

2

2ej
J



Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional de Estudios Profesionales "Aragón"

**METODOS GRAFICOS DE ESTABILIDAD
DE SISTEMAS LINEALES POR
COMPUTADORA DIGITAL**

T E S I S

Que para obtener el título de:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P r e s e n t a :

Alberto Alvarado Suárez

1986



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Página

INTRODUCCION	1
I. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD EN SISTEMAS LINEALES	3
I.1. Introducción	3
I.2. El Concepto de Estabilidad	4
I.3. Definición de Estabilidad	6
I.4. La Estabilidad desde el punto de vista matemático	8
I.5. Métodos para determinar la estabilidad .	17
I.6. Estabilidad en Sistemas Multivariabes..	20
Bibliografía	24
II. PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL METODO LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES	25
II.1. Introducción	25
II.2. Condiciones Elementales del Lugar de las Raices y sus características más importantes	27
II.2.1. Condiciones de magnitud y ángulo	27
II.2.2. Variación de Múltiples Parámetros	31
II.3. Sistemas con Retardo de Tiempo	31
II.4. Descripción del Algoritmo	37
II.4.1. Cálculo de la pendiente del ángulo θ_1	46

	Página
II.4.2. Corrección del ángulo θ_1	49
II.4.3. Localización y cálculo de los puntos silla	51
II.5. Programa para el Lugar de las Raíces	62
II.6. Listado	96
II.7. Operación del Programa	96
II.8. Ejemplos Selectos	102
Bibliografía	108
III. PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL CRITERIO DE NYQUIST	109
III.1. Introducción	109
III.2. Obtención de la Respuesta en Frecuencia.	110
III.3. Diagramas Polares	115
III.4. Teorema de Cauchy	117
III.5. Criterio de Estabilidad de Nyquist	122
III.6. Estabilidad Relativa	130
III.7. Descripción del Algoritmo	134
III.8. Programa para el Lugar de Nyquist	138
III.9. Listado	148
III.10. Operación del Programa	148
III.11. Ejemplos Selectos	153
Bibliografía	155
CONCLUSIONES	156
GLOSARIO DE TERMINOS	157

APENDICE A. Listado del Programa de Computadora, para obtener el Lugar Geométrico de las Raíces	159
APENDICE B. Listado del Programa de Computadora para obtener el Lugar de Nyquist	164

INDICE DE FIGURAS

No. de Figura	T í t u l o	Página
2.1	Sistema de Control de Malla cerrada	28
2.2	Ejemplo	34
2.3	Lugares de las Raíces	39
2.4	Concepto básico del Algoritmo	41
2.5	Signos en los cuadrantes	45
2.6	Obtención del ángulo θ_1	47
2.7	Punto silla sobre el eje real del plano complejo	51
2.8	Punto silla de cuatro ramas	52
2.9	Detección del punto silla	54
2.10	Angulo de continuación de un punto silla.	61
2.11	Figuras geométricas empleadas en los dia- gramas de flujo	65
2.12	Introducción de datos	66
2.13	Comprobación	68
2.14	La variable D	71
2.15	Diagrama de Flujo	72
2.16	Diagrama de Flujo	79
2.17	Diagrama de Flujo del Algoritmo	82
2.18	Diagrama de Flujo que se aumenta a la ru- tina cuando se quiere otra rama	85
2.19	Subrutina condición de ángulo	86
2.20	Subrutina cálculo de ángulo	88
2.21	Subrutina derivadas parciales	89

No. de Figura	T i t u l o	Página
2.22	Subrutina punto silla	90
2.23	Subrutina Normaliza Angulo	92
2.24	Subrutina Cálculo de Ganancia	95
2.25	Subrutina cambio de exactitud	97
3.1	Proyección del plano s al plano F(s)	118
3.2	Rodeo de un punto	119
3.3	Patrón de polos y ceros de $F_1(s)$ y un con- torno cualquiera	121
3.4	Proyección al plano $F_1(s)$	122
3.5	Ejemplo del teorema de Cauchy	123
3.6	Ejemplo del Teorema de Cauchy	123
3.7	Contorno de Nyquist	125
3.8	Diagramas de $G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ en los planos $1+G_1H_1$ y G_1H_1	126
3.9	Lugar de Nyquist de dos sistemas	130
3.10	Margen de Ganancia	131
3.11	Margen de Fase	132
3.12	Diagramas de $G(j\omega)H(j\omega)$ en los planos $\frac{1}{K} +$ GH y GH	133
3.13	Margen de ganancia y fase para un sistema con un parámetro K	134
3.14	Introducción de datos y verificación	140
3.15	Programa principal para calcular el Lugar de Nyquist	144

INTRODUCCION

En la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón dentro de la carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica se llevan dos asignaturas muy interesantes llamadas Ingeniería de Control I e Ingeniería de Control II en el 8º y 9º semestres respectivamente, en las cuales uno de los temas que se desarrollan es la estabilidad en sistemas lineales invariantes con el tiempo, y en particular se estudian dos métodos gráficos para determinarla: El Lugar Geométrico de las Raíces y El Criterio de Estabilidad de Nyquist; el procedimiento normal de aplicación de estos métodos es largo y tedioso, y al calcularlos en forma manual es fácil caer en errores, añadiendo a esto que las gráficas así obtenidas son aproximadas, por lo que es aquí en donde surge la inquietud de realizar programas de computadora que hagan este trabajo, consiguiendo así velocidad, exactitud y versatilidad.

Si a lo último mencionado le agregamos el hecho de que estos programas pueden ser utilizados como apoyo didáctico, ya que en clase se presenta el problema de que, al estar estudiando los métodos de estabilidad ya mencionados, es necesario presentar suficientes ejemplos cuya realización manual, como se dijo anteriormente, es larga, y además, al tomar en cuenta la complejidad de los ejemplos realizados, entonces esto implicará que para el entendimiento de alguno de estos

métodos gráficos serán necesarias demasiadas horas-clase para su exposición; por lo tanto, los programas de computadora podrán ser usados por los alumnos para la mejor comprensión de tales métodos llevando a cabo muchos ejemplos en poco tiempo, y permitiendo un ahorro y un mejor aprovechamiento de horas-clase.

Considerando lo anterior tenemos que los objetivos que persigue el presente trabajo de tesis son:

- 1.- Elaborar programas de computadora para obtener el lugar Geométrico de las Raíces y el lugar de Nyquist.
- 2.- A través de los programas de computadora se obtendrá velocidad, exactitud y versatilidad en el trazado de los lugares correspondientes.
- 3.- Se podrá tener un apoyo didáctico en tales programas con el fin de ahorrar horas-clase.

CAPITULO I

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD EN SISTEMAS LINEALES

I.1. INTRODUCCION

En Ingeniería desarrollar un proyecto, diseño o resolver algún problema particular, requiere del empleo de figuras de mérito, regulaciones, eficiencias o en general trazar un número o criterio que oriente al Ingeniero, de tal manera de asegurar que el diseño o proyecto va bien encaminado.

Por ejemplo, según lo anterior, un problema de Ingeniería muy simple podría ser saber si un material sólido colocado en agua flotará o se hundirá. Un criterio para resolver este problema sería recurrir a la Física que nos dice que un cuerpo sólido de cierta materia flotará si su peso específico es menor de 1 kgf/dm^3 , en caso contrario se hundirá. En ese caso el material puede reducirse a un número, es decir, una tabla que liste los pesos específicos de varios materiales permitirá seleccionar cuáles de ellos flotarán y cuáles se hundirán. Una bolsa de acero se hundirá debido a que su peso específico varía entre 7.8 y 9.0 kgf/dm^3 dependiendo del tipo de acero que se trate (colado, fundido, etc.).

El criterio explicado en el párrafo anterior podría parecer bueno, pero ciertas condiciones particulares pueden in

Introducir nuevos factores no considerados: como el caso de un barco de acero que flota, una navaja de afeitar que es de acero o el de una delgada aguja también de acero que podemos depositarlas cuidadosamente sobre una superficie de agua quieta; la navaja sobre una de sus caras y la aguja en forma horizontal, ambas flotarán; y si la navaja o aguja se depositan en forma vertical se hundirán y esto no tendrá nada que ver con el peso específico del material, y el criterio antes expuesto no predice suficientemente si la navaja o aguja flotarán.

En Ingeniería de Control existe un concepto muy útil; la estabilidad; podemos relacionar al ejemplo anterior ese concepto para predecir si un material colocado sobre el agua flotará o no.

Por medio de la estabilidad el Ingeniero puede resolver problemas de control, permitiéndole conocer si su diseño o solución está bien encaminado.

Este capítulo presentará un análisis de lo que es la estabilidad de un sistema de control.

1.2. EL CONCEPTO DE ESTABILIDAD

La estabilidad fue tratada por H. Nyquist en 1932, y nos dice que un sistema es estable cuando la salida no crece indefinidamente para entradas o perturbaciones pequeñas.

La definición anterior no es única; sin embargo, para entender que es la estabilidad haremos uso del siguiente ejemplo en el que un cono está colocado sobre su base, si es inclinado hacia un lado regresará a su posición inicial cuando se quite la fuerza externa que lo cambió de posición, por lo que se dice que esta posición es estable. Si el mismo cono es colocado ahora sobre su costado y se desplaza ligeramente, este rodará sin dejar su posición de costado, a esta posición se le llama estabilidad marginal. Finalmente si el cono es colocado sobre su vértice, suponiendo que puede conseguirse esa posición, al sufrir una perturbación, tal vez una vibración o una pequeñísima ráfaga de aire, este caerá aún cuando desaparezca la perturbación, por lo que esta posición es inestable. Se podría pensar que no tiene objeto hacer un estudio de la estabilidad en un cono colocado sobre su vértice o el de un lápiz colocado en forma vertical haciendo equilibrio sobre su punta, ya que estos son demasiado inestables, sin embargo estos ejemplos son parecidos a los que tiene que resolver un Ingeniero de un centro espacial con los modernos transbordadores, en los que su ascenso además de ser en forma completamente vertical, la velocidad deberá ir aumentando lenta y progresivamente para proteger a los astronautas que lleva a bordo desde la hora del despegue y hasta que toma una velocidad considerable, es este uno de los problemas justamente similar al ejemplo del cono o lápiz antes mencionados.

Un ejemplo de una situación más representativa se presenta cuando un Ingeniero esta diseñando un nuevo avión, y el seguramente se interesará en la pregunta ¿volará?, la cuál aparentemente es intrascendente, y espera tener una respuesta simple: si o no. Es evidente que ni la pregunta ni la respuesta son simples. Una pregunta ligeramente diferente podría ser, con relación a si el avión volará o no ¿es estable el avión?, si la respuesta es no, entonces muy probablemente el avión no volará, si la respuesta es si, entonces tal vez si vuele. El conocimiento de la estabilidad dará una información importante a una de las principales preguntas en el diseño del nuevo avión ¿volará?.

1.3. DEFINICION DE ESTABILIDAD

Existen diferentes tipos de sistemas que pueden incluir algunos elementos tales como dispositivos mecánicos, circuitos eléctricos, procesos químicos, factores biológicos o índices económicos entre otros, combinados en las áreas de la Ingeniería, la Biología o la Economía.

Cualquier sistema puede ser modelado, es decir, puede tener una representación matemática a través de ecuaciones que por lo general son diferenciales. Si la ecuación diferencial o el sistema de ecuaciones diferenciales que representan el sistema en forma matemática son lineales y además

ninguno de sus términos depende explícitamente de la variable independiente tiempo, es decir es una ecuación lineal invariante con el tiempo, entonces se dice que se trata de un sistema lineal invariante con el tiempo.

Una definición de estabilidad es: Un sistema lineal e invariante con el tiempo es estable en el sentido entrada salida si la entrada $x(t) < M < \infty$ produce una salida $y(t) < N < \infty$, donde M y N son dos constantes reales menores que infinito; lo anterior quiere decir que para que un sistema sea estable cualquier entrada acotada debe producir una salida también acotada.

Paralelamente a la definición y ampliando lo mencionado anteriormente, se puede decir lo siguiente acerca de la estabilidad en un sistema lineal invariante con el tiempo. Un sistema está inicialmente en algún estado de equilibrio, si le aplicamos una pequeña perturbación, y después de ésta la salida del sistema es marcadamente diferente de la que tuviera que ocurrir sin la perturbación, se dice que el sistema es inestable. Si la salida difiere un poco después de la perturbación, se dice que el sistema es marginalmente estable. Si los efectos de la perturbación desaparecen con el tiempo y finalmente la salida del sistema es igual con perturbación o sin ella, entonces el sistema es asintóticamente estable. Evidentemente la estabilidad asintótica es el mejor tipo de estabilidad.

Volviendo al ejemplo del sistema representado por un avión en vuelo, si este es inestable y suponiendo que está volando y además está sujeto a una ráfaga de viento aleatoria, este se irá por tierra debido a su inestabilidad. Por el contrario, si el sistema es estable y esta sujeto a la misma ráfaga de viento, se podrán contrarrestar los efectos que cause y así seguir su vuelo normal, es decir con ráfaga de viento o sin ella el avión vuela igual, por lo tanto es asintóticamente estable.

Según lo anterior podemos decir que un sistema lineal es estable cuando el aplicársele una entrada limitada (que puede ser una perturbación o una entrada de cualquier otro tipo, pero ambas limitadas) produce o tiene una salida limitada (el que sea limitada implica que tenga un valor máximo que sea menor a infinito o que no tienda a infinito conforme transcurre el tiempo). Como estamos hablando de un sistema lineal, en realidad no importa la magnitud de la perturbación. Por otro lado todo sistema de control tiene una representación matemática, entonces es necesario conocer cuando un sistema es estable desde el punto de vista matemático.

1.4. LA ESTABILIDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA MATEMATICO

Un sistema lineal invariante con el tiempo teniendo una sola variable de entrada $x(t)$ y una sola variable de salida $y(t)$, como se dijo anteriormente puede ser representado por

una ecuación diferencial lineal ordinaria de la forma:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

donde $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$, $j=0,1,\dots,m$, $m \leq n$

La ecuación anterior puede ser transformada al dominio de Laplace de la forma siguiente, suponiendo condiciones iniciales nulas:

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

donde $X(s)$ y $Y(s)$ son las transformadas de Laplace de la entrada y salida respectivamente. Factorizando y arreglando la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.1)$$

Por otro lado tenemos que en un sistema lineal invariante con el tiempo, la relación entre la entrada y la salida para condiciones iniciales nulas está dada por la integral de convolución de la forma:

$$y(t) = \int_0^t f(t-\sigma) x(\sigma) d\sigma$$

donde $F(t)$ es el patrón de peso del sistema, es decir, la respuesta a impulso en el dominio del tiempo. Es necesario hacer uso de la integral de convolución porque a través de ella se conoce la salida del sistema.

La transformada de Laplace de la integral de convolución para condiciones iniciales nulas es:

$$Y(s) = F(s)X(s) \quad (1.2)$$

donde la ec. (1.2) se obtuvo al aplicar el teorema de convolución real. De (1.2) se tiene:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s) \quad (1.3)$$

igualando las ecuaciones (1.1) y (1.3) tenemos

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.4)$$

que representa la función de transferencia del sistema, siendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Como se definió anteriormente, un sistema con una entrada y una salida es estable si:

$$x(t) \leq N < \infty \text{ para } t > 0 \text{ entonces } y(t) \leq M < \infty \text{ para } t > 0 \quad (1.5)$$

en donde N y M son dos constantes reales cualesquiera menores que infinito, es decir que las funciones de entrada $x(t)$ y de salida $y(t)$ deben ser funciones acotadas.

Primeramente analizaremos que comportamiento deberá tener un sistema lineal invariante con el tiempo en general cuando se le aplica una entrada impulso para que este sea asintóticamente estable, a continuación analizaremos el comportamiento para finalmente generalizarlo para cualquier tipo de entrada.

De la ecuación (1.2) tenemos que si $x(t)=\delta(t)$ implica que $X(s)=1$ por lo que (1.2) se convierte en:

$$Y(s)=F(s)$$

entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$y(t)=f(t)$$

por lo que $f(t)$ es la respuesta a impulso, como se había mencionado anteriormente.

Supongamos que un sistema está en reposo, con condiciones iniciales nulas, en un estado de equilibrio cero; entonces introducimos una función impulso que tiene una duración que tiende a cero. Después de ese pequeño instante de tiempo en el que fue aplicada la entrada impulso, el sistema tendrá las mismas condiciones que tenía antes de aplicar el impulso, por lo que si es asintóticamente estable, este deberá retornar al estado de equilibrio cero, es decir la respuesta impulso se deberá hacer cero.

Como la ecuación (1.4) es la función de transferencia, al transformarla al dominio del tiempo representa la respuesta a impulso del sistema, entonces nos conviene saber que características debe tener la función de transferencia para que cuando se transforme al dominio del tiempo (no olvidar que la función de transferencia al transformarla al dominio del tiempo nos representa la respuesta a impulso) esta tienda a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

Como se observa en la misma ecuación (1.4), la función de transferencia para sistemas lineales invariantes con el tiempo, es una relación de polinomios, lo que implica que se pueden expresar como el producto de sus raíces, de la forma siguiente:

$$F(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (1.6)$$

donde z_1, z_2, \dots, z_m son los ceros de la función de transferencia y son los valores para los que la función $F(s)$ se hace cero, y p_1, p_2, \dots, p_n son los polos de la misma y además son los valores de s para los cuales la función $F(s)$ se hace infinita.

En un sistema lineal invariante con el tiempo práctico $n \geq m$ por lo tanto según la ecuación (1.6), $F(s)$ es una función racional propia de s ; para transformarla al dominio del tiempo debemos expandirla en fracciones parciales cuyos deno

minadores involucran las raíces del polinomio del denominador. El polinomio del denominador igualado a cero se le llama ecuación característica.

Los polos pueden ser reales o complejos. Supongamos primero que la función de transferencia tiene un polo real $s=\alpha$ de multiplicidad q (o sea $(s-\alpha)^q$ donde α es real y $q \geq 1$) entonces una parte de la expansión en fracciones parciales será:

$$\frac{K_1}{s-\alpha} + \frac{K_2}{(s-\alpha)^2} + \dots + \frac{K_q}{(s-\alpha)^q} = \sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r}{(s-\alpha)^r} \right]$$

y la transformada inversa de Laplace es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r}{(s-\alpha)^r} \right] \right\} = \sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r t^{r-1}}{(r-1)!} \right] e^{\alpha t} \quad (1.7)$$

los demás polos harán contribuciones similares.

Ahora, si la función de transferencia tiene un polo complejo también de multiplicidad q (o sea $(s-(\alpha+i\beta))^q$ y $q \geq 1$) entonces la parte del desarrollo en fracciones parciales correspondientes a este polo complejo será:

$$\frac{K_1}{s-(\alpha+i\beta)} + \frac{K_2}{(s-(\alpha+i\beta))^2} + \dots + \frac{K_q}{(s-(\alpha+i\beta))^q} = \sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r}{(s-(\alpha+i\beta))^r} \right]$$

y la transformada inversa de Laplace es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r}{(s - (\alpha + i\beta))^r} \right] \right\} = \sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r t^{r-1}}{(r-1)!} \right] e^{(\alpha + i\beta)t} \quad (1.8)$$

Una característica de un polinomio es que si tiene una raíz compleja entonces el complejo conjugado del número también será raíz de este, por lo que la respuesta e impulso también tendrá la siguiente componente:

$$\sum_{r=1}^q \left[\frac{K_r^* t^{r-1}}{(r-1)!} \right] e^{(\alpha - i\beta)t} \quad (1.9)$$

donde K_r^* es la constante compleja conjugada correspondiente a K_r .

Sumando (1.8) y (1.9), dado que son componentes que aparecerán en la respuesta impulso en caso de que haya un polo complejo, se puede hacer la siguiente reducción:

$$\sum_{r=1}^q \left[\frac{(K_r e^{i\beta t} + K_r^* e^{-i\beta t}) t^{r-1}}{(r-1)!} \right] e^{\alpha t} = \sum_{r=1}^q \left[\frac{2\rho_r t^{r-1} \cos(\beta t + \psi_r)}{(r-1)!} \right] e^{\alpha t} \quad (1.10)$$

donde $K_r = \rho_r e^{i\psi_r}$.

Los demas polos harán contribuciones similares. De (1.7) y (1.10) se observa que para que la respuesta e impulso tienda a cero conforme el tiempo tiende a infinito (condición de estabilidad asintótica) es necesario y suficiente que $\alpha < 0$, es decir que los polos reales y la parte real de los polos

complejos sean negativos, de lo contrario el sistema es inestable.

Si ahora consideramos que la entrada que se le aplica al sistema no es un impulso sino una entrada cualquiera, entonces sustituyendo (1.6) en (1.2) tendremos:

$$Y(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} X(s) \quad (1.11)$$

si deseamos encontrar la respuesta a cualquier entrada tendremos que transformar dicha entrada al dominio de Laplace y sustituirla en la ecuación (1.11), para encontrar la salida en el dominio del tiempo tendremos que desarrollar en fracciones parciales el producto de la función de transferencia por la transformada de Laplace de la entrada, como indica la expresión (1.11), al desarrollarla, si la entrada es acotada no introduce factores en el denominador con parte real positiva, por lo que se puede concluir que la estabilidad de un sistema no depende de sus entradas sino de su función de transferencia. En otras palabras, un sistema lineal invariante con el tiempo es asintóticamente estable si y solo si los polos de su función de transferencia se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Con la última conclusión se puede cuestionar que sucedería si uno o unos polos están localizados exactamente en el límite entre la estabilidad y la inestabilidad, es decir so-

bre el eje imaginario; esto lo resolveremos analizando (1.10) en donde $\alpha=0$ para que algún polo complejo se encuentre en el eje imaginario, por lo tanto esa expresión se convierte en:

$$\sum_{r=1}^q \left[\frac{2\rho_r t^{r-1} \cos(\beta t + \psi_r)}{(r-1)!} \right] \quad (1.12)$$

Si las raíces son repetidas, es decir $q>1$, el sistema es inestable debido al factor t^{r-1} que hace que la respuesta impulso se vaya a infinito conforme el tiempo tiende a infinito.

Por otra parte, si las raíces no son repetidas, es decir $q=1$ la expresión (1.12) se reduce a:

$$2\rho_r \cos(\beta t + \psi_r)$$

la cual representa un estado oscilante de amplitud $2\rho_r$ y frecuencia β y que aunque esta oscilación es estable por permanecer limitada cuando el tiempo tiende a infinito, no tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito y corresponde al límite entre comportamiento estable e inestable. Por esta razón, un sistema que no tiene polos en el semiplano derecho del plano complejo y al menos un polo no repetido está sobre el eje imaginario, se dice que es marginalmente estable, evidentemente es estable pero no asintóticamente estable.

Las deducciones hechas respecto a la relación que existe entre los polos (raíces de la ecuación característica) y la estabilidad de un sistema se resumen en la Tabla 1. Se observa en los renglones 2 y 3 y en 6 y 7 que si se tienen polos en el eje imaginario sin repetir, el sistema es marginalmente estable y con el simple hecho de que uno de ellos se repita el sistema se convierte en inestable.

1.5. METODOS PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD

Como se observó en la sección precedente, el problema de saber la estabilidad de un sistema lineal invariante con el tiempo se reduce a localizar en que parte del plano complejo están las raíces de la ecuación característica.

Por otro lado, el Ingeniero diseñador o analista está interesado en la estabilidad de un sistema desde tres puntos de vista:

- a) Cuando tiene un sistema particular, solo desea saber si es estable o no. Con esto conocerá la estabilidad absoluta.
- b) A partir de que se conoce la estabilidad absoluta, si el sistema es estable, el Ingeniero también deseará conocer que tan estable es: muy estable, medio estable, estable pero tiende a la inestabilidad, muy poco estable, etc.; en caso de que sea inestable

	LOCALIZACION DE LAS RAICES CARACTERISTICAS	RESPUESTA IMPULSO	TIPO DE ESTABILIDAD
1			Asintóticamente estable
2			Marginalmente estable
3			Inestable
4			Inestable
5			Asintóticamente estable
6			Marginalmente estable
7			Inestable
8			Inestable

TABLA I

también es deseable conocer que tan inestable es; por lo tanto, es necesario conocer la estabilidad relativa, la cuál nos dirá que tan estable o inestable es un sistema.

- c) Dado un sistema con varios parámetros ajustables; que valor o rango de valores pueden tener dichos parámetros para obtener una cierta estabilidad, sea absoluta o relativa, dependiendo de las aplicaciones a que será dirigido el sistema.

No siempre es fácil localizar las raíces de la ecuación característica, sin contar con que tal vez no obtengamos toda la información necesaria, como sería el caso de la estabilidad relativa o el ajustar un parámetro.

Existen varios métodos para determinar la estabilidad absoluta y relativa. Un método obvio podría ser analizar la respuesta a impulso o, como se dijo anteriormente, localizar exactamente la posición de las raíces de la ecuación característica, pero se hace resaltar el hecho de que esto no siempre es fácil, por esta razón se usan métodos indirectos (gráficos y/o algebraicos) en los que se necesitan pocos cálculos y que por lo demás dan la información requerida, y en forma indirecta están relacionados con la localización de los polos (raíces de la ecuación característica) en el plano complejo.

Los métodos formales que se estudiarán en el presente trabajo son: Lugar Geométrico de las Raíces y el Criterio de Estabilidad de Nyquist, que serán el objeto de estudio de los capítulos II y III respectivamente, teniendo ambos la ventaja de que además de conocer la estabilidad absoluta, también es posible conocer la estabilidad relativa y el valor o rango de valores que puede tener algún parámetro ajustable, además de las características particulares de cada método, que para su mejor comprensión serán analizadas en el capítulo correspondiente.

1.6. ESTABILIDAD EN SISTEMAS MULTIVARIABLES

La Ingeniería de Control tiene dos enfoques: el clásico y el moderno. El enfoque clásico trata a los sistemas con una sola variable de entrada y una sola variable de salida, y el enfoque moderno lo hace con una o más variables de entrada y una o más variables de salida, es decir para sistemas multivariantes.

Los métodos que se estudiarán en el presente trabajo fueron hechos para sistemas con una sola variable de entrada y una sola variable de salida, pero en virtud de que los sistemas aquí considerados son lineales e invariantes con el tiempo se hará uso de esto para poder extender dichos métodos para sistemas con varias variables tanto de entrada

como de salida (sistemas multivariables).

En la expresión (1.1) tenemos definida la función de transferencia para un sistema con una entrada y una salida. En sistemas multivariables tenemos que por lo general cada salida está en función de todas y cada una de las entradas; pues bien, en un sistema multivariable puede usarse una ecuación en el dominio de Laplace de la misma forma que la expresión (1.1) para describir la relación entre una sola entrada y una sola salida del sistema multivariable, siempre y cuando se suponga que todas las demás entradas tienen valor cero. Como el principio de superposición es válido para sistemas lineales, que son los que aquí estamos tratando, el efecto total de cualquier variable de salida, debido a la actuación simultánea de todas las entradas, puede obtenerse sumando sus efectos individuales.

Pongámos un ejemplo ilustrativo de las funciones de transferencia de un sistema multivariable lineal invariante con el tiempo, en el que se tienen dos entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y dos salidas $y_1(t)$ y $y_2(t)$. En general cualquiera de las salidas resulta afectada por la variación en ambas entradas, por lo tanto pueden escribirse las siguientes relaciones de transferencia:

$$Y_1(s) = F_{11}(s)X_1(s) + F_{12}(s)X_2(s) \quad (1.13)$$

$$Y_2(s) = F_{21}(s)X_1(s) + F_{22}(s)X_2(s) \quad (1.14)$$

donde $X_1(s)$ y $X_2(s)$ son las entradas transformadas al dominio de Laplace, y $Y_1(s)$ y $Y_2(s)$ son las salidas también transformadas al dominio de Laplace. Se supone que todas estas variables se miden desde ciertos niveles de referencia.

Como las ecuaciones (1.13) y (1.14) están escritas con la suposición de que el sistema es lineal (por lo que puede aplicarse el principio de superposición), por consiguiente $F_{11}(s)$ representa la función de transferencia entre $Y_1(s)$ y $X_1(s)$ manteniendo $X_2(s)$ en su valor de referencia, o sea $X_2(s)=0$. Pueden hacerse suposiciones parecidas para las demás funciones de transferencia.

Generalizando para un sistema lineal que tiene p entradas y q salidas, la función de transferencia entre la i -ésima salida y la j -ésima entrada se define como:

$$F_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{X_j(s)} \quad \begin{matrix} (i=1,2,\dots,q) \\ (j=1,2,\dots,p) \end{matrix} \quad (1.15)$$

y $X_k(s)=0$; $k=1,2,\dots,p$; $k \neq j$. Cabe hacer notar que la ecuación (1.15) está definida cuando solo actúa la j -ésima entrada mientras las demás se mantienen iguales a cero.

Por lo tanto, un sistema lineal invariante con el tiempo y además multivariable, se dirá que es estable si para todos los valores de i y j en la expresión (1.15), las fun-

ciones de respuesta a impulso permanente limitadas cuando el tiempo tiende a infinito. En adición a los anteriormente hecho, un sistema multivariable estable se dirá que es asintóticamente estable si todas y cada una de las funciones de respuesta a impulso tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Como en el caso de los sistemas de una sola variable tanto de entrada como de salida, un sistema multivariable que sea estable pero no asintóticamente estable se dirá que es marginalmente estable.

En otras palabras, para que un sistema multivariable sea asintóticamente estable, las raíces de la ecuación característica de las funciones de transferencia de la expresión (1.15) para todos los valores de i y j , deberán tener parte real negativa.

Ya teniendo idea de lo que es la estabilidad, ahora procederemos a estudiar dos métodos gráficos para determinarla: El Lugar Geométrico de las Raíces y El Criterio de Estabilidad de Nyquist, los que como ya se dijo, son el objeto de estudio de los capítulos II y III siguientes.

BIBLIOGRAFIA

1. PORTER, B., "Stability Criteria for Linear Dinamical Systems", Academic Press, 1a. Edición, pp. 6-30, 1967.
2. HOFFMAN, C. H., "How To Check Linear Systems Stability: I. Solving the Characteristic Equation", Control Engineering, pp. 75-80, Agosto, 1964.
3. DORF, R.C., "Modern Control Systems", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2a. Edición, pp. 127-141, 1974.
4. DISTEFANO, III, J.J., A.R. STUBBERUD e I.J. WILLIAMS, "Retroalimentación y Sistemas de Control", Mc Graw-Hill, Traducción de la 1a. Edición, pp. 87-97, 1981.
5. CANALES, R. y R. BARRERA, "Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático", Limusa, 1a. Edición, pp. 205-228, 1977.
6. KUO, B.C., "Automatic Control Systems", Prentice Hall, Inc., 3a. Edición, pp. 327-340, 1975.

CAPITULO II

PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL METODO LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES

II.1. INTRODUCCION

Como se mencionó en el capítulo anterior, el problema de determinar la estabilidad de un sistema lineal invariante con el tiempo se reduce a encontrar en que parte del plano complejo s se localizan los polos de la función de transferencia; si una función de transferencia dada tiene definidos sus polos y ceros, y éstos se localizan en el plano complejo " s ", a esa representación se le denomina patrón de polos y ceros; la observación del mismo permitirá saber si el sistema es estable o no; es decir, podremos definir su estabilidad absoluta; sin embargo, no estaremos en condiciones de conocer otras características del sistema con solo analizar esa función antes mencionada como por ejemplo el sobrepaso a alguna entrada escalón no debe rebasar algún valor prefijado, algún polo ubicado en cierta posición o intervalo predeterminado de valores, o la localización que deberán tener los polos para tener un tiempo de asentamiento específico; tal vez la elección de un parámetro en el sistema al que se le deba fijar un valor para que cumpla alguna de las características antes mencionadas, además de hacer que el sistema tenga un cierto grado de estabilidad fijado de ante

mano, etc. En general al estudiar los sistemas de control de malla cerrada se requiere poder ubicar sus polos en posiciones predeterminadas teniendo uno o más parámetros libres que deben definirse con el objeto de que tales sistemas cumplan con ciertas características.

Cuando un sistema tiene un parámetro dado debemos determinarle su valor; en ese caso, la ecuación característica se ve afectada por ese parámetro, de modo que si se le asigna un valor y se traza su patrón de polos y ceros, puede ser que la ubicación de los polos no sea la adecuada, entonces tendremos que asignar otro valor y resolver nuevamente la ecuación característica; es decir, encontrar sus raíces que permitan conocer la ubicación de sus polos y decir de este modo si está en las condiciones de estabilidad requeridas. Este procedimiento se tendría que repetir hasta encontrar el valor adecuado del parámetro que cumpla con las características de estabilidad deseada; si el grado de la ecuación característica es mayor de dos, la solución es bastante laboriosa, por las razones mencionadas no es conveniente ese procedimiento de análisis.

W. R. Evans (7) propuso un método que le llamó "Lugar de las Raíces", y consiste en graficar las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro de interés del sistema en estudio; este método es una forma muy versátil de visualizar donde estarán ubicados los polos

para cualquier valor del parámetro y poder decidir posteriormente cuál será el valor más conveniente para que el sistema se comporte de una forma deseable.

Con el advenimiento y desarrollo de las computadoras digitales ha sido posible obtener el "Lugar de las Raíces" a partir del análisis de la ecuación característica. El objetivo del presente capítulo es desarrollar un programa de computadora de tal manera que a partir de los datos tomados de la ecuación característica, el programa calculará puntos que pertenecen al lugar de las raíces, y más aún nos desplegará en pantalla la gráfica del lugar correspondiente.

II.2. CONDICIONES ELEMENTALES DEL LUGAR DE LAS RAICES Y SUS CARACTERISTICAS MAS IMPORTANTES

II.2.1. Condiciones de magnitud y ángulo

Sea el sistema de control de malla cerrada de la figura 2.1 cuya función de transferencia de malla cerrada es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s)} \quad (2.1)$$

La relación entre la señal de realimentación $B(s)$ y la señal de error actuante $E(s)$ se denomina función de trans

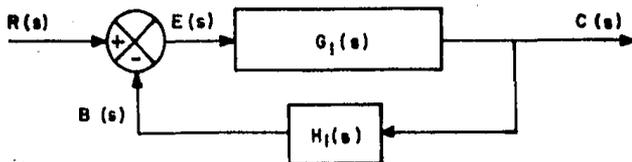


Figura 2.1 Sistema de Control de malla cerrada

ferencia de malla abierta y viene dada por:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)H_1(s) \quad (2.2)$$

La relación entre la salida $C(s)$ y la señal de error actuante $E(s)$ se denomina función de transferencia directa y viene dada por:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G_1(s) \quad (2.3)$$

Es evidente que la ecuación característica es:

$$1 + G_1(s)H_1(s) = 0 \quad (2.4)$$

Ahora si la función de transferencia de malla abierta la expresamos como;

$$G_1(s)H_1(s) = KG(s)H(s) \quad (2.5)$$

entonces la ecuación característica es:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (2.6)$$

en donde K es un parámetro variable que fluctúa entre $-\infty < K < \infty$. Por lo general la ecuación característica con un parámetro variable viene dado de la forma siguiente, no olvidando que se trata de un sistema lineal invariante con el tiempo:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

por lo tanto la función de transferencia de malla abierta será:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.4) también se puede escribir como:

$$G_1(s)H_1(s) = -1 \quad (2.8)$$

o como:

$$KG(s)H(s) = -1 \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) también se puede escribir de la siguiente manera:

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

ahora si la descomponemos en parte real y parte imaginaria tendremos:

$$\operatorname{Re} [G(s)H(s)] = -\frac{1}{K}$$

$$\operatorname{Im} [G(s)H(s)] = 0$$

Si ahora procedemos a escribirla en forma polar tendremos que encontrar una magnitud y un ángulo que serán:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|K|} \quad (2.10)$$

$$\angle G(s)H(s) = n\pi \quad (2.11)$$

donde:

$$n = \begin{cases} \underline{+1}, \underline{+3}, \underline{+5}, \dots & \text{para } K \geq 0 \\ \underline{0}, \underline{+2}, \underline{+4}, \dots & \text{para } K \leq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Y así mediante las ecuaciones (2.10) y (2.11) tenemos las condiciones de magnitud y ángulo respectivamente que debe cumplir el lugar de las raíces.

Es conveniente mencionar que el lugar de las raíces es en realidad un conjunto de puntos que se producen al obtener las raíces de la ecuación característica e ir las graficando en el plano complejo para diferentes valores del parámetro K (ver ecuación (2.6)) para así describir el lugar geométrico.

Si se construye el lugar de las raíces cuando $0 \leq K < \infty$ se le llama "Lugar Geométrico Positivo" y si se construye para $-\infty < K \leq 0$ se le llama "Lugar Geométrico Negativo".

II.2.2. Variación de Múltiples parámetros

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) describen las condiciones que debe cumplir el lugar de las raíces para cuando varía un solo parámetro, no obstante en sistemas de control a menudo deben estudiarse los efectos producidos por la variación de varios parámetros.

El principio de como atacar el problema se observa considerando que primeramente tenemos dos parámetros que varían en un sistema de control. Lo que se procede a hacer es a considerar que a un parámetro se le van asignar valores de modo que para cada valor de éste, se construye el lugar de las raíces como si el otro parámetro fuera el único existente.

Cuando se tienen más de dos parámetros se lleva a cabo un procedimiento similar.

II.3. SISTEMAS CON RETARDO DE TIEMPO

Un sistema de control con retardo de tiempo se puede considerar cuando al estar sensando una variable, el sensor tiene un tiempo de respuesta que produce el retardo de la

señal un tiempo T , es decir hay un tiempo entre la acción y la reacción al cambio de la variable medida. Esta demora en detectar el cambio, produce también una demora en la acción de control, que es la que recibe el nombre de retardo de tiempo. Con lo anteriormente mencionado, es evidente que en la salida repercutirá dicha demora, de tal suerte que si la salida era:

$$y(t)=w(t)$$

con el retardo de tiempo ésta se convertirá en:

$$y(t)=w(t-T)$$

donde T representa el retardo de tiempo, y la transformada de Laplace para esta función es:

$$\mathcal{L}\{w(t-T)\} = \int_{-T}^{\infty} w(t-T)e^{-st} dt$$

si se efectúa un cambio de variable de integración $r=t-T$ tendremos:

$$\mathcal{L}\{w(t-T)\} = \int_{-T}^{\infty} w(r)e^{-s(r+T)} dr$$

ya que:

$$dt=dr ; t=r+T$$

como $w(r)=0$ para $r \leq 0$ entonces el límite inferior de la integral se cambia de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{w(t-T)\} = e^{-sT} \int_0^{\infty} w(r) e^{-sr} dr$$

$$\mathcal{L}\{w(t-T)\} = e^{-sT} W(s)$$

por lo tanto:

$$Y(s) = e^{-sT} W(s)$$

Como el retardo de tiempo sucede ya sea en la planta o en la realimentación, entonces la ecuación (2.7) vendrá dada por:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m)e^{-sT}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.13)$$

ecuación que representa la función de transferencia de malla abierta con un retardo de tiempo. Considerando la ecuación (2.5) con un retardo de tiempo tendremos:

$$G(s)H(s) = \frac{(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m)e^{-sT}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.14)$$

Entonces cuando se tenga un sistema con un retardo de tiempo y se usen las ecuaciones (2.10) y (2.11) para obtener el lugar de las raíces, tendremos que considerar el factor de retardo e^{-sT} .

Es conveniente mencionar que cuando se tiene un sistema con un retardo de tiempo, este deja de ser lineal, implicando que la expresión matemática que lo representa también sea no lineal, por lo que, aunque este trabajo solo se limita a sistemas lineales, aquí se hará una excepción ya que los sistemas con retardo de tiempo son de interés general y no representan un gran aumento en el grado de dificultad para obtener el lugar geométrico de las raíces, extendiendo así el método para sistemas con un retardo de tiempo.

Con todo lo anteriormente mencionado tendremos que para construir el lugar de las raíces de un sistema, lo único que haremos es ir encontrando puntos que satisfagan una de las ecuaciones (2.10) o (2.11) o ambas en el plano complejo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo: Obtener el lugar geométrico positivo para el sistema de la figura 2.2.

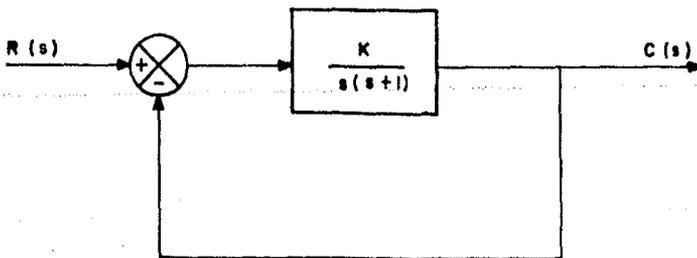


Figura 2.2 Ejemplo

La función de transferencia de malla abierta es:

$$G_1(s)H_1(s) = KG(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y la función de transferencia de malla cerrada es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2+s+K}$$

por lo tanto la ecuación característica es:

$$s^2+s+K = 0$$

la cual es equivalente a:

$$1 + \frac{K}{s(s+1)} = 1 + KG(s)H(s) = 0$$

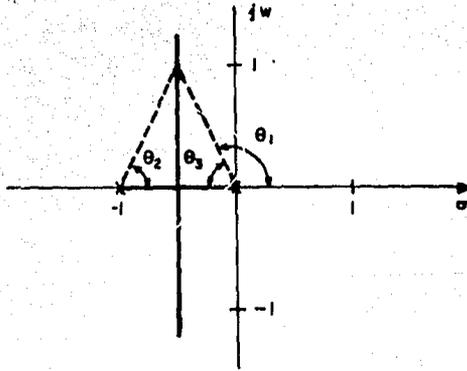
por lo tanto la condición de ángulo (expresión (2.11) que debe cumplir el sistema es:

$$\angle G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)} = 1 \quad \angle s - \angle s+1 = n\pi$$

en donde $n = \underline{-1}, \underline{+3}, \underline{+5}, \dots$ para obtener el lugar geométrico positivo (ver expresión (2.12)). Como $+\pi+3\pi=+5\pi=\dots$ entonces:

$$-\angle s - \angle s+1 = \underline{+} \pi$$

y el lugar geométrico en el plano complejo que cumple esta condición se muestra en la figura siguiente:



de la figura se observa que para que el segmento del lugar geométrico positivo esté sobre el eje real, el ángulo correspondiente a $|s|$ siempre valdrá π y el ángulo correspondiente a $|s+1|$ siempre valdrá cero, por lo tanto la suma de éstos cumple con la condición de ángulo, por otra parte tenemos que de la misma figura anterior $\theta_2 = \theta_3$, por lo tanto $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ y también cumple con la condición de ángulo, y es así como hemos obtenido el lugar geométrico positivo.

Es evidente que la búsqueda de todos los puntos en el plano complejo que pertenezcan al lugar de las raíces es una tarea bastante laboriosa, y más será si el grado del sistema aumenta, por esta razón presentamos un programa de computadora para el trazado del lugar de las raíces.

II.4. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

El problema de graficar el lugar de las raíces se reduce a encontrar las raíces de la ecuación (2.6) para los diferentes valores de K y graficarlos en el plano complejo; por lo tanto se podría pensar que una forma de obtener puntos que pertenezcan al lugar de las raíces es dándole incrementos a K y resolver la ecuación, es decir encontrar los valores que la hagan cero para el valor de K dado, el procedimiento se muestra a continuación:

Considerando los polinomios de la función de transferencia de malla abierta:

$$q(s) = s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m \quad (2.15)$$

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (2.16)$$

factorizando los polinomios $q(s)$ y $p(s)$ quedarán de la siguiente forma:

$$q(s) = (s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m) \quad (2.17)$$

$$p(s) = (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) \quad (2.18)$$

donde z_1, z_2, \dots, z_m son los ceros de la función de transferencia de malla abierta, y p_1, p_2, \dots, p_n son los polos de la misma, entonces la ecuación (2.6) la podremos escribir de la forma:

$$1 + K \frac{q(s)}{p(s)} = 0 \quad (2.19)$$

o:

$$p(s) + Kq(s) = 0 \quad (2.20)$$

si $K=0$ la ecuación (2.20) será $p(s)=0$

si $K=1$ entonces $p(s)+q(s)=0$

si $K=2$ entonces $p(s)+2q(s)=0$

si $K=3$ entonces $p(s)+3q(s)=0$

⋮

si $K=\infty$ entonces $p(s) + \infty q(s) = 0$, o $\frac{p(s)}{\infty} + q(s) = 0$, por lo que si $K=\infty$ entonces $q(s)=0$.

En este caso los incrementos de K son de uno pero podrían ser de cualquier otro valor. Del desarrollo anterior se observa que cuando $K=0$ el lugar de las raíces está ubicado en los polos y cuando $K=\infty$ se ubica en los ceros, ambos de la función de transferencia de malla abierta.

Con este procedimiento para obtener el lugar de las raíces se presenta el problema de como hacer para que la computadora tome valores de K hasta infinito, además de que existen casos en que conforme K tiende a infinito, el lugar de las raíces también lo hace, o casos en que tenderá a algún cero, esto se ve claramente en la figura 2.3, en donde

por convención los polos se marcan con "X" y los ceros con "O" ambos de la función de transferencia de malla abierta.

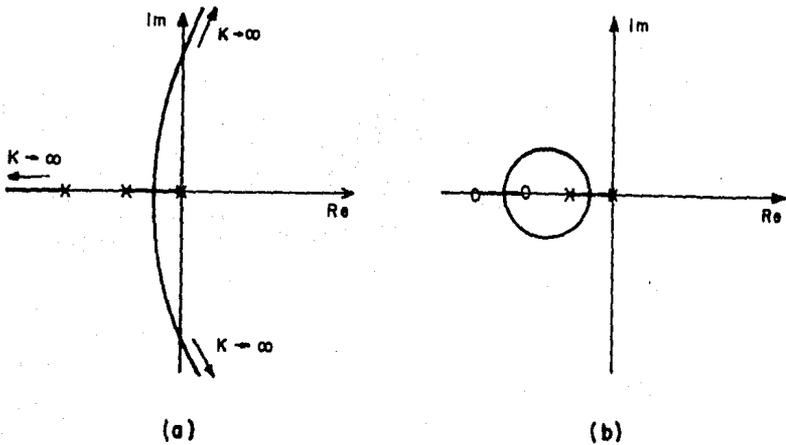


Figura 2.3 Lugar de las Raíces

En la figura 2.3(a) conforme K tiende a infinito también lo hace el lugar de las raíces debido a que no hay ceros de malla abierta, y se considera que estos se encuentran en el infinito; en la figura 2.3(b) conforme K tiende a infinito, el lugar de las raíces tiende a los ceros de malla abierta, y en una área pequeña el parámetro K habrá variado de cero a infinito, por lo tanto no es muy conveniente el uso de este procedimiento, ya que como se mencionó anteriormente, no se pueden dar valores muy grandes a K .

Otro algoritmo a utilizar podría también ser el hacer

un cuadrículado en el área del plano complejo que se desea observar el lugar de las raíces, y cada punto de la cuadrícula ver si cumple alguna de las condiciones de las ecuaciones (2.10) o (2.11), si la cumple se toma como un punto del lugar y pasa al siguiente punto, si no la cumple entonces también pasa al siguiente punto pero sin considerar que el punto pertenece al lugar, hasta analizar todos los puntos de la cuadrícula. Las desventajas de utilizar este otro algoritmo radican en que por un lado se pierde tiempo buscando el lugar de las raíces en áreas donde no está ubicado, y por otro lado que si el lugar siempre pasa cerca de los puntos de la cuadrícula, pero nunca por ellos, entonces una de dos, o nunca encuentra el lugar de las raíces o se deja un margen de error considerable para que cuando pase cerca de un punto analizado, lo tome como punto que pertenece al lugar, esto sin considerar que distancia habrá entre puntos de la cuadrícula, lo que aumenta los problemas.

En virtud de lo expuesto anteriormente, se ha empleado el algoritmo desarrollado por Raymond H. Ash y Gerald R. Ash (3) el cuál calcula y traza el lugar de las raíces de un sistema lineal con un retardo de tiempo dentro de una área especificada del plano complejo, y este se explica en lo que resta de la presente sección en donde se podrán observar las ventajas respecto a los dos algoritmos

anteriormente mencionados, y también será el que se utilice para desarrollar el programa de computadora.

El algoritmo consiste en que a partir de que se conoce un punto s_0 del lugar de las raíces (ver fig. 2.4) se debe encontrar el ángulo θ_1 de tal manera que haya otro

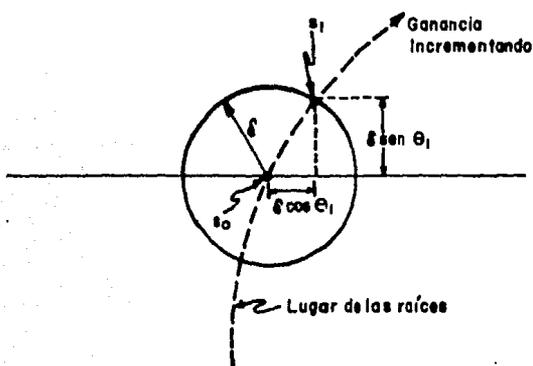


Figura 2.4 Concepto básico del algoritmo

punto del lugar de las raíces a una distancia δ preespecificada, o sea si $S_0 = X_0 + iY_0$ es el punto inicial, entonces $S_1 = (X_1 + \delta \cos \theta_1) + i(Y_0 + \delta \sin \theta_1)$ será el siguiente punto encontrado y ahora pasará a ser el nuevo punto conocido para volver a encontrar el nuevo ángulo que localiza otro punto del lugar a la misma distancia δ , este procedimiento se continúa hasta encontrar el lugar de las raíces en el área deseada. Debe notarse que δ es constante, por lo tanto este algoritmo encuentra puntos del lugar a una misma distancia δ

no importando la dirección que siga. El algoritmo solo calcula puntos en la dirección del incremento de ganancia, y se considerará que siempre el número de polos será mayor o igual al de ceros, ambos de la función de transferencia de malla abierta.

Al lugar de las raíces que empieza en un polo y termina en un cero se le llama rama, y como se considera que hay más polos que ceros, entonces el número de ramas es igual al número de polos.

El procedimiento requiere de un punto conocido, y el lugar de las raíces, como se observó anteriormente, empieza en los polos de malla abierta y estos son conocidos, entonces el algoritmo empezará a calcular puntos del lugar de las raíces iniciando en los polos de malla abierta (si éstos están ubicados dentro del área que se desea ver el lugar), y terminan ya sea en los ceros de malla abierta o en donde las ramas dejan el área deseada.

Algunos puntos del lugar geométrico son muy especiales, por ejemplo un punto silla es aquel en donde se unen las ramas, y estos se localizan exactamente, en estos casos se modifica la distancia entre puntos calculados, también en puntos donde termina el lugar se modifica el paso δ .

Comenzaremos a explicar formalmente el algoritmo substituyendo (2.17) y (2.18) en (2.19), por lo que tendremos:

$$1+K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = 0 \quad (2.21)$$

si aumentamos un retardo de tiempo tendremos (ver expresión (2.14)):

$$1+K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)e^{-sT}}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = 0 \quad (2.22)$$

por lo tanto, considerando las ecuaciones (2.10) y (2.11) ahora se convertirán en:

$$\frac{|s-z_1||s-z_2|\dots|s-z_m|e^{-sT}}{|s-p_1||s-p_2|\dots|s-p_n|} = \frac{1}{|K|} \quad (2.23)$$

$$\underbrace{|s-z_1| + |s-z_2| + \dots + |s-z_m|}_{\underbrace{|s-p_n|}} + \underbrace{|e^{-sT}|}_{\underbrace{|s-p_1| + \dots + |s-p_n|}} = n\pi \quad (2.24)$$

donde n se sigue definiendo según (2.12).

Como s , z_j y p_j son números complejos, entonces $s=X+iY$, $z_j=ZR_j+iZI_j$ y $p_j=PR_j+iPI_j$, donde X , ZR_j y PR_j son las partes reales y Y , ZI_j y PI_j son las partes imaginarias de s , z_j y p_j respectivamente, y la ecuación (2.24) ahora será:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-ZI_j}{X-ZR_j} + \dots + \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-ZI_m}{X-ZR_m} + e^{-sT} - \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-PI_1}{X-PR_1} + \dots \right. \\ \left. + \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-PI_n}{X-PR_n} \right] = n\pi \end{aligned} \quad (2.25)$$

como:

$$\underline{e^{-sT}} = \underline{e^{-(X+iY)T}} = \underline{e^{-XT} e^{-iYT}} = \underline{e^{-XT} (\cos YT - i \operatorname{sen} YT)}$$

$$\underline{e^{-sT}} = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-\operatorname{sen} YT}{\cos YT} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{tg}(-YT)$$

$$\underline{e^{-sT}} = -TY$$

con lo anterior, la ecuación (2.25) vendrá dada por:

$$\sum_{j=1}^m \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-ZI_j}{X-ZR_j} - \sum_{j=1}^n \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-PI_j}{X-PR_j} - TY = n\pi \quad (2.26)$$

Si definimos la función:

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^m \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-ZI_j}{X-ZR_j} - \sum_{j=1}^n \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y-PI_j}{X-PR_j} - TY - n\pi = 0 \quad (2.27)$$

donde si $s_0 = X_0 + iY_0$ es un punto del lugar de las raíces, entonces $f(X_0, Y_0) = 0$.

Considerando la figura 2.5 si definimos la función

ARCTAN (X, Y) como:

$$\text{ARCTAN}(x, y) = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } x \geq 0 \\ \theta_1 + \pi & \text{si } x < 0, y > 0 \\ \theta_1 - \pi & \text{si } x < 0, y \leq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (2.27a)$$

donde:

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

entonces la ecuación (2.27) la podremos escribir de la manera siguiente:

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^m \text{ARCTAN}(X-ZR_j, Y-ZI_j) - \sum_{j=1}^n \text{ARCTAN}(X-PR_j, Y-PI_j) - T\gamma - n\pi = 0 \quad (2.28)$$

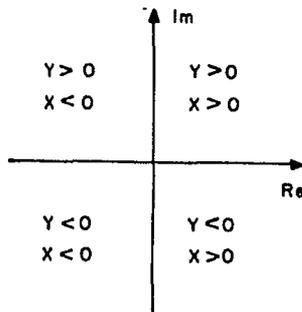


Figura 2.5 Signos en los cuadrantes

El algoritmo consta básicamente de los siguientes pasos:

1) Cálculo de la pendiente del ángulo θ_1 a partir de $s_0 = X_0 + iY_0$ en la dirección de ganancia incrementando usando

el método iterativo de Newton-Raphson.

2) Cálculo de $f(s_1)$ donde $s_1 = X_1 + iY_1 = s_0 + \delta (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$

3) Si $f(s_1) > \epsilon$, donde ϵ es una tolerancia de error que la llamaremos exactitud, entonces calcula una corrección del ángulo θ_1 también mediante el método de Newton-Raphson hasta que $f(s_1) \leq \epsilon$, a la corrección del ángulo se le llamará $\Delta\theta_1$ por lo tanto el ángulo que hace $f(s_1) \leq \epsilon$ será $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta_1$. Los pasos 2) y 3) se repetirán las veces necesarias hasta que $f(s_1) \leq \epsilon$.

II.4.1. Cálculo de la pendiente del ángulo θ_1

Sea la figura 2.6 en donde $s_0 = X_0 + iY_0$ es un punto conocido del lugar de las raíces y $s_1 = (X_0 + \Delta X) + i(Y_0 + \Delta Y)$ es un punto desconocido cercano a s_0 a una distancia δ . Se desea encontrar el ángulo θ_1 de tal manera que en esta dirección y a una distancia δ de s_0 se encuentre un punto del lugar de las raíces que en este caso es s_1 de tal suerte que $f(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$ si es que efectivamente s_1 es un punto del lugar.

Como se observa de la misma figura 2.6 $\Delta s = s_1 - s_0 = \Delta X + i\Delta Y = \delta \cos \theta_1 + i\delta \operatorname{sen} \theta_1$.

Expandiendo $f(X, Y)$ alrededor de $s_0 = X_0 + iY_0$ en serie de

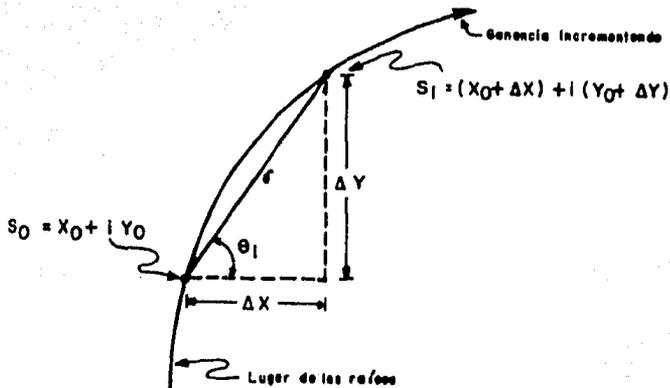


Figura 2.6 Obtención del ángulo θ_1

Taylor para ΔX y ΔY pequeños, tendremos lo siguiente:

$$f(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) = f(X_0, Y_0) + f_x(X_0, Y_0)\Delta X + f_y(X_0, Y_0)\Delta Y + \frac{1}{2!} [\Delta X^2 f_{xx}(X_0, Y_0) + 2\Delta X\Delta Y f_{xy}(X_0, Y_0) + \Delta Y^2 f_{yy}(X_0, Y_0)] + \dots \quad (2.29)$$

Como los incrementos de X y Y son muy pequeños, entonces se pueden despreciar del cuarto término en adelante de la serie por estar los incrementos elevados a una potencia, o multiplicándose entre sí, lo cuál hace despreciable dichos términos, por lo tanto la ecuación (2.29) quedará así:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y \quad (2.30)$$

Como se está considerando que s_0 y s_1 son puntos pertenecientes al lugar de las raíces, entonces $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) = 0$, entonces sustituyendo ésto en (2.30) tendremos:

$$f_x(x_0, y_0) \Delta x - f_y(x_0, y_0) \Delta y = 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \quad (2.31)$$

como:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.32)$$

igualando (2.31) y (2.32):

$$\operatorname{tg} \theta_1 = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \quad (2.33)$$

considerando la función definida en la expresión (2.27a):

$$\theta_1(x_0, y_0) = \operatorname{ARCTAN} [-f_y(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0)] \quad (2.34)$$

y la ecuación (2.34) nos dará el ángulo deseado, en donde el signo nos dará el ángulo en la dirección de la ganancia en aumento, ya que un signo contrario nos dará el ángulo en dirección de magnitud de la ganancia decreciendo. f_x y

f_y se obtienen directamente derivando parcialmente respecto a X y Y la ecuación (2.28) como sigue:

$$f_x(X_o, Y_o) = - \sum_{j=1}^m \frac{(Y_o - ZI_j)}{(X_o - ZR_j)^2 + (Y_o - ZI_j)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(Y_o - PI_j)}{(X_o - PR_j)^2 + (Y_o - PI_j)^2} \quad (2.35)$$

$$f_y(x_o, r_o) = \sum_{j=1}^m \frac{(X_o - ZR_j)}{(X_o - ZR_j)^2 + (R_o - ZI_j)^2} - \sum_{j=1}^n \frac{(X_o - PR_j)}{(X_o - PR_j)^2 + (Y_o - PI_j)^2} \quad (2.36)$$

II.4.2. Corrección del ángulo θ_1

Como se mencionó anteriormente, y debido a las aproximaciones a las que se recurre para obtener el ángulo θ_1 , hay ocasiones en que el cálculo respectivo no hace que $f(s_1) = 0$, o como se mencionaba, $f(s_1) \leq \epsilon$ por lo que será necesario hacer una corrección al ángulo, de tal manera que se cumpla dicha condición, es decir habrá que obligar al ángulo para que al calcular la función $f(X, Y)$ en el punto s_1 esté dentro de la exactitud ϵ deseada.

Si definimos $g(\theta_1) = f(X_o + \delta \cos \theta_1, Y_o + \delta \sin \theta_1)$ y suponemos que $g(\theta_1) = b \neq 0$, entonces encontraremos un $\Delta\theta$ tal que $g(\theta_1 + \Delta\theta) = 0$, expandiendo en serie de Taylor la función g alrededor de θ_1 y despreciando los términos de alto orden obtendremos lo siguiente:

$$g(\theta_1 + \Delta\theta) = g(\theta_1) + g_{\theta}(\theta_1) \Delta\theta \quad (2.37)$$

como se desea obtener un $\Delta\theta$ tal que $g(\theta_1+\Delta\theta)=0$ entonces sus
tituyendo ésto en (2.37) tendremos:

$$g(\theta_1) + g_{\theta}(\theta_1)\Delta\theta = 0$$

despejando $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = -\frac{g(\theta_1)}{g_{\theta}(\theta_1)} = -\frac{b}{g_{\theta}(\theta_1)} \quad (2.38)$$

para obtener $g_{\theta}(\theta_1)$ se aplica la regla de la cadena:

$$g_{\theta}(\theta_1) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} \right|_{\theta_1} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta_1}$$

como:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\delta \operatorname{sen}\theta_1$$

y:

$$\frac{dy}{d\theta} = \delta \operatorname{cos}\theta_1$$

entonces:

$$g_{\theta}(\theta_1) = -f_x(X_0 + \delta \operatorname{cos}\theta_1, Y_0 + \delta \operatorname{sen}\theta_1) \cdot \delta \operatorname{sen}\theta_1 + f_y(X_0 + \delta \operatorname{cos}\theta_1, Y_0 + \delta \operatorname{sen}\theta_1) \cdot \delta \operatorname{cos}\theta_1$$

donde f_x y f_y se obtienen mediante las ecuaciones (2.35) y (2.36) evaluadas en el punto $(X_0 + \delta \operatorname{cos}\theta_1, Y_0 + \delta \operatorname{sen}\theta_1)$.

II.4.3. Localización y cálculo de los puntos silla

Un punto silla en el lugar de las raíces corresponde a una raíz múltiple o repetida de la ecuación característica. La figura 2.7 muestra un ejemplo típico de dos ramas que se unen en un punto, el que corresponde a la raíz múltiple, y

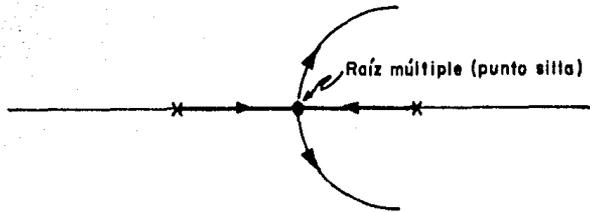


Figura 2.7 Punto silla sobre el eje real del plano complejo

luego se separan en direcciones contrarias; en este caso el punto silla representa la unión de dos ramas, mientras que la figura 2.8 representa la unión de cuatro, es decir corresponden a una raíz doble y a una cuádruple.

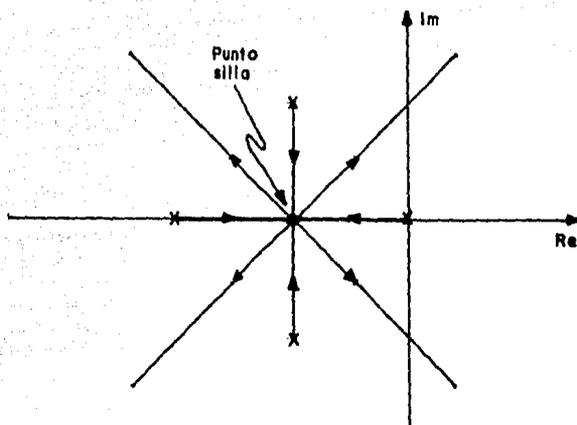


Figura 2.8 Punto silla de cuatro ramas

En la figura 2.7 las ramas forman entre si un ángulo de 90° y en la figura 2.8 forman un ángulo de 45° , en general si n ramas llegan o salen a un punto silla, entonces formarán entre si ángulos de $180^\circ/n$.

En el ejemplo siguiente se ilustra lo que es un punto silla para su mejor entendimiento:

Supongamos que se desea obtener el lugar de las raíces de la siguiente función de transferencia de malla abierta de un sistema de control:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}$$

entonces:

$$1 + \frac{K(s+1)}{s^2} = 0$$

que representa la ecuación característica, y también puede escribirse:

$$s^2 + Ks + K = 0$$

si $K=4$ entonces:

$$s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2 = 0$$

es decir, habrá raíces repetidas en el punto $(-2,0)$ para cuando $K=4$ y esto implica que en el lugar geométrico positivo (ya que $K>0$) se unirán las ramas en ese punto.

Cuando se calculan los puntos pertenecientes al lugar de las raíces mediante el algoritmo propuesto, hay que tomar en cuenta que cuando el último punto calculado se encuentra cerca de un punto silla s_c (ver figura 2.9), entonces habrá una diferencia mayor de $\pi/4$ entre el ángulo calculado para s_0 y el calculado para s_1 , por lo tanto cuando se encuentre esta diferencia entre ángulos de dos puntos contiguos, implica que se ha localizado un punto silla, por lo que se debe hacer es reducir el paso δ dividiéndolo entre un factor de 4, esto se hará hasta 4 veces, con lo cuál el paso se reducirá hasta un valor $\delta/256$, obteniendo

la ventaja de situar el punto s_0 lo más cerca posible del punto silla s_t , para después usar la rutina que se explica a continuación para calcular exactamente el punto silla.

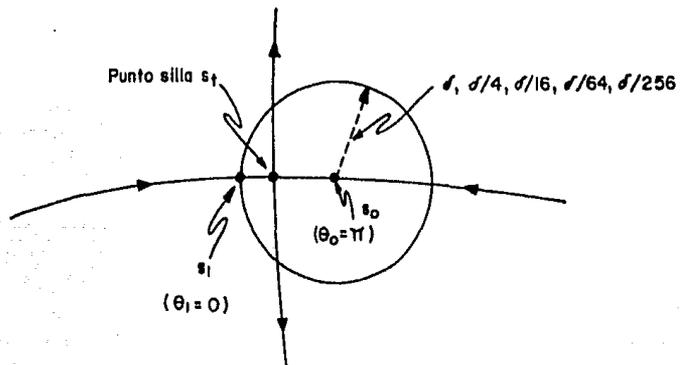


Figura 2.9 Detección del punto silla

En general, y considerando que hay una raíz repetida o múltiple de orden 1 en el punto s_t para cuando $K=K_t$, entonces tendremos que la ecuación (2.20) ahora es:

$$p(s) + K_t q(s) = (s - s_t)^1 f(s) = 0 \quad (2.40)$$

en donde $1 \geq 2$.

Si derivamos la expresión (2.40) respecto a s y la evaluamos en el punto silla, tendremos lo siguiente:

$$\left. \frac{dp(s)}{ds} + K_t \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = 1(s-s_t)^{l-1} f(s) \left|_{s=s_t} - (s-s_t)^l \left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = 0$$

por lo tanto, el punto silla s_t debe satisfacer las dos condiciones siguientes:

$$p(s_t) + K_t q(s_t) = 0 \quad (2.41)$$

$$\left. \frac{dp(s)}{ds} + K_t \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = 0 \quad (2.42)$$

de la ecuación (2.41) tenemos que:

$$K_t = -\frac{p(s_t)}{q(s_t)} \quad (2.43)$$

sustituyendo (2.43) en (2.42):

$$\left. \frac{dp(s)}{ds} - \frac{p(s_t)}{q(s_t)} \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = 0$$

la cuál es equivalente a:

$$q(s) \left. \frac{dp(s)}{ds} \right|_{s=s_t} - p(s) \left. \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = 0 \quad (2.44)$$

por otro lado si consideramos las ecuaciones (2.19) y (2.6)

tenemos que:

$$G(s)H(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

y si obtenemos la derivada de $G(s)H(s)$ respecto a s tendremos:

$$\frac{dG(s)H(s)}{ds} = q(s) \frac{dp(s)}{ds} - p(s) \frac{dq(s)}{ds} \quad (2.45)$$

si evaluamos (2.45) para el punto silla s_t :

$$\left. \frac{dG(s)H(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = q(s) \left. \frac{dp(s)}{ds} \right|_{s=s_t} - p(s) \left. \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_t} \quad (2.46)$$

comparando (2.46) y (2.44) observamos que es la misma ecuación y podemos escribir que:

$$\left. \frac{dG(s)H(s)}{ds} \right|_{s=s_t} = 0 \quad (2.47)$$

por lo tanto podemos concluir que el valor de s_t en donde existen raíces múltiples en el lugar de las raíces, debe cumplir la ecuación (2.47).

Es importante señalar que la ecuación (2.47) es una condición necesaria más no suficiente, es decir que no todas las soluciones de dicha ecuación serán puntos silla ya

que para que lo sean deberán también satisfacer la ecuación (2.6).

La importancia de la ecuación (2.47) radica en que a través de ella es posible encontrar los puntos silla.

$G(s)H(s)$ está desglosado en magnitud y ángulo en las ecuaciones (2.10) y (2.11), y ambas son funciones de $s=X+iY$ que es una variable compleja. La ecuación (2.28) es la función ángulo, que a su vez es función de dos variables, por lo tanto la condición para la que existen raíces múltiples equivalente a la ecuación (2.47) es:

$$f_x(X_t, Y_t) = f_y(X_t, Y_t) = 0 \quad (2.48)$$

asumiendo que la raíz múltiple se encuentra en $s_t = X_t + iY_t$.

Interpretando la ecuación (2.47), nos dice que la variación de $G(s)H(s)$ respecto a s debe ser cero, por otra parte no hay que olvidar que s es una variable compleja en función de X y Y , entonces la variación de la función ángulo respecto a X y Y también deberá ser cero, como indica la expresión (2.48). En realidad a la ecuación (2.28) para que sea la función ángulo, habrá que quitarle el término $n\pi$ solo que éste se anula al efectuar las derivadas parciales indicadas en (2.48) y no afecta para nada.

Si ahora definimos el vector función $h(X, Y)$ como

$$h(X, Y) = \begin{bmatrix} f_x(X, Y) \\ f_y(X, Y) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

y tomamos un punto $s_0 = X_0 + iY_0$ cercano a un punto silla (asumiendo previamente una reducción del paso hasta $\delta/256$, como se dijo con anterioridad, de modo que s_0 quede lo más cercano posible del punto silla) dado que s_0 solo está próximo al punto silla, entonces $h(X_0, Y_0) \neq 0$; deseamos encontrar un $\Delta s = \Delta X + i \Delta Y$ tal que localicemos el punto silla, por lo tanto:

$$h(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) = \begin{bmatrix} f_x(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) \\ f_y(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

expandiendo en series de Taylor la ecuación (2.50) y despreciando los términos de alto orden tendremos:

$$\begin{bmatrix} f_x(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) \\ f_y(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(X_0, Y_0) \\ f_y(X_0, Y_0) \end{bmatrix} + \Delta X \begin{bmatrix} f_{xx}(X_0, Y_0) \\ f_{xy}(X_0, Y_0) \end{bmatrix} + \Delta Y \begin{bmatrix} f_{xy}(X_0, Y_0) \\ f_{yy}(X_0, Y_0) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

la ecuación (2.51) es equivalente al siguiente par de ecuaciones:

$$f_x(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) = f_x(X_0, Y_0) + \Delta X f_{xx}(X_0, Y_0) + \Delta Y f_{xy}(X_0, Y_0) \quad (2.52)$$

$$f_y(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) = f_y(X_0, Y_0) + \Delta X f_{xy}(X_0, Y_0) + \Delta Y f_{yy}(X_0, Y_0) \quad (2.53)$$

como se trata de un punto silla, entonces:

$$f_x(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) = 0 \quad (2.54)$$

$$f_y(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y) = 0 \quad (2.55)$$

sustituyendo (2.54) y (2.55) en (2.52) y (2.53) respectivamente, y reacomodándolas tendremos:

$$\Delta X f_{xx}(X_0, Y_0) + \Delta Y f_{xy}(X_0, Y_0) = -f_x(X_0, Y_0) \quad (2.56)$$

$$\Delta X f_{xy}(X_0, Y_0) + \Delta Y f_{yy}(X_0, Y_0) = -f_y(X_0, Y_0) \quad (2.57)$$

Evaluando f_{xx} , f_{xy} y f_{yy} de las ecuaciones (2.35) y (2.36) tendremos:

$$f_{xx}(X_0, Y_0) = \sum_{i=1}^m \frac{2(X_0 - ZR_j)(Y_0 - ZI_j)}{[(X_0 - ZR_j)^2 + (Y_0 - ZI_j)^2]^2} - \sum_{j=1}^n \frac{2(X_0 - PR_j)(Y_0 - PI_j)}{[(X_0 - PR_j)^2 + (Y_0 - PI_j)^2]^2} \quad (2.58)$$

$$f_{yy}(X_0, Y_0) = -f_{xx}(X_0, Y_0) \quad (2.59)$$

$$f_{xy}(X_0, Y_0) = - \sum_{j=1}^m \frac{(X_0 - ZR_j)^2 - (Y_0 - ZI_j)^2}{[(X_0 - ZR_j)^2 + (Y_0 - ZI_j)^2]^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(X_0 - PR_j)^2 - (Y_0 - PI_j)^2}{[(X_0 - PR_j)^2 + (Y_0 - PI_j)^2]^2} \quad (2.60)$$

Considerando las ecuaciones (2.35), (2.36), (2.58), (2.59) y (2.60) tenemos que las ecuaciones (2.56) y (2.57) son un sistema de ecuaciones simultáneas en donde las dos incógnitas son los incrementos que deseamos saber, por lo tanto resolviendo el sistema por medio de determinantes te ne mos:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \quad (2.61)$$

sustituyendo (2.59) en (2.61):

$$|\Delta| = -f_{xx} - f_{xy} \quad (2.62)$$

$$\Delta X = \frac{\begin{vmatrix} -f_x & f_{xy} \\ -f_y & f_{yy} \end{vmatrix}}{|\Delta|} = \frac{-f_x f_{yy} + f_{xy} f_y}{-f_{xx}^2 - f_{xy}^2} \quad (2.63)$$

sustituyendo (2.59) en (2.63):

$$\Delta X = \frac{-f_x f_{xx} - f_y f_{xy}}{f_{xx}^2 + f_{xy}^2} \quad (2.64)$$

por otro lado:

$$\Delta Y = \frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & -f_x \\ f_{xy} & -f_y \end{vmatrix}}{|\Delta|} = \frac{-f_{xx} f_y + f_{xy} f_x}{-f_{xx}^2 - f_{xy}^2} \quad (2.65)$$

eliminando signos tendremos lo siguiente:

$$\Delta Y = \frac{f_y f_{xx} - f_{xy} f_x}{f_{xx}^2 + f_{xy}^2} \quad (2.66)$$

y así, mediante las ecuaciones (2.64) y (2.66) obtenemos los incrementos para X y Y necesarios para obtener la posi-

ción de un punto silla cercano a s_0 .

A partir de que se ha encontrado exactamente un punto silla debemos seguir calculando puntos del lugar de las raíces en la dirección de la ganancia en incremento y además debemos obtener una correspondencia única entre ramas que llegan y ramas que parten de un punto silla, para que cuando se esté calculando una rama y llegue al punto silla, no continúe sobre una rama que haya sido calculada. Anteriormente se mencionaba que si n ramas llegan o dejan un punto silla, entonces las ramas formarán un ángulo de π/n radianes entre sí. Como no se sabe de antemano cuantas ramas llegan o salen de un punto silla, el procedimiento a seguir es tomar puntos de prueba a una distancia de $\delta/25$ (ver figura 2.10) con ángulos de $\phi_k = \pi/k$ ($k=1,2,3,\dots$) hasta encontrar

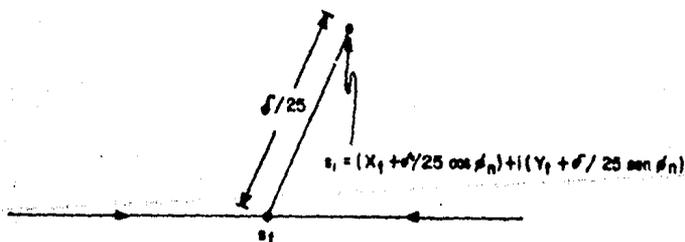


Figura 2.10 Angulo de continuación de un punto silla

el ángulo de continuación. Es necesario notar que cuando k tome el valor del número de ramas que llegan o dejan el punto silla, o sea $k=n$, ese será el valor del ángulo de continuación ϕ_n tal que $f(X_t + \delta/25 \cos \phi_n, Y_t + \delta/25 \sin \phi_n)$ se junto con la condición de que el ángulo se calcula en la dirección de magnitud de la ganancia incrementando; la diferencia entre el ángulo ϕ_n y el siguiente ángulo calculado θ_1 es menor que 0.5 radianes, en este caso la diferencia es menor ya que ϕ_n tendrá exactamente el valor del ángulo de continuación. De esta manera se logra una única correspondencia entre ramas entrando y ramas dejando un punto silla, evitando que una rama al llegar a un punto silla siga el camino de una rama ya calculada.

II.5. PROGRAMA PARA EL LUGAR DE LAS RAICES

Una vez que se tiene el algoritmo, lo que se procede a hacer es a desarrollar un programa de computadora que calcule cada uno de los puntos del lugar de las raíces de sistema deseado para que después los despliegue en la pantalla y así poder visualizarlo.

El programa está desarrollado en lenguaje BASIC, el cuál es muy fácil de manejar, además no requiere de formatos para la entrada y salida de datos, en pocas palabras es un lenguaje sencillo de entender y muy versátil, además

de lo fácil que es programar con el y de poder adaptarse a las necesidades del algoritmo desarrollado anteriormente.

Para entender este programa no se necesita de conocimientos muy profundos sobre computación, ni se necesita ser un experto en programación, ya que con el solo hecho de tener algunas bases, será fácil su comprensión.

El programa fue desarrollado empleando una microcomputadora Apple II plus de 64 K de memoria, y el programa que se hará en esta sección, utiliza las instrucciones y comandos de esta computadora.

El programa es desarrollar en la forma clásica de manejo de programas en lenguaje BASIC, es decir el usuario del programa está conversando con la computadora.

También es conveniente mencionar que el programa calcula el lugar de las raíces para un sistema de control con un solo retardo de tiempo, y cualquier número de polos, siendo el número de polos de malla abierta mayor o igual al número de ceros, también se malla abierta, en si el número de polos lo limita la capacidad de memoria de la computadora.

Por otro lado conviene dejar establecido el significado convencional de las figuras geométricas que entrarán en la formación de diagramas de flujo. Un resumen de estas figuras y su significado se muestran en la figura 2.11.

Para que la computadora empiece a calcular puntos del lugar de las raíces, lo que necesita en memoria en primer término, son los datos introducidos mediante las variables (ver el diagrama de flujo que introduce datos en la fig. (2.12):

FG - Factor de ganancia (es una constante que frecuentemente aparece multiplicando el parámetro K , que por lo general vale la unidad).

NZ - Número de ceros distintos

NP - Número de polos distintos

T - Retraso de tiempo del sistema

En BASIC no existe la opción de manejar directamente variables complejas, entonces se ve la necesidad de separar las partes real e imaginaria de los números complejos en

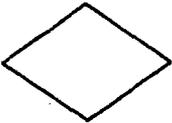
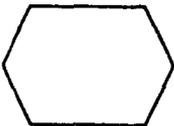
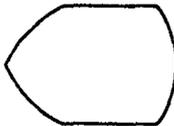
FIGURA	SIGNIFICADO
	Llamado de subrutinas e inicio y fin de programas
	Entrada de datos
	Operación algebraica
	Decisiones
	Conector
	Conector de cambio de página
	Operación repetitiva o cíclica
	Salida de información en pantalla

Figura 2.11 Figuras geométricas empleadas en los diagramas de flujo

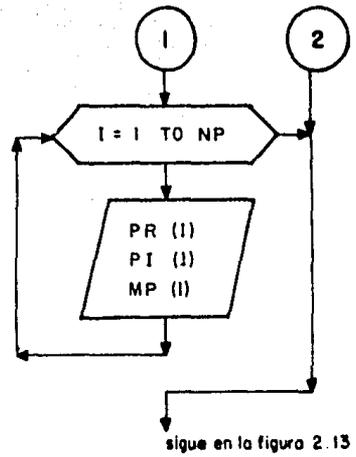
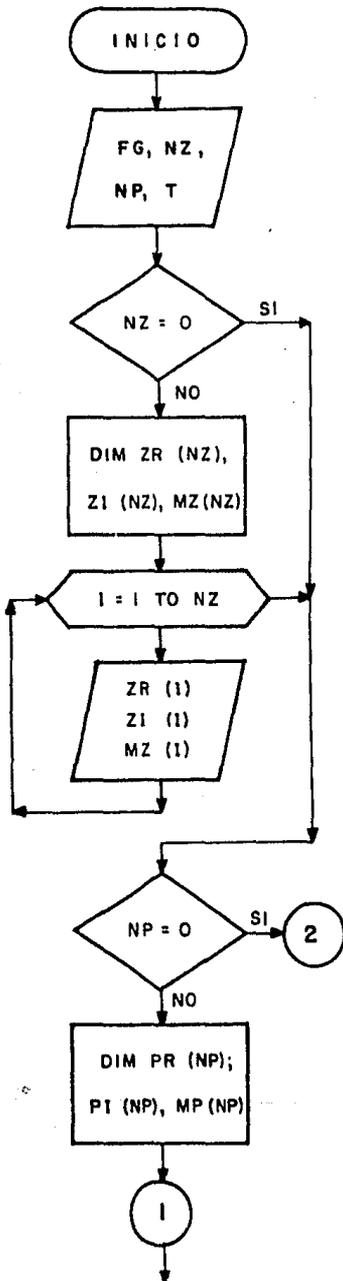


Figura 2.12 Introducción de datos

diferentes arreglos de variables, como se muestra a continuación:

ZR(I) - Parte real de ceros de malla abierta ($1 \leq I \leq NZ$).

ZI(I) - Parte imaginaria de ceros de malla abierta
($1 \leq I \leq NZ$).

MZ(I) - Multiplicidad de ceros de malla abierta. Por ejemplo si el tercer cero es $(s+2)^2$ entonces $ZR(3) = -2$, $ZI(3)=0$ y $MZ(3)=2$ por estar elevado al cuadrado ($1 \leq I \leq NZ$).

PR(I) - Parte real de polos de malla abierta ($1 \leq I \leq NP$).

PI(I) - Parte imaginaria de polos de malla abierta
($1 \leq I \leq NP$).

MP (I) - Multiplicidad de polos de malla abierta.

Después de volver a visualizar en la pantalla los valores que tiene en memoria cada una de las variables, se da la opción de modificar cualquier variable en caso necesario, esto se muestra en el diagrama de flujo de la figura 2.13(a).

Es necesario considerar que si se introduce un polo o cero complejo, el conjugado también debe introducirse, por otra parte, como se verá, es conveniente que se introduzcan en forma adyacente, o sea uno después del otro, por lo tanto el segmento de diagrama de flujo que comprueba esto se

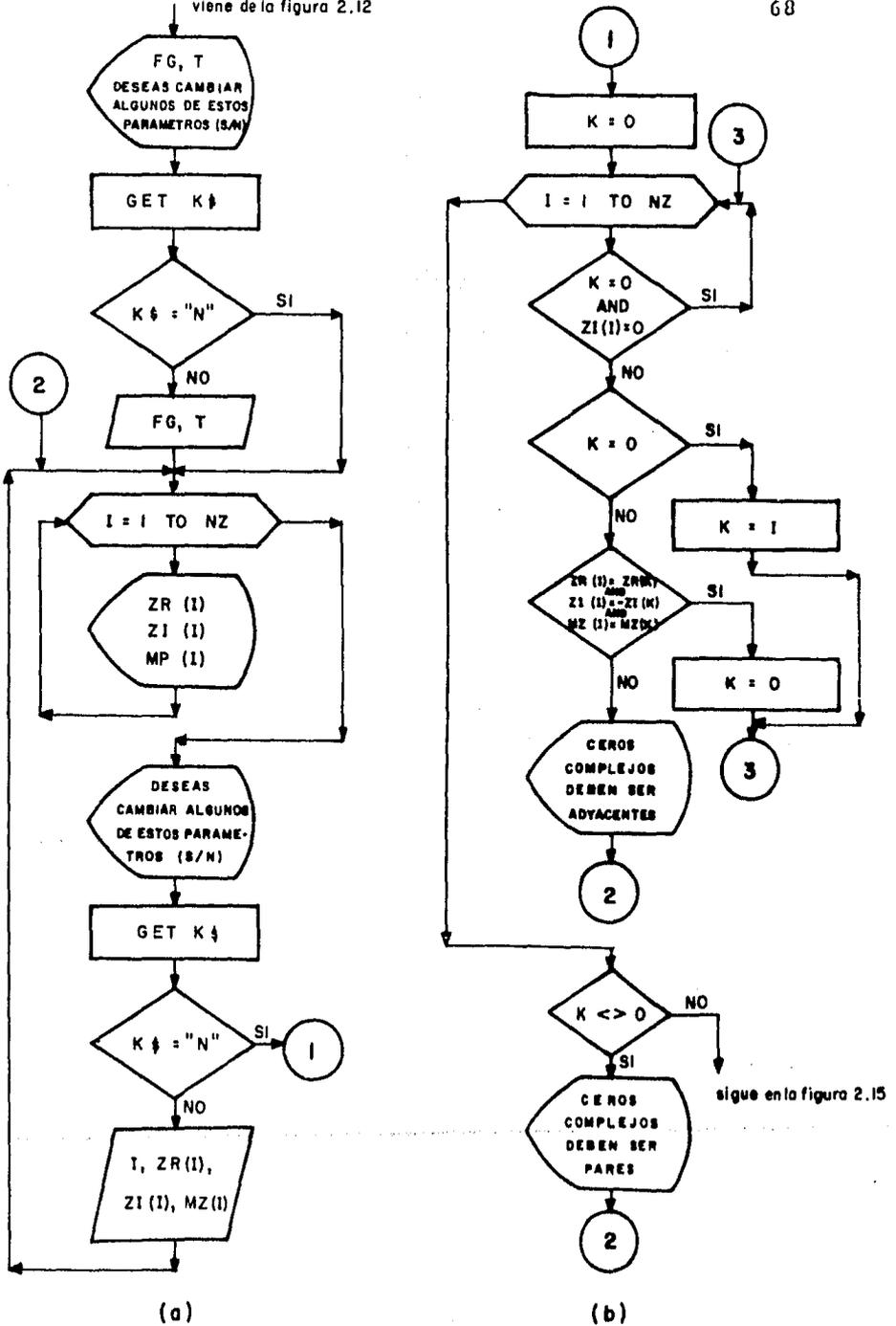


Figura 2.13 Comprobación

muestra en la figura 2.13(b), en la que observamos como comprobar que los ceros conjugados sean introducidos uno después de otro, el diagrama de flujo para comprobar un polo no aparece aquí, pero se lleva a cabo un procedimiento similar.

Definimos el número π por la variable que llamaremos $FD=3.141592655$, y las siguientes variables a cero:

$BP\%$ - Variable que verifica (cuando $BP\%=1$) si el punto que se está estudiando es un punto silla.

$S\%$ - Variable que indica que cuando se calcula la ganancia K correspondiente a un punto cualquiera es mayor que alguna ganancia KI que nos interese, es decir, si $KI > K$ entonces $S\%=1$.

$P\%$ - Variable que verifica si el punto que se está calculando es un polo o cero, cuando esto sucede $P\%=1$.

La operación de estas tres variables se entenderá mejor cuando se haga uso de ellas.

En el arreglo $A(200,2)$ se almacenarán los valores de la ganancia, parte real y parte imaginaria que corresponden a $A(L,0)$, $A(L,1)$ y $A(L,2)$ en donde a L le daremos el rango de $0 \leq L \leq 200$, por lo que habrá que dimensionar esta variable.

El programa irá calculando rama por rama del lugar geométrico ya sea positivo o negativo, según se desee, y empezará, como se dijo anteriormente, en los polos de malla abierta, en el orden en que se introdujeron, por lo que habrá que definir (además de dimensionar la variable A) las variables:

RT - La cual si $RT=1$ indica que deseamos se calcule el lugar geométrico positivo, y si $RT=-1$ entonces el lugar geométrico será negativo.

ST - El paso, o sea la distancia δ de la que ya se habló.

El - Exactitud.

KI - Indicador para un punto de prueba de cuantas veces se está haciendo la corrección del ángulo $\Delta\theta$.

KI - Como ya se sabe, el algoritmo calcula puntos a una distancia δ sin importar que ganancia tenga cada punto calculado, y podrá haber ocasiones en que se desee calcular el punto exactamente para alguna ganancia deseada, por lo que en esta variable se almacenará tal ganancia, solo en caso de que así se quiera. Hay que tomar en cuenta que el signo de la ganancia debe ir de acuerdo con el lugar que se desee, sea positivo o negativo, por tanto también hay que verificar tal condición.

D- es la distancia, en magnitud, del origen a cualquiera de los semiejes del área, en el plano complejo, que se desea observar el lugar de las raíces (ver figura 2.14), en la pantalla de la computadora.

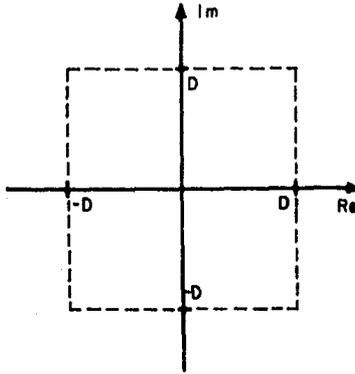


Figura 2.14 La variable D

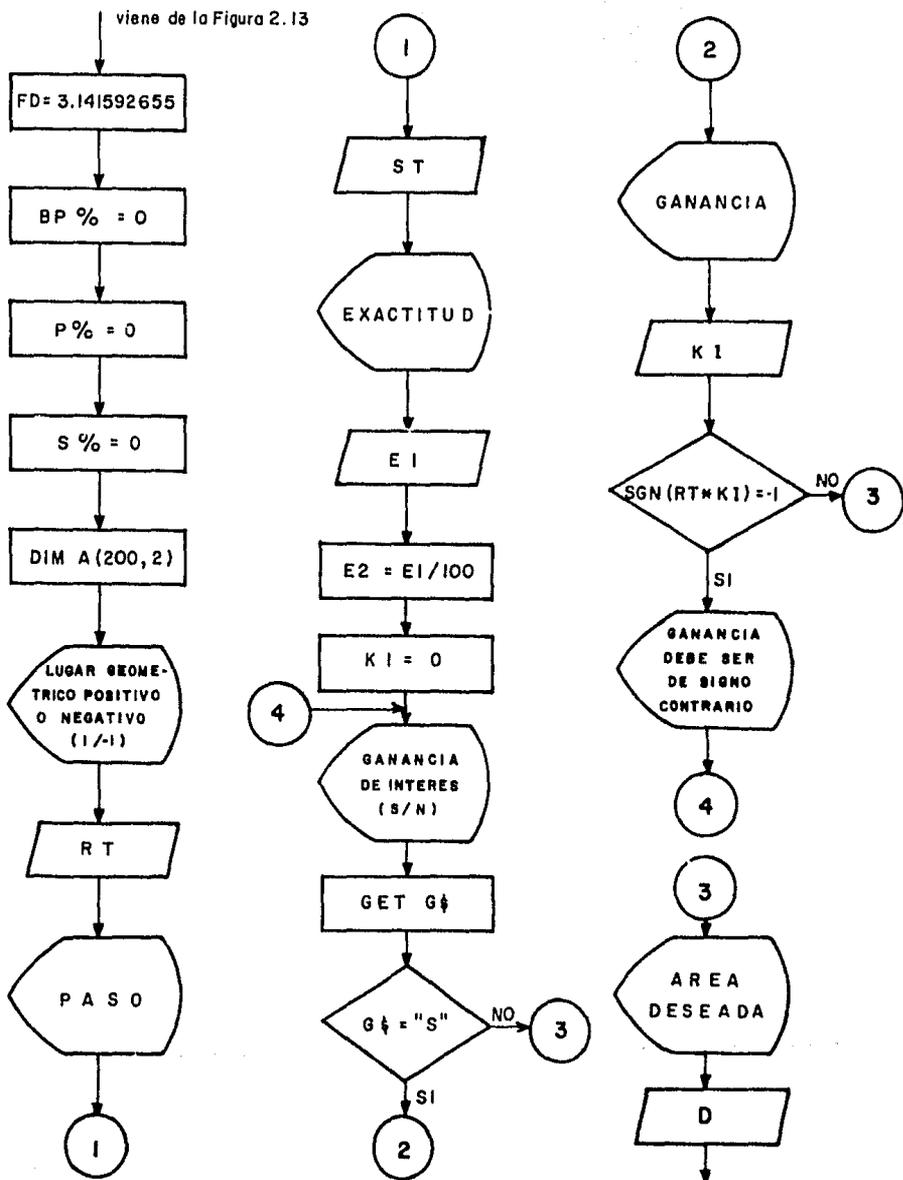
El diagrama de flujo de la figura 2.15 expresa desde la definición de la variable FD hasta lo último mencionado.

Ahora si se puede empezar el cálculo de puntos del lugar de las raíces para el cuál:

J- Es la variable que nos dice que se está calculando la J-ésima rama.

L- Esta variable nos indica el L-ésimo punto de la rama del lugar de las raíces que se esté calculando.

Los primeros valores conocidos de la J-ésima rama serán:



sigue en la Figura 2.16

Figura 2.15 Diagrama de Flujo

$$A(0,0)=0$$

$$A(0,1)=PR(J)$$

$$A(0,2)=PI(J)$$

en los que, como se observa, $L=0$.

El ángulo con el que empezaremos a calcular los puntos es el ángulo de partida de los polos, que se calcula de la forma siguiente:

Considerando la ecuación (2.26), la que como se recordará, es la condición de ángulo que debe cumplir cualquier punto que pertenezca al lugar de las raíces, y que repetiremos a continuación, separando las sumatorias:

$$\operatorname{tg} \frac{-1 Y-ZI_1}{X-ZR_1} + \dots + \operatorname{tg} \frac{-1 Y-ZI_m}{X-ZR_m} - \left(\operatorname{tg} \frac{-1 Y-PI}{X-PR_1} + \dots + \frac{Y-PI_m}{X-PR_m} \right) - TY = n\pi \quad (2.67)$$

donde n se sigue definiendo según (2.12). Si de la ecuación (2.67) cada ángulo le llamamos respectivamente:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m - (\beta_1 + \dots + \beta_n) - TY = n\pi$$

y deseamos saber el valor del ángulo al punto s_0 de tal manera que la distancia entre este punto y el j -ésimo polo tienda a cero, entonces el ángulo encontrado será el valor del ángulo de salida del j -ésimo polo será:

$$\beta_j = n\pi + [\alpha_1 + \dots + \alpha_m - (\beta_1 + \dots + \beta_{j-1} + \beta_{j+1} + \dots + \beta_n) - TY] \quad (2.68)$$

si el j -ésimo polo tiene multiplicidad r , entonces el ángulo β_j deberá aparecer r veces o estar afectado por el factor r , y la ecuación (2.68) se modifica como sigue:

$$\beta_j = \frac{n\pi + |(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - (\beta_1 + \dots + \beta_{j-1} + \beta_{j+1} + \dots + \beta_n) - \tau Y)|}{r} \quad (2.69)$$

Ahora definamos la función F_1 considerando la ecuación (2.28) como sigue:

$$F_1 = \sum_{j=1}^m \text{ARCTAN}(X - ZR_j, Y - ZI_j) - \sum_{j=1}^n \text{ARCTAN}(X - PR_j, Y - PI_j) - \tau Y \quad (2.70)$$

si comparamos la ecuación (2.28) y la (2.70) notaremos que falta el término $n\pi$ que define si se trata del lugar geométrico positivo o negativo a través de n , como se definió en (2.12), y este término puede ser sustituido por:

$$\text{Lugar Geométrico} \begin{cases} \text{Positivo} - (2k+1)\pi & \text{para } n=1, 3, 5, \dots \\ & \text{para } k=0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{Negativo} - 2k\pi = n\pi & \text{para } n=0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.71)$$

por lo tanto a la ecuación (2.70) le faltaría aumentarle el término correspondiente de la ecuación (2.71) para que fuera igual a la ecuación (2.28), según el lugar geométrico que se desee, pero resulta que para todos los valores de k los ángulos que resulten al sumarle el término correspondiente según el lugar en cuestión de la expresión (2.71) a la (2.70) serán los mismos, por lo tanto por facilidad se toma que $k=0$ y

la expresión (2.71) ahora es:

$$\text{Lugar Geométrico} \begin{cases} \text{Positivo} - n\pi = \pi \text{ rad.} \\ \text{Negativo} - n\pi = 0 \text{ rad} \end{cases} \quad (2.72)$$

y entonces podemos concluir que si se desea comprobar que un punto pertenece al lugar geométrico positivo, entonces la función F_1 de la expresión (2.70) habrá que sumarle π radianes y esta deberá valer cero si es que dicho punto realmente pertenece al lugar, y si pertenece al lugar geométrico negativo entonces directamente la función F_1 deberá valer cero, todo esto basado en (2.72) por lo que:

$$F = \begin{cases} F_1 + \pi & \text{para el lugar geométrico positivo} \\ F_1 & \text{para el lugar geométrico negativo} \end{cases} \quad (2.73)$$

Si sustituimos (2.73) en (2.69) tendremos:

$$\beta_j = \frac{F}{r} \quad (2.74)$$

pero solo valdrá para cuando $k=0$ ya que aunque $k=0,1,2,\dots$ el ángulo F_1 sigue siendo el mismo ya que solo se le están sumando 2π radianes (razón por la que se dedujo (2.73)) al dividirlo entre r ya no son iguales todos los ángulos para β_j , por lo que habrá que encontrar que agregarle a (2.74) para que sea válido para todos los valores de k y así poder saber los diferentes valores de ángulos que podrá tomar β_j .

Si el j -ésimo polo tiene multiplicidad 1 y se desea obtener el lugar de las raíces, el ángulo de inicio de cada rama será:

$$\beta_j = \frac{F}{1}$$

para cualquier valor de k , y todos los ángulos para $k=0,1,2,\dots$ son iguales.

Si ahora tiene multiplicidad 2:

$$\beta_j = \frac{F}{2} \text{ para } k=0$$

$$\beta_j = \frac{F+2\pi}{2} = \frac{F}{2} + \pi \text{ para } k=1$$

$$\beta_j = \frac{F+4\pi}{2} = \frac{F}{2} + 2\pi \text{ para } k=2$$

$$\beta_j = \frac{F+6\pi}{2} = \frac{F}{2} + 3\pi \text{ para } k=3$$

⋮

se observa que para $k=0,2,4,\dots$ es un ángulo de partida y para $k=1,3,5,\dots$ es otro, es decir habrá dos valores de ángulo de inicio o partida del lugar de las raíces y es algo lógico porque existen dos polos en ese punto.

Si el mismo j -ésimo polo tiene multiplicidad 3:

$$\beta_j = \frac{F}{3} \text{ para } k=0$$

$$\beta_j = \frac{F+2\pi}{3} = \frac{F}{3} + \frac{2}{3} \pi \text{ para } k=1$$

$$\beta_j = \frac{F+4\pi}{3} = \frac{F}{3} + \frac{4}{3} \pi \text{ para } k=2$$

$$\beta_j = \frac{F+6\pi}{3} = \frac{F}{3} + 2 \pi \text{ para } k=3$$

$$\beta_j = \frac{F+8\pi}{3} = \frac{F}{3} + \frac{8}{3} \pi = \frac{F}{3} + \frac{2}{3} \pi + 2\pi \text{ para } k=4$$

⋮

entonces para $k=0,3,6,9,\dots$ hay un ángulo, para $k=1,4,7,10,\dots$ hay otro ángulo y por último para $k=2,5,8,11,\dots$ habrá otro ángulo más, o sea en total tres ángulos diferentes de partida o inicio del lugar de las raíces correspondientes a los tres polos ubicados en el mismo punto.

Siguiendo la misma secuencia, si hay 6 polos ubicados en un solo punto, entonces deberá haber 6 diferentes ángulos de β_j y serán:

$$\beta_j = \frac{F+h2\pi}{6} \text{ donde } h=0,1,2,3,4,5$$

y si hay r polos ubicados en un solo punto, entonces:

$$\beta_j = \frac{F+h2\pi}{r} \text{ donde } h=0,1,2,\dots, r-1 \quad (2.75)$$

y así, mediante la ecuación (2.75) obtendremos los r ángulos

los de inicio del lugar de las raíces (positivo o negativo) para un polo de multiplicidad r .

En la figura 2.16 está el segmento de diagrama de flujo desde que se define la primer rama ($J=1$) hasta lo último mencionado, en el cuál:

SA- Angulo en cuya dirección se encuentra un punto perteneciente al lugar de las raíces a una distancia δ . Cuando comienza la rama j toma el valor del ángulo de inicio de dicha rama, por lo tanto $SA = \beta_j$.

MP(J)- Multiplicidad de J-ésimo polo (es equivalente a r).

F- Condición de ángulo la cual se calculará en una subrutina de este nombre para un punto (X_o, Y_o) , corresponde a la expresión (2.73).

Estas tres últimas variables se usan para definir el ángulo de comienzo para un polo de multiplicidad r , definido en la ecuación (2.75), y como se observa, comparando el diagrama de flujo con la ecuación antes mencionada, $h = II = MP(J) - 1$; por lo tanto cuando $h = II = 0$ será el último ángulo posible para el polo múltiple en cuestión y así pasar al siguiente polo, por consiguiente $II = MP(J) - 1, MP(J) - 2, \dots, 2, 1, 0$.

Teniendo el ángulo SA, es necesario normalizarlo, es

decir obtener el ángulo equivalente en el rango $-\pi \leq SA \leq \pi$ y esto se hará a través de la subrutina NORMALIZA ANGULO que será explicada posteriormente. Es conveniente mencionar que en la explicación del programa principal solo se hará mención de las subrutinas que utiliza, así como de los valores que de ellas se obtienen y en que variables se encuentran almacenados, posteriormente se explicará cada subrutina con el nombre que se le dió en el programa principal.

Con el punto y el ángulo de salida se calcula el siguiente punto, según la figura 2.4 como sigue:

$$XO = A(L, 1) + SS * \cos(SA)$$

$$YO = A(L, 2) + SS * \sin(SA)$$

como anteriormente ya se había puesto $L=0$, entonces la rama comenzará en el primer polo introducido, como ya se había dicho.

A partir de aquí se empieza a calcular los puntos encontrando primero el ángulo SA , y en lo que resta del programa se utilizan las ideas expuestas en la descripción del algoritmo, considerando las siguientes variables:

$$X = f_x(XO, YO)$$

$$Y = f_y(XO, YO)$$

$$XX=f_{xx}(Y0,Y0)$$

$$YY=f_{yy}(X0,Y0)$$

$$XY=f_{xy}(X0,Y0)$$

DA- Incremento del ángulo dado por la ecuación (2.38), esto se visualiza en la figura 2.17, en la que aclararemos los siguientes detalles para su mejor entendimiento:

a) Al calcular el punto exacto correspondiente a la ganancia de interés, se modifica el paso a través de una interpolación, esto se hace para encontrar exactamente el punto que corresponde a la ganancia de interés.

b) Cuando el programa sale a GRAFICACION es que ha terminado el cálculo de una rama y ahora se deberán graficar los puntos obtenidos. En caso de que se quiera calcular otra rama, entonces el programa pasará al diagrama de flujo de la figura 2.18 para después regresarse a la figura 2.16 y comenzar de nuevo la secuencia expuesta anteriormente.

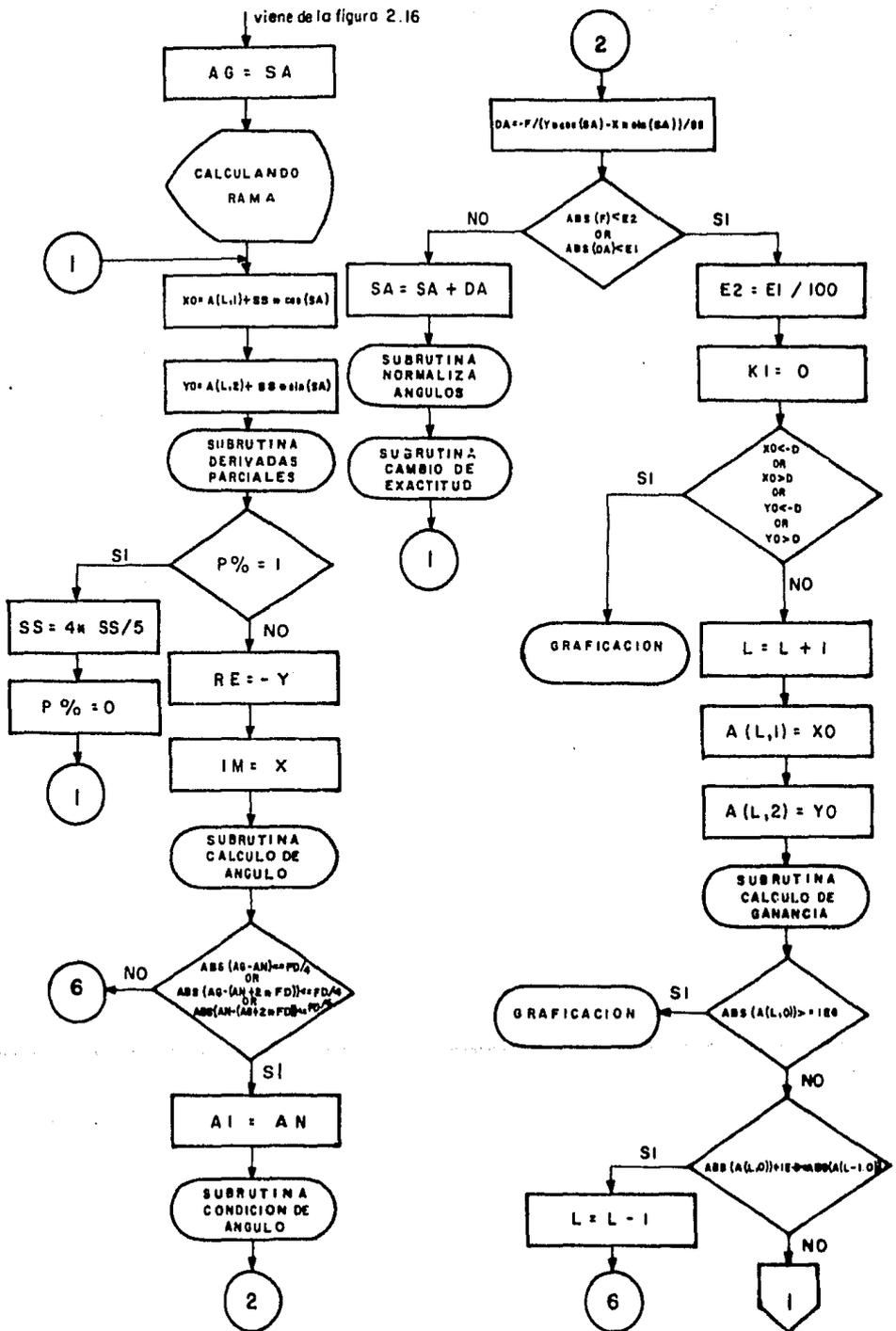


Figura 2.17 Diagrama de flujo del Algoritmo

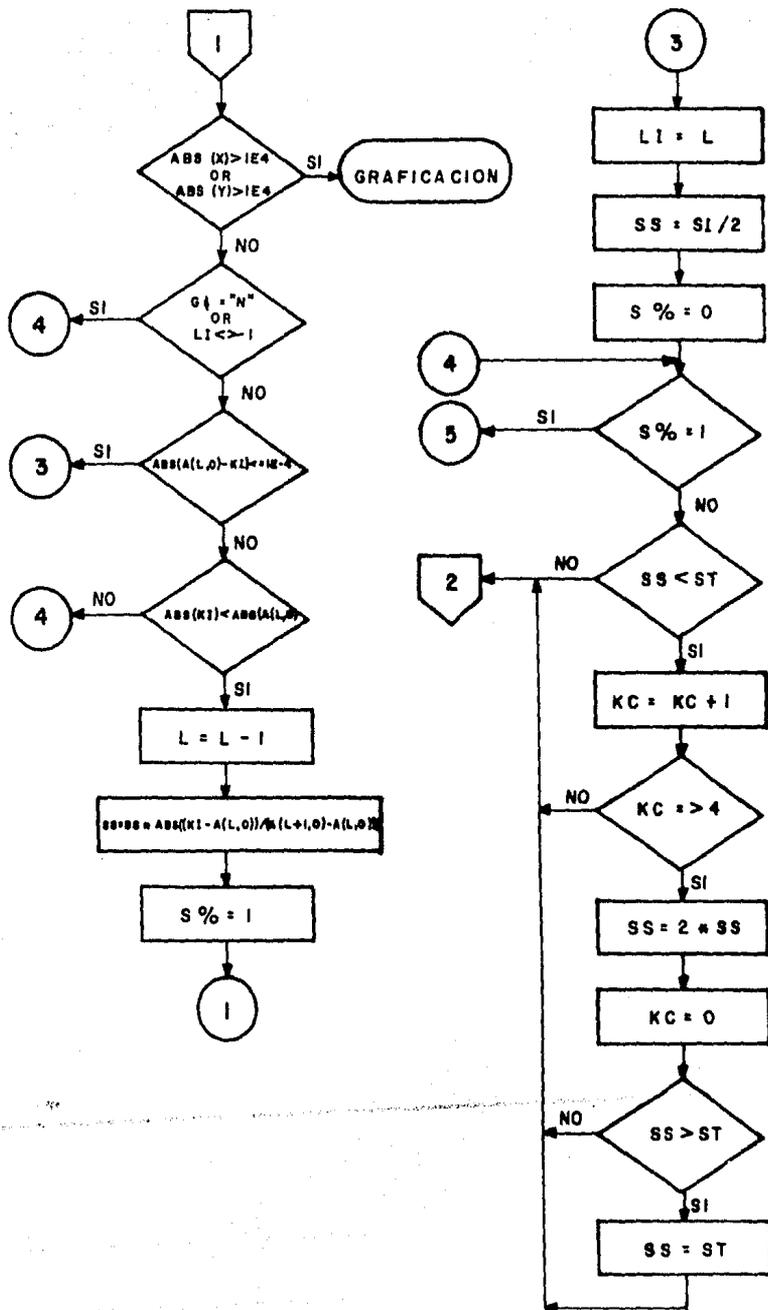


Figura 2.17 Continuación

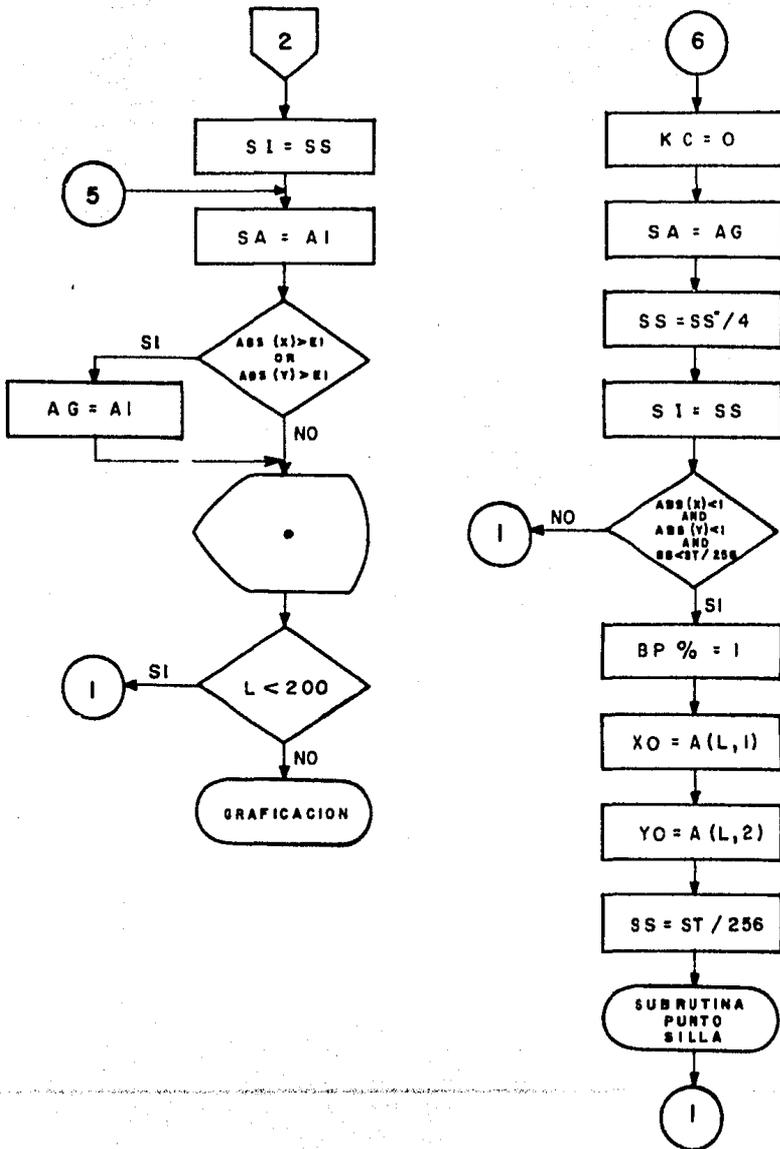


Figura 2.17 Continuación

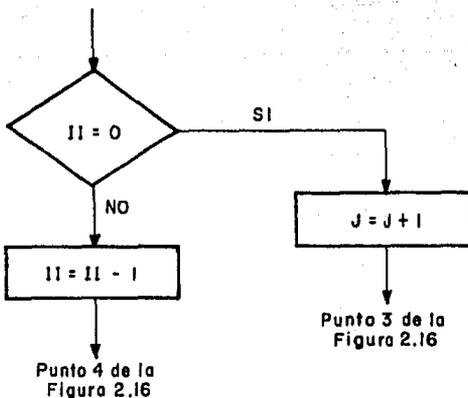


Figura 2.18 Diagrama de flujo que se aumenta a la rutina cuando se quiere otra rama

A continuación se explican las subrutinas que se usan en el programa:

-Subrutina Condición de Angulo:

Esta subrutina calcula la condición de ángulo dada por la expresión (2.73), en la cual F_1 está dada por la expresión (2.70). Hay que notar que al final de la subrutina se normaliza el ángulo F , es decir se obtiene el ángulo equivalente en el rango $-\pi \leq F \leq \pi$. El diagrama de flujo se puede observar en la figura 2.19.

-Subrutina Cálculo de Angulo:

Esta subrutina es la función $\text{ARCTAN}(X, Y)$ definida en

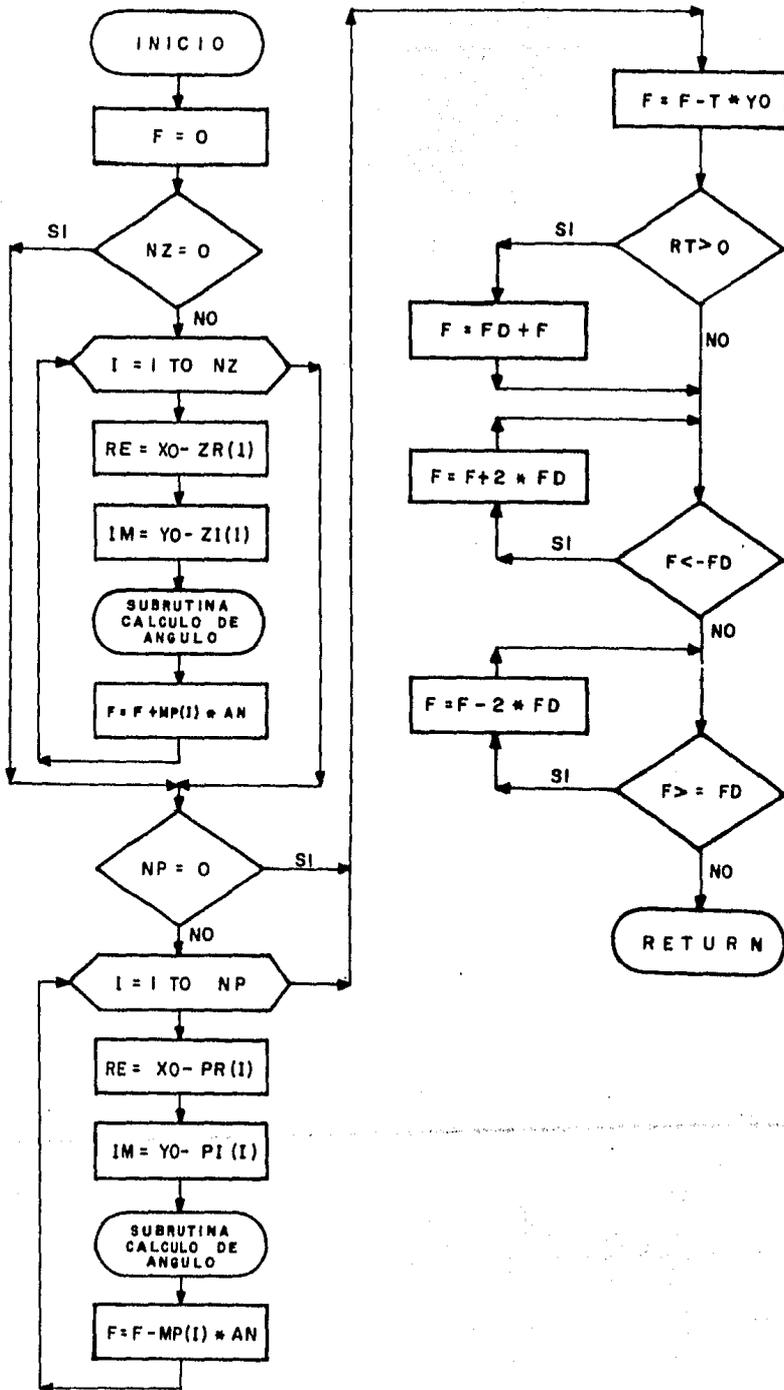


Figura 2.19 Subrutina condición de ángulo

la expresión (2.27a) y se muestra en la figura 2.20.

-Subrutina Derivadas Parciales:

Esta subrutina calcula las derivadas parciales correspondientes a las expresiones (2.35), (2.36), (2.58), (2.59) y (2.60), y el diagrama de flujo se muestra en la figura 2.21.

-Subrutina Punto Silla:

Esta subrutina está basada en las ideas expuestas en la sección II.4.3 y su diagrama de flujo se observa en la figura 2.22.

-Subrutina Normaliza Angulo:

Esta subrutina obtiene el ángulo equivalente de SA en el rango $-\pi \leq SA < \pi$ y su diagrama de flujo se observa en la figura 2.23.

-Subrutina Cálculo de Ganancia:

Considerando la expresión (2.23) la cual repetimos a continuación con el número:

$$\frac{|K|}{|K|} = \frac{|s-z_1| |s-z_2| \dots |s-z_m| |e^{-sT}|}{|s-p_1| |s-p_2| \dots |s-p_n|} \quad (2.76)$$

y tomando en cuenta que hay ocasiones en las cuales $G(s)H(s)$ está multiplicada por un factor FG, entonces (2.76) se

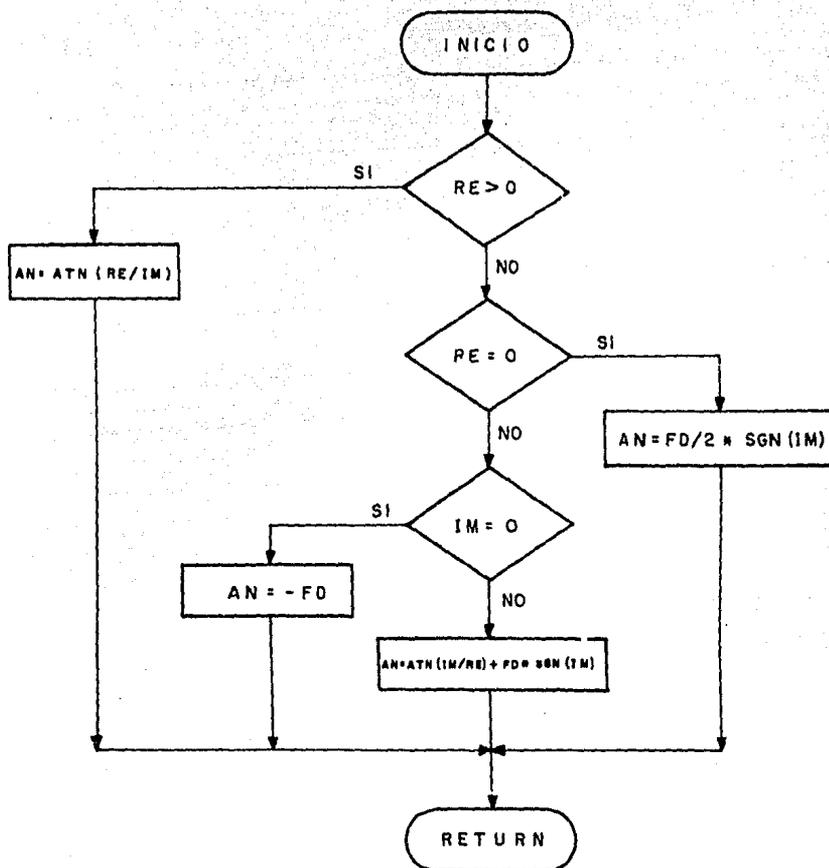


Figura 2.20 Subrutina cálculo de ángulo

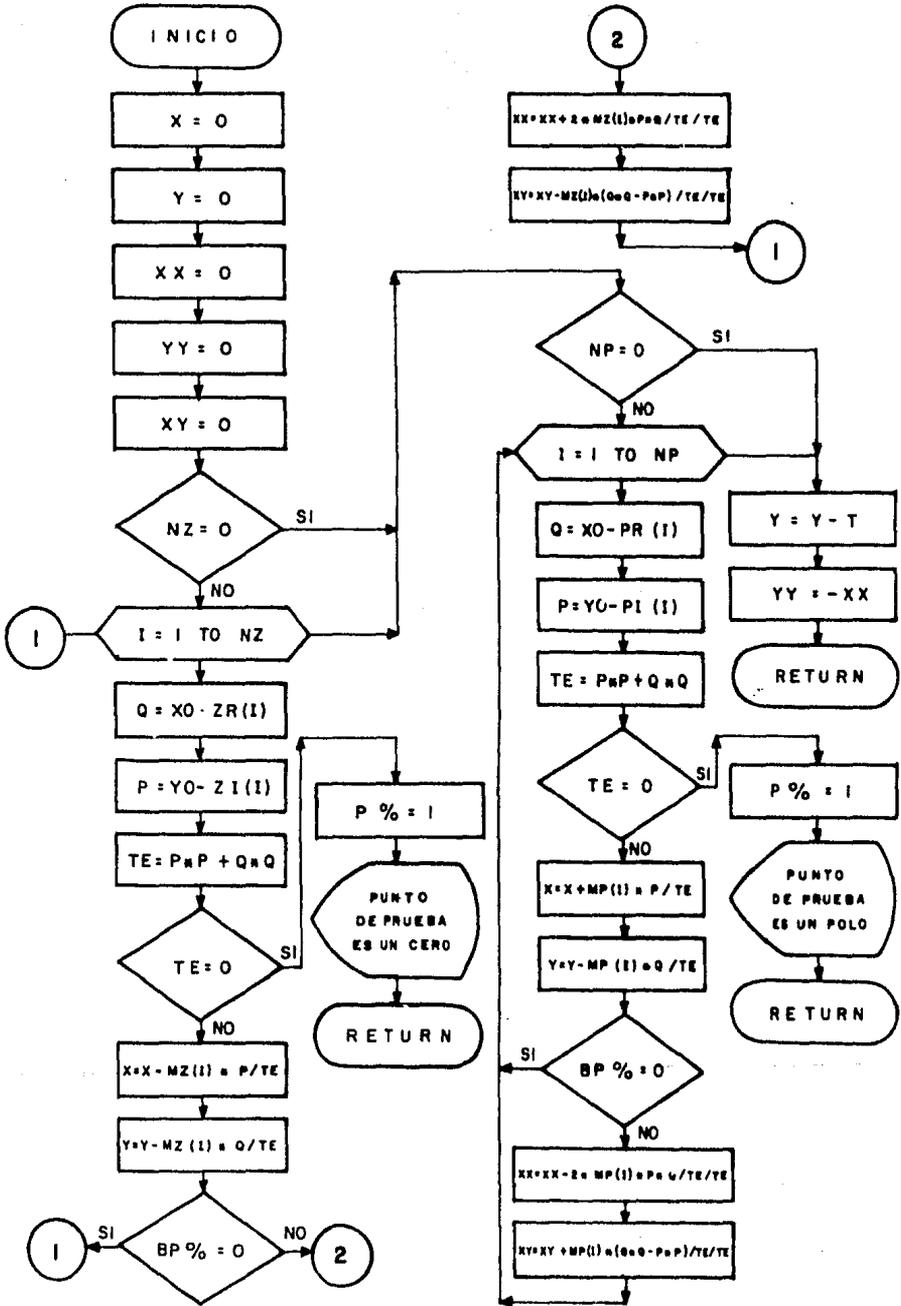


Figura 2.21 Subrutina derivadas parciales

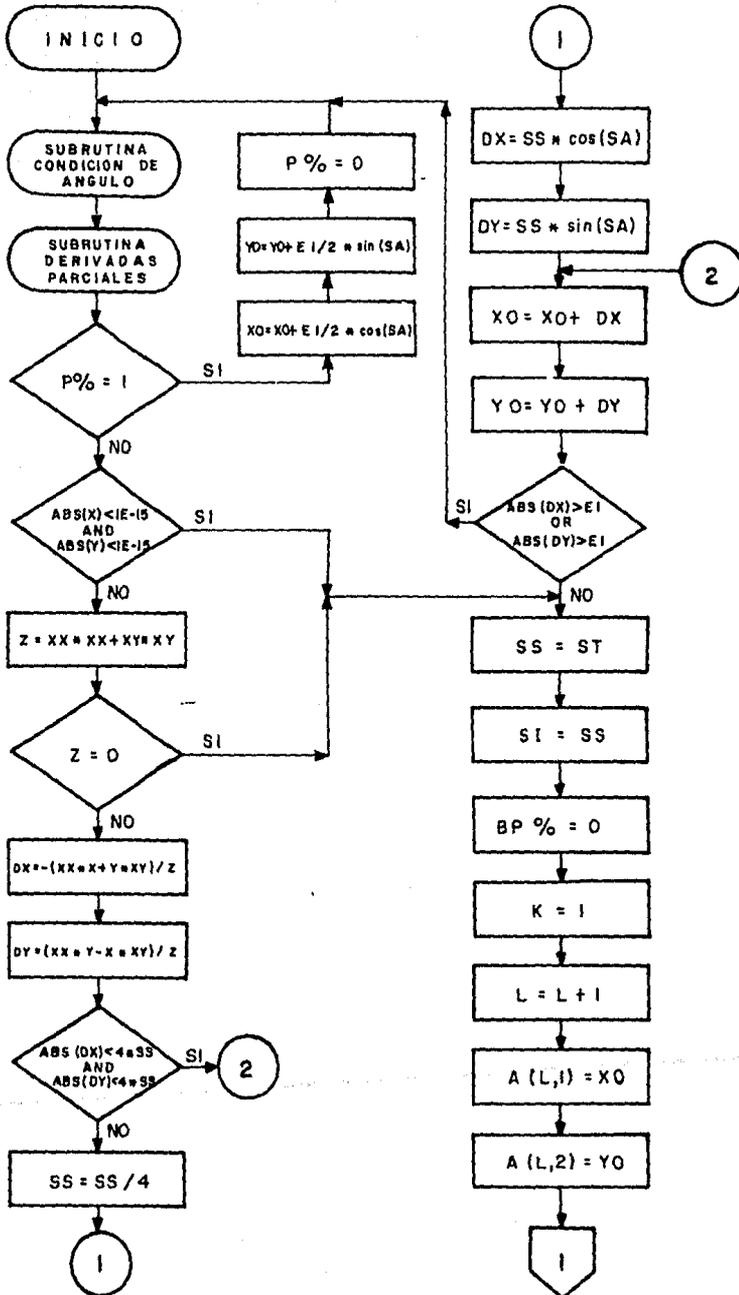


Figura 2.22 Subrutina Punto silla

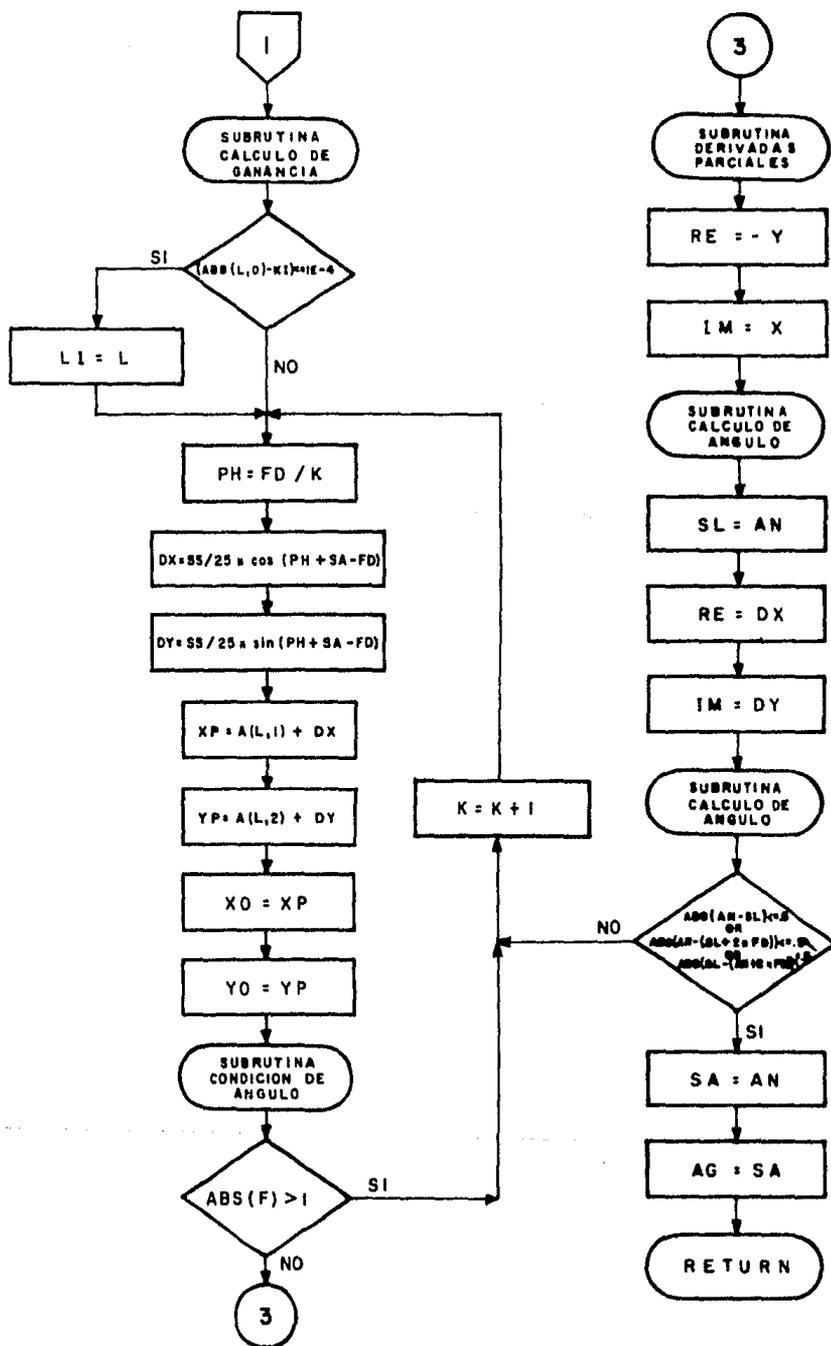


Figura 2.22 Continuación

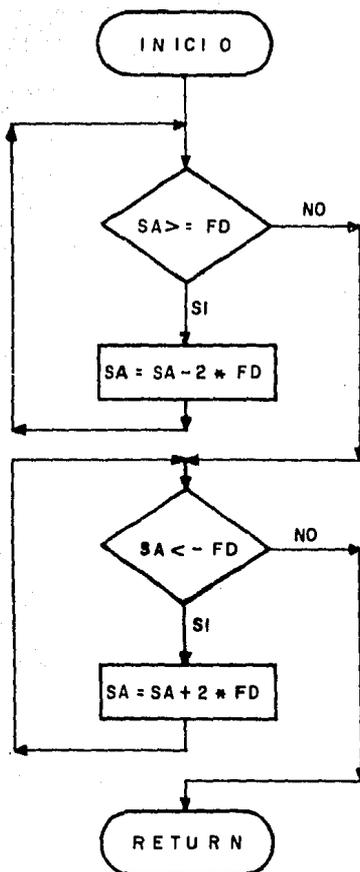


Figura 2.23 Subrutina Normaliza Angulo

modifica como sigue:

$$\frac{1}{|K|} = \frac{|s-z_1| |s-z_2| \dots |s-z_m| |e^{-sT}| |FG|}{|s-p_1| |s-p_2| \dots |s-p_n|} \quad (2.76)$$

si despejamos $|K|$ tendremos:

$$K = \frac{|s-p_1| |s-p_2| \dots |s-p_n|}{|s-z_1| |s-z_2| \dots |s-z_m| |e^{-sT}| |FG|} \quad (2.77)$$

pero:

$$|e^{-sT}| = |e^{-(X+iy)T}| = |e^{-XT} e^{-iyT}| = |e^{-XT}| |e^{-iyT}|$$

$$|e^{-sT}| = |e^{-XT}| |\cos yT - i \operatorname{sen} yT| = |e^{-XT}| \sqrt{\cos^2 yT + \operatorname{sen}^2 yT}$$

por lo tanto:

$$|e^{-sT}| = |e^{-XT}| \quad (2.78)$$

sustituyendo (2.78) en (2.77) tenemos:

$$|K| = \frac{|s-p_1| |s-p_2| \dots |s-p_n|}{|s-z_1| |s-z_2| |s-z_3| \dots |s-z_m| |e^{-XT}| |FG|}$$

$$|K| = \frac{|s-p_1| |s-p_2| \dots |s-p_n| |e^{XT}|}{|s-z_1| |s-z_2| \dots |s-z_m| |FG|} \quad (2.79)$$

Por otro lado recordando que $s = X + iy$, $p_j = PR_j + iPI_j$ y $z_j = ZR_j + iZI_j$ entonces:

$$|s-p_j| = \sqrt{(X-PR_j)^2 + (Y-PI_j)^2} \quad (2.80)$$

$$|s-z_j| = \sqrt{(X-ZR_j)^2 + (Y-ZI_j)^2} \quad (2.81)$$

Considerando (2.80) y (2.81) tenemos que (2.79) se transforma en:

$$|K| = \frac{|e^{XT}| \prod_{j=1}^n \sqrt{(X-PR_j)^2 + (Y-PI_j)^2}}{|FG| \prod_{j=1}^m \sqrt{(X-ZR_j)^2 + (Y-ZI_j)^2}}$$

$$K = \frac{e^{YT}}{FG} \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^n [(X-PR_j)^2 + (Y-PI_j)^2]}{\prod_{j=1}^m [(X-ZR_j)^2 + (Y-ZI_j)^2]}} \quad (2.82)$$

Por lo tanto, con la expresión (2.82) podemos calcular la ganancia correspondiente a un punto (X,Y) que pertenezca al lugar de las raíces de un sistema dado, que es precisamente lo que hace la subrutina, la cuál se representa en el diagrama de flujo de la figura 2.24.

-Subrutina Cambio de Exactitud:

Como se observa en el programa principal, esta subrutina solo se utiliza después de hacer una corrección del ángulo SA, pero hay ocasiones en que debido a las aproximaciones que se hacen en los algoritmos y la exactitud que da el

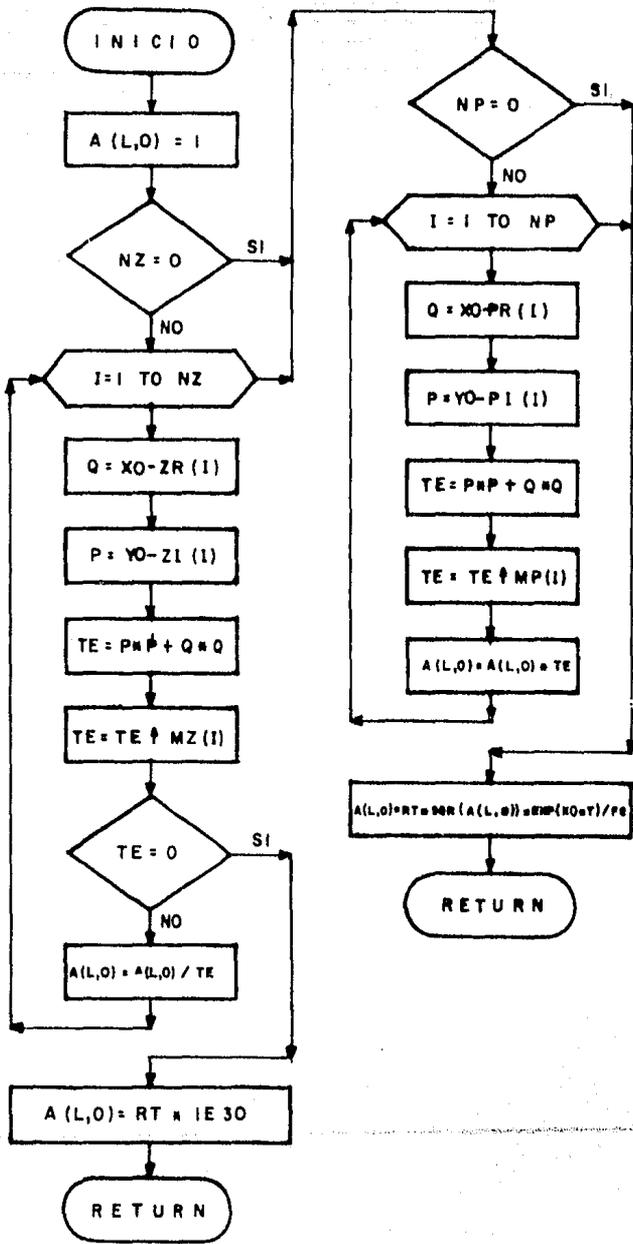


Figura 2.24 Subrutina cálculo de ganancia

usuario del programa, nunca se encuentra un punto del lugar con la exactitud dada, por lo que se ve la necesidad de modificarla, y esta subrutina la va haciendo por un factor de 10, y se puede observar su diagrama de flujo en la figura 2.25.

II.6. LISTADO

En el apéndice A se muestra el listado del programa el cual es el resultado de la recopilación de todas las ideas expuestas en la sección anterior.

Si se está un poco familiarizado con la computadora empleada, el entendimiento del método empleado para la graficación será muy sencilla de entender con el solo hecho de observar el listado.

II.7. OPERACION DEL PROGRAMA

En esta sección se explica como el usuario deberá manejar el programa y, como ya se mencionó, está escrito en la forma clásica de llevar una "conversación con la computadora".

La explicación se hará a través de un ejemplo. Supongamos que se desea obtener el lugar geométrico positivo de la siguiente función de transferencia de malla abierta:

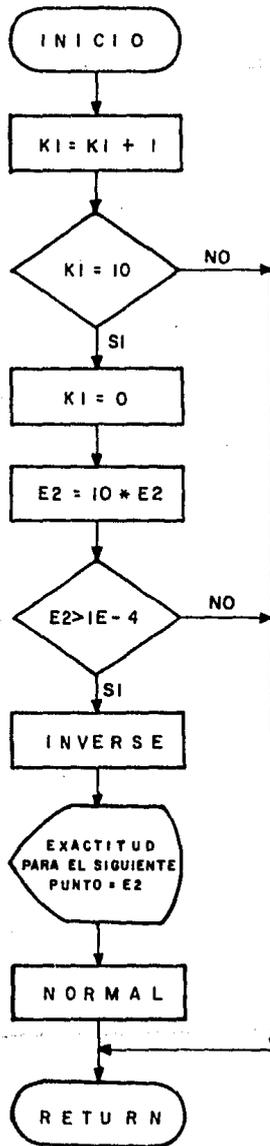


Figura 2.25 Subrutina cambio de exactitud

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

la función no tiene ceros de malla abierta, el factor de ganancia es el número que multiplica a K y vale en este caso la unidad, no tiene ningún retraso y los polos de malla abierta son:

$$p_1 = 0+j0$$

$$p_2 = -3+j0$$

$$p_3 = -1-j1$$

$$p_4 = -1+j1$$

como todos los polos están elevados a la primer potencia, entonces la multiplicidad vale uno, así al correr el programa y la computadora nos empiece a hacer preguntas, tendremos que contestarle como se indica a continuación. Las notas que se presentan a continuación son aclaraciones adicionales a lo que aparece en pantalla:

FACTOR DE GANANCIA? 1

DIFERENTE DE CEROS? 0

DIFERENTE DE POLOS? 4

RETRASO? 0

POLOS

PARTE REAL, PARTE IMAG., MULTIPLICIDAD

? 0, 0, 1

? -3, 0, 1

? -1, -1, 1

? -1, 1, 1

Nota: Es necesario que en caso de polos y ceros complejos, se introduzca el correspondiente conjugado, adyacentes entre sí, como se hizo en el presente ejemplo.

FACTOR DE GANANCIA=1

RETRASO=0

DESEAS CAMBIAR ALGUNO DE ESTOS PARAMETROS (S/N)? N

NUMERO DIFERENTE DE CEROS=0

NUMERO DIFERENTE DE POLOS=4

LOS POLOS SON:

PARTE REAL, PARTE IMAG., MULTIPLICIDAD

0 0 1

-3 0 1

-1 -1 1

-1 1 1

DESEAS CAMBIAR ALGUN POLO? N

LUGAR GEOMETRICO POSITIVO O NEGATIVO(1/-1)? 1

PASO? .1

EXACTITUD? .1

Nota: No debemos olvidar que el paso es la distancia entre puntos calculados, en tanto que la exactitud es el error máximo permitido al calcular un punto, ambos deben ser menores que la unidad. Un valor adecuado para ambos es 0.1 y en caso de que por alguna razón no calcule la rama deseada, hay que cambiar los valores, pero siempre menores que la unidad.

GANANCIA DE INTERES (S/N)? S

GANANCIA? 10

Nota: Con lo anterior, el programa calculará el punto correspondiente a la ganancia 10. Obviamente se le puede dar otro valor de ganancia. El signo de la ganancia debe ir en relación con el lugar deseado (positivo o negativo).

AREA DESEADA (EL NUMERO QUE AQUI SE INTRODUZCA CORRESPONDE A LA MAGNITUD A PARTIR DEL ORIGEN HACIA LAS PARTES POSITIVA O NEGATIVA DE CADA EJE) DE PREFERENCIA UN MULTIPLO DE 5? 5
CALCULANDO RAMA

Nota: Cada punto que aparece en la pantalla indica un ciclo para calcular un punto. Cuando termina de calcular puntos, aparece lo siguiente:

- (1) IMPRESION DE DATOS
- (2) GRAFICA
- (3) OTRA RAMA
- (4) OTRA FUNCION

(5) FIN

CUAL DESEAS? 1

Nota: Si se oprime el N° 1, aparecerá en la pantalla el valor de cada punto calculado con su respectiva ganancia. NÓtese que el programa debió haber calculado el punto correspondiente a la ganancia 10 o alguna que hayamos especificado. Terminada la impresión de datos en la pantalla, volverá a aparecer:

(1) IMPRESION DE DATOS

(2) GRAFICA

(3) OTRA RAMA

(4) OTRA FUNCION

(5) FIN

CUAL DESEAS? 2

BORRO LA PANTALLA (S/N) PRESIONA CUALQUIER TECLA DES-
PUES DE DESPLEGAR GRAFICA? S

Nota: Como es la primera rama que se está calculando, entonces hay que borrar toda la basura que tenga en memoria la computadora, esto en lo que a gráficas se refiere.

Cuando se quiera observar una segunda rama ya calculada, no deberá borrar la pantalla, si es que se quiere ver también la gráfica anterior, para que encima se grafique la nueva rama. Después de que aparezca la gráfica se deberá presionar cualquier tecla con lo cual aparecerá:

MARCA DE GANANCIA (S/N)?

Nota: Si se desea otra marca de ganancia, se dan las instrucciones como se mencionó en la nota anterior, y si no se desea, se presiona la tecla N con lo cual volverá a aparecer:

(1) IMPRESION DE DATOS

(2) GRAFICA

(3) OTRA RAMA

(4) OTRA FUNCION

(5) FIN

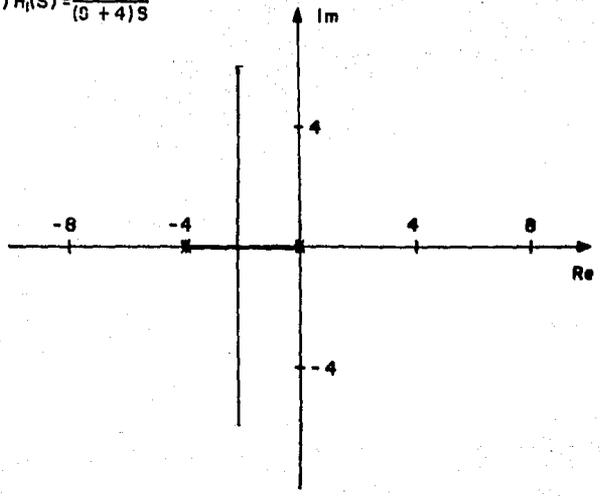
CUAL DESEAS?

Nota: Si ahora se oprime el N° 3, el programa empezará a calcular otra rama, si se oprime el N° 4 es para introducir otra función de transferencia de malla abierta, y si se oprime el N° 5 se saldrá del programa y se borrará de la memoria de la computadora.

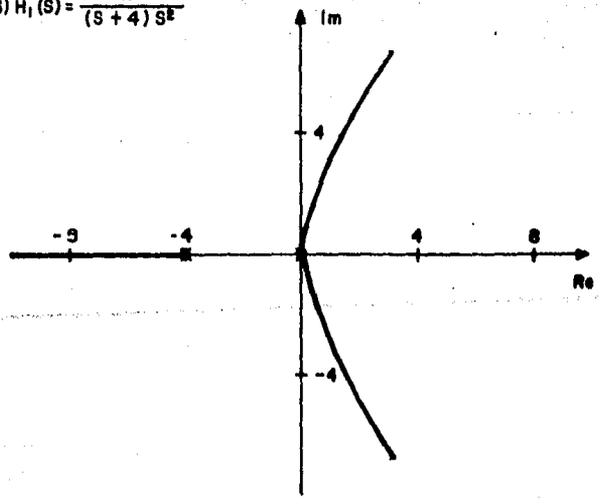
II.8. EJEMPLOS SELECTOS

A continuación se dan algunas funciones de transferencia de malla abierta de las cuales se ha obtenido el lugar geométrico positivo a través de la computadora:

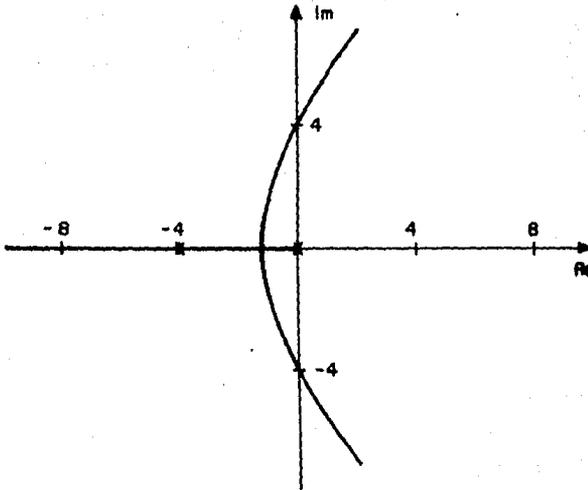
a) $G_1(s) H_1(s) = \frac{K}{(s+4)s}$



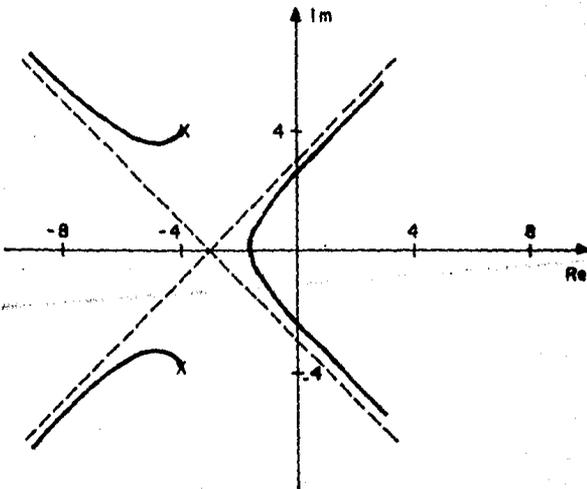
b) $G_1(s) H_1(s) = \frac{K}{(s+4)s^2}$



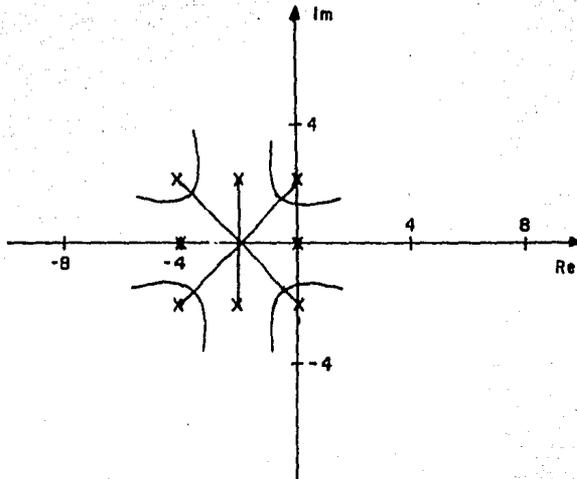
$$c) G_1(S)H_1(S) = \frac{K}{(S+4)^2 S}$$



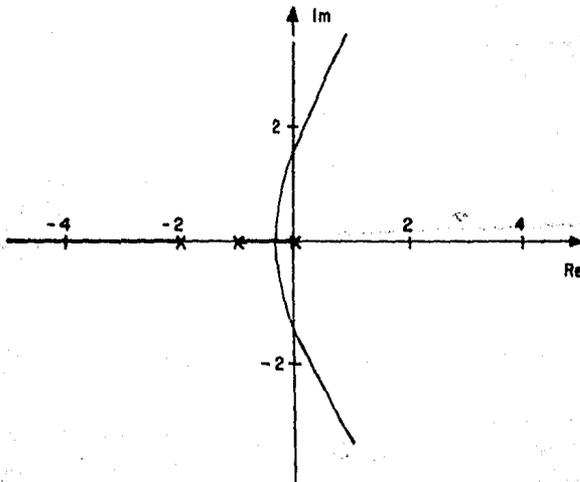
$$d) G_1(S)H_1(S) = \frac{K}{S(S+4)(S+4+j)(S+4-j)}$$



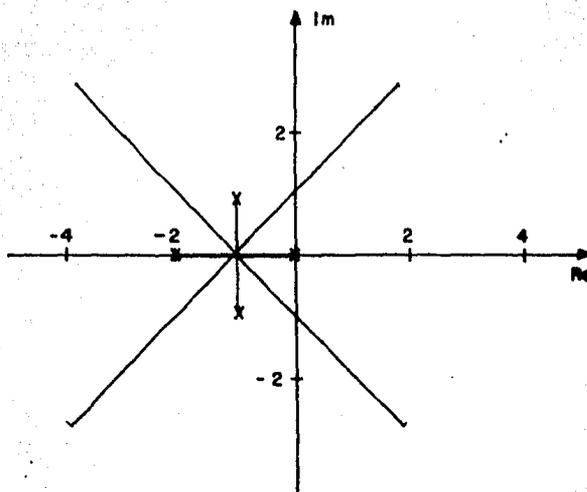
$$e) G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s+4)(s-2j)(s+2j)(s+2-2j)(s+2+2j)(s+4-2j)(s+4+2j)}$$



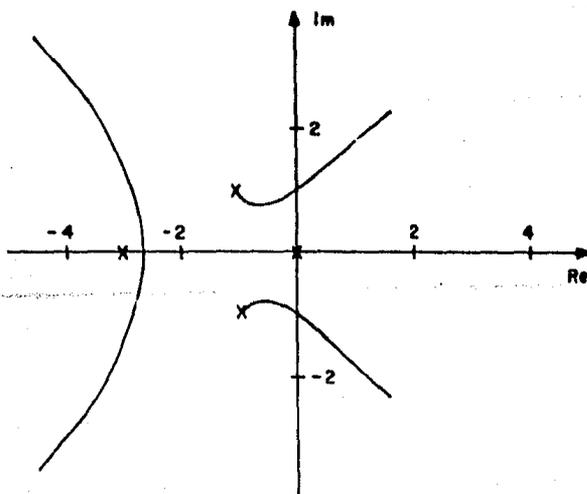
$$f) G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



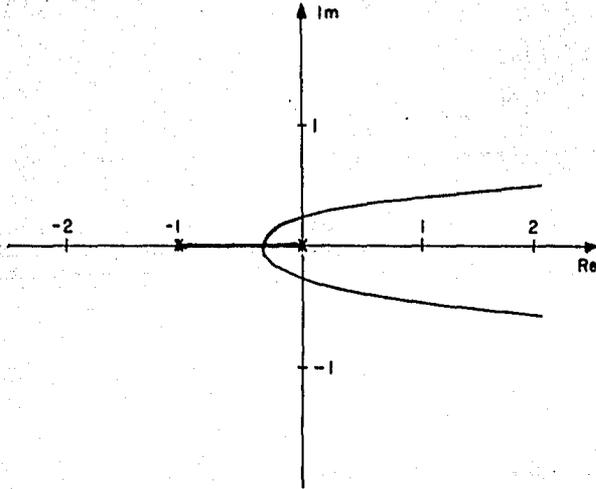
$$g) G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}$$



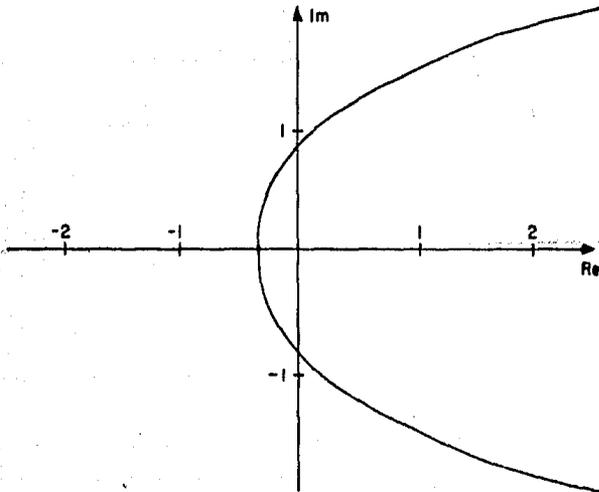
$$h) G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$



$$i) G_1(s)H_1(s) = \frac{K e^{-2s}}{s(s+1)}$$



$$j) G_1(s)H_1(s) = \frac{K e^{-s}}{s(s+1)}$$



BIBLIOGRAFIA

1. Applesoft II Reference Manual, Publicación de APPLE COMPUTER INC.
2. Applesoft Tutorial Manual, Publicación de APPLE COMPUTER INC.
3. ASH, R. H. y G.R. ASH, "Numerical Computation of Root Loci Using the Newton-Raphson Technique", IEEE Trans. Automatic Control, Vol AC-13, pp. 576-582, 1968.
4. D'AZZO, J.J. y C. H. HOUPIS, "Feedback Control System Analysis and Synthesis", Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD., 1a. Edición, pp. 202-241, 1966.
5. D'AZZO, J.J. y C.H. HOUPIS, "Linear Control System Analysis and Design", Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD., 1a. Edición, pp. 195-249, 1975.
6. Disk II Floppy Disk Manual (DOS 3.2.1), Publicación de APPLE COMPUTER INC.
7. EVANS, W.R., "Control System Synthesis by Root Locus Method", Trans. AIEE, Vol. 69, pp. 66-69, 1950.
8. KUO, B. C., "Automatic Control System", Prentice-Hall, Inc., 3a. Edición, pp. 385-455, 1975.
9. LUTHE, R., A. OLIVERA y F. SHUTZ, "Métodos Numéricos", LIMUSA, 1a. Edición, pp. 61-97, 1981
10. POOLE, L., M. McNIFF y S. COOK, "Apple II User's Guide", Mc Graw-Hill, 1a. Edición, 1981.
11. Tool Kit Manual, Publicación de APPLE COMPUTER INC.

CAPITULO III

PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL CRITERIO DE NYQUIST

III.I. INTRODUCCION

Otro método, también gráfico, para investigar la estabilidad de un sistema lineal invariante con el tiempo es el criterio de Nyquist (5) el que, como se verá en el presente capítulo, posee las siguientes características, entre otras:

- a) Nos da la estabilidad absoluta del sistema
- b) Además de la estabilidad absoluta, nos informa acerca de la estabilidad relativa.
- c) Se puede determinar el valor de algún parámetro K de tal manera que el sistema sea estable.
- d) Puede usarse en sistemas con retraso de tiempo.
- e) Nos proporciona la estabilidad de un sistema en el dominio de la frecuencia, es decir en términos de la respuesta de frecuencia.

La respuesta de frecuencia es la respuesta que tiene un sistema cuando se le aplica una entrada senoidal; es decir a partir de que se le aplica una entrada senoidal esta tendrá una cierta amplitud y una cierta frecuencia y cuando a esa entrada se le varía solo la frecuencia, el sistema responderá de diferente manera de tal modo que si se investiga como

responde (el sistema) al variar la frecuencia de la misma señal senoidal de entrada, se habrá obtenido la respuesta de frecuencia.

El método de Nyquist consiste en determinar, de manera indirecta, en que parte del plano complejo están ubicados los polos de malla cerrada a partir del conocimiento de la función de transferencia de malla abierta.

En este capítulo se desarrollará un programa de computadora que presentará una gráfica, en la pantalla de la misma, llamada Lugar de Nyquist, a partir de la cuál se podrá aplicar el criterio del mismo nombre.

Es necesario considerar que para poder aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist es necesario obtener la respuesta en frecuencia del sistema que su diagrama polar y también entender el teorema de Cauchy el que se explicará sin demostración por lo que estos serán los temas a desarrollar en las siguientes secciones y posteriormente se estudiará el criterio de Nyquist.

III.2. OBTENCION DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

En esta sección vamos a demostrar que para obtener la respuesta a la frecuencia, de un sistema lineal invariante con el tiempo, es necesario reemplazar $j\omega$ por s en la función de transferencia de malla cerrada.

Sea la ecuación (1.3), la que repetimos a continuación:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

como se observa en (1.4), $F(s)$ es la relación de dos polinomios en s . Como estamos suponiendo que la entrada es senoidal, ésta vendrá dada por:

$$x(t) = X \text{ sen } wt$$

donde X es la amplitud pico máxima y w es la frecuencia angular, por lo que al transformarla al dominio de Laplace se convertirá en la siguiente expresión, suponiendo condiciones iniciales nulas:

$$X(s) = \frac{wx}{s^2 + w^2}$$

y la salida del sistema será:

$$Y(s) = F(s)X(s) = \frac{q(s)}{p(s)} X(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \frac{wx}{s^2 + w^2} \quad (3.1)$$

en donde $q(s)$ es el polinomio del numerador y $p(s)$ el del denominador de $F(s)$ (ver expresión (1.4)). El polinomio del denominador puede ser expresado como el producto de sus raíces, por lo tanto la expresión (3.1) será:

$$Y(s) = \frac{q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} \cdot \frac{wx}{s^2 + w^2}$$

Si hacemos un desarrollo en fracciones parciales para obtener la respuesta en el dominio del tiempo, tendremos lo siguiente, suponiendo que $p(s)$ tiene raíces distintas:

$$Y(s) = \frac{b_1}{s-p_1} + \frac{b_2}{s-p_2} + \dots + \frac{b_n}{s-p_n} + \frac{a}{s+jw} + \frac{\bar{a}}{s-jw} \quad (3.2)$$

donde a y b_i ($i=1,2,\dots,n$) son los residuos constantes, y \bar{a} es el complejo conjugado de a . La transformada inversa de Laplace de la expresión (3.2) nos dará la respuesta del sistema en el dominio del tiempo, como se muestra a continuación:

$$y(t) = ae^{-jwt} + \bar{a}e^{jwt} + b_1e^{p_1t} + b_2e^{p_2t} + \dots + b_n e^{p_n t} \quad (3.3)$$

si $Y(s)$ tiene polos de multiplicidad m_j , entonces en el dominio del tiempo aparecerán términos de la forma $t^{h_j} e^{p_j t}$ ($h_j=0,1,2,\dots,m_j-1$), y si el sistema es estable, entonces los polos p_1, p_2, \dots, p_n tendrá parte real positiva, por lo que los términos $e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \dots, e^{p_n t}$ tenderán a cero conforme el tiempo t tiende a infinito, por lo tanto en estado estacionario desaparecerán todos los términos de la expresión (3.3) incluso si tiene polos múltiples desaparecerán las expresiones correspondientes a estos, excepto los dos primeros, quedando de la forma siguiente:

$$y(t) = ae^{-jwt} + \bar{a}e^{jwt} \quad (3.4)$$

donde a y \bar{a} se calculan de las expresiones (3.1) y (3.2) como sigue:

$$F(s) \frac{wx}{s^2+w^2} = \frac{a}{s+jw} + \frac{\bar{a}}{s-jw} + \frac{b_1}{s-p_1} + \frac{b_2}{s-p_2} + \dots + \frac{b_n}{s-p_n}$$

despejando a :

$$a = \left[F(s) \frac{wx}{s^2+w^2} - \frac{\bar{a}}{s-jw} - \frac{b_1}{s-p_1} - \frac{b_2}{s-p_2} - \dots - \frac{b_n}{s-p_n} \right] (s+jw)$$

si $s = -jw$ tendremos:

$$a = F(s) \frac{wx}{s^2+w^2} (s+jw) \Big|_{s=-jw} = F(s) \frac{wx(s+jw)}{(s+jw)(s-jw)} \Big|_{s=-jw}$$

$$a = - \frac{XF(-jw)}{2j} \quad (3.5)$$

de manera similar para \bar{a} tenemos:

$$\bar{a} = \frac{XF(jw)}{2j} \quad (3.6)$$

como $F(jw)$ es una cantidad compleja:

$$F(jw) = |F(jw)| e^{j\phi} \quad (3.7)$$

donde:

$$|F(jw)| = \sqrt{[\operatorname{Re}\{F(jw)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{F(jw)\}]^2}$$

$$\phi = \angle F(jw) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{F(jw)\}}{\operatorname{Re}\{F(jw)\}} \quad (3.8)$$

para $F(-jw)$ tenemos también que:

$$F(-jw) = |F(-jw)| e^{-j\phi} = |F(jw)| e^{-j\phi} \quad (3.9)$$

sustituyendo (3.7) en (3.6) y (3.9) en (3.5):

$$a = \frac{x |F(j\omega)| e^{j\phi}}{2j} \quad (3.10)$$

$$\bar{a} = \frac{x |F(j\omega)| e^{-j\phi}}{2j} \quad (3.11)$$

sustituyendo (3.10) en (3.11) en (3.4):

$$y(t) = - \frac{x |F(j\omega)| e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{2j} + \frac{x |F(j\omega)| e^{j\phi} e^{j\omega t}}{2j}$$

$$y(t) = x |F(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}$$

$$y(t) = x |F(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = Y \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (3.12)$$

donde $Y = x |F(j\omega)|$

De la expresión (3.12) se observa que para un sistema lineal invariante con el tiempo y estable, la salida es senoidal cuando se le aplica una entrada también senoidal, ambas de la misma frecuencia pero de diferente amplitud y defasadas entre sí. Del desarrollo anterior se obtiene lo siguiente, considerando (3.12) y (3.8);

$$|F(j\omega)| = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

y

$$\underline{F(j\omega)} = \underline{\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}}$$

de tal manera que en general:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = F(j\omega) \quad (3.13)$$

con lo anterior se demuestra que la respuesta a la frecuencia se obtiene sustituyendo a s por $j\omega$ en la función de transferencia.

III.3 DIAGRAMAS POLARES

La respuesta en frecuencia $F(j\omega)$ es una cantidad compleja que se puede representar en dos dimensiones tomando a ω como parámetro, y se puede expresar de las siguientes dos formas equivalentes:

$$\text{Forma rectangular: } F(j\omega) = \text{Re}\{F(j\omega)\} + j \text{Im}\{F(j\omega)\} \quad (3.14)$$

$$\text{Forma polar: } F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)} = |F(j\omega)| \angle \phi(j\omega) \quad (3.15)$$

Un diagrama polar es la representación gráfica de la respuesta en frecuencia $F(j\omega)$ para $0 < \omega < \infty$ en un sistema de coordenadas cartesianas de $\text{Re}\{F(j\omega)\}$ contra $\text{Im}\{F(j\omega)\}$. Como las ecuaciones (3.14) y (3.15) son equivalentes, es lógico pensar que el diagrama polar también se puede representar en coordenadas polares, en realidad la elección de coordenadas ya sean cartesianas o polares depende de como sea más fácil expresar la función $F(j\omega)$ ya que en ambos sistemas de coordenadas la gráfica será exactamente la misma.

A continuación se realizará un ejemplo para dejar más claro como se hace el diagrama polar de una función de transferencia.

Ejemplo: Obtener el diagrama polar para la siguiente función de transferencia:

$$F(s) = \frac{s+6}{(s+3)(s+1)}$$

Forma rectangular:

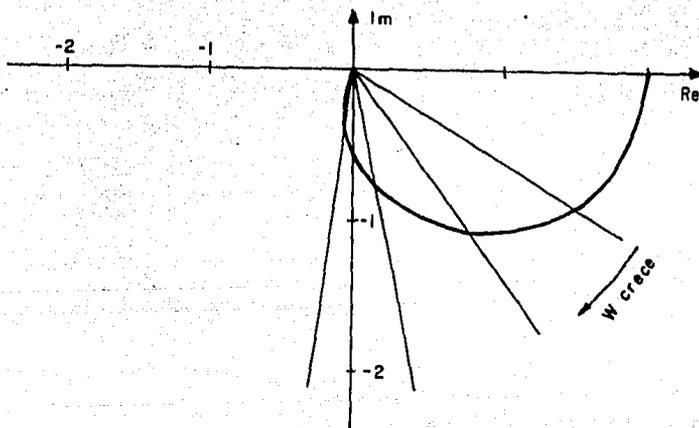
$$F(j\omega) = \frac{18-2\omega^2}{(3-\omega^2)^2+16\omega^2} - j \frac{(\omega^3+21\omega)}{(3-\omega^2)^2+16\omega^2}$$

Forma polar:

$$|F(j\omega)| = \frac{(18-2\omega^2)^2 + (\omega^3+21\omega)^2}{|(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2|^2}$$

$$F(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left(- \frac{\omega + 21\omega}{18-2\omega} \right)$$

ω	$ F(j\omega) $	$\angle F(j\omega)$
0.0	2.00	0
0.5	1.77	-31°
1.0	1.36	-54°
2.0	0.78	-78.7°
3.0	0.50	-90°
6.0	0.21	-99°
10.0	0.11	-98.5°
∞	0.00	-90°



III.4. TEOREMA DE CAUCHY

El teorema de Cauchy también llamado Principio del argumento tiene su base en la representación de funciones complejas de una variable compleja, dicho teorema se explicará en esta sección sin demostrarlo.

Una función de una variable real como lo es $f(x)$ siendo x real se puede representar en un solo plano cartesiano graficando $f(x)$ contra x . Una función compleja de una variable compleja, como lo es $F(s)$ donde $s = \sigma + j\omega$ no se puede representar en un único plano cartesiano.

La variable compleja s depende de una parte real y otra imaginaria, y también la función compleja $F(s) = \text{Re}\{F(s)\} + j\text{Im}\{F(s)\}$ por lo que un punto de plano s (σ contra $j\omega$) tendrá su representación en el plano $F(s)$ ($\text{Re}\{F(s)\}$ contra $j\text{Im}\{F(s)\}$) a través de la función compleja $F(s)$, de tal manera que para representar $F(s)$ se requiere de dos gráficos bidimensionales, proyectando los puntos del plano s sobre los del plano $F(s)$ a través de la función $F(s)$, como se muestra en la Figura 3.1, tal proyección es unívoca.

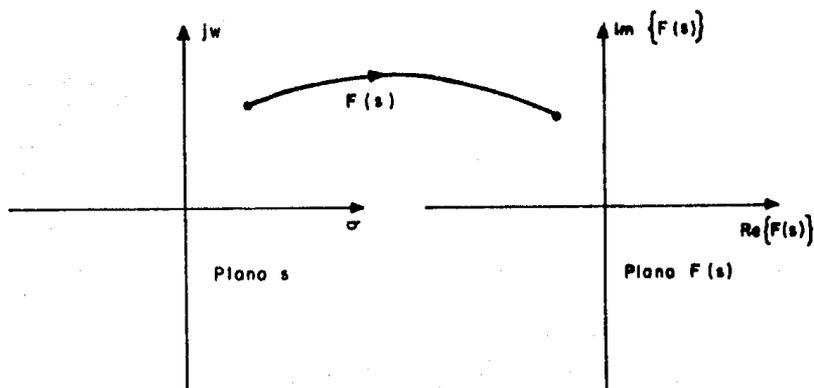


Figura 3.1 Proyección del plano s al $F(s)$

Una función $F(s)$ es analítica si existe en todos los puntos de una región de plano s (es decir, si el límite es finito y único). Un punto en el cuál $F(s)$ no es analítica (no tiene límite finito y único) se le llama punto singular o singularidad, y como ejemplos de puntos singulares están los polos de $F(s)$.

Una característica de las proyecciones del plano s al plano $F(s)$ es que si en el primero hay un contorno cerrado, al proyectarlo al segundo el contorno resultante también será cerrado.

Un punto está rodeado por un contorno si este se encuentra en su interior. En la figura 3.2(a) y (b) el punto A está rodeado y el punto B no lo está.

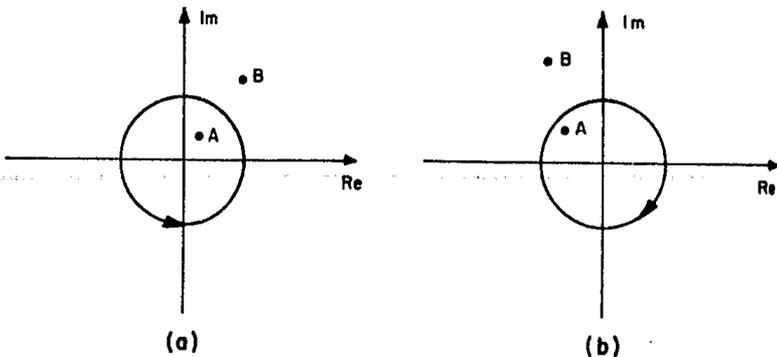


Figura 3.2 Rodeo de un punto

Hasta ahora no se ha hablado acerca del sentido que resultará en el plano $F(s)$ al escoger un contorno cerrado en el plano s con un sentido determinado. El sentido que aquí siempre consideraremos en el contorno del plano s , será el de las manecillas del reloj (aunque se puede escoger el sentido contrario), para lo que el teorema de Cauchy dice:

Si un contorno Γ_s es el plano s rodea Z ceros y P polos de $F(s)$ y no pasa a través de ningún polo o cero de $F(s)$ cuando el recorrido es en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj a lo largo del contorno, el contorno correspondiente Γ_F en el plano $F(s)$ rodea el origen de dicho plano $N=Z-P$ veces en la misma dirección. Un signo negativo de N quiere decir que los rodeos al origen en el plano $F(s)$ serán en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Veamos un ejemplo para entender mejor el teorema de Cauchy.

Sea la función:

$$F_1(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

su patrón de polos y ceros aparece en la figura 3.3 junto con un contorno cerrado Γ_s , y $F_1(s)$ es analítica para todos los puntos pertenecientes al contorno.

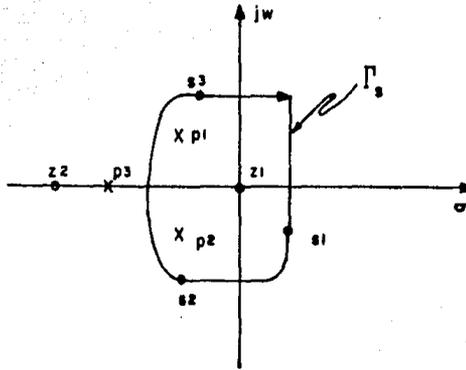


Figura 3.3 Patrón de polos y ceros de $F_1(s)$ y un contorno cualquiera

Al hacer la proyección al plano $F_1(s)$ y considerando el teorema de Cauchy, tenemos que en el plano s el número de ceros que rodea el contorno Γ_s es $Z=1$ y el número de polos que rodea el mismo contorno es $P=2$, por lo tanto $N=Z-P=1-2=-1$ y esto implica que el número de rodeos al origen en el plano $F_1(s)$ será uno, en sentido contrario a las manecillas del reloj, debido al signo, esto se observa en la Figura 3.4.

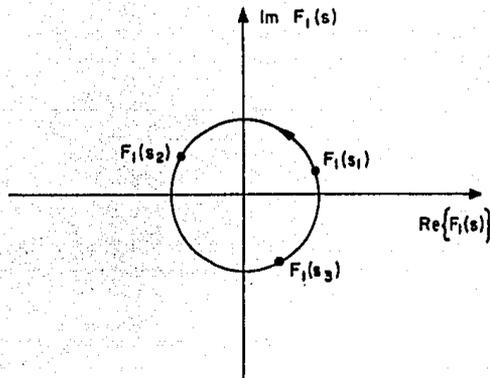


Figura 3.4 Proyección al plano $F_1(s)$

Hay que hacer hincapié en el hecho de que en la fórmula $N=Z-P$, Z es el número de ceros rodeados por Γ_S y P es también solo el número de polos rodeados por Γ_S y N el número de rodeos del contorno Γ_F al origen del plano $F(s)$.

En las figuras 3.5 y 3.6 se muestran otros ejemplos acerca del teorema de Cauchy para su mejor comprensión.

III.5. CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

Consideremos la expresión (2.1), la cuál representa la función de transferencia de un sistema de malla cerrada, en donde $P(s)=1+G_1(s)H_1(s)=0$ es la ecuación característica. Si $P(s)=0$ se expresa como una relación de polinomios en s , en-

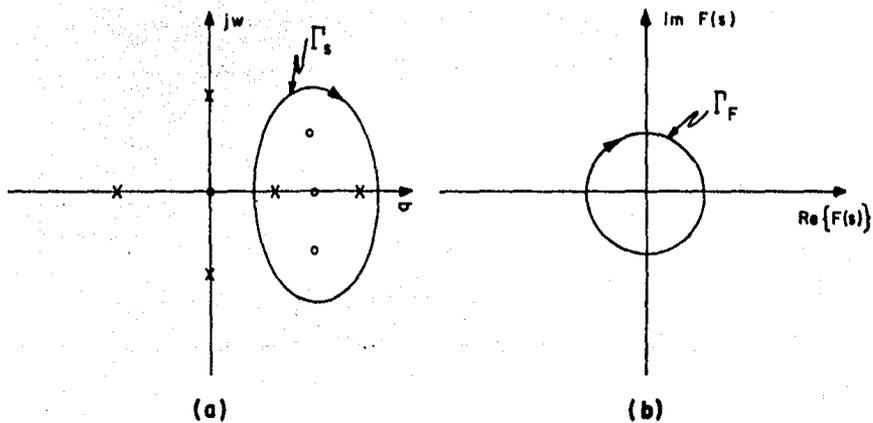


Figura 3.5 Ejemplo del Teorema de Cauchy

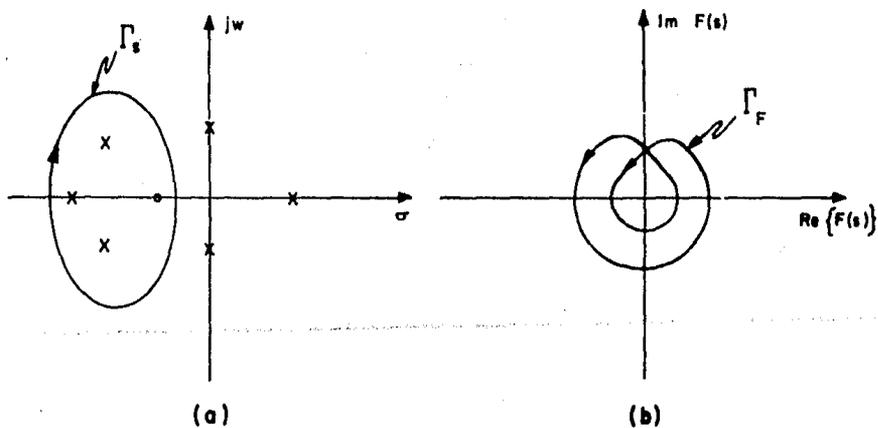


Figura 3.6 Ejemplo del Teorema de Cauchy

tonces para determinar si un sistema es estable habrá que conocer la localización de los ceros de $P(s)$ (que vienen a ser los polos de todo el sistema). Con lo mencionado en las

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)H_1(s)} \quad (2.1)$$

secciones anteriores, nos podríamos poner en la situación de Nyquist hace algunos años, en la que el deseaba saber la ubicación de los ceros de $1+G_1(s)H_1(s)=0$ para conocer la estabilidad de un sistema y que, evidentemente encontró que se podía aplicar el teorema de Cauchy si en el plano s se escogía un contorno que abarcara todo el semiplano derecho para así saber cuantos ceros de $P(s)=0$ se ubican en esa región. El contorno que Nyquist escogió es el que se observa en la figura 3.7, el cuál es todo el eje $j\omega$ junto con un semicírculo de radio infinito que abarca todo el semiplano derecho, y su sentido es el de las manecillas del reloj, y según el teorema de Cauchy, no debe pasar a través de ninguna singularidad; como se observa en la misma figura, si existen singularidades en el eje $j\omega$, el contorno la rodeará con un semicírculo cuyo radio tiende a cero. A dicho contorno se le llama contorno de Nyquist.

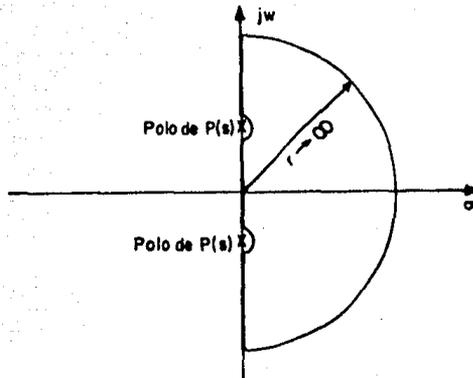


Figura 3.7 Contorno de Nyquist

Si el contorno de Nyquist lo proyectamos hacia el plano $P(s)$ a través de la función $P(s)=1+G_1(s)H_1(s)=0$ entonces conoceremos cuantos ceros hay en el semiplano derecho de s si analizamos el comportamiento del contorno resultante en el plano $P(s)$, y además sabemos cuantos polos de $P(s)$ están rodeados por el contorno de Nyquist. Analizar el comportamiento del plano $P(s)$ quiere decir investigar el número de rodeos al origen y el sentido de tales rodeos. Con lo mencionado un criterio de estabilidad sería: considerando el contorno de Nyquist, representado en la Figura 3.7, que no pasa por ningún punto singular de $P(s)$, el número de ceros de $P(s)$ que se encuentran en el semiplano derecho del plano s es igual al número de polos de $P(s)=1+G_1(s)H_1(s)=0$ que se en-

cuentran en el semiplano derecho más el número de rodeos al origen del contorno resultante en el plano $P(s)$.

Nyquist observó que el contorno de $1+G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ para cuando $(-\infty < \omega < \infty)$ (es decir la porción de todo el eje $j\omega$ en el plano s), es el plano $P(s)$ es la suma del vector unitario y del vector $G_1(j\omega)H_1(j\omega)$, por lo tanto $1+G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ (contorno de la figura 3.8(a)) es igual al vector que va

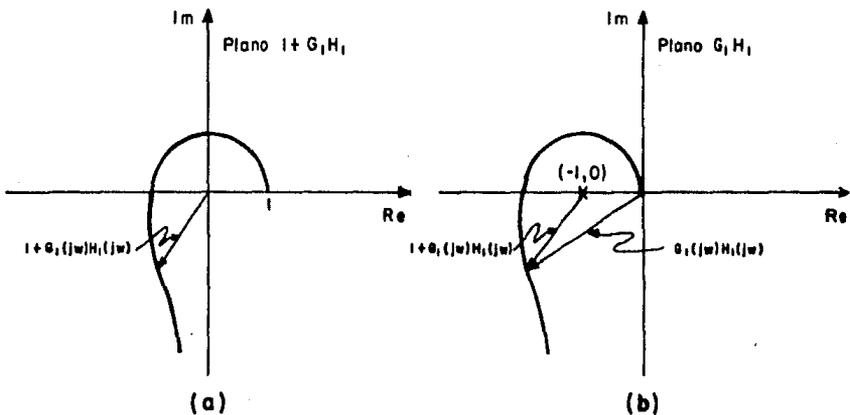


Figura 3.8 Diagramas de $G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ en los planos $1+G_1H_1$ y G_1H_1

del punto $(-1, 0)$ hasta el extremo del vector $G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ como se observa en la Figura 3.8(b), además considerando que los polos de $1+G_1(s)H_1(s)$ son los mismos que de $G_1(s)H_1(s)$, entonces se puede obtener el número de ceros de $1+G_1(s)H_1(s)$ que se encuentran en el semiplano derecho a partir de la proyección del contorno de Nyquist a través de

la función $G_1(s)H_1(s)$ y observando el número de rodeos al punto $(-1,0)$ del plano $G_1(s)H_1(s)$ y su sentido, junto con el número de polos de $G_1(s)H_1(s)$. Al contorno del plano G_1H_1 , resultante de proyectar el contorno de Nyquist sobre dicho plano, se le llama "Lugar de Nyquist".

Así pues, el criterio de estabilidad de Nyquist puede establecerse formalmente como sigue:

Un sistema de control, realimentado lineal e invariante con el tiempo es estable si y solamente si el contorno $\Gamma_{G_1H_1}$ (lugar de Nyquist) resultante de proyectar el contorno de Nyquist en el plano G_1H_1 , no rodea el punto $(-1,0)$ cuando el número de polos de $G_1(s)H_1(s)$ en la parte derecha del plano s es cero ($P=0$).

Si el número de polos de G_1H_1 , con parte real positiva no es cero, entonces el criterio de estabilidad de Nyquist es:

Un sistema de control realimentado, lineal e invariante con el tiempo es estable si y solamente si para el contorno $\Gamma_{G_1H_1}$ (lugar de Nyquist) resultante de proyectar el contorno de Nyquist en el plano G_1H_1 , el número de rodeos al punto $(-1,0)$, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es igual al número de polos con parte real positiva de $G_1(s)H_1(s)$.

Para que haya estabilidad se requiere que no haya ceros con parte real positiva ($Z=0$) por lo tanto, si no hay polos con parte real positiva, de la función $G_1(s)H_1(s)$, de la fórmula $Z=N+P$ como $P=0$ implica que $Z=N$, entonces para que haya estabilidad no debe haber rodeos al punto $(-1,0)$, es decir $Z=N=0$.

Pero si $P \neq 0$, para que siga habiendo estabilidad se debe cumplir que $Z=0$, y entonces $0=N+P$ o $N=-P$ por lo tanto el número de rodeos al punto $(-1,0)$ en sentido contrario a las manecillas del reloj (por el signo menos) debe ser igual al número de polos con parte real positiva de $G_1(s)H_1(s)$.

A continuación vamos a desarrollar un ejemplo para entender mejor el criterio de estabilidad de Nyquist.

Ejemplo. Sea la siguiente función de transferencia de malla abierta:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

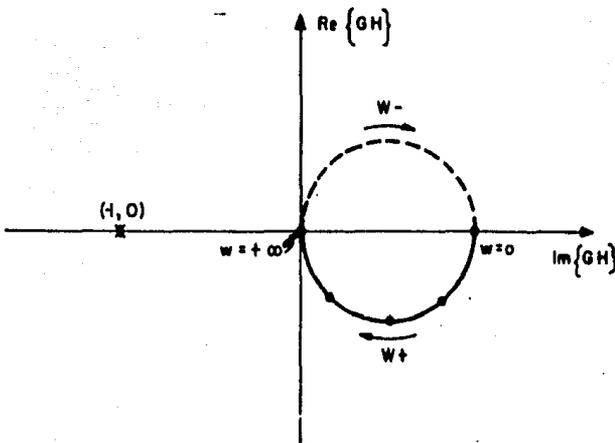
en la figura 3.7 se observa el contorno de Nyquist y para aplicarlo tenemos que hacer lo siguiente:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1}{1+j\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2} = \text{Re}(G(j\omega)H(j\omega)) + j\text{Im}(G(j\omega)H(j\omega))$$

tabulando la parte real y la parte imaginaria de la función de transferencia de malla abierta tomando a ω como parámetro, tendremos lo siguiente:

w	$\text{Re}\{G(jw)H(jw)\}$	$\text{Im}\{G(jw)H(jw)\}$
0.0	1.0	0.0
0.5	0.8	-0.4
2.0	0.2	-0.4
∞	0.0	0.0

graficando los resultados anteriores y considerando que la gráfica es simétrica para $G(jw)H(jw)$ y $G(-jw)H(-jw)$ tendremos:



como la gráfica no rodea el punto $(-1,0)$ entonces $N=0$, y como no hay polos de malla abierta dentro del contorno de Nyquist $P=0$, por lo tanto $Z=N+P=0$, es decir que no hay ningún polo de la función de transferencia de malla cerrada en el semiplano

derecho, por lo tanto el sistema es estable.

III.6. ESTABILIDAD RELATIVA

En las secciones anteriores se obtuvo la estabilidad de un sistema en función de los rodeos del lugar de Nyquist al punto $(-1,0)$ y aplicando la fórmula del teorema de Cauchy $N=Z-P$.

Ahora vamos a obtener la estabilidad relativa de un sistema en base a que tan cerca está de encerrar el punto $(-1,0)$ el Lugar de Nyquist. Por ejemplo el sistema correspondiente al lugar de Nyquist de la figura 3.9(a) es más estable que el correspondiente a la figura 3.9(b).

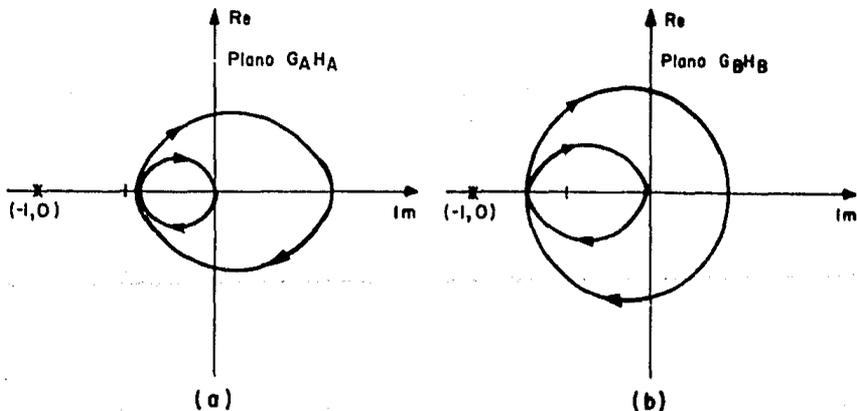


Figura 3.9 Lugar de Nyquist de dos sistemas

Se han establecido medidas de cercanía del lugar de Nyquist al punto $(-1,0)$. Una de estas es el Margen de Ganancia y otra es el Margen de Fase.

El Margen de ganancia es el mínimo factor por el cuál habría que multiplicar $G_1(s)H_1(s)$ para que el sistema se vuelva inestable, y este se calcula en base a la Figura 3.10 como sigue:

$$\text{Margen de Ganancia} = \frac{1}{|G_1(j\omega_g)H_1(j\omega_g)|}$$

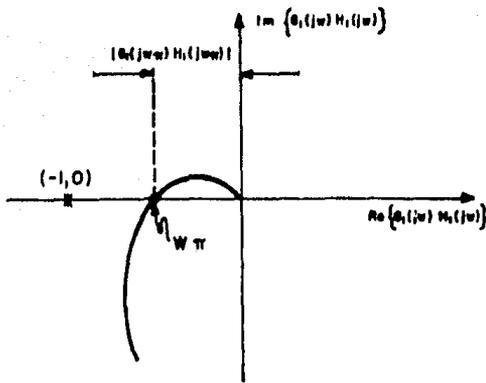


Figura 3.10 Margen de Ganancia

El Margen de Fase es el mínimo ángulo que debe sumarse a $|G_1(s)H_1(s)|$ para que el sistema sea inestable, es decir corresponde al ángulo que se debe girar el lugar de Nyquist para que este rodee el punto $(-1,0)$ y se calcula en base a la Figura 3.11 como sigue:

$$\text{Margen de Fase} = \phi_{MF}$$

Si ahora consideramos que la ecuación característica es como se muestra en la expresión (2.6) que ahora repetimos con el número:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (3.16)$$

la cuál también se puede escribir como:

$$P(s) = \frac{1}{K} + G(s)H(s) = 0 \quad (3.17)$$

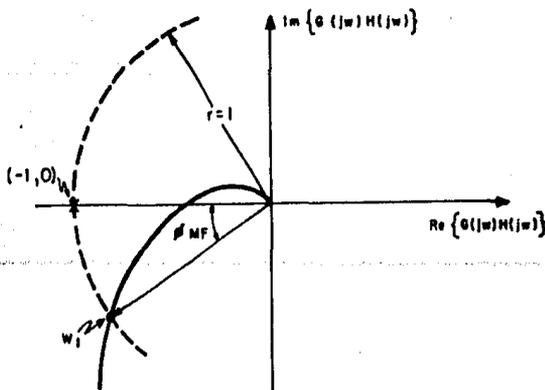


Figura 3.11 Margen de fase

en donde K es un parámetro libre y cuyo valor se debe determinar de tal manera que el sistema en cuestión sea estable, entonces ahora el criterio de estabilidad de Nyquist se modifica ya que la función $P(j\omega) = 1/K + G(j\omega)H(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$ (que es el lugar de Nyquist en el plano $P(s)$ es la suma del vector $1/K$ y el vector $G(j\omega)H(j\omega)$, entonces $1/K + G(j\omega)H(j\omega) = 0$ es igual al vector que va del punto $(-1/K, 0)$ hasta el extremo del vector $G(j\omega)H(j\omega)$ y la figura 3.8 se modifica como en la figura 3.12.

Es evidente que el número de rodeos para aplicar el teorema de Cauchy es respecto al punto $(-1/K, 0)$, por lo tanto si se quiere que el sistema sea estable hay que escoger el valor de K de tal manera que el lugar de Nyquist no rodee en sentido horario el punto $(-1/K, 0)$, y si además se quiere

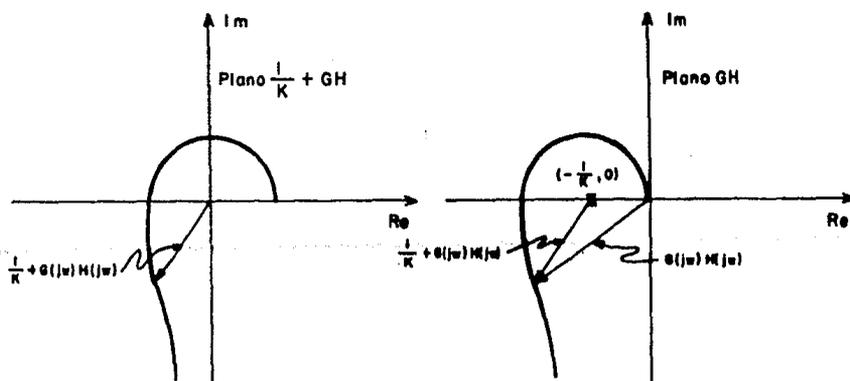


Figura 3.12 Diagramas de $G(j\omega)H(j\omega)$ en los planos $1/K + GH$ y GH

un cierto grado de estabilidad, habrá que jugar con el parámetro K y sus correspondientes márgenes de ganancia y fase, los cuales se calculan en base a la figura 3.13 como sigue:

$$\text{Margen de ganancia} = \frac{1}{|aK|}$$

$$\text{Margen de Fase} = \phi_{MF}$$

III.7. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

El problema de graficar el lugar de Nyquist se reduce a sustituir $s=j\omega$ en la función de transferencia de malla abierta, es decir obtener $G(j\omega)H(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$ encontrando así la proyección del contorno de Nyquist correspondiente al eje $j\omega$ para finalmente analizar solo la semicircunferencia de radio infinito.

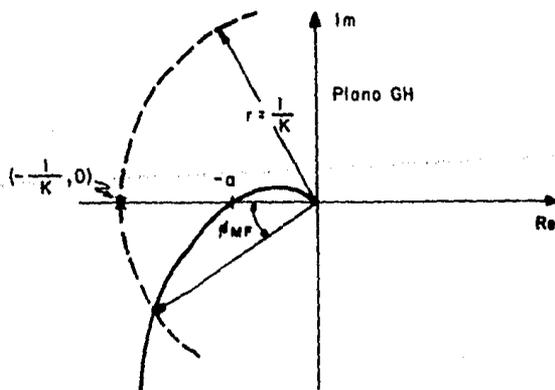


Figura 3.13 Margen de ganancia y fase para un sistema con un parámetro K

El algoritmo que aquí se considera gráfica $G(j\omega)H(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$; tomando en cuenta que el lugar de Nyquist es simétrico respecto al eje real, entonces podemos obtener el lugar de Nyquist para $0 < \omega < \infty$ y después obtener los valores simétricos cambiando el signo que corresponde, para así obtener también el lugar de Nyquist para $-\infty < \omega < 0$.

Como la función de transferencia de malla abierta es un cociente de dos polinomios en s , como se muestra a continuación:

$$G(s)H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.18)$$

sustituyendo $j\omega$ por s en la ecuación anterior:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (3.19)$$

por otro lado tenemos que para graficar el lugar de Nyquist debe separarse a $G(j\omega)H(j\omega)$ en su parte real y en su parte imaginaria, por lo tanto en la expresión (3.19) observamos que el factor $j\omega$ elevado a una cierta potencia se puede simplificar de acuerdo a lo siguiente:

$$\text{Exponentes Impares} \begin{cases} (j\omega)^p & (p=3, 7, 11, 15, 19, \dots) = -j\omega^p \\ (j\omega)^p & (p=1, 5, 9, 13, \dots) = j\omega^p \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\text{Exponentes Pares} \begin{cases} (jw)^p \quad (p=2, 6, 10, 14, 18, \dots) = -w^p \\ (jw)^p \quad (p=0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots) = w^p \end{cases} \quad (3.21)$$

tomando en cuenta las expresiones (3.20) y (3.21), podemos separar el numerador y el denominador de (3.19) en su parte real e imaginaria, como se muestra a continuación:

$$G(jw)H(jw) = \frac{(b_0 - b_2w^2 + b_4w^4 - b_6w^6 + \dots) + j(b_1w - b_3w^3 + b_5w^5 - b_7w^7 + \dots)}{(a_0 - a_2w^2 + a_4w^4 - a_6w^6 + \dots) + j(a_1w - a_3w^3 + a_5w^5 - a_7w^7 + \dots)} \quad (3.22)$$

si tenemos que:

$$NR = b_0 - b_2w^2 + b_4w^4 - b_6w^6 + \dots$$

$$NI = b_1w - b_3w^3 + b_5w^5 - b_7w^7 + \dots$$

$$DR = a_0 - a_2w^2 + a_4w^4 - a_6w^6 + \dots$$

$$DI = a_1w - a_3w^3 + a_5w^5 - a_7w^7 + \dots$$

(3.23)

entonces la expresión (3.22) será:

$$G(jw)H(jw) = \frac{NR + jNI}{DR + jDI} \quad (3.24)$$

si queremos separar parte real y parte imaginaria de $G(jw)$

$H(jw)$ tenemos que hacer los siguiente:

$$G(jw)H(jw) = \frac{NR + jNI}{DR + jDI} \cdot \frac{DR - jDI}{DR - jDI} = \frac{DR \cdot NR - jNR \cdot DI + jNI \cdot DR + NI \cdot DI}{DR^2 + DI^2} \quad (3.25)$$

simplificando y separando:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{DR \cdot NR + NI \cdot DI}{DR^2 + DI^2} + j \frac{NI \cdot DR + NR \cdot DI}{DR^2 + DI^2} \quad (3.25)$$

si:

$$PR = \frac{DR \cdot NR + NI \cdot DI}{DR^2 + DI^2} \quad (3.27)$$

$$PI = \frac{NI \cdot DR + NR \cdot DI}{DR^2 + DI^2} \quad (3.28)$$

entonces la expresión (3.26) es:

$$G(j\omega)H(j\omega) = PR + jPI$$

si la función de transferencia de malla abierta tiene un retardo de tiempo e^{-sT} entonces habrá que multiplicarlo por $G(s)H(s)$, pero como $s=j\omega$ entonces:

$$e^{-sT} \Big|_{s=j\omega} = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \sin \omega T$$

por lo tanto la función de transferencia de malla abierta con un retardo de tiempo T es:

$$G(j\omega)H(j\omega) = (PR + jPI) (\cos \omega T - j \sin \omega T)$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = (PR \cdot \cos \omega T + PI \cdot \sin \omega T) + j(PI \cdot \cos \omega T - PR \cdot \sin \omega T) \quad (3.29)$$

y así mediante la expresión (3.29) podemos calcular el lugar de Nyquist en un sistema de coordenadas cartesianas. En la siguiente sección se describe el programa computadora.

III.8 PROGRAMA PARA EL LUGAR DE NYQUIST

Ya que se tiene el algoritmo, lo que se procede a hacer es a desarrollar el programa de computadora. Al igual que el programa del capítulo anterior, este está desarrollando en lenguaje BASIC sobre la misma computadora Apple II plus de 64 K de memoria. También en este caso el programa está desarrollado en la forma clásica de manejo de programas en lenguaje BASIC, es decir el usuario del programa está "conversando" con la computadora.

El programa que aquí se desarrollará sirve para calcular y graficar el lugar de Nyquist de una función de transferencia de malla abierta con un retardo de tiempo, dicha función debe estar expresada como un cociente de dos polinomios, como se muestra a continuación:

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 K (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) e^{-sT}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.30)$$

donde K_1 es una constante dada, K es el parámetro libre al que le determinaremos su valor y T es el retardo. Cabe mencionar que el grado de los polinomios no tiene límite, y en realidad el límite lo da la capacidad de memoria de la computadora.

Las figuras geométricas que entrarán en la formación de diagramas de flujo serán las mismas que se usaron en el capítulo anterior, es decir las mostradas en la figura 2.11.

Antes de que la computadora empiece a calcular puntos del lugar de Nyquist, es necesario que tenga en memoria los valores de los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador, además del grado de cada uno de ellos así como los valores de K_1 y K junto con el retardo de tiempo, estos datos se almacenarán en las siguientes variables:

FG-Factor de Ganancia. Corresponde a K_1 de la ecuación (3.30) y como ya se dijo es una constante que frecuentemente aparece multiplicando al parámetro K y que por lo general vale la unidad.

NU - Grado del numerador

ND - Grado del denominador

T - Retardo

Los coeficientes se introducen a través de los siguientes arreglos:

CN(I)- Coeficientes del polinomio del numerador($0 < I < \text{NU}$)

CD(I)- Coeficientes del polinomio del denominador($0 < I < \text{ND}$)

La introducción de datos se hace como muestra el segmento del diagrama de flujo de la figura 3.14 en donde se da la opción de verificarlos; la misma verificación que se usa para los coeficientes en el denominador se usa en el numerador. En la figura 3.14 aparecen dimensionadas la variable $A(150,2)$ y $0\%(150)$ en donde en el arreglo $A(L,0)$ se almacenan los valores de las frecuencias, en $A(L,1)$ la parte real

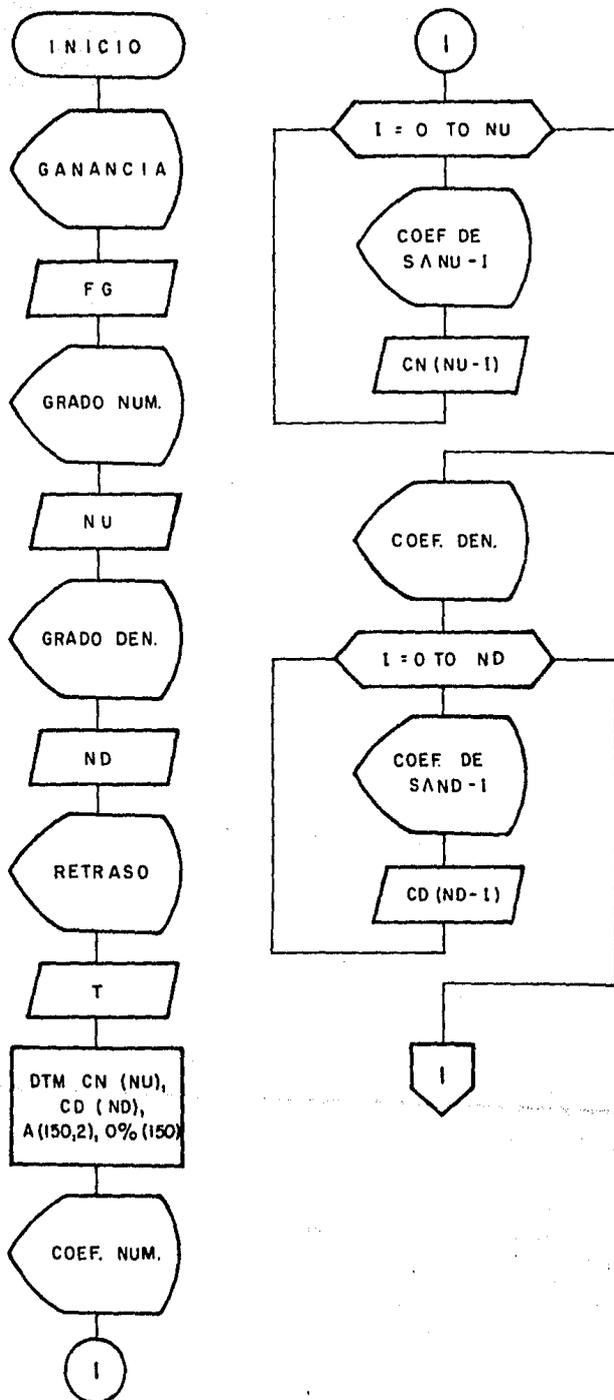


Figura 3.14 Introducción de datos y verificación

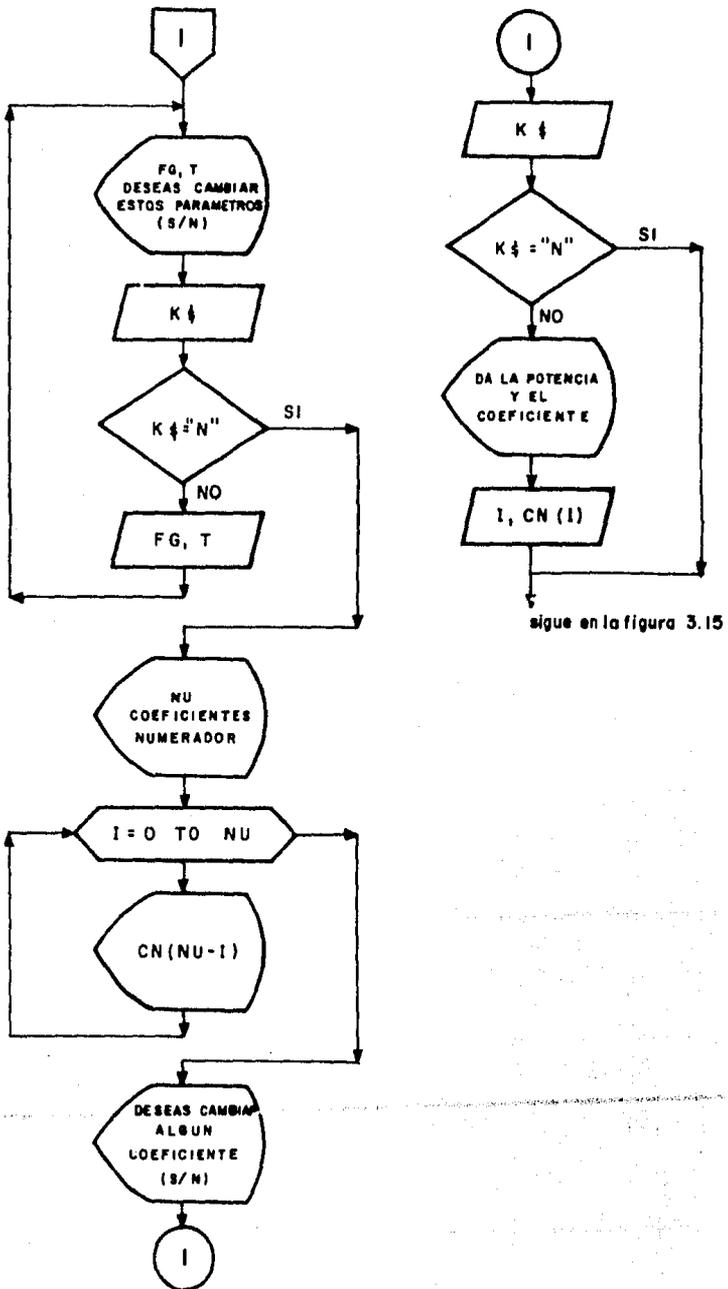


Figura 3.14 Continuación

y en $(L,2)$ la parte imaginaria de los puntos calculados; el arreglo $0\% (L)$ es un detector de puntos calculados están fuera de la pantalla, no olvidando que $0 \leq L \leq 150$.

Las siguientes variables también entran dentro del programa:

X2-Máximo valor absoluto del eje real.

Y2-Máximo valor absoluto del eje imaginario.

W -Frecuencia inicial.

WF-Frecuencia final.

WI-Frecuencia de interés.

DW-Incremento de frecuencia.

SL-Paso, o sea es la distancia ideal entre puntos contiguos calculados.

K -Distancia real entre puntos contiguos calculados y detector de cercanía al origen (no confundir con el parámetro K).

L -Número de puntos calculados ($0 \leq L \leq 150$)

LI-Aquí se almacena el número de punto que corresponde a la frecuencia de interés.

K1-Contador del número de puntos que están fuera de pantalla.

GA-Ganancia, ésta corresponde al valor que se le haya fijado a la variable K en la expresión (3.30).

Inicialmente $X2=10^{10}$, $Y2=10^{10}$, $W=0$, $WF=10^6$, $DW=.1$, $K1=0$, a las demás variables el usuario les da su valor. Es evidente que si el término independiente del polinomio del denominador vale cero entonces la frecuencia inicial no puede valer cero ya que habría una división entre cero, por lo que hay que evitar esto.

A partir de aquí se usa el algoritmo descrito en la sección anterior, tomando en cuenta que, el que haya un incremento de frecuencia DW no implica que la distancia entre puntos contiguos sea SL , por lo que los incrementos de frecuencia variarán tratando siempre de que la diferencia entre la distancia real K (no confundir con el parámetro) y el paso SL estén entre el $\pm 20\%$ de SL o $K < SL$.

En la Figura 3.15 se observa el resto del diagrama de flujo del programa, en donde:

NR-Numerador real

NI-Numerador imaginario

DR-Denominador real

DI-Denominador imaginario

DM-Magnitud del denominador (si $DM=0$ implica que se trata de un punto singular, por lo que hay que variar el valor de la frecuencia).

PR-Parte real de $G(j\omega)H(j\omega)$

PI-Parte imaginaria de $G(j\omega)H(j\omega)$

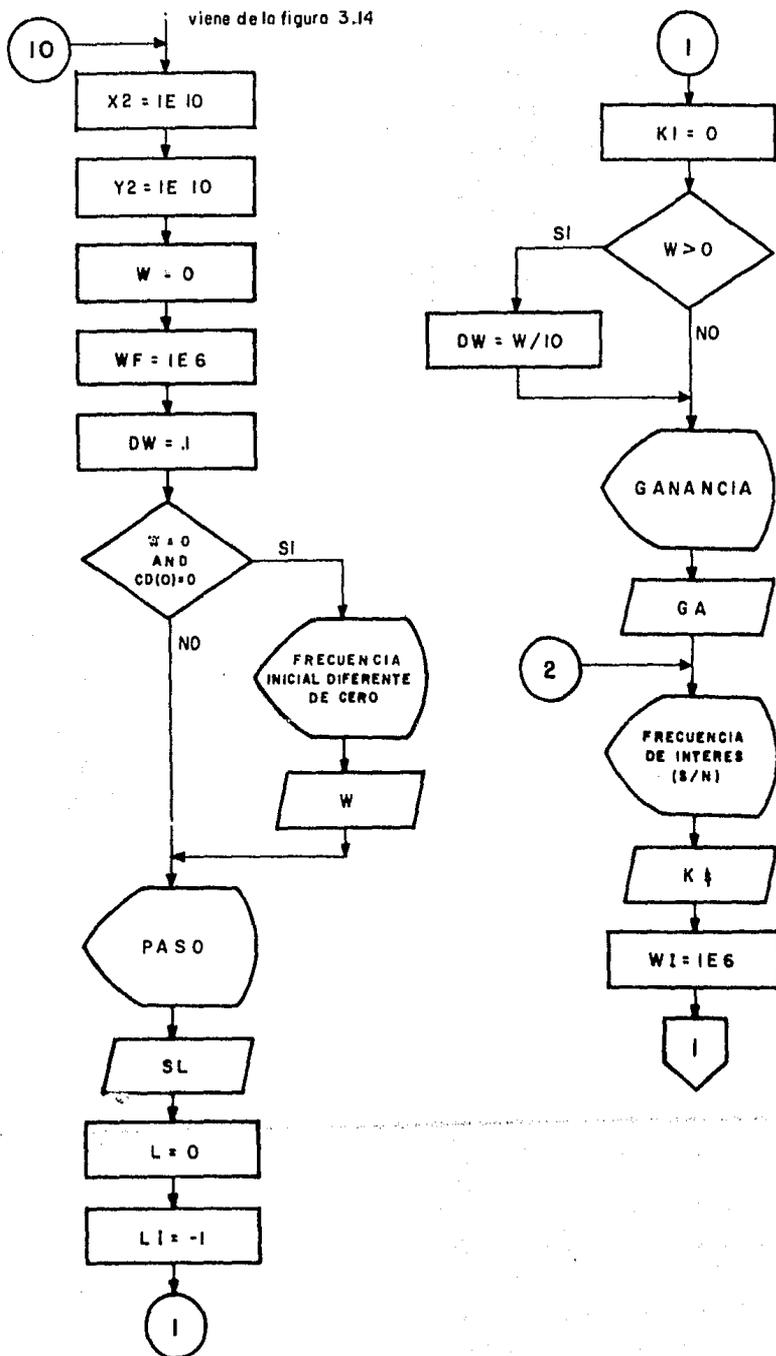


Figura 3.15 Programa principal para calcular el lugar de Nyquist

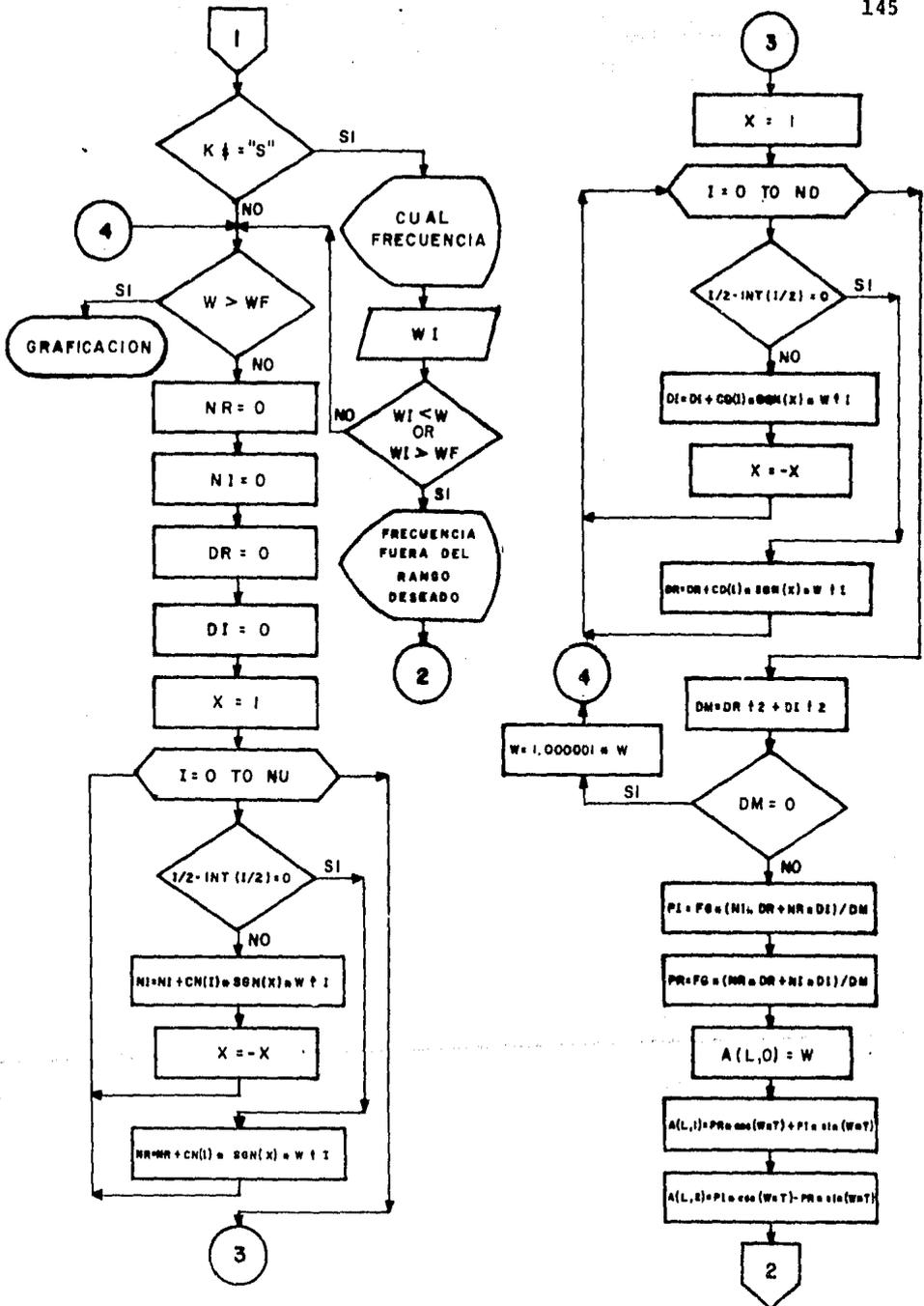


Figura 3.15 Continuación

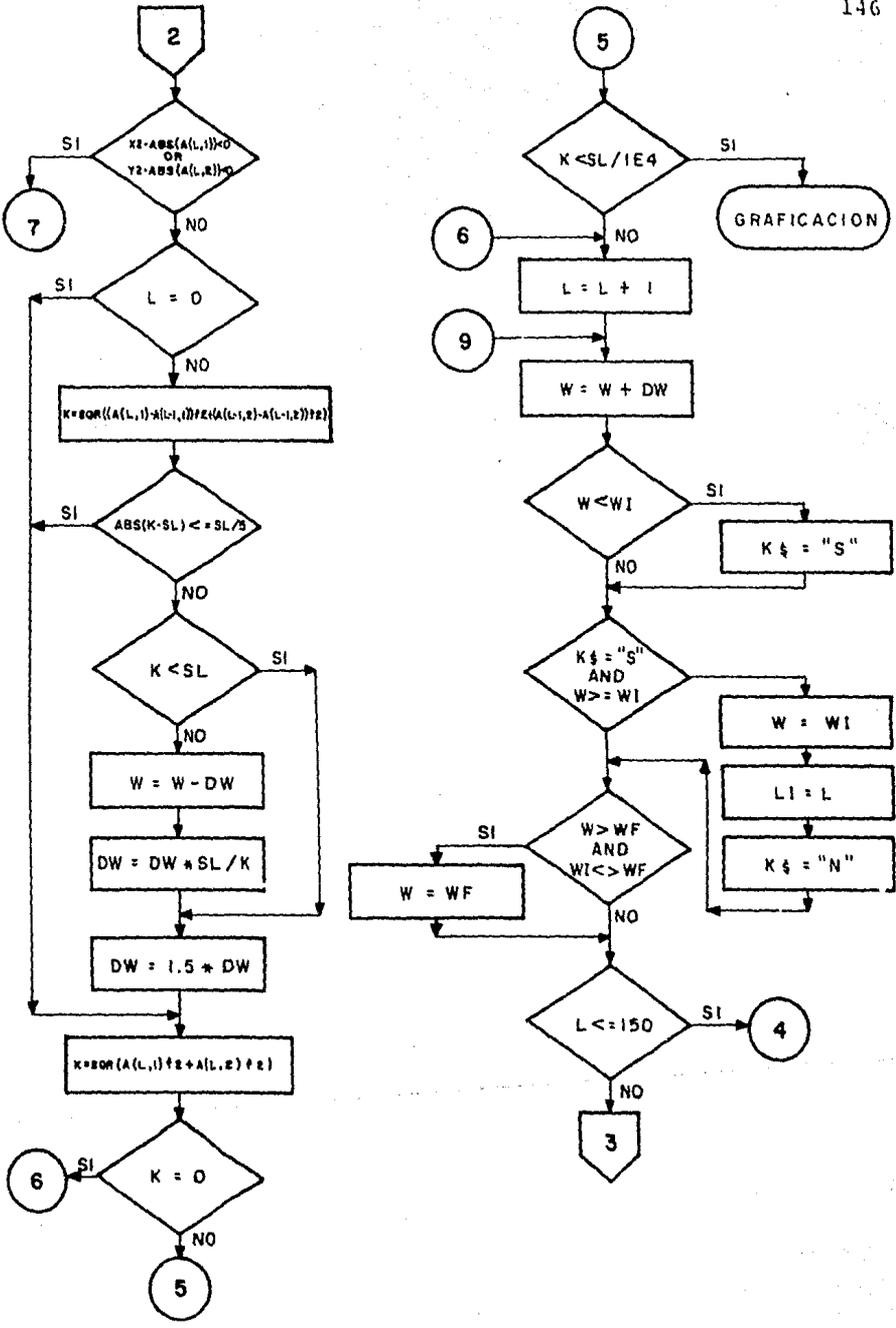


Figura 3.15 Continuación

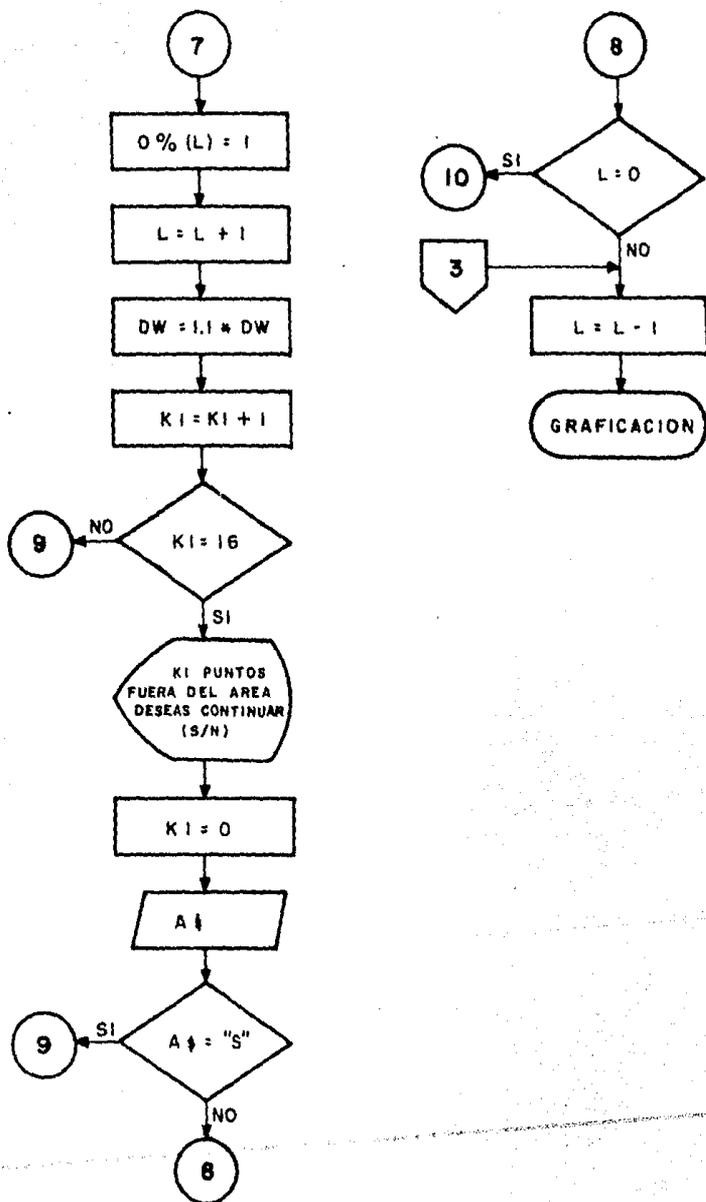


Figura 3.15 Continuación

III.9. LISTADO

En el apéndice B se muestra el listado del programa de computadora que obtiene el lugar de Nyquist, el cual es el resultado de la recopilación de todas las ideas expuestas en la sección anterior.

La parte del programa que corresponde a graficación será muy sencilla de entender con el solo hecho de observar el listado del mismo.

III.10. OPERACION DEL PROGRAMA

En esta sección se explica como el usuario deberá operar el programa, dicha explicación se hará a través de un ejemplo para su mejor comprensión.

Supongamos que se desea obtener el lugar de Nyquist de la siguiente función de transferencia de malla abierta:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

como el programa está hecho suponiendo que la función de transferencia de malla abierta es un cociente de polinomios como se muestra en la expresión 3.30, entonces tendremos que la siguiente expresión es equivalente y de esta manera cumplimos tal condición:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

por lo tanto al correr el programa los datos pedidos se darán como se muestra a continuación, considerando que las notas que aparecen solo son aclaraciones adicionales a lo que va apareciendo en la pantalla, más no son parte del programa:

GANANCIA? 1

Nota: Esta ganancia se refiere al factor K_1 de la expresión (3.30)

GRADO NUM.? 0

GRADO DEN.? 2

RETRASO? 0

COEF. NUM.

COEF. DE S^0 ? 1

COEF. DEN.

COEF. DE S^2 ? 1

COEF. DE S^1 ? 3

COEF. DE S^0 ? 2

GANANCIA = 1

RETRASO = 0

DESEAS CAMBIAR ESTOS PARAMETROS (S/N)? N

Nota: Si se desea cambiar algún parámetro por haber cometido algún error al introducir los datos, entonces se oprime S y se hace la corrección que corresponda.

GRADO NUMERADO = 0

COEFICIENTES NUMERADOR:

$S^0=1$

DESEAS CAMBIAR ALGUN COEFICIENTE (S/N)? N

GRADO DENOMINADOR=2

COEFICIENTES DENOMINADOR:

$S^2=1$

$S^1=3$

$S^0=2$

DESEAS CAMBIAR ALGUN COEFICIENTE (S/N)? N

PASO? .1

Nota. El paso es la magnitud entre punto y punto calculado; por lo general es bueno un valor de 0.1 pero si se desea variar, entonces es conveniente hacerlo multiplicándolo o dividiéndolo, según sea el caso, entre o por diez (0.01, 0.1, 1, 10, ...). El paso se varía cuando la gráfica obtenida no está completa o cuando se desea que se calculen más puntos. Cabe mencionar que el número máximo de puntos que se calculan es 150.

GANANCIA? 1

Nota: Esta ganancia se refiere al parámetro K de la expresión (3.30) y que en este caso vale la unidad.

FRECUENCIA DE INTERES (S/N)? S

CUAL FRECUENCIA? 10

Nota: Esta frecuencia se refiere a alguna frecuencia en particular a la que se desee calcular las coordenadas exactas del lugar de Nyquist.

CALCULANDO LUGAR

Nota: Al aparecer lo anterior se entiende que se están calculando puntos del lugar y cada punto significa un punto calculado, por lo que al terminar aparecerá lo siguiente:

- (1) IMPRESION DE DATOS
- (2) LUGAR DE NYQUIST
- (3) OTRA FUNCION
- (4) FIN

Nota: Si se oprime la tecla que corresponde a (1) aparecerá en la pantalla el valor de todos y cada uno de los puntos calculados junto con su respectivo valor de frecuencia, si se oprime el (3) se va al inicio del programa para así poder introducir otra función, si se oprime el (4) se sale del programa y por último si se oprime el (2) aparecerá lo siguiente:

BORRO LA PANTALLA (S/N) PRESIONA CUALQUIER TECLA DESPUES DE DESPLEGAR LA GRAFICA? S

Nota: Si no se borra la pantalla, la gráfica aparecerá so
 brepuesta en la última gráfica que se haya hecho en
 la computadora. También es importante señalar que
 el programa fue hecho considerando que el lugar de
 Nyquist es simétrico respecto al eje real, por lo
 tanto primero se calculan los puntos correspondien-
 tes a $0 < \omega < \infty$ y después lo único que se hace es cam-
 biar de signo la parte imaginaria de cada punto cal-
 culado, para así obtener el lugar de Nyquist para
 $-\infty < \omega < 0$, por esta razón al analizar la gráfica, el sen
 tido de giro que esta tenga será el sentido en que se
 empiece a dibujar la primera mitad del lugar de Nyquist
 ya que la otra mitad se dibuja por pura simetría. Des-
 pués de haberse desplegado la gráfica aparecerá:

(1) INDICA FRECUENCIA

(2) CAMBIA AREA

(3) NINGUNA

CUAL DESEAS?

Nota: Si se oprime el (1) aparecerá:

QUE FRECUENCIA?

Nota: Aquí se pondrá la frecuencia que se desee observar su
 punto correspondiente del lugar de Nyquist, para des-
 pués volver a visualizar:

(1) INDICA FRECUENCIA

(2) CAMBIA AREA

(3) NINGUNA

CUAL DESEAS?

Nota: Si se oprime el (2) es para cambiar el área de visualización de la gráfica, es decir se puede achicar o amplificar la gráfica, y por último si se prime (3) se regresará para que nuevamente aparezca:

(1) IMPRESION DE DATOS

(2) LUGAR DE NYQUIST

(3) OTRA FUNCION

(4) FIN

CUAL DESEAS?

III.11. EJEMPLOS SELECTOS

En esta sección se presentan algunas funciones de transferencia de malla abierta de las que se a obtenido el lugar de Nyquist a través de la computadora.

$$a) G(s)H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$b) G(s)H(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$c) G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$d) G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$e) G(s)H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

$$f) G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$g) G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$h) G(s)H(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

BIBLIOGRAFIA

1. AUSLANDER, D. M., Y. TAKAHASHI y M.J. RABINS, "Introducción a Sistemas y Control", Mc Graw-Hill, 1a. Edición, pp. 238-260, 1974.
2. DORF, R. C., "Modern Control System", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2a. Edición, pp. 194-278, 1974.
3. HOFFMAN, C. H., "How to Check Linear Systems Stability: III. Locating the Roots Graphically", Control Engineering, pp. 71-78, Junio, 1965.
4. KUO, B.C., "Automatic Control Systems", Prentice-Hall Inc., 3a. Edición, pp. 327-372 y 467-502, 1975.
5. NYQUIST, H., "Regeneration Theory", Bell System Tech. J., Vol. 11, pp. 126-147, Enero 1932.
6. OGATA, K., "Ingeniería de Control Moderna", Prentice-Hall Hispanoamericana, 1a. Edición, pp. 406-515, 1980.

CONCLUSIONES

A través de este trabajo de tesis se puede observar como la computadora puede jugar un papel muy importante en el desarrollo de alguna asignatura en el área de Ingeniería, ya que esta puede servir como apoyo didáctico para el profesor, explicando en clase la parte teórica y, en la parte práctica, es decir al hacer problemas sobre la teoría, se auxiliara de la computadora, ahorrando así mucho tiempo y pudiendo resolver más problemas en menos tiempo, con la ventaja de que si se tiene algún problema complejo este se podrá resolver a través de la computadora, ya que los métodos de estabilidad aquí tratados (Lugar Geométrico de las Raíces y Criterio de Estabilidad de Nyquist) se hacían casi inaccesibles para usar cuando se tenía un sistema un tanto complejo, por lo que ahora es todo lo contrario ya que hay una ganancia significativa en velocidad y exactitud al hacer las gráficas correspondientes a cada método a través de los programas desarrollados.

Es importante hacer notar que con los programas se puede analizar la estabilidad de sistemas complejos a través de los métodos estudiados, cosa que sin el uso de la computadora requiere de demasiados cálculos, dando lugar a errores, además de que las gráficas así obtenidas solo son aproximadas.

GLOSARIO DE TERMINOS

- ECUACION CARACTERISTICA:** Es el polinomio del denominador de la función de transferencia de malla cerrada igualado a cero.
- FUNCION ANALITICA:** Una función $F(s)$ es analítica si existe en todos los puntos de una región del plano complejo (lo que equivale a que tenga un límite finito y único en todos los puntos de la región mencionada).
- FUNCION DE TRANSFERENCIA DIRECTA:** Es la relación entre la salida y la señal de error actuante.
- FUNCION DE TRANSFERENCIA DE MALLA CERRADA:** Es la relación entre la salida y la entrada de un sistema en el dominio de Laplace.
- FUNCION DE TRANSFERENCIA DE MALLA ABIERTA:** Es la relación entre la señal de realimentación y el error actuante.
- MARGEN DE GANANCIA:** Es el mínimo factor por el cual hay que multiplicar $G_1(s)H_1(s)$ para que el sistema se vuelva inestable.
- MARGEN DE FASE:** Es el mínimo ángulo que debe sumarse a $G_1(s)H_1(s)$ para que el sistema sea inestable.
- PATRON DE PESO:** Es la respuesta a impulso en el dominio del tiempo.
- RESPUESTA EN FRECUENCIA:** Es la respuesta que tiene un sistema cuando se le aplica una entrada senoidal.
- SINGULARIDAD:** Es un punto en donde la función $F(s)$ no es analítica.
- SISTEMA:** Una relación entre entradas y salidas.
- SISTEMA ASINTOTICAMENTE ESTABLE:** Es cuando a un sistema le aplicamos una perturbación y sus efectos desaparecen con el tiempo, es decir la salida es igual con perturbación o sin ella.

SISTEMA MARGINALMENTE ESTABLE: Es cuando a un sistema le aplicamos una perturbación y su salida varía un poco, después de haber aplicado la perturbación.

SISTEMA INESTABLE: Es cuando a un sistema le aplicamos una perturbación y la salida es marcadamente diferente de la que obtendríamos sin la perturbación.

APENDICE A

**Listado del Programa de Computadora para obtener
el Lugar Geométrico de las Raíces**

```

10 PRINT : PRINT "FACTOR DE GANANCIA"; INPUT FB; PRINT : PRIN
T "# DIFERENTE DE CEROS"; INPUT NZ; PRINT : PRINT "# DIFERENTE
DE POLOS"; INPUT NP; PRINT : PRINT "RETRASO"; INPUT T
20 IF NZ = 0 GOTO 40
30 DIM ZR(NZ),ZI(NZ),MZ(NZ); PRINT : HTAB (10); INVERSE : PRIN
T "*****CEROS*****"; NORMAL : PRINT : PRINT "PARTE REAL,PARTE I
MAG.,MULTIPLICIDAD"; FOR I = 1 TO NZ; INPUT ZR(I),ZI(I),MZ(I);
NEXT I
40 IF NP = 0 GOTO 60
50 DIM PR(NP),PI(NP),MP(NP); PRINT : HTAB (10); INVERSE : PRIN
T "*****POLOS*****"; NORMAL : PRINT : PRINT "PARTE REAL,PARTE I
MAG.,MULTIPLICIDAD"; FOR I = 1 TO NP; INPUT PR(I),PI(I),MP(I);
NEXT I
60 PRINT : PRINT "FACTOR DE GANANCIA="FB; PRINT "RETRASO="T
70 PRINT : PRINT "DESEAS CAMBIAR ALGUNO DE ESTOS PARAMETROS (S
/N)"; GET K$; IF K$ = "N" GOTO 90
80 PRINT "FACTOR DE GANANCIA"; INPUT FB; PRINT "RETRASO"; IN
PUT T; GOTO 60
90 PRINT : PRINT "NUMERO DIFERENTE DE CEROS="NZ; IF NZ = 0 GOT
O 170
100 PRINT "LOS CEROS SON:"; PRINT "PARTE REAL,PARTE IMAG.,MULT
IPLICIDAD"; FOR I = 1 TO NZ; PRINT ZR(I); TAB( 14);ZI(I); TAB(
28);MZ(I); NEXT I; PRINT : PRINT "DESEAS CAMBIAR ALGUN CERO (S/
N)"; GET K$; IF K$ = "N" GOTO 120
110 PRINT : PRINT "DA # DE CERO (1 A "NZ" ),PARTE REAL,PARTE I
MAG.,MULTIPLICIDAD"; INPUT I,ZR(I),ZI(I),MZ(I); GOTO 100
120 K = 0; FOR I = 1 TO NZ; IF K = 0 AND ZI(I) = 0 GOTO 160
130 IF K = 0 THEN K = I; GOTO 160
140 IF ZR(I) = ZR(K) AND ZI(I) = - ZI(K) AND MZ(I) = MZ(K) TH
EN K = 0; GOTO 160
150 PRINT : PRINT "CEROS COMPLEJOS CONJUGADOS DEBEN SER ADYACE
NTES"; GOTO 100
160 NEXT I; IF K < > 0 THEN PRINT : PRINT "CEROS COMPLEJOS D
EBEN SER PARES"; GOTO 100
170 PRINT : PRINT "NUMERO DIFERENTE DE POLOS="NP; IF NP = 0 GO
TO 250
180 PRINT "LOS POLOS SON:"; PRINT "PARTE REAL,PARTE IMAG.,MULT
IPLICIDAD"; FOR I = 1 TO NP; PRINT PR(I); TAB( 14);PI(I); TAB(
28);MP(I); NEXT I; PRINT : PRINT "DESEAS CAMBIAR ALGUN POLO (S/
N)"; GET K$; IF K$ = "N" GOTO 200
190 PRINT : PRINT "DA # DE POLO (1 A "NP" ),PARTE REAL,PARTE I
MAG.,MULTIPLICIDAD"; INPUT I,PR(I),PI(I),MP(I); GOTO 180
200 K = 0; FOR I = 1 TO NP; IF K = 0 AND PI(I) = 0 GOTO 240
210 IF K = 0 THEN K = I; GOTO 240
220 IF PR(I) = PR(K) AND PI(I) = - PI(K) AND MP(I) = MP(K) TH
EN K = 0; GOTO 240
230 PRINT : PRINT "POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS DEBEN SER ADYACE
NTES"; GOTO 180
240 NEXT I; IF K < > 0 THEN PRINT : PRINT "POLOS COMPLEJOS D
EBEN SER PARES"; GOTO 180
250 FD = 3.141592655;BP% = 0;S% = 0;P% = 0; DIM A(200,2)
260 PRINT : PRINT "LUGAR GEOMETRICO POSITIVO O NEGATIVO (1/-1)
"; INPUT RT; PRINT "PASO"; INPUT ST; PRINT "EXACTITUD"; INPLU
T E1;E2 = E1 / 100;K1 = 0

```

```

270 PRINT "GANANCIA DE INTERES(S/N)": GET G$: IF G$ = "S" THEN
PRINT "GANANCIA"; INPUT KI: IF SGN (RT * KI) = - 1 THEN P
RINT "GANANCIA DEBE SER DE SIGNO CONTRARIO": GOTO 270
280 PRINT "AREA DESEADA(EL NUMERO QUE AQUI SE INTRODUZCA CORRE
SPONDE A LA MAGNITUD A PARTIR DEL ORIGEN HACIA LAS PARTES POSI
IVA O NEGATIVA DE CADA EJE)DE PREFERENCIA UN MULTIPLO DE S)":
INPUT D:J = 1
290 IF J > NP THEN PRINT "RAMAS DENTRO DEL AREA COMPLETAS": G
OTO 530
295 II = MP(J) - 1
300 L = 0:LI = - 1:K1 = 0:SS = ST:SI = SS
310 A(L,0) = 0:A(L,1) = PR(J):A(L,2) = PI(J):X0 = PR(J):Y0 = PI
(J)
320 IF X0 < - D OR X0 > D OR Y0 < - D OR Y0 > D THEN J = J +
1: GOTO 290
330 GOSUB 2000:SA = (F + 2 * II * FD) / MP(J): GOSUB 4000:AG =
SA: PRINT : PRINT "CALCULANDO RAMA"; GOTO 350
340 KC = 0:SA = AG:SS = SS / 4:SI = SS: IF ABS (X) < 1 AND AB
S (Y) < 1 AND SS < ST / 256 THEN BP% = 1:X0 = A(L,1):Y0 = A(L,2
):SS = ST / 256: GOSUB 2200
350 X0 = A(L,1) + SS * COS (SA):Y0 = A(L,2) + SS * SIN (SA):
GOSUB 2100: IF P% = 1 THEN SS = 4 * SS / 5:P% = 0: GOTO 350
360 RE = - Y:IM = X: GOSUB 3000: IF ABS (AG - AN) < = FD / 4
OR ABS (AG - (AN + 2 * FD)) < = FD / 4 OR ABS (AN - (AG + 2
* FD)) < = FD / 4 GOTO 380
370 GOTO 340
380 A1 = AN: GOSUB 2000:DA = - F / (Y * COS (SA) - X * SIN (
SA)) / SS: IF ABS (F) < E2 OR ABS (DA) < E1 THEN E2 = E1 / 10
0:K1 = 0: GOTO 400
390 SA = SA + DA: GOSUB 4000: GOSUB 9000: GOTO 350
400 IF X0 < - D OR X0 > D OR Y0 < - D OR Y0 > D GOTO 530
410 L = L + 1:A(L,1) = X0:A(L,2) = Y0
420 GOSUB 8000: IF ABS (A(L,0)) > = 1E6 GOTO 530
430 IF ABS (A(L,0)) + 1E - 3 < ABS (A(L - 1,0)) THEN L = L -
1: GOTO 340
440 IF ABS (X) > 1E4 OR ABS (Y) > 1E4 GOTO 530
450 IF G$ = "N" OR LI < > - 1 GOTO 480
460 IF ABS (A(L,0) - KI) < = 1E - 4 THEN LI = L:SS = SI / 2:
S% = 0: GOTO 480
470 IF ABS (KI) < ABS (A(L,0)) THEN L = L - 1:SS = SS * ABS
((KI - A(L,0)) / (A(L + 1,0) - A(L,0))):S% = 1: GOTO 350
480 IF S% = 1 GOTO 510
490 IF SS < ST THEN KC = KC + 1: IF KC = > 4 THEN SS = 2 * SS
:KC = 0: IF SS > ST THEN SS = ST
500 SI = SS
510 SA = A1: IF ABS (X) > E1 OR ABS (Y) > E1 THEN AG = A1
520 PRINT ".": IF L < 200 GOTO 350
530 PRINT : PRINT "(1)IMPRESION DE DATOS": PRINT "(2)GRAFICA":
PRINT "(3)OTRA RAMA": PRINT "(4)OTRA FUNCION": PRINT "(5)FIN":
PRINT : PRINT "CUAL DESEAS": GET K: ON K GOTO 540,590,560,580,
585
540 TEXT : PRINT "GANANCIA": TAB( 14):"PARTE REAL": TAB( 30):"
PARTE IMAG.": PRINT
550 FOR I = 0 TO L: PRINT A(I,0): TAB( 13):A(I,1): TAB( 29):A(
I,2): NEXT I: GOTO 530

```

```

560 IF II = 0 THEN J = J + 1: GOTO 290
570 II = II - 1: GOTO 300
580 CLEAR : GOTO 10
585 HOME : NEW : END
590 HCOLOR= 3: ROT= 0: SCALE= 1:EJ = 2 * D:XD = 241 / EJ:YD =
173 / EJ
600 PRINT : PRINT "BORRO LA PANTALLA(S/N)PRESIONA CUALQUIER TE
CLA DESPUES DE DESPLEGAR LA GRAFICA": GET K*
610 IF K* = "S" THEN HGR2 : GOSUB 900: GOSUB 1000: GOTO 630
620 POKE - 16304,0: POKE - 16299,0
630 XA = 157 + A(0,1) * XD:YA = 88 - A(0,2) * YD
640 FOR I = 1 TO L
650 XB = 157 + A(I,1) * XD:YB = 88 - A(I,2) * YD
660 HPLOT XA,YA TO XB,YB
670 XA = XB:YA = YB
680 NEXT I
690 GET K*
700 TEXT : PRINT : PRINT "MARCA DE GANANCIA(S/N)": GET K*
710 IF K* = "N" GOTO 530
720 PRINT "GANANCIA": INPUT W
730 L1 = - 1: POKE - 16304,0: POKE - 16299,0
740 FOR I = 1 TO L: IF W > = A(I - 1,0) AND W < = A(I,0) THE
N L1 = I: GOTO 760
750 NEXT I
760 IF L1 = - 1 THEN TEXT : PRINT "GANANCIA FUERA DE RANGO":
GOTO 700
770 X = W - A(L1 - 1,0):Y = A(L1,0) - W
780 IF X < Y THEN L1 = L1 - 1
790 X = 157 + A(L1,1) * XD:Y = 88 - A(L1,2) * YD
800 HPLOT X - 2,Y - 2 TO X - 2,Y + 2 TO X + 2,Y + 2 TO X + 2,Y
- 2 TO X - 2,Y - 2
810 GET K*: TEXT
820 PRINT "GANANCIA MAS CERCANA ES=";A(L1,0): GOTO 700
900 REM ESTA SUBROUTINA TRAZAS LOS EJES EN LA PANTALLA
910 FOR I = 2 TO 174 STEP 4: HPLLOT 35,I: HPLLOT 95,I: HPLLOT 155
,I: HPLLOT 215,I: HPLLOT 275,I: NEXT I
920 FOR I = 35 TO 275 STEP 4: HPLLOT I,2: HPLLOT I,45: HPLLOT I,8
8: HPLLOT I,131: HPLLOT I,174: NEXT I
930 RETURN
999 REM ESTA SUBROUTINA GRAFICA LOS POLOS Y CEROS ABI COMO TOD
OS LOS CARACTERES ALFANUMERICOS
1000 IF NZ = 0 GOTO 1050
1010 A* = "0"
1020 FOR I = 1 TO NZ: IF ZR(I) < = - D OR ZR(I) > = D OR ZI
(I) < = - D OR ZI(I) > = D GOTO 1040
1030 XO = 155 + ZR(I) * XD - 2:YO = 88 - ZI(I) * YD + 3: GOSUB
1900
1040 NEXT I
1050 IF NP = 0 GOTO 1100
1060 A* = "X"
1070 FOR I = 1 TO NP: IF PR(I) < = - D OR PR(I) > = D OR PI
(I) < = - D OR PI(I) > = D GOTO 1090
1080 XO = 155 + PR(I) * XD - 2:YO = 88 - PI(I) * YD + 3: GOSUB
1900

```

```

1090 NEXT I
1100 HPLLOT 152,8 TO 155,2 TO 158,8
1110 HPLLOT 269,85 TO 275,88 TO 269,91
1120 A$ = "IM";XO = 171;YO = 9: GOSUB 1900
1130 A$ = "RE";XO = 269;YO = 100: GOSUB 1900
1140 A$ = STR$(D);XO = 26;YO = 6: GOSUB 1900;XO = 275;YO = 18
3: GOSUB 1900
1150 A$ = STR$(-D);XO = 26;YO = 177: GOSUB 1900
1160 A$ = STR$(D/2);XO = 26;YO = 48: GOSUB 1900;XO = 219;YO
= 183: GOSUB 1900
1170 A$ = STR$(-D/2);XO = 26;YO = 134: GOSUB 1900;XO = 99
;YO = 183: GOSUB 1900
1180 A$ = "LUGAR GEOMETRICO": IF RT > 0 THEN A$ = A$ + " POSITI
VO": GOTO 1200
1190 A$ = A$ + " NEGATIVO"
1200 XO = 232;YO = 191: GOSUB 1900
1210 RETURN
1900 FOR JJ = LEN(A$) TO 1 STEP -1:Z = ASC(MID$(A$,JJ,
1)) - 30: DRAW Z AT XO,YO;XO = XO - 7: NEXT JJ: RETURN
2000 REM SUBROUTINA CONDICION ANGULO (EVALUA F(XO,YO))
2010 F = 0
2020 IF NZ = 0 GOTO 2040
2030 FOR I = 1 TO NZ:RE = XO - ZR(I):IM = YO - ZI(I): GOSUB 30
00:F = F + MZ(I) * AN: NEXT I
2040 IF NP = 0 GOTO 2060
2050 FOR I = 1 TO NP:RE = XO - PR(I):IM = YO - PI(I): GOSUB 30
00:F = F - MP(I) * AN: NEXT I
2060 F = F - T * YO
2070 IF RT > 0 THEN F = FD + F
2080 IF F < -FD THEN F = F + 2 * FD: GOTO 2080
2090 IF F > = FD THEN F = F - 2 * FD: GOTO 2090
2095 RETURN
2100 REM SUBROUTINA 1A Y 2A DERIVADAS PARCIALES DE F(X,Y) EN XO
,YO
2110 X = 0;Y = 0;XX = 0;YY = 0;XY = 0
2120 IF NZ = 0 GOTO 2140
2130 FOR I = 1 TO NZ:Q = XO - ZR(I):P = YO - ZI(I):TE = P * P
+ Q * Q: IF TE = 0 THEN P% = 1: PRINT "PUNTO DE PRUEBA ES UN CE
RO": RETURN
2132 X = X - MZ(I) * P / TE;Y = Y + MZ(I) * Q / TE
2134 IF BP% = 0 GOTO 2139
2136 XX = XX + 2 * MZ(I) * P * Q / TE / TE;XY = XY - MZ(I) * (Q
* Q - P * P) / TE / TE
2139 NEXT I
2140 IF NP = 0 GOTO 2160
2150 FOR I = 1 TO NP:Q = XO - PR(I):P = YO - PI(I):TE = P * P
+ Q * Q: IF TE = 0 THEN P% = 1: PRINT "PUNTO DE PRUEBA ES UN P
OLO": RETURN
2152 X = X + MP(I) * P / TE;Y = Y - MP(I) * Q / TE
2154 IF BP% = 0 GOTO 2159
2156 XX = XX - 2 * MP(I) * P * Q / TE / TE;XY = XY + MP(I) * (Q
* Q - P * P) / TE / TE
2159 NEXT I
2160 Y = Y - T;YY = -XX
2170 RETURN
2200 REM SUBROUTINA PUNTO SILIA

```

```

2205 GOSUB 2000: GOSUB 2100
2206 IF P% = 1 THEN X0 = X0 + E1 / 2 * COS (SA):YO = YO + E1
/ 2 * SIN (SA):P% = 0: GOTO 2205
2207 IF ABS (X) < 1E - 15 AND ABS (Y) < 1E - 15 GOTO 2225
2210 Z = XX * X + XY * XY: IF Z = 0 GOTO 2225
2212 DX = - (XX * X + Y * XY) / Z: DY = (XX * Y - X * XY) / Z
2215 IF ABS (DX) < 4 * SS AND ABS (DY) < 4 * SS GOTO 2219
2218 SS = SS / 4: DX = SS * COS (SA): DY = SS * SIN (SA)
2219 X0 = X0 + DX: YO = YO + DY
2220 IF ABS (DX) > E1 OR ABS (DY) > E1 GOTO 2205
2225 SS = ST: SI = SS: BP% = 0: K = 1: L = L + 1: A(L,1) = X0: A(L,2)
= YO: GOSUB B000: IF ABS (A(L,0) - KI) < = 1E - 4 THEN LI =
L
2230 PH = FD / K: DX = SS / 25 * COS (PH + SA - FD): DY = SS / 2
5 * SIN (PH + SA - FD): XP = A(L,1) + DX: YP = A(L,2) + DY
2240 X0 = XP: YO = YP: GOSUB 2000: IF ABS (F) > 1 GOTO 2242
2241 GOSUB 2100: RE = - Y: IM = X: GOSUB 3000: SL = AN: RE = DX: I
M = DY: GOSUB 3000: IF ABS (AN - SL) < = .5 OR ABS (AN - (SL
+ 2 * FD)) < = .5 OR ABS (SL - (AN + 2 * FD)) < = .5 GOTO 2
250
2242 K = K + 1: GOTO 2230
2250 SA = AN: AG = SA: RETURN
3000 REM SUBROUTINA
3010 IF RE > 0 THEN AN = ATN (IM / RE): GOTO 3050
3020 IF RE = 0 THEN AN = FD / 2 * SGN (IM): GOTO 3050
3030 IF IM = 0 THEN AN = - FD: GOTO 3050
3040 AN = ATN (IM / RE) + FD * SGN (IM)
3050 RETURN
4000 REM SUBROUTINA NORMALIZA
4010 IF SA > = FD THEN SA = SA - 2 * FD: GOTO 4010
4020 IF SA < - FD THEN SA = SA + 2 * FD: GOTO 4020
4030 RETURN
B000 REM SUBROUTINA CALCULO DE GANANCIA
B010 A(L,0) = 1
B020 IF NZ = 0 GOTO B040
B030 FOR I = 1 TO NZ: Q = X0 - ZR(I): P = YO - ZI(I): TE = P * P
+ Q * Q: TE = TE ^ MZ(I): IF TE = 0 THEN A(L,0) = RT * 1E30: RET
URN
B035 A(L,0) = A(L,0) / TE: NEXT I
B040 IF NP = 0 GOTO B060
B050 FOR I = 1 TO NP: Q = X0 - PR(I): P = YO - PI(I): TE = P * P
+ Q * Q: TE = TE ^ MP(I): A(L,0) = A(L,0) * TE: NEXT I
B060 A(L,0) = RT * SQR (A(L,0)) * EXP (X0 * T) / FG: RETURN
9000 K1 = K1 + 1: IF K1 = 10 THEN K1 = 0: E2 = 10 * E2: IF E2 >
1E - 4 THEN INVERSE: PRINT "EXACTITUD PARA EL SIGUIENTE PUNTO
="E2" ":; NORMAL
9010 RETURN

```

APENDICE B

**Listado del Programa de Computadora para obtener
el Lugar de Nyquist.**

```

9 CLEAR
10 PRINT : PRINT "GANANCIA";: INPUT FG: PRINT : PRINT "GRADO N
UM.":: INPUT NU: PRINT : PRINT "GRADO DEN.":: INPUT ND: PRINT
20 PRINT "RETRASO";: INPUT T: DIM CN(NU),CD(ND),A(150,2),O%(15
0): PRINT : PRINT "COEF.NUM.": FOR I = 0 TO NU: PRINT : PRINT "
COEF. DE S^"NU - I;: INPUT CN(NU - I): NEXT I
30 PRINT : PRINT "COEF.DEN.": FOR I = 0 TO ND: PRINT : PRINT "
COEF. DE S^"ND - I;: INPUT CD(ND - I): NEXT I
40 PRINT : PRINT "GANANCIA="FG: PRINT "RETRASO="T
50 PRINT : PRINT "DESEAS CAMBIAR ESTOS PARAMETROS (S/N)":: GET
K$: IF K$ = "N" GOTO 70
60 PRINT "GANANCIA";: INPUT FG: PRINT "RETRASO";: INPUT T: GOT
O 50
70 PRINT : PRINT "GRADO NUMERADOR="NU: PRINT "COEFICIENTES NUM
ERADOR":: FOR I = 0 TO NU: PRINT "S^"NU - I; TAB( 5); "="; TAB(
8);CN(NU - I): NEXT I
80 PRINT : PRINT "DESEAS CAMBIAR ALGUN COEFICIENTE (S/N)":: GE
T K$: IF K$ = "N" GOTO 100
90 PRINT "DA LA POTENCIA Y EL COEFICIENTE":: INPUT I,CN(I): GO
TO 70
100 PRINT : PRINT "GRADO DENOMINADOR="ND: PRINT "COEFICIENTES
DENOMINADOR":: FOR I = 0 TO ND: PRINT "S^"ND - I; TAB( 5); "=";
TAB( 8);CD(ND - I): NEXT I
110 PRINT : PRINT "DESEAS CAMBIAR ALGUN COEFICIENTE (S/N)":: G
ET K$: IF K$ = "N" GOTO 130
120 PRINT "DA LA POTENCIA Y EL COEFICIENTE":: INPUT I,CD(I): G
OTO 100
130 X2 = 1E10;Y2 = 1E10;W = 0;WF = 1E6;DW = .1
145 IF W = 0 AND CD(0) = 0 THEN PRINT : PRINT "FRECUENCIA INI
CIAL DIFERENTE DE CERO":: INPUT W
150 PRINT : PRINT "PASO":: INPUT SL:L = 0;LI = - 1;KI = 0: IF
W > 0 THEN DW = W / 10
155 PRINT : PRINT "GANANCIA";: INPUT GA
160 PRINT : PRINT "FRECUENCIA DE INTERES (S/N)":: GET K$:WI =
1E6: IF K$ = "S" THEN PRINT : PRINT "CUAL FRECUENCIA":: INPUT
WI: IF WI < W OR WI > WF THEN PRINT "FRECUENCIA FUERA DEL RANG
O DESEADO": GOTO 160
165 PRINT : PRINT "CALCULANDO LUGAR":: GOTO 180
170 W = 1.000001 * W
180 IF W > WF GOTO 455
190 NR = 0;NI = 0;DR = 0;DI = 0
200 X = 1: FOR I = 0 TO NU: IF I / 2 - INT ( I / 2) = 0 GOTO 22
0
210 NI = NI + CN(I) * SGN (X) * W ^ I;X = - X: GOTO 230
220 NR = NR + CN(I) * SGN (X) * W ^ I
230 NEXT I
240 X = 1: FOR I = 0 TO ND: IF I / 2 - INT ( I / 2) = 0 GOTO 26
0
250 DI = DI + CD(I) * SGN (X) * W ^ I;X = - X: GOTO 270
260 DR = DR + CD(I) * SGN (X) * W ^ I
270 NEXT I
280 DM = DR ^ 2 + DI ^ 2: IF DM = 0 GOTO 170
290 PI = FG * (NI * DR - NR * DI) / DM:PR = FG * (NR * DR + NI
* DI) / DM

```

```

310 A(L,0) = W:A(L,1) = PR * COS (W * T) + PI * SIN (W * T):A
(L,2) = PI * COS (W * T) - PR * SIN (W * T)
340 IF X2 - ABS (A(L,1)) < 0 OR Y2 - ABS (A(L,2)) < 0 GOTO 4
32
360 IF L = 0 GOTO 410
370 K = SQR ((A(L,1) - A(L - 1,1)) ^ 2 + (A(L,2) - A(L - 1,2))
^ 2): IF ABS (K - SL) < = SL / 5 GOTO 410
380 IF K < SL GOTO 400
390 W = W - DW:DW = DW * SL / K: GOTO 440
400 DW = 1.5 * DW
410 K = SQR (A(L,1) ^ 2 + A(L,2) ^ 2): IF K = 0 GOTO 430
420 IF K < SL / 1E4 GOTO 460
430 L = L + 1: GOTO 440
432 O%(L) = 1:L = L + 1:DW = 1.1 * DW:K1 = K1 + 1: IF K1 = 16 G
OTO 450
440 W = W + DW: IF W < WI THEN K$ = "S"
441 IF K$ = "S" AND W > = WI THEN W = WI:LI = L:K$ = "N"
442 IF W > WF AND WI < > WF THEN W = WF
445 IF L < = 150 THEN PRINT ".": GOTO 180
446 GOTO 455
450 PRINT : PRINT K1" PUNTOS FUERA DEL AREA": PRINT "DESEAS CO
NTINUAR (S/N)": K1 = 0: GET A$: IF A$ = "S" GOTO 440
451 IF L = 0 GOTO 130
455 L = L - 1
460 PRINT : PRINT "(1)IMPRESION DE DATOS": PRINT "(2)LUGAR DE
NYQUIST": PRINT "(3)OTRA FUNCION": PRINT "(4)FIN": PRINT : PRIN
T "CUAL DESEAS": GET K: ON K GOTO 470,490,9,485
470 TEXT : PRINT "FRECUENCIA": TAB( 14):"PARTE REAL": TAB( 30)
:"PARTE IMAG.": PRINT
480 FOR I = 0 TO L: PRINT A(I,0): TAB( 13):GA * A(I,1): TAB( 2
9):GA * A(I,2): NEXT I: PRINT : GOTO 460
485 END
490 N1 = 0:N2 = L: GOSUB 830: GOSUB 500: GOTO 460
500 HCOLOR= 3: ROT= 0: SCALE= 1:SH = 2 * X2:SV = 2 * Y2:XD = 2
41 / SH:YD = 173 / SV
510 PRINT : PRINT "BORRO LA PANTALLA(S/N) PRESIONA CUALQUIER T
ECLA DESPUES DE DESPLEGAR LA GRAFICA": GET K$
520 IF K$ = "S" THEN HGR2 : GOSUB 1000: GOSUB 1100: GOTO 535
530 POKE - 16304,0: POKE - 16299,0
535 SIM = - 1
540 XA = 157 + GA * A(N1,1) * XD:YA = 88 - GA * A(N1,2) * YD
550 FOR I = N1 + 1 TO N2:XB = 157 + GA * A(I,1) * XD:YB = 88 -
GA * A(I,2) * YD
560 IF O%(I - 1) = 1 OR O%(I) = 1 GOTO 580
570 HPLLOT XA,YA TO XB,YB
580 XA = XB:YA = YB
590 NEXT I
595 IF SIM < 0 THEN SIM = 1: FOR I = N1 TO N2:A(I,2) = - A(I,
2): NEXT I: GOTO 540
596 FOR I = N1 TO N2:A(I,2) = - A(I,2): NEXT I
600 A$ = "*":XO = 154 - GA * XD: IF XO > = 0 THEN YO = 91: GOS
UB 1900:
610 GET K$: TEXT : PRINT : PRINT "(1)INDICA FRECUENCIA": PRINT
"(2)CAMBIA AREA": PRINT "(3)NINGUNA": PRINT : PRINT "CUAL DEBE
AS": GET K: ON K GOTO 620,690,710
620 PRINT "QUE FRECUENCIA": INPUT W:LI = - 1: POKE - 16304,

```

```

0: POKE - 16299,0: FOR I = N1 + 1 TO N2: IF W > = A(I - 1,0)
AND W < = A(I,0) AND OX(I - 1) = 0 AND OX(I) = 0 THEN L1 = I:
GOTO 650
630 NEXT I
640 IF L1 = - 1 THEN TEXT : PRINT "FRECUENCIA FUERA DE RANGO
": GOTO 610
650 X = W - A(L1 - 1,0):Y = A(L1,0) - W: IF X < Y THEN L1 = L1
- 1
660 X = 157 + GA * A(L1,1) * XD:Y = 88 - GA * A(L1,2) * YD
670 H PLOT X - 1.5,Y - 1.5 TO X - 1.5,Y + 1.5 TO X + 1.5,Y + 1.
5 TO X + 1.5,Y - 1.5 TO X - 1.5,Y - 1.5
680 GET K$: TEXT : PRINT "FRECUENCIA MAS CERCANA ES "A(L1,0):
GOTO 610
690 PRINT "MAX. VALOR ABSOLUTO EJE REAL": INPUT X2: PRINT "MA
X. VALOR ABSOLUTO EJE IMAG.": INPUT Y2: GOSUB 1300: IF N1 < 0
GOTO 690
700 GOTO 500
710 RETURN
830 MAX = GA * A(0,1):MIN = GA * A(0,1)
840 FOR I = 1 TO L1:Y = GA * A(I,1): GOSUB 940: NEXT I
850 MAX = ABS (MAX):MIN = ABS (MIN): IF (MAX - MIN) > = 0 TH
EN X2 = INT (MAX + 1): GOTO 870
860 X2 = INT (MIN + 1)
870 MAX = GA * A(0,2):MIN = GA * A(0,2)
880 FOR I = 1 TO L1:Y = GA * A(I,2): GOSUB 940: NEXT I
890 MAX = ABS (MAX):MIN = ABS (MIN): IF (MAX - MIN) > = 0 TH
EN Y2 = INT (MAX + 1): GOTO 910
900 Y2 = INT (MIN + 1)
910 RETURN
940 IF Y - MAX > = 0 THEN MAX = Y
950 IF MIN - Y > = 0 THEN MIN = Y
960 RETURN
1000 REM SUBROUTINA EJES
1010 FOR I = 2 TO 174 STEP 4: H PLOT 35,I: H PLOT 155,I: H PLOT 2
15,I: H PLOT 275,I: H PLOT 95,I: NEXT I
1020 FOR I = 35 TO 275 STEP 4: H PLOT I,2: H PLOT I,45: H PLOT I,
88: H PLOT I,131: H PLOT I,174: NEXT I
1030 RETURN
1099 REM SUBROUTINA CARACTERES ALFANUMERICOS
1100 H PLOT 152,8 TO 155,2 TO 158,8
1110 H PLOT 269,85 TO 275,88 TO 269,91
1120 A$ = "IM":X0 = 171:Y0 = 9: GOSUB 1900
1130 A$ = "RE":X0 = 269:Y0 = 100: GOSUB 1900
1140 A$ = STR$ (Y2):X0 = 26:Y0 = 6: GOSUB 1900:A$ = STR$ ( -
Y2):X0 = 26:Y0 = 174: GOSUB 1900
1150 A$ = STR$ (Y2 / 2):X0 = 26:Y0 = 48: GOSUB 1900:A$ = STR$
( - Y2 / 2):X0 = 26:Y0 = 134: GOSUB 1900
1160 A$ = STR$ (X2):X0 = 275:Y0 = 183: GOSUB 1900:A$ = STR$ (
- X2):X0 = 39:Y0 = 183: GOSUB 1900
1170 A$ = STR$ (X2 / 2):X0 = 219:Y0 = 183: GOSUB 1900:A$ = ST
R$ ( - X2 / 2):X0 = 99:Y0 = 183: GOSUB 1900
1180 A$ = "LUGAR DE NYQUIST":X0 = 208:Y0 = 191: GOSUB 1900
1190 RETURN
1300 FOR I = 0 TO L:OX(I) = 0: IF ABS (GA * A(I,1)) > X2 OR
ABS (GA * A(I,2)) > Y2 THEN OX(I) = 1

```

```
1310 NEXT I
1320 N1 = - 1; FOR I = 1 TO L; IF O%(I) = 0 AND O%(I - 1) = 0
THEN N1 = I - 1; GOTO 1340
1330 NEXT I; INVERSE ; PRINT "NINGUN PUNTO DENTRO DEL AREA"; N
ORMAL ; PRINT " REAL: -"X2;" TO "X2; PRINT " IMAG: -"Y2;"
TO "Y2; RETURN
1340 FOR I = 0 TO L; IF O%(L - I) = 0 THEN N2 = L - I; GOTO 13
60
1350 NEXT I
1360 RETURN
1900 FOR JJ = LEN (A*) TO 1 STEP - 1; Z = ASC ( MID* (A*, JJ,
1)) - 30; DRAW Z AT XO, YO; XO = XO - 7; NEXT JJ; RETURN
```