

2



Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional de Estudios Profesionales
"ACATLAN"

INVERSION NUMERICA DE FUNCIONES CARACTERISTICAS DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

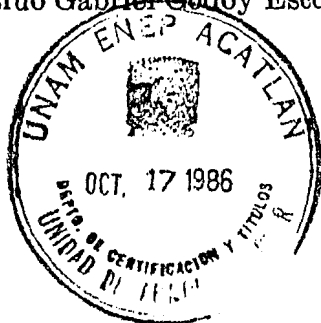
TESIS PROFESIONAL
Que para obtener el Título de
LICENCIADO EN ACTUARIA
Presenta

Enrique Javier Camilli Desentis

Asesor

M. José Eduardo Gabriel Godoy Escoto

Acatlan, Méx.



1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PROLOGO

El estudio de las funciones características, requiere de un conocimiento muy profundo del análisis matemático, que por desgracia es poco común en estudios profesionales, esto hace que el conocimiento, e incluso la Bibliografía que existe en México relativa a este tema, sea muy pobre. Por esta razón es que una herramienta tan poderosa y elegante como son las funciones características, no sea apreciada como debería.

La inversión numérica pretende ser un mecanismo práctico para el estudio de las funciones de densidad de probabilidad a partir de las funciones características, una vez introducido el algoritmo a una computadora, puede ser utilizado por personas con pocos conocimientos del análisis matemático, en diversos estudios estadísticos. Además la inversión numérica pudiera ser utilizada por los expertos, para el estudio de las funciones de distribución.

En este texto estudiaremos, la posible aproximación de una función de densidad* de probabilidad, a partir de su función característica mediante métodos numéricos, a este mecanismo lo llamaremos, "Inversión Numérica de Funciones Características de Variables Aleatorias Continuas".

* Únicamente trataremos el caso continuo.

INDICE

Prólogo		i
Indice		ii
Introducción		iv
Capítulo I	TRANSFORMADAS INTEGRALES	
1.1)	Generalidades	1
1.2)	Transformada de Fourier	
	ordinaria	3
	de Fourier-Stieltjes	5
	convolución	6
1.3)	Funciones Características	
	1.3.1) Definición	9
	1.3.2) Propiedades	12
Capítulo II	DESCRIPCION DE ALGORITMOS	
2.1)	Métodos Numéricos de Integración	20
	polinomios de	
	interpolación (p.i.)	22
	(p.i.) de diferencias	
	divididas	23
	fórmulas de Newton-Cotes	
	abierta	29
	cerrada	33
	cuadratura de Gauss	36
	Gauss-Lagerre	38
	suma de Riemann	41
Capítulo III	INVERSION DE FUNCIONES CARACTERISTICAS	
3.1)	Fórmulas de Inversión	45
3.2)	La Inversión Numérica	49
3.3)	Ejemplo	54
Conclusiones y Recomendaciones		56

Apéndice I	Sugerencia de un Algoritmo y Desarrollo del Mismo	60
Apéndice II	Programa de Computación Correspondiente al Algoritmo Sugerido	68
Bibliografía		72
Bibliografía Complementaria		75

INTRODUCCION

Una de las transformadas integrales más importantes en el análisis matemático es la transformada de Fourier-Stieltjes. Cuando la función a la que se le aplica esta transformada es la función de distribución de una variable aleatoria X , el resultado es la función característica de la variable aleatoria (v.a.) X , y es una de las herramientas más útiles en el estudio de las distribuciones.

Existen fórmulas a través de las cuales, teniendo una función característica se determina una y sólo una función de distribución. A esas fórmulas se les conoce con el nombre de fórmulas de inversión, y son en general muy difíciles de calcular.

La fórmula de inversión que se utiliza para una función característica de variable aleatoria continua, es distinta a la que se utiliza en el caso discreto.

En esta tesis estudiamos la posibilidad de realizar la inversión de una función característica asociada a una variable aleatoria uniformemente continua, mediante el uso de la computación (inversión numérica de una función característica de variable aleatoria continua).

La inversión numérica siempre será considerada como el último recurso para la inversión de una función característica de una variable aleatoria continua, es decir, primero -- deberán agotarse todos los mecanismos que permitan la inver-

sión formal, como pueden ser los artificios de integración, cambios de variable, la consulta de tablas de integración o tablas de transformadas integrales (ver bibliografía complementaria), etc.

CAPITULO I

TRANSFORMADAS INTEGRALES

1.1 Generalidades

Cuando una función $g(t)$ se puede expresar como una integral de Lebesgue-Stieltjes de la forma:

$$g(t) = \int K(x, t) dF(x) \quad (1.1:1)$$

o en el caso de que se pueda reducir a una integral de Lebesgue del tipo:

$$g(t) = \int K(x, t) f(x) dx \quad (1.1:2)$$

se le conoce como la transformada integral de F en el primer caso, y como la transformada integral de la función inicial f en el segundo.

La función K es denominada el núcleo de la transformada, depende de x y un parámetro t que puede ser discreto, o bien, con dominio de variación continuo.

Además de su utilidad en el análisis, las transformadas integrales tienen aplicaciones primordiales en la teoría de probabilidad, como son: la función característica, la función generatriz de momentos, los mismos momentos algebraicos, y otras.

Algunas de las funciones núcleo más utilizadas son presentadas en la siguiente tabla.

Funciones Núcleo
Tabla (1.1:1)

- a) $K(x, t) = x^t$
 - b) $K(x, t) = |x|^t$
 - c) $K(x, t) = x^{(t)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-t+1)$ con $x^{(0)} = 1$
los pasados tres núcleos, tienen la particularidad de que $t \leq N$.
 - d) $K(x, t) = t^x$
 - e) $K(x, t) = e^{ixt}$ transformada exponencial de Fourier
 - f) $K(x, t) = e^{-xt}$ transformada de Laplace
 - g) $K(x, t) = \cos xt$ transformada cosenó de Fourier
 - h) $K(x, t) = \text{sen } xt$ transformada seno de Fourier
- en e), f), g) y h), la función núcleo determina a cada transformada a su derecha.

En el caso de que $F(x)$ fuera una función de distribución, entonces con $K(x, k) = x^k$, tenemos por:

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) \quad (1.1:3)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$

el momento algebraico de $F(x)$ de grado k . Análogamente con $K(x, k) = |x|^k$ se obtiene el momento algebraico absoluto de $F(x)$ de grado k .

Con $K(x, t) = t^x$ obtenemos:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^x dF(x) \quad (1.1:4)$$

conocida como la función generatriz de momentos factoriales.

Utilizando $K(x, t) = e^{xt}$ tenemos la función generatriz de momentos:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} dF(x) \quad (1.1:5)$$

Finalmente, ajustando la transformada exponencial de Fourier, tenemos:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x) \quad (1.1:6)$$

que es la importante función característica.

1.2 Transformada de Fourier

Consideremos la siguiente transformada integral:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx \quad (1.2:1)$$

que tiene sentido para toda función f absolutamente integrable. $g(t)$ es conocida como la transformada de Fourier* de la función inicial f .

Una fórmula que expresa la función inicial a través de su transformada de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(t) dt \quad (1.2:2)$$

conocida como la fórmula de inversión de la transformada de Fourier.

Es conveniente prestar atención a la semejanza que existe entre las expresiones (1.2:1) y (1.2:2). La segunda difiere de la primera sólo en el signo del exponente y en el coeficiente $\frac{1}{2\pi}$ delante de la integral.

Una semejanza aún mayor se hubiera logrado con:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx \quad (1.2:3)$$

* Transformada ordinaria de Fourier y transformada exponencial de Fourier, son sinónimos de esta transformada.

entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(t) dt \quad (1.2:4)$$

y la diferencia consistiría sólo en el signo del exponente. Sin embargo, la semejanza es sólo aparente, ya que la expresión (1.2:1) es la definición de g , mientras que (1.2:2) es la afirmación de que la integral que figura en el miembro derecho, es igual a la función inicial.

TEOREMA 1.2:1

La transformada de Fourier g de una función absolutamente integrable f , es una función continua acotada; además, $g(t)$ tiende a cero cuando $|t|$ tiende a infinito.

En efecto, de la estimación

$$|g(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad (1.2:5)$$

se concluye que $g = \mathcal{F}[f]$ es acotada, donde \mathcal{F} denota el operador integral de la transformada de Fourier.

Ahora bien, si f es la función unitaria en (a, b) , tenemos para ella:

$$g(t) = \int_a^b e^{ixt} dx = \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{-it} \quad (1.2:6)$$

esta función es continua y converge hacia cero para $|t| \rightarrow \infty$.

Como el operador \mathcal{F} es un operador lineal, tenemos que cualquier combinación lineal de funciones unitarias a intervalos, es una función continua y tiende a cero cuando $|t| \rightarrow \infty$, en otras palabras, la transformada de cualquier

función escalonada es continua y tiende a cero, si $|t| \rightarrow \infty$.

Finalmente, las funciones escalonadas son siempre densas en $L(-\infty, \infty)$ y, por lo tanto, si $f \in L(-\infty, \infty)$, existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones escalonadas que converge a f en $L(-\infty, \infty)$. Entonces, la sucesión de funciones $\{g_n\} = \{\mathcal{F}\{f_n\}\}$ converge hacia la función $g = \mathcal{F}\{f\}$.

Pero en tal caso, la función límite g es también continua y tiende a cero si $|t| \rightarrow \infty$. //

La expresión (1.1:1) en $L(-\infty, \infty)$ se puede escribir como una integral de Stieltjes de la forma:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dF(x) \quad (1.2:7)$$

$$\text{donde: } F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (1.2:8)$$

es una función absolutamente continua de variación acotada.

Sin embargo, la expresión (1.2:7) tiene sentido no sólo para funciones del tipo (1.2:8), sino para cualesquiera funciones de variación acotada.

La transformada integral definida por:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dF(x) \quad (1.2:9)$$

donde F es una función arbitraria de variación acotada, es conocida con el nombre de transformada de Fourier-Stieltjes.

El teorema (1.2:1) se cumple en general sólo para F definida por (1.2:8).

$L(-\infty, \infty)$ es el conjunto de todas las funciones sumables del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Para poder mostrar la propiedad más importante de la transformada de Fourier-Stieltjes, debemos introducir - primero, una transformada integral particular llamada convolución, esto es:

Dadas dos funciones f y g , ambas integrables según Lebesgue en $(-\infty, \infty)$, sea S el conjunto de las x para el - cual existe la integral de Lebesgue:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (1.2:10)$$

Esta integral define la función h en S llamada convolución de f y g . Para designar esta función, se utiliza $h = f * g$.

La transformada de Fourier de una convolución - $f * g$, es igual al producto de las transformadas de Fourier de f y de g .

La afirmación anterior se justifica por ser una si tuación particular del teorema de convolución para transformadas de Fourier-Stieltjes, el cual enuncio más adelante. (Ver teorema 1.2:2).

Generalicemos primero el concepto de convolución, para esto. Sean:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \\ G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \\ H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)du \end{aligned} \quad (1.2:11)$$

donde:

f y g son ambas integrables según Lebesgue y h definida por (1.2:10), entonces, integrando a h tenemos:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(u) du = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^u f(t)g(u-t) dt du. \quad (1.2:12)$$

De aquí se tiene:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \left\{ \int_{-\infty}^x g(u-t) du \right\} f(t) dt \quad (1.2:13)$$

por (1.2:11) tenemos:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) dF(t) \quad (1.2:14)$$

La relación obtenida pone en correspondencia a las funciones F y G con la función H .

La integral que aparece en el miembro derecho de (1.2:14), tiene sentido para funciones absolutamente continuas de la forma (1.2:8). Sin embargo, existe un resultado más general del análisis funcional que asegura la existencia de dicha integral para dos funciones cualesquiera de variación acotada, es decir a:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) dF(t) \quad (1.2:15)$$

con G y F dos funciones arbitrarias de variación acotada, la llamaremos convolución de F y G .

TEOREMA 1.2:2

Sea H la convolución de dos funciones de variación acotada F y G , entonces la transformada de Fourier-Stieltjes de H es igual al producto de las transformadas de Fourier-Stieltjes de F y de G , es decir:

$$\tilde{F}[H] = \tilde{F}[F * G] = \tilde{F}[F] \cdot \tilde{F}[G] \quad (1.2:16)$$

donde:

\tilde{F} es el operador integral de la transformada de

*Denotaremos a la convolución de F y G como: $F * G$

Fourier-Stieltjes.

Demostración.- Sea $H = F * G$ y sea P una partición de $[a, b]$, tal que $x_i \in P$ con $i = 0, 1, \dots, n$; y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Entonces para toda λ :

$$\int_a^b e^{-i\lambda x} dH(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ix_i \lambda} (H(x_{i+1}) - H(x_i)) \quad (1.2:17)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ix_i \lambda} \left[\int_a^{x_{i+1}} f(x_i - t) dF(t) - \int_a^{x_i} f(x_i - t) dF(t) \right] \quad (1.2:18)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-i(x_i - t) \lambda} \left[\int_a^{x_{i+1}} (G(x_i - t) - G(x_i - t)) dF(t) \right] \quad (1.2:19)$$

$$= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-i(x_i - t) \lambda} [G(x_i - t) - G(x_{i+1} - t)] dF(t) \quad (1.2:20)$$

es decir:

$$\int_a^b e^{-i\lambda x} dH(x) = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-i(x_i - t) \lambda} (G(x_i - t) - G(x_{i+1} - t)) \right] e^{-i\lambda t} dF(t). \quad (1.2:21)$$

con un cambio lineal de variable se tiene:

$$\int_a^b e^{-i\lambda x} dH(x) = \int_a^b \left\{ \int_a^{x-t} e^{-i\lambda(x-t)} dG(x) \right\} e^{-i\lambda t} dF(t) \quad (1.2:22)$$

pasando al límite en $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\int_a^b e^{-i\lambda x} dH(x) = \int_a^b e^{-i\lambda x} dG(x) \int_a^b e^{-i\lambda t} dF(t) \quad (1.2:23)$$

esto es:

$$\tilde{F}[H] = \tilde{F}[G] \cdot \tilde{F}[F] = \tilde{F}[F] \cdot \tilde{F}[G] \quad (1.2:24)$$

lo que concluye la demostración. //

El teorema pasado y la definición de transformada de Fourier-Stieltjes, se emplean ampliamente en la teoría de probabilidad, gracias a que las funciones características son definidas a partir de la transformada de Fourier-Stieltjes como veremos en la siguiente sección.

1.3 Funciones Características

1.3.1 Definición

Las ventajas que presentan las funciones de distribución por su definición, van a permitir introducir la transformada de Fourier-Stieltjes en la teoría de las probabilidades, de manera que genere información de la función original como más adelante veremos.

Por ahora consideremos la transformada de Fourier dada por (1.2:9), pero con parámetro $(+t)$, esto es:

$$\varphi(t) = g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (1.3.1:1)$$

esta es pues otra manera de escribir la transformada de Fourier-Stieltjes de F , donde $F(x)$ es una función de variación acotada.

A partir de la expresión (1.3.1:1) definimos lo que es una función característica, esto es: Sea $F(x)$ una función de distribución, entonces $\varphi(t)$ dada por:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (1.3.1:2)$$

es la función característica de la función de distribución F .

Otra manera de escribir (1.3.1:2) es:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^{\infty} \cos xt dF(x) + i \int_0^{\infty} \sin xt dF(x) \\ &= u(t) + iv(t) \end{aligned} \quad (1.3.1:3)$$

Por consiguiente para distribuciones F con densidad f , se tiene:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x) dx \quad (1.3.1:4)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin xt f(x) dx \\ &= u(t) + iv(t) \end{aligned} \quad (1.3.1:5)$$

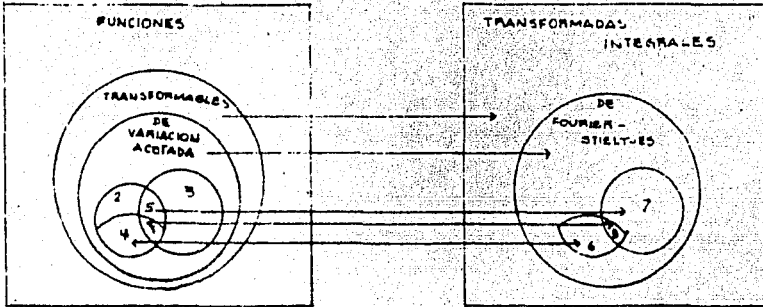
Es conveniente mencionar que toda función de distribución tiene asociada una función característica, debido a que por definición, las funciones de distribución son monótonas no decrecientes y acotadas en $(-\infty, \infty)$, lo que las hace de variación acotada, lo cual es condición suficiente para la existencia de (1.3.1:1).

Los diagramas (1.3.1:a) y (1.3.1:b) nos aclaran la definición de función característica.

En el diagrama (1.3.1:a), se aprecian las restricciones que obedecen a la definición de función de distribución y sus repercusiones en la transformada de Fourier-Stieltjes. Mientras que el diagrama (1.3.1:b) nos permite ver qué sucede cuando las distribuciones tienen función de densidad.

TRANSFORMADAS INTEGRALES

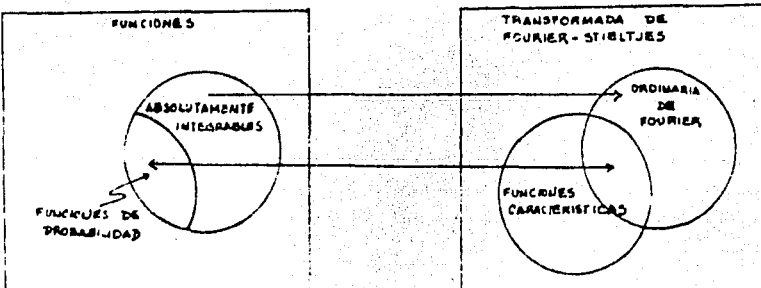
Diagrama (1.3.1:a)



- 1) funciones de distribución de v.a. continua
- 2) funciones monótonas acotadas
- 3) funciones absolutamente continuas y de variación acotada
- 4) funciones de distribución
- 5) funciones monótonas, acotadas y absolutamente continuas
- 6) funciones características
- 7) transformada ordinaria de Fourier
- 8) funciones características de la forma (1.3.1:4)

FUNCIONES DE DENSIDAD

Diagrama (1.3.1:b)



1.3.2 Propiedades

Como hemos visto, las funciones características son un caso particular de la transformada de Fourier-Stieltjes, resta entonces ver qué propiedades tiene esta transformada en unas funciones tan especiales como son las funciones de distribución.

TEOREMA 1.3.2:1

Sea X una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad $F_X(x)$, y sea $\varphi_X(t) = u(t) + iv(t)$ la función característica de F (o de X), entonces:

- $\varphi_X(t)$ es uniformemente continua
- $|\varphi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t$
- $\varphi_X(0) = 1$
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

Demostración:

a) Sea $h \in \mathbb{R}$, entonces:

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ix(t+h)} - e^{ixt}| dF_X(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixt}| |e^{ixh} - 1| dF_X(x)$$

como:

$|e^{ixt}| = 1$, tenemos:

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixh} - 1| dF_X(x)$$

Note que la última expresión no depende de t , de esta manera se puede hacer tan pequeña como se quiera haciendo a h suficientemente pequeño. Para aclarar ésto, consideremos el

diagrama (1.3.2:a), lo cual expresado matemáticamente sería:

$$\begin{aligned} |1 - e^{iy}| &= \left| [(1 - \cos y)^2 + \sin^2 y]^{1/2} \right| \\ &= \left| [1 + \cos^2 y + \sin^2 y - 2\cos y]^{1/2} \right| \\ &= \left| [2(1 - \cos y)]^{1/2} \right| \end{aligned}$$

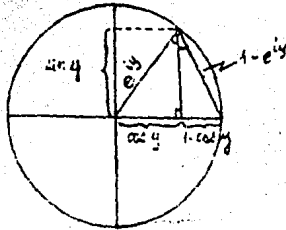
de aquí:

$$|1 - e^{iy}| = 2 \left| \sin \frac{y}{2} \right|$$

entonces:

$$|1 - e^{ixh}| = 2 \left| \sin \frac{xh}{2} \right|$$

Diagrama (1.3.2:a)



sustituyendo la última expresión, tenemos:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \frac{xh}{2} \right| dF_x(x) &= 2 \left[\int_{-\infty}^m \left| \sin \frac{xh}{2} \right| dF_x(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_m^M \left| \sin \frac{xh}{2} \right| dF_x(x) + \int_M^{\infty} \left| \sin \frac{xh}{2} \right| dF_x(x) \right] \end{aligned}$$

donde a m y M los escogemos de manera que:

$$\int_{-\infty}^m dF_x(x) < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad \int_M^{\infty} dF_x(x) < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall \epsilon,$$

de esta manera y como:

$$|\sin y| \leq 1$$

tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{ixh}| dF_x(x) < \frac{\epsilon}{2} + 2 \int_m^M \left| \sin \frac{xh}{2} \right| dF_x(x).$$

Si escogemos h de manera que:

$$\int_m^M \left| \operatorname{sen} \frac{xh}{2} \right| dF_x(x) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \varepsilon,$$

concluimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{ixh}| dF_x(x) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon.$$

o bien, $\Psi_x(t)$ es uniformemente continua ya que h no depende de t .

$$\begin{aligned} \text{b) } |\Psi_x(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_x(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixt}| dF_x(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF_x(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad |\Psi_x(t)| \leq 1 \quad \forall t. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \Psi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_x(x) = 1$$

$$\text{d) } \Psi_x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dF_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt dF_x(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} xt dF_x(x)$$

entonces, por (1.3.1:5), tenemos:

$$\Psi_x(-t) = u(t) - iv(t) = \bar{\Psi}_x(t)$$

con lo que concluimos la demostración. //

TEOREMA 1.3.2:2

Existe una correspondencia biunívoca entre las funciones características y las funciones de distribución.

Demostración.- Partiendo de (1.3.1:2), tenemos - que dos funciones de distribución idénticas $F_1(x)$ y $F_2(x)$, tienen idénticas funciones características, sean éstas $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ respectivamente. Escrito en lenguaje matemático:

$$F_1(x) \equiv F_2(x) \Rightarrow \varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$$

Ahora, supongamos que existen dos funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$, con funciones características $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ respectivamente, tales que:

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t).$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_1(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_2(x)$$

lo que implica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_1(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_2(x) \equiv 0$$

esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d[F_1(x) - F_2(x)] \equiv 0$$

pero $B(x) = F_1(x) - F_2(x)$ es una diferencia de funciones monótonas acotadas, de modo que $B(x)$ es de variación acotada, así que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dB(x) = 0$$

para toda función $h(x) = e^{ixt}$ donde t es una constante real arbitraria.

Si consideramos a $h(x)$ como $\cos xt + i \operatorname{sen} xt$, sabemos que es la suma de dos funciones periódicas y uniformemente continuas.

Por otro lado, $B(x)$ es de variación acotada por lo que la variación de $B(x)$ para $|x| > m$ es arbitrariamente pequeña si escogemos un m suficientemente grande.

Si seleccionamos m de manera que $2m$ sea un múltiplo del período de $\cos xt$, y definiendo la función $g(x)$ co-

mo:

$$g(x) = \cos xt \quad xt \in J$$

$$g(x) = 0 \quad xt \notin J$$

donde: $J = [-m, m]$

entonces considerando únicamente la parte real de e^{ixt} tenemos:

$$\int_a^b \cos xt \, dB(x) = \int_J g(x) \, dB(x)$$

cuando: $m \rightarrow \infty$

J es un intervalo fijo, por lo que establece una -
cota, así otra forma de escribir esta integral sería:

$$\int_a^b \cos xt \, dB(x) = 0$$

con a y b puntos de continuidad de $B(x)$, además $g(x)$ es continua en $a \leq x \leq b$, pero $B(x)$ debe ser constante en el conjunto de puntos de continuidad, de esta manera $F_1(x)$ debe coincidir con $F_2(x)$ en todos los puntos de continuidad, así que:

$$F_1(x) \equiv F_2(x)$$

Concluimos entonces que:

$$F_1(x) \equiv F_2(x) \Leftrightarrow \psi_1(t) \equiv \psi_2(t)$$

lo que asegura una correspondencia uno a uno. //

El teorema anterior es conocido comúnmente como el teorema de unicidad de las funciones características, y garantiza la existencia de una aplicación inversa de la transformada de Fourier-Stieltjes de una función de distribución

asociada a una variable aleatoria arbitraria.

A continuación enuncio el importante teorema de convolución.

TEOREMA 1.3.2:3

Una función de distribución F es la convolución de dos funciones de distribución F_1, F_2 si y sólo si, las correspondientes funciones características satisfacen:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \quad (1.3.2:1)$$

Demostración.- La función característica de una función de distribución F , es la transformada de Fourier-Stieltjes de F , entonces, por el teorema (1.2:2) tenemos que:

$$F = F_1 * F_2 \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$$

Ahora por el teorema de unicidad se tiene:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \Rightarrow F = F_1 * F_2$$

Finalmente la convolución de dos funciones de distribución, es también una distribución. En efecto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t) dF_2(t)$$

existe debido a que tanto F_1 como F_2 son de variación acotada, y no sólo eso, sino que $F(x)$ es una función de distribución, esto se deriva del hecho de que el paso al límite necesario puede realizarse bajo el operador integral, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x-t) dF_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_2(t) = 1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int \lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x-t) dF_2(t) = 0$$

como F_1 y F_2 son monótonas no negativas, entonces F es monótona no decreciente y no negativa. Además, la continuidad por la derecha de F_1 , F_2 garantiza la continuidad por la derecha de F . Así:

$$F = F_1 * F_2 \Leftrightarrow \Psi(t) = \Psi_1(t)\Psi_2(t)$$

donde F también es una función de distribución, lo que concluye la demostración. //

Si consideramos las funciones características de la forma (1.3.1:4), veremos algunas propiedades interesantes.

TEOREMA 1.3.2:4

Sea $\Psi_x(t)$ la función característica de la distribución F_x con densidad f_x , asociada a la variable aleatoria X , entonces:

- a) $\Psi_x(t)$ es continua
- b) $\Psi_x(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$

Demostración.- Es directa a partir de la definición de función característica (1.3.1:4) y el teorema (1.2:1). //

Sabemos, por el teorema de unicidad, que cada fun-

ción de distribución tiene asociada una y sólo una función característica. Entonces, es de esperar que exista una relación entre las propiedades de la distribución y las de su función característica. En efecto, una de estas conexiones y sin duda la más importante, está dada por:

$$\frac{D_t^{(n)} \varphi_x(t)}{i^n} \Big|_{t=0} = E(X^n) \quad (1.3.2:2)$$

si ambos miembros existen

A continuación presento una justificación de esta expresión:

Sustituyendo (1.3.1:4) por $\varphi_x(t)$, tenemos:

$$\begin{aligned} D_t^{(n)} \varphi_x(t) &= D_t^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_t^{(n)} e^{ixt} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^n e^{ixt} f(x) dx \\ &= i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{ixt} f(x) dx \end{aligned}$$

cuando $t = 0$ tenemos por definición de valor esperado:

$$\frac{D_t^{(n)} \varphi_x(t)}{i^n} \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = E(X^n). \quad //$$

Para terminar con este capítulo, debe hacerse patente que la transformada de Fourier, puede ser generalizada de manera natural para funciones de varias variables. Consecuentemente, la definición de función característica, tiene sentido también para vectores aleatorios. Sin embargo, no se pretende introducirlos en este trabajo por estar fuera de los objetivos del mismo.

CAPITULO II

DESCRIPCION DE ALGORITMOS

2.1 Métodos Numéricos de integración

La manera más natural de realizar una aproximación para la integral definida:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.1:1)$$

es la de encontrar una función más simple $g(x)$, tal que se pueda sustituir por $f(x)$ de manera que:

$$\int_a^b g(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx \quad (2.1:2)$$

para esto debemos encontrar algún método que nos permita - aproximar cualquier función $f(x)$ a una función fácilmente - integrable. El método de aproximación polinomial es uno de los más prácticos para realizar esta labor, ya que un polinomio de grado n es muy fácil de integrar, y además, mientras mayor grado tenga el polinomio que aproxima a la función, en general mejor será la aproximación, de aquí que el error se pueda reducir teóricamente tanto como se quiera, haciendo tender el grado del polinomio (n) a infinito.

El método de aproximación polinomial más frecuentemente utilizado por su nobleza práctica, es el de aproximación por medio del polinomio de interpolación de grado n , y consiste en hacer pasar un polinomio de grado n por $n+1$ - puntos de la función a la cual se quiere aproximar.

Escrito de manera matemática tenemos:

Sean x_0, x_1, \dots, x_n ; $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

puntos pertenecientes al dominio de $f(x)$, a los cuales -- llamaremos puntos base o puntos de interpolación, y dados -- los pares de valores $(x_i, f(x_i))$ con $i = 0, 1, \dots, n$, entonces el polinomio de interpolación $P_n(x)$, está dado por:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, n \quad (2.1:3)$$

De esta manera el polinomio $P_n(x)$ de grado n coincide exactamente con $f(x)$ en los $n+1$ argumentos $x = x_i$. Además, -- existe un y sólo un polinomio de grado n que pasa por esos $n+1$ puntos, lo cual verificaremos más adelante.

De ninguna manera este polinomio garantiza una -- aproximación de $f(x)$ para $x \neq x_i$. En el caso de que $f(x)$ fuera un polinomio de grado n ó menor, entonces el polinomio de interpolación proporciona una aproximación exacta. Este polinomio tiene la particularidad de que aun cuando la aproximación a $f(x)$ no sea muy exacta, al incluir el operador integral, las diferencias positivas se cancelan en alguna medida con las negativas, y así, la aproximación (2.1:2) es mejor de lo que se esperaba. Para aclarar ésto, consideremos que el polinomio $P_n(x)$ tiene que cortar a $f(x)$ en $n+1$ puntos, entonces haciendo:

$$\int_{x_0}^{x_n} d(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_n} P_n(x) dx \quad (2.1:4)$$

se ve que en un caso usual:

$$\text{sgn} \int_{x_0}^{x_n} d(x) dx = -\text{sgn} \int_{x_0}^{x_n} d(x) dx \quad (2.1:5)$$

gráficamente lo apreciamos en el diagrama (2.1:a).

Un polinomio $P_n(x)$ de grado n , puede hacerse coincidir con una función $f(x)$ en $n+1$ puntos distintos, y no só-

lo es sino que el polinomio es único.

En efecto, esto se deduce del sistema de ecuaciones que se origina de escribir las condiciones que $P_n(x)$ debe cumplir, esto es:

$$\text{Sea } P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.1:6)$$

entonces:

$$\begin{array}{rcl}
 a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n & = & f(x_0) \\
 a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n & = & f(x_1) \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n & = & f(x_n)
 \end{array} \quad (2.1:7a)$$

y el determinante generado es:

$$\begin{vmatrix}
 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\
 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n
 \end{vmatrix} = \prod_{\substack{j=1 \\ i=0}}^n (x_j - x_i) \quad (2.1:7b)$$

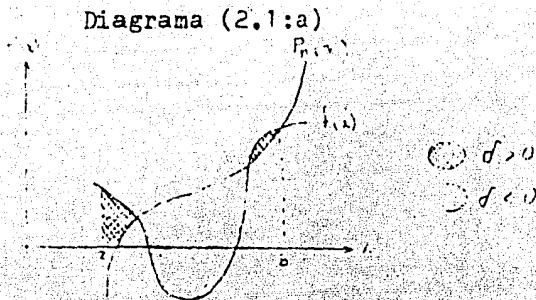
$j = 1, 2, \dots, n$

conocido como el determinante de Vandermonde.*

El sistema de ecuaciones (2.1:7a) tiene solución única si y sólo si el determinante de Vandermonde es distinto de cero, esto es si $\prod_{\substack{j=1 \\ i=0}}^n (x_j - x_i) \neq 0$, lo cual es consistente con el hecho de que los $n+1$ puntos son distintos, matemáticamente: $x_i \neq x_j; i \neq j \Rightarrow \prod_{\substack{j=1 \\ i=0}}^n (x_j - x_i) \neq 0$.

$P_n(x)$ es conocido con el nombre de polinomio de interpolación, y una de las técnicas más utilizadas en el cálculo de este polinomio es la de diferencias divididas.

* La demostración de (2.1:7b) se puede realizar mediante operaciones elementales encaminadas a obtener una matriz diagonal inferior, de manera que su determinante sea el producto de la diagonal.



Polinomio de Interpolación de Diferencias Divididas

Consideremos primero la definición de derivada:

$$\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.1:8)$$

para poder trabajar numéricamente, definiremos una aproximación a ella, sea ésta:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.1:9)$$

con $x \neq x_0$.

$f[x, x_0]$ es conocida como primera diferencia dividida finita o bien, como diferencia dividida finita de primer orden.

Ahora, a partir del teorema de valor medio del cálculo diferencial que dice:

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , entonces, existe al menos un ξ tal que: $\xi \in (a, b)$, para el cual:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

obtenemos otra forma de escribir la primera diferencia dividida finita, ésta es:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \quad (2.1:10)$$

para algún $\xi \in (x, x_0)$

Diferencias Divididas Finitas

Tabla (2.1:a)

Orden	Notación	Definición
0	$f[x_0]$	$f(x_0)$
1	$f[x_1, x_0]$	$(f[x_1] - f[x_0]) / (x_1 - x_0)$
2	$f[x_2, x_1, x_0]$	$(f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]) / (x_2 - x_0)$
3	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$	$(f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]) / (x_3 - x_0)$
⋮	⋮	⋮
n	$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$	$(f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]) / (x_n - x_0)$

Considerando la definición de diferencia dividida finita de orden n, dada en la tabla (2.1:a), y realizando las operaciones algebraicas correspondientes, obtenemos lo que se conoce por forma simétrica, es decir: (2.1:11)

$$\begin{aligned}
 f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] &= \frac{f(x_n)}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \dots (x_n - x_0)} \\
 &+ \frac{f(x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2}) \dots (x_{n-1} - x_0)} \\
 &\quad \vdots \\
 &+ \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_n)(x_0 - x_{n-1}) \dots (x_0 - x_1)}
 \end{aligned}$$

más compacto es:

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (2.1:12)$$

para una función lineal se tiene que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_1, x_0] \quad (2.1:13a)$$

es decir:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1, x_0] = P_1(x) \quad (2.1:13b)$$

Ahora bien, si la función no fuera lineal, la aproximación de un polinomio de primer grado, sería la siguiente:

$$f[x, x_0] \approx f[x_1, x_0] \quad (2.1:14a)$$

de manera que existe una función $R_1(x)$, tal que:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1, x_0] + R_1(x) \quad (2.1:14b)$$

en donde:

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f[x_1, x_0] \\ &= (x-x_0) [f[x, x_0] - f[x_1, x_0]] \\ &= (x-x_0)(x-x_1)f[x, x_1, x_0]. \end{aligned} \quad (2.1:15)$$

Haciendo la sustitución correspondiente, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f[x_1, x_0] \\ &\quad + (x-x_1)(x-x_0)f[x, x_1, x_0] \\ &= P_1(x) + R_1(x) \end{aligned} \quad (2.1:16)$$

donde $P_1(x)$ es el polinomio de interpolación de primer grado y $R_1(x)$ es el residuo o error.

Una vez obtenida la aproximación mediante un polinomio de primer grado, se puede generalizar el resultado para polinomios de grado mayor, de la siguiente manera:

Consideremos la fórmula fundamental de Newton:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.1:17)$$

entonces el polinomio de interpolación de diferencias divididas de grado n , tiene la forma: (2.1:18)

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1] \\
 & + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 & + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 & \vdots \\
 & + (x-x_0) \dots (x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]
 \end{aligned}$$

y el correspondiente error está dado por:

$$R_n(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (2.1:19)$$

En efecto, en (2.1:16) obtuvimos el polinomio de interpolación de primer grado y su residuo. Ahora, para poder confirmarlo por inducción:

Sea $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde $P_n(x)$ y $R_n(x)$ están dados por (2.1:18) y (2.1:19) respectivamente.

Entonces, sumando y restando un término elegido convenientemente, tenemos:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & P_n(x) + (x-x_0) \dots (x-x_n) f[x_0, \dots, x_n] \\
 & - (x-x_0) \dots (x-x_n) f[x_0, \dots, x_n] + R_n(x)
 \end{aligned}$$

sustituyendo (2.1:19) y agrupando se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & P_{n+1}(x) - (x-x_0) \dots (x-x_n) f[x_0, \dots, x_n] \\
 & + (x-x_0) \dots (x-x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n]
 \end{aligned}$$

en donde $P_{n+1}(x)$ tiene la forma (2.1:18), así:

$$f(x) = P_{n+1}(x) + (x-x_0) \dots (x-x_n) [f[x_0, x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_n]]$$

reordenando:

$$f(x) = P_{n+1}(x) + (x-x_0) \dots (x-x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_n]$$

$$= P_{n-1}(x) + (x-x_0) \dots (x-x_{n-1}) \left[\frac{f(x_0, x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{(x-x_{n-1})} \right]$$

según la tabla (2.1:a), tenemos:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + (x-x_0) \dots (x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n-1}]$$

reordenando una vez más, se tiene:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + (x-x_0) \dots (x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, x_n, \dots, x_{n-1}]$$

de acuerdo a (2.1:19), concluimos:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$

con $R_{n-1}(x)$ y $R_n(x)$ dados por (2.1:18) y (2.1:19) respectivamente. //

Ahora, a partir del teorema de Rolle que dice:

Sea $f(x)$ función continua para $a \leq x \leq b$ y diferenciable en (a,b) , si $f(a) = f(b)$, entonces \exists al menos un $\xi \in (a,b)$, tal que $f'(\xi) = 0$.

obtendremos otra forma de escribir $R_n(x)$.

Consideremos la fórmula fundamental de Newton:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

y expresémosla de la siguiente manera:

$$f(x) = P_n(x) + \left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right] G(x) \tag{2.1:20}$$

entonces, de (2.1:20), (2.1:19) y (2.1:17), se tiene que $G(x)$ es la $n+1$ diferencia dividida finita de $f(\cdot)$. Por otra parte, sabemos que $R_n(x) = 0$ para $x = x_i$ $i = 0, 1, \dots, n$, pero que en general $R_n(x) \neq 0$ para otros puntos, así que podemos definir una nueva función $\mathcal{Q}(t)$, tal que:

$$Q(t) = f(t) - P_n(t) - \left[\prod_{i=0}^n (t-x_i) \right] G(x) \quad (2.1:21)$$

la cual es igual a cero, cuando $t = x_i$; $i = 0, 1, \dots, n$, o bien, cuando $t=x$. De esta manera, $Q(t) = 0$ $n+2$ veces, cuando $t=x$ y otras $n+1$ veces cuando $t = x_i$; $i = 0, 1, \dots, n$. Esto quiere decir que $Q(t)$ tiene $n+2$ raíces en el intervalo más pequeño (I) que contenga a x y a los $n+1$ puntos base.

Si $f(t)$ es continua e infinitamente diferenciable, el teorema de Rolle asegura que $Q'(t) = 0$ $n+1$ veces en el intervalo I, y que $Q''(t) = 0$ n veces en I. Así, repitiendo la aplicación, tenemos que $Q^{(n+1)}(t) = 0$ al menos una vez en el intervalo mencionado. Sea este punto $t = \xi$, entonces, derivando (2.1:21) $n+1$ veces con respecto a t , se tiene:

$$Q^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - (n+1)!G(x) \quad (2.1:22)$$

pero $P_n(t)$ es un polinomio de grado n , lo que significa que $P_n^{(n+1)}(t) = 0$, así que para $t = \xi$, tenemos:

$$G(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \text{ en } (x, x_0, \dots, x_n) \quad (2.1:23)$$

de esta manera, podemos escribir a (2.1:19) de la siguientes formas:

$$R_n(x) = \left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right] f[x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \quad (2.1:24a)$$

y

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (2.1:24b)$$

para algún ξ en $(x, x_0, x_{n-1}, \dots, x_n)$

Queda un problema por resolver, y es el de cómo escoger los puntos base x_0, x_1, \dots, x_n de manera que obtengamos - una buena aproximación mediante el polinomio de interpolación,

ya que puntos distintos generan polinomios distintos, produciendo distintas aproximaciones.

Existen dos formas básicas para seleccionar los puntos bases, éstas son:

a) Fórmulas de Newton-Cotes, con puntos equidistantes.

b) La cuadratura de Gauss, determinada por ciertas propiedades de los polinomios ortogonales.

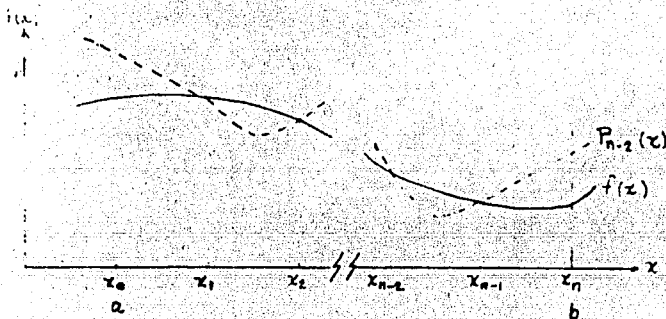
Dentro de las fórmulas de Newton-Cotes, existen dos variantes, éstas son:

a.) Fórmula abierta de integración de Newton-Cotes. En este algoritmo se pretende obtener una aproximación a la integral (2.1:1), mediante un polinomio de interpolación cuyos puntos base sean equidistantes, y que no se le obligue al polinomio a pasar por los puntos definidos por los límites de integración (a,b).

El problema de integración abierta, es representado en la figura (2.1:b), en donde el polinomio de interpolación es de orden $n-2$ y los $n-1$ puntos base están dados por x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Sea $x_0 = a$, h donde el límite inferior $a = x_0$, y h es el espacio entre los puntos base, y sea b el límite superior, arbitrario por el momento, entonces una aproximación a la integral (2.1:1) mediante fórmula abierta, se expresa

Figura (2.1:h)



como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_{n-1}(x) dx \quad (2.1:25)$$

Debido a la equidistancia entre los puntos base, la fórmula de diferencias divididas de Newton se simplifica, gracias a que se puede definir lo que se llama: "polinomio de diferencias finitas adelantadas de Newton". Para esto definamos primero las diferencias adelantadas como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) \\ &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\ \Delta^3 f(x) &= \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x) \\ &\vdots \\ \Delta^k f(x) &= \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) \end{aligned} \quad (2.1:26)$$

donde $\Delta^k f(x)$ es la k-ésima diferencia adelantada.

De (2.1:26) y la tabla (2.1:a), se tiene:

$$\begin{aligned} f[x_1, x_0] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} \\ f[x_2, x_1, x_0] &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} \end{aligned}$$

en general:

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} \quad (2.1:27)$$

Para escribir (2.1:17), (2.1:18), (2.1:24a) y (2.1:24b) en términos de diferencias adelantadas, de manera compacta, necesitamos un parámetro α tal que:

$$x = x_0 + \alpha h \quad (2.1:28)$$

donde $0 \leq \alpha \leq n$ para $x \in [x_0, x_n]$

ahora, como $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$, tenemos de (2.1:28) que:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \alpha h \\ x - x_1 &= \alpha h - h = h(\alpha - 1) \\ x - x_2 &= h(\alpha - 1) - h = h(\alpha - 2) \\ &\vdots \\ x - x_n &= h(\alpha - n) \end{aligned} \quad (2.1:29)$$

A partir de (2.1:27), (2.1:28) y (2.1:29) tenemos que la fórmula fundamental de Newton se escribe en términos de α y de diferencias adelantadas, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha h) &= f(x_0) + \alpha \Delta f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 f(x_0) + \dots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \Delta^n f(x_0) \\ &+ R_n(x_0 + \alpha h) \end{aligned} \quad (2.1:30)$$

donde la suma de la derecha, está formada por el polinomio de diferencias adelantadas y un residuo, el cual se puede expresar de las formas:

$$R_n(x_0 + \alpha h) = h^{\alpha n} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

con ξ en (x, x_0, \dots, x_n) (2.1:31a)

y

$$R_n(x_0 + \alpha h) = h^{\alpha n} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n) f[x, x_0, \dots, x_n]$$

(2.1:31b)

Si se tiene otro punto, sea éste x_m , y se supone que:

$$f[x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \approx f[x_m, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \quad (2.1:32)$$

entonces, se obtiene una estimación de $R_n(x_0 + \alpha h)$, como es:

$$R_n(x_0 + \alpha h) \approx \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n) \frac{\Delta^n f(x_0)}{(n+1)!} \quad (2.1:33)$$

Volviendo a la aproximación dada por (2.1:25), tenemos que una representación conveniente de $P_{n-1}(x)$, está dada por las diferencias finitas adelantadas de Newton, como sigue:

$$P_{n-1}(x + \alpha h) = f(x_1) + \frac{(\alpha-1)\Delta f(x_1)}{1!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\Delta^2 f(x_1)}{2!} + \dots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+2)\Delta^{n-1} f(x_1)}{(n-2)!}$$

(2.1:34)

donde hemos utilizado $f(x_1)$ en lugar de $f(x_0)$. Así:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^b P_{n-1}(x) dx = h \int_0^{\bar{\alpha}} P_{n-1}(x_0 + \alpha h) d\alpha \quad (2.1:35)$$

donde $\alpha = \frac{x-x_0}{h}$; $\bar{\alpha} = \frac{b-x_0}{h}$

De (2.1:34) y (2.1:35), tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \int_0^{\bar{\alpha}} [f(x_1) + (\alpha-1)\Delta f(x_1) + \dots] d\alpha \quad (2.1:36a)$$

Integrando se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[\alpha f(x_0) + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\right) \Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{3\alpha^2}{4} + \alpha\right) \Delta^2 f(x_0) + \dots \right] \quad (2.1:36b)$$

evaluando:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[\bar{\alpha} f(x_0) + \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{2} - \bar{\alpha}\right) \Delta f(x_0) + \left(\frac{\bar{\alpha}^3}{6} - \frac{3\bar{\alpha}^2}{4} + \bar{\alpha}\right) \Delta^2 f(x_0) + \dots \right] \quad (2.1:36c)$$

el error correspondiente es:

$$h \int_0^{\bar{\alpha}} R_{n+1}(x_0 + \alpha h) d\alpha = h^n \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} f^{(n+1)}(\xi) d\alpha$$

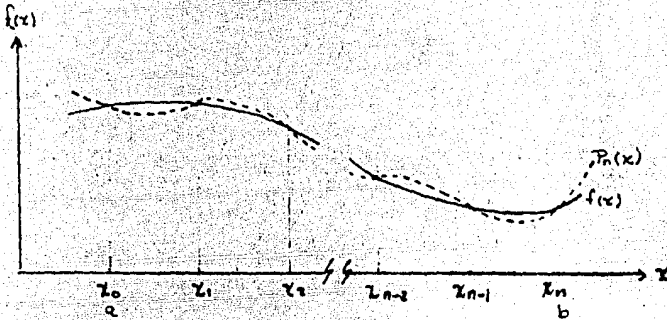
donde $x_0 < \xi < b$ (2.1:36d)

a.) Fórmula cerrada de integración de Newton-Cotes. A semejanza de la fórmula abierta de integración, el algoritmo cerrado de integración pretende aproximar la integral de $f(x)$ mediante un polinomio de interpolación con puntos base equidistantes, sólo que en este caso, si se le exige al polinomio pasar por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, donde a y b son los límites de integración.

El problema de integración cerrada es mostrado gráficamente en la figura (2.1:c), en donde el polinomio de interpolación es de grado n , los $n+1$ puntos base son x_0, x_1, \dots, x_n . Sean a y b el límite inferior y el límite superior de integración respectivamente, entonces, considerando $a = x_0$ y $b = x_n$. Una aproximación a la integral (2.1:1) mediante la fórmula cerrada, está dada por:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^b P_n(x) dx = h \int_0^{\bar{\alpha}} P_n(x_0 + \alpha h) d\alpha \quad (2.1:37a)$$

Figura (2.1:c)



o bien:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \int_0^{\bar{\alpha}} \left[f(x_0) + \alpha \Delta f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 f(x_0) + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \Delta^n f(x_0) \right] d\alpha$$

donde $\bar{\alpha} = \frac{(b-x_0)}{h}$

desarrollando algunos términos tenemos:

$$\begin{aligned} h \int_0^{\bar{\alpha}} P_n(x_0 + \alpha h) d\alpha &= h \left[\alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2} \Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^4}{4} \right) \Delta^2 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^5}{6} + \frac{\alpha^6}{6} \right) \Delta^3 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^6}{16} + \frac{11\alpha^7}{72} - \frac{\alpha^8}{8} \right) \Delta^4 f(x_0) + \dots \right] \end{aligned}$$

evaluando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx h \left[\bar{\alpha} f(x_0) + \frac{\bar{\alpha}^2}{2} \Delta f(x_0) \right. \\
 &+ \left(\frac{\bar{\alpha}^3}{6} - \frac{\bar{\alpha}^4}{4} \right) \Delta^2 f(x_0) \\
 &+ \left(\frac{\bar{\alpha}^4}{24} - \frac{\bar{\alpha}^5}{6} + \frac{\bar{\alpha}^6}{6} \right) \Delta^3 f(x_0) \\
 &\left. + \left(\frac{\bar{\alpha}^5}{120} - \frac{\bar{\alpha}^6}{16} + \frac{11\bar{\alpha}^7}{72} - \frac{\bar{\alpha}^8}{8} \right) \Delta^4 f(x_0) + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.1:38b}$$

el error correspondiente (ver 2.1:31a) está dado por:

$$\begin{aligned}
 h \int_a^{\bar{x}_1} R_n(x_0 + \alpha h) d\alpha &= h^{n+1} \int_0^{\bar{\alpha}} \left[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right] d\alpha \\
 &\text{con } \xi \text{ en } (x_0, x_1, \dots, b) \tag{2.1:39}
 \end{aligned}$$

El conjunto de fórmulas cerradas generado por (2.1:37b) y (2.1:39) es conocido como fórmulas cerradas de integración de Newton-Cotes. Veamos algunos casos particulares en que $\bar{\alpha} = 1, 2, 3, 6$.

Si $\bar{\alpha} = 1$, se tiene la conocida regla del trapecio:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \tag{2.1:40}$$

Con $\bar{\alpha} = 2$, se obtiene una de las fórmulas más utilizadas en la práctica, ésta es la regla de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \tag{2.1:41}$$

Cuando $\bar{\alpha} = 3$ se le conoce como segunda regla de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \quad (2.1:42)$$

Para $\bar{\alpha} = 6$, tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{140} [41f(x_0) + 216f(x_1) + 27f(x_2) + 272f(x_3) + 27f(x_4) + 216f(x_5) + 41f(x_6)] - \frac{9h^7}{1400} f^{(6)}(\xi) \quad (2.1:43)$$

Para las fórmulas de Newton-Cotes, existe una manera de reducir el error cuando el intervalo de integración es muy grande, consiste en subdividir el rango de integración y aplicar una aproximación polinomial de grado menor. A este método se le conoce como forma compuesta de integración. El número de subdivisiones y el grado del polinomio de interpolación, depende de la función a la que se quiera aproximar.

Resta mencionar los importantes métodos de integración con espacios desiguales en los puntos base (Cuadratura de Gauss). En estos métodos se persigue una aproximación de la forma:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (2.1:44)$$

Si los x_i no se han fijado, entonces quedan $2n+2$ parámetros

desconocidos, $n+1$ correspondientes a los x_i y otros $n+1$ correspondientes a los w_i , que aparentemente definen un polinomio de grado $2n+1$.

Los x_i son escogidos de manera que la función ponderada proporcione una aproximación exacta para un polinomio de grado $2n+1$. Para esto, es necesario que el polinomio que sustituya a la función en el residuo, sea ortogonal.

Dos polinomios son ortogonales con respecto a $w(x)$ en $[a, b]$, si:

$$\int_a^b w(x) g_n(x) g_m(x) dx = 0 \quad \text{con } n \neq m \text{ y } n, m \in \mathbb{N}$$

y

$$\int_a^b w(x) [g_n(x)]^2 dx = C(n) \neq 0 \quad (2.1:45)$$

en general C depende de n . Si esta condición se cumple para toda n , entonces $\{g_n(x)\}$ constituye un conjunto de polinomios ortogonales.

Las familias más conocidas de polinomios ortogonales, son los conjuntos polinómicos de Legendre, Chebyshev, Hermite y Laguerre.

De ellas, la que nos puede interesar más, es la familia polinómica de Laguerre, ya que en ella los polinomios son ortogonales en el intervalo $[0, \infty)$ con respecto a $w(x) = e^{-x}$, lo que la hace de especial interés para la inversión de funciones características, puesto que en las fórmulas de inversión como se verá más adelante, se involucra una integral en el intervalo $(-\infty, \infty)$, la cual en ocasiones se puede reducir, identificando los integrandos pares e impares a una integral

que va de $[0, \infty)$, o bien mediante un cambio de variable, descomponiendo el intervalo de integración en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$.

Los polinomios de Laguerre están dados por:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0$$

y

$$\int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = C(n) \neq 0 \quad (2.1:46)$$

de donde se obtiene la fórmula recursiva*:

$$L_n(x) = (2n-x-1)L_{n-1}(x) - (n-1)^2 L_{n-2}(x) \quad (2.1:47)$$

Los primeros polinomios de Laguerre son:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x+1 \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2 \\ L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \end{aligned} \quad (2.1:48)$$

Los polinomios de Laguerre (2.1:48) pueden ser utilizados para generar lo que se llama la cuadratura de Gauss, generando el algoritmo de integración que a continuación veremos.

Cuadratura de Gauss-Laguerre

Este algoritmo fué hecho con el fin de aproximar integrales de la forma:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} F(z) dz \approx \sum_{i=0}^n w_i F(z_i) \quad (2.1:49)$$

en donde para aproximar $F(z)$ utilizaremos lo que se conoce co-

*Por estar fuera del objetivo de este trabajo, no presento el desarrollo de la obtención de la fórmula recursiva, así como de los primeros polinomios de Laguerre expuestos más abajo.

mo polinomio de interpolación de Lagrange, agregando un error.

De la fórmula de diferencias divididas de Newton, tomemos las expresiones (2.1:12), (2.1:17) y (2.1:18), realizando algunas operaciones de manera conveniente, tenemos:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad (2.1:50)$$

donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (2.1:51)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$

El error $R_n(x)$ está dado por (2.1:24a) o bien por (2.1:24b), entonces de (2.1:24b), (2.1:50), (2.1:51) y con las z_i aún no especificadas, se tiene:

$$F(z) = \sum_{i=0}^n L_i(z) \cdot F(z_i) + \left[\prod_{i=0}^n (z - z_i) \right] \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

con $0 < \xi < \infty$ (2.1:52)

donde:

$$L_i(z) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left[\frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right] \quad (2.1:53)$$

Supongamos que $F(z)$ es un polinomio de grado $2n+1$, entonces:

$$\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

debe ser un polinomio de grado n . Sea este polinomio $q_n(z)$, así:

$$F(z) = \sum_{i=0}^n L_i(z) F(z_i) + \left[\prod_{i=0}^n (z - z_i) \right] q_n(z) \quad (2.1:54)$$

multiplicando por e^{-z} se tiene después de aplicar el operador integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} F(z) dz = \sum_{i=0}^n F(z_i) \int_0^{\infty} e^{-z} L_i(z) dz + \int_0^{\infty} e^{-z} \left[\prod_{i=0}^n (z-z_i) \right] q_n(z) dz \quad (2.1:55)$$

Por la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre, el residuo puede desaparecer y efectivamente lo hace, si se eligen las z_i $i = 0, 1, \dots, n$; de manera que:

$$\prod_{i=0}^n (z-z_i) \quad (2.1:56)$$

sea un múltiplo de $L_m(z)$. Debido a que se puede expandir $q_n(z)$ en polinomios de Laguerre de grado n o menor, por razones de independencia lineal, entonces si:

$$\prod_{i=0}^n (z-z_i) = c L_m(z)$$

el residuo de (2.1:55) se hace cero por (2.1:46).

Como $F(z)$ es de grado $2n+1$, tenemos que:

$$w_i = \int_0^{\infty} e^{-z} L_i(z) dz = \int_0^{\infty} e^{-z} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left[\frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right] dz \quad (2.1:57)$$

por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} F(z) dz = \sum_{i=0}^n F(z_i) w_i \quad (2.1:58)$$

Al algoritmo descrito se le llama Cuadratura de Gauss-Laguerre con $m = n+1$ puntos. Las demás fórmulas de cuadratura se obtienen de manera análoga.

Como pudo apreciarse, todos los métodos vistos hasta ahora, tienen en común la obtención previa de un polinomio, el cual aproxima a la función que se quiere integrar.

Otra forma de aproximar la integral (2.1:1), se logra partiendo de la definición de integral de Riemann, y su analogía con el área debajo de una función definida positiva.

Según las figuras (2.1:d) y (2.1:e), podemos erigir rectángulos con base en el recorrido de $f^+(x)$, de manera que estén contenidos o que contengan a $f^+(x)$. Generalizando esta idea se obtienen las conocidas sumas inferior y superior.

DEFINICION

Sean:

$I = [a, b]$ el intervalo de integración de $f(x)$

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$

$\Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n$

$m_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad k = 1, 2, \dots, n$

$M_k = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad k = 1, 2, \dots, n$

entonces:

Suma inferior

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad (2.1:59a)$$

Suma superior

$$\bar{S}_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (2.1:59b)$$

Por definición de ínfimo y de supremo, es directo que:

$$\underline{S}_P(f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{S}_P(f) \quad \forall P \quad (2.1:60)$$

Definimos como refinamiento de la partición P, a una partición P', tal que, contiene al menos todos los puntos de P.

A partir de (2.1:60), se tiene:

$$S_r(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \bar{S}_r(f) \quad * P; \bar{P} \quad (2.1:61)$$

Llamaremos norma de la partición a $\|P\|$, tal que:

$$\|P\| = \max\{\Delta x_k\} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1:62)$$

En palabras, $\|P\|$ es el máximo de las longitudes entre los puntos de P.

Ahora construiremos la conocida suma de aproximación o suma de Riemann.

DEFINICION

Sea P una partición en $I = [a, b]$, escojamos de manera arbitraria un punto ξ_k en cada $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, entonces la suma de Riemann es:

$$S_r(f, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2.1:63)$$

esta suma tiene dos propiedades importantes:

$$\underline{S}_r(f) \leq S_r(f, \xi) \leq \bar{S}_r(f) \quad (2.1:64a)$$

y

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_r(f, \xi) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.1:64b)$$

lo que nos indica que no es necesario obtener la suma superior ni la inferior, para lograr una aproximación razonable, y que en general mejora conforme se refine la partición.

La elección de los ξ_k para $k = 1, 2, \dots, n$; depende de cada problema y de la forma que se le quiera dar al algoritmo.

El error está dado por:

$$E_n(x) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2.1:65)$$

o bien:

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^n \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) \right]. \quad (2.1:66)$$

Por el teorema de valor medio de integrales de Riemann, se tiene:

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^n \left[(x_k - x_{k-1}) (f(\xi'_k) - f(\xi_k)) \right], \quad (2.1:67)$$

donde $\xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, 2, \dots, n$

Entonces la tolerancia se podría obtener definiendo:

$$h(x) = \max \left\{ \sum_{k=1}^n |m_k(x) - f(\xi_k)| \Delta x_k, \sum_{k=1}^n |M_k(x) - f(\xi_k)| \Delta x_k \right\} \quad (2.1:68)$$

por lo tanto:

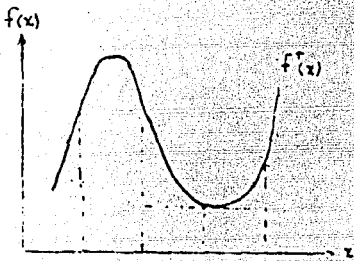
$$E_n(x) \leq h(x) \quad (2.1:69)$$

Como se ha podido apreciar, tanto en el método de aproximación polinomial, como en el de suma de Riemann, hemos obtenido aproximación a integrales de Riemann de una variable. Y es que la integral de Riemann-Stieltjes, de Lebesgue-Stieltjes, así como las integrales de Lebesgue que no son a la vez Riemann integrables, tienen en su mayoría fuertes problemas de aproximación.

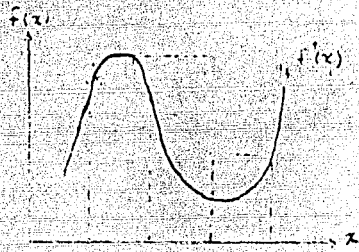
La integral de una función de varias variables, se

podría aproximar de manera análoga, pero la manera en que crece el error y el tiempo máquina para obtener la aproximación, lo hace poco práctico.

Funciones definidas positivas
figuras



(2.1:d)



(2.1:e)

CAPITULO III

INVERSION DE FUNCIONES CARACTERISTICAS.

3.1 Fórmulas de Inversión.

Por el teorema de unicidad de las funciones características, sabemos que existe una correspondencia biunívoca entre las funciones características y las de distribución, lo cual indica que existe la inversa de la aplicación (transformada de Fourier- Stieltjes). Queda entonces encontrar la expresión analítica que nos permita regresar a la función de distribución asociada a una función característica, a partir de esta última. Para esto enunciaremos algunos teoremas.

TEOREMA 3.1:1

Sean x_1 y x_2 dos puntos de continuidad de la función F_x ; tales que $x_1 < x_2$, entonces:

$$F_x(x_2) - F_x(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ix_2t} - e^{-ix_1t}}{it} \varphi_x(t) dt \quad (3.1:1)$$

donde $\varphi_x(t)$ es la función característica de $F_x(x)$.

Demostración.- Sustituyendo $\varphi_x(t)$ de (1.3.1:2) en la expresión a la derecha de (3.1:1) tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left\{ \frac{e^{-ix_2t} - e^{-ix_1t}}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dF_x(x) \right\} dt \quad (3.1:2)$$

cambiando el orden de integración obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T}^T \frac{e^{it(x-x_2)} - e^{it(x-x_1)}}{it} dt \right] dF_x(x) \quad (3.1:3)$$

Tomemos por ahora solamente la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it(x-x_1)} - e^{-it(x-x_2)}}{it} dt \quad (3.1:4)$$

Lo cual podemos escribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\cos t(x-x_1) + i \operatorname{sen} t(x-x_1)}{it} - \frac{\cos t(x-x_2) + i \operatorname{sen} t(x-x_2)}{it} \right\} dt \quad (3.1:5)$$

y a ésta, como:

$$2 \int \frac{\operatorname{sen} t(x-x_1)}{t} dt - 2 \int \frac{\operatorname{sen} t(x-x_2)}{t} dt$$

o bien, como la función escalonada:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 < x_2 \\ 2 & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{si } x < x_2 < x \end{cases} \quad (3.1:6)$$

Ya que:

$$\int \frac{\operatorname{sen} ay}{y} dy = \frac{\pi}{2} (\operatorname{signo de } a).$$

entonces basándonos en (3.1:3) y (3.1:6) se tiene:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi dF_x(x) = F_x(x_2) - F_x(x_1) \quad (3.1:7)$$

lo que concluye la demostración. //

Del teorema (3.1:1) se sigue:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_x(x) - F_x(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iyt} - e^{-ixt}}{it} \varphi_x(t) dt \quad (3.1:8)$$

de aquí que:

$$F_x(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iyt} - e^{-ixt}}{it} \varphi_x(t) dt \quad (3.1:9)$$

Otras fórmulas de inversión, son obtenidas mediante los siguientes teoremas.

TEOREMA 3.1:2

Si X es una variable aleatoria continua con función característica $\varphi_X(t)$, entonces su función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi_X(t) dt \quad (3.1:10)$$

Demostración.- Del teorema (3.1:1) tenemos:

$$\frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \frac{1 - e^{-iht}}{ith} \varphi_X(t) dt \quad (3.1:11)$$

COMO:

$$f_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} \quad (3.1:12)$$

se tiene de (3.1:11) y (3.1:12):

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - e^{-iht}}{ith} \right\} \right] \varphi_X(t) dt \quad (3.1:13)$$

pero:

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-iht}}{ith} &= \frac{1 - \cos th + i \sin th}{ith} = \\ &= -i \frac{(1 - \cos th)}{th} + \frac{\sin th}{th} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \end{aligned} \quad (3.1:14)$$

juntando (3.1:13) y (3.1:14), obtenemos la expresión (3.1:10) lo que concluye la demostración. //

TEOREMA 3.1:2

Quando X es una variable aleatoria discreta con función característica $\psi_x(t)$, entonces la función de probabilidad (función de masa de probabilidad) $p_x(x)$ está dada por:

$$p_x(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2q} \int_{-q}^q e^{-ixt} \psi_x(t) dt \quad (3.1:15)$$

Demostración.- Como X es una variable aleatoria discreta, se tiene:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2q} \int_{-q}^q e^{-ixt} \psi_x(t) dt$$

lo cual se puede escribir como:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2q} \int_{-q}^q e^{-ixt} \sum_{j=1}^{\infty} e^{ix_j t} p_x(x_j) dt$$

o bien:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_x(x_j) \frac{1}{2q} \int_{-q}^q e^{it(x_j-x)} dt$$

que es igual a:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_x(x_j) \frac{1}{2q} \int_{-q}^q \{\cos t(x_j-x) + i \operatorname{sen} t(x_j-x)\} dt$$

igual a:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_x(x_j) \frac{1}{2q} \int_{-q}^q \frac{1}{(x_j-x)} d \operatorname{sen} t(x_j-x)$$

que podemos expresar como:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_x(x_j) \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2q} \frac{2 \operatorname{sen} Q(x_j-x)}{(x_j-x)}$$

De aquí se tiene otra expresión equivalente:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_x(x_j) \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} Q(x_j-x)}{Q(x_j-x)}$$

o bien:

$$\begin{cases} p_x(x) & \text{si } x \in \{x_1, x_2, \dots\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{x_1, x_2, \dots\} \end{cases} // \quad (3.1:16)$$

3.2 La Inversión Numérica

Enfatizo en que la inversión numérica puede ser un recurso práctico, solo en aquellas ocasiones en que la integral involucrada no puede resolverse, ya sea formalmente o -- bien utilizando un libro de fórmulas integrales (ver bibliografía complementaria).

Para invertir la función característica asociada a una variable aleatoria X con un rango $I_{(a,b)}(x)$, debe determinarse si la variable aleatoria es continua o discreta, de lo cual depende el tipo de fórmula de inversión que se debe aplicar. En el caso que se tenga una variable aleatoria continua deberá resolverse la integral involucrada en la fórmula de inversión por algún método que lleve a la función primitiva. - En caso de que esto no sea posible, entonces podrá intentarse la inversión numérica.

Cómo es una Inversión Numérica

Sea $\varphi_X(t)$ una función característica, asociada a una variable aleatoria continua X , tal que $f_X(x)$ no se conoce por ahora, pero sabemos que tiene un indicador $I_{(a,b)}(x)$. Entonces para aproximar una función $g_X(x)$ a $f_X(x)$ a partir de $\varphi_X(t)$, es decir realizar una inversión numérica.

Debe separarse la parte real de la parte imaginaria en:

$$\frac{e^{-ix,t} - e^{-ix,t}}{it} \varphi_X(t) \quad (3.2:1)$$

o en:

$$e^{-ixt} \varphi_x(t) \quad (3.2:2)$$

según se vaya a utilizar la fórmula de inversión (3.1:1) o (3.1:10) respectivamente.

Identificar las funciones par e impar que se presenten en (3.2:1) o en (3.2:2), según el caso, tomando en cuenta que:

Sea $\varphi_x(t) = a(t) + ib(t)$, entonces $a(t)$ es par y $-b(t)$ es impar.

Como la fórmula de inversión (3.1:10) presenta menor número de calculos, me inclino por presentar la inversión numérica mediante ella. De esta manera si escribimos la expresión (3.2:2) de la forma:

$$e^{-ixt} [a(t) + ib(t)] \quad (3.2:3)$$

y ésta a su vez como:

$$[\cos xt - i \operatorname{sen} xt] [a(t) + ib(t)] \quad (3.2:4)$$

a partir del inciso d, del teorema (1.3.2:1), se tiene:

$$\begin{aligned} & [a(t) \cos xt + b(t) \operatorname{sen} xt] \\ & + i [-a(t) \operatorname{sen} xt + b(t) \cos xt] \end{aligned} \quad (3.2:5)$$

donde $a(t)$ y $\cos xt$ son funciones par, mientras que $b(t)$ y $-\operatorname{sen} xt$ son impar, de donde resulta que:

$$\begin{array}{llll} a(t) \cdot \cos xt & \text{y} & b(t) \cdot \operatorname{sen} xt & \text{son par} \\ a(t) \cdot \operatorname{sen} xt & \text{y} & b(t) \cdot \cos xt & \text{son impar} \end{array}$$

Sustituyendo (3.2:5) en (3.1:10) y partiendo por la mitad el intervalo de integración, se obtiene por propiedades de fun-

ciones par e impar, la expresión:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sen xt] dt \quad (3.2:6)$$

Ahora debemos obtener una aproximación de $f_x(x)$ dada por (3.2:6), mediante algún método de integración numérica*. Sea ésta:

$$g_x(x) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sen xt] dt \quad (3.2:7)$$

Es necesario realizar la aproximación de manera independiente para cada uno de los valores de x que se deseen, un mecanismo práctico, sería dar un arranque a los valores de x , y especificar un incremento, hasta alcanzar un valor prefijado, de manera que con las aproximaciones a partir de los valores de x que se utilicen, se represente lo mejor posible la función objetivo (f_x).

Como consecuencia de no poder obtener todos los valores de $f_x(x)$, ya que su rango de variación es continuo, la aproximación obtenida $g_x(x)$ es una función escalonada. Lo -- cual aunado al error de aproximación provoca que $g_x(x)$ en general no sea una función de densidad de probabilidad. Es por esto que según el caso, deberá ajustarse la tabla de valores obtenidos, para que modificando lo menos posible, la función escalonada $g_x(x)$ integre a uno, en el rango determinado por -- el arranque y el final de los valores de x que se hayan elegido. Deberá ser considerado el error de aproximación de la integral dada por (3.2:7) al ajustar la tabla de valores de -- $g_x(x)$, teniendo cuidado con resultados muy discrepantes.

*Siguiendo el criterio de Lebesgue, (3.2:6) es Riemann integrable, puesto que es sumable(absolutamente convergente), y además $\varphi_x(t)$ es continua por el teorema (1.3.2:4).

Es importante señalar que la variación de (3.2:2), afecta directamente en la aproximación numérica dada por -- (3.2:7). En efecto, esto se deduce del hecho de que la partición que se utilice para realizar la integración numérica de una función de poca variación, generalmente no bastará - para obtener la misma aproximación a la integral de otra función de mayor variación. Ya que, para que algún polinomio - aproxime satisfactoriamente a una función, debe coincidir con ella en aquellos puntos que realmente sean representativos en cada uno de los subintervalos formados por los puntos base. Y esto último se dificulta conforme la variación de la función aumenta.

Cuando $\varphi_x(t)$ o e^{-ixt} tienen gran variación, frecuentemente es de esperar que el producto la conserve, a menos que - sea el caso de que la variación de $\varphi_x(t)$ compense la variación de e^{-ixt} , y viceversa.

Si consideramos la fórmula (3.2:6), entonces, se ve que a medida que x aumenta, la variación de e^{-ixt} crece, provocando generalmente un incremento en la variación de (3.2:2), repercutiendo (desfavorablemente en la mayoría de las ocasiones) en la aproximación (3.2:7), la cual deberá corregirse mediante algún mecanismo, si es que se quiere conservar un error razonablemente pequeño.

El teorema (1.2:1), asegura que toda función característica $\varphi_x(t)$ de variable aleatoria continua, converge a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo para fines numéricos esto no es - garantía para poder realizar la integración numérica dada por (3.2:7). En efecto, si la convergencia es tan lenta, que los

valores de (3.2:2) son muy significativos para valores de t fuera de la capacidad de la máquina utilizada, entonces, habría que realizar un estudio exhaustivo de la integral:

$$R_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^{\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sen xt] dt \quad (3.2:8)$$

donde b es un número cercano al límite superior de la máquina

para poder reducir razonablemente el error de aproximación en (3.2:7). Este estudio deberá realizarse para cada función característica de convergencia lenta, y no siempre se tendrá control sobre el error.

Cuando la función converge rápidamente, de manera que la integral dada por (3.2:8) es despreciable, entonces, el que se involucre una integral impropia en (3.2:6) no acarrea ningún problema.

La capacidad de refinamiento de una partición, y el valor de la expresión (3.2:8) dependen de la máquina que se utilice. Es por esto que mientras más poderosa sea ésta última, mayor variación en (3.2:2) se podrá tolerar, y se podrán calcular inversiones numéricas de funciones de menos rápida convergencia.

3.3 Ejemplo

Durante el transcurso de esta tesis hemos expuesto - lo que consideramos es la base teórica fundamental para la obtención de una aproximación razonable de una función de densidad a partir de la función característica de ésta.

En esta sección se presenta la inversión numérica de una función característica cuya función de densidad asociada es conocida, con el fin de poder comparar los resultados que se obtengan.

Una de las distribuciones más conocidas, es la Normal, cuya función característica está dada por:

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad (3.3:1)$$

con $-\infty < \mu < \infty$ y $0 < \sigma < \infty$

y la función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad (3.3:2)$$

con $x \in (-\infty, \infty)$

donde la media es μ y la varianza es σ^2 .

Consideraremos el caso en el que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Esto es, $X \sim N(0,1)$, donde :

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (3.3:3)$$

y

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (3.3:4)$$

con $x \in (-\infty, \infty)$

Sustituyendo (3.3:3) en (3.2:2), tenemos:

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt - \frac{t^2}{2}} dt \quad (3.3:5a)$$

o bien:

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} [\cos xt - \text{sen } xt] dt \quad (3.3:5b)$$

Partiendo de (3.2:6) obtenemos:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos xt dt \quad (3.3:6)$$

Ahora realizaremos la inversión numérica de la función característica dada por (3.3:3), perteneciente a una variable aleatoria $X \sim N(0,1)$. Para esto, obtendremos una aproximación $g_x(x)$ de $f_x(x)$, utilizando el algoritmo y el programa que se presentan en los apéndices.

Si comparamos a $g_x(x)$ con $f_x(x)$ dados en la tabla (3.3:1), veremos que conforme x aumenta, la aproximación pier de exactitud. Esto es debido a que el término $\cos xt$, varía en (3.3:6) con mayor rapidéz. Para corregir esto es necesario refinar la partición o bien, descomponer el rango de integración en mayor número de integrales independientes.

Sin embargo es alentador el resultado de la aproximación si consideramos el grosor de la partición utilizada, la cual puede ser refinada para mejorar la aproximación.

Debe considerarse también que existen computadoras mucho más poderosas y versátiles que la máquina que se utilizó. Así mismo, el programa y el algoritmo dados en los apéndices, pueden ser substituidos por unos más eficientes.

Lo importante es que se logró una aproximación - "razonable" mediante la inversión numérica, la cual con -

mejoras técnicas se podría convertir en una buena herramienta para los estudiosos de la probabilidad y la estadística.

Inversión Numérica
Tabla (3.3:1)

aproximación a $f_x(x)$
mediante la inversión
numérica.*

x	$g_x(x)$	$f_x(x)$
0.00	0.398942299	0.398942280
0.10	0.396952568	0.396952547
0.20	0.391042717	0.391042694
0.30	0.381387843	0.381387815
0.40	0.368270174	0.368270140
0.50	0.352065367	0.352065327
0.60	0.333224649	0.333224603
0.70	0.312253982	0.312253933
0.80	0.289691600	0.289691553
0.90	0.266085291	0.266085250
1.00	0.241970753	0.241970725
1.10	0.217852184	0.217852177
1.20	0.194186032	0.194186055
1.30	0.171368531	0.171368592
1.40	0.149727360	0.149727466
1.50	0.129517442	0.129517596
1.60	0.110920634	0.110920835
1.70	0.094048837	0.094049077
1.80	0.078949890	0.078950189
1.90	0.065615539	0.065615815
2.00	0.053990708	0.053990966
2.10	0.043983384	0.043983596
2.20	0.035474457	0.035474593
2.30	0.028327004	0.028327038
2.40	0.022394617	0.022394530
2.50	0.017528512	0.017528300
2.60	0.013583292	0.013582969
2.70	0.010421335	0.010420935
2.80	0.007915874	0.007915452
2.90	0.005952904	0.005952532

*El intervalo de integración que se utilizó para la aproximación, fué [0,14.4].

x	$E_x(x)$	$f_x(x)$
3.00	0.004432037	0.004431846
3.10	0.003266842	0.003266819
3.20	0.002383830	0.002384008
3.30	0.001721996	0.001722569
3.40	0.001231346	0.001232219
3.50	0.000871588	0.000872683
3.60	0.000610734	0.000611902
3.70	0.000423757	0.000424780
3.80	0.000291545	0.000291947
3.90	0.000198785	0.000198655
4.00	0.000135000	0.000133830
4.10	0.000091732	0.000089262
4.20	0.000062880	0.000058943
4.30	0.000043961	0.000038535
4.40	0.000031698	0.000024942
4.50	0.000023707	0.000015984
4.60	0.000018268	0.000010141
4.70	0.000014167	0.000006370
4.80	0.000010577	0.000003961
4.90	0.000006986	0.000002439
5.00	0.000003142	0.000001437

Para los valores de x en:

[0, 1]
(1, 2]
(2, 3]
(3, 4]
(4, 5]

el error de aproximación
fué menor a:

5 cienmillonésimas
3 diezmillonésimas
5 diezmillonésimas
2 millonésimas
1 cienmilésima.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La aproximación numérica a una función de densidad $f_x(x)$, pierde exactitud conforme x aumenta,* debido a que la variación de e^{-ix} crece. Igualmente, si se tiene una función característica con mucha variación o bien, de muy lenta convergencia, la inversión numérica se dificulta,* e incluso en algunas ocasiones será impracticable.

La inversión numérica resulta costosa en tiempo máquina, y requiere de un análisis exhaustivo para poder estimar el error.

Sin embargo la inversión numérica de una función característica de poca variación y rápida convergencia, proporciona aproximaciones muy "razonables" de $f_x(x)$ cuando x está cercano a 0.

Se pueden obtener aproximaciones de $f_x(x)$ para un conjunto finito de puntos, sin efectuar más que los cálculos que corresponden a cada punto.

A través de la función característica, se conocen las propiedades de la función de densidad asociada antes de efectuar la inversión numérica.

Existen en la actualidad computadoras tan poderosas, que en muchas ocasiones se podrán obtener buenas aproximaciones para valores de x y variación de la función característica, "razonablemente grandes".

*Esto se cumple en la mayoría de las inv. num. en que la función característica no compensa la variación de e^{-ix} .

Solo es necesario realizar la inversión de una función característica una vez, e incluso es factible la publicación de tablas similares a las de logaritmos.

Finalmente y lo más importante, es que la inversión numérica debe ser considerada el último recurso para poder invertir una función característica, asociada a una función de distribución de una variable aleatoria continua desconocida.

APENDICE I

SUGERENCIA DE UN ALGORITMO Y DESARROLLO DEL MISMO

Pretendemos obtener una aproximación "razonable" de $f_x(x)$ dado por (3.2:6), llamemos a esta aproximación $g_x(x)$.

Para determinar $g_x(x)$ en cada punto x perteneciente al recorrido de x , es preciso realizar una integración en el intervalo $[0, \infty)$, lo cual para fines numéricos es inalcanzable, por eso nos conformamos con una aproximación $g_x(x)$ de la forma:

$$g_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^b [a(t)\cos xt + b(t)\sen xt] dt \quad (A.1:1)$$

donde b es un número grande dentro de la capacidad de la computadora que se utilice. En la mayoría de los casos, las consecuencias de que b sea grande pero $b \neq \infty$, no son tan graves, debido al teorema (1.2:1).

Para realizar numéricamente (A.1:1), sugiero la fórmula cerrada de integración compuesta de Newton-Cotes, con $\bar{\alpha} = 6$. Las razones son las siguientes:

1.- Fórmula cerrada. Si es posible establecer una cota superior despreciable para la integral dada por:

$$R_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^b [a(t)\cos xt + b(t)\sen xt] dt \quad (A.1:2)$$

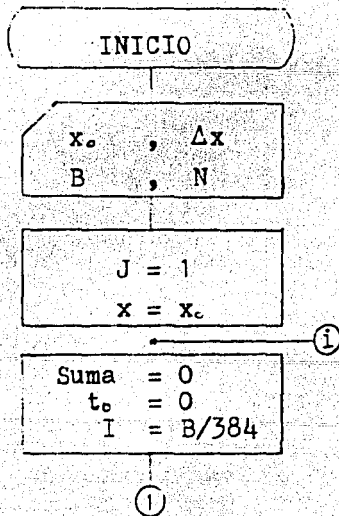
entonces en general, será preferible obtener una aproximación cerrada de (A.1:1), debido a que el polinomio de interpolación es de grado mayor que el de una fórmula abierta de integración.

2.- Forma compuesta de integración. Puesto que la integral dada por (A.1:2) debe ser despreciable, por lo que el intervalo de integración $[0, b]$, deberá ser relativamente amplio. En estos casos la fórmula compuesta permite refinar la partición de manera más eficiente.

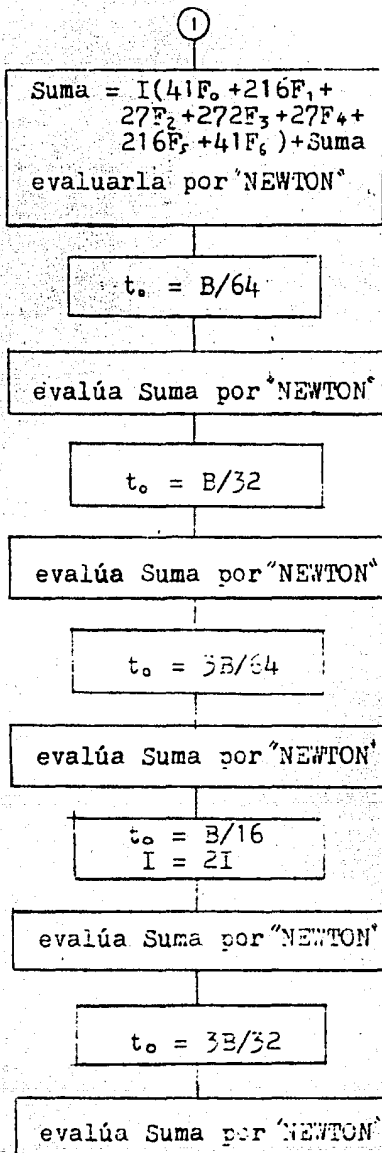
3.- Algoritmo de Newton-Cotes. Por la prestancia que tiene para su introducción en la computadora.

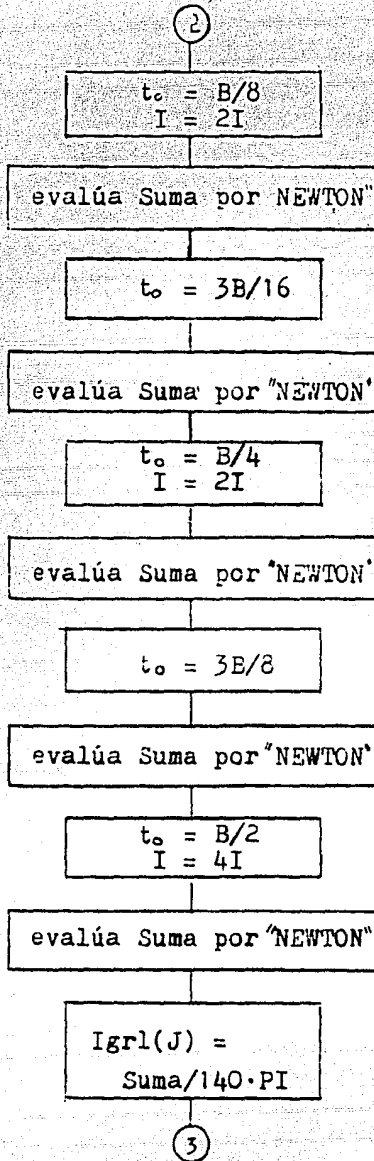
"Inversión numérica de una función característica de una variable aleatoria continua X , mediante la fórmula cerrada de integración compuesta de Newton-Cotes con $\alpha = 6$. En el caso donde $Y \sim N(0, 1)$ "

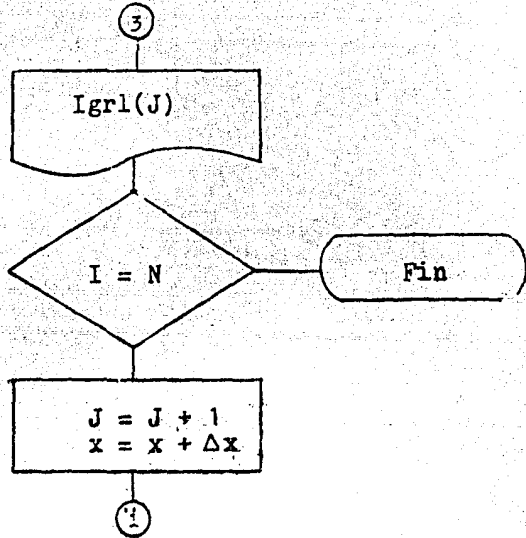
DIAGRAMA DE FLUJO



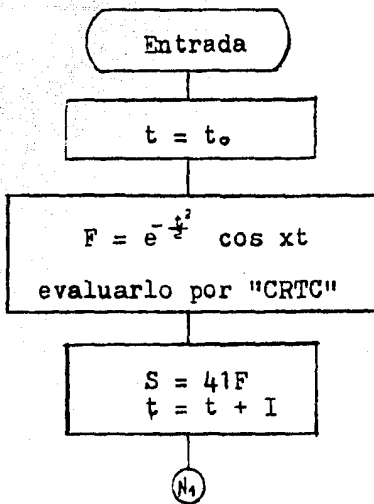
* Véase la expresión (2.1:43).

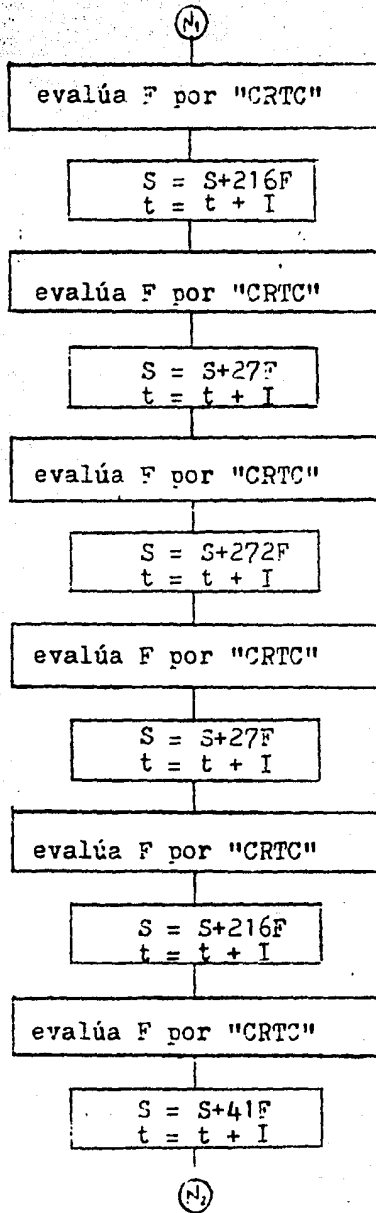


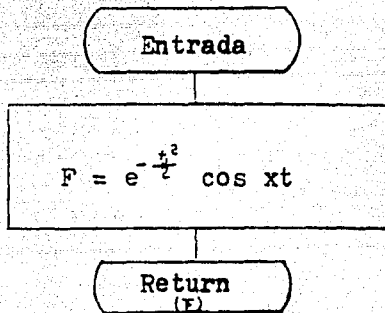
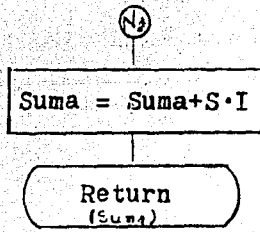




Función "NEWTON" (argumentos x, t_0, I, Suma)





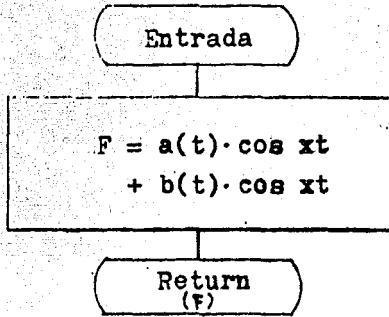


Para ajustar este algoritmo de manera que realice la inversión numérica de una función característica:

$$\Psi_Y(t) = a(t) + ib(t)$$

asociada a una variable aleatoria Y uniformemente continua, basta con redefinir la función "CRTC" de la siguiente manera:

Función "CRTC" (argumentos x,t)



Donde una expresión del error en la aproximación (A.1:1) sería:

$$E_1 = \frac{-9}{1400} \left[h_1^9 \sum_{k=1}^4 F^{(8)}(f_k) + h_2^9 \sum_{k=5}^6 F^{(8)}(f_k) + h_3^9 \sum_{k=7}^8 F^{(8)}(f_k) + h_4^9 \sum_{k=9}^{10} F^{(8)}(f_k) + h_5^9 F^{(8)}(f_{11}) \right] \quad (A.1:3)$$

con $h_1 = \frac{B}{384}$; $h_i = 2h_{i-1}$ $i = 2, 3, 4, 5$

$f_1 \in (0, B/64)$	$f_6 \in (3B/32, B/8)$
$f_2 \in (B/64, B/32)$	$f_7 \in (B/8, 3B/16)$
$f_3 \in (B/32, 3B/64)$	$f_8 \in (3B/16, B/4)$
$f_4 \in (3B/64, B/16)$	$f_9 \in (B/4, 3B/8)$
$f_5 \in (B/16, 3B/32)$	$f_{10} \in (3B/8, B/2)$
	$f_{11} \in (B/2, B)$

Así, el error total en cada punto x, está dado - por la suma de E_1 y $R_x(x)$ definidas en (A.1:3) y (A.1:2) - respectivamente.

APENDICE II

PROGRAMA DE COMPUTACION CORRESPONDIENTE AL ALGORITMO SUGERIDO

Un programa que efectúe los cálculos correspondientes al algoritmo sugerido en el apéndice I, puede ser realizado de muy diversas maneras, dependiendo de la máquina que se utilice y del gusto del programador. A continuación presento uno de tantos programas, hecho más con el fin de aclarar el algoritmo y ejemplificar una inversión numérica, que el de alcanzar la máxima eficiencia en los cálculos.

"Programa de computación para la inversión numérica de una función característica asociada a una variable aleatoria X , normal distribuida, tal que $X \sim N(0,1)$ "

(Máquina utilizada: HP-41CV)

01	LBL'INVER	11	VAL B?
02	CLRG	12	PROMPT
03	20	13	STO 00
04	STO 02	14	N DE X?
05	VAL XO?	15	PROMPT
06	PROMPT	16	20
07	STO 03	17	+
08	VAL AX?	18	STO 05
09	PROMPT	19	LBL 01
10	STO 04	20	0

21 STO 20
22 STO 10
23 RCL 00
24 324
25 /
26 STO 01
27 XEQ 02
28 RCL 00
29 64
30 /
31 STO 10
32 XEQ 02
33 RCL 00
34 32
35 /
36 STO 10
37 XEQ 02
38 RCL 00
39 3
40 *
41 64
42 /
43 STO 10
44 XEQ 02
45 2
46 ST* 01
47 RCL 00
48 16
49 /
50 STC 10
51 XEQ 02
52 RCL 00
53 3
54 *
55 32
56 /
57 STO 10
58 XEQ 02
59 2
60 ST* 01
61 RCL 00
62 8
63 /
64 STO 10
65 XEQ 02

66 RCL 00
67 3
68 *
69 16
70 /
71 STO 10
72 XEQ 02
73 2
74 ST* 01
75 RCL 00
76 4
77 /
78 STO 10
79 XEQ 02
80 RCL 00
81 3
82 *
83 8
84 /
85 STO 10
86 XEQ 02
87 4
88 ST* 01
89 RCL 00
90 2
91 /
92 STO 10
93 XEQ 02
94 PI
95 ST/ 20
96 140
97 ST/ 20
98 1
99 ST+ 20
100 RCL 20
101 STC IND 02
102 RCL 02
103 RCL 05
104 X≠Y?
105 STOP
106 RCL 04
107 ST+ 03
108 GOTO 01
109 LBL 02
110 XEQ CRTC

111	41	136	*
112	*	137	ST+ 18
113	STO 18	138	RCL 01
114	RCL 01	139	ST+ 10
115	ST+ 10	140	XEQ' CRTC
116	XEQ' CRTC	141	216
117	216	142	*
118	*	143	ST+ 18
119	ST+ 18	144	RCL 01
120	RCL 01	145	ST+ 10
121	ST+ 10	146	XEQ' CRTC
122	XEQ' CRTC	147	41
123	27	148	*
124	*	149	ST+ 18
125	ST+ 18	150	RCL 01
126	RCL 01	151	RCL 18
127	ST+ 10	152	*
128	XEQ' CRTC	153	ST+ 20
129	272	154	RTN
130	*	155	END
131	ST+ 18		
132	RCL 01		
133	ST+ 10		
134	XEQ' CRTC		
135	27		

Función 'CRTC'

01	LBL' CRTC
02	RCL 10
03	X/2
04	CHS
05	2
06	/
07	E/X
08	RCL 10
09	RCL 03
10	*
11	COS
12	*
13	END

Para ajustar este programa de manera que efectúe la

inversión numérica de una función característica de rápida convergencia, y que esté asociada a una variable aleatoria uniformemente continua, basta con redefinir la función "CRTC" de la manera como se menciona en el apéndice I, considerando que:

x está almacenado en la memoria 03

y

t está almacenado en la memoria 10.

Los resultados serán almacenados a partir de la memoria 21, en el orden correspondiente, es decir:

g (arranque)	memoria	21
g (arranque + Δ)	memoria	22
g (arranque + 2Δ)	memoria	23
:	:	:

BIBLIOGRAFIA

- Apostol, Tom M.
"Análisis Matemático" Trad. Dr. José Pla Carrera
segunda edición, España, Ed. Reverté, 1981, 596 págs.
- Bhattacharyya, Gouri K - Johnson, Richard A.
"Statistical concepts and methods"
E.U.A. Ed. John Wiley & Sons, 1977,
639 págs.
- Burden, Richard L - Faires, J. Douglas
"Análisis Numérico" Trad. Simon Mocho
tercera edición, México, Ed. Limusa, 1984, 476 págs.
- Carnahan, Brice - Luther, H.A. - Wilkes, James O.
"Applied Numerical Methods"
E.U.A. Ed. John Wiley & Sons, 1969
604 págs.
- Del Castillo, Florencio
"Análisis Matemático II"
primera edición, México, Ed. Alhambra Mexicana, 1980
430 págs.
- Feller, William
"Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones"
Trad. Sergio Fernandez E.
segunda edición, México, Ed. Limusa, 1978, vol 2,
738 págs.
- Friedberg, Stephen H. - Insel, Arnold J. - Spence Lawrence
"Algebra Lineal" Trad. Jorge H. Rodriguez
primera edición, México, Ed. Publicaciones Cultural, 1982
543 págs.
- Fulks, Wátson
"Cálculo Avanzado" Trad. José H. Pérez
primera edición, México, Ed. Limusa, 1983, 551 págs.
- Godoy, Escoto José Eduardo
"La Caracterización de las Funciones de Probabilidad"
México, ENEP Acatlán UNAM, 1980
92 págs.

Harris, Bernard

"Theory of Probability"

E.U.A. Ed. Addison-Wesley, 1966

294 págs.

"Manual del Usuario y Guía de Programación HP-41C/41CV"

Brasil, Hewlett-Packard Co. 1980

271 págs.

Kolmogorov, A.N - Fomin, S.V.

"Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional" Trad. Carlos Vega

segunda edición, U.R.S.S. Ed. MIR, 1975, 534 págs.

Kostrikin, A.I.

"Introducción al Álgebra" Trad. Roberto Anibal S.

segunda edición, U.R.S.S. Ed. MIR, 1983, 439 págs.

Lang, Serge

"Álgebra Lineal" Trad. Miguel Lara A.

segunda edición, México, Ed. Fondo Educativo Interamericano

1976, 400 págs.

Lukacs, Eugene

"Characteristic Functions"

segunda edición, E.U.A. Ed. Hafner Publishing Company

1970, 350 págs.

McCracken, D.D. - Dorn, W.S.

"Métodos Numéricos y Programación Fortran"

Trad. José A. Nieto

primera edición, México, Ed. Limusa, 1984, 476 págs.

Mood - Graybill

"Introducción a la Teoría de la Estadística"

Trad. Rafael Pro Bermejo

cuarta edición, España, Ed. Aguilar, 1978, 536 págs.

Silverman, Richard A.

"Complex Analysis with Applications"

primera edición, E.U.A. Ed. Prentice-Hall, 1974

274 págs.

Spitzer, Frank
"Principles of Random Walk"
segunda edición, E.U.A. Ed. Springer-Verlag, 1976
403 págs.

Widder, David Vernon
"The Laplace Transform"
E.U.A. Princeton University, 1972
406 págs.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

Gradshteyn, I.S. - Ryzhik, I.M.
"Table of Integrals Series and Products"
cuarta edición, E.U.A. Ed. Academic Press, 1965

Erdelyi, A.
"Tables of Integral Transforms"
, E.U.A. Ed. McGraw-Hill, 1954
vols 1 y 2.

Dwight, H.B.
"Tables of Integral and other Mathematical Data"
primera edición, E.U.A. Ed. Macmillan, 1934

Peirce, B.O.
"A Short Table of Integrals"
tercera edición, E.U.A. Ed. Ginn & Co. 1929