2 j
5

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

HOMOLOGIA DE GRUPOS ABELIANOS LIBRES FINITAMENTE GENERADOS

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Oscar Cuauhtémoc Esperanza Contreras

México, D. F. Octubre, 1986

INDICE

INTRODUCCION

DADO UN GRUPO ES BIEN SABIDA LA IMPORTANCIA DE CALCULAR SUS GRUPOS DE HOMOLOGIA, LOS CUALES NOS AYUDAN A CONOCER Y CARACTERIZAR SU ESTRUCTURA INTERNA. PARA HACER ESTO, TAMBIEN SABEMOS QUE EL CALCULO SE SIMPLIFICA EN LA MEDIDA DE QUE SE ENCUENTRE UNA RESOLUCION LIBRE O PROYECTIVA UTIL. AUNQUE AQUI UNICAMENTE SE TRATARA EL CASO DE GRUPOS ABELIANOS LIBRES FINITAMENTE GENERADOS Y CUYOS GENERADORES SATISFACEN CIERTAS CONDICIONES, DESCRIBIREMOS UN METODO DE CONSTRUCCION DE RESOLUCIONES LIBRES DE ESTOS GRUPOS. DE HECHO, SE OBTENDRAN RESULTADOS MAS GENERALES QUE PUEDEN SER UTILIZADOS PARA CALCULAR LA HOMOLOGIA DE ANILLOS NOETHERIANOS Y ANILLOS LOCALES. ESTOS RESULTADOS SE OBTENDRAN PARTIENDO DE R, UN ANILLO NOETHERIANO CONMUTATIVO Y CON ELEMENTO UNIDAD; Y HACIENDO UN USO SISTEMATICO DE ALGEBRAS DIFERENCIALES NO CONMUTATIVAS, LLAMADAS AQUI R-ALGEBRAS (Y DEFINIDAS EN EL CAPITULO I).

EN EL CAPITULO II, SE DESCRIBE UN METODO CANONICO PARA CONSTRUIR UNA R-ALGEBRA Y EXTENSION DE UNA R-ALGEBRA X DADA. Y TAMBIEN QUE SIEMPRE ES POSIBLE CONSTRUIR UNA RESOLUCION LIBRE ACICLICA DEL ANILLO DE CLASES RESIDUALES R/M, DONDE R ES EL ANILLO DEL QUE PARTIMOS Y M ES UN IDEAL CUALESQUIERA DE R.

EN EL CAPITULO III Y EN EL IV SE MUESTRA QUE EL METODO DE CONSTRUCCION ABSTRACTO, PARA ALGUNOS CASOS IMPORTANTES NOS DA RESOLUCIONES CONCRETAS Y MUY EFICIENTES, PUES SE OBTIENE INMEDIATAMENTE LA HOMOLOGIA. ESTO SE HACE OBSERVANDO EL CAMBIO QUE SE TIENE EN EL ANILLO DE HOMOLOGIA DE UNA ALGEBRA R DEBIDO A NUESTRA CONSTRUCCION, Ó BIEN, COMO TOMANDO CIERTO COCIENTE DE UNA R-ALGEBRA DADA SE OBTIENE NATURALMENTE CIERTA EXTENSION COMO LA DESCRITA.

Para finalizar, en el capitulo V se muestra como, usando los resultados obtenidos, se calcula una resolucion libre de un grupo abeliano finitamente generado, la cual sirve para calcular sus grupos de homologia.

C A P I T U L O I

I.- R-Algebras.

Sea R un anillo noetheriano conmutativo con elemento unidad.

Definicion: Sea X un algebra asociativa sobre R. Decimos que (X,d) es una R-Algebra si $d: X \longrightarrow X$ es una funcion R-lineal y tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

i).- X es graduada, es decir: $X = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} X_\lambda$ es la suma directa de R-modulos X_λ, tales que $X_\lambda X_\mu \subset X_{\lambda+\mu}$.

ii).- $X_\lambda = 0 \ \forall \lambda < 0$; X tiene un elemento $1 \in X_0$ tal que $X_0 = R\cdot 1$ y X_λ es un R-Modulo finitamente generado.

iii).- X es anticonmutativa: (es decir: conmuta salvo un signo):

$$x\cdot y = (-1)^{\lambda\mu} y x \qquad \forall x \in X_\lambda,\ y \in X_\mu$$
$$x^2 = 0 \qquad \forall x \in X_\lambda \text{ con } \lambda \text{ impar.}$$

iv).- La funcion d es una derivacion (o diferencial) no conmutativa:

$$d(xy) = d(x)\,y + (-1)^\lambda x\, d(y) \quad \text{para } x \in X_\lambda,\ y \in X_\mu.$$
$$d^2 = 0 \quad y \quad d(X_\lambda) \subset X_{\lambda-1}$$

Definicion: Sean (X,d), $(Y,\bar{d})$ R-algebras. Una funcion R-lineal $f: X \longrightarrow Y$ se dice que es un homomorfismo de R-algebras si:

$$f(X_\lambda) \subset Y_\lambda \quad \forall \lambda, \quad f(1_X) = 1_Y \ y \ (f\circ d)(x) = (\bar{d}\circ f)(x) \quad \forall x \in X,$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\bar{d}"'] & Y \end{tikzcd}$$

DEFINICION: UNA R-ALGEBRA (X,d) ES UNA SUBALGEBRA DE UNA R-ALGEBRA (Y,d) SI X ES SUBCONJUNTO DE Y Y LA INCLUSION $X \hookrightarrow Y$ ES UN HOMOMORFISMO DE R-ALGEBRAS.

UNA R-ALGEBRA X PUEDE SER VISTA COMO UN COMPEJO DE R-MODULOS CON OPERADOR FRONTERA d:

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \longrightarrow 0$$

DONDE $d_n := d|_{X_n}$

DEFINICION: SEA $Z = Z(X)$ EL KERNEL DE d (GRUPO DE CICLOS) Y SEA $B = B(X)$ LA IMAGEN DE d (GRUPO DE FRONTERAS).

LEMA 1: CON Z Y B ASI DEFINIDOS: $Z = \sum_\lambda Z_\lambda$ (SUMA DIRECTA) DONDE $Z_\lambda = Z \cap X_\lambda$, Y $B = \sum_\lambda B_\lambda$ (SUMA DIRECTA) DONDE $B_\lambda = B \cap X_\lambda = dX_{\lambda+1}$ $(\therefore\ B = \sum_\lambda dX_{\lambda+1})$

DEMOSTRACION: $Z = \sum_\lambda Z_\lambda$:

i).- $Z_\lambda \cap (\sum_{\beta\neq\lambda} Z_\beta) = 0$

SEA $x \in Z_\lambda \cap (\sum_{\beta\neq\lambda} Z_\beta)$ ENTONCES $x \in Z_\lambda = Z \cap X_\lambda$ Y $x \in \sum_{\beta\neq\lambda} Z_\beta$

ES DECIR $x \in X_\lambda$ Y $x = \sum_{\beta\neq\lambda} x_\beta$, CON $x_\beta \in Z_\beta = X_\beta \cap Z$ $(\therefore\ x_\beta \in X_\beta)$

TENEMOS ENTONCES QUE $x \in X_\lambda$ Y $x \in \sum_{\beta\neq\lambda} X_\beta$, ES DECIR, $x \in X_\lambda \cap \sum_{\beta\neq\lambda} X_\beta = 0$

$\therefore\ x = 0$ (YA QUE $X = \sum X_\lambda$ SUMA DIRECTA)

$$\therefore\ Z_\lambda \cap (\sum_{\beta\neq\lambda} Z_\beta) = 0$$

ii).- $Z = \sum_\lambda Z_\lambda$:

CLARAMENTE $\sum_\lambda Z_\lambda \subset Z$. SOLO FALTA VER QUE $Z \subset \sum_\lambda Z_\lambda$

Sea $z \in Z$ ($\subset \mathfrak{X}$) entonces $z = \sum_\lambda x_\lambda$, $x_\lambda \in \mathfrak{X}_\lambda$ y $d(z) = 0$, es decir: $d(\sum_\lambda x_\lambda) = 0$ $\therefore$ $d(x_\lambda) = 0$ $\forall \lambda$ $\therefore$ $x_\lambda \in Z_\lambda$ $\therefore$ $z \in \sum Z_\lambda$ $\therefore$ $Z \subset \sum_\lambda Z_\lambda$

$$\therefore \; Z = \sum_\lambda Z_\lambda .$$

Ahora veamos que $B = \sum B_\lambda$

i):- $B_\lambda \cap \sum_{\beta \neq \lambda} B_\beta = 0$

Sea $y \in B_\lambda \cap \sum_{\beta \neq \lambda} B_\beta$. P.D: $y = 0$

$y \in B_\lambda$ y $y \in \sum_{\beta \neq \lambda} B_\beta$ es decir $y = \sum_{\beta \neq \lambda} y_\beta$ con $y_\beta \in B \cap \mathfrak{X}_\beta$

$\therefore$ $y \in \mathfrak{X}_\lambda$ y $y \in \sum_{\beta \neq \lambda} \mathfrak{X}_\beta$ $\therefore$ $y = 0$

ii) $B = \sum_\lambda B_\lambda$: Claramente $\sum_\lambda B_\lambda \subset B$.

Ahora sea $b \in B$. P.D $b \in \sum_\lambda B_\lambda$:
Como $b \in B$ existe $x \in \mathfrak{X}$ tal que $d(x) = b$, sea $x = \sum_\lambda x_\lambda$ con $x_\lambda \in \mathfrak{X}_\lambda$
$\therefore$ $b = d(x) = d(\sum_\lambda x_\lambda) = \sum_\lambda d(x_\lambda)$ $\therefore$ $b \in \sum_\lambda B_\lambda$ $\therefore$ $B \subset \sum_\lambda B_\lambda$ $\therefore$ $B = \sum B_\lambda$

Solo resta probar que $B_\lambda = d\,\mathfrak{X}_{\lambda+1}$. Por iv) de la definicion

$$d\,\mathfrak{X}_{\lambda+1} \subset \mathfrak{X}_\lambda \cap B = B_\lambda$$

Ahora sea $x \in B_\lambda = \mathfrak{X}_\lambda \cap B$ entonces $x \in B$ y $x \in \mathfrak{X}_\lambda$. P.D $\exists\, y \in \mathfrak{X}_{\lambda+1}$ tal que $d(y) = x$.

Como $x \in B = \sum B_\lambda$ entonces $x = \sum_\lambda d(y_{\lambda+1})$ con $y_{\lambda+1} \in \mathfrak{X}_{\lambda+1}$
pero $d(y_\beta) = x$ si $\beta = \lambda+1$ y $d(y_\beta) = 0$ en otro caso $\therefore$ $x = d(y_{\lambda+1})$
$\therefore$ $B_\lambda \subset d\,\mathfrak{X}_{\lambda+1}$ $\therefore$ $B_\lambda = d\,\mathfrak{X}_{\lambda+1}$

Q.E.D.

Por la propiedad iv), ya que $d^2 = 0$ tenemos que $B \subset Z$.

Lema 2: i):- $Z_\lambda Z_\mu \subset Z_{\lambda+\mu}$, ii) $B_{\lambda-1} Z_\mu \subset B_{\lambda+\mu-1}$, iii) $Z_\lambda B_{\mu-1} \subset B_{\lambda+\mu-1}$

DEMOSTRACION:

i).- SEAN $x \in Z_\lambda$, $y \in Z_\mu$ ENTONCES POR (1.1.i) $xy \in X_{\lambda+\mu}$ Y $d(xy) = d(x)y + (-1)^\lambda x d(y)$

ES DECIR $d(xy) = 0 \cdot y + (-1)^\lambda \cdot x\, 0 = 0$ $\therefore$ $xy \in Z_{\lambda+\mu}$

ii).- SEAN $x \in B_{\lambda-1}$, $y \in Z_\mu$ (ES DECIR $xy \in B_{\lambda-1} Z_\mu$)

EXISTE $z \in X_\lambda$ TAL QUE $dz = x$.

POR (1.i) $zy \in X_{\lambda+\mu}$ Y POR (1.iv) $d(zy) = d(z)y + (-1)^\lambda z\, dy$

$\therefore$ $d(zy) = d(z)y = xy$ $\therefore$ $xy \in d\, X_{\lambda+\mu} = B_{\lambda+\mu-1}$.

iii).- SEAN $x \in Z_\lambda$, $y \in B_{\mu-1}$ (IE: $xy \in Z_\lambda B_{\mu-1}$):

EXISTE $y' \in X_\mu$ TAL QUE $d(y') = y$ $\therefore$ $xy' \in X_{\lambda+\mu}$.

$$\therefore\ xy = xd(y') = d(x)y' + xdy' = \begin{cases} d(x)y' + (-1)^\lambda x dy' & \lambda \text{ PAR} \\ \\ d(x)y' + (-1)^{\lambda+1} x dy' & \lambda \text{ IMPAR} \end{cases}$$

$$\text{ENTONCES:}\quad xy = \begin{cases} d(xy') & \lambda \text{ PAR} \\ \\ (-1)\left(-d(x)y' + (-1)^\lambda x d(y')\right) = -1\left(d(xy')\right) & \lambda \text{ IMPAR} \\ \qquad\qquad\qquad = d(-xy') \quad \text{(R-LINEALIDAD)} \end{cases}$$

EN CUALQUIER CASO $xy \in d\, X_{\lambda+\mu} = B_{\lambda+\mu-1}$ $\therefore$ $Z_\lambda B_{\mu-1} \subset B_{\lambda+\mu-1}$

QED.

POR EL LEMA 1 Y EL LEMA 2, PODEMOS CONCLUIR QUE Z ES UNA SUBALGEBRA GRADUADA DE X Y B ES UN IDEAL DE Z.

DEFINICION: EL ALGEBRA DE CLASES RESIDUALES Z/B ES LLAMADA EL ALGEBRA DE HOMOLOGIA DE X Y SE DENOTA POR $H := H(X)$. (OBVIAMENTE H ES GRADUADA PUES $H = \sum_\lambda H_\lambda$ CON $H_\lambda = Z_\lambda / B_\lambda$).

DEFINICION: DECIMOS QUE X ES ACICLICO SI $H = H_0$, IE, $H_\lambda = 0$ $\forall \lambda > 0$. DECIMOS QUE X ES LIBRE SI X_λ ES LIBRE COMO R-MODULO $\forall \lambda$.

OBS: SI X ES LIBRE: TENEMOS QUE $X_0 \cong R$ Y $B_0 \cong M$ ($M \subseteq R$ IDEAL) DE AQUI QUE $H_0 \cong R/M$ EL ANILLO DE CLASES RESIDUALES DE R. ($X_0 = R \cdot 1 \overset{\varphi}{\cong} R$ ENTONCES $B_0 \cong \varphi(B_0)$ IDEAL DE R).

CAPITULO II

II.- EL PROCESO DE AGREGAR UNA VARIABLE DE GRADO P PARA ANULAR UN CICLO DE GRADO P-1.

SEA $\mathbb{X}$ UNA R-ALGEBRA, $P>0$ UN ENTERO POSITIVO Y $t \in Z_{p-1}(\mathbb{X})$, UN CICLO DE GRADO $P-1$.

DESCRIBIREMOS UN PROCEDIMIENTO CANONICO PARA CONSTRUIR UNA R-ALGEBRA $\mathbb{Y}$ EXTENSION DE $\mathbb{X}$ ($\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$) TAL QUE:

a).- $\mathbb{Y}_\lambda = \mathbb{X}_\lambda \quad \forall \lambda < p \quad$ Y

b).- $B_{p-1}(\mathbb{Y}) = B_{p-1}(\mathbb{X}) + Rt$.

ESTE PROCESO ES BASTANTE DIFERENTE PARA EL CASO P PAR Y EL CASO P IMPAR, ASI QUE DISCUTIREMOS LOS CASOS SEPARADAMENTE.

P IMPAR: SEA $\mathbb{X}T$ EL MODULO LIBRE CON BASE EN T Y SEA $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \oplus \mathbb{X}T$.
GRADUAMOS A $\mathbb{Y}$ DANDOLE A T EL GRADO P, ESTO ES: $\mathbb{Y}_\lambda = \mathbb{X}_\lambda \oplus \mathbb{X}_{\lambda-p}T$.
VEAMOS QUE $\mathbb{Y} = \sum_\lambda \mathbb{Y}_\lambda$ (SUMA DIRECTA):

SEA $w \in \sum_\lambda \mathbb{Y}_\lambda$ ENTONCES $w = \sum_\lambda (x_\lambda + x_{\lambda-p}T) = \sum_\lambda x_\lambda + \sum_\lambda x_{\lambda-p}T$

$= \sum_\lambda x_\lambda + (\sum x_{\lambda-p})T = x + x'T \quad \therefore \quad w \in \mathbb{X} \oplus \mathbb{X}T \quad \therefore \quad \sum \mathbb{Y}_\lambda \subset \mathbb{Y}$.

SEA $z \in \mathbb{Y}$: $z = x + x'T \quad (x, x' \in \mathbb{X}) \therefore \quad x = \sum_\lambda x_\lambda \quad , \quad x' = \sum_{\lambda \geq p} x'_\lambda$

$\therefore \quad z = \sum_\lambda x_\lambda + \sum_{\lambda \geq p} x'_\lambda T \quad = \sum_\lambda x_\lambda + \sum_\lambda x'_{\lambda-p}T = \sum_\lambda (x_\lambda + x'_{\lambda-p}T)$ (REORDENANDO)

$$\therefore z \in \sum_\lambda \mathbb{Y}_\lambda$$

$$\therefore \quad \mathbb{Y} = \sum_\lambda \mathbb{Y}_\lambda$$

SEA $y_\lambda \in \mathbb{Y}_\lambda \cap \sum_{\mu \neq \lambda} \mathbb{Y}_\mu$: $y_\lambda \in \mathbb{Y}_\lambda$ Y $y_\lambda = \sum_{\mu \neq \lambda} y_\mu = \sum_{\mu \neq \lambda} (x_\mu + x_{\mu-p}T)$

ENTONCES: $y_\lambda = x_\lambda + x_{\lambda-p}T = \sum_{\mu \neq \lambda} x_\mu + \sum_{\mu \neq \lambda} x_{\mu-p}T \Rightarrow \quad x_\lambda = \sum_{\mu \neq \lambda} x_\mu$ Y $x_{\lambda-p}T = \sum_{\mu \neq \lambda} x_{\mu-p}T$

$\therefore \quad x_\lambda \in \mathbb{X}_\lambda \cap \sum_{\mu \neq \lambda} \mathbb{X}_\mu$ Y $\therefore \quad x_\lambda = 0$. ANALOGAMENTE $x_{\lambda-p}T = 0$ YA QUE $x_{\lambda-p} = 0$

$\therefore\ y_\lambda = 0 \quad \therefore\ \mathcal{Y} = \Sigma\,\mathcal{Y}_\lambda$ (SUMA DIRECTA).

ESTO DEFINE A $\mathcal{Y}$ COMO UN R-MODULO GRADUADO. AHORA VEAMOS COMO HACER A $\mathcal{Y}$ UNA R-ALGEBRA EXTENSION DE $\mathcal{X}$.

DEFINIMOS:

1).- $T^2 := 0$ YA QUE T ES DE GRADO IMPAR.

DADAS $x \in \mathcal{Y}_\lambda$, $y \in \mathcal{Y}_\mu$: $x = x_\lambda + x_{\lambda-p}T$, $y = y_\mu + y_{\mu-p}T$.

2).- $Ty := (-1)^\lambda yT$

3).- $xy = x_\lambda y_\mu + [x_\lambda y_{\mu-p} + (-1)^\mu x_{\lambda-p} y_\mu]T$

Y EXTENDEMOS EL PRODUCTO A $\mathcal{Y}$ BILINEALMENTE.

4).- $\bar{d} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$

i) $\bar{d}T := t$

ii) SIMILARMENTE $\bar{d}(y_\lambda T) = d(y_\lambda)T + (-1)^\lambda yt \quad (y_\lambda \in \mathcal{X}_\lambda)$

ES DECIR $\bar{d}(x) = dx\ \forall\ x \in \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$.

iii).- SI $y \in \mathcal{Y}_\lambda$, $z \in \mathcal{Y}_\mu$, $y = x_\lambda + x_{\lambda-p}T$, $z = x'_\mu + x''_\mu T$

$\bar{d}(y) = d(x_\lambda) + d(x_{\lambda-p})T + (-1)^{\lambda-p} x_{\lambda-p} t$

Y EXTENDEMOS $\bar{d}$ A $\mathcal{Y}$ BILINEALMENTE

POR LO TANTO:

1).- $\mathcal{Y}$ ES GRADUADA ; $\mathcal{Y}_\lambda \cdot \mathcal{Y}_\mu \subset \mathcal{Y}_{\lambda+\mu}$ YA QUE DADAS $y_\lambda \in \mathcal{Y}_\lambda$ Y $y_\mu \in \mathcal{Y}_\mu$
$y_\lambda = x_\lambda + x_{\lambda-p}T$, $y_\mu = x_\mu + x_{\mu-p}T$ ENTONCES $y_\lambda \cdot y_\mu = x_\lambda x_\mu + [x_\lambda x_{\mu-p} + (-1)^\mu x_{\lambda-p} x_\mu]T$
$\therefore\ y_\lambda y_\mu \in \mathcal{Y}_{\lambda+\mu}$ $\quad (x_\lambda x_\mu \in \mathcal{X}_{\lambda+\mu}$, $x_\lambda x_{\mu-p} + (-1)^\mu x_{\lambda-p} x_\mu \in \mathcal{X}_{\lambda+\mu-p})$.

2).- $\mathcal{Y}_\lambda = 0\ \forall\ \lambda < 0$. $\mathcal{Y}$ TIENE UN ELEMENTO $1 \in \mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}_0$ TAL QUE $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}_0 = R \cdot 1$.
$\mathcal{Y}_\lambda$ ES UN R-MODULO F.G. (SUMA DIRECTA DE MODULOS F.G.) $\forall\ \lambda > 0$.

3).- $\mathcal{Y}$ ES ANTICONMUTATIVA:

SEAN $y \in \mathcal{Y}_\lambda$, $z \in \mathcal{Y}_\mu$: $y = y_1 + y_2 T$, $z = z_1 + z_2 T$.

$yz = (y_1 + y_2T)(z_1 + z_2T) = y_1 z_1 + [y_1 z_2 + (-1)^\mu y_2 z_1]T = (-1)^{\lambda\mu} z_1 y_1 + [(-1)^{\lambda(\mu-p)} z_2 y_1$
$+ (-1)^\mu (-1)^{(\lambda-p)\mu} z_1 y_2]T = (-1)^{\lambda\mu}\{z_1 y_1 + [(-1)^\lambda z_2 y_1 + z_1 y_2]T\}$

$$= (-1)^{\lambda\mu} \{ z_1 y_1 + [z_1 y_2 + (-1)^{\lambda} z_2 y_1] T \} = (-1)^{\lambda} z y .$$

SEA $y \in \mathcal{Y}_\lambda$, λ IMPAR: $y = y_1 + y_2 T$ $(y_1 \in \mathfrak{X}_\lambda, y_2 \in \mathfrak{X}_{\lambda-p})$

$$y^2 = y_1 y_1 + [y_1 y_2 + (-1)^{\lambda} y_2 y_1] T = y_1^2 + [y_1 y_2 + (-1)^{\lambda(\lambda-p)} y_1 y_2 (-1)^{\lambda}] T$$
$$= y_1^2 + [y_1 y_2 + (-1)^{\lambda} y_1 y_2] T = 0 + [y_1 y_2 - y_1 y_2] T = 0$$

IV).- LA FUNCIÓN $\bar{d}$ ES ANTICONMUTATIVA DE GRADO -1, ESTO ES:

a) $\bar{d}(\mathcal{Y}_\lambda) \subset \mathcal{Y}_{\lambda-1}$: SEA $y_\lambda \in \mathcal{Y}_\lambda$: $y_\lambda = x_\lambda + x_{\lambda-p} T$

$$\bar{d}(y_\lambda) = \left(d(x_\lambda) + (-1)^{\lambda-p} x_{\lambda-p} t\right) + d(x_{\lambda-p}) T \in \mathfrak{X}_{\lambda-1} + \mathfrak{X}_{\lambda-p-1} T = \mathcal{Y}_{\lambda-1} .$$

b) $\bar{d}^2 = 0$: SEA $y_\lambda = x_\lambda + x_{\lambda-p} T \in \mathcal{Y}_\lambda$

P.D. $\bar{d}^2(y_\lambda) = 0$

$$d^2(y_\lambda) = \bar{d}\bar{d}(x_\lambda + x_{\lambda-p} T) = \bar{d}\left(d(x_\lambda) + (-1)^{\lambda-p} x_{\lambda-p} t + d(x_{\lambda-p}) T \right) = d^2(x_\lambda) + (-1)^{\lambda-p}$$
$$\cdot d(x_{\lambda-p} t) + \bar{d}(d(x_{\lambda-p}) T) = (-1)^{\lambda-p}\left[d(x_{\lambda-p}) t + (-1)^{\lambda-p-1} d x_{\lambda-p} dt\right] + d^2(x_{\lambda-p}) T$$
$$+ (-1)^{\lambda-p-1} d(x_{\lambda-p}) t = (-1)^{\lambda-p} d(x_{\lambda-p}) t + (-1)^{\lambda-p-1} d(x_{\lambda-p}) t = 0$$

$$\therefore \; d^2(y) = d^2\left(\sum y_\lambda\right) = \sum d^2(y_\lambda) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{Y} .$$

c).- SEAN $z \in \mathcal{Y}_\lambda$, $y \in \mathcal{Y}_\mu$: $z = z_1 + z_2 T$, $z_1 \in \mathfrak{X}_\lambda$, $z_2 \in \mathfrak{X}_{\lambda-p}$.
$y = y_1 + y_2 T$, $y_1 \in \mathfrak{X}_\mu$, $y_2 \in \mathfrak{X}_{\mu-p}$.

P.D.- $\bar{d}(yz) = \bar{d}(y) z + (-1)^{\mu} y \bar{d} z$.

$$\bar{d}(y) = d(y_1) + (-1)^{\mu-p} y_2 t + d(y_2) T , \quad \bar{d}(z) = d(z_1) + (-1)^{\lambda-p} z_2 T + d(z_2) T.$$

$$\bar{d}(yz) = \bar{d}\left(y_1 z_1 + [y_1 z_2 + (-1)^{\lambda} y_2 z_1] T \right) = d(y_1) z_1 + (-1)^{\mu} y_1 d(z_1) + (-1)^{\lambda+\mu-p}\left(y_1 z_2\right.$$
$$\left. + (-1)^{\lambda} y_2 z_1\right) t + \left\{ d(y_1) z_2 + (-1)^{\mu} y_1 d(z_2) + (-1)^{\lambda}\left[d(y_2) z_1 + (-1)^{\mu-p} y_2 d(z_1)\right]\right\} T$$

$$\bar{d}(y) z = \{ d(y_1) + (-1)^{\mu-p} y_2 t + d(y_2) T \} (z_1 + z_2 T) = \left[d(y_1) z_1 + (-1)^{\mu-p} y_2 t z_1\right] +$$
$$\{ d(y_1) z_2 + (-1)^{\mu-p} y_2 t z_2 + (-1)^{\lambda} d(y_2) z_1 \} T$$
$$= \left[d(y_1) z_1 + (-1)^{\mu-p} (-1)^{\lambda(p-1)} y_2 t z_1\right] + \left\{ d(y_1) z_2 + (-1)^{\mu-p} (-1)^{(\lambda-p)(p-1)} y_2 z_2 t + (-1)^{\lambda} d(y_2) z_1 \right\} T$$
$$= \left[d(y_1) z_1 + (-1)^{\mu} y_2 z_1 t\right] + \left\{ d y_1 \cdot z_2 + (-1)^{\mu-p} y_2 z_2 t + (-1)^{\lambda} d(y_2) z_1 \right\} T .$$

ANALOGAMENTE

$$Y dZ = [Y_1 d Z_1 + (-1)^{\lambda-p} Y_1 Z_2 t] + \{ Y_1 d Z_2 + (-1)^{\lambda-1} Y_2 d Z_1 + Y_2 Z_2 t \} T$$

ENTONCES: $d(Y) Z + (-1)^{\mu} Y dZ = [d(Y_1) Z_1 + (-1)^{\mu-p} Y_2 Z_1 t] + [d(Y_1) Z_2$

$+ (-1)^{\lambda} d(Y_2) Z_1 + (-1)^{\mu-p} Y_2 Z_2 t \} T + [(-1)^{\mu} Y_1 dZ_1 + (-1)^{\lambda-p+\mu} Y_1 Z_2 t]$

$+ [(-1)^{\mu} Y_1 d Z_2 + (-1)^{\lambda+\mu-1} Y_2 d Z_1 + (-1)^{\mu} Y_2 Z_2 t] T$

$= [d(Y_1) Z_1 + (-1)^{\mu} Y_1 d Z_1 + (-1)^{\lambda+\mu-p} (Y_1 Z_2 + (-1)^{\lambda} Y_2 Z_1) t]$

$+ [d(Y_1) Z_2 + (-1)^{\lambda} d(Y_2) Z_1 + (-1)^{\mu} Y_1 d Z_2 + (-1)^{\lambda+\mu-1} Y_2 d Z_1] T$

$+ [(-1)^{\mu-p} + (-1)^{\mu}] [Y_2 Z_2 t] \quad T$

$= [d(Y_1) Z_1 + (-1)^{\mu} Y_1 d Z_1 + (-1)^{\lambda+\mu-p} (Y_1 Z_2 + (-1)^{\lambda} Y_2 Z_1) t]$

$+ \{ d(Y_1) Z_2 + (-1)^{\mu} Y_1 d Z_2 + (-1)^{\lambda} [d(Y_2) Z_1 + (-1)^{\mu-p} Y_2 d Z_1] \} T$

$+ (-1)^{\mu} \underbrace{[(-1)^{p} + (+1)]}_{=0} Y_2 Z_2 t T = d(YZ)$

$\therefore$ $\mathfrak{Y}$ ES UNA R-ALGEBRA.

VEAMOS QUE SATISFACE a y b:

a) ES CLARO PUES SI $\lambda < p$ ENTONCES $\lambda - p < 0$ $\therefore$ $\mathfrak{X}_{\lambda-p} = 0$
$\therefore$ $\mathfrak{Y}_{\lambda} = \mathfrak{X}_{\lambda}$

b) $B_{p-1}(Y) = B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt$

"$\subseteq$" SEA $z \in B_{p-1}(Y) \Rightarrow \exists\, y \in \mathfrak{Y}_p$ TAL QUE $\bar{d}(y) = z$, $y = y_1 + y_2 T$

$y_1 \in \mathfrak{X}_p$, $y_2 \in \mathfrak{X}_0 = R \cdot 1$

$\therefore z = \bar{d}(y) = d(y_1) + (-1)^{0} y_2 t + 0 = d(y_1) + y_2 t \in B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt$

"$\supseteq$" SEA $d(x) + rt$, $x \in \mathfrak{X}_p$, $r \in R$. $(d(x) + Rt \in B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt)$

$\bar{d}(x + rT) = d(x) + d(r) T + rt = d(x) + rt$

$\therefore d(x) + rt \in B_{p-1}(\mathfrak{Y})$ $\therefore$ $B_{p-1}(Y) = B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt$.

P PAR: En este caso sea $\mathfrak{Y}$ el $\mathfrak{X}$-modulo libre en una base contable $\{1, T, T^{(2)}, \ldots\}$, es decir: $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} + \mathfrak{X}T + \mathfrak{X}T^{(2)} + \cdots$. Por conveniencia en la escritura de formulas, algunas veces pondremos $1 = T^{(0)}$, $T = T^{(1)}$. Graduamos a $\mathfrak{Y}$ dandole a $T^{(i)}$ el grado (pi), esto es, $\mathfrak{Y}_\lambda = \mathfrak{X}_\lambda + \mathfrak{X}_{\lambda-p}T + \mathfrak{X}_{\lambda-2p}T^2 + \cdots$. La cual es una suma finita pues $\mathfrak{X}_{\lambda-jp} \; 0 \; \forall\, jp>\lambda$.

Tenemos: $\sum \mathfrak{Y}_\lambda \subset \mathfrak{Y}$. P.D: $\mathfrak{Y} \subset \sum \mathfrak{Y}_\lambda$

Sea $x \in \mathfrak{Y}$: $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i T^{(i)}$, $x_i \in \mathfrak{X}\ \forall i$ $\quad \therefore\ x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i T^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_\lambda x_\lambda^i T^{(i)} \right)$

$$\therefore\ x = \sum_\lambda \left(x_\lambda^{(0)} + x_{\lambda-p}^{(1)} T^{(1)} + \cdots + x_{\lambda-jp}^{(j)} T^{(j)} \right) \text{ (reordenando), es decir } x \in \sum_\lambda \mathfrak{Y}_\lambda$$

$$\therefore\ \sum \mathfrak{Y}_\lambda = \mathfrak{Y}.$$

P.D.- $\mathfrak{Y}_\lambda \cap \sum_{\beta \neq \lambda} \mathfrak{Y}_\beta = 0$.

Sea $x \in \mathfrak{Y}_\lambda \cap \sum_{\beta\neq\lambda} \mathfrak{Y}_\beta$. Entonces $x = x_\lambda + y_{\lambda-p}^{(1)} T^{(1)} + \cdots + y_{\lambda-jp}^{(j)} T^{(j)}$

$$y \quad x = \sum_{\beta\neq\lambda} y_\beta + \sum_{\beta\neq\lambda} y_{\beta-p}^{(1)} T^{(1)} + \cdots + \sum_{\beta\neq\lambda} y_{\beta-jp}^{(j)} T^{(j)} \quad \therefore\ y_\lambda = \sum_{\beta\neq\lambda} y_\beta \quad \therefore\ y_\lambda = 0$$

Analogamente $y_{\lambda-kp}^{(k)} T^{(k)} = \sum_{\beta\neq\lambda} y_{\beta-kp}^{(k)} T^{(k)} \quad \therefore\ y_{\lambda-kp}^{(k)} = \sum_{\beta\neq\lambda} y_{\beta-kp}^{(k)}$

$$\therefore\ y_{\lambda-kp}^{(k)} = 0 \quad \therefore\quad x = 0 \quad \therefore\ \mathfrak{Y}_\lambda \cap \sum_{\beta\neq\lambda} \mathfrak{Y}_\beta = 0.$$

Definimos en $\mathfrak{Y}$ la multiplicacion a partir de:

$$T^{(i)} T^{(j)} = \frac{(i+j)!}{i!\,j!} T^{(i+j)}, \quad T^{(i)} x = x T^{(i)} \ \forall x \in \mathfrak{X}$$

es decir: dados $x, y \in \mathfrak{Y}$, $x = \sum_i x_i T^{(i)}$, $y = \sum_j y_j T^{(j)}$

$$xy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_i y_j \right) T^{(k)}.$$

Definimos $\bar{d} : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ a partir de $dT^{(i)} = t\,T^{(i-1)} \ \forall\, i>0$

VEAMOS QUE $\mathcal{Y}$ ES UNA R-ALGEBRA.

i).- $\mathcal{Y}$ ES GRADUADA ; $\mathcal{Y}_\lambda \mathcal{Y}_\mu \subset \mathcal{Y}_{\lambda+\mu}$

SEAN $y_\lambda \in \mathcal{Y}_\lambda$, $y_\mu \in \mathcal{Y}_\mu$; $y_\lambda = x_\lambda + x_{\lambda-p}T + \dots + x_{\lambda-ip}T^{(i)}$, $y_\mu = x_\mu + \dots + x_{\mu-jp}T^{(j)}$

$$y_\lambda y_\mu = x_\lambda x_\mu + x_{\lambda-p}x_\mu + \dots + x_{\lambda-ip}x_\mu T^{(i)} + \dots + x_\lambda x_{\mu-jp}T^{(j)} + \dots + x_{\lambda-p}x_{\mu-jp}T^{(i)}T^{(j)}$$

$$= \sum_{k=0}^{i+j} \Big(\sum_{\ell+\ell'=k} \frac{(\ell+\ell')}{\ell!\ell'!} x_{\lambda-\ell p} x_{\mu-\ell' p} \Big) T^{(k)} \quad \text{EN DONDE} \quad x_{\lambda-\ell p} x_{\mu-\ell' p} \in \mathcal{X}_{\lambda+\mu-kp}$$

$$\therefore \; y_\lambda \cdot y_\mu \in \mathcal{Y}_{\lambda+\mu} \quad \therefore \; \mathcal{Y}_\lambda \mathcal{Y}_\mu \subset \mathcal{Y}_{\lambda+\mu}$$

ii).- $\mathcal{Y}_\lambda = 0 \;\; \forall \lambda < 0$; $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}_0$; $\mathcal{Y}_\lambda$ ES F.G (SUMA DIRECTA FINITA DE F.G'S)

iii).- $\mathcal{Y}$ ES ANTICONMUTATIVA:

SEAN $y \in \mathcal{Y}_\lambda$, $w \in \mathcal{Y}_\mu$ $\quad y = x_\lambda + x_{\lambda-p}T + \dots + x_{\lambda-ip}T^{(i)}$, $w = x_\mu + \dots + x_{\mu-jp}T^{(j)}$

$$yw = \sum_{k=0}^{i+j} \Big(\sum_{\ell+\ell'=k} \frac{(\ell+\ell')!}{\ell!\ell'!} x_{\lambda-\ell p} x_{\mu-\ell' p} \Big) T^{(k)} = \sum_{k=0}^{i+j} \sum_{i+j=k} \frac{(\ell+\ell')!}{\ell!\ell'!} (-1)^{(\lambda-\ell p)(\mu-\ell' p)} x_{\mu-\ell' p} x_{\lambda-\ell p} T^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{i+j} \sum_{i+j=k} \frac{(\ell+\ell')!}{\ell!\ell'!} (-1)^{\lambda\mu} x_{\mu-\ell' p} x_{\lambda-\ell p} T^{k}$$

$$(\lambda-\ell p)(\mu-\ell' p) = \lambda\mu \overbrace{-\ell'\lambda p - \ell\mu p + \ell\ell' p^2}^{\text{PAR}}.$$

$$\therefore (-1)^{(\lambda-\ell p)(\mu-\ell' p)} = (-1)^{\lambda\mu} (-1)^{\ell'\lambda p - \ell\mu p + \ell\ell' p^2}$$

$$\therefore (-1)^{(\lambda-\ell p)(\mu-\ell' p)} = (-1)^{\lambda\mu}$$

$$= (-1)^{\lambda\mu} \sum_{k=0}^{i+j} \sum_{i+j=k} \frac{(\ell+\ell')!}{\ell!\ell'!} x_{\mu-\ell' p} x_{\lambda-\ell p} T^{k} = (-1)^{\lambda\mu} wy.$$

SEA $y \in \mathcal{Y}_\lambda$, λ IMPAR , $y = x_\lambda + x_{\lambda-p}T + \dots + x_{\lambda-ip}T^{(i)}$ (λ IMPAR $\Rightarrow \lambda - kp$ IMPAR)

$$y^2 = (x_\lambda + x_{\lambda-p}T + \dots + x_{\lambda-ip}T^{(i)})^2 = x_\lambda x_\lambda + x_\lambda x_{\lambda-p}T + \dots + x_\lambda x_{\lambda-ip}T^{(i)} + x_{\lambda-p}x_\lambda T$$

$$+ x_{\lambda-p}x_{\lambda-p}T\cdot T + \dots + x_{\lambda-p}x_{\lambda-ip}T\,T^{(i)} + \dots + x_{\lambda-ip}x_{\lambda-ip}T^{(i)}T^{(i)}$$

$$= x_\lambda^2 + x_{\lambda-p}^2 T\cdot T + \dots + x_{\lambda-ip}^2 T^{(i)}T^{(i)} + x_\lambda x_{\lambda-p}T + \dots + x_\lambda x_{\lambda-ip}T^{(i)} +$$

$$+ x_{\lambda-p}x_\lambda T + x_{\lambda-p}x_{\lambda-2p}T\cdot T^{(2)} + \dots + x_{\lambda-p}x_{\lambda-ip}T\,T^{(i)} + \dots + x_{\lambda-ip}x_\lambda T^{(i)}$$

$$+ \dots + x_{\lambda-ip}x_{\lambda-(i-1)p}T^{(i)}T^{(i-1)} = x_\lambda x_{\lambda-p}T + (-1)^{\lambda(\lambda-p)}x_\lambda x_{\lambda-p}T + \dots + x_\lambda x_{\lambda-ip}T^{(i)}$$

$$+ (-1)^{\lambda(\lambda-ip)}x_\lambda x_{\lambda-ip}T^{(i)} + \dots = x_\lambda x_{\lambda-p}T - x_\lambda x_{\lambda-p}T + \dots + x_\lambda x_{\lambda-ip}T^{(i)} - x_\lambda x_{\lambda-ip}T^{(i)}$$

$$+ \dots = 0$$

iv).- $\bar d(\mathcal{Y}_\lambda) \subset \mathcal{Y}_{\lambda-1}$: Sea $y \in \mathcal{Y}_\lambda$, $y = \sum_{\ell=0}^{i} x_{\lambda-\ell p}T^{(\ell)}$

$$\bar d(y) = \sum_{\ell=0}^{i}\bar d\left[(x_{\lambda-\ell p}T^{(\ell)}\right] = d(x_\lambda) + \sum_{\ell=1}^{i}\bar d(x_{\lambda-\ell p}T^{(\ell)}) = d(x_\lambda) + \sum_{\ell=1}^{i}\Big[d(x_{\lambda-\ell p})T^{(\ell)}$$

$$+ (-1)^{\lambda-\ell p}x_{\lambda-\ell p}t\,T^{(\ell-1)}\Big] = \left(d(x_\lambda) + (-1)^{\lambda-p}x_{\lambda-p}t\right) + \left[d(x_{\lambda-p}) + (-1)^{\lambda-2p}x_{\lambda-2p}t\right]T$$

$$+ \dots + \left[d(x_{\lambda-(i-1)p}) + (-1)^{\lambda-ip}x_{\lambda-ip}t\right]T^{(i-1)} + d(x_{\lambda-ip})T^{(i)}$$

$$= \left[d(x_\lambda) + (-1)^\lambda x_{\lambda-p}t\right] + \left[d(x_{\lambda-p}) + (-1)^\lambda x_{\lambda-2p}t\right]T + \dots + \Big[d(x_{\lambda-(i-1)p})$$

$$+ (-1)^\lambda x_{\lambda-ip}t\Big]T^{(i-1)} + d(x_{\lambda-ip})T^{(i)} \in \mathfrak{X}_{\lambda-1} + \mathfrak{X}_{\lambda-p-1}T + \dots + \mathfrak{X}_{\lambda-1-ip}T^{(i)} = \mathcal{Y}_{\lambda-1}$$

OBS: $\lambda \geq ip$ si $\lambda > ip \Rightarrow \lambda - 1 \geq ip$

si $\lambda = ip \Rightarrow \mathfrak{X}_{\lambda-ip} = \mathfrak{X}_0 \;\therefore\; d(x_{\lambda-ip}) = 0.$

DE HECHO: $\bar d(y) = \sum_{\ell=0}^{i} d(x_{\lambda-\ell p})T^{(\ell)} + (-1)^\lambda \sum_{\ell=1}^{i} x_{\lambda-\ell p}t\;T^{(\ell-1)}.$

$\bar d^2 = 0$: $\bar d^2(y) = 0$ $(y \in \mathcal{Y}_\lambda)$.

$$\bar d^2(y) = \bar d\,\bar d\Big(\sum_{i=0}^{n} x_{\lambda-ip}T^{(i)}\Big) = \bar d\Big[\sum_{i=0}^{n} d(x_{\lambda-ip})T^{(i)} + (-1)^\lambda\sum_{i=1}^{n} x_{\lambda-ip}t\;T^{(i-1)}\Big]$$

$$= \bar d\Big(\sum_{i=0}^{n} d(x_{\lambda-ip})T^{(i)}\Big) + (-1)^\lambda \bar d\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{\lambda-ip}t\,T^{(i-1)}\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} d^2(x_{\lambda-ip})T^{(i)} + (-1)^{\lambda-1}\sum_{i=1}^{n} d(x_{\lambda-ip})t\,T^{(i-1)} +$$

$$+ \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[d(x_{\lambda-ip})\, t + (-1)^{\lambda-ip} x_{\lambda-ip}\, dt \right] T^{(i-1)} + (-1)^{\lambda-1} \sum_{i=2}^{n} x_{\lambda-ip}\, t^2\, T^{(i-2)} \right.$$

$$(t \in X_{p-1} \therefore t^2 = 0).$$

$$\therefore \bar{d}^2(y) = \sum_{i=1}^{n} d(x_{\lambda-ip})\, t\, T^{(i-1)} (-1)^{\lambda-1} + \sum_{i=1}^{n} d(x_{\lambda-ip})\, t\, T^{(i-1)} (-1)^{\lambda} = 0.$$

$$\therefore \bar{d}^2 = 0.$$

SOLO RESTA PROBAR QUE: $\bar{d}(yw) = d(y)w + (-1)^{\lambda} y\, d(w)$, $y \in Y_\lambda$, $w \in Y_\mu$.

$$y = \sum_{i=0}^{n} x_{\lambda-ip} T^{(i)}, \quad w = \sum_{j=0}^{m} x_{\mu-jp} T^{(j)}, \quad yw = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp} T^{k}$$

$$d(yw) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} d(x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}) T^{k} + (-1)^{\lambda+\mu} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}\, t\, T^{(k-1)}.$$

$$d(y)w + (-1)^{\lambda} y d(w) = \left[\sum_{i=0}^{n} d(x_{\lambda-ip}) T^{(i)} + (-1)^{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_{\lambda-ip}\, t\, T^{(i-1)} \right] \sum_{j=0}^{m} x_{\mu-jp} T^{(j)}$$

$$+ (-1)^{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{n} x_{\lambda-ip} T^{(i)} \right) \left[\sum_{j=0}^{m} d(x_{\mu-jp}) T^{(j)} + (-1)^{\mu} \sum_{j=1}^{m} x_{\mu-jp}\, t\, T^{(j-1)} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} d(x_{\lambda-ip}) x_{\mu-jp} T^{k} + (-1)^{\lambda} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j-1)!}{(i-1)!\,j!} x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}\, t\, T^{(k-1)} (-1)^{\mu-jp}$$

$$+ (-1)^{\lambda} \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_{\lambda-ip} d(x_{\mu-jp}) T^{k} + (-1)^{\lambda+\mu} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j-1)!}{i!(j-1)!} x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}\, t\, T^{(k-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} \left[d(x_{\lambda-ip}) x_{\mu-jp} + (-1)^{\lambda} x_{\lambda-ip} d(x_{\mu-jp}) \right] T^{k} \right) + (-1)^{\lambda+\mu} \sum_{k=1}^{n+m} \left[\right.$$

$$\left. \left(\frac{(i+j-1)!}{(i-1)!\,j!} + \frac{(i+j-1)!}{i!(j-1)!} \right) x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}\, t\, T^{(k-1)} \right] = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} d(x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}) T^{k}$$

$$+ (-1)^{\lambda+\mu} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_{\lambda-ip} x_{\mu-jp}\, t\, T^{k-1} = \bar{d}(yw).$$

SEAN $x, y, z \in Y \therefore x = \sum x_i T^{(i)}$, $y = \sum y_j T^{(j)}$, $z = \sum z_i T^{(i)}$.

$$(xy)z = \left[\sum_{k} \left(\sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_i y_j \right) T^{(k)} \right] \sum_{i} z_i T^{(i)} = \sum_{s} \left[\sum_{k+l=s} \left(\frac{(k+l)!}{k!\,l!} \right) \sum_{i+j=k} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_i y_j \Big) z_l \right] T^{(s)}$$

$$\therefore (XY)Z = \sum_s \sum_{k+l=s} \sum_{i+j=k} \frac{(k+l)!\,(i+j)!}{k!\,l!\,j!} (X_iY_j)Z_l\ T^{(s)}$$

$$= \sum_s \sum_{i+j+l=s} \left[\sum_{i+j=s-l} \frac{(i+j+l)!}{(s-l)!\,l!} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} X_i\,(Y_j Z_l)\ T^{(s)}\right] = \sum_s \sum_{i+j+l=s} \Big(\sum_{i+j=s-l} \frac{(i+j+l)!\,(i+j)!}{(i+j)!\,i!\,j!\,l!}$$

$$X_i\,(Y_j Z_l)\Big) T^{(s)} = \sum_s \sum_{i+q=s} \sum_{l+j=q} \frac{(i+q)!}{i!\,q!} \frac{q!}{j!\,l!} X_i\ (Y_j Z_l)\ T^{(s)} \quad \text{DONDE } q=j+l$$

$$= \sum_s \Big(\sum_{i+q=s} \frac{(i+q)!}{i!\,q!} X_i \ \Big(\sum_{l+j=q} \frac{(j+l)!}{j!\,l!} Y_j Z_l\Big)\Big) T^{s} = \sum X_i T^{(i)} \left[\sum_q \sum_{j+l=q} \frac{(j+l)!}{j!\,l!} Y_j Z_l\ T^{q}\right]$$

$$= \sum X_i T^{(i)} \left[\sum_j Y_j T^{(j)} \cdot \sum_l Z_l T^{(l)} \right] = X\,(ZY)$$

$\therefore\ \mathfrak{Y}$ ES UNA R-ALGEBRA.

VEAMOS QUE SATISFACE (a) Y (b):

a) $\mathfrak{Y}_\lambda = \mathfrak{X}_\lambda$ YA QUE $\forall \lambda < p \quad \mathfrak{X}_{\lambda - ip} = 0$.

b).- $B_{p-1}(\mathfrak{Y}) = B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt$:

$$B_{p-1}(\mathfrak{Y}) = \bar{d}\,(\mathfrak{Y}_p) \quad , \quad \mathfrak{Y}_p = \mathfrak{X}_p + \mathfrak{X}_0 T$$

SEA $y \in B_{p-1}(\mathfrak{Y}) \Rightarrow \exists\, z \in \mathfrak{Y}_p$ TAL QUE $\bar{d}(z) = y$, $\quad z = x_p + x_0 T$

$y = \bar{d}(z) = d(x_p) + d(x_0)\,T + y_0 t = d(x_p) + y_0 t = d(x_p) + r_0 \cdot 1 t = d(x_p) + r_0 t$

$\therefore\ y \in d(\mathfrak{X}_p) + Rt = B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt.$

SEA $d(x_p) + r_0 t \in B_{p-1}(\mathfrak{X}) \quad (x_p \in \mathfrak{X}_p)$

$d(x_p) + r_0 t = d(x_p) + r_0 \cdot 1 \cdot t = d(x_p) + y_0 t = \bar{d}\,(x_p + y_0 T) \in B_{p-1}(\mathfrak{Y})$

$x_p + y_0 T \in \mathfrak{Y}_p$ Q.E.D

EN AMBOS CASOS P PAR Y P IMPAR, DENOTAREMOS LA R-ALGEBRA $\mathfrak{Y}$ OBTENIDA, POR LOS SIMBOLOS : $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\langle T\rangle$, $dT = t$.

LE LLAMAREMOS A $\mathfrak{Y}$ EL R-ALGEBRA OBTENIDA DE $\mathfrak{X}$ POR LA ADJUNCION DE UNA VARIABLE T LA CUAL ANULA A t.

LEMA 2.1.- SUPONGAMOS AHORA QUE DAMOS UNA SUCESION DE CLASES DE HOMOLOGIA $z_1, \ldots, z_n \in H_{p-1}(X)$. SELECCIONAMOS CICLOS $t_1, \ldots, t_n \in Z_{p-1}(X)$ REPRESENTANTES DE ESTAS CLASES. ENTONCES POR AGREGAR SUCESIVAMENTE VARIABLES $T_1, \ldots, T_n$ DE GRADO p, LAS CUALES ANULAN A LOS CICLOS t_j, OBTENEMOS UNA R-ALGEBRA $Y = X\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, $dT_j = t_j$ QUE SATISFACE:

$$a)\ X \subset Y,\ \ y\ Y_\lambda = X_\lambda \quad \forall \lambda < p$$

$$b)\ H_{p-1}(Y) \cong H_{p-1}(X)/_{Rz_1 + \cdots + Rz_n}$$

DEMOSTRACION: INDUCCION SOBRE $n :=$ NUMERO DE CLASES DE HOMOLOGIA QUE SE TOMAN.

BASE: $n=1$: $\quad Y = X\langle T\rangle,\ dT = t \qquad \bar{t} = z.$

a) SE CUMPLE POR LA CONSTRUCCION DE Y

b).- $H_{p-1}(Y) = H_{p-1}(X)/_{Rz}$

$$H_{p-1}(Y) := Z_{p-1}(Y)/_{B_{p-1}(Y)} = Z_{p-1}(Y)/_{B_{p-1}(X)+Rt} = Z_{p-1}(X)/_{B_{p-1}(X)+Rt}$$

$$(Y_{p-1} = X_{p-1} \ \therefore\ Z_{p-1}(Y) = Z_{p-1}(X)).$$

$$\begin{tikzcd}
H_{p-1}(X) = Z_{p-1}(X)/B_{p-1}(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, two heads, "\theta"'] & H_{p-1}(X)/Rz \arrow[d, dashed, two heads, tail, "\exists!\ \mu \text{ ISOMORFISMO.}"] \\
& Z_{p-1}(X)/_{B_{p-1}(X)+Rt} = H_{p-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

$$\theta(\bar{x}) = \theta(x + B_{p-1}(X)) = x + (B_{p-1}(X) + Rt)$$

θ BIEN DEFINIDA: SI $\bar{x}, \bar{y} \in H_{p-1}(X)$ SON TALES QUE $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x - y \in B_{p-1}(X) \therefore$

$\therefore\ x - y \in B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt \quad \therefore\ \hat{x} = \hat{y}$ (DONDE $\hat{x} = \theta(\bar{x}) = \theta(\bar{y}) = \hat{y}$).

ES CLARO QUE θ ES UN HOMOMORFISMO DE ALGEBRAS, POR LA FORMA EN QUE SE SUMAN Y SE MULTIPLICAN CLASES.

θ ES SOBRE PUES DADO $\hat{x} \in Z_{p-1}(\mathfrak{X})/B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt$ ENTONCES PARA $\bar{x} = x + B_{p-1}(\mathfrak{X})$ (DONDE x ES TAL QUE $\hat{x} = x + B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt$) SE TIENE QUE $\theta(\bar{x}) = \hat{x}$.

P.D.- $\operatorname{Ker}\theta = R\mathfrak{z}$.

$\supseteq$).- SEA $y \in R\mathfrak{z}$: $y = r\mathfrak{z} = r(t + B_{p-1}(\mathfrak{X})) = rt + B_{p-1}(\mathfrak{X})$. P.D.- $\theta(\overline{rt}) = \hat{0}$ (IE: $\theta(r\mathfrak{z}) = \hat{0}$).

$\theta(\overline{rt}) = rt + B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt = B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt = \hat{0} \quad \therefore\ R\mathfrak{z} \subseteq \operatorname{Ker}\theta$.

$\subseteq$).- SEA $\bar{y} \in \operatorname{Ker}\theta$: $\bar{y} \in Z_{p-1}(\mathfrak{X})/B_{p-1}(\mathfrak{X})$ Y $\theta(\bar{y}) = \hat{0} = \hat{y}$ $= y + B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt \quad \therefore\ y \in B_{p-1}(\mathfrak{X}) + Rt \quad \therefore\ y = rt + B_{p-1}(\mathfrak{X})$
$\therefore\ y = r(t + B_{p-1}(\mathfrak{X})) = r\mathfrak{z} \quad (y = rt + d(x_1) = r(t + d(x)),\ x_1 = rx)$

$$\therefore\ \exists!\ \mu : H_{p-1}(\mathfrak{X})/_{R\mathfrak{z}} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H_{p-1}(\mathfrak{Y}) \text{ ISOMORFISMO TAL QUE } \mu\pi = \theta$$

(PRIMER TEOREMA DE ISOMORFISMO).

SEA $n > 1$: P.D.- EN $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\langle T_1, \dots, T_n\rangle$, $dT_i = t_i$ SE CUMPLEN (a) y (b)

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\langle T_1, \dots, T_{n-1}\rangle\langle T_n\rangle = \mathfrak{X}'\langle T_n\rangle.$$

POR HIPOTESIS DE INDUCCION PARA $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}\langle T_1, \dots, T_{n-1}\rangle$, $dT_i = t_i$ $1 \le i < n$ SE CUMPLE QUE (a) Y (b) $H_{p-1}(\mathfrak{X}') \cong H_{p-1}(\mathfrak{X})/_{R\mathfrak{z}_1 + \dots + R\mathfrak{z}_n}$.

$\therefore$ PARA $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\langle T_1, \dots, T_n\rangle$, $dT_i = t_i$ $1 \le i \le n$ SE TIENE

a) $\mathfrak{Y}_\lambda = \mathfrak{X}'_\lambda \quad \forall \lambda < p$ (POR CONSTRUCCION) $\therefore\ \mathfrak{Y}_\lambda = \mathfrak{X}_\lambda \quad \forall \lambda < p$.

y b) $H_{p-1}(\mathfrak{Y}) \cong H_{p-1}(\mathfrak{X}')/_{R\mathfrak{z}_n}$ (POR EL CASO $n = 1$)

$$\therefore\ H_{p-1}(\mathfrak{Y}) \cong \frac{H_{p-1}(\mathfrak{X})/R\mathfrak{z}_1 + \dots + R\mathfrak{z}_n}{R\mathfrak{z}_n} \cong H_{p-1}(\mathfrak{X})/_{R\mathfrak{z}_1 + \dots + R\mathfrak{z}_n}.$$

$$\begin{tikzcd}
H_{p-1}(\mathfrak{X})/(Rz_1+\cdots+Rz_{n-1}) \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[dr, "\overline{\theta}"'] & \dfrac{H_{p-1}(\mathfrak{X})/(Rz_1+\cdots+Rz_{n-1})}{Rz_n} \arrow[d, dashed, "\exists!\ \overline{\mu}\ \text{(isomorfismo}"] \\
 & H_{p-1}(\mathfrak{X})/(Rz_1+\cdots+Rz_n)
\end{tikzcd}$$

$\overline{\theta}(\overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_{n-1}) = \overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_n.$

ES CLARO QUE $\overline{\theta}$ ESTA BIEN DEFINIDA Y ES UN MORFISMO DE ALGEBRAS.

SEA $rt_n+B_{p-1}(\mathfrak{X}) \in Rz_n$: $\overline{\theta}\left(\overline{rt_n+B_{p-1}(\mathfrak{X})}\right) = rt_n+B_{p-1}(\mathfrak{X})+Rz_1+\cdots+Rz_n$
$= \overline{\overline{0}} \quad \therefore\ Rz_n \subset \operatorname{Ker}\overline{\theta}$

SEA $\overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_{n-1} \in \operatorname{Ker}\overline{\theta}$ $\therefore$ $\overline{\theta}(\overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_{n-1}) = \overline{\overline{0}}$

ES DECIR: $\overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_n = \overline{\overline{0}}$ $\therefore$ $\overline{x} \in Rz_1+\cdots+Rz_n$ $\therefore$ $\overline{x} = rz_1+\cdots+rz_n$

$\therefore$ $\overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_{n-1} = rz_n+Rz_1+\cdots+Rz_{n-1}$ $\therefore$ $\overline{x} \in Rz_n$.

(PUES $\pi(\overline{x}+Rz_1+\cdots+Rz_{n-1}) = rz_n+Rz_1+\cdots+Rz_n = Rz_1+\cdots+Rz_n = \overline{0}$)

$$\therefore\ \exists!\ \overline{\mu}: \left.H_{p-1}(\mathfrak{X})/(Rz_1+\cdots+Rz_{n-1})\middle/ Rz_n\right. \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \left.H_{p-1}(\mathfrak{X})\middle/(Rz_1+\cdots+Rz_n)\right.$$

AHORA ES MAS CLARO COMO PROBAR EL SIGUIENTE TEOREMA:

TEOREMA I.- SEA M UN IDEAL DE R. ENTONCES: EXISTE $\mathfrak{X}$ UNA R-ALGEBRA LIBRE ACICLICA TAL QUE $H_0(\mathfrak{X}) = R/M$. EN OTRAS PALABRAS EXISTE UNA RESOLUCION LIBRE DE R/M LA CUAL ES UNA R-ALGEBRA.

DEMOSTRACION! OBTENDREMOS A $\mathfrak{X}$ COMO LA UNION DE UNA CADENA ASCENDENTE DE R-ALGEBRAS $\mathfrak{X}^0 \subset \mathfrak{X}^1 \subset \cdots$, LA CUAL DEFINIREMOS INDUCTIVAMENTE.

DEFINIMOS A $\mathfrak{X}^0 = R$ ($\mathfrak{X}^0_0 = R$, $\mathfrak{X}^0_\lambda = 0\ \forall \lambda \neq 0$, $d = 0$). PARA CONSTRUIR $\mathfrak{X}^1$ TOMAMOS GENERADORES $t_1,\ldots,t_n$ PARA EL IDEAL M (M ES F.G. YA QUE R ES NOETHERIANO). VIENDO LOS t_i'S COMO 0-CICLOS

EN R, ADJUNTAMOS VARIABLES $T_1, \dots, T_n$ DE GRADO 1 EN R, LAS CUALES ANULAN A t_j Y PONEMOS $\mathfrak{X}^1 = R\langle T_1, \dots, T_n \rangle$, $dT_i = t_i$.

ENTONCES: $H_0(\mathfrak{X}^1) = H_0(\mathfrak{X}^0)/R\tau_1 + \dots + R\tau_n = R/Rt_1 + \dots + Rt_n = R/M$

AFIRMACION ANTERIOR A ESTE TEOREMA.

AHORA ELEGIMOS 1-CICLOS $s_1, \dots, s_m \in Z_1(\mathfrak{X}^1)$ CUYAS CLASES DE HOMOLOGIA σ_j GENERAN A $H_1(\mathfrak{X}^1)$. ($Z_1(\mathfrak{X}^1) \subset \mathfrak{X}_1^1$ MODULO F.G).

AGREGAMOS VARIABLES $S_1, \dots, S_m$ A $\mathfrak{X}^1$ LAS CUALES ANULAN A s_j. ASI OBTENEMOS UNA R-ALGEBRA $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}^1\langle S_1, \dots, S_m \rangle$, $dS_j = s_j$ TAL QUE $H_1(\mathfrak{X}^2) = 0$ Y $H_0(\mathfrak{X}^2) = R/M$.

$$H_1(\mathfrak{X}^2) = H_1(\mathfrak{X}^1)/(R\sigma_1 + \dots + R\sigma_s) = (R\sigma_1 + \dots + R\sigma_s)/(R\sigma_1 + \dots + R\sigma_s) = 0$$

POR 2.1.

$$H_0(\mathfrak{X}^2) = Z_0(\mathfrak{X}^2)/B_0(\mathfrak{X}^2) = Z_0(\mathfrak{X}^1)/B_0(\mathfrak{X}^1) = H_0(\mathfrak{X}^1) = R/M$$

YA QUE $\mathfrak{X}_0^2 = \mathfrak{X}_0^1$ Y $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1^1$ (POR CONSTRUCCION DE $\mathfrak{X}^2$).

CONTINUANDO DE ESTA MANERA, DEFINIMOS $\mathfrak{X}^k$ PARA $k \geq 3$, ES DECIR, SUPONGAMOS QUE HEMOS DEFINIDO $\mathfrak{X}^k$ QUE CUMPLE LAS CONDICIONES REQUERIDAS, DEFINIREMOS $\mathfrak{X}^{k+1}$.

SEA $\mathfrak{X}^{k+1} = \mathfrak{X}^k\langle U_1, \dots, U_{n_k} \rangle$, $dU_j = u_j$ CON $u_1, \dots, u_{n_k}$ k-CICLOS CUYAS CLASES DE HOMOLOGIA σ_{u_j} GENERAN A $H_k(\mathfrak{X}^k)$ $(= R\sigma_1 + \dots + R\sigma_{n_k})$

ENTONCES: $H_0(\mathfrak{X}^{k+1}) = Z_0(\mathfrak{X}^{k+1})/B_0(\mathfrak{X}^{k+1}) = Z_0(\mathfrak{X}^k)/B_0(\mathfrak{X}^k) = H_0(\mathfrak{X}^k) = R/M$

$\therefore \quad H_0(\mathfrak{X}^{k+1}) = R/M$.

PARA $1 \leq j < k$ $H_j(\mathfrak{X}^{k+1}) = 0$ YA QUE $H_j(\mathfrak{X}^{k+1}) = H_j(\mathfrak{X}^k)$ YA QUE $\mathfrak{X}_j^{k+1} = \mathfrak{X}^k$ $\forall\, 1 \leq j < k$, Y $H_k(\mathfrak{X}^{k+1}) = H_k(\mathfrak{X}^k)/R\sigma_1 + \dots + R\sigma_{n_k} = \dfrac{R\sigma_1 + \dots + R\sigma_{n_k}}{R\sigma_1 + \dots + R\sigma_{n_k}} = 0$

POR LEMA 2.1.

ES CLARO QUE $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{X}^k$ ES UNA R-ALGEBRA QUE SATISFACE LAS CONDICIONES DEL TEOREMA, ES DECIR:

$$H_0(\mathfrak{X}) = R/M \quad \text{Y} \quad H_n(\mathfrak{X}) = 0 \ \forall n \geq 1.$$

Q.E.D.

C A P I T U L O   III

III.- El cambio en el anillo de homología como resultado de anular un ciclo.

Sea $\mathfrak{X}$ una R-algebra y t un ciclo de grado $p-1$ en $\mathfrak{X}$. Sea $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}\langle T\rangle$, $dT=t$, el resultado de anular t. Entonces la inclusión $\varphi: \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ induce un homomorfismo $\varphi_*: H(\mathfrak{X}) \longrightarrow H(\mathfrak{Y})$.

Deseamos examinar este morfismo mas de cerca y para hacerlo probaremos el siguiente teorema:

Teorema II.- En la situación arriba descrita, supongamos que τ, la clase de homología de t, es no divisor de cero (no conmutativo), ie, suponga que para $\xi \in H(\mathfrak{X})$

i) Si $\tau\xi=0$ y τ es de grado par (p impar) entonces $\xi=0$.

ii): Si $\tau\xi=0$ y τ es de grado impar (p par) entonces $\xi \in \tau H(\mathfrak{X})$.

Entonces: φ_* es un homomorfismo sobre con nucleo $\tau H(\mathfrak{X})$ y por lo tanto $H(\mathfrak{Y}) \cong H(\mathfrak{X}) / \tau H(\mathfrak{X})$.

Demostracion: Antes de demostrar la afirmacion del teorema, verificare que $\varphi: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ es un homomorfismi de R-algebras. es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, "d"] & \mathfrak{Y} \arrow[d, "d"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, hook, "\varphi"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

(Donde por abuso de notacion $d: \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ es la extension de $d: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$, la derivacion en $\mathfrak{X}$).

Tambien que $\varphi(\mathfrak{X}_\lambda) \subset \mathfrak{Y}_\lambda$

Como $\varphi: \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y}$

$x \longrightarrow x\,(= x + 0T)$ $\therefore$ $\varphi|: \mathfrak{X}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{Y}_\lambda$

$x_\lambda \longrightarrow y_\lambda$ $\therefore$ $\varphi(\mathfrak{X}_\lambda) \subset \mathfrak{Y}_\lambda$

Dada $x \in X : \bar{d}\,\varphi(x) = d\varphi(x) = d(x) = \varphi d(x)$

AHORA SI PROCEDEREMOS A LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA:

TRATAREMOS LOS CASOS P PAR E IMPAR SEPARADAMENTE, DANDO EN PRIMER LUGAR UNA DISCUSION GENERAL SIN NINGUNA SUPOSICION SOBRE Z Y ENTONCES PROBAREMOS EL TEOREMA:

P IMPAR: EN ESTE CASO $Y = X \oplus XT$. SEA $\Psi : Y \longrightarrow X$ UN HOMOMORFISMO DE ALGEBRAS DEFINIDO POR $\Psi(x_1 + x_2T) = x_2$ (ES INMEDIATO VERIFICAR QUE ES UN HOMOMORFISMO DE ALGEBRAS, AUNQUE NO DE R-ALGEBRAS PUES $\Psi(Y_\lambda) \subset X_{\lambda-p}$). Ψ ES SOBRE YA QUE DADO $x \in X$ CONSIDERANDO $xT \in Y$ SE TIENE QUE $\Psi(xT) = x$, (ES MAS SI CONSIDERAMOS LA RESTRICCION DE Ψ A Y_λ, IE: $\Psi| : Y_\lambda \longrightarrow X_{\lambda-p}$ $\forall x_{\lambda-p} \in X_{\lambda-p}$ SEA $x_{\lambda-p}T \in Y_\lambda$, ENTONCES $\Psi|(x_{\lambda-p}T) = \Psi(x_{\lambda-p}T) = x_{\lambda-p}$).
AUN MAS, Ψ CONMUTA CON d PUES:

$$\Psi(d(x_1+x_2T)) = \Psi(d(x_1) - x_2t + d(x_2)T) = d(x_2) = d(\Psi(x_1+x_2T))$$

AFIRMO QUE LA SIGUIENTE SUCESION ES EXACTA:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ \varphi\ } Y \xrightarrow{\ \Psi\ } X \dashrightarrow 0 \quad (1)$$

ES DECIR, PARA CADA $n \in \mathbb{N}$ LA SIGUIENTE SUCESION ES EXACTA

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\ \varphi_n\ } Y_n \xrightarrow{\ \Psi_n\ } X_{n-p} \longrightarrow 0 \quad (1')$$

DONDE φ_n Y Ψ_n SON LAS RESTRICCIONES DE φ Y Ψ RESPECTIVAMENTE.
SOLO FALTA PROBAR QUE $\operatorname{IM}\varphi_n = \operatorname{KER}\Psi_n$.

"$\subseteq$" $\Psi_n\varphi_n(x_n) = \Psi_n(x_n) = \Psi_n(x_n + 0T) = 0$

"$\supseteq$" SEA $y_n \in Y_n$ TAL QUE $\Psi_n(y_n) = 0$, $y_n = x_n + x_{n-p}$

$\therefore 0 = \Psi_n(y_n) = \Psi_n(x_n + x_{n-p}T) = x_{n-p}$ $\therefore$ $y_n = x_n \in X_n = \operatorname{Im}\varphi_n$.

$\therefore$ LA SUCESION ES EXACTA.

$\therefore$ LA SUCESION EXACTA (1) NOS DA EL SIGUIENTE TRIANGULO DE HOMOLOGIA EXACTO:

$$\begin{tikzcd}
 & H(Y) \arrow[dr, "\Psi_*"] & \\
H(X) \arrow[ur, "\varphi_*"] & & H(X) \arrow[ll, dashed, "K_*"]
\end{tikzcd} \qquad (1_*)$$

En donde Ψ_* es de grado $-p$ y K_* es de grado $p-1$.

Esto es consecuencia de que el siguiente diagrama con renglones exactos es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "d_n"] & Y_n \arrow[r, "\Psi_n"] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & X_{n-p} \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] & Y_{n-1} \arrow[r, "\Psi_{n-1}"'] & X_{n-p-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donde d_n y $\bar{d}_n$ son las restricciones de d a X_n y $\bar{d}$ a Y_n respectivamente:

$$\varphi_{n-1}\, d_n\,(x) = d_n(x) = d(x) = \bar{d}(x) = \bar{d}_n(x) = \bar{d}_n\,(\varphi_n(x)).$$
$$d_{n-p}\;\Psi_n(x_n + x_{n-p}T) = d_{n-p}\,(x_{n-p}) = d\,(x_{n-p})$$
$$\Psi_{n-1}\;\bar{d}_n\,(x_n + x_{n-p}T) = \Psi_{n-1}\,(d\,(x_n) + d(x_{n-p})T + (-1)^{n-p}x_{n-p}t\,)$$
$$= d\,(x_{n-p}).$$

Es decir, existe el morfismo de conexion K_n tal que la siguiente sucesion es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{\varphi_{n*}} H_n(Y) \xrightarrow{\Psi_{n*}} H_{n-p}(X) \xrightarrow{K_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\varphi_{n-1*}} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{\Psi_{n-1*}} H_{n-p-1}(X) \rightarrow$$

Donde φ_{n*}, Ψ_{n*} son las inducidas por φ_n y Ψ_n en homologia (ver apendice).

Para este caso explicito, veamos quien es el morfismo de conexion:

Dado $\xi \in H_{n-p}(X)$: Sea $x \in \operatorname{Ker} d_{n-p}$ tal que $x + \operatorname{Im} d_{n+p+1} = \xi$. Veamos que $\bar{\Psi}_n\,(\overline{xT}) = \xi$. $\bar{\Psi}_n\,(\overline{xT}) = \bar{\Psi}\,(\Pi'_n\,(xT)) = \Pi_{n-p}\,(\Psi_n\,(xT))$ $= \Pi_{n-p}\,(x) = x + \operatorname{Im} d_{n+1-p} = \xi$. Ya que $\Psi_{n-1}\bar{\imath}_n\,(\overline{xT}) = i_{n-p}\,\bar{\Psi}_n(\overline{xT})$ $= i_{n-p}(\,\xi\,) = 0$, $\bar{\imath}_n\,(\overline{xT}) \in \operatorname{Ker} \Psi_n$ $\therefore$ $\bar{\imath}_n\,(\overline{xT}) \in \operatorname{Im} \varphi_{n-1}$.
Afirmo que $\varphi_{n-1}\,(\bar{d}_n\,(xT)) = \bar{\imath}_n\,(\overline{xT})$:

$$\bar{z}_n(\overline{xT}) = z\,\bar{\mu}_n\,\bar{z}_n(\overline{xT}) = i\,(\mu_n(\bar{z}_n(\bar{\pi}_n(xT))) = z\,\bar{d}_n(xT) = d_n(xT) = \varphi_{n-1}(\bar{d}_n(xT))$$

$$\therefore\ K_n(\xi) = [\bar{d}_n(xT)] = [(-1)^{n-p}\,x\,t] = (-1)^{n-p}\,[x]\,[t] = (-1)^{n-p}\,\xi\, z.$$

$\therefore$ DE LA EXACTITUD DE (1_*) OBTENEMOS LA SIGUIENTE INFORMACION:

$$\operatorname{Ker}\varphi_* = \operatorname{Im} K_* = zH(X)$$

$$\operatorname{Coker}\varphi_* \cong \operatorname{Ker} K_* = \{\xi \in H(X) \mid z\xi = 0\}$$

YA QUE:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\Psi_{n*} \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] \arrow[dr, "\Psi_{n*}"'] & H_n(Y)/\operatorname{Ker}\Psi_{n*} \arrow[d, dashed, "\cong"] \arrow[dl, phantom, "Z"] \\
 & & \operatorname{Im}\Psi_{n*} = \operatorname{Ker} K_n
\end{tikzcd}$$

$$= \{\xi \in H_{n-p}(X) \mid z\xi = 0\}$$

PERO SI z ES NO DIVISOR DE CERO EN $H(X)$ TENEMOS QUE $\operatorname{Ker} K_n = 0$
$\therefore$ $\operatorname{Im}\Psi_{n*} = 0$ $\therefore$ $H_n(Y) = \operatorname{Ker}\Psi_{n*} = \operatorname{Im}\varphi_{n*}$ $\therefore$ φ_{n*} ES SOBRE

$$\therefore\ H_n(Y) \cong H_n(X)/zH_{n+1-p}(X)$$

YA QUE:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\varphi_{n*}"'] & H_n(X)/\operatorname{Ker}\varphi_{n*} = H_n(X)/zH_{n+1-p}(X) \arrow[d, dashed, "\cong"] \arrow[dl, phantom, "Z"] \\
 & H_n(Y)
\end{tikzcd}$$

$$\therefore\ H(Y) = \sum H_n(Y) \cong \sum \left(H_n(X)/zH_{n+1-p}(X) \right) \cong \sum H_n(X)/z\sum H_{n+1-p}(X)$$

$$= H(X)/zH(X).$$

L.Q.Q.D.

P PAR.- En este caso $Y = X \oplus XT \oplus XT^{(2)} \oplus \dots$.
Sea $\Psi : Y \longrightarrow Y$ definida por $\Psi(x_0 + x_1T + \dots) = x_1 + x_2T + x_3T^{(2)} + \dots$
Es claro que Ψ esta bien definida y es un homomorfismo de algebras aunque no de R-algebras pues $\Psi(Y_\lambda) \subset Y_{\lambda-p}$. Tenemos entonces que la siguiente sucesion es exacta:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ \varphi\ } Y \xrightarrow{\ \Psi\ } Y \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

con φ la inclusion natural, es decir: $0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\varphi_n} Y_n \xrightarrow{\Psi_n} Y_{n-p} \longrightarrow 0$ es exacta, donde φ_n es la inclusion natural y Ψ_n la restriccion de Ψ. Claramente φ_n es inyectiva y Ψ_n es sobre ya que dado $y = x_{n-p} + x_{n-2p}T + \cdots \in Y_{n-p}$ $\exists\, z = x_{n-p}T + x_{n-2p}T^{(2)} + \cdots \in Y_n$ tal que $\Psi_n(z) = y$.

P.D.- $\mathrm{Im}\,\varphi_n = \mathrm{Ker}\,\Psi_n$

"$\subseteq$").- $\Psi_n\varphi_n(x) = 0 \quad \therefore \mathrm{Im}\,\varphi_n \subset \mathrm{Ker}\,\Psi_n$.

$\supseteq$) Si $y \in Y_n$ es tal que $\Psi_n(y) = 0$, $y = x_0 + x_1T + x_2T^{(2)} + \dots + x_iT^{(i)}$,
ie, $0 = \Psi_n(y) = x_1 + x_2T^{(2)} + \dots + x_iT^{(i-1)} = 0 \quad \therefore x_j = 0, 1 \le j \le i$

$$\therefore y = x_0 \therefore y \in \mathrm{Im}\,\varphi_n \quad \therefore \mathrm{Im}\,\varphi_n = \mathrm{Ker}\,\Psi_n$$

Tambien tenemos que Ψ conmuta con $\bar{d}$:

$$\bar{d}(\Psi(x_0 + x_1T + \dots)) = \bar{d}(x_1 + x_2T + \dots) = \bar{d}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i T^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{m} d(x_i)T^{(i-1)} + \sum_{i=2}^{m} (-1)^i x_i t\, T^{(i-2)}$$

y

$$\Psi\bar{d}\left(\sum_{i=0}^{m} x_i T^{(i)}\right) = \Psi\left(\sum_{i=0}^{m} d(x_i)T^{(i)} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i x_i T^{(i-1)}\right) = \sum_{i=1}^{m} d(x_i)T^{(i-1)} + \sum_{i=2}^{m} (-1)^i x_i t\, T^{(i-2)}.$$

Por lo tanto (2) nos da el siguiente diagrama conmutativo en homologia:

$$\begin{tikzcd}
H(Y) \arrow[rr, "\Psi_*"] & & H(Y) \arrow[dl, "\chi_*"] \\
& H(X) \arrow[ul, "\varphi_*"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd} \qquad (2_*)$$

DONDE Ψ_* ES DE GRADO $-p$ Y K_* DE GRADO $p-1$.

ES DECIR EXISTE K_n MORFISMO DE CONEXION TAL QUE LA SIGUIENTE SUCESION ES EXACTA:

$$H_n(X) \xrightarrow{\varphi_{n*}} H_n(Y) \xrightarrow{\Psi_{n*}} H_{n-p}(Y) \xrightarrow{K_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\varphi_{n-1*}} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{\Psi_{n-1*}} H_{n-1-p}(Y)$$

DONDE φ_{n*} Y Ψ_{n*} SON LAS INDUCIONS POR φ_n Y Ψ_n EN HOMOLOGIA (VER APENDICE).

AFIRMAMOS QUE EL MORFISMO $K_*\varphi_*: H(X) \longrightarrow H(X)$ OBTENIDO POR OMITIR Ψ_* EN EL TRIANGULO $(Z*)$ NO ES OTRO MAS QUE LA MULTIPLICACION (A LA IZQUIERDA) POR τ, LA CLASE DE HOMOLOGIA DE t.

SEA $\xi \in H_n(X)$ Y x UN REPRESENTANTE DE ESTA CLASE: ENTONCES $\Psi_{n+p}(xT) = x = \varphi_n(x)$; $\varphi_{n*}(\xi) = \overline{\Psi}_n(\xi) = \overline{\varphi_n(x)} = \overline{\Psi_{n+p}(xT)}$ $= \varphi_n(x) + \operatorname{Im} \bar{d}_{n+1}$ $\therefore$ $\varphi_{n*}(\xi) = \Psi_{n+p}(xT) + \operatorname{Im}\bar{d}_{n+1} = \overline{\Psi}_{n+p}([xT])$.
VEAMOS QUE $\varphi_{n*}(\xi) \in \operatorname{Ker}\bar{z}_n$: $\bar{z}_n\varphi_{n*}(\xi) = \bar{z}_n(\Psi_{n+p}(xT) + \operatorname{Im}\bar{d}_{n+1})$ $= \bar{z}\,\bar{\mu}_n\bar{z}_n(\bar{\pi}_n\Psi_{n+p}(xT)) = \bar{z}\bar{d}_n(x) = d_n(x) = 0$ $\therefore$ $\varphi_{n*}(\xi) \in \operatorname{Ker}\bar{z}_n$.

SEA $[xT] \in \operatorname{COKER}\bar{d}_{n+1-p}$ ENTONCES $\overline{\Psi}_{n+p}([xT]) = \varphi_{n*}(\xi)$ PERO $\Psi_{n+p-1}\bar{z}_{n+p}([xT]) = \bar{z}_n\overline{\Psi}_{n+p}([xT]) = \bar{z}_n\varphi_{n*}(\xi) = 0$ $\therefore$ $\bar{z}_{n+p}([xT]) \in \operatorname{KER}\Psi_{n+p-1}$ $= \operatorname{Im}\varphi_{n+p-1}$. SEA $a = tx = \bar{d}_{n+p}(Tx) = \bar{d}_{n+p}(xT)$ ($a \in \operatorname{Ker} d_{n+p-1}$: $d_{n+p-1}(a) = d_{n+p-1}(xt) = d(x)t \pm x\,dt = 0$), ENTONCES $\varphi_{n+p-1}(tx) =$ $\varphi_{n+p-1}(\bar{d}_{n+p}(Tx)) = \varphi_{n+p-1}(\bar{d}_{n+p}(xT)) = \bar{z}\,\bar{d}_{n+p}(xT) = \bar{z}\bar{\mu}_{n+p}\bar{z}_{n+p}\bar{\pi}_{n+p}(xT)$ $= \bar{z}_{n+p}([xT])$ $\therefore$ $K_n\varphi_{n*}(\xi) = [tx] = \tau\xi$. L.Q.Q.A.

PARA ESTABLECER LA CONCLUSION DEL TEOREMA II ES SUFICIENTE, EN VISTA DE LA EXACTITUD DE $(Z*)$, PROBAR QUE $\Psi_* = 0$.

PRIMERO PROBAREMOS QUE $\operatorname{Im}\Psi_* \cap \operatorname{Im}\varphi_* = 0$: SUPONGAMOS QUE $\varphi_*(\xi) = \Psi_*(\eta)$ ENTONCES $\tau\xi = K_*\varphi_*(\xi) = K_*\Psi_*(\eta) = 0$ (POR EXACTITUD), IE, $\tau\xi = 0$, ENTONCES: $\xi \in \tau H(X)$ $\therefore$ $\exists\, \xi_1 \in H(X)$ TAL QUE $\xi = \tau\xi_1$ Y DE AQUI TENEMOS QUE $\varphi_*(\xi) = \varphi_*(\tau\xi_1) = \varphi_*(K_*\varphi_*(\xi_1)) = 0$

$$\therefore\ \operatorname{Im}\varphi_* \cap \operatorname{Im}\Psi_* = 0.$$

Afirmo que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\Psi_*^n(\eta)=0$ entonces $\Psi_*(\eta)=0$

Demostración: Inducción sobre n:

Base: $n=1$ ✓

Hipótesis de inducción: Sea $s<n$ tal que si $\Psi_*^s(\eta)=0$ entonces: $\Psi_*(\eta)=0$.

Paso Inductivo: Sea η tal que $\Psi_*^n(\eta)=0$, i.e., $\Psi_*^{n-1}(\eta) \in \operatorname{Ker}\Psi_* \cap \operatorname{Im}\Psi_*$

pero $\operatorname{Im}\Psi_* \cap \operatorname{Im}\varphi_* = \operatorname{Ker}\Psi_* \cap \operatorname{Im}\Psi_*$ $\therefore$ $\Psi_*^{n-1}(\eta)=0$ $\therefore$ $\Psi_*(\eta)=0$

Sin embargo para cualquier $\eta \in H(Y)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Psi_*^n(\eta)=0$ (Como Ψ_* es de grado $-p$, basta tomar $n >$ grado(η) $\Rightarrow \Psi_*^n(\eta)=0$).

$$\therefore\ \Psi_*=0 \text{ entonces } \operatorname{Ker}\Psi_* = H(Y) = \operatorname{Im}\varphi_*$$

Veamos quien es $\ker\varphi_*$: Por exactitud $\operatorname{Ker}\varphi_* = \operatorname{Im} K_*$.

P.D.- $\operatorname{Im} K_* \overset{?}{=} \zeta H(X) = \operatorname{Im} K_*\varphi_*$.

"$\supseteq$") ✓

$\subseteq$).- Sea $\xi \in \operatorname{Im} K_* = \operatorname{Ker}\varphi_*$: $\exists\, \xi_1 \in H(Y)$ tal que $K_*(\xi_1)=\xi$

Como $\xi_1 \in H(Y)$ y φ_* es epi $\exists\, \eta \in H(X)$ tal que $\varphi_*(\eta)=\xi_1$. Entonces $\xi = K_*(\xi_1) = K_*(\varphi_*(\eta)) = \zeta\eta$ $\therefore$ $\xi \in \zeta H(X)$ $\therefore$

$$\zeta H(X) = \operatorname{Im} K_* = \operatorname{Ker}\varphi_*$$

Lo cual nos implica:

$$\begin{tikzcd}
H(X) \arrow[r] \arrow[dr, two heads, "\varphi_*"'] & H(X)/\zeta H(X) \arrow[d, dashed, tail, two heads, "\cong"] \\
& H(Y)
\end{tikzcd}$$

(Por el primer teorema de isomorfismo)

L.Q.Q.D.

TEOREMA III: Sea X una R-algebra. Para p impar, sea $a \in B_{p-1}(X)$ no divisor de cero en X y sea $s \in X_p$ tal que $ds = a$. Entonces: El algebra de clases residuales $\overline{X} = X/aX$, con la derivacion $\bar{d}$ inducida por d es una R-algebra, y la clase residual $\bar{s}$ de s es un p-ciclo en $\overline{X}$ cuya clase de homologia denotamos por $\sigma \in H_p(X)$. El morfismo canonico $\Psi : X \longrightarrow \overline{X}$ induce un isomorfismo Ψ_* de $H(X)$ en $H(\overline{X})$ y tenemos $H(\overline{X}) = \Psi_*(H(X))\langle\sigma\rangle$, $d\sigma = 0$.

DEMOSTRACION: $\overline{X} = X/aX$.

TENEMOS $\quad X_{\lambda-p+1} \overset{a}{\rightarrowtail} X_\lambda \twoheadrightarrow X_\lambda / aX_{\lambda-p+1}$

ya que si $a(x_{\lambda-p+1}) = a x_{\lambda-p+1} = 0 \Rightarrow x_{\lambda-p+1} = 0$ (a no divisor de cero) $\therefore$ a es inyectiva $\therefore$ la sucesion es exacta.

$$
\begin{tikzcd}
X_{\lambda-p+1} \arrow[r, tail, "a_{\lambda-p+1}"] \arrow[d, "d_{\lambda-p+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_\lambda \arrow[r, two heads, "\Psi_\lambda"] \arrow[d, "d_\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \overline{X}_\lambda \arrow[d, dashed, "\exists!\ \bar{d}_\lambda"'] & x + aX_{\lambda-p+1} \arrow[d, "(A)"] \\
X_{\lambda-p} \arrow[r, tail, "a_{\lambda-p}"'] & X_{\lambda-1} \arrow[r, two heads, "\Psi_{\lambda-1}"'] & \overline{X}_{\lambda-1} & d_\lambda(x) + aX_{\lambda-p}
\end{tikzcd}
$$

Sea $x \in aX_{\lambda-p+1}$, i.e., $x = ax'$ entonces $d_\lambda(ax') = d(a)x' + a\,d(x') = a\,d(x')$ como $x' \in X_{\lambda-p+1}$, $d(x') \in X_{\lambda-p}$ $\therefore d_\lambda(ax') \in aX_{\lambda-p}$

$\therefore \Psi_{\lambda-1} d_\lambda(x) = 0$

$\therefore \exists!\ \bar{d}_\lambda : \overline{X}_\lambda \longrightarrow \overline{X}_{\lambda-1}$ tal que $\bar{d}_\lambda \Psi_\lambda = \Psi_{\lambda-1} d_\lambda$.

Veamos que $\overline{X}$ es una R-algebra:

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in X/aX$: $\bar{x}\cdot\bar{y} := (x + aX)(y + aX) = xy + aX = \overline{xy}$

$(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = \overline{xy}\cdot\bar{z} = \overline{(x\cdot y)z} = \overline{x(yz)} = \bar{x}\,\overline{(yz)} = \bar{x}\cdot(\bar{y}\bar{z})$.

P.D.- $\overline{X}$ ES UNA ALGEBRA ASOCIATIVA:

1).- $\overline{X}$ ES GRADUADA : $\overline{X} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \overline{X}_\lambda$:

"$\leq$"- SEA $x + aX \in \overline{X}$, $x \in X$: $x = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x_\lambda$, $\overline{x} = x + aX = \sum x_\lambda + a \sum_{\lambda=p-1}^{\infty} X_{\lambda-p+1}$
$\therefore$ $\overline{x} = \sum (x_\lambda + a X_{\lambda-p+1}) = \sum \overline{x}_\lambda$.
"$\geq$"- ES CLARO.

CLARAMENTE $\overline{X}_\lambda$ ES UN R-MODULO:
$\overline{X}_\lambda \overline{X}_\mu \subset \overline{X}_{\lambda+\mu}$: SEAN $\overline{x} \in \overline{X}_\lambda$ Y $\overline{z} \in \overline{X}_\mu$: $\overline{x} \cdot \overline{z} = (x + a X_{\lambda-p+1})$

$(z + a X_{\mu-p+1}) = xz + a X_{\lambda+\mu-p+1} \in \overline{X}_{\lambda+\mu}$.

2).- $\overline{X}_\lambda = 0$ $\forall \lambda < 0$, PUES $X_\lambda = 0$ $\forall \lambda < 0$: $\overline{X}$ TIENE UN ELEMENTO
$1 \in \overline{X}_0 = X_0 / a X_{0-p+1} = X_0/0 = X_0$ ($1 \in \overline{X} = X_0$) $\therefore$ $\overline{X}_0 = X_0 = R \cdot 1$ SI $\lambda > 1$.

$\overline{X}_0 = X_0 / a X_0 = R \cdot \overline{1}$, $\overline{1} \in X_0$ ($\overline{1} = 1 + a X_0$) $\therefore$ ✓ SI $\lambda = 1$.

$\overline{X}_\lambda$ ES UN R-MODULO FINITAMENTE GENERADO $\forall \lambda > 0$ PUES X_λ ES F.G.

3).- $\overline{X}$ ES R-ALGEBRA NO CONMUTATIVA: SEAN $\overline{x} \in \overline{X}_\lambda$, $\overline{z} \in \overline{X}_\mu$
$\overline{x} = x + a X_{\lambda-p+1}$, $\overline{z} = z + a X_{\mu-p+1}$, $\overline{x}\overline{z} = xz + a X_{\mu+\lambda-p+1}$

$\therefore$ $\overline{x}\overline{z} = (-1)^{\lambda\mu} z x + a X_{\mu+\lambda-p+1} = (-1)^{\lambda\mu} (zx + a X_{\mu+\lambda-p+1}) = (-1)^{\lambda\mu} \overline{z}\overline{x}$
$\forall \overline{x} \in X_\lambda$, $\overline{z} \in X_\mu$.

SEA λ IMPAR: $\overline{x}^2 = (x + a X_{\lambda-p+1})^2 = x^2 + a X_{2\lambda-p+1} = a X_{2\lambda-p+1}$

$\therefore$ $\overline{x}^2 = 0$.

4).- $\overline{d}$ ES DE GRADO -1 , ESTO ES: $\overline{d}\,\overline{X}_\lambda \subset \overline{X}_{\lambda-1}$ $\forall \lambda$, $\overline{d}^2 = 0$
Y $\overline{d}(\overline{x}\,\overline{y}) = \overline{d}(\overline{x})\,\overline{y} + (-1)^\lambda\, \overline{x}\, d(\overline{y})$ $\forall \overline{x} \in \overline{X}_\lambda$, $\overline{y} \in \overline{X}_\mu$

SEA $\bar{x} = x + a\,\mathfrak{X}_{\lambda-p+1} \in \overline{\mathfrak{X}}_{\lambda}$, $\bar{d}(\bar{x}) = d(x) + a\,\mathfrak{X}_{\lambda-p} \in \overline{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}$.

$$\bar{d}^2(\bar{x}) = \bar{d}\,(d(x) + a\,\mathfrak{X}_{\lambda-p}) = d^2(x) + a\,\mathfrak{X}_{\lambda-p-1} = \bar{0}.$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}\,(\bar{x}\bar{y}) = \bar{d}\,(\overline{xy}) &= d(xy) + a\,\mathfrak{X}_{\mu+\lambda-p} = [d(x)y + (-1)^{\lambda} x\,dy] + a\,\mathfrak{X}_{\mu+\lambda-p} \\
&= (d(x)y + a\,\mathfrak{X}_{\lambda+\mu-p}) + ((-1)^{\lambda} x\,dy + a\,\mathfrak{X}_{\mu+\lambda-p}) \\
&= [d(x) + a\,\mathfrak{X}_{\lambda-p}][y + a\,\mathfrak{X}_{\mu-p+1}] + (-1)^{\lambda}[x + a\,\mathfrak{X}_{\lambda-p+1}][dy + a\,\mathfrak{X}_{\mu-p}] \\
&= \bar{d}(\bar{x})\bar{y} + (-1)^{\lambda}\bar{x}\,\bar{d}\bar{y}.
\end{aligned}$$

$$\bar{d}(\bar{s}) = \bar{d}\,(s + a\,\mathfrak{X}_1) = d(s) + a\,\mathfrak{X}_0 = a\cdot 1 + a\,\mathfrak{X}_0 = a\,\mathfrak{X}_0 = \bar{0}.$$

$\therefore$ $\bar{s} \in Z_p(\overline{\mathfrak{X}})$ y $[\bar{s}] = \sigma \in H_p(\overline{\mathfrak{X}})$ L.Q.Q.D.

DE LA CONMUTATIVIDAD DE (A):

EXISTE $K_n : H_n(\overline{\mathfrak{X}}) \longrightarrow H_{n-p}(\mathfrak{X})$ TAL QUE LA SIGUIENTE SUCESION ES EXACTA:

$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{n-p+1}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{a_{n-p+1*}} H_n(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(\overline{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{K_n} H_{n-p}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{a_{n-p*}} H_{n-1}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \cdots$$

DE HECHO TENEMOS QUE LA SIGUIENTE SUCESION ES EXACTA:

$$0 \longrightarrow H_n(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\Psi_{n*}} H_n(\overline{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{K_n} H_{n-p}(\mathfrak{X}) \longrightarrow 0$$

PUES YA QUE $a \in B_{p-1}(\mathfrak{X})$ ENTONCES TENEMOS QUE a_{n-p+1*} ES EL MORFISMO CERO, YA QUE:

$$\begin{aligned}
a_{n-p+1*} : H_{n-p+1}(\mathfrak{X}) &\longrightarrow H_n(\mathfrak{X}) \\
x + \mathrm{Im}\, d_{n+p-2} &\longrightarrow ax + \mathrm{Im}\, d_{n+1}
\end{aligned}$$

$ax \in \mathrm{Im}\, d_{n+1}$ $(a \in \mathfrak{X}_{p-1}$ y $x \in \mathfrak{X}_{n-p+1})$

$ax \in \mathfrak{X}_n$ y $x \in \mathrm{Ker}\, d_{n+p-1}$

$sx \in \mathfrak{X}_{n-1}$ y $d(sx) = d(s)x + (-1)^{p-1} s\,dx = ax$ $\therefore$ $ax \in \mathrm{Im}\, d_{n+1}$

$\therefore$ $a_{n-p+1*}(\bar{x}) = 0.$

AFIRMO QUE PARA CUALQUIER $\xi \in H_n(\overline{X})$ SE TIENE QUE

$$\xi = \Psi_{n*} K_{n+p}(\sigma\xi) + \sigma\Psi_{n-p*} K_n(\xi) \qquad (*)$$

PARA DEMOSTRAR ESTO ELEGIMOS $x \in X_n$ TAL QUE $\bar{x} \in \overline{X}_n$ ES UN CICLO REPRESENTANTE DE ξ ($\xi = \bar{x} + I_m \bar{d}_{n+1}$), ENTONCES $d(x) = ay$ PARA ALGUNA $y \in X_{n-p}$ (PUES $\bar{d}(\bar{x}) = 0 = d(x) + aX_{n-p}$).

VEAMOS QUE $K_n(\xi) = \eta$ CON $\eta \in H_{n-p}(X)$ LA CLASE DE HOMOLOGIA DE Y. (Y ES UN CICLO YA QUE $0 = d(ay) = d(a)y + (-1)^{p-1} ady = ady$ $\therefore ady = 0$ $\therefore dy = 0$ YA QUE a ES NO DIVISOR DE CERO).

POR TANTO, POR LA DEFINICION DE $K_n(\xi)$: ELEGIMOS $\bar{b} \in$ COKER d_{n+1} TAL QUE $\overline{\Psi}_n(\bar{b}) = \xi$, PERO SI $\bar{b} = x + I_m d_{n+1}$ ENTONCES $\overline{\Psi}_n(\bar{x}) = \xi$ $= \Psi_n(x) + I_m \bar{d}_{n+1}$.

AHORA: $\bar{i}_n \overline{\Psi}_n(\bar{x}) = \bar{i}_n(\xi) = 0$ PERO $\bar{i}_n \overline{\Psi}_n(\bar{x}) = \Psi_{n-1}(i_n(\bar{x})) = 0$
$\therefore i_n(\bar{x}) \in$ KER $\Psi_{n-1} = I_m\, a_{n-p}$ Y $i_n(\bar{x}) = i_n \tau_n(\bar{x}) = i_n \tau_n \pi_n(x)$ $= dx = ay$ $\quad \therefore \quad K_n(\xi) = Y + I_m d_{n-p+1} = \eta$.

ASI QUE $\Psi_{n-p*} K_n(\xi) = \Psi_{n-p*}(\eta) = \Psi_{n-p*}(Y + I_m d_{n-p+1}) = \Psi_{n-p}(Y) + I_m \bar{d}_{n+1-p}$
$\therefore \Psi_{n-p} K_n(\xi) = \bar{\eta}$, $\bar{\eta} \in H_{n-p}(\overline{X})$.

POR OTRA LADO, PARA CALCULAR $\Psi_{n*} K_{n+p}(\sigma\xi)$ ESCRIBIMOS
$d(sx) = d(s)x - sdx = ax - (-1)^{p(p-1)} asy = ax - asy = a(x - sy)$
$(\sigma\xi \in H_{n+p}(\overline{X})$: $sx \in X_{n+p}$, $sx + aX_{n+1}$ y $\bar{d}(\overline{sx}) = a(x-sy) + aX_n)$

$$\sigma\xi = [\overline{(s+aX_1)}][\overline{(x + aX_{n-p+1})}] = [(s+aX_1) + I_m \bar{d}_{p+1}][(x + aX_{n-p+1}) + I_m \bar{d}_{n+1}]$$
$$= (s + aX_1)(x + aX_{n-p+1}) + I_m \bar{d}_{n+1+p} = (sx + aX_{n+1-p}) + I_m \bar{d}_{n+1+p}$$

$$\therefore \quad K_{n+p}(\sigma\xi) = (x - sy) + I_m d_{n+1} = (x + I_m d_{n+1}) - (sy + I_m d_{n+1})$$

$$\therefore \Psi_{n*} K_{n+p}(\sigma\xi) = \Psi_{n*}(x + I_m d_{n+1}) - \Psi_{n*}(sy + I_m d_{n+1})$$

$$= (\Psi_n(x) + I_m \bar{d}_{n+1}) - (\Psi_n(sy) + I_m \bar{d}_{n+1})$$
$$= \xi - \sigma\bar{\eta} = \xi - \sigma\Psi_{n-p*} K_n(\xi)$$

$$\therefore \xi = \Psi_{n*} K_{n+p}(\sigma\xi) + \sigma\Psi_{n-p*} K_n(\xi)$$

L.Q.Q.D

(*) DEMUESTRA QUE $H_n(\bar{\bar{X}}) = \Psi_{n_*}(H_n(X)) + \sigma\, \Psi_{n-p}(H_{n-p}(X))$.

P.D.- $\Psi_{n_*}(H_n(X)) \cap \sigma \Psi_{n-p_*}(H_{n-p}(X)) = 0$

SEA $\xi \in \Psi_n(H_n(X)) \cap \sigma \Psi_{n-p_*}(H_{n-p}(X)) = 0$, $\xi \in H_n(X)$.

$\xi = \Psi_{n_*} K_{n+p}(\sigma\xi) + \sigma \Psi_{n-p_*} K_n(\xi)$ POR LO ANTERIOR.

Y POR ESTAR EN LA INTERSECCION: $\xi = \Psi_{n_*}(\eta) = \sigma \Psi_{n-p_*}(\eta')$ CON $\eta \in H_n(X)$ Y $\eta' \in H_{n-p}(X)$

$$\therefore \xi = \Psi_n K_{n+p}(\sigma\sigma \Psi_{n-p_*}(\eta')) + \sigma \Psi_{n-p_*} K_n(\Psi_n(\eta))$$

$$= \Psi_{n_*} K_{n+p}(\sigma^2 \Psi_{n-p_*}(\eta')) + \sigma \Psi_{n-p_*}(K_n \Psi_n(\eta))$$

$$= \Psi_{n_*} K_{n+p}(0) + \sigma \Psi_{n-p_*}(0) = 0 \quad \therefore \xi = 0$$

$$\therefore H_n(\bar{X}) = \Psi_{n_*}(H_n(X)) \oplus \sigma \Psi_{n-p_*}(H_{n-p}(X)) = \mathrm{Im}(\Psi_{n_*})\langle\sigma\rangle$$

SOLO FALTA CHECAR QUE

1) $\sigma^2 = 0$ Y $\bar{d}\sigma = 0$.

$\sigma^2 = (\bar{s} + B_p(\bar{X}))^2 = \bar{s}^2 + B_{p^2}(X) = [\bar{s^2}] = [\bar{o}] = 0$

$\bar{d}\sigma = \bar{d}(\bar{s} + B_p(\bar{X})) = \bar{d}(\bar{s}) + B_{p-1}(\bar{X}) = \overline{ds} + B_{p-1}(\bar{X}) = \bar{a} + B_{p-1}(\bar{X})$

$= \bar{o} + B_{p-1}(\bar{X}) = 0$

$$\therefore H(\bar{X}) = \sum H_n(\bar{X}) = \sum \left(\Psi_{n_*}(H_n(X)) \oplus \sigma \Psi_{n-p_*}(H_{n-p}(X))\right)$$

$$= \sum \mathrm{Im}(\Psi_{n_*})\langle\sigma\rangle = \mathrm{Im}\, \Psi_*\langle\sigma\rangle$$

L.Q.Q.D

CAPITULO IV

IV.- UNA RESOLUCION LIBRE ESPECIAL.

DEFINICION: Una sucesion de elementos $a_1, \dots, a_r \in R$ es llamada una R-sucesion si: a_1 es no divisor de cero en R y si para cada $1 \leq i \leq r-1$, la clase de residuos a_{i+1} es no divisor de cero en el anillo de clases residuales $R/(a_1, \dots, a_i)$

TEOREMA IV.- Sean $t_1, \dots, t_n$ y $a_1, \dots, a_r$ R-sucesiones, tales que el ideal $A = (a_1, \dots, a_r) \subset M = (t_1, \dots, t_n)$. Sea $a_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} t_i$, $1 \leq j \leq r$, con $c_{ji} \in R$. Sea $\overline{R} = R/A$ y $\overline{M} = M/A$ y sean $\overline{c}_{ji}$ y $\overline{t}_i$ los A-residuos de c_{ji} y t_i. Entonces el algebra $Y = \overline{R}\langle T_1, \dots, T_n; S_1, \dots, S_r\rangle$ (con T_i de grado 1 y S_j de grado 2 y $dT_i = \overline{t}_i$, $dS_j = s_j := \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_{ji} T_i$) es aciclica y, por lo tanto, nos da una resolucion libre del $\overline{R}$-modulo $\overline{R}/\overline{M} = R/M$.

DEMOSTRACION: El R-algebra Y puede ser alcanzada en tres pasos sucesivos como sigue:

Empezamos con el R-algebra R y adjuntamos variables T_i para anular los t_i, obteniendo el R-algebra: $X = R\langle T_1, \dots, T_n\rangle$; $dT_i = t_i$

Por induccion sobre n y usando el hecho de que $t_1, \dots, t_n$ es una R-sucesion, junto con el caso $p=1$ del teorema veremos que

$$H(X) = R/(t_1, \dots, t_n) = R/M.$$

$p = 1$.

$n=1$: $X = R\langle T_1\rangle$, $dT_1 = t_1$ P.D.- $H(X) = R/(t_1) = R/M$.

R es una R-algebra, t_1 un ciclo de grado cero en R.

Veamos que z_1 la clase de $t_1 \in H(R) = R$ es un no divisor de cero. Pero $z_1 = t_1$ $\therefore$ z_1 es un no divisor de cero

$$\therefore \quad H(X) \cong R/_{Rt_1} = R/_M .$$

Sea $n>1$. $p=1$, $X = R\langle T_1, \dots, T_n\rangle$, $dT_i = t_i$, $i = 1, \dots, n$.

Sea $Y' = R\langle T_1, \dots, T_{n-1}\rangle \Rightarrow Y = Y'\langle T_n\rangle$ $dT_n = t_n$, $dT_i = t_i$ $1 \leq i \leq n-1$

$\therefore\ H(Y') = R/(t_1,\dots,t_{n-1})$.

Pero la clase de homologia de t_n en $H(Y') = R/(t_1,\dots,t_{n-1})$ es no divisor de cero $\therefore$ $H(Y) = H(Y')\big/\bar{t}_n H(Y') = R/(t_1,\dots,t_{n-1})\big/\bar{t}_n R/(t_1,\dots,t_{n-1})$

$$= R/(t_1,\dots,t_{n-1})\big/(\bar{t}_n) \cong R/(t_1,\dots,t_{n-1})\big/(t_1,\dots,t_n)\big/(t_1,\dots,t_{n-1})$$
$$\cong R/(t_1,\dots,t_n) \cong R/H$$

En $\bar{X}_1$ tenemos elementos $S_j = \Sigma c_{ji} T$ tales que $d(S_j) = d(\Sigma c_{ji} T_i) = \Sigma c_{ji} t_i = a_j$, para cada j.

Ahora tomando todo modulo $A\cdot$ obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & R\langle T_1,\dots,T_n\rangle \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\exists\ \varphi"] & R\langle T_1,\dots,T_n\rangle\big/AR\langle T_1,\dots,T_n\rangle \arrow[dl, "\exists!\ \eta"] \\
R/A \arrow[r, "i'"] & R/A\,\langle T'_1,\dots,T'_n\rangle &
\end{tikzcd}$$

$(d\,T'_i = \bar{t}_i$.

Donde $R/A\,\langle T'_1,\dots,T'_n\rangle$ es el resultado de anular los $\bar{t}_i$'s.

$$\begin{aligned}
\varphi : R\langle T_1,\dots,T_n\rangle &\longrightarrow R/A\,\langle T'_1,\dots,T'_n\rangle \\
r &\longrightarrow \bar{r} \\
T_i &\longrightarrow T'_i
\end{aligned}$$

claramente se extiende a un morfismo de algebras.

Es claro tambien que es sobre y que $AR\langle T_1,\dots,T_n\rangle \subset \operatorname{Ker}\varphi$ pues los "escalares" ó coeficientes de los terminos, bajo φ se hacen cero.

Ahora si un elemento γ de $R\langle T_1,\dots,T_n\rangle$ bajo φ va al cero, entonces, por ser $R/A\,\langle T'_1,\dots,T'_n\rangle$ una suma directa tenemos que cada factor es cero $\therefore$ los coeficientes son cero, es decir estan en A $\therefore$ $\gamma \in AR\langle T_1,\dots,T_n\rangle$

$\therefore$ η es un isomorfismo

Es decir obtenemos $\bar{X} = \bar{R}\langle T_1,\dots,T_n\rangle$, $dT_i = \bar{t}_i$

(abuso de notacion $T_i = T'_i$)

AFIRMACION: $H(\overline{X}) = \overline{R}/_{\overline{M}}\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_r\rangle$, DONDE σ_j'S SON LAS CLASES DE HOMOLOGIA DE LOS 1-CICLOS $\overline{s}_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_{ji} T_i$ EN $\overline{X}_1$.

Inducción/r: número de 1-ciclos.

($P=1$: TEOREMA 3)

$r=1$: $\overline{X} = R\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$:

$\overline{X} = X/_{a_1X}$ a_1 ES UN NO DIVISOR DE CERO EN R $\therefore$ a_1 ES NO DIVISOR DE CERO EN X, $ds_1 = a_1$

$$\therefore\ H(\overline{X}) = \Psi_* H(X)\langle\sigma_1\rangle \cong H(X)\langle\sigma_1\rangle = R/_M\langle\sigma_1\rangle \cong \overline{R}/_{\overline{M}}\langle\sigma_1\rangle.$$

$r>1$: $X = R\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, $\overline{X} = \overline{R}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, $dT_i = \overline{t}_i$

$A = (a_1, \ldots, a_r)$ $A' = (a_1, \ldots, a_{r-1})$

$\overline{X}' = R/_{A'}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ $dT_i = \overline{t}_i$ $(\in R/A')$.

$H(\overline{X}') = \overline{R}/_{\overline{M}}\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}\rangle$ HIPOTESIS DE INDUCCIÓN.

$\overline{X} = R/_A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ $dT_i = \overline{t}_i$ $(\in R/A)$

$$\cong R/A'\Big/_{A/A'}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle = \overline{R}/_{(\overline{a}_r)}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$$

$$\cong R/_{A'}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \Big/ \overline{a}_r R/_{A'}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle.$$

$\overline{a}_r$ NO DIVISOR DE CERO EN $R/_{A'}$ $\therefore$ $\overline{a}_r$ NO DIVISOR DE CERO EN $R/_{A'}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$

$$\therefore\ H(\overline{X}) = R/_M\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}\rangle\langle\sigma_r\rangle \ (\cong H(\overline{X}')\langle\sigma_r\rangle)$$

$$\cong \overline{R}/_{\overline{M}}\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_r\rangle.$$

FINALMENTE PARA OBTENER EL ALGEBRA Y ADJUNTAMOS p VARIABLES S_j LAS CUALES ANULEN A LOS CICLOS $\overline{s}_j$.

POR INDUCCION SOBRE EL NUMERO DE CICLOS QUE SE ANULAN Y USANDO EL CASO $P=2$ DEL TEOREMA II, SE TIENE QUE $H(Y)=\bar{R}/\bar{M}$.

K:= NUMERO DE CICLOS QUE SE ANULAN:

BASE $k=1$.- $Y=\bar{X}\langle S_1\rangle$; $dS_1=\bar{S}_1$, σ_1 LA CLASE DE HOMOLOGIA DE $\bar{S}_1$.

$H(\bar{X})=\bar{R}/_{\bar{M}}\langle\sigma_1,\dots,\sigma_r\rangle$. ES CLARO QUE σ_1 ES NO DIVISOR DE CERO EN $\bar{R}/_{\bar{M}}\langle\sigma_1\rangle$ $\therefore$ σ_1 ES NO DIVISOR DE CERO EN $\bar{R}/\bar{M}\langle\sigma_1,\dots,\sigma_r\rangle$

$$\therefore H(\bar{Y})=H(\bar{X})/\sigma_1 H(\bar{X})=\bar{R}/\bar{M}\langle\sigma_1,\dots,\sigma_r\rangle\Big/_{\sigma_1\bar{R}/_{\bar{M}}\langle\sigma_1,\dots,\sigma_r\rangle}\cong\bar{R}/_{A}\langle\sigma_2,\dots,\sigma_r\rangle$$

$$(\therefore \text{SI } r=1\quad H(\bar{Y})=(\bar{R}/\bar{M})\langle\sigma_1\rangle/\sigma_1(\bar{R}/_{\bar{M}})\sigma_1\cong\bar{R}/_{\bar{M}}.$$

SUPONGAMOS QUE $K>1$. $Y=\bar{\bar{X}}\langle S_1,\dots,S_{r-1},S_r\rangle=\bar{\bar{X}}\langle S_1,\dots,S_{r-1}\rangle\langle S_r\rangle$ $dS_j=\bar{S}_j$.

$$Y=Y'\langle S_r\rangle,\quad H(Y')=\bar{R}/\bar{M}\langle\sigma_r\rangle\qquad\bar{Y}'=\bar{\bar{X}}\langle S_1,\dots,S_{r-1}\rangle$$

HIPOTESIS DE INDUCCION.

CLARAMENTE σ_r, LA CLASE DE HOMOLOGIA DE $\bar{S}_r$, ES NO DIVISOR DE CERO EN $H(Y')$

$$\therefore\quad H(Y)\cong H(Y')\Big/_{\sigma_r H(Y')}=\bar{R}/_{\bar{M}}\langle\sigma_r\rangle\Big/_{\sigma_r\bar{R}/_{\bar{M}}\langle\sigma_r\rangle}\cong\bar{R}/_{\bar{M}}$$

L.Q.Q.D.

C A P I T U L O V

V.- Aplicacion:

Sea $\bar{R}$ el anillo de grupo asociado al grupo abeliano $\bar{F}$ generado por los elementos $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ con las relaciones $\bar{u}_i^{e_i} = 1$, $1 \leq i \leq r$ y $e_i \in \mathbb{Z}$ tales que $e_1 | e_2 | \ldots | e_n$.

Sea F el grupo abeliano libre con generadores $u_1, \ldots, u_n$ y sea $R = \mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[u_1, u_1^{-1}, \ldots, u_n, u_n^{-1}]$. Sea $t_i = u_i - 1$ con $1 \leq i \leq n$ y $M = (t_1, \ldots, t_n)$. Sea $A = (a_1, \ldots, a_r)$ donde $a_i = u_i^{e_i} - 1$, $e_1 | e_2 | \ldots | e_n$ $1 \leq i \leq r \leq n$.

Por tanto $\bar{R} = R/A$ ya que:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f"', "\exists"] & \mathbb{Z}[F] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\varphi\ \exists"] & \mathbb{Z}[F]/A \arrow[dl, dashed, "\mu"', shift right] \\
 & \mathbb{Z}[\bar{F}] \arrow[ur, dashed, "\eta\ \exists"', shift right] & \bar{F} \arrow[l, "\tau'"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Defino:

$f : F \longrightarrow \mathbb{Z}[\bar{F}]$

$u_i \longrightarrow \bar{u}_i$

$1_F \longrightarrow 1_{\mathbb{Z}[\bar{F}]}$

$g : \bar{F} \longrightarrow \mathbb{Z}[F]/A$

$\bar{u}_i \longrightarrow u_i + A$

$\bar{u}_1^{d_1} \ldots \bar{u}_n^{d_n} \longrightarrow u_1^{d_1} \ldots u_n^{d_n} + A$

$1 \longrightarrow \bar{1} = 1 + A \quad (1 \in \bar{F})$

ie $f(u_1^{d_1} \ldots u_n^{d_n}) = \bar{u}_1^{d_1} \ldots \bar{u}_n^{d_n}$, $d_i \in \mathbb{Z}$

$\therefore \exists!\ \varphi : \mathbb{Z}[F] \longrightarrow \mathbb{Z}[\bar{F}]$ y $\eta : \mathbb{Z}[\bar{F}] \longrightarrow \mathbb{Z}[F]/A$

tales que i) son homomorfismos de anillos

y ii) $\varphi \tau = f$ y $\eta \tau' = g$.

Pero $\varphi(a_i) = \varphi(u_i^{e_i} - 1) = \bar{u}_i^{e_i} - 1 = 0$ $\therefore \exists!\ \mu : \mathbb{Z}[F]/A$ tal que $\mu \pi = \varphi$.

Afirmacion: $\mu \eta = 1_{\mathbb{Z}[\bar{F}]}$ y $\eta \mu = 1_{\mathbb{Z}[F]/A}$.

1).- $\eta \mu \pi = \pi$: $\eta \mu \pi \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} c_\lambda u_1^{d_1} \ldots u_n^{d_n} \right) = \sum c_\lambda \eta \varphi (u_1^{d_1} \ldots u_n^{d_n}) =$

$$= \sum c_\alpha \eta \psi \tau (u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha \eta f (u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha \eta (\bar{u}_1^{\alpha_1} \dots \bar{u}_n^{\alpha_n})$$

$$= \sum c_\alpha \eta \tau' (\bar{u}_1^{\alpha_1} \dots \bar{u}_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha g (\bar{u}_1^{\alpha_1} \dots \bar{u}_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha (u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} + A)$$

$$= (\sum c_\alpha u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}) + A = \pi (\sum c_\alpha u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}).$$

$$\therefore \eta\mu\pi = \pi \quad \therefore \eta\mu = 1_{\mathbb{Z}[F]/A}$$

$$\mu\eta (\sum c_\alpha \bar{u}_1^{\alpha_1} \dots \bar{u}_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha \mu\eta (\bar{u}_1^{\alpha_1} \dots \bar{u}_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha \mu (u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} + A)$$

$$= \sum c_\alpha \mu\pi (u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha \psi (u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}) = \sum c_\alpha \bar{u}_1^{\alpha_1} \dots \bar{u}_n^{\alpha_n}.$$

$$\therefore \mu\eta = 1_{\mathbb{Z}[F]}$$

QUEREMOS VER QUE $t_1, \dots, t_n$ Y $a_1, \dots, a_r$ SON $\mathbb{Z}[F]$ SUCESIONES:

ES CLARO QUE t_1 Y a_1 SON NO DIVISORES DE CERO YA QUE $\mathbb{Z}[F]$ ES DOMINIO ENTERO ($\mathbb{Z}[F]$ ES NOETHERIANO PUESTO QUE $\mathbb{Z}$ ES NOETHERIANO Y F ES FINITAMENTE GENERADO $\therefore \mathbb{Z}[F]$ ES NOETHERIANO).

POR INDUCCION SOBRE n Y r:

$t_1, \dots, t_n$ ES UNA $\mathbb{Z}[F]$ - SUCESION:

$n=1$ ✓

$n=2$ $R/(t_1) \cong \mathbb{Z}[\bar{F}]$, DONDE $\bar{F}$ ES EL GRUPO ABELIANO GENERADO POR $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ CON LA RELACION $\bar{u}_1 = 1$.

$$\therefore \bar{t}_2 \neq \bar{0} \text{ ES NO DIVISOR DE CERO.}$$

SUP $n \geq 3$: $R/(t_1, \dots, t_{n-1}) \cong \mathbb{Z}[\bar{u}_n] \therefore \bar{t}_n \neq 0$, $\bar{t}_n \in R/(t_1, \dots, t_{n-1})$ ES NO DIVISOR DE CERO.

$\therefore t_1, \dots, t_n$ ES $\mathbb{Z}[F]$ - SUCESION.

ANALOGAMENTE

$a_1, \dots, a_r$ ES UNA $\mathbb{Z}[F]$ - SUCESION.

∴ SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DEL TEOREMA IX

∴ $Y = \overline{R}\langle T_1, \dots, T_n, Y_1, \dots, Y_r \rangle$ ES UNA RESOLUCION LIBRE ACICLICA DEL $\overline{R}$-MODULO $\overline{R}/\overline{M}$, LA CUAL PUEDE SER USADA PARA CALCULAR LOS GRUPOS DE HOMOLOGIA DE $\overline{F}$.

APENDICE

APENDICE.

En este apendice se demostraran algunos resultados generales para R-modulos los cuales se han utilizado anteriormente.

PROPOSICION 1.- En R-Mod: Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h''} & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' & \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo (de R-modulos) $K : \ker h'' \longrightarrow \operatorname{coker} h'$ tal que la siguiente sucesion es exacta:

$$\ker h' \xrightarrow{f'|} \ker h \xrightarrow{f|} \ker h'' \xrightarrow{K} \operatorname{coker} h' \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker} h \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{coker} h''$$

DEMOSTRACION: a).- $\ker h' \xrightarrow{f'|} \ker h \xrightarrow{f|} \ker h''$ $\quad \left[h''(f|(x)) = h''f(x) = gh(x) = g(0) = 0 \right]$

$\operatorname{Im}(f'|) \subset \ker(f|)$

Sea $x \in \ker h'$. P.D a).- $f'|(x) \in \ker h$

b).- $f| \circ f'|(x) = 0$

$h(f'|(x)) = hf'(x) = g'h'(x) = g'(0) = 0 \quad \therefore$ ✓

$f| \circ f'|(x) = f \circ f'(x) = 0$ pues la sucesion es exacta.

$\therefore \operatorname{Im}(f'|) \subset \ker(f|)$.

$\operatorname{Im}(f'|) \supset \ker(f|)$.

Sea $y \in \ker h$ tal que $f|(y) = 0$ $\quad (f|(y) = f(y) = 0$

$\therefore \exists\, x \in M'$ tal que $f'(x) = y$

P.D.- $x \in \ker h'$: $g'h'(x) = hf'(x) = h(y) = 0$

$\therefore g'h'(x) = 0 \quad \therefore h'(x) = 0$

$\therefore x \in \ker h'$

$\therefore \ker f| \subset \operatorname{Im} f'| \quad \therefore \ker(f|) = \operatorname{Im}(f'|)$.

b).- $\operatorname{coker} h' \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker} h \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{coker} h''$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[d, "\pi''"] \\
N'/\mathrm{Im}\, h' \arrow[r, dashed, "\exists!\, \bar{g}'"'] & N/\mathrm{Im}\, h \arrow[r, dashed, "\exists!\, \bar{g}"'] & N''/\mathrm{Im}\, h''
\end{tikzcd}$$

P.D.- $\mathrm{Im}\, h' \subset \mathrm{Ker}\, \pi g'$:

Sea $x \in M'$: $\pi g' h'(x) = \pi h f'(x) = 0$.

$\therefore \exists!\, \bar{g}' : \mathrm{Coker}\, h' \longrightarrow \mathrm{Coker}\, h$ tal que $\bar{g}'\pi' = \pi g'$.

$n' + \mathrm{Im}\, h' \longrightarrow g'(n) + \mathrm{Im}\, h$.

Análogamente $\exists!\, \bar{g} : \mathrm{Coker}\, h \longrightarrow \mathrm{Coker}\, h''$ tal que $\bar{g}\pi = \pi'' g$

$n + \mathrm{Im}\, h \longrightarrow g(n) + \mathrm{Im}\, h''$

P.D.- $\mathrm{Im}\, \bar{g}' = \mathrm{Ker}\, \bar{g}$

P.D.- $\mathrm{Im}\, \bar{g}' \subset \mathrm{Ker}\, \bar{g}$. i.e. $\bar{g} \circ \bar{g}' = \bar{0}$

$$\bar{g} \circ \bar{g}'(\bar{x}) = \bar{g} \circ \bar{g}'(x + \mathrm{Im}\, h') = \bar{g}(g'(x) + \mathrm{Im}\, h) = g(g'(x)) + \mathrm{Im}\, h''$$
$$= 0 + \mathrm{Im}\, h'' = \bar{0}$$

P.D.- $\mathrm{Ker}\, \bar{g} \subset \mathrm{Im}\, \bar{g}'$

Sea $\bar{n} \in \mathrm{Coker}\, h$ tal que $\bar{g}(\bar{n}) = \bar{0}$

$\bar{0} = \bar{g}(\bar{n}) = \bar{g}(n + \mathrm{Im}\, h) = g(n) + \mathrm{Im}\, h'' = \bar{0}$

$\therefore g(n) \in \mathrm{Im}\, h''$

$\therefore \exists\, m'' \in M''$ tal que $h''(m'') = g(n)$

Como f es sobre $\exists\, m \in M$ tal que $f(m) = m''$

Entonces $h''(f(m)) = h''(m'') = g(n)$

$\qquad ||$

$g(h(m)) \quad \therefore \quad g(n - h(m)) = 0$

$\therefore \exists!\, n' \in N'$ tal que $g'(n') = n - h(m)$.

Af: $\bar{g}'(n') = \bar{n}$: $\bar{g}'(n' + \mathrm{Im}\, h') = g'(n') + \mathrm{Im}\, h$

$= n - h(m) + \mathrm{Im}\, h$

$= n + \mathrm{Im}\, h = \bar{n} \quad \therefore \checkmark$

Ahora definiremos K: Sea $c \in \ker h''$. $\exists\, b \in M$ tal que $f(b)=c$ (f es epi). y $gh(b) = h''f(b) = h''(c)=0$ ($\therefore h(b) \in \ker g = \operatorname{Im} g'$) entonces existe $a' \in N'$ tal que $g'(a') = h(b)$. Definimos $\underline{K(c)} = \overline{a'} = \underline{a' + \operatorname{Im} h'}$.

Veamos que K no depende de la eleccion de b.
Sea $b' \in M$ tal que $f(b')=c$. $\exists\, a \in M'$ tal que $f'(a) = b'-b$, (ya que $f(b'-b) = f(b') - f(b) = c-c=0 \Rightarrow b'-b \in \ker f = \operatorname{Im} f'$), ie $b' = f'(a)+b$
y $h(b + f'(a)) = h(b') = h(b) + hf'(a) = h(b) + g'h'(a)$

$$\therefore\ h(b') = h(b) + g'h'(a) = g'(a') + g'h'(a) = g'(a' + h'(a))$$

$$\therefore\ K(c) = [a' + h'(a)] = [a'] = a' + \operatorname{Im} h'.$$

$\therefore$ K esta bien definida.

Ahora veremos que K es un homo de R-modulos.
Sean $c, c' \in \ker h''$ ($\therefore c+c' \in \ker h''$: $c+c'=c''$).
$\exists\, b, b' \in M$ tales que $f(b)=c$ y $f(b')=c'$ y $f(b+b') = c+c'$.

$$\begin{aligned} y\quad gh(b) &= h''f(b) = h''(c) = 0 \\ gh(b') &= h''f(b') = h''(c') = 0 \\ gh(b+b') &= h''f(b+b') = h''(c'') = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \exists\, a, a', a''$ tales que $h(b) = g'(a)$, $h(b') = g'(a')$ y $g'(a'') = h(b+b')$
pero $g'(a'') = h(b+b') = h(b) + h(b') = g'(a) + g'(a') = g'(a+a')$

$$\therefore\ a'' = a' + a.$$

$$\therefore\ (a'+a) + \operatorname{Im} h' = a'' + \operatorname{Im} h$$

$$\therefore\ \overline{a'} + \overline{a} = \overline{a''} \qquad \therefore\ K(c+c') = K(c) + K(c').$$

Sea $r \in R$: $c \in \ker h''$: ($rc \in \ker h''$) : PD $K(rc) = rK(c)$.
$\exists\, b \in M$ tal que $f(b) = c$ $\therefore$ $f(rb) = rf(b) = rc$.

$$gh(b) = h''f(b) = h''(c) = 0 \qquad y \quad gh(rb) = h''(rc) = 0.$$

$\therefore \exists\, a, a'$ tales que $h(b) = g'(a)$ y $h(rb) = g'(ra)$.

$$\therefore\ K[c] = [a] \ \therefore\ rK[c] = [ra] = K[rc]$$

P.D.- $\operatorname{Im}(f1) \subset \ker K$ y $\operatorname{Im} K \subset \ker \overline{g'}$.
ie: $Kf1 = 0$ y $\overline{g'}K = 0$

$$(K \circ f1)(x) = K(f(x)) = (a' + \operatorname{Im} h')$$

Donde $a' \in N'$ es tal que $g'(a') = h(x) = 0$ $\therefore$ $a' = 0$ $\therefore$ $(K \circ f1)(x) = 0$
$\therefore (K \circ f1) = 0$

$\overline{g'}\,K(c) = \overline{g'}\,(a' + \operatorname{Im} h') = g'(a') + \operatorname{Im} h = h(b) + \operatorname{Im} h = \bar{0}$

DONDE $a' \in N'$ ES TAL QUE $g'(a') = h(b)$ CON b TAL QUE $f(b) = c$.

P.D.- $\operatorname{Ker} K \subset \operatorname{Im} f|$ Y $\operatorname{Im} K \supset \operatorname{Ker} \overline{g'}$.

SEA $c \in \operatorname{Ker} K$ IE $c \in \operatorname{Ker} h''$ TAL QUE $K(c) = \bar{0}$

$K(c) = a' + \operatorname{Im} h' = \bar{0}$ CON a' TAL QUE $g'(a') = h(b)$

DONDE b ES TAL QUE $f(b) = c$.

P.D.- $\exists\, x \in \operatorname{Ker} h$ TAL QUE $f|(x) = c$.

$a' \in \operatorname{Im} h'$ $\therefore$ $\exists\, m' \in M'$ TAL QUE $h'(m') = a'$

$$\therefore\ h(b - f'(m')) = h(b) - hf'(m') = h(b) - g'h'(m') = h(b) - g'(a') = h(b) - h(b) = 0$$

$\therefore\ b - f'(m') \in \operatorname{Ker} h$

Y $f(b - f'(m')) = f(b) = c$ $\therefore$ SEA $x = b - f'(m')$

SEA $\bar{a'} \in \operatorname{Ker} \overline{g'}$ IE $\overline{g'}(\overline{a'}) = 0$

$\overline{g'}\,(a' + \operatorname{Im} h') = 0$

$\therefore\ g'(a') + \operatorname{Im} h = 0$ $\therefore\ g'(a') \in \operatorname{Im} h$

$\therefore\ \exists\, m \in M$ TAL QUE $h(m) = g'(a')$

P.D.- $K(f(m)) = \overline{a'}$.

P.D.- $f(m) \in \operatorname{Ker} h''$:

$h''f(m) = g\,h(m) = g\,g'(a') = 0$.

Y CLARAMENTE $K(f(m)) = \overline{a'}$ (POR DEFINICION)

$\therefore\ \operatorname{Im} f| = \operatorname{Ker} K$ Y $\operatorname{Ker} \overline{g'} = \operatorname{Im} K$.

$\therefore$

$$\operatorname{Ker} h' \xrightarrow{f'|} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{f|} \operatorname{Ker} h'' \xrightarrow{K} \operatorname{Coker} h' \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{Coker} h \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Coker} h''$$

ES EXACTA (L.Q.Q.D)

TEOREMA: Sea $C \rightarrowtail^{\varphi} D \xrightarrow{\varphi'} \twoheadrightarrow E$ una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces $\exists\, K_n : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)\ \forall n \in \mathbb{Z}$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\ldots \to H_n(C) \xrightarrow{\varphi_{n*}} H_n(D) \xrightarrow{\varphi'_{n*}} H_n(E) \xrightarrow{K_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{\varphi_{n-1*}} H_{n-1}(D)$$

$$\xrightarrow{\varphi'_{n-1*}} H_{n-1}(E) \longrightarrow \ldots$$

DEMOSTRACION: Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & D_n \arrow[r, "\varphi'_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\varphi'_{n-1}"'] & E_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n \xrightarrow{\varphi_n|} \ker \partial'_n \xrightarrow{\varphi'_n|} \ker \partial''_n$$

$$\text{y} \quad \operatorname{coker} \partial_n \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} \operatorname{coker} \partial'_n \xrightarrow{\overline{\varphi}'_n} \operatorname{coker} \partial''_n \longrightarrow 0$$

(Como en la proposición anterior $\operatorname{Im} \varphi_n| = \ker \varphi'_n|$ y $\varphi_n|$ es inyectiva pues φ_n lo es y $\operatorname{Im} \overline{\varphi}_n = \ker \overline{\varphi}_n$, $\overline{\varphi}'_n$ es sobre pues φ' lo es).

Ahora ∂_n induce un morfismo z_n como sigue:

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "="] & C_n/\operatorname{Im} \partial_{n+1} \arrow[d, dashed, "\exists!\ \overline{1}"] & (\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n) \\
C_n \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\partial_n"', two heads] \arrow[dr, phantom, "="] & C_n/\ker \partial_n \arrow[d, dashed, "\exists!\ \mu_n \ (1^{er}\ \text{Teorema de isomorfia})"] & \\
& \operatorname{Im} \partial_n \arrow[r, hook, "z"'] & \ker \partial_{n-1}
\end{tikzcd}$$

(IE: i_n: COKER $\partial_{n+1} \longrightarrow$ KER ∂_{n-1})

i_n ES TAL QUE $\text{KER } i_n = \text{KER } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} = H_n(C)$

Y $\text{COKER } i_n = \text{KER } \partial_{n-1} / \text{Im } \partial_n = H_{n-1}(C)$

DEMOSTRACION: SEA $\bar{x} \in C_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ TAL QUE $i_n(\bar{x}) = 0$
(IE $\bar{x} \in \text{KER } i_n$): $0 = i_n(\bar{x}) = i\mu(\bar{1}(\bar{x})) = 0$ $\therefore$ $\bar{1}(\bar{x}) = 0$ ($i\mu$ INYECTIVA)
$\therefore \bar{1}\pi(\bar{x}) = 0$ $\therefore$ $P(x) = \bar{0}$ $\therefore$ $x \in \text{KER } \partial_n$
$\therefore \bar{x} \in \text{KER } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$

SEA $\bar{x} \in \text{KER } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{COKER } \partial_{n+1}$
$i_n(\bar{x}) = i\mu \bar{1}(\bar{x}) = i\mu(\bar{1}\pi(x)) = i\mu(P(x)) = i\mu(x + \text{KER } \partial_n)$
$= 0.$
$\therefore \text{KER } i_n = H_n(C).$

AHORA: $\text{COKER } i_n = H_{n-1}(C)$

$\text{COKER } i_n := \text{KER } \partial_{n-1} / \text{Im } i_n \stackrel{?}{=} \text{KER } \partial_{n-1} / \text{Im } \partial_n$

BASTA VER QUE $\text{Im } i_n = \text{Im } \partial_n$.

"$\supseteq$" SEA $\partial_n(x) \in \text{Im } \partial_n$ $(x \in C_n)$
$\partial_n(x) = \mu P(x)$, $P(x) \in C_n / \text{KER } \partial_n$.

$\Rightarrow \exists\ \bar{z} \in C_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ TAL QUE $\bar{1}(\bar{z}) = P(x)$ ($\bar{1}$ ES SOBRE)

$\Rightarrow y = \partial_n(x) = \mu P(x) = \mu \bar{1}(\bar{z})$

$\therefore y = i(y) = i\mu P(x) = i\mu \bar{1}(\bar{z}) = i_n(\bar{z})$
$\therefore y \in \text{Im } i_n$.

"$\subseteq$" SEA $x \in \text{Im}(i\mu\bar{1}) = \text{Im } i_n \subset \text{KER } \partial_{n-1}$
$\exists\ \bar{z} \in C_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ TAL QUE $i\mu\bar{1}(\bar{z}) = x$

P.D.- $\partial_n(z) = x$

$$x = i\mu\bar{\tau}(\bar{z}) = i\mu\bar{\tau}(\pi(z)) = i\mu P(z) = i d_n(z) = d_n(z)$$

$$\therefore \text{COKER } i_n = \text{KER } \partial_{n-1} / \text{Im } \partial_n = H_{n-1}(C).$$

L.Q.Q.D.

ANALOGAMENTE ∂_n', ∂_n'' INDUCEN $i_n' : \text{COKER } \partial_{n+1}' \longrightarrow \text{KER } \partial_{n-1}'$, $i_n'' : \text{COKER } \partial_{n+1}'' \longrightarrow \text{KER } \partial_{n-1}''$ TALES QUE $\text{KER } i_n' = H_n(D)$, $\text{COKER } i_n' = H_{n-1}(D)$, $\text{KER } i_n'' = H_n(E)$ Y $\text{COKER } i_n'' = H_{n-1}(E)$.

ENTONCES, APARTIR DE i_n, i_n', i_n'' OBTENEMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO CON RENGLONES EXACTOS:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{COKER } \partial_{n+1} \arrow[r, "\overline{\varphi_n}"] \arrow[d, "i_n"] & \text{COKER } \partial_{n+1}' \arrow[r, "\overline{\varphi_n'}"] \arrow[d, "i_n'"] & \text{COKER } \partial_{n+1}'' \arrow[r] \arrow[d, "i_n''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \text{KER } \partial_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}|"'] & \text{KER } \partial_{n-1}' \arrow[r, "\varphi_{n-1}'|"'] & \text{KER } \partial_{n-1}'' &
\end{tikzcd}$$

PUES LA EXACTITUD YA LA TENIAMOS Y CHEQUEMOS LA CONMUTATIVIDAD.

1) $\varphi_{n-1}| \circ i_n = i_n' \overline{\varphi}_n$

2).- $i_n'' \overline{\varphi_n'} = \varphi_{n-1}'| \circ i_n'$

$$\varphi_{n-1}| \circ i_n = \varphi_{n-1} \circ i \circ \mu \circ \bar{\tau} \stackrel{?}{=} i' \mu' \circ \bar{\tau}\, \overline{\varphi}_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi_{n-1} \circ i \circ \mu \circ \bar{\tau}\, \pi = i_n' \overline{\varphi}_n \pi$$

$$\varphi_n i_n \pi = \varphi_{n-1}\, i \mu \bar{\tau} \pi = \varphi_{n-1}\, i \mu P = \varphi_{n-1} \partial_n = \partial_n' \varphi_n = i' \mu' P' \varphi_n$$

$$= i' \mu' P' \varphi_n = i' \mu' \bar{\tau} \pi' \varphi_n = i_n' \overline{\varphi}_n \pi$$

$$\therefore \varphi_{n-1} i_n \pi = i_n' \overline{\varphi}_n \pi \;\therefore\; \varphi_{n-1} i_n = i_n' \overline{\varphi}_n .$$

ANALOGAMENTE $i''_n \overline{\varphi}'_n = \varphi'_{n-1} i'_n$ $\therefore$ EL DIAGRAMA CONMUTA.

POR LA PROPOSICION ANTERIOR EXISTE K_n MORFISMO DE CONEXION TAL QUE LA SIGUIENTE SUCESION ES EXACTA:

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ker} i_n \longrightarrow \operatorname{Ker} i'_n \longrightarrow \operatorname{Ker} i''_n \xrightarrow{K_n} \operatorname{coker} i_n \longrightarrow \operatorname{coker} i'_n \longrightarrow$$

$$\operatorname{coker} i''_n \longrightarrow \cdots$$

ES DECIR:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow H_n(D) \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{K_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(D) \longrightarrow H_{n-1}(E) \to \cdots$$

ES EXACTA.

L.Q.Q.D.

OBS: LA CONMUTATIVIDAD DEL DIAGRAMA ES MAS CLARO (?) SI SE OBSERVA EL SIGUIENTE DIAGRAMA CONMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, tail, "\varphi_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & D_{n+1} \arrow[r, two heads, "\varphi'_{n+1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] \\
C_n \arrow[r, tail, "\varphi_n"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dd, bend right, "p"'] & D_n \arrow[r, two heads, "\varphi'_n"] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dd, bend right, "p'"'] & E_n \arrow[d, "\pi''"] \arrow[dd, bend right, "p''"'] \\
\frac{C_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}} \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}_n"] \arrow[d, "\exists!\, T"] & \frac{D_n}{\operatorname{Im}\partial'_{n+1}} \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}'_n"] \arrow[d, "\exists!\, \overline{T}_n"] & \frac{E_n}{\operatorname{Im}\partial''_{n+1}} \arrow[d, "\exists!\, \overline{T}"] \\
C_n/\operatorname{Ker}\partial_n \arrow[d, two heads, "\mu"] & D_n/\operatorname{Ker}\partial'_n \arrow[d, two heads, "\mu'"] & E_n/\operatorname{Ker}\partial''_n \arrow[d, two heads, "\mu''"] \\
\operatorname{Im}\partial_n \arrow[d, hook] & \operatorname{Im}\partial'_n \arrow[d, hook] & \operatorname{Im}\partial''_n \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Ker}\partial_{n-1} \arrow[r, tail, "\varphi_{n-1}"'] & \operatorname{Ker}\partial'_{n-1} \arrow[r, "\varphi'_{n-1}"] & \operatorname{Ker}\partial''_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$\mu p = \partial_n$

$\mu' p' = \partial'_n$

$\mu'' p'' = \partial''_n$

BIBLIOGRAFIA

P.J. HILTON. U. STAMBACH: A COURSE IN HOMOLOGICAL ALGEBRA
SPRINGER VERLAG. G.T.M.

JOSEPH J. ROTMAN: NOTES ON HOMOLOGICAL ALGEBRA
VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY.

KENETH S. BROWN: COHOMOLOGY OF GROUPS.
SPRINGER VERLAG. GTM.

H. CARTAN, S. EILENBERG HOMOLOGICAL ALGEBRA
PRINCETON UNIVERSITY PRESS.

JOSEPH J. ROTMAN: AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA
ACADEMIC NEW YORK.

MAURICE AUSLANDER: RINGS, MODULES AND HOMOLOGY.
BRANDEIS UNIVERSITY.

ALGEBRAS DE DIMENSION FINITA
YU. A. DROZD
V.V. KIRICHENCO. UNIVERSIDAD DE KIEV.

KUNZ, ERNEST: INTRODUCTION TO COMMUTATIVE ALGEBRA
AND ALGEBRAIC GEOMETRY.

M.F. ATIYAH: INTRODUCTION TO COMMUTATIVE ALGEBRA.
ADDISON-WESLEY, READING MASS. (1969).