos a veces de muy distinta naturaleza de los conceptos que estudiamos, procedimientos heurísticos . Todo esto como recursos intuitivos cuya finalidad es destacar lo más importante de los objetos que se presentan,así que el alumno se sienta estimulado a experimentar la obtención de resultados conjuntamente con el profesor. En el nivel medio superior encontramos que tales procedimientos constituyen casi siempre lo que debiera ser el paso previo a un tratamiento más abstracto.Se considera así en razón de que en ese período de transición-el salto del nivel medio al inicio de la carrera- es una etapa forma_ tiva a la que le sucede otra que podemos considerar formativo-informativa, de consolidación de madurez del alumno para abordar - procesos de formalización más complejos.

3.2. Heurística

En la actualidad podemos decir, la heurística se concibe - como un modo conciente de comprender mejor un método que nos conduzca a la solución de problemas, esto es, de las operaciones - mentales típicamente útiles en este proceso, teniendo presente - el trasfondo lógico así como el sicológico. Es decir, en la experiencia que obtenemos de la resolución de problemas así como de la observación de los métodos aplicados por otros, se constituye una base sobre la cual se construye la heurística.(13)

En un proceso así. como dijera G. Polya hay que buscar los " puntos comunes de las diferentes maeras de tratar los distintos problemas y determinar luego las características generales independientes del tema del problema ", de manera que al resolver un problema es importante considerar distintas variaciones como el análisis y la síntesis de sus elementos, referirnos a - la definición de algunos de sus términos, utilizar los recursos que ofrece la generalización,la particularización y la analogía etc.

En esta búsqueda se encuentra implícito lo que llamaremos un razonamiento heurístico mediante el cual podemos darnos --- una"base razonable en una variación en una base de confianza"- lo cual constituye el papel fundamental de este tipo de razonamiento. (13) pp. 101-114

En el razonamiento heurístico la"conclusión" que se obtiene no es determinante, es decir, que se considere completa, sinoque examinando la factibilidad de la conclusión, esto solo hace más admisibles las premisas, lo cual proporciona cierta seguridad - para una mejor aceptación de éstas, por ejemplo, en un razonami ento heurístico, digamos ;

$A \rightarrow B$	Premisa
B	Premisa
A	" conclusión más factible "

mientras que en un razonamiento demostrativo la conclusión queda completamente dèterminada por la naturaleza lógica de las premi sas, por ejemplo;

Modus Tollens ó Silogismo Hipotético

$A \rightarrow B$	Premisa	$A \rightarrow B$	Premisa
$\sim B$	Premisa	$B \rightarrow C$	Premisa
$\sim A$	Conclusión	$A \rightarrow C$	Conclusión

observamos pues que la"conclusión" en un razonamiento heurístico es diferente de las premisas en su naturaleza lógica, no corres ponde más que parcialmente a la base sobre la cual descansa la- "conclusión", quedando una parte no expresada en razones tal vez sin formular lo cual conlleva a un exámen de la hipótesis.

La importancia del razonamiento heurístico pese a su naturaleza no demostrativa, si se considera desde el punto de vista de la demostración lógica pura, radica en la visualización de - caminos posibles a seguir en los problemas por resolver o pr de mostrar basándose tanto en los conocimientos que adquirimos, ya asimilados o en proceso de aprendizaje.

Es posible que no captemos el objeto, o sus relaciones con otros objetos en una primera intuición pero intentándolo y de-acuerdo con el éxito obtenido y después de varios ensayos y modificaciones acicateados por la observación o conducidos por la analogía podemos lograr una intuición más satisfactoria .

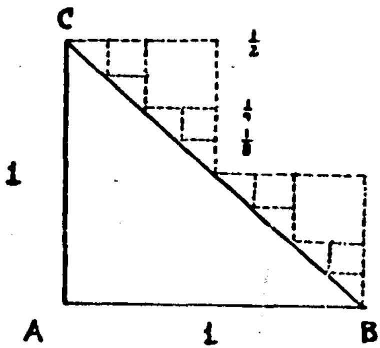
Creemos que en los párrafos anteriores se expresa una idea en términos generales como parte del proceso que comunmente se-vive en la actividad de la enseñanza de las matemáticas, entendiendo que tal proceso es en cierto modo una reproducción de desarrollos en gestación de esta ciencia y que es ahí donde se revela la importancia del razonamiento heurístico, además este tipo de razonamiento pese a su naturaleza intuitiva no es contradictorio con el razonamoiento demostrativo, sino complementario.

3.3. Ventajas y Limitaciones

El razonamiento plausible como un razonamiento de naturaleza intuitiva, se considera más como un recurso de naturaleza heurística y no como un argumento que apoye al intuicionismo ya que las matemáticas no son precisamente visiones o juicios ajenos al análisis o que no requieran de ser somprobados. Como una ilustración de las ideas expuestas nos remitimos a los ejemplos proporcionados en el capítulo II.

A continuación se dan algunos casos en que la intuición-se ha mostrado limitada

a) En este primer caso se trata de un triángulo rectán--gulo isósceles cuyos catetos tienen un valor de 1. (ver Fig.)



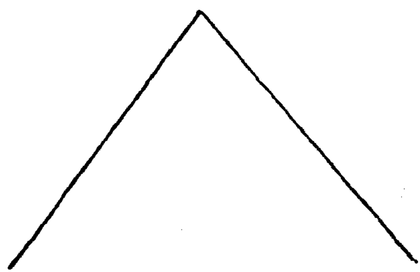
Sabemos que la hipotenusa $BC=\sqrt{2}$. Al construir de B a C una línea quebrada en forma de escalera y designando por L su longitud, si adoptamos como altura de los peldaños $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ etc., al doblar indefinidamente el número de peldaños, la línea quebrada tenderá a confundirse con la hipotenusa y su longitud L, tiende aparentemente a $\sqrt{2}$. Sin embargo el resultado es falso ya que $L = BA + AC = 2$

b) Este ejemplo debido a C. Weiertrass, fué comunicado en una carta (1874) a Du Bois-Reymond. Se refiere a la construcción de una función continua y sin derivada en ninguno de sus puntos, expresada en la siguiente regla:

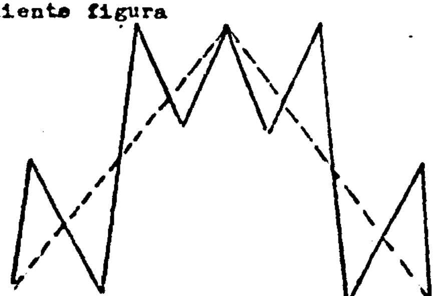
$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

donde x es una variable real, a entero impar mayor que 1, b una constante positiva menor que 1 y $ab > 1+\frac{3\pi}{2}$. La serie es uniformemente convergente y define así una función continua .(6) p, 355-56. Nos permitimos en seguida una idea esquemática debida al matemático austriaco Hans Hahn presentada en el Círculo de Viena en abril de 1954 en un artículo que intituló --- " La Crisis de la Intuición ".( ) p,209

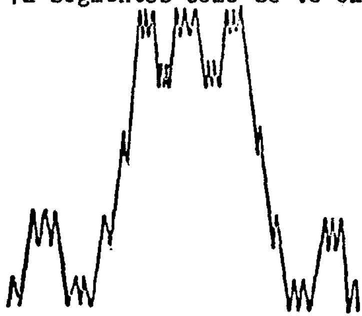
Iniciamos con una figura simple consistente en una línea quebrada ascendente y descendente



reemplazando la línea ascendente mediante una línea quebrada en seis partes, que asciendan primero hasta la mitad de la altura de la línea original, desciendan de nuevo hasta abajo del todo se elevan después hasta la mitad de la altura continuando hasta la altura total, bajan de nuevo hasta la mitad de la altura, y finalmente, se elevan una vez más hasta la altura total como se ve en la siguiente figura

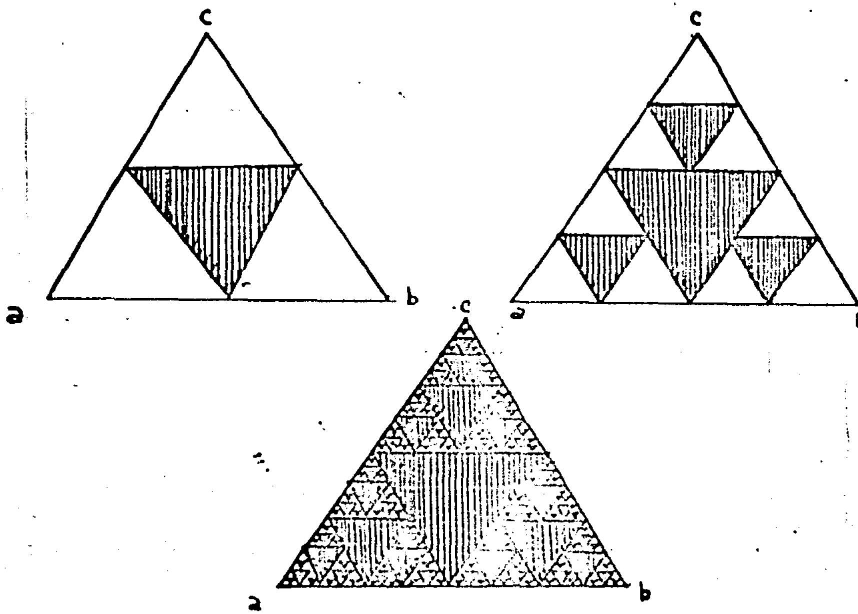


Reemplazando la línea descendente mediante una línea que - brada con seis partes semejantes. A partir de esta figura de doce segmentos rectilíneos procedemos reemplazando de nuevo cada-segmento mediante una línea quebrada de seis partes, obteniendo así una figura de 72 segmentos como se ve en la siguiente fig.-



La repetición del proceso nos lleva pues a una figura cada vez más complicada y que tiene la propiedad señalada en principio. La naturaleza de este tipo de curvas puede decirce escapa a la intuición, Solo mediante el análisis lógico podemos perseguir a un objeto así hasta su forma final.

c) Este último ejemplo que debemos al matemático polaco -- W. Sierpinski quien en 1915 demostró que existen curvas en las-que todos sus puntos son de ramificación, el cual se define diciendo que si la frontera de cada uno de sus entornos arbitrariamente pequeño tiene más de dos puntos en común con la curva. - Consiste en lo siguiente. Consideremos un triángulo equilátero-inscrito en otro triángulo qquilátero y tal que el interior del triángulo inscrito ha sido suprimido- indicado por rayas- si -- continuamos haciendo lo mismo en las áreas restantes como puede apreciarse en las figuras siguientes



Los puntos del triángulo original que van quedando después de ese proceso infinito de supreciones forman una curva en la que todos sus puntos a excepción de los vértices a, b y c son puntos de ramificación. Una figura en esas condiciones si la retorcemos de tal manera que los tres vérticos del triángulo se unan en un punto único obtendremos entonces una curva tal que todos sus puntos son de ramificación. Consideramos que los ejemplos anteriores nos muestran lo engañoso que resulta confiar en la intuición.

IV.-INTUICION Y RIGOR MATEMATICO.

4.1. El Rigor en las Matemáticas

Desde un punto de vista del desarrollo histórico de las matemáticas, en la época de los griegos (S.V a.c.) al descubrirse la inconmensurabilidad de algunas magnitudes geométricas, por ejemplo, que la diagonal de un cuadrado no es conmensurable por una parte alícota del lado del cuadrado. Además el decaimiento que se daba en la escuela pitagoriana en particular, podemos decir que se presenta la primera crisis de las matemáticas.

Posteriormente a principios del siglo XIX, cuando Weiertras independientemente de Bolzano, encontró la teoría de límites en relación a una teoría aritmética de irracionales, concebida por él mismo y por Dedekind, Méray y Cantor, tiempo que se considera como de la segunda crisis en los fundamentos de las matemáticas la cual llegó a superarse a través de A. Cauchy, al reemplazar los infinitesimales por el método de límites allá por los años de 1860-70. Se pensó entonces que las matemáticas habrían quedado así establecidas sobre bases totalmente sólidas.

Aproximadamente en 1800 comienzan a surgir serias preocupaciones a consecuencia de la falta de más claridad en algunos conseptos fundamentales como el de función, límites, derivada, integral, etc.

Así, en 1826 en una carta que Abel dirigió al profesor Christoffer Haustein se quejaba de ..."la tremenda obscuridad que uno encuentra incuestionablemente en el análisis" (11)

Independientemente de la polémica sucitada entre Newton y Leibnitz por el descubrimiento del cálculo de fluxiones, ellos mismos estaban insatisfechos con su explicación de los concep-- tos fundamentales del cálculo, por ejemplo la promesa que alguna vez Leibnitz hizo a Hygens de volver a empezar haciéndo todo como es debido, aunque nunca lo hizo (2) P. 295. Sin embargo - ambos empezaron a recibir críticas como la formulada por el físico geométra holandez Kievwentijt (1654-1718) contra la falta de claridad en los trabajos de Newton y la existencia dudosa de las diferenciales de orden superior de Leibnitz. Crítica la inexactitud de despreciar las cantidades infinitesimales en Newton Barrow y Leibnitz y juzga oscuros y peligrosos sus métodos del cálculo (6).

El francés Michel Rolle (1652-1719) quien en su crítica - sostenía que los nuevos métodos conducían a paralogismos, y que el cálculo estaba lleno de ellos.

El filósofo G. Berkley (1685-1753) observaba una concep--- ción vaga de las fluxiones como proporcionales a los crecimientos evanescentes, la existencia misma de estas cantidades infinitamente pequeñas. Así, en 1734 en su obra de Analyst, soste-- nía que al sustituir $x+0$ en lugar de x en x^n y hacer que en el paso final desapareciera O, para obtener la fluxión de x^n, es - un cambio en la hipótesis "...porque cuando se dice que los incrementos no valen nada o que no hay incremento, la suposición anterior de que los elementos valían algo, o de que había incrementos, queda destruída y sin embargo, se retiene una consecuencia de aquella suposición, es decir, una expresión obtenida en virtud de la misma" (3) P. 259. Si tales críticas no fueron tan fructíferas al menos sí obligaron a los autores a ser más atentos a las bases lógicas.

C. Maclaurin (1698-1746) con su tratado de fluxiones publicado en 1742 marcó el mayor grado de precisión lógica alcanzado en Inglaterra en el siglo XVIII. A su muerte (1746) y la de John Bernoulli en (1748) terminaron los que fueron los últimos discípulos directos de Newton y Leibnitz (6) P. 182. La siguiente época estuvo dominada por L. Euler quien fuera discípulo de J. Bernoulli y por el matemático frances D'Alambert.

L. Euler (1707-1783) es quien primeramente realizó esfuerzos por esclarecer el concepto de función, este concepto de función comienza con las primeras relaciones entre dos variables y según nos narra E.T. Bell se remontaría hasta el comienzo mismo de las matemáticas entre los Babilonios y los Ejipcios (3) p. 191. Al inicio de su Introductio Euler define la función de una cantidad variable como una "expresión analítica" formada de cualquier manera con esta cantidad variable, partiendo de este concepto y a través de un estudio distemático de todas las funciones elementales realizó contribuciones a la teoría de curvas planas. Por ejemplo, al estudiar las cónicas de una manera minuciosa lo realiza haciendo uso de las coordenadas rectangulares y oblícuas y quizá por primera vez en él se encuentra una expreción analítica de los cambios de coordenadas. Después presenta un estudio general de las propiedades de las curvas como son; su forma, singularidades y curvatura (6) p. 208.

Con referencia a las bases lógicas del cálculo, sus ideas eran muy elementales, fundamentalmente descansan en una concepción formal y operativa para la obtención de resultados, quizá es la razón por la que pretendió suprimir las sospechas que pecaban sobre el cálculo al considerar que nociones como "infinitamente grande" o "infinitamente pequeño" carecían del misterio que se les atribuía.

En las obras principales de Euler culmina la intuición y el formalismo, por ejemplo en la Introductio ya mensionada y en las (   ) obra en la cual relega la geometría y presenta minuciosos y detallados desarrollos de las partes formales del cálculo diferencial e integral.

Siguiendo con E.T. Bell es Lagrange (1765-1843) el primero que reconoció que el cálculo se encontraba en una situación nada satisfactoria. En sus obras Théorie des fonctions analytiques (1797-1813) y Calcul des functions (1799-1806) intentó liberarse del concepto de función de Euler sin lograrlo, quedando en un mismo terreno de formalización. A diferencia de Euler, rechazó los infinitésimos y límites por considerarlos muy escabrosos para los principiantes.

A. L. Cauchy (1739-1857) en sus trabajos sobre análisis desarrolló el cálculo diferencial e integral basados es el concepto de límite en sus lecciones sobre el Cálculo Infinitesimal (1823). En el prefacio de esa obra señala como principal objetivo conciliar el rigor con la simplicidad que resulta de la consideración de los infinitesimales. Su concepto de límite "cuando los valores sucesivamente atribuídos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama el límite de todos los demás" (6) p. 312. Como puede observarse, tal concepto es aritmético más que geométrico, además, la definición, siendo más precisa e intuitiva, es verbal más que numérica. No obstante hay ambigüedad en su definición de continuidad por el uso de frases como "suficientemente pequeña", "llega a ser", "sigue siendo" las cuales más tarde habrán de ser precisadas al introducir los términos ε, δ por Weiertras (1861). (6) p. 313.

Sin embargo a Cauchy no le fué posible distinguir con claridad la relación entre función continua y función diferenciable pues él creyó casi toda su vida que toda función continua era siempre diferenciable, cuestión que vino a clarificar Bolzano al establecer definiciones más rigurosas de función continua y de la derivada de una función al precisar más claramente las relaciones que unen la diferenciabilidad y la continuidad de una función. Por la misma época N.H. Abel (1802-1829) preocupado por la falta de claridad como mencionamos al principio de este capítulo e inspirado en el rigor de Cauchy, llegó a corregir un error del mismo Cauchy sobre la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas hacíendo uso de la idea de convergencia uniforme.

J.L. D'Alambert (1717-1783). En algunas de sus memorias filosóficas presenta sus puntos de vista sobre el cálculo diferencial e integral. Su definición de límite "en términos de una variable que se aproxima a una cantidad fija tanto como cualquier cantidad dada, no engloba el paso al límite pero, por esa época representó quizá la mejor definición de límite" (6) p. 215. Es el primer matemático que reconoce la necesidad de una teoría del límite con la finalidad de fincar el cálculo diferencial sobre bases más sólidas. Con ello se entraba en una etapa transitoria de las matemáticas, de la filosofía especulativa hacia una construcción más rigurosa.

Jean B.J. Fourier (1758-1830). Una primera memoria en la que recoge sus investigaciones sobre la propagación del calor, presentada en 1807 a la academia de ciencias, Lagrange, Laplace y Legendre le criticaron su ensayo, no sin cierta aspereza por la falta de una mayor precisión, señalando que partes vitales de su análisis carecían de bases más sólidas. Volviendo a pre--

sentar su memoria una vez revisado y con algunas correcciones - se hizo acreedor al premio, pero ese mismo jurado por segunda - vez volvieron a criticarle su falta de rigor. La contribución - principal es que cualquier función f(x) se puede expresar me-- diante una serie de Fourier, como lo entrevió un poco antes Daniel Bernoulli (1700-1782). Aunque en el tratado de Fourier no se encuentra una deducción completa del enunciado.

Carl Weiertras (1815-1897) que según expresa E.T. Bell en- su Historia de las Matemáticas (p. 296-97), al morir (1897) había resumido los progresos de los cien años anteriores a través de un trabajo minucioso en el cual intentó fundamentar el análisis al tratar de darle el mayor grado de rigor posible relegando la intuición. En 1861, precisó más la definición de límite - al introducir los símbolos ε y δ, contribuyendo así a esclarecer expresiones ambiguas como "llega a ser", "sigue siendo", "tan - pequeño como cualquier cantidad dada" como sucedía en las definiciones de Cauchy y Bolzano. De la misma manera dió más precisión a la definición de continuidad a partir de la simplifica-- ción de un teorema ya demostrado por Dirichlet, la cual era equivalente a la de Bolzano y Cauchy. Posteiormente entre 1861 y 1874 al construir una función continua y sis derivada en ninguno de sus puntos, dió origen a un replanteamiento en los fundamentos del análisis, propiciándose con ellos la construcción - del sistema de los números reales (6) p. 356. Con éste ejemplo- se puso punto final a la excesiva confianza que tenía en la intuición.

En resumen, los matemáticos del S. XIX se conformaban con una comprensión intuitiva de los números reales operando sobre- una base más concreta que lógica, lo cual no deja de ser una -- prueba de que el rpogreso de las matemáticas es algo más que su desarrollo lógico. Al introducirse el rigor en el análisis re-- saltaba la falta de claridad y la imprecisión de los números -- reales. Un estudio más minucioso de los límites puso de mani--- fiesto la necesidad de llegar a una mejor comprensión de los nú meros reales desde un punto de vista lógico.

Al principio de este siglo (1900) H Poincaré (1854-1912) - entusiasmado expresaba que "si nos tomamos el trabajo de ser ri gurosos, lo único que nos puede engañar son silogismos o los -- llamamientos a la intuición del número puro. Hoy día (1900) podemos decir que se ha alcanzado el rigor absoluto" (3) p. 308. Cuestión que distaba enormemente de la idea que tenemos hoy en día. Pués ya en esta época el problema del rigor sobre los fundamentos de las matemáticas empezaba a ser trabajado a partir - de tres concepciones diferentes a cerca de los fundamentos de - las matemáticas y c e llegaron a constituirse en lo que hoy conocemos como la escuela logicista, la formalista y la intuicionista.

4.2. Rigor Matemático

El bosquejo histórico dado en la sección anterior tiene co mo finalidad mostrar en forma aproximada y breve que el desarrollo de las matemáticas no ha sido un resultado espontáneo en el que -- las definiciones y conceptos aparescan de manera clara y acabada, antes bien son resultados de la entrega y dedicación esforzada de generaciones de matemáticos que con su ímpetu y capacidad de realización han ido aclarando y precisando las dificulta des que han surgido en el desarrollo de esta ciencia al procu-- rar cada vez más rigurosos.

La cuestión del rigor en matemáticas es difícil por lo indefinible, abordarla desde cierto punto de vista significa, tratar con un razgo que se da en el propio desarrollo de esta ciencia, el cual podemos caracterizar por un afán de claridad, precisión y minuciosidad de los objetos y resultados matemáticos - que se establecen, y que es inherente a la actividad del matemático; tal vez sea esa una razón por la que no encontremos que los matemáticos propiamente la hayan abordado como una cuestión explícita salvo contadas excepciones y entonces esta sea tratada en un ámbito histórico y de la filosofía de las matemáticas. Sin embargo ya desde fines del siglo pasado y principios del -- presente algunos matemáticos como Brower, Weyl, Heyting, Hil--- bert, Russell, etc., en sus intentos por establecer una funda-- mentación absoluta de las matemáticas aunque sin lograr sus - objetivos, nos han proporcionado a través de sus trabajos modelos de rigor más refinados a partir de los cuales puede afirmarse, constituyen en nuestra época elementos esenciales para el - avance en el desarrollo de las matemáticas con lo que significa que podamos siquiera imaginar cuales puedan ser los patrones de rigor que rijan 200 años después. Recuérdese que la geometría - euclideana se consideró por más de dos mil años como un modelo- de rigor lógico.

Uno de los pocos matemáticos en este siglo, que se ha referido de manera explícita sobre el rigor es R. Thom (14) p. 120. Al respecto señala tres actitudes posibles a seguir:

a) CONCEPCION FORMALISTA. Una proposición (P) es verdadera en un sistema formalizado (S) si puede ser deducida a partir - de los axiomas de (S) mediante un número finito de operaciones- en (S).

b) CONCEPCION REALISTA O PLATONICA. Los entes matemáticos-en tanto que ideas platónicas, existen independientemente de nuestra mente. Una proposición (P) es verdadera cuando expresa una relación existente entre las ideas, es decir una idea jerárquicamente superior que estructura un conjunto de ideas subordinadas a ella.

c) CONCEPCION EMPIRISTA O SOCIOLOGICA. Una demostración (D) es considerada como rigurosa si los mejores especialistas en la materia no tienen nada que objetar.

Según R. Thom en la obra citada expresa que es necesario que se adopte una actitud definida ante el concepto de rigor, dado que no existe "ninguna definición rigurosa de rigor" es rigurosa toda demostración que es capaz de suscitar en el lector suficientemente preparado un estado de ánimo que le lleve a mostrarse de acuerdo. "o ser así, es porque tenemos una idea suficientemente clara de los símbolos utilizados como para que su combinatoria implique la conclución deseada". Agregando en seguida que desde un punto de vista el rigor (o su contrario) la imprecisión es una propiedad local del razonamiento matemático. Del análisis histórico anterior y el apartado referente al rigor matemático observamos que el rigor constituye un razgo en el quehacer -como proceso histórico- que realizan los matemáticos en su actividad como tal, el cual cambia y en el que se avanza según las épocas y las condiciones históricas en que se realiza la actividad matemática. Hablar de un nivel de rigor más elevado, es hablar de resultados que son producto de una práctica permanente de trabajo, en cierto sentido una meta y un medio. Una meta como culminación de trabajos realizados, un medio en cuanto esos trabajos se constituyen como punto de partida, y en este proceso el afán de establecer bases lógicas sólidas.

4.3. El Rigor Matemático en la Intuición y el Intuicionismo

En el intuicionismo matemático el rigor se basa en el principio de constructividad, como única técnica de demostración de teoremas de existencia matemática, es decir la construcción efectiva que nos permita "ver" de que se trata, tal construcción explícita es posible solo mediante procedimientos finitistas, la cual consiste en el uso de un número finito de signos y operaciones por ejemplo; la aplicación del principio de inducción matemática, excluyendo de las matemáticas todas las operaciones que involucren clases infinitas consideradas como totalidades, o teoremas que se demuestren de modo esencialmente indirecto, por ejemplo como ocurre con la mayor parte de los teoremas de la teoría de conjuntos de Cantor.

Esencialmente el constructivismo intuicionista es una tesis semántica de carácter operacionalista en la que afirma (5)

-"Existe al menos un x tal que x tiene la propiedad P"

-"Todos los x son P".

En tal sentido sí puede considerarse que la matemática intuicionista es rigurosa, no obstante la falta de claridad en sus concepciones filosóficas a cerca de las matemáticas.

El matemático aprecia a la intuición en sus diferentes tipos, por ejemplo: creativo, analógico, intelectual, etc., pero consciente de que no puede confiar en ella porque carece de fuerza demostrativa. La intuición puede a veces sugerir ideas importantes en el desarrollo de una demostración, pero no puede -

sustituir a la demostración rigurosa. Invocando a la intuición-se decía que no podía haber otra geometría que la de Euclides,- o de que no hay curva continua sin tangentes, o de que el con--junto de enteros debe ser dos veces más numeroso que el de los-pares, o que una serie infinita no puede tener una suma finita, o un caso notorio, Cauchy de quien se dice que durante toda su vida creyó que toda función continua era diferenciable etc. En consecuencia concluimos afirmando que la intuición no es rigurosa. En resumen, al pedir que una teoría, en su presentación - sea intuitiva, más familiar con nuestro mundo cognoscitivo, responde más a un requisito didáctico que científico (5).

CONCLUSIONES

1. La intuición es diferente según el estudio y entrenamiento de cada individuo.

2. Dada la naturaleza subjetiva de la intuición individual, esta adquiere objetividad en función de la interacción a través de la cual puede compatibilizarse una intuición con otra.

3. Las matemáticas en sus distintas ramas constituyen una acumulación de intuiciones obtenidas mediante analogías, inducciones etc, basadas en un trabajo y experiencia realizadas por los matemáticos.

4. La intuición representa un elemento de naturaleza heurística en la invención matemática pero no debemos confiar en la intuición como única fuente para la deducción de resultados, pues ésta solo representa un auxiliar en el quehacer matemático.

BIBLIOGRAFIA

(1) BABINI JOSE, ARQUIMEDES. Col. Austral,ESP. CALP. Madrid - 1948. p, 112

(2) ABREU JOSE LUIS, On Intuitionism And Constructivism,vol. 8 serie naranja. Investigaciones. Inst. de Invs. en matemá_-ticas Aplicadas y Sistemas, IIMAS, U.N.A.M. 1977

(3) BELL, E. T., Historia de las Matemáticas, Seg. Ed., F.C.E. México, 1986

(4) BABINI JOSE, HISTORIA SUSCINTA DE LA MATEMATICA. 3º Ed. -- Col. Austral, Espasa Calpe, Madrid, 1969

(5) BUNGE MARIO, Intuición y Ciencia, EUDEBA., Buenos Aires -- 1962

(6) COLLETTE JEAN-PAUL, Historia de las Matemáticas, Sig.XXI-- Seg. Ed. en español, Trad. A lfonso Casal Pifa T. II. --- Méx., D. F. 1986

(7) COURANT, R., ROBBINS, H., ¿Qué es la matemática ?. Trad.- del inglés por Luis Bravo Ayala. 4º Ed. 1964, España.

(8) DANTZIG TOBIAS, El Número Lenguaje de la Ciencia,, trad.-- Prof. Manuel Balanzat, Ed. Hoobs, Sudamericana S. A.,Bue_nos Aires, 1971

(9) GOLOVINA, L. I., YAGLOM, I. M., INDUCCUIN EN GEOMETRIA. -- Leccs. Pops. de Mats. Trad. del ruso por Carlos Vega, Ed.- Mir. Moscú 1976

(10) HESSEN, J., Teoria del Conocimiento, Eds. Quinto Sol,S. A. Cap. IV.

(11) KLINE MORRIS, Mathematical Thouht from Ancient to Modern - Times. New York, Oxford University, 1972. Cap. 40

(12) NOVACK GEORGE, INTRODUCCION A LA LOGICA. Lógica Formal y - Lógica Dialéctica., primera edición mexicana. Trad. Emilio Olcina y Jesús Pérez. Distribuciones Fontamara, S. A. 1984 cap. I.

(13) G. POLYA, COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS, Editorial Trillas. México 1974

(14) PIAGET, J., CHOUQUET, G., DEUDONE, J., THOM, R., La Enseñanza de las Matemáticas Modernas. Alianza Editorial S. A. - Madrid 1978., p, 120

(15) SPINOZA, B., ETICA, Colecc. LOS GRANDES PENSADORES. SERPE. 1985., 5° parte, prop. XXV.

(16) SOMINSKI, I. S., Método de Inducción Matemática., trad. del ruso por Carlos Vega, Ed. Mir, Moscú 1975

(17) VERA FRANCISCO, 20 Matemáticos Célebres, los libros del sol, 1961, por Compañía General Fabril Editora S. A., Argentina Buenos Aires., p, 151

(18) WEYL HERMAN, " El Método Matemático de Pensar ", Colecc. - SIGMA., EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS, Ed. Grijalbo, 1969. - Barcelona-Méx, D. F., T. 5.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. ARQUIMEDES, EL "METODO". Colección Los Fundamentales, Trad.-por Cora Ratto de Sadosky. Introducción y Notas de José Babini. EUDEBA 1966
2. BABINI JOSE, Historia de las Ideas Modernas en Matemáticas. Universidad de Buenos Aires.
3. BLANCHE ROBERT, La Axiomática. Centro de Estudios Filosó--ficos. UNAM, 1965
4. BOURBAKI, N, Elementos de la Historia de las Matemáticas.--Versión española de Jesús Hernández. Alianza Editorial S. A. Madrid, 1972, p 11-70
5. BABINI JOSE, Historia Suscinta de la Matemática. Tercera Ed. Espasa Calpe, Madrid 1969, Cap. IX
6. BANFI JOSE, Poi ıré. Enciclopedia del Pensamiento Esencial. Centro Editor de América Latina S. A. Buenos Aires, 1967
7. BOYER, C. B. , A History of Mathematics. John Wiley & Sons. Inc. 1968. caps, XIX, XX, XXIII, XXIV, XXV, XXVII.
8. DOU S. J. ALBERTO, Fundamentos de la Matemática. Colección-Labor. Barcelona, 1970
9. INSTITUTO DE FILOSOFIA, Colectivo de Autores. Academia de Ciencias de la URSS. Depto. de Filosofía. Academia de Ciencias de Cuba. Metodología del Conocimiento Científico. Edición al cuidado de Roberto Rozsa Burman. Presencia Latinoamericana-S. A. Méx. D. F. 1981
10. IMRE LAKATOS, Proofs and Refutations. The Logic of Mathematic Discovery. Ed. by Jhon Worralland Elie Zahar. Cambridge University Press1976, cap. V.
11. KÖRNER STEPHAN, Introducción a la Filosofía de las Matemáticas. Ed. Siglo XXI, S. A. Méx. 20 D. F. 1977. 4ª Ed. Caps. I,-VI, VII, VIII.

12. LE LIONNAIS F, y colaboradores, Las Grandes Corrientes del — Pensamiento Matemático. Trad. Nestor Míguez .EUDEBA.Buenos-- Aires 1976

13. IMRE LAKATOS, Matemáticas, Ciencia y Epistemoligía. Alianza- Universidad. Versión Española de Diego RoblesNicolás.

14. LARA APARICIO MIGUEL, Antología de Matemáticas. Introducción y Selección. UNAM. 1971. T.I,cap 1. T.II, págs. 105-116

15. QUINE, Los Fundamentos de la Matem'tica. Cap. IV. MATEMATICAS EN EL MUNDO MODERNO. Selección de SCIENTIFIC AMERICAN.Versión Española de Miguel de Guzmán Ozamis. Ed. BLUME. Rosario, 17- Madrid-5. Primera edición española 1974 de la edición americana

16. KLEENE, S. C. , Logic Mathomatical. John Wiley &Sons. Inc. 1967. Parte II. Cap. IV.

17. KLINE MORRIS, El Fracaso de la Matemática Moderna. Siglo XXI editores, S. A. Méx. D. F. Seg. Ed. 1976.

18. MANIN YU,I., Lo Demostrable o Indemostrable. Trad. del ruso por E. M. Totenko. Ed. Mir. Moscú 1979. Pags. 237-256

19. MOLINA FLORES CESAR N, Matemática y Filosofía. (Reflexiones para la Delimitación del Territorio Filosófico). Méx. 1954. Caps. III, IV, V, VI.

20. NEWMAN JAMES R, El Mundo de las Matemáticas Modernas. Colecc. SIGMA.T.I. Caps. 4, 10, 11, 13, 15. T.III. Caps. 3, 5. T.1,3, 5, 6, 8, parte2 No. 9. parte4 Nos.1,2. T.V. 2, 3, 4, 5, 6, 7, parte2, 2, 6. parte4, 2. parte5, parte8, 2.Ediciones Grialvo S. A. Baecelona-México D. F. 1969

21. NAGEL ERNEST Y NEWMAN JAMES R. El Teorema de Gödel. Conacyt. Méx. 1981

22. POLYA G, Matemáticas y Razonamiento Plausible. Trad. por José Luis Abellán Ed. Tecnós, S. A. 1966. Madrid. Caps. I, II, III IV, V, VI, VII.

23. POINCARE HENRI, Filosofía de la Ciencia. Selecc. e Int. de Eli de Gortari. UNAM. Méx. 1978
24. STEWART IAN, Concepts of Modern Mathematicals. Peguin Books 1ª Ed. 1975. Caps. 1, 5, 8 11.
25. STRUIK DIRK J. Historia Concisa de las Matemáticas. Consejo Editorial del I. P. N. Méx. D. F. 1980. Caps. VII, VIII.
26. WILDER R. L., Evolution of Mathematical Concepts. Jhon & Wi_ley Sons.1968.

ARTICULOS

27. BROUWER L. E. J. Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism, South African, J. of Science 49(1952)
28. GNEDENKO B. L., V. I. Lenin and Methodological Questions in Mathematic, Russ. Math. Surveis 25(1970)3-2
29. CURRY, H. B. The Purposes of Lofical Formalization, Loguique et Analyse 11(# 43)(1968)
30. FRAENKEL, A.A., On the Crisis of Priciple of the Excluded - Middle, Scripta Maths 17(1957)
31. FRAENKEL, A.A. The Recient Contoversies about the Fuondatios of Mathematics, Scripta Math. 13-14 (1947-48)
32. RUBEN HERSH, Algunas Sugerencias para revivir la Filosofía de las Matemáticas. Comunicación Interna No. 3 1981. Depto. de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM. Traducción y Prólogo de José Alfredo Amor M.
33. FOUDATIONS OF MATHEMATICS. Simposium Papers Conmemorating - The Sixtieth Birthday of Kurt Gödel. Edited byJack J. Bulloff Thomas C. Holyoke, S. W. Hahn.