2ej.
28

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

GRAVITACION LINEALIZADA DERIVADA DE UNA ACCION CUADRATICA INVARIANTE DE NORMA

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

JOSE ALFREDO HERAS GOMEZ

México, D. F. 1986

Capítulo 1

Presentación usual de gravitación linealizada

§1.1 La necesidad de una teoría lineal de gravitación

En el presente, la más convincente de las explicaciones a la ***realidad gravitacional*** se encuentra inmersa en la relatividad general. Las ecuaciones de Einstein,

$$G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

consideradas como un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, que determinan $g_{\alpha\beta}$ en función de $T_{\alpha\beta}$, se exhiben como las más viables ecuaciones de campo para la gravitación.

Desafortunadamente la no linealidad de estas ecuaciones las hace extremadamente difíciles de resolver, y solo para casos limitados las soluciones han sido especificadas. Por esta razón una tentación muy natural sería buscar un sistema de ecuacione lineales más o menos equivalente o tratar de linealizar a las mismas. Si una u otra opción fuese factible, explicar efectos gravitacionales no ofrecería dificultades insoslayables en virtud de la relativa facilidad en integrar ecuaciones lineales.

La idea de aproximar linealmente las ecuaciones (1.1) fue realizada por el propio Einstein. Muy pronto se observó que la versión linealizada de su teoría era notablemente compatible con el estudio de campos gravitacionales de objetos estelares. Las sutiles correcciones a la física de Newton, demandadas por observaciones experimentales, eran admirablemente suministradas por las ecuaciones de campo linealizadas.

En el interés de motivar la *viabilidad* física de la teoría linealizada comparemos, en un instructivo ejemplo, la gravitación *lineal* de Newton con el manifiestamente *no lineal* esquema (1.1) de Einstein.

La trayectoria *newtoniana* de una partícula de masa en reposo m_0, urgida por el campo gravitacional del sol, es determinada por la ecuación

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM_s}{a^2c^2} \tag{1.2}$$

donde $M_s \approx 2\times 10^{33}g$ es la masa del sol, φ y r son coordenadas polares y a es un parámetro constante.

Y su trayectoria *einsteniana* es definida por la expresión

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{m_s}{a^2}+\frac{3m_s}{r^2} \tag{1.3}$$

donde m_s es el parámetro constante de la métrica de Schwartzchild.

Es fácil ver que al hacer $m_s = GM_s/c^2$ las ecuaciones (1.2) y (1.3) difieren solo por el último término de (1.3), el cual puede mirarse como un factor de corrección einsteniano para la ecuación (1.2). En trayectorias no muy diferentes a las circulares, tal es el caso de las órbitas planetarias, el segundo y tercer término de (1.3) son del mismo orden, consecuentemente el factor de corrección einsteniano *relativo* a los otros términos de (1.3) es de orden $3m_s/r^2$: $1/r = 3m_s/r \sim m_s/r$. Ahora bien, en este ejemplo la expresión (1.3) es válida solo para $r \geq r_s$, siendo r_s el radio solar. En virtud de los valores numéricos $r_s \approx 7\times 10^{10}$cm y $m_s \approx 1.5\times 10^{10}$cm, el máximo valor de la corrección einsteniana es de orden $m_s/r_s \approx 10^{-5}$ (obviamente en la superficie solar). Este valor de corrección, relativamente pequeño, nos manifiesta la *débil* diferencia entre las descripciones de Einstein y Newton. Simbólicamente,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{trayectoria einsteniana}\\ \text{relatividad general}\\ \text{teoría no lineal}\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\text{trayectoria newtoniana}\\ \text{gravitación universal}\\ \text{teoría lineal}\end{array}\right\}\approx 10^{-5} \tag{1.4}$$

Por ahora la trayectoria de Einstein es la trayectoria esencialmente *correcta*, pero emerge de una teoría *complicadamente* no lineal, mientras que la trayectoria newtoniana es sólo aproximada y surge de una teoría *sencillamente* lineal. Sería deseable dibujar una tercera teoría, que sin alejarse demasiado del espíritu einsteniano admitiese la *vanagloriada* linealidad del esquema de Newton. Esta hipótesis es perfectamente justificable en virtud de la frágil diferencia simbolizada por (1.4) la que, dicho sea de paso, es de carácter muy general. La versión linealizada de la relatividad general es el dibujo mas adecuado para esta tercera opción.

Otro aspecto relevante en favor de la teoría linealizada se ubica en el marco de la teoría cuántica de campo.

Preescrita una teoría clásica, en términos de Lagrange o de Hamilton, existen diferentes procedimientos para construir su correspondiente teoría cuántica. Sin embargo, relatividad general se muestra tan suficientemente diferente a las demás teorías clásicas, que los intentos por edificarla como teoría cuántica no han tenido el éxito esperado. Dicho en otras palabras: a pesar de tener en relatividad general, una descripción *clásica* de la gravitación extremadamente satisfactoria no contamos todavía con una descripción *cuántica* convicente.

La esencial diferencia entre las otras teorías clásicas y relatividad general, radica en el papel dual jugado por el objeto $g_{\alpha\beta}$; por un lado es una cantidad que describe los aspectos dinámicos de la gravedad y por otra parte es un ente que define la estructura del espacio-tiempo. En vista de esta dualidad, el programa de *cuantización* en relatividad general necesita considerar seriamente la idea de que *cuantizar* los grados dinámicos de libertad en el campo gravitacional requiere de una previa descripción mecánico-cuántica del propio espacio-tiempo. Este último problema no tiene paralelo en las otras teorías cuánticas, las cuales son formuladas sobre un *clásico* e *inmutable* espacio-tiempo. La actitud dual en $g_{\alpha\beta}$ se convierte en una seria dificultad *conceptual* al tratar de cuantizar la teoría de Einstein, pero ni con mucho es la única. Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campo, la no linealidad de las ecuaciones, la presencia de un *complicado* grupo de norma, las constricciones en la formulación de *valor inicial* de la teoría y la *pérdida* del grupo de Poincaré tan vanagloriado por la física de partículas, se presentan como las más serias complicaciones de orden matemático.

Es importante señalar que la falta de un esquema de cuantización satisfactorio para la relatividad general es particularmente grave en astrofísica, donde los datos experimentales de fuentes gravitacionales *fuertes* como los *hoyos negros* demandan ya una explicación teórica en el marco de una teoría *aceptablemente predictiva* de naturaleza cuántica. Para desgracia de los *datos*, la relatividad general cuántica deja mucho que desear.

En su oportinidad veremos que al linealizar las ecuaciones (1.1) *desdibujamos* la conducta dual de $g_{\alpha\beta}$, de tal suerte que el campo gravitacional es descrito por un campo *físico* $h_{\alpha\beta}$ inmerso en un *fijo* espacio–tiempo de Minkowski. Linealizada ya la teoría, reencuentra al grupo de Poincaré y se advierte en ella una sencilla simetría de norma. Con estos antecedentes no debe sorprender que la teoría linealizada si puede cuantizarse consistentemente en más de una forma.

Para nuestra *lineal* fortuna, los campos gravitacionales fuertes son la excepción y no la regla en el panorama astrofísico. Las fuentes de gravedad *débiles* como el sol, son bastante numerosas en nuestro universo y esencialmente únicas en nuestros laboratorios. Hasta el momento se ha visto en la versión lineal de las ecuaciones de Einstein un esquema adecuado para investigar estas fuentes y gracias a su satisfactoria cuantización, las interacciones de los *gravitones* con otras partículas son suceptibles de entenderse, lo cual es un punto más a favor de las ecuaciones de campo linealizadas.

En vista de los comentarios anteriores podría pensarse que la teoría linealizada es una digna *sustituta* de la teoría *completa* de Einstein. Al final de este capítulo, veremos que esta conclusión es esencialmente incorrecta.

§1.2 La idea de campo débil

A un campo gravitacional definido por una métrica $g_{\alpha\beta}$ levemente diferente a la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, le llamaremos *campo–débil*. Como asentamos anteriormente, la mayoría de los objetos estelares generan campos de esta naturaleza y por ende es la importancia de su estudio. Una implicación teórica interesante en torno a los campos débiles, radica en que por su propia condición, los mismos pueden explicarse por una teoría lineal. Más aún, la forma matemática de afirmar que un campo es débil permite linealizar al tensor de Einstein $G^{\alpha\beta}$ y por tanto a las ecuaciones (1.1). Por esta razón en la literatura del tema, a las ecuaciones linealizadas se les conoce también con el nombre de ecuaciones de campo–débil.

Démosle un sentido cuantitativo a la idea de campo–débil. Es fácil de hacer; un campo gravitacional descrito por una métrica $g_{\alpha\beta}$ es débil si la diferencia $g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$ es pequeña con respecto a la unidad,

$$|g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{1.5}$$

Cuando se mencione campo-débil, se sobreentiende que (1.5) es válida en todo punto del espacio-tiempo.

Es necesario decir que (1.5) es satisfecha solamente por cierta clase de sistemas coordenados, los cuales corresponden aproximadamente a los sistemas minkowskianos. También es importante reconocer que en las vecindades de un hoyo negro la condición (1.5) carece de validez, sin embargo, sí resulta válida para distancias alejadas del mismo. Y esta es la tónica de cualquier campo gravitacional, la cual es dibujada por el límite

$$g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta} \quad \text{cuando} \quad r \to \infty. \tag{1.6}$$

§1.3 El campo débil y la condición métrica

Mencionamos en la sección anterior que la condición de campo-débil nos permitiría linealizar las ecuaciones de Einstein. ¿Esta es la única hipótesis para tal fin.? Con el propósito de contestar la pregunta permitásemos analizar, siguiendo a Weinberg (página 165), una situación donde el campo no es necesariamente débil.

Adoptando de principio un sistema coordenado cuasi-minkowskiano, es decir, un sistema en el cual a grandes distancias de la fuente material la métrica $g_{alpha\beta}$ se aproxima a la métrica de Minkowski $eta_{\alpha\beta}$ (condición (1.6)), Weinberg considera la descomposición

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{1.7}$$

donde es claro que $h_{\alpha\beta}$ se anula en el infinito. El remarca que $h_{\alpha\beta}$ no se asume pequeño en todos los puntos del espacio-tiempo. En base a estas consideraciones él escribe la parte lineal (en la segundas parciales de $h_{\alpha\beta}$) del tensor de Ricci,

$$R^{(1)}_{\mu k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 h_\lambda{}^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_\mu{}^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_k{}^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu k}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda}\right\}$$

al determinar la anterior expresión, ha convenido en subir y bajar índices a los objetos $h_{\mu\nu}, R^{(1)}_{\mu k}, \partial/\partial x^2$ por medio de la métrica $\eta_{\alpha\beta}$.

Aunque en ningún momento el explícita $g^{\alpha\beta}$, es evidente después de observar como escribe la parte no lineal de segundo orden del tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu k} = &-\frac{1}{2}h^{\lambda\nu}\left\{\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right\} \\ &+\frac{1}{4}\left\{\frac{2\partial h_\sigma{}^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_\nu{}^\nu}{\partial x^\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial h_\mu{}^\sigma}{\partial x^k} + \frac{\partial h_k{}^\sigma}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu k}}{\partial x_\sigma}\right\} \\ &-\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial h_{\sigma k}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{\lambda k}}{\partial x^\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial h_\mu{}^\sigma}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial h^{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_\mu{}^\lambda}{\partial x_\sigma}\right\} \end{aligned}$$

que necesariamente ha definido $g^{\alpha\beta}$ por medio de

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \tag{1.8}$$

donde el tensor simétrico $h^{\alpha\beta}$ es la representación contravariante del campo (y no su inversa¡).

Ahora bien, (1.7) y (1.8) son inconsistentes para garantizar la condición métrica

$$g^{\alpha\sigma}g_{\alpha\beta} = \delta^\sigma_\beta \tag{1.9}$$

lo cual puede establecerse directamente

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}g^{\alpha\sigma} &= (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\alpha\sigma} - h^{\alpha\sigma}) = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\sigma} - \eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} + \eta^{\alpha\sigma}h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} \\ &= \delta^\sigma_\beta - h_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} \end{aligned}$$

donde hemos empleado la convención sugerida por Weinberg de subir y bajar índices al objeto $h_{\alpha\beta}$ por medio de $\eta_{\alpha\beta}$. Como en general $h_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} \neq 0$ entonces $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\sigma} \neq \delta^\sigma_\beta$.

La intención de Weinberg al considerar (1.7) era el *clarificar* el contenido físico de las ecuaciones einstenianas. Por nuestra parte hemos exhibido una inconsistencia en su intento. La razón básica de esta última, se encuentra en la relativa arbitrariedad de $h_{\alpha\beta}$.

El análisis anterior nos facilita ubicar las hipótesis requeridas en la linealización del tensor de Einstein $G^{\alpha\beta}$.

Permitásemos desestructurar hasta cierto punto la dual actitud de $g_{\alpha\beta}$. Para tal idea consideremos de nuevo la hipótesis

$$\left\{\begin{array}{c} g_{\alpha\beta} \\ \text{Representa al campo} \\ \text{gravitacional} \\ \text{y métrica riemanniana} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \eta_{\alpha\beta} \\ \text{Identifica al} \\ \text{espacio-tiempo} \\ \text{minkowskiano} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} h_{\alpha\beta} \\ \text{Define al campo} \\ \text{gravitacional} \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

y para cumplir con (1.6) es necesario demandar

$$h_{\alpha\beta} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad r \to \infty \tag{1.10}$$

Por lo demás y sólo en principio, $h_{\alpha\beta}$ es un objeto arbitrario. Construyamos ahora al tensor $g^{\alpha\sigma}$ mediante la conocida restricción métrica (1.9). Se nos *ocurre* que $g^{\alpha\sigma}$ expresada en función de $\eta^{\alpha\sigma}$ y $h^{\alpha\sigma}$ podría ser de la forma

$$g^{\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} + ah^{\alpha\sigma} \tag{1.11}$$

donde a es una constante a determinar. En (1.11) debe quedar claro que el objeto $h^{\alpha\sigma}$ es la representación contravariante asociada al campo $h_{\alpha\beta}$.

De la propuesta (1.7) y de la *ocurrencia* (1.11) se tiene,

$$g_{\alpha\beta}\,g^{\alpha\sigma} = \delta^{\sigma}_{\beta} + \eta^{\alpha\sigma}h_{\alpha\beta} + a\eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} + ah_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma}.$$

Por tanto, si queremos asegurar la condición (1.9) es necesario restringir la arbitrariedad de $h_{\alpha\beta}$ de tal modo que:

$$\eta^{\alpha\sigma}h_{\alpha\beta} + a\eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} + ah_{\alpha\beta}h^{\alpha\sigma} = 0 \tag{1.12}$$

sea válida hasta el punto que querramos.

Por simple inspección uno advierte que tarde o temprano los dos primeros términos de (1.12) se podrían anular mutuamente, por el conocido proceso de subir y bajar índices (con $\eta_{\alpha\beta}$!). Por lo cual fijaremos primero nuestra atención en la restricción *física*

$$a h_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma} = 0. \tag{1.13}$$

De la hipótesis (1.7) se sigue $g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$, consecuentemente, si demandamos a $h_{\alpha\beta}$ comportarse *débilmente* es necesario

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1 \tag{1.14}$$

y ahora resulta evidente

$$a h_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma} \approx 0 \tag{1.15}$$

luego entonces (1.14) es una *buena condición* para aproximarse a (1.13) si la constante a no es *muy* grande.

Teniendo en mente la consistencia de (1.1), sólo nos falta reconocer el efecto de (1.14) sobre dos primeros términos de (1.12)

$$\eta^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} + a \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma}. \tag{1.16}$$

Para ver esto, supongamos de momento que $h_{\alpha\beta}$ es un tensor en el *amplio* sentido de la palabra (es decir, que admite covarianza arbitraria), entonces bajamos y subimos índices por medio de $g_{\alpha\beta}$ y $g^{\alpha\sigma}$,

$$h_{\beta}{}^{\sigma} = g_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma}, \qquad h^{\sigma}{}_{\beta} = g^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} \tag{1.17}$$

considerando la hipótesis (1.7) y la *ocurrencia* (1.11) en las expresiones (1.17),

$$\begin{aligned} h^{\sigma}{}_{\beta} &= g^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} = (\eta^{\alpha\sigma} + a h^{\alpha\sigma}) h_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} + a h^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} \\ h_{\beta}{}^{\sigma} &= g_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma} = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) h^{\alpha\sigma} = \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma} + h_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma} \end{aligned}$$

pero en vista de (1.15) es obvio que

$$h^{\sigma}{}_{\beta} \approx \eta^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} \qquad \text{y} \qquad h_{\beta}{}^{\sigma} \approx \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma}. \tag{1.19}$$

entonces si elegimos al valor $a = -1$ tenemos para (1.16) (consecuentemente $g^{\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} - h^{\alpha\sigma}$)

$$\eta^{\alpha\sigma} h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\sigma} \approx h^{\sigma}{}_{\beta} - h_{\beta}{}^{\sigma} = 0. \tag{1.19}$$

Es claro de (1.15) y (1.17) que podemos asegurar aproximadamente (1.12) y por ende (1.9). Dicho en otras palabras: limitando la arbitrariedad de $h_{\alpha\beta}$ por medio de la condición (1.14) (lo que significa hacer $h_{\alpha\beta}$ un campo-débil), es ***suficiente*** para aproximar tanto como se quiera la validez de la condición métrica.

Mirando de cerca (1.18) notamos que es factible subir y bajar índices a $h_{\alpha\beta}$ y $h^{\alpha\sigma}$ por intermedio de $\eta^{\alpha\sigma}$ y $\eta_{\alpha\beta}$ sólo en ***forma aproximada***. Dicho de otra manera: convenir en subir y bajar índices al campo $h_{\alpha\beta}$, vía la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, es en última instancia una ***convención aproximada***. Dicha convención puede extenderse sin mayor grado de dificultad a cualquier objeto $A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots}(x^\gamma)$ del mismo orden de $h_{\alpha\beta}$, esto es $|A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots}(x^\gamma)| \ll 1$, luego entonces ***subimos*** el índice β

$$\begin{aligned} A^{\alpha\cdots\beta\cdots} = g^{\beta\gamma}A^{\alpha\cdots}{}_{\gamma\ldots} &= (\eta^{\beta\gamma} - h^{\beta\gamma})A^{\alpha\cdots}{}_{\gamma\ldots} \\ &= \eta^{\beta\gamma}A^{\alpha\cdots}{}_{\gamma\ldots} - h^{\beta\gamma}A^{\alpha\cdots}{}_{\gamma\ldots} \approx \eta^{\beta\gamma}A^{\alpha\cdots}{}_{\gamma\ldots} \end{aligned}$$

y ***bajamos*** el índice α

$$\begin{aligned} A_{\alpha\cdots\beta\cdots} = g_{\alpha\gamma}A^{\gamma\cdots}{}_{\beta\ldots} &= (\eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma})A^{\gamma\cdots}{}_{\beta\ldots} \\ &= \eta_{\alpha\gamma}A^{\gamma\cdots}{}_{\beta\ldots} + h_{\alpha\gamma}A^{\gamma\cdots}{}_{\beta\ldots} \approx \eta_{\alpha\gamma}A^{\gamma\cdots}{}_{\beta\ldots} \end{aligned}$$

La convención citada nos sugiere ver en $h_{\alpha\beta}$ un tensor de Lorentz. Pero si estrictamente este fuese el caso, la expresión (1.7) perdería generalidad; al ser $\eta_{\alpha\beta}$ y $h_{\alpha\beta}$ tensores de Lorentz, $g_{\alpha\beta}$ definido por (1.7) ***necesariamente*** admite covarianza de Lorentz. Esto es posible porque $g_{\alpha\beta}$ es un tensor en el amplio sentido, pero la simetría lorentziana no es el caso general. Por tanto, $h_{\alpha\beta}$ debe admitir covarianza de Lorentz en forma aproximada,

$$h_{\alpha'\beta'} \approx \Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'}\Lambda^{\beta}{}_{\beta'}h_{\alpha\beta}$$

donde las Λ's estan limitadas de tal modo que $h_{\alpha'\beta'}$ no pierde el carácter pequeño de $h_{\alpha\beta}$.

En los textos es usual ***definir*** al campo $h_{\alpha\beta}$ como tensor de Lorentz; por ejemplo, MTW (página 439) emplean transformaciones de Lorentz $x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\alpha}x^{\alpha}$ en la ley de transformacioón

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}g_{\mu\nu}$$

para concluir

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}h_{\mu\nu}.$$

Claramente la deducción de MTW es forzada por considerar de principio únicamente transformaciones de Lorentz. El inconveniente de hacerlo, se hace palpable cuando invoquemos *auténticos* tensores como el tensor de Einstein $G^{\alpha\beta}$.

El origen de la dificultad se ubica en la expresión (1.7). Para comprender en detalles, desarrollemos en serie la métrica $g_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \overset{1}{g}_{\alpha\beta} + \overset{2}{g}_{\alpha\beta} + \dots$$

en donde $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ es el término constante (de orden cero), $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}, \overset{2}{g}_{\alpha\beta}, \dots$ Los términos funcionales de orden uno, dos, ...

En una aproximación lineal para $g_{\alpha\beta}$ cortamos la serie en el término de primer orden y obtenemos

$$g_{\alpha\beta} \approx \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \overset{1}{g}_{\alpha\beta}$$

haciendo la identificación $\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ y $\overset{1}{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ se tiene

$$g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta},$$

sin embargo, nosotros hemos demandado estrictamente

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{1.7}$$

consecuentemente se ha perdido información de los otros términos funcionales $\overset{2}{g}_{\alpha\beta}, \overset{3}{g}_{\alpha\beta}, \overset{4}{g}_{\alpha\beta}, \dots$ La situación no cambia si imponemos la condición ***débil*** $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Para seguir la tradición trataremos a $h_{\alpha\beta}$ como un auténtico tensor de Lorentz.

En resumen, en esta sección hemos analizado detenidamente la proposición $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$. Imponiendo la condición de campo-débil $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ pudimos dar consistencia aproximada (en el sentido de validar la condición métrica $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\sigma} = \delta^{\sigma}_{\beta}$) a la definición $g^{\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} - h^{\alpha\sigma}$. Asimismo, hicimos viable (también aproximadamente) la convención de subir y bajar índices a $h_{\alpha\beta}$ (y a objetos de igual orden) a través de la métrica $\eta_{\alpha\beta}$. Discutimos la validez aproximada de

$h_{\alpha\beta}$ como tensor de Lorentz. Reconocimos en la hipótesis $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ en última instancia una aproximación. Teniendo en mente este análisis definimos las hipótesis necesarias en la linealización del tensor de Einstein: $g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ con $|h_{\alpha\beta,\sigma,\tau,\ldots}| \approx |h_{\alpha\beta}| \ll 1$ y sobreentendiendo a $h_{\alpha\beta}$ un tensor de Lorentz, linealiza de manera aproximada las ecuaciones einstenianas. Lo cual explicitaremos en la siguiente sección.

§1.4 Las ecuaciones de campo de la teoría linealizada

A la luz de las hipótesis esgrimidas en la sección anterior, nos resultará fácil inferir las ecuaciones linealizadas: en la usual definición de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\{g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}\}$$

sustituimos las expresiones $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ y $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$, para obtener

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \overline{\overline{\Gamma}}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$$

donde hemos definido

$$\overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\{h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\beta\mu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\mu}\} = \frac{1}{2}\{h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}\}$$

y

$$\overline{\overline{\Gamma}}^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}\,h^{\mu\nu}\{h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}\}.$$

El objeto $\overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ es del mismo orden de $h_{\alpha\beta}$, mientras que $\overline{\overline{\Gamma}}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ es de orden $h \otimes \partial h$. Admitiendo la condición de campo débil $|h_{\alpha\beta,\gamma,\tau,\ldots}| \approx |h_{\alpha\beta}| \ll 1$, es obvio que $\overline{\overline{\Gamma}}^{\mu}{}_{\alpha\beta} \approx 0$ y entonces

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \approx \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}\}. \tag{1.20}$$

La definición del tensor de Ricci en términos de los símbolos de Christoffel es

$$R_{\mu\nu} \equiv 2\{\Gamma^{\alpha}{}_{\mu[\alpha,\nu]} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta[\nu}\Gamma^{|\beta|}{}_{\alpha]\mu}\} \tag{1.21}$$

sustituyendo (1.20) en le expresión anterior obtenemos

$$R_{\mu\nu} \approx \overline{R}_{\mu\nu} = 2\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu[\alpha,\nu]} = h_{\mu[\nu,\alpha]}{}^{,\alpha} + h^{\alpha}{}_{[\alpha,\nu],\mu} \tag{1.22}$$

donde hemos ignorado los términos cuadráticos en las Γ's por ser de orden $h \otimes \partial h$. Consecuentemente, en la definición del escalar de Ricci

$$R_{\mu}{}^{\mu} = R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

sustituimos $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$ dado por (1.22), para encontrar,

$$R \approx \overline{R} = \eta^{\mu\nu} \overline{R}_{\mu\nu} = 2h_{\mu}{}^{[\mu,\nu]}{}_{,\nu} \tag{1.23}$$

donde de nuevo hemos despreciado términos de orden $h \otimes \partial^2 h$. Y ahora contamos con lo necesario para linealizar al tensor de Einstein,

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \tag{1.24}$$

basta sustituir $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$, (1.22) y (1.23) e ignorar términos de origen $h \otimes \partial^2 h$. Entonces obtenemos al tensor de Einstein linealizado,

$$G^{\alpha\beta} \approx \overline{G}^{\alpha\beta} \equiv \overline{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \overline{R} = h^{\alpha[\beta,\mu]}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{[\mu,\beta],\alpha} + \eta^{\alpha\beta} h_{\mu}{}^{[\nu,\mu]}{}_{,\nu}. \tag{1.25}$$

Por construcción el tensor $\overline{G}^{\alpha\beta}$ admite covarianza lorentziana. Teniendo en mente la consistencia de (1.1) es necesario preescribir al tensor de energía-momento $T^{\alpha\beta}$ por su versión relativista $\overline{T}^{\alpha\beta}$. Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{c} T^{\alpha\beta} \\ \text{covarianza} \\ \text{arbitraria} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overline{T}^{\alpha\beta} \\ \text{covarianza} \\ \text{de Lorentz} \end{array} \right\} \tag{1.26}$$

En virtud de (1.25) y (1.26) es claro que

$$G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta} \longrightarrow G^{\alpha\beta} \approx \overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta},$$

esto quiere decir; demandando la condición de campo-débil $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ y la preescripción (1.26), las *dificultosas* ecuaciones de Einstein no lineales y de covarianza arbitraria $g^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}$ se aproxima por las *sencillas* ecuaciones de campo–débil, lineales y de covarianza lorentziana

$$\overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta}. \tag{1.27}$$

Es importante notar que la ley de conservación

$$\overline{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{1.28}$$

es autoconsistente con las *naturales* identidades de Bianchi linealizadas

$$\overline{G}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \equiv 0. \tag{1.29}$$

Asimismo, es trancedente observar que a consecuencia de diferenciar parcial y no covariantemente a $\overline{T}^{\alpha\beta}$ (ecuación (1.28)), en la teoría linealizada, el campo *no influye* en las fuentes productoras del campo mismo. Situación diametralmente opuesta a lo que ocurre en la teoría no lineal.

En función de las desconocidas componentes de $h_{\alpha\beta}$, el sistema (1.27) adquiere el aspecto

$$h^{\alpha[\beta,\mu]}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{[\mu,\beta].\alpha} + \eta^{\alpha\beta} h_{\mu}{}^{[\nu,\mu]}{}_{,\nu} = -T^{\alpha\beta}. \tag{1.30}$$

Es interesante notar que el sistema (1.30) puede *simplificarse* en

$$\overline{h}^{\alpha[,\beta,\mu]}{}_{,\mu} + \overline{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu[,\nu}\eta^{\alpha]\beta} = T^{\alpha\beta} \tag{1.31}$$

si adoptamos la definición

$$\overline{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h^{\sigma}_{\sigma}. \tag{1.32}$$

Es importante remarcar que en cierto sentido el proceso de linealización nos ha permitido obtener ecuaciones relativistas de un sistema de covarianza arbitraria.

Para finalizar la sección *dibujemos* el proceso de linealización de la teoría einsteniana:

RELATIVIDAD GENERAL		TEORIA LINEALIZADA
$G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}$		$\overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta}$
Ecuaciones: no lineales		Ecuaciones: lineales
Covarianza: arbitraria		Covarianza: de Lorentz
Escenario: espacio–tiempo curvo. Descrito por la métrica riemanniana $g_{\alpha\beta}$	$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ $\lvert h_{\alpha\beta}\rvert \ll 1$ $\longrightarrow$ $T^{\alpha\beta} \to \overline{T}^{\alpha\beta}$	Esenario: espacio–tiempo plano. Descrito por la métrica minkowskiana $\eta_{\alpha\beta}$
El campo es definido por: la propia $g_{\alpha\beta}$		El campo es definido por: la función $h_{\alpha\beta}$
Fuentes: $T^{\alpha\beta}$ función de $g_{\alpha\beta}$		Fuentes: $\overline{T}^{\alpha\beta}$ independiente de $h_{\alpha\beta}$
Rango de validez: todo punto del espacio–tiempo		Rango de validez: $\lvert h_{\alpha\beta}\rvert \ll 1$
Grupo de norma: complidado		Grupo de norma: sencillo
Cuantización: no satisfactoria		Cuantización: satisfactoria
Renormalización: no existe		Renormalizaión: satisfactoria

§1.5 El grupo de norma en gravitación linealizada

Aunque linealmente relacionadas por (1.31), las distintas componentes de $\overline{h}_{\alpha\beta}$ se muestran visiblemente acopladas. Esta situación dificulta en buena medida la integración del propio sistema (1.31). En la sección que iniciamos analizaremos el afortunado hecho de que desacoplar (1.31) siempre es factible gracias a una simetría de norma en la gravitación linealizada.

Al expander explícitamente (1.31) obtenemos

$$\overline{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} + \eta^{\alpha\beta}\{\overline{h}^{\nu\mu}{}_{,\mu}\}_{,\nu} - \{\overline{h}^{\alpha\mu}{}_{,\mu}\}^{,\beta} - \{\overline{h}^{\beta\mu}{}_{,\mu}\}^{,\alpha} = -2\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{1.32}$$

y ahora es fácil observar directamente que la posibilidad de hacer

$$\overline{h}^{\theta\mu}{}_{,\mu} = 0 \tag{1.33}$$

descopla *elegantemente* al sistema (1.32) en

$$\overline{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -2\overline{T}^{\alpha\beta}. \tag{1.34}$$

Sí (1.33) pudiese establecerse sin pérdida de generalidad, es decir, que la misma no afectase la física de la teoría, entonces (1.34) podría mirarse como un sistema *esencialmente* equivalente al conjunto (1.32). Como puede advertise, ya estamos hablando en el *lenguaje* de las teorías de norma.

Hablando en términos *simples*, una transformación de norma es una transformación entre dos distintas *representaciones* de una misma situación física. Merced a esta *equivalencia* física podemos elegir la representación matemática que más nos interese. La libertad en decidir que representación vamos a considerar se traduce por la adopción de una particular *condición de norma*. Un criterio práctico pero ni con mucho el único para fijar la norma en una teoría de campo, es el de buscar en última instancia que las ecuaciones de campo sean de lo mas manipulable. Para nuestra *inobjetable* suerte, en el esquema de la teoría linealizada es posible definir una transformación de norma, donde la adopción de la norma (1.33) nos conviene de sobremanera.

La génesis de la condición (1.33) se halla en una transformación infinitesimal de coordenadas, es decir, en una particular transformación que *etiqueta* las coordenadas de un punto p de acuerdo a la receta

$$x^{\mu'}(p) = x^{\mu}(p) + \xi^{\mu}(p) \tag{1.35}$$

donde $\xi^{\mu}(p)$ son cuatro funciones relativamente pequeñas al punto de garantizar que el campo transformado $h_{\alpha'\beta'}$ siga preservando la condición de campo-débil, es decir, $|h_{\alpha'\beta'}| \ll 1$. Necesariamente las ξ^{μ} son del mismo orden de $h_{\alpha\beta}$. La transformación (1.35) induce pequeños cambios en la forma funcional de objetos geométricos. En general, estos cambios pueden ignorarse, excepto cuando se trata del tensor métrico ya que son precisamente las pequeñas desviaciones de $\eta_{\alpha\beta}$ las que conllevan la *información gravitacional*. En la usual ley de transformación de $g_{\alpha\beta}$

$$g^{\alpha'\beta'}[x^{\theta'}(p)] = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\lambda}} g^{\gamma\lambda}[x^{\theta}(p)]$$

después de considerar (1.35) obtenemos

$$g^{\alpha'\beta'}(x^{\theta'}) = (\delta^{\alpha}{}_{\gamma} + \xi^{\alpha}{}_{,\gamma})(\delta^{\beta}_{\lambda} + \xi^{\beta}{}_{,\lambda})g^{\gamma\lambda}(x^{\theta})$$

e ignorando términos de orden $\gamma\xi \otimes \gamma\xi$, reducimos la expresión anterior en

$$g^{\alpha'\beta'}(x^{\theta'}) = g^{\alpha\beta}(x^\theta) + g^{\alpha\gamma}(x^\theta)\xi^\beta{}_{,\gamma} + g^{\beta\gamma}(x^\theta)\xi^\alpha{}_{,\gamma}$$

y sustituyendo de nuevo (1.35)

$$g^{\alpha'\beta'}(x^\theta + \xi^\theta) = g^{\alpha\beta}(x^\theta) + g^{\alpha\gamma}(x^\theta)\xi^\beta{}_{,\gamma} + g^{\beta\gamma}(x^\theta)\xi^\alpha{}_{,\gamma} \tag{1.36}$$

expandiendo en serie de Taylor $g^{\alpha'\beta'}(x^\theta + \xi^\theta)$ alrededor de x^θ y desechando términos de orden $\xi \otimes \xi$, reescribimos (1.36) por

$$g^{\alpha'\beta'}(x^\theta) = g^{\alpha\beta}(x^\theta) + g^{\alpha\gamma}(x^\theta)\xi^\beta{}_{,\gamma} + g^{\beta\gamma}(x^\theta)\xi^\alpha{}_{,\gamma} - g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}(x^\theta)\xi^\sigma \tag{1.37}$$

al sustituir la aproximación de campo–débil $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$ en (1.37) e ignorar factores de orden $h \otimes \partial\xi$, $\partial h \otimes \xi$ se tiene

$$-h^{\alpha'\beta'} = -h^{\alpha\beta} + \xi^{\alpha,\beta} + \xi^{\beta,\alpha}$$

admitiendo la notación $h^{\alpha'\beta'} = h'^{\alpha\beta}$, la transformación anterior se escribe compactamente por

$$h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - 2\ \xi^{(\alpha,\beta)}. \tag{1.38}$$

Y ahora como era de esperarse, el tensor linealizado de Einstein es

$$\overline{G}^{\alpha\beta} = \overline{h}^{\alpha[\beta,\mu]}{}_{,\mu} + \overline{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu[,\nu}\eta^{\alpha]\beta} \tag{1.39}$$

resulta invariante de forma bajo (1.38). Para hacer explícita esta invarianza, contraemos primero (1.38)

$$h'^\sigma{}_\sigma = h^\sigma{}_\sigma - 2\xi^\sigma{}_{,\gamma} \tag{1.40}$$

después admitamos la definición (1.32) primada o sin primar, es decir,

$$\overline{h}'^{\alpha\beta} = h'^{\alpha\beta} - \eta\,\frac{1}{2}\,\alpha\beta h'^\sigma{}_\sigma$$

sustituyendo en ella las expresiones (1.38) y (1.40) se obtiene, después de breve álgebra,

$$\overline{h}'^{\alpha\beta} = \overline{h}^{\alpha\beta} - 2\xi^{(\alpha,\beta)} + \eta^{\alpha\beta}\xi^\sigma{}_{,\sigma} \tag{1.41}$$

consecuentemente, aceptando la definición

$$\overline{G}'^{\alpha\beta} = \overline{h}'^{\alpha[\beta,\mu]}{}_{,\mu} + \overline{h}'_{\mu\nu}{}^{[\nu}\eta^{\alpha]\beta} \tag{1.42}$$

y tomando en cuenta (1.41) se infiere directamente la invarianza de $\overline{G}^{\alpha\beta}$. En detalle,

$$\begin{aligned}
\overline{G}'^{\alpha\beta} =& \tfrac{1}{2}\left\{\overline{h}'^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} + \overline{h}'^{\mu\nu}{}_{,\mu,\nu}\eta^{\alpha\beta} - \overline{h}'^{\alpha\mu,\beta}{}_{,\mu} - \overline{h}'^{\beta\mu,\alpha}{}_{,\mu}\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left[\overline{h}^{\alpha\beta} - 2\xi^{(\alpha,\beta)} + \eta^{\alpha\beta}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}\right]_{,\mu}{}^{,\mu} + \frac{1}{2}\left[\overline{h}^{\mu\nu} - 2\xi^{(\mu,\nu)} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}\right]_{,\mu,\nu}\eta^{\alpha\beta} \\
& - \frac{1}{2}\left[\overline{h}^{\alpha\mu} - 2\xi^{(\alpha,\mu)} + \eta^{\alpha\mu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}\right]^{,\beta}{}_{,\mu} - \frac{1}{2}\left[\overline{h}^{\beta\mu} - 2\xi^{(\beta,\mu)} + \eta^{\beta\mu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}\right]^{,\alpha}{}_{,\mu} \\
=& \overline{G}^{\alpha\beta} + \xi^{\alpha[,\mu,\beta]}{}_{,\mu} + \xi^{\beta[,\mu,\alpha]}{}_{,\mu} + 2\xi^{\mu[,\alpha,\beta]}{}_{,\mu} + 2\eta^{\alpha\beta}\xi_{\mu}{}^{[,\mu,\nu]}{}_{,\mu} \\
=& \overline{G}^{\alpha\beta} \quad \text{en vista de la conocida propiedad} \quad \xi^{\theta[,\mu,\nu]} = 0.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Al ser $\overline{T}^{\alpha\beta}$ preescrito independiente del campo $h_{\alpha\beta}$, las ecuaciones linealizadas son invariantes de forma ante las transformaciones (1.38),

$$\overline{G}'^{\alpha\beta} = \overline{T}^{\alpha\beta} \xrightarrow{(1.38)} \overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta}. \tag{1.43}$$

Es interesante notar que $\overline{T}^{\alpha\beta}$ no se ve afectada por la transformción infinitesimal (1.35). De esta forma se hace evidente que (1.38) no cambia la física de la teoría. Por lo cual es aceptable llamar a las transformaciones (1.38) las ***transformaciones de norma*** de la teoría linealizada.

El que la física no se altere si empleamos $h'^{\alpha\beta}$ en lugar de $h^{\alpha\beta}$, nos permite una sustancial ***simplificación*** de las ecuaciones de campo. Para realizar la misma, escribimos las ecuaciones (1.32) en términos de las $\overline{h}'^{\alpha\beta}$

$$\overline{h}'^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} + \eta^{\alpha\beta}\{\overline{h}'^{\nu\mu}{}_{,\mu}\}_{,\nu} - \{\overline{h}'^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\}^{,\beta} - \{\overline{h}'^{\beta\mu}{}_{,\mu}\}^{,\alpha} = 2\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{1.44}$$

y ahora derivamos la expresión (1.41) para conseguir

$$\overline{h}'^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \overline{h}^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} - \xi^{,\beta}{}_{,\beta} \tag{1.45}$$

por ende resulta que la condición de norma

$$\overline{h}'^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{1.46}$$

simplifica notablemente a (1.44) en

$$\overline{h}'^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -2\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{1.47}$$

si y solo si la ecuación

$$\xi^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} = \overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \tag{1.48}$$

sea satisfecha.

De principio una situación circular nos inquieta al mirar la ecuación inhomogénea de dálembert (1.48): para determinar las ξ^α que verifican (1.48) es necesario especificar $\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ pero esto significa *conocer* previamente $\overline{h}^{\alpha\beta}$ ¡precisamente la función que deseamos encontrar!

Gracias a lo relativamente arbitrario de las ξ^α podemos encontrar una solución feliz al molesto círculo inherente a (1.48); básta que nos sea especificada una particular $\underset{p}{\overline{h}}{}_{\alpha\beta}$ para un prefijado $\overline{T}^{\alpha\beta}$. Resolviendo (1.48) para esta fuente específica determinamos una solución particular $\underset{p}{\xi}{}^\alpha$ y si luego integramos la ecuación homogénea asociada a (1.18),

$$\xi^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{1.49}$$

entonces se obtiene la solución más general de (1.48) por la suma

$$\xi^\alpha = \underset{p}{\xi}{}^\alpha \oplus \underset{h}{\xi}{}^\alpha \tag{1.50}$$

donde $\underset{h}{\xi}{}^\alpha$ es la solución general de (1.49). Así aseguramos la validez de la condición (1.46), la cual es conocida como *condición de Lorentz* por su parecido con la *popular* condición de Lorentz impuesta a los potenciales electromagnéticos $A^\alpha{}_{,\alpha} = 0$. En síntesis: al fijar la norma de Lorentz (1.46), las ecuaciones linealizadas (1.44) se simplifican felizmente en el sistema

$$\overline{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -2\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{1.34}$$

donde se notará que hemos ignorado la ahora irrelevante tilde de (1.47). Simbólicamente

$$\overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta} \oplus \overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \longrightarrow \overline{G}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,\overline{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -\overline{T}^{\alpha\beta}. \tag{1.51}$$

A manera de concluir la sección, ahora señalaremos un hecho importante pocas veces mencionado en los textos: si bien es cierto que la ecuación de dálembert (1.48) siempre puede integrarse (preestablecidas las adecuadas condiciones a la frontera), ***no existe garantía*** de que las soluciones sean pequeñas en todo punto del espacio–tiempo. En el mejor de los casos sólo podemos asegurar un comportamiento pequeño en las regiones del espacio–tiempo.

§1.6 Coordenadas armónicas

En la práctica uno suele ***simplificar*** ecuaciones mediante la adopción de un particular sistema de coordenadas. Más aún, en ocaciones contamos con ***familias*** de sistemas coordenados que nos permiten reducir y a veces desacoplar *complicadas* expresiones diferenciales. Al hacer estos comentarios, tenemos en mente la posibilidad de que vía algún *especial* grupo de sistemas coordenados y a la condición de campo–débil sea plausible deducir las ecuaciones *simplificadas* (1.34) de las ecuaciones completas de Einstein (1.1). Como podrá inferirse, intentamos conseguir los resultados de las secciones (1.4) y (1.5) sin la necesidad de *invocar* la simetría de norma (1.38).

Explorando de cerca al tensor de Einstein (1.25), lo podemos *dibujar* en la forma

$$G_{\mu\nu} = f_1(g\otimes\partial^2 g)+f_2(g^3\otimes\partial^2 g)+f_3(\ \partial g\otimes\partial g)+f_4(g^2\otimes\partial g\otimes g)+f_5(g^4\otimes\partial g\otimes\partial g) \tag{1.52}$$

admitiendo la condición de campo–débil $g = \eta \oplus h$, $|h| \sim |\partial^n h| \ll 1$ es evidente que $\partial g \otimes \partial g \approx 0$ y consecuentemente (1.52) se aproxima por

$$G_{\mu\nu} \approx f_1(\eta \otimes \partial^2 h) + f_2(\eta^3 \otimes \partial^2 h) \tag{1.53}$$

sea cual fuese la forma funcional de f_1 y f_2, la condición de campo–débil nos linealiza en las segundas parciales de $h_{\alpha\beta}$ al tensor de Einstein. Este simple análisis nos sugiere escribir explícitamente a (1.52) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} =& \frac{1}{2}\left\{g^{\alpha\beta} g\mu\nu,\alpha,\beta - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g_{\gamma\delta,\alpha,\beta}\right\} \\ &+ \left\{\Gamma^{\alpha}{}_{(,\nu} g_{\mu)\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{,\alpha}\right\} + \tilde{f}(g, \partial g \otimes \partial g) \end{aligned} \tag{1.54}$$

donde $\tilde{f}$ simboliza una función no lineal de productos de g's con términos de la forma $\partial g \otimes \partial g$. Y el objeto Γ^α es definido por

$$\Gamma^\alpha \equiv g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma,\mu}. \tag{1.55}$$

Es fácil notar que Γ^α involucra funcionalmente términos del estilo γg y $g \otimes \gamma^2 g$ y por tanto, el segundo paréntisis en la expresión (1.54) contiene entre otros términos, factores de la forma $g \otimes \partial^2 g$ que no pueden *ignorarse* imponiendo la condición de campo–débil. Sin embargo, si por algún otro *subterfugio* pudiésemos imponer sin pérdida de generalidad

$$\Gamma^\alpha = 0 \tag{1.56}$$

el tensor de Einstein (1.54) tomaría el interesante aspecto

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha,\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g_{\gamma\delta,\alpha,\beta} \right\} + \tilde{f}. \tag{1.57}$$

Y si ahora imponemos la condición de campo–débil aproximamos al mismo por (obviamente $\tilde{f} \approx 0$)

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left\{ h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - \tfrac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\sigma{}_{\sigma,\alpha}{}^{,\alpha} \right\} = \overline{G}_{\mu\nu} \tag{1.58}$$

donde si recordamos la definición (1.32), obtenemos ni más ni menos

$$\overline{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \overline{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} \tag{1.59}$$

expresión que nos evoca la implicación. Es claro, que la aproximación (1.59) es condicionada por la validez de (1.56). Por la tanto, tiene sentido la siguiente pregunta: ¿Cuál es el *precio* que tenemos que pagar para garantizar $\Gamma^\mu = 0$, sin pérdida de generalidad?. Haciendo un poco de álgebra reescribimos Γ^α dado por (1.55) en la conveniente forma, y

$$\Gamma^\alpha = g^{\mu\nu} \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \tag{1.60}$$

donde $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ son los usuales símbolos de Crhistoffel. Y ahora, para responder a la pregunta, invoquemos a la ley de transfomación de los citados símbolos

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \tag{1.61}$$

contrayendo con $g^{\mu'\nu'}$ la anterior expresión obtenemos,

$$\Gamma^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\,\Gamma^{\alpha} - g^{\nu\mu}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}. \tag{1.62}$$

Entonces, si Γ^{α} no es cero, integrando al sistema

$$g^{\nu\mu}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\,\Gamma^{\alpha} \tag{1.63}$$

podríamos *siempre* definir un *nuevo* sistema de coordenadas $x^{\alpha'}$ en el cual $\Gamma^{\alpha'} = 0$. Dicho en otras palabras: si de principio $\Gamma^{\alpha} \neq 0$, mediante una transformación de coordenadas definida por (1.63) transformamos a Γ^{α} de tal suerte que se anule en las nuevas coordenadas $x^{\alpha'}$.

Intentando clarificar la naturaleza del objeto Γ^{α} permitásemos reescribirlo en la forma

$$\Gamma^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\sqrt{-g}\, g^{\beta\partial} x^{\alpha}{}_{,\alpha}\right\}_{,\beta}$$

expresión que nos recuerda el d'alembertiano covariante de un vector contravariante. Entonces,

$$\Gamma^{\alpha} = x^{\alpha}{}_{;\mu}{}^{;\mu}$$

y consecuentemente el *precio* que debemos pagar para conseguir (1.57) y por ende la deseada aproximación (1.59) es emplear coordenadas armónicas $\tilde{x}^{\alpha}$, es decir, coordenadas que verifiquen

$$\tilde{x}^{\alpha}{}_{;\mu}{}^{;\mu} = 0 \tag{1.64}$$

las cuales siempre pueden asumirse localmente sin pérdida de generalidad. Emplearemos una $\sim$ debajo de cualquier ente expresado en estas coordenadas. Entonces, se tiene para (1.59)

$$\underset{\sim}{\overline{G}}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{\overline{h}}{}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} \tag{1.65}$$

y por ende

$$\underset{\sim}{\overline{h}}{}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -2\,\underset{\sim}{\overline{T}}{}^{\alpha\beta} \tag{1.66}$$

lo cual era nuestra intención inicial.

Es pertinente llamar la atención que el hecho de imponer (1.56) es bien consistente en la estructura de la relatividad general: Por ser simétrico el tensor de Einstein $G^{\alpha\beta}$ tiene diez componentes independientes. En virtud de que $G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}$ son diez ecuaciones algebraicamente independientes uno podría pensar, en un primer momento, que aunadas las apropiadas condiciones a la frontera el sistema $G^{\alpha\beta} = -T\alpha\beta$ nos determina unívocamente al campo $g_{\alpha\beta}$. Sin embargo, esto es no así; la existencia de las conocidas cuatro identidades de Bianchi

$$G^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \equiv 0 \tag{1.67}$$

reducen en seis el número de ecuaciones funcionalmente independientes. Dicho de otra manera: se sobredetermina el problema por cuatro grados de libertad en las desconocidas diez componentes de $g_{\alpha\beta}$. Estos grados de libertad pueden hacerse corresponder a la covarianza general de las ecuaciones einstenianas. Lo cual significa que si $g_{\alpha\beta}$ es una solución de $G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}$ entonces, $g_{\alpha'\beta'}$ construida a partir de la propia $g_{\alpha\beta}$ mediante una transformación general de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu'}$ también es solución de las ecuaciones de Einstein. Las cuatro arbitrarias $x^{\mu'}$ involucradas en la transformción de coordenadas *suministran* a las soluciones de $G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}$ justamente de los cuatro grados de libertad que demandan para hacerse unívocas. Si en un primer instante es molesta la ambiguedad en el campo –provocada por (1.67)–, despues se torna interesante; urgando en el conglomerado de coordenadas arbitrarias, podríamos seleccionar algunas *especiales* que amen de fijarnos los grados de libertad, nos llevasen a una forma conveniente las ecuaciones de campo, parece ser un hecho de exquisita utilidad. Para más de un propósito eligir coordenadas armónicas es de notoria necesidad, tal es la situación en la teoría linealizada.

Podemos resumir simbólicamente la idea de esta sección:

$$G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta} \xrightarrow[\bar{x}^{\alpha}{}_{;\beta}{}^{;\beta} = 0]{x^{\alpha} \rightarrow \bar{x}^{\alpha'}} \underset{\sim}{G}^{\alpha\beta} = - T^{\alpha\beta} \xrightarrow[\underset{\sim}{T}^{\alpha\beta} \rightarrow \underset{\sim}{\overline{T}}^{\alpha\beta}]{\underset{\sim}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \underset{\sim}{h}_{\alpha\beta}} \underset{\sim}{\overline{h}}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -2\underset{\sim}{\overline{T}}^{\alpha\beta} \tag{1.68}$$

englobando (1.25), (1.26) y (1.51) escribimos

$$G^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta} \xrightarrow[T_{\alpha\beta} \to \overline{T}^{\alpha\beta}]{g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}} \overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta} \xrightarrow{\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0} \overline{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = -2\overline{T}^{\alpha\beta}$$

(1.69)

comparando ambas implicaciones simbólicas, advertimos claramente dos procesos para llegar al mismo fin. En (1.68) recurrimos al empleo de coordenadas armónicas $\tilde{x}^{\alpha}$. En (1.69) a la condición de norma $\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$. En vista de los resultados tiene sentido cuestionarse si en realidad elegir un sistema de coordenadas armónicas en la descripción de la teoría linealizada es esencialmente equivalente a imponer la condición de norma. La respuesta es afirmativa: mirando de cerca la condición de Lorentz $\underset{?}{\overline{h}}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{2}\underset{?}{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\frac{1}{2} - \underset{?}{h}^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\alpha}$ en algún sistema coordenado(?) observamos que decir que la misma sea válida equivale asegurar que $\underset{?}{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{2}\underset{?}{h}^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\alpha}$. Reescribiendo *ingeniosamente* la última expresión en la forma $\frac{1}{2}\{\underset{?}{h}^{\beta\alpha}{}_{,\beta} + \underset{?}{h}^{\partial\alpha}{}_{,\partial} - \underset{?}{h}^{\partial}{}_{\partial}{}^{,\alpha}\}$ y haciendo $\underset{?}{h}^{\partial\alpha}{}_{,\partial} = \eta^{\beta\gamma}\underset{?}{h}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\gamma}$ $\underset{?}{h}^{\gamma}{}_{\partial}{}^{,\alpha} = \eta^{\beta\gamma}\underset{?}{h}_{\beta\partial}{}^{,\alpha}$ y $\underset{?}{h}^{\beta\alpha}{}_{,\gamma} = \eta^{\beta\partial}\underset{?}{h}_{\partial}{}^{\alpha}{}_{,\gamma}$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\eta^{\beta\gamma}\left\{\underset{?}{h}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\gamma} + \underset{?}{h}_{\partial}{}^{\alpha}{}_{,\beta} - \underset{?}{h}_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}\right\} = 0 \qquad (1.70)$$

donde notamos de inmediato que la cantidad entre paréntisis es más ni menos la expresión de Christoffel para el campo linealizado (1.20). Consecuentemente exigir $\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ es equivalente a demandar

$$\underset{?}{\Gamma}^{\alpha} \equiv \eta^{\beta\gamma}\underset{?}{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\partial} = 0. \qquad (1.71)$$

Ahora bien, la expresión anterior es un caso particular de la conocida condición armónica (1.56). Esto significa $? =\sim$. Puesto en palabras diferentes: imponer $\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ en un sistema de Lorentz arbitrario (plausible por la simetría dee norma) equivale a exigir $\overline{\Gamma}^{\alpha} = 0$, esto es, emplear un sistema de coordenadas armónico (factible por la simetría de Lorentz).

En lo sucesivo y para no complicar la notación, manipularemos la teoría linealizada en el entendido de que indistintamente o hemos impuesto la norma de Lorentz o hemos empleado coordenadas armónicas.

§1 Formulación lagrangiana de la teoría linealizada

Aún en el *dominio* clásico, y a pesar de que el contenido *dinámico* en la gravitación linealizada es satisfactoriamente explicado por las ecuaciones de campo–débil, nos es necesaria una descripción lagrangiana en la teoría linealizada: gracias a la formulación lagrangiana, las simetrías norma y Lorentz se entrelazan intimamente con las leyes de conservación inherentes al campo–débil (energía, momento angular, espín, ...).

Más aún, no podríamos evitar la descripción lagrangiana si tratamos de entenderla ccomo teoría d norma. Sobra señalar que la susodicha formulación es indespensable en el contexto *cuántico*. Con el ánimo de fijar ideas, comentemos de principio la descripción lagrangiana en la teoría completa.

Cinco días antes de que Einstein presentara sus ecuaciones para la gravitación, Hilbert estimulado por los previos artículos del propio Einstein, descubre independientemente como conseguir las citadas ecuaciones vía un principio varacional. El toma como sl piedra angular, para generar las ecuaciones de Einstein en el vacío $R_{\mu\nu} = 0$, al escalar de Ricci $R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. Tiempo después se confirma que $\mathcal{L} = \sqrt{-g} R$ es en esencia la única densidad que nos conduce a las ecuaciones. En presencia de materia, la densidad $\mathcal{L}$ se completa por la adición de la densidad escalar $\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}$. De esta manera las ecuaciones completas de Einstein se construyen por la acción

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R + g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}). \qquad (1.72)$$

Siguiendo la idea de Hilbert, consideraremos la acción

$$\overline{\mathcal{L}} = \overline{R} + h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \qquad (1.73)$$

con el propósito de deducir las ecuaciones loinealizadas.

Recordando la expresión para $\overline{R}$ (1.24), la densidad (1.74) es de la forma $\mathcal{L} = h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + Q^{\alpha}{}_{,\alpha}$, y por tanto, las ecuaciones resultantes serían de primer orden. Este hecho no debería sorprendernos: al linealizar $\overline{R}$ ignoramos términos cuadráticos $\partial h \otimes \partial h$, precisamente los requeridos para engendrar ecuaciones de segundo orden.

Para mirar mas de cerca la situación, regresemos de nuevo a la teoría completa. De principio uno esperaría ecuaciones de cuarto orden para la gravitación en virtud de que la densidad (1.72) contine términos de orden dos(suplemento 2). Sin embargo, podemos reescribir (1.72) en la forma

$$\mathcal{L} = U^{\alpha}{}_{,\alpha} + \mathcal{L}' \qquad (1.74)$$

donde

$$U^{\alpha} \equiv \sqrt{-g}\,(g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu})$$

y

$$\mathcal{L}' = \sqrt{-g}\,\{g^{\lambda\mu}(\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha}) + g^{\lambda\mu}T_{\lambda\mu}\}. \tag{1.75}$$

Escrita así $\mathcal{L}$, sus términos d segundo orden son absorbidos en el término de divergencia y consecuentemente no contribuyen en nada (suplemento 2). La acción reducida $\mathcal{L}'$ nos conduce a las correctas ecuaciones de Einstein en presencia de materia.

Inspirados en la densidad $\mathcal{L}'$ definida por (1.75), busquemos de nuevo obtener las ecuaciones linalizadas considerando ahora la densidad

$$\overline{\mathcal{L}}' = \eta^{\lambda\mu}\left\{\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\overline{\Gamma}^{\beta}{}_{\alpha\beta} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}\overline{\Gamma}^{\beta}{}_{\lambda\alpha}\right\} - h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{1.76}$$

puesta en función de h's adquiere la forma

$$\overline{\mathcal{L}}' = \frac{1}{4}\{h_{\nu\beta,\alpha}h^{\nu\beta,\alpha} - h_{\sigma}{}^{\sigma,\beta}h_{\theta}{}^{\theta}{}_{,\beta} + 2h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} - 2h_{\nu\beta,\alpha}h^{\alpha\beta,\nu}\} - h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \tag{1.77}$$

Las ecuaciones de Euler–Lagrange que requerimos son (suplemento 2)

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}'}{\partial h_{(k\lambda)}} - \left(\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}'}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}}\right)_{,\epsilon} = 0 \tag{1.78}$$

entonces, reescribimos adecuadamente (1.77)

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{4}h_{\nu\beta,\alpha}h_{\varphi\Phi,\delta}\{\eta^{\nu\varphi}\eta^{\beta\Phi}\eta^{\alpha\delta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\delta}\eta^{\varphi\Phi} + 2\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\varphi}\eta^{\Phi\delta} - 2\eta^{\delta\nu}\eta^{\beta\Phi}\eta^{\varphi\alpha}\} - h_{\mu\nu}T^{\mu} \tag{1.79}$$

calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}'}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}} &= \frac{1}{2}h_{\nu\beta,\alpha}\{\eta^{\nu k}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\alpha\epsilon} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\epsilon}\eta^{\lambda} - \eta^{k\lambda}\eta^{\epsilon\nu}\eta^{\beta\epsilon} - 2\eta^{\alpha k}\eta^{\lambda\beta}\eta^{\nu\epsilon}\} \\ &= \frac{1}{2}\{h^{k\lambda,\epsilon} - h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\epsilon}\eta^{k\lambda} + h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,k\epsilon}\eta^{\lambda\epsilon} + h^{\epsilon\alpha}{}_{,\alpha}\eta^{k\lambda} - 2h^{\epsilon\lambda,k}\}\end{aligned}$$

análogamente

$$\frac{\partial \overline{L}'}{\partial h_{\lambda k,\epsilon}} = \tfrac{1}{2}\{h^{\lambda k,\epsilon} - h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\delta}\eta^{\lambda k} + h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\lambda}\eta^{k\epsilon} + h^{\epsilon\alpha}{}_{,\alpha}h^{\lambda k} - 2h^{\epsilon k,\lambda}\},$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{L}'}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \overline{L}'}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}} + \frac{\partial \overline{L}'}{\partial h_{\lambda k,\epsilon}}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{h^{k\lambda,\epsilon} - h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\epsilon}\eta^{k\lambda} + h^{\epsilon\alpha}{}_{,\alpha}\eta^{k\lambda} - h^{\epsilon\lambda,k} - h^{\epsilon k,\lambda} + \tfrac{1}{2}h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\lambda}\eta^{k\epsilon} + \tfrac{1}{2}h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,k}\eta^{\lambda\epsilon}\right\}\end{aligned} \tag{1.80}$$

diferenciando esta última

$$\left(\frac{\partial L}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}}\right)_{,\epsilon} = \frac{1}{2}\left\{h^{k\lambda,\epsilon}{}_{,\epsilon} - h^{\epsilon\lambda,k}{}_{,\epsilon} + h^{\epsilon}{}_{\epsilon}{}^{,k,\lambda} - h^{\epsilon k,\lambda}{}_{,\epsilon} + h^{\epsilon\alpha}{}_{,\alpha,\epsilon}\eta^{k\lambda} - h_{\alpha\alpha}{}^{,\epsilon}{}_{,\epsilon}\eta^{k\lambda}\right\}. \tag{1.81}$$

Mirando la parte derecha de (1.81) reconocemos en ella al tensor linealizado $\overline{G}^{k\lambda}$ (1.26). De igual forma es fácil determinar

$$\frac{\partial \overline{L}'}{\partial h_{(k\lambda)}} = -T^{k\lambda} \tag{1.82}$$

sustituyendo (1.81) y (1.82) en (1.78) conseguimos finalmente las ecuaciones linealizadas $\overline{G}^{k\lambda} = -T^{k\lambda}$. Hemos demostrado que la densidad $\overline{L}'$ (1.77) nos conduce a las ecuaciones de campo-débil; sin embargo, como era de esperarse la misma, no es la única.

La acción

$$\overline{L}'' = \frac{1}{4}\{h_{\nu\beta,\alpha}h^{\nu\beta,\alpha} - h_{\sigma}{}^{\sigma,\beta}h^{\theta}{}_{\theta,\beta} + 2h_{\sigma}{}^{\sigma,\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} - 2h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}h^{\mu\beta}{}_{,\beta}\} - h_{\mu\nu}\overline{T}^{\mu\nu} \tag{1.83}$$

que difiere de (1.77) por el penúltimo término, también nos conduce a las ecuaciones linealizadas: siguiendo a MTW (páginas 181-182) reescribimos (1.83) en la forma (recordando (1.32))

$$\overline{L}'' = \frac{1}{4}h_{\nu\beta,\alpha}\overline{h}^{\nu\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}\overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta} - h_{\mu\nu}\overline{T}^{\mu\nu} \tag{1.84}$$

y ahora, en lugar de emplear las ecuaciones de Euler–Lagrange (1.78) para deducir las ecuaciones de campo, vamos a utilizar directamente el principio de Hamilton (suplemento 2). Es decir, vamos a determinar el cambio a primer orden $\delta\mathcal{L}''$ producido por iuna pequeña variación $\delta h_{\alpha\beta}$ del campo. Según MTW es más rápido y menos tedioso hacer esto último que el invocar (1.78) (en nuestra particular opinión ambas manipulaciones son del mismo grado de dificultad). Entonces,

$$\delta\mathcal{L}'' = \frac{1}{4}\delta(h_{\nu\beta,\alpha}\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}) - \frac{1}{2}\delta(\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}\overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}) - \overline{T}^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu} \qquad 1.85)$$

reetiquetando índices mudos es fácil demostrar que el segundo factor de la derecha es

$$\tfrac{1}{2}\delta(\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}) = \overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} \qquad (1.86)$$

así mismo, en virtud de la identidad $a_{\mu\nu}\overline{b}^{\mu\nu} = \overline{a}_{\mu\nu}b^{\mu\nu}$ válida para la operación *barra*, definida por (1.32), el primer término del miembro de la derecha de 1.85) es

$$\frac{1}{4}\delta(h_{\nu\beta,\alpha}\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}) = \frac{1}{2}\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta,\alpha} \qquad (1.87)$$

sustituyendo (1.86) y (1.87) en (1.85) obtenemos

$$\delta\mathcal{L}'' = \frac{1}{2}\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta,\alpha} - \overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - T^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu} \qquad (1.88)$$

y por consecuencia la variación de la integral de acción (suplemento 2) es

$$\delta I = \frac{1}{2}\int_\Omega \delta\mathcal{L}''dw = \frac{1}{2}\int_\Omega(\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta,\alpha} - 2\overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - 2T^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu})dw \quad (1.89)$$

es fácil demostrar

$$\begin{cases} h^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta,\alpha} = (\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta})_{,\alpha} - h^{\nu\beta,\alpha}{}_{,\alpha}\delta h_{\nu\beta} \\ \overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\overline{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} = (\overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\overline{h}_{\mu\alpha})^{,\alpha} - \overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{,\alpha}\delta\overline{h}_{\mu\alpha} \end{cases} \qquad (1.90)$$

sustituyendo (1.90) en (1.89) se consigue

$$\delta I = \frac{1}{2}\int_\Omega\Big(-\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta} + 2h^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\overline{h}_\mu{}^\alpha\Big)_{,\alpha}dw + \frac{1}{2}\int_\Omega\Big[(-\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}{}_{,\alpha} - 2\overline{T}^{\nu\beta})\delta h_{\nu\beta} + 2\overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{,\alpha}\delta\overline{h}_{\mu\alpha}\Big]d \qquad (1.91)$$

la primera integral de (1.91) puede convertirse en una integral sobre la superficie $\sum$ donde por hipótesis las variaciones son nulas. Consecuentemente la misma no contribuye en nada. De $\overline{h}_{\mu\alpha} = h_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}h^{\sigma}{}_{\sigma}$ se puede inferir

$$\delta\overline{h}_{\mu\alpha} = \left(\delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\right)\delta h_{\nu\beta} \tag{1.92}$$

la sustituión de la expresión anterior en la segunda integral de (1.91) nos da

$$\delta I = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\left(-2\overline{T}^{\nu\beta} - h^{\nu\beta,\alpha}{}_{,\alpha} + 2\overline{h}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\beta} - \eta^{\nu\beta}\overline{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma,\mu}\right)\delta h_{\nu\beta}\right]dw \tag{1.93}$$

el tercer término del integrando de (1.93) se puede descomponer en dos factores

$$2\overline{h}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\beta}\delta h_{\nu\beta} = \overline{h}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\beta}\delta h_{\nu\beta} + \overline{h}^{\beta\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\nu}\delta h_{\beta\nu}$$

en vista de $\delta h_{\nu\beta} = \delta h_{\beta\nu}$, se tiene

$$2\overline{h}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\beta}\delta h_{\nu\beta} = \left(\overline{h}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\beta} + \overline{h}^{\beta\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\nu}\right)\delta h_{\nu\beta} \tag{1.94}$$

al introducir esta última expresión en (1.93) se llega a

$$\delta I = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[-\overline{h}^{\nu\beta,\alpha}{}_{,\alpha} + \overline{h}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\beta} + \overline{h}^{\beta\sigma}{}_{,\sigma}{}^{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\overline{h}^{\mu\sigma}{}_{,\mu,\sigma} - 2T^{\nu\beta}\right]\delta h_{\nu\beta}dw \tag{1.95}$$

finalmente el principio de Hamilton $\delta I = 0$ (suplemento 1) nos conduce a las ecuaciones de campo-débil

$$\overline{h}^{\nu[\beta,\alpha]}{}_{,\alpha} + \overline{h}_{\sigma\alpha}{}^{,\sigma[,\alpha}\eta^{\nu]\beta} = -T^{\nu\beta}. \tag{1.31}$$

A la luz del análisis anterior es claro que $\mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}''$ son acciones lagrangianas equivalentes. Los términos distintos, en ambas pueden interrelacionarse por una divergencia

$$h_{\nu\beta,\alpha}h^{\alpha\beta,\nu} = h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}h^{\mu\beta}{}_{,\beta} + \left\{2h_{\beta}{}^{[\alpha}h^{\nu]\beta}{}_{,\alpha}\right\}_{,\nu} \tag{1.96}$$

y entonces,

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' + Q^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{1.97}$$

siendo $Q^\alpha = h_\beta{}^{[\sigma}h^{\alpha]\beta}{}_{,\sigma}$.

Quizá en este momento parezca ocioso indagar sobre lagrangianas equivalentes. En la sección 2, del próximo capítulo tendremos la oportunidad de mostrar la vital importancia de considerar acciones equivalentes si se quiere estructurar a la teoría linealizada como una teoría de norma.

Hemos encontrado en la acción (1.77) (o en su equivalente (1.83)) una correcta expresión para generar las ecuaciones del campo–débil. Sin embargo, hay algo de principio no muy consistente: al deducir las ecuaciones linealizadas de la teoría completa, ignoramos *en todo momento* términos funcionales cuadráticos $(h \otimes h, \partial h \otimes h, h \otimes \epsilon, \ldots)$. En cambio las mismas ecuaciones las derivamos a través de una acción lagrangiana función de términos cuadráticos $\overline{L}' = \overline{L}'(\partial h \otimes \partial h)$. Esta situación no invalida en ningún sentido la formulación lagrangiana de la teoría; por no conllevar una significación física direta, la densidad lagrangiana $\overline{L}'$ puede variar el orden *preestablecido* por las ecuaciones de campo–débil.

Antes de concluir la sección queremos exhibir la acción equivalente

$$\mathcal{L}_0 = \overline{h}^{\mu\nu}\Big[\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{2}\Big(\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + \overline{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\alpha,\mu}\Big)\Big] - \eta^{\mu\nu}\Big[\overline{\Gamma}^\beta{}_{\alpha\mu}\cdot\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\beta} - \overline{\Gamma}^\beta{}_{\alpha\beta}\cdot\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\Big] \tag{1.98}$$

considerada por Arnowitt y Deser en su intento por cuntizar el campo gravitacional linealizado. $\mathcal{L}_0$ lo infirieron del lagrangiano *cúbico* de Einstein

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\Gamma^\alpha\mu\nu,\alpha - \tfrac{1}{2}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\alpha,\mu}) - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}\cdot\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}\cdot\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}] \tag{1.99}$$

expandiendo $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ a primer orden y notando que $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ no tiene términos de orden cero. El factor cúbico se reduce a un término de orden cuadrático en $\mathcal{L}_0$. Variando independientemente $\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\partial}$ y $\overline{h}_{\mu\nu}$ (método de Palatini) obtienen las ecuaciones

$$-\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} + \frac{1}{2}\Big(\overline{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + \overline{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\alpha,\mu}\Big) = 0 \tag{1.100}$$

$$-\eta^{\beta\nu}\overline{\Gamma}^\mu{}_{\beta\alpha} - \eta^{\mu\beta}\overline{\Gamma}^\nu{}_{\beta\alpha} + \eta^{\mu\nu}\overline{\Gamma}^\beta{}_{\alpha\beta} = \overline{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \tag{1.101}$$

que son, respectivamente, las ecuaciones $\overline{R}_{\mu\nu} = 0$ y la derivada de la definición $\overline{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}h^\sigma{}_\sigma$.

§2 El tensor canónico de energía–momento en la teoría linealizada

Asociada a la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^A, \partial\varphi^A)$ se define al ***tensor canónico*** de energía-momento $\tau^{\mu\nu}$ por la expresión

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A{}_{,\nu}}\varphi^{A,\mu} \tag{1.102}$$

el cual se conserva débilmente

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1.103}$$

preescrito de esta forma, $\tau^{\mu\nu}$ no es único. Y tampoco en general es simétrico.

$$\tau^{\mu\nu} \neq \tau^{\nu\mu}. \tag{1.104}$$

En el caso específico de la teoría linealizada, la densidad lagrangiana

$$\overset{g}{\mathcal{L}}{}' = \frac{1}{4}\{h_{\sigma\beta,\alpha}h^{\sigma\beta,\alpha} - h_\sigma{}^{\sigma\beta,\alpha} - h_\sigma{}^{\sigma,\beta}h_\theta{}^\theta{}_{,\beta} + 2h_\sigma{}^{\sigma,\alpha}h_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} - 2h_{\sigma\beta,\alpha}h^{\alpha\beta,\sigma}\} \tag{1.105}$$

que denota la parte puramente gravitacional de (1.77), nos genera las ecuaciones linealizadas en el vacío

$$\overline{G}^{\alpha\beta} = 0. \tag{1.106}$$

Por tanto, es viable de considerarse en el intento de dibujar el tensor canónico de energía–momento del campo–débil.

Para abreviar el cálculo, introduzcamos el *superpotencial* $Q^{k\lambda\nu}$ simétrico en sus dos primeros índices, a través de la expresión

$$Q^{k\lambda\nu} \equiv \frac{\partial \overset{g}{\mathcal{L}}{}'}{\partial h_{(k\lambda),\nu}} = \frac{1}{2}\{h^{k\lambda,\nu} - h^\sigma{}_\sigma{}^{,\nu}\eta^{k\lambda} + h^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}\eta^{k\lambda} + \tfrac{1}{2}\,h^\sigma{}_\sigma{}^{,\lambda}\eta^{k\nu} + \tfrac{1}{2}\,h^\sigma{}_\sigma{}^{,k}\eta^{\lambda\nu} - h^{\nu\lambda,k} - h^{\nu k,} \tag{1.107}$$

este objeto verifica

$$Q^{k\lambda\nu}{}_{,\nu} = \overline{G}^{k\lambda}. \tag{1.108}$$

Entonces, el tensor canónico asociado a (1.105) es dado por

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\overset{g}{\mathcal{L}}{}' - Q^{k\lambda\nu}h_{k\lambda}{}^{,\mu} \tag{1.109}$$

o en términos de los potenciales $h_{\alpha\beta}$,

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\{h_{\sigma\beta,\alpha}h^{\sigma\beta,\alpha} - h_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{,\beta}h_{\theta}{}^{\theta}{}_{,\beta} + 2h_{\sigma}{}^{\sigma,\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} - 2h_{\sigma\beta,\alpha}h^{\alpha\beta,\sigma}\}$$
$$- \frac{1}{2}\{h^{k\lambda,\nu}h_{\lambda}{}^{,\mu} - h_{\beta}{}^{\beta,\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{,\mu} + h^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}h^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{,\mu} + h^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\lambda}h_{\lambda}{}^{\nu,\mu} - 2h^{\nu\lambda,k}h_{k\lambda}{}^{,\mu}\} \tag{1.110}$$

después de un poco de álgebra, se puede demostrar

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \overline{G}^{k\lambda}h_{k\lambda}{}^{,\mu} \tag{1.111}$$

consecuentemente, como lo esperábamos, si las ecuaciones de campo (1.108) son satisfechas entonces $\tau^{\mu\nu}$ verifica

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{1.112}$$

es decir, se conserva débilmente.

Mirando simplemente (1.110), comprobamos que el mismo no es simétrico. Dejando para la próxima sección la interpretación física de $\tau^{\mu\nu}$, diremos por ahora que el no tener simetría en el tensor canónico de energía-momento es algo patológico; por ejemplo, no se puede definir al momento angular del campo como una cantidad conservada, también tendríamos confusión en la conservación de $\tau^{\mu\nu}$, ya que en general $\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq \tau^{\nu\mu}{}_{,\nu}$. Por consiguiente nuestro siguiente paso es simetrizar a $\tau^{\mu\nu}$. Esto lo haremos siguiendo el método de Belinfante diseñado para tal propósito (suplemento 3).

Según Belinfante el tensor simétrico

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tau^{(\mu\nu)} - S^{\rho(\mu\nu)}{}_{,\rho} \tag{1.113}$$

donde $S^{\rho\mu\nu}$ es el tensor de espín asociado al correspondiente campo, es por construcción una cantidad conservada

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{1.114}$$

consecuentemente, si conocemos a $\tau^{\mu\nu}$ (dado por (1.102)) y determinamos $S^{\alpha\beta\mu}$ por la prescripción

$$S^{\alpha\beta\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,\mu}}[\tilde{M}^{\alpha\beta}]^{A}{}_{B}\varphi^{B} \tag{1.15}$$

donde $[\tilde{M}^{\alpha\beta}]^A{}_B$ son los generadores infinitesimales de la transformación de Lorentz, podríamos siempre construir $\mathcal{T}^{\mu\nu}$.

En el caso de la teoría linealizada, (1.115) toma la específica forma

$$S^{\alpha\beta\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{(k\lambda),\mu}} [\tilde{M}^{\alpha\beta}]_{k\lambda}{}^{\theta\varphi} h_{\theta\varphi} \tag{1.116}$$

con

$$[\tilde{M}^{\alpha\beta}]_{k\lambda}{}^{\theta\varphi} = [M^{\alpha\beta}]_k{}^\theta \delta^\varphi_\lambda + [M^{\alpha\beta}]_\lambda{}^\varphi \delta^\rho_k \tag{1.117}$$

donde por definición

$$[M^{\alpha\beta}]^\nu_\mu = -\delta^\alpha_\mu \eta^{\beta\nu} + S^\beta_\mu \eta^{\alpha\nu}. \tag{1.118}$$

Empleando la definición (1.107) y después de algún trabajo se obtiene

$$S^{\alpha\beta\mu} = -2Q^{\alpha\lambda\mu} h^\beta{}_\lambda + 2Q^{\beta\lambda\mu} h^\alpha{}_\lambda \tag{1.119}$$

y entonces, se puede construir la cantidad

$$-S^{\rho(\mu\nu)}{}_{,\rho} = -\{S^{\rho\mu\nu} + S^{\rho\nu\mu}\}_{,\rho} = \{Q^{\rho\lambda\nu} h^\mu{}_\lambda - Q^{\rho\lambda\mu} h^\nu{}_\lambda + Q^{\mu\lambda\nu} h^\rho{}_\lambda + Q^{\nu\lambda\mu} h^\rho{}_\lambda\}_{,\rho} \tag{1.120}$$

Después de sustituir (1.109) y (1.120) en (1.113) obtenemos finalmente en función de los superpotenciales $Q^{\alpha\beta\gamma}$, al tensor de energía-momento de la teoría linealizada.

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\{Q^{k\lambda\nu} h_{k\lambda}{}^{,\mu} + Q^{k\lambda\mu} h_{k\lambda}{}^{,\nu}\} + \eta^{\mu\nu} \overset{g}{\mathcal{L}}{}' + \{Q^{\mu\lambda\nu} h^\rho{}_\lambda + Q^{\nu\lambda\mu} h^\rho{}_\lambda - Q^{\rho\lambda\nu} h^\mu{}_\lambda - Q^{\rho\lambda\mu} h^\nu{}_\lambda\}_{,\rho} \tag{1.121}$$

Al inicio de la sección afirmamos que el tensor canónico de energía-momento adscrito a una teoría de campo no es en general único. Este hecho se manifiesta en la teoría linealizada. La densidad lagraniana

$$\overset{g}{\mathcal{L}}{}'' = \frac{1}{4}\{h_{\sigma\beta,\alpha} h^{\sigma\beta,\alpha} - h_\sigma{}^{\sigma,\beta} h_\theta{}^\theta{}_{,\beta} + 2h_\sigma{}^{\sigma,\alpha} h_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} - 2h_{\sigma\alpha}{}^{,\alpha} h^{\sigma\beta}{}_{,\beta}\} \tag{1.122}$$

que es la parte puramente gravitacional de (1.83), es una correcta densidad equivalente (genera las ecuaciones (1.106)). Con esta densidad edificaríamos un tensor de energía-momento $\mathcal{T}'^{\mu\nu}$ diferente a $\mathcal{T}^{\mu\nu}$. La simetrización de este segundo tensor canónico nos ofrecería un $\mathcal{T}'^{\mu\nu}$ a su vez distinto del $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ dado por (1.121). Arnowitt y Deser derivan otro tensor de energía-momento para la teoría linealizada que difiere del canónico por una divergencia. La no unicidad de $\tau^{\mu\nu}$ hace difícil darle una interpretación consistente. Un programa natural para eligir el más aceptable tensor de energía-momento en la teoría linealizada, podría estar delineado por la validez de las simetrías del campo-débil. En cuanto a la simetría de Lorentz no existe ningún problema: todos los $\tau^{\mu\nu}$'s (simétricos o no) considerados aquí son mafiestamente covariantes (por la simple razón de que las densidades lagrangianas que los engendran son objetos de Lorentz). Pero en relación a la simetría de norma la situación es dramáticamente diferente. En la siguiente sección veremos el efecto de la norma en el tensor de energía-momento del campo-débil.

§3 ¿Es localizada la energía del campo-débil?

Por la sencilla razón de no tener a la mano, en la teoría completa de Einstein una única descripión local de energía gravitacional, no podemos hablar de una bien definida conservación local de energía en el campo gravitacional. Desde nuestro punto de vista la causa básica de esta situación es muy cercana a la *desagradable* dualidad conceptual de $g_{\alpha\beta}$; como ya lo mencionamos, al mismo tiempo que nos define la estructura geométrica del espaio-tiempo, el objeto $g_{\alpha\beta}$ nos describe los aspectos dinámicos del campo gravitacional. Uno intentaría de manera natural involucrar la idea de energía en la *dinámica* del campo y no en la *geometría* del espacio-tiempo. Lo más grave del asunto es que no tenemos por ahora una convicente manera de evitar, en general, la actitud dual de $g_{\alpha\beta}$. El adjetivo grave es porque vemos muy poco probable que la noción local de energía pueda esgrimirse sin desestructurar la citada dualidad. Los siguidores de la interpretación clásica de la relatividad general (según esta no existe dualidad en $g_{\alpha\beta}$ por el simple beho de que física y geometría son lo mismo) explican la no localidad de la conservación de enería gravitacional en base al *sacrosanto* principio de equivalencia. Según este principio uno puede siempre encontrar en cualquier localidad dada, un sistema de referencia en el cual todos los campos gravitacionales (todas las Γ's) desaparezcan. Consecuentemente, no tiene sentido asociar energía gravitacional en la localidad por la sencilla razón de que no exista *gravitación* en la misma. Y si no tiene sentido hablar de energía gravitacional local, menos tiene sentido pensar en su conservación.

Para reafirmar lo antes expuesto, consideremos la ley de conservación covariante

$$T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{1.123}$$

Que emerge como consecuencia de las ecuaciones einstenianas. Despues de álgebra tediosa (1.123) puede convertirse en una ecuación difereniada parcialmente

$$\left(\mathcal{T}_\alpha{}^\beta + \tau_\alpha{}^\beta\right)_{,\beta} = 0 \tag{1.124}$$

donde

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, t^{\alpha\beta} \tag{1.125}$$

y

$$T_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta\, {}^g\mathcal{L}' - \frac{\partial^g \mathcal{L}'}{\partial g_{k\lambda,\beta}}\, g_{k\lambda,\alpha} \tag{1.126}$$

con $\mathcal{L}$ definido por

$${}^g\mathcal{L}' = \sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu}\{\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\lambda\alpha}\}. \tag{1.127}$$

Ahora bien, $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ es una bien definida densidad tensorial en virtud de que $\tau^{\alpha\beta}$, la cual describe la energía y momento de todos los campos generadores de gravitación (excluyendo por supuesto al campo gravitacional mismo), es un tensor de covarianza arbitraria. Pero ¿qué significado físico podría tener $\tau^{\alpha\beta}$?. La respuesta es directa: $\tau^{\alpha\beta}$ es generado por la densidad ${}^g\mathcal{L}'$, y esta última engendra las ecuaciones de Einstein en el vacío $R_{\mu\nu} = 0$. Entonces, en un primer momento el obcjeto $\tau^{\alpha\beta}$ podría considerársele un *digna* candidato para representar la energía y momento del campo gravitacional *puro*. Sin embargo, una razón de peso le roba dignidad a esta interpretación de $\tau^{\alpha\beta}$. Definido por (1.126), $\tau^{\alpha\beta}$ no es un tensor en general. El mismo es generado por una acción lagrangiana (1.126) que no es una densidad escalar en general (${}^g\mathcal{L}'$ es construída por operaciones algebraicas que involucran objetos que no son tensores, a saber los símbolos de Christoffel). Luego entonces, $\tau^{\alpha\beta}$ dependerá del sistema de coordenadas empleado. La simetrización de $\tau^{\alpha\beta}$ no lo convierte en tensor. El ente $\tau^{\alpha\beta}$ fue decidido por vez primera por Einstein y es conocido en la literatura del tema por ***pseudotensor*** de energía–momento del campo gravitacional.

La discusión anterior en el marco de la teoría completa nos motiva a investigar la posible localidad en la conservación de energía y momento del campo–débil. De entrada esperamos algunos cambios esenciales en relación a la teoría completa; en la teoría linealizada no existe la dualidad campo–espacio. La ley de conservación del tensor de Lorentz de energía–momento ($\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$), que idntifica todas las fuentes generadoras del campo–débil, mas que una consecuencia de las ecuaciones linealizadas, es autoconsistente con las mismas.

Cualquier $\tau^{\mu\nu}$ tensor canónico de energía-momento asociado al campo-débil es por construcción un bien definido tensor de Lorentz (en la versión linealizada, los símbolos de Christoffel son objetos de Lorentz). En el principio de equivalencia es ajeno a la teoría linealizada.

Para fijar ideas sobre la noción de energía en la teoría linealizada, recordemos al tensor canónico asociado a ella:

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}^{(\varrho} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(\varrho}}{\partial h_{(k\lambda),\nu}} h_{kk\lambda}{}^{,\mu} \tag{1.102}$$

este objeto nos ofrece la conservación débil

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{1.112}$$

Por otro lado, hemos mencionado que el tensor de materia en la teoría linealizada $\overline{T}^{\mu\nu}$ se conserva independientemente del campo-débil

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{1.28}$$

Entonces, de manera natural la cantidad $\overline{T}^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}$ podría interpretarse como la energía y momento de la materia generadora del campo mas la energía y momento del campo mismo. Esta cantidad es conservada localmente

$$\left(\overline{T}^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0. \tag{1.128}$$

Si alguien le molesta la no simetría de $\tau^{\mu\nu}$, podemos darle gusto haciendo la sustitución $\tau^{\mu\nu} \to \mathcal{T}^{\mu\nu}$ y de igual menera seguimos conservando localmente la cantidad

$$\left(\overline{T}^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0. \tag{1.129}$$

Tanto $\overline{T}^{\mu\nu}$ como $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ son dos objetos de Lorentz, y por ende no depende su determinación del sistema de coordenadas inercial. En este sentido $\tau^{\mu\nu}$ (y también $\mathcal{T}^{\mu\nu}$) no es un pseudotensor como lo es el $\tau^{\mu\nu}$ de la teoría completa. Al ser bien definido en cuanto a su simetría de Lorentz y conservarse localmente $\tau^{\mu\nu}$ (o $\mathcal{T}^{\mu\nu}$) nos ofrece en principio *pero solo en principio* una aceptable definición local de la conservación de energía-mpomento del campo-débil.

Con el propósito de llegar a este punto nos abstuvimos de hablar de la simetría de norma $h_{\alpha\beta} \to h'_{\alpha\beta} + 2\epsilon_{(\alpha,\beta)}$ en la formación lagrangiana de la teoría linealizada (sección 1.7) y en la definición de su tensor canónico $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ (sección 1.8). Pero ahora resulta inevitable el hacerlo: todas las densidades lagrangianas equivalentes a $\mathcal{L}_0$ (1.98), $\bar{\mathcal{L}}'^{g}$ (1.105) y $\bar{\mathcal{L}}''^{g}$ (1.122) *no son invariantes de norma.* Es decir, no se preservan ante los cambios locales de la forma $h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2P_{(\alpha,\beta)}$. Consecuentemente, los $\bar{\tau}^{\mu\nu}$'s canónicos y sus respectivos $\mathcal{T}^{\mu\nu}$'s simétricos tampoco son invariantes de norma. Es decir: la distribución de energía-momento descrita por $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ depende de la transformación de norma y en última instancia de la transformación infinitesimal de coordenadas que induce a la misma sección 1.5. Si *la simetría de norma no nos impidió localizar la energía del campo-débil, la simetría de norma se encargó de hacerlo.*

En opinión de Trautman el tensor $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ dado por (1.110) no puede hacerse invariante de norma adicionándole una circulación. De igual manera Groenewold considerando en esencia la densidad lagrangiana equivalente

$$\overset{g}{\bar{\mathcal{L}}}{}''' = \frac{1}{2}\overset{g}{\bar{\mathcal{L}}}{}'' + \overset{g}{\bar{\mathcal{L}}}{}' \tag{1.130}$$

afirma tajantemente que no puede conseguirse de ningún modo la invarianza de norma de $\bar{\mathcal{L}}'''^{g}$ y de su $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ asociado. Tendremos opurtunidad de demostrar en el siguiente capítulo, que tanto las afirmaciones de Groenewold como de Trautman *no son del todo ciertas.*

En electrodinámica clásica asociamos al campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ (sin fuentes) con una densidad lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ invariante de norma y manifiestamente covariante. En base a esta acción construimos el tensor canónico de energía-momento $\tau_c^{\mu\nu} = F^{\alpha\mu}A_{\alpha}{}^{,\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ que no es invariante de norma (pero sí es un objeto de Lorentz). Simetrizando a $\tau^{\mu\nu}$, vía el método de Belinfante, conseguimos al tensor covariante $\mathcal{T}_c^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ el cual es invariante de norma. *La simetrización de $\tau_c^{\mu\nu}$ restituyó la invarianza de norma en la teoría.* La energía electromagnética está bien localizada y su conservación bien definida. En resumen: el tensor $\mathcal{T}_c^{\mu\nu}$ del campo electromagnéctico es simétrico, manifiestamente covariante, débilmente conservado e invariante de norma. La situación es diferente en gravitación linealizada: el tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ es manifiestamente covariante, simétrico, conservado *pero no es invariante de norma.* El paralelismo entre ambas teorías, que detallaremos en el capítulo 2, nos motiva para seguir investigando la posibilidad de localizar la energía y momento del campo-débil.

§4 Las ecuaciones de movimiento de la teoría linealizada

Con la idea de encontrar las ecuaciones de movimiento de partículas urgidas por el campo–débil, permitásemos considerar el problema análogo en la teoría completa. Casi en todo momento uno encuentra fuertes diferencias entre relatividad general y las otras teorías clásicas de campo. La situación en torno al tema de las ecuaciones de movimiento nos confirma este hecho. A este respecto Goldberg escribe, *la relatividad general es por ahora la única teoría de campo conocida en la cual las ecuaciones de movimiento para fuentes localizadas no pueden ser postuladas separadament, sino mas bien se siguen de las ecuaciones de campo.* Conseguir las ecuaciones de movimiento de las ecuaciones de campo, en la relatividad general, fue durante un buen tiempo un problema interesante. Ahora resulta fácil de hacer para el caso de una partícula *testigo*. Soguiendo a Lightman escribimos el tensor de energía–momento para una partícula puntual de masa M metida en un campo gravitacional $g_{\alpha\beta}$:

$$T^{\mu\nu} = M \int \frac{\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(s))}{\sqrt{-g}} u^\mu u^\nu ds = \int \rho u^\mu u^\nu ds \qquad (1.131)$$

como consecuencia de las identidades de Bianchi $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$, originadas a su vez de la estructura del tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, y de las ecuaciones einstenianas de campo see sigue que $T^{\mu\nu}$ debe conservarse covariantemente

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \int [(\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + (\rho u^\nu) u^\mu{}_{;\nu}] ds = 0 \qquad (1.132)$$

si contraemos la expresión anterior con u_μ (aceptando $u_\mu u^\mu = -1$) obtenemos

$$\int [-(\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho(\nabla_U U \cdot U)] ds = 0$$

como la cuadriaceleración $\nabla_U U$ es ortogonal a la cuadrivelocidad U, el segundo término del integrando en la última expresión se anula y por ende también en primero. Es deir, $(\rho u^\nu)_{;\nu} = 0$ (esta expresión es simplemente la ecuación e continuidad covariente de la partícula). Consecuentemente, sólo sobrevive el segundo término de (1.132), es decir,

$$\int (\rho u^\nu) u^\mu{}_{;\nu} ds = 0$$

esta última expresión implica $u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0$ donde ρ es diferente de cero, esto es donde la partícula se ubica (ρ es una delta de Dirac multiplicada por $|g|^{-\frac{1}{2}}$). Ahora bien, $u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0$ son presisamente las ecuaciones de movimiento en relatividad general

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{1.133}$$

Estas ecuaciones son universalmente conocidas por ecuaciones de las geodésicas. Todo el argumento anterior se puede poner en un renglón:

$$\underset{\text{ecuación de campo}}{G^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}} \oplus \underset{\text{identidad de Bianchi}}{T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0} \Rightarrow \underset{\substack{\text{ley de conservación}\\ \text{covariante}}}{T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0} \Rightarrow \underset{\text{ecuación de movimiento}}{\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.} \tag{1.134}$$

El que las ecuaciones de movimiento estén determinadas por las ecuaciones de campo, actúa sobre las fuentes productoras del campo mismo.

Al edificar la teoría linealizada expresamente no aceptamos que el campo-débil reaccione sobre las fuentes que lo producen. Consecuentemente, en esta teoría ***no debe ser plausible*** un renglón análogo a (1.134). ¿Qué sucedería si deducimos las ecuaciones de movimiento de una partícula acionada por el campo-débil de las ecuaciones linealizadas? Daremos la respuesta por medio de la siguiente ficción: Sería difícil pensar cualesquiera de nosotros que un día no apareciese mas el sol. Si esto llegare a suceder, quizá sea porque a un convencido partidiario de la teoría linealizada de nombre *linealón* se le halla ocurrido probar la consistencia de la misma. Linealón sabe que las identidades linealizadas de Bianchi

$$\overline{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1.29}$$

no pueden fallar en vista de que ellas nacen de la estrucctura del tensor linealizado de Einstein. Asimismo, él no duda en ningún sentido de la validez de las ecuaciones linealizadas $\overline{G}^{\mu\nu} = -\overline{T}^{\mu\nu}$. Para linealón es bien claro que $\overline{T}^{\mu\nu}$ debe incluir todas las energías y momentos de partículas fuentes del campo-débil así como las energías y momentos de todos los campos no gravitacionales presentes en un punto dado. En virtud de (1.29) y de las ecuaciones linealizadas él acepta de mil amores la conservación local de energía y momento

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{1.28}$$

Después de un laborioso trabajo linealón puede construir el $T^{\mu\nu}$ de la tierra, la cual es como un punto de masa M para la grandeza del sistema solar

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{\text{Tierra}} = M \int \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu d\tau. \tag{1.135}$$

Entonces, si en una noche de un día frío se le ocurre la locura de meter (1.135) en la inviolable ley de conservación de energía-momento (1.28), obtiene después de breve cálculo

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{\text{Tierra},\nu} = M \int \ddot{x}^\mu \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))d\tau \tag{1.136}$$

lo que le va implicar inexorablemente

$$\ddot{x}^\mu = 0! \tag{1.137}$$

Y en ese momento la reyna tierra, junto con sus súbditos, se liberará de la influencia del rey sol, alejándose con velocidad constante hacia la obscura incertidumbre del espacio-tiempo interestelar ... La moraleja del cuento de linealón es simple: En la teoría linealizada no es posible *extraer* las ecuaciones de movimiento de las ecuaciones de campo. La supuesta inconsistencia vislumbrada por linealón tiene su origen al pensar que la implicación $G^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu} \oplus G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, correcta en relatividad general, traduce su validez a la teoría linealizada. Es decir, en creer que $\overline{G}^{\mu\nu} = -\overline{T}^{\mu\nu} \oplus \overline{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \Rightarrow \overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ es a su vez una implicación acertada (Wald, página 78). En gravitación linealizada la energía y momento de las fuentes generadoras del campo-débil son especificados arbitrariamente y sólo se les pide que se conserven por si mismos (Stephani, página 121). Esto es $\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv 0$ es una ley fuerte en el sentido de ser independiente del campo-débil. Luego entonces $\overline{G}^{\mu\nu} = -\overline{T}^{\mu\nu} \oplus \overline{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv 0$no implica$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. La correcta relación entre las identidades de Bianchi linealizadas $\overline{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv 0$ y la ley de conservación de las fuentes $\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv 0$ estriba en afirmar que ambas son autoconsistentes (la validez de las unas es independiente de la validez de la otra). Esta misma situación se presenta en electrodinámica clásica donde la conservación de la carga $J^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ y las identidades de Bianchi *electromagnéticas* $F^{\alpha\beta}{}_{,\ \ ,\beta} = 0$ son autoconsistentes. Entonces, al igual que la electrodinámica, es necesario preescribir independientemente las ecuaciones de movimiento de partículas sumergidas en el campo-débil. Dicho en otras palabras: a diferencia de la teoría completa, la teoría linealizda es como las demás teorías de campo en el sentido de que es irremediablemente necesario postular las ecuaciones de movimiento separadamente de las ecuaciones de campo.

Ahora bien, ¿Cuáles son las eceptadas ecuaciones de movimiento de una partícula urgida por el campo–débil?. Las ecuaciones candidato más naturales para este papel *deberían en principio sugerirse* de la teoría completa. Esto parece sencillo de hacer; en la ecuación de geodésicas (1.133) hágase las sustituciones $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \to \bar{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ y $\frac{d}{ds} \to \frac{d}{d\tau}$ (esto significa que $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$ y $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ son las usuales cuadriaceleración y cuadrivelocidad de la cinemática relativista), para conseguir las ecuaciones de movimiento de la teoría linealizada

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.138}$$

o explícitamente

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \left(h_\alpha{}^\mu{}_{,\beta} - \tfrac{1}{2}h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.139}$$

sobra decir que estas ecuaciones son manifiestamente covariantes. También es necesario remarcar que no hemos deducido (1.138) de (1.133), simplemente nos hemos dejado guiar por (1.133) para proponer (1.138). Por lo tanto, es más sostenible decir que (1.138) es un postulado, una hipótesis que nos dice como actúa el campo–débil sobre una partícula inmersa en él, o como se dice en mecánica: es nuestra ley de fuerzas. Es importante notar que (1.138) no es la única ley de fuerzas sugerida por la teoría completa; si reescribimos por ejemplo (1.133) en la forma

$$g^{\mu\nu}\,\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

y aplicamos la condición de campo–débil $g^{\alpha\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, entonces $\Gamma_{\nu\alpha\beta} \to \bar{\Gamma}_{\nu\alpha\beta}$. Haciendo además el cambio $\frac{d}{ds} \to \frac{d}{d\tau}$, obtenemos

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\rho}{d\tau} + h^{\mu}{}_{\nu}\,\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}. \tag{1.140}$$

Por jugar con índices nos apareció un término de interacción¡. ¿Cuál es la correcta expresión para la ley de fuerzas, (1.138) o (1.140)?. MTW(página 181) señalan a (1.140), Stephani(página 124) y Clarke(página 186) afirman que (1.138). La respuesta, obviamente, debe darse en última instancia por argumentos experimentales. Por razones teóricas de simplicidad, es más aceptable (1.138)(el término $h^{\mu}{}_{\nu}\,\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}$ dificulta la integración de (1.140)).

Regresando al cuento de linealón, es interesante notar como diversos autores tratan de basarse en él para argumentar una incosistencia de fondo de la teoría linealizada. Por ejemplo, MTW(página 186) insisten en afirmar que $\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ es *incompatible* con $\ddot{x}^{\mu} + h_{\nu}{}^{\mu}\ddot{x}^{\nu}\overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0$, por el simple hecho que de $\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ se *extrae* exclusivamente $\ddot{x}^{\mu} = 0$. Ellos claman que esta *autoconsistencia* grave en una teoría lineal de gravedad, sólo puede repararse si se le sustituye por la teoría completa. Desde el punto de vista de Wald(página 78) esta situación ilustra las dificultades que ocurren cuando uno trata de derivar las ecuaciones de movimiento de partículas a partir de las ecuaciones einstenianas vía una expresión perturbativa de las mismas. En cuanto a la afirmación de MTW, desde nuestro punto de vista no tenía porque haber compatibilidad entre la conservación $\overline{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ y cualquier ley de fuerzas (1.138) o (1.140), en vista que la última debe postularse independientemente. En todo caso, lejos de ser incompatibles son complementarias. En relación al comentario de Wald, era de esperarse de principio estas dificultades por el hecho de que pertubar débilmente las ecuaciones einstenianas origina una teoría sin covarianza general y sin autointeracción. Si insistiéramos en determinar las ecuaciones de movimiento $\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0$ de alguna operación sobre $T^{\mu\nu}$, es necesario cambiar la usual regla de derivación. Introducimos el cálculo gravitacional linealizado por la regla de derivación

$$A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots;\partial} \equiv A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots,\partial} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\theta\partial}A^{\theta\cdots}{}_{\beta\ldots} + \cdots - \overline{\Gamma}^{\theta}{}_{\beta\partial}A^{\alpha\cdots}{}_{\theta\ldots} - \cdots \qquad (1.141)$$

este cálculo sigue esencialmente las usuales reglas de la diferenciación covariante y actúa solamente sobre objetos de Lorentz. Cualquiera que sea el contenido físico de $A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\ldots}$ el mismo se verá afectado por el campo-débil si se le deriva mediante (1.41). Ahora bien, en base a (1.141) podemos demostrar que

$$\left\{\begin{matrix}(\rho v^{\alpha})_{;\alpha} = 0 \\ \text{ecuación de continuidad} \\ \text{en presencia del} \\ \text{campo-débil}\end{matrix}\right\} \oplus \left\{\begin{matrix}\overline{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \\ \text{conservación de} \\ \text{energía-momento} \\ \text{en presencia del} \\ \text{campo-débil}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0 \\ \text{ecuaciones de} \\ \text{movimiento en presencia} \\ \text{del campo-débil}\end{matrix}\right\}. \qquad (1.142)$$

Para el caso de una sola partícula de masa unitaria, la densidad ρ es definida por $\rho = \delta^4(x^{\alpha} - x^{\alpha}(\tau))$, consecuentemente, se puede definir el tensor de energía-momento de una partícula a travéz de

$$\overline{T}^{\mu\nu} = \delta^4(x^{\alpha} - x^{\alpha}(\tau))\,\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \qquad (1.143)$$

aceptando la ecuación de continuidad de la partícula en presencia del campo débil

$$(\rho \dot{x}^{\nu})_{;\nu} = \left[\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))\,\dot{x}^{\nu}\right]_{;\nu} = 0 \tag{1.144}$$

y diferenciando (1.143) mediante el operador ; obtenemos

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left[\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))\,\dot{x}^{\nu}\right]_{;\nu}\dot{x}^{\nu} + \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))\,\dot{x}^{\nu}\,\dot{x}^{\mu}{}_{;\nu} = \delta^4(x^\alpha - x^\alpha \quad (\tau))\,\dot{x}^{\nu}\,\dot{x}^{\mu}{}_{;\nu} \tag{1.145}$$

donde hemos considerado (1.144). Y ahora empleando la regla (1.141) en (1.145) se consigue

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\quad))\,\dot{x}^{\nu}\left\{\dot{x}^{\mu}{}_{,\nu} + \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\theta\nu}\,\dot{x}^{\theta}\right\} = \delta^4(x^\alpha - x_\alpha(\tau))\left\{\ddot{x}^{\mu} + \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\theta\nu}\,\dot{x}^{\theta}\,\dot{x}^{\nu}\right\} \tag{1.146}$$

donde hemos empleado $_{,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{d\tau}{dx^\nu}\frac{d}{d\tau}$. Sólo nos resta demandar

$$\overline{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 = \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))\left\{\ddot{x}^{\mu} + \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\theta\nu}\,\dot{x}^{\theta}\,\dot{x}^{\nu}\right\} \tag{1.147}$$

lo que implica

$$\ddot{x}^{\mu} + \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\theta\nu}\,\dot{x}^{\theta}\,\dot{x}^{\nu} = 0 \tag{1.148}$$

donde $\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))$ es diferente de cero, esto es donde la partícula se encuentra.

El cálculo gravitacional linealizado es simplemente el resultado de aplicar la condición de campo–débil al cálculo tensorial más la sustitución $A^{\mu\cdots}{}_{\nu\ldots}$(tensor de covarianza : $A^{\mu\cdots}{}_{\nu\ldots}$(tensor de Lorentz). Para concluir la sección es interesante remarcar la posibilidad de postular una alternativa ley de fuerzas para la partícula urgida por el campo–débil, manteniendo por supuesto las ecuaciones linealizadas.

§5 La teoría linealizada ¿una teoría de espín 2?

En 1939 Pauli y Fierz, investigando sobre ecuaciones de onda relativista asociadas a partículas cuánticas de espín mayor a 1/2, descubrieron en las ecuaciones

$$\psi^{\mu\nu,\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{1.149}$$

junto con subsidiaria condición

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1.150}$$

un sistema diferencial adecuado para describir partículas de espín 2 y masa en reposo nula. Ellos demandaron simetría a $\psi^{\mu\nu}$ en base al siguiente razonamiento: una partícula de espín 2 tiene 5 orientaciones cuantizadas en el espín y en vista del doble signo para loe estados de energía, se requiere una función de onda de 10 componentes. Precisamente las componentes independientes que tiene un tensor simétrico de orden dos. Sobra decir que por ser una teoría relativista, el esenario en que se desenvuelven estas partículas de espín 2 es el espacio-tiempo de Minkowski. Recordando las ecuaciones de campo-débil en el vacío

$$\bar{h}^{\mu\nu,\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{1.34}$$

en la norma de Lorentz

$$\bar{h}^{\mu\nu,\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{1.33}$$

nos eorprende su formal similitud con (1.149) y (1.150). La sorpresa es agradable en el sentido de que si intetásemos cuantizar al campo–débil, las partículas de campo esperadas los *gravitones*, resultarían esencialmente de espín 2. Por ser el campo–débil una interacción de rango infinito, necesariamente los gravitones tendrían masa en reposo nula. Entonces es bien natural pensar que el correspondiente campo clásico de las partículas mecánica–cuánticas de masa en reposo nula y espín 2 es en esencia, el campo linealizado deEinstein.

§6 La teoría linealizada contra la teoría completa

La teoría linealizada hereda características de la teoría completa que no son suficientes para poder hablar de una equivalencia entre ambas. Sus diferencias son tan fuertes como pueden ser las diferencias entre la teoría lineal y una no lineal. Desde el punto de vista matemático no existen razones para suponer que las soluciones de las ecuaciones de campo–débil deban aproximarse a las soluciones de la teoría completa, excepto en casos muy limitados. La causa de este hecho radica esencialmente en dos puntos: en primer lugar, las soluciones de las ecuaciones no lineales se comportan a menudo muy inestables, en el sentido de que pequeñas variaciones en los coeficientes de la ecuación (particularmente en los coeficientes de las derivadas de mayor orden) pueden originar grandes cambios en las soluciones. En segundo lugar, al resolver las ecuaciones completas o las ecuaciones linealizadas se requiere de condiciones de frontera sobre el comportamiento de las soluciones en el infinito, y no existen rigurosas pruebas que permitan a uno hacer corresponder las condiciones de frontera apropiadas en las dos teorías, la exacta y la linealizada. Consecuentemente, por consideraciones matemáticas es mejor aceptar que las soluciones de las ecuaciones de la teoría de campo–débil no son soluciones de las ecuaciones de la teoría completa, sino son soluciones de una *teoría diferente* que eventualmente pueden dar alguna idea del comportamiento esperado de las soluciones exatas.

Capítulo 2

Gravitación linealizada: ¿Una electrodinámica de dos índices?

§2.1 Superpotenciales

Supóngase por un momento que deseamos edificar la teoría linealizada a imagen de electordinámica clásica. En esta última, las ecuaciones *dinámicas* de campo son preescritas por

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = -J^{\alpha} \tag{2.1}$$

donde $F^{\alpha\beta}$ es el conocido tensor de Lorentz antisimétrico que contiene los campos eléctricos y magnéticos, y J^{α} es el cuadrivector carga–corriente, fuente de tales campos. Si nuestra suposición es viable, deberíamos esperar la existencia de un tensor de Lorentz de tres índices $U^{\alpha\beta\gamma}$, eventualmente con algún tipo de simetría, que nos representáse fidedignamente al campo linealizado y que se relacione con el tensor fuente $\overline{T}^{\alpha\beta}$ (el cual especifica energía y momento de partículas y de campos no gravitacionales) por una ecuación análoga a (2.1), es decir, por una expresión de la forma

$$U^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = -\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

ves fácil notar que nuestra suposición será esencialmente realizada si logramos construir un específico $U^{\alpha\beta\gamma}$ tal que

$$U^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = \overline{G}^{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

luego entonces, las ecuaciones linealizadas

$$\overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

serían en principio equiivalentes al sistema (2.2).

A consecuencia de las identidades de Bianchi linealizadas

$$\overline{G}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \equiv 0 \equiv \overline{G}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} \tag{2.5}$$

el objeto $U^{\alpha\beta\gamma}$ debe ser tal que

$$U^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma,\beta} \equiv 0 \equiv U^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma,\alpha}. \tag{2.6}$$

En primera instancia, las ecuaciones linealizadas (2.4) son suficientes para determinar unívocamente al tensor $\overline{G}^{\alpha\beta}$; para las diez componentes independientes del campo $\overline{G}^{\alpha\beta}$ se tienen diez ecuaciones escalares funcionalmente independiente. Sin embargo, el tensor $U^{\alpha\beta\gamma}$ tiene $4^3 = 64$ componentes, de principio todas independientes, y por ende las diez ecuaciones escalares (2.3) no van a determinarlo unívocamente (tenemos en este caso diez ecuaciones con sesenta y cuatro incógnitas¡). En la idea de asegurar la completa equivalencia de (2.2) y (2.3) es necesario reducir de alguna forma a diez el número de componentes funcionalmente independientes de $U^{\alpha\beta\gamma}$. Esto pudo lograrse de dos maneras; imponemos condiciones de simetría a $U^{\alpha\beta\gamma}$ o aumentamos el número de ecuaciones en que este se vea involucrado. Para conseguir adecuadamente nuestros objetivos necesitaremos de ambas posibilidades.

Demandar antisimetría total a $U^{\alpha\beta\gamma}$ no sirve porque entonces solo contaríamos con cuatro componentes independientes. La reducción es excesiva. Exigir simetría total a $U^{\alpha\beta\gamma}$ parece más coherente puesto que entonces tendríamos veinte componentes independientes y si pudiésemos establecer diez identidades diferenciales independientes que involucren a las componentes de $U^{\alpha\beta\gamma}$, consiguiríamos nuestro propósito. Desafortunadamente no se ve nada fácil construir un tensor $U^{\alpha\beta\gamma} = U^{(\alpha\beta\gamma)}$ con la propiedad (2.3) y menos aún encontrar diez relaciones independientes en las que este intervenga. Una posibilidad más manipulable se deja ver al demandar simetría o antisimetría parcial a $U^{\alpha\beta\gamma}$. En la sección 1.8 definimos al objeto $Q^{k\lambda\nu}$ simétrico en sus dos primeros índices ($Q^{k\lambda\nu} = Q^{(k\lambda)\nu}$), al que llamamos ***superpotencial***, mediante la expresión

$$Q^{k\lambda\nu} \equiv \frac{1}{2}\{h^{k\lambda,\nu} - h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\nu}\eta^{k\lambda} + h^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}\eta^{k\lambda} + \tfrac{1}{2}\, h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\lambda}\eta^{k\nu} + \tfrac{1}{2}\, h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,k}\eta^{\lambda\nu} - h^{\nu\lambda,k} - h^{\nu k,\lambda}\} \tag{2.7}$$

y aseveramos que un cálculo directo nos ofrece

$$Q^{k\lambda\nu}{}_{,\nu} = \overline{G}^{k\lambda} \tag{2.8}$$

luego entonces $Q^{k\lambda\nu}$ parece un viable candidato para estrechar la equivalencia de $\overline{G}^{k\lambda} = -\overline{G}^{k\lambda}$ y $Q^{k\lambda\nu}{}_{,\nu} = -\overline{T}^{k\lambda}$. Por más de una razón $Q^{k\lambda\nu}$ no es, en la práctica, un campo adcuado para tal fin: antes que nada $Q^{k\lambda\nu}$ tiene cuarenta componentes independientes y no es evidente como conseguir treinta relaciones escalares indendientes, en las que se encuentre inmerso. No es único; por ejemplo el tensor $Q'^{k\lambda\nu} = Q'^{(k\lambda)\nu}$ definido por

$$Q'^{k\lambda\nu} \equiv \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{l} h^{k\lambda,\nu} - h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\nu}\eta^{k\lambda} + h^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}\eta^{k\lambda} + \frac{1}{2}\, h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\lambda}\eta^{k\nu} \\ \qquad + \frac{1}{2}\, h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,k}\eta^{\lambda\nu} - h^{k\sigma}{}_{,\sigma}\eta^{\lambda\nu} - h^{\lambda\sigma}{}_{,\sigma}\eta^{k\nu} \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

también verifica $Q'^{k\lambda\nu}{}_{,\nu} = \overline{G}^{k\lambda}$. Por analogía con electrodinámica, donde $F^{\alpha\beta}$ es invariante de norma, esperaríamos que $Q^{k\lambda\nu}$ se preservara ante los cambios locales de norma $h_{\alpha\beta} \to h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha,\beta)}$. Sin embargo, por su definición $Q^{k\lambda\nu}$ (e igualmente $Q'^{k\lambda\nu}$) no admiten tal invarianza de norma.

Ahora solo nos queda considerar la posibilidad de imponer antisimetría parcial $Q^{\alpha\beta\gamma}$. Fue Einstein quien introdujo por vez primera un objeto $H^{\alpha\beta\gamma}$ antisimétrico en sus dos últimos índices ($H^{\alpha\beta\gamma} = H^{\alpha[\beta\gamma]}$) a través de la expresión

$$H^{\alpha\beta\gamma} = h^{\alpha[\beta,\gamma]} + \eta^{\alpha[\beta}h^{\gamma]\mu}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\mu[,\beta}\eta^{\gamma]\alpha} \tag{2.10}$$

el que por construcción verifica

$$H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = \overline{G}^{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

El superpotencial o campo de tres índices $H^{\alpha\beta\gamma}$ es el objeto adecuado para obtener la equivalencia antes dicha. En vista de su antisimetría $H^{\alpha\beta\gamma}$ tiene veinte cuatro componentes independientes. Pero la existencia de las identidades direnciales

$$H_{[\alpha\beta\gamma]} = 0 \tag{2.12}$$

$$H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.13}$$

limitan a diez el número de componentes funcionalmente independientes de $H^{\alpha\beta\gamma}$. La expresión (2.12) se puede obtener directamente de (2.10);

$$
\begin{aligned}
H^{\alpha\beta\gamma} &= h^{\alpha[\beta,\partial]} + \eta^{\alpha[\beta} h^{\gamma]\mu}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\mu[,\beta} \eta^{\gamma]\alpha} \\
H^{[\alpha\beta\gamma]} &= h^{[\alpha[\beta\gamma]]} + \eta^{[\alpha[\beta} h^{\gamma]]\mu}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\mu[[,\beta} \eta^{\gamma]\alpha]} \\
&= h^{[\alpha\beta,\partial]} + \eta^{[\alpha\beta} h^{\gamma]\mu}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\mu[,\beta} \eta^{\gamma\alpha]} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde hemos empleado las propiedades $[[]] = []$ y $[()] \equiv 0$. La expresión (2.12) engloba cuatro ecuaciones independientes. Las relaciones diferenciales (2.13), se consiguen directamente:

$$
H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = \tfrac{1}{2}\left\{h^{\alpha\beta,\partial}{}_{,\alpha} - h^{\beta\mu}{}_{,\mu}{}^{,\partial} + h^{\partial\mu}{}_{,\mu}{}^{,\beta} - h^{\alpha\partial,\beta}{}_{,\alpha} + h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\beta,\partial} - h_{\mu}{}^{\mu,\partial,\beta}\right\}.
$$

Las ecuaciones (2.13) son diez relaciones independientes. Más aún, la restricción de Bianchi (2.6) es automáticamente satisfecha por $H^{\alpha\beta\gamma}$. Específicamente

$$
H^{\alpha\beta\partial}{}_{,\partial,\beta} \equiv 0 \equiv H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha,\partial} \qquad (2.14)
$$

se verifican por el conocido hecho $[] \otimes () \equiv 0$ y por (2.13). En síntesis: el sistema de ecuaciones $\overline{G}^{\alpha\beta} = -\overline{T}^{\alpha\beta}$ con $\overline{G}^{[\alpha\beta]} = 0$, donde se verifican las identidades de Bianchi linealizada $\overline{G}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \equiv 0$, es *esencialmente equivalente* al sistema de ecuaciones $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\partial} = -T^{\alpha\beta}$ junto con las identidades $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} \equiv 0$ y $H_{[\alpha\beta\gamma]} \equiv 0$ con $H^{\alpha(\beta\partial)} = 0$ y donde se satisfacen las identidades de Bianchi $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\beta,\partial} \equiv 0$. Si $H^{\alpha\beta\gamma}$ aspira representarnos fielmente al campo linealizado, es imprescindible que sea invariante de norma. En la sección 1.5 demostramos que el tensor linealizado $\overline{G}^{\alpha\beta}$ era invariante de forma bajo las transformaciones de norma

$$
h'_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha,\beta)}. \qquad (2.15)
$$

Ante este grupo de norma, el campo $H^{\alpha\beta\gamma}$ se transforma por

$$
H'^{\alpha\beta\partial} = H^{\alpha\beta\partial} + 2\xi^{[\partial,\beta]} + 2\eta^{\alpha\partial}\xi^{[\beta,\mu]}{}_{,\mu} + 2\eta^{\alpha\beta}\xi^{[\mu,\partial]}{}_{,\partial}, \qquad (2.16)
$$

es decir, $H^{\alpha\beta\partial}$ no es invariante bajo el mismo grupo de norma de $H^{\alpha\beta}$. O en otros términos $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha\beta)}$ no es una transformación de norma para el campo $H^{\alpha\beta\partial}$. Observando directamente (2.16), se hace evidente que la posibilidad de hacer

$$P^{\partial} = \tfrac{1}{2}\,\lambda^{,\partial} \tag{2.17}$$

con $\lambda = \lambda(x^{\alpha})$ una función escalar, arbitraria al punto de no modificar el orden pequeño de ξ^{γ} garantiza la invarianza de $H^{\alpha\beta\partial}$, es decir,

$$H'^{\alpha\beta\partial} = H^{\alpha\beta\partial}. \tag{2.18}$$

En otras palabras: restringiendo el grupo de norma de $\overline{G}^{\alpha\beta}$, obtenemos una simetría de norma para $H^{\alpha\beta\partial}$. Nuestra intención inicial de dibujar la teoría linealizada a imagen y semejanza de electrodinámica clásica es exitosa en este punto; el campo electromagnético se preserva bajo los cambios locales de norma $A^{\alpha} \rightarrow A'^{\alpha} = A^{\alpha} - \lambda^{,\alpha}$, en el mismo sentido en que el campo linealizado $H^{\alpha\beta\partial}$ no varía ante las transformaciones locales de norma

$$h^{\alpha\beta} \rightarrow h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}. \tag{2.19}$$

El origen de (2.19) se ubica en la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \tfrac{1}{2}\,\lambda^{,\mu} \tag{2.20}$$

lo cual puede demostrarse siguiendo esencialmente los pasos de la sección 1.5. Es importante señalar que la simetría de norma de $H^{\alpha\beta\partial}$, expresada por (2.19), es suficiente para desacoplar las distintas componentes del campo en las ecuaciones linealizadas $H^{\alpha\beta\partial}{}_{,\partial} = -T^{\alpha\beta}$. Quizá parezca restrictivo considerar a $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}$ como el grupo de transformaciones de norma de la teoría linealizada cuando es expresada a trvés de $H^{\alpha\beta\partial}$, sobre todo a sabiendo que la misma teoría expresada por el campo $\overline{G}^{\alpha\beta}$ admite el grupo de norma más amplio $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{(\alpha,\beta)}$. Tendremos opurtunidad de comentar en la sección 2.4, que es (2.19) y no (2.15) la transformación de norma requerida para considerar a la teoría linealizada como una *completa* teoría de norma. Para concluir la sección es importante decir que la idea de utilizar *superpotenciales* para expresar la teoría linealizada, es algo común con objetos de cuatro índices. Por ejemplo, MTW(página 46) introducen al tensor de Lorentz

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = \left(\overline{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\overline{h}^{\alpha\beta} - \overline{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \overline{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}\right) \tag{2.21}$$

con iguales simetrías del tensor de Riemann,

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = H^{\nu\beta\mu\alpha} = H^{[\mu\alpha][\nu\beta]}, \qquad H^{\mu[\alpha\nu\beta]} = 0. \tag{2.22}$$

En base a $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, las ecuaciones linealizadas adquieren el aspecto

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha,\beta} = 2\bar{T}^{,\mu\nu}. \tag{2.23}$$

Desafortunadamente, como lo señalan MTW, $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ no es invariante de norma, es decir, no se preserva de forma bajo (2.15) (y tampoco ante (2.19)). Consecuentemente, no es un objeto viable para representar un campo físicamente observable. Es pertinente decir en este momento que la existencia de $H^{\alpha\beta\gamma}$ com de $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ es algo natural en el cálculo de formas diferenciales: se puede demostrar (Wald página 89) que si $A^{\alpha\beta}$ es un tensor de Lorentz simétrico y conservado ($A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$, $A^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$), entonces existe un tensor $W^{\alpha\beta\partial}$ antisimétrico en sus dos últimos índices $W^{\alpha(\beta\partial)} = 0$, tal que $W^{\alpha\beta\partial}{}_{,\partial} = A^{\alpha\beta}$ con la identidad $W^{\alpha\beta\partial}{}_{,\alpha} = 0$ y también existe un superpotencial $U^{\alpha\beta\partial\xi}$ con las simetrías $W_{\alpha\beta\partial\xi} = U_{\beta\xi\alpha\partial} = U_{[\alpha\partial]\beta\xi} = U_{\alpha\partial[\beta\xi]}$ tal que $U^{\alpha\partial\beta\delta}{}_{,\partial,\delta} = A^{\alpha\beta}$.

§2.2 Las ecuaciones linealizadas derivadas de una acción cuadryatica

En electrodinámica las ecuaciones de campo (en el vacío) $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ se derivan a través de la acción lagrangiana cuadrática en el campo electromagnético, $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Por tanto, si la edificación de gravitación linealizada es coherentemente guiada por electrodinámica, deberíamos esperar que las ecuaciones linealizadas en el vacío

$$H^{\alpha\beta\partial}{}_{,\partial} = 0 \tag{2.24}$$

puedan deducirse por una densidad lagrangiana cuadrática en el campo $H^{\alpha\beta\partial}$, es decir, por una expresión escalar de la forma

$$\mathcal{L} = kH^{\alpha\beta\partial}H_{\alpha\beta\partial} \tag{2.25}$$

siendo k una constante a determinar. Un cálculo directo de (2.25) en términos de los potenciales $h_{\alpha\beta}$ nos lleva a expresarla por

$$\mathcal{L} = \frac{k}{4}\left\{h_{\alpha\beta,\partial}h^{\alpha\beta,\partial} - h_{\alpha\beta,\partial}h^{\partial\beta,\alpha} + h^{\partial\mu}{}_{,\mu}h_{\partial\nu}{}^{,\nu} + h^{\nu}{}_{\nu,\partial}h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\partial} - 2h^{\partial\mu}{}_{,\mu}h_{\nu}{}^{\nu}{}_{,\partial}\right\}. \tag{2.26}$$

En base a esta densidad lagrangiana conseguimos las ecuaciones de campo

$$h^{k\lambda,\epsilon}{}_{,\epsilon} + h^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{,\epsilon}{}_{,\epsilon}\eta^{k\lambda} - h^{\epsilon}{}_{\epsilon}{}^{,k,\lambda} - h^{\alpha\epsilon}{}_{,\alpha,\epsilon}\eta^{k\lambda} = 0 \tag{2.27}$$

que evidentemente no son las ecuaciones linealizadas (2.24). En la práctica uno deriva las ecuaciones de un campo a través de la acción lagrangiana en que se suman diversos invariantes asociados al campo. En esta línea, permitamos ahora considerar la acción

$$\mathcal{L}' = kH^{\alpha\beta\partial}H_{\alpha\beta\partial} + pH^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\partial}H^{\beta}{}_{\beta\partial} \tag{2.28}$$

donde p es un parámetro a definir y $H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\partial}$ es la contracción de $H^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\partial}$. Explícitamente,

$$H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\partial} = h^{\partial\alpha}{}_{,\alpha} - h^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{,\partial}. \tag{2.29}$$

Tomando en cuenta (2.29), la acción (2.28) adquiere la forma explícita

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' =& \frac{k}{2}\left\{h_{\alpha\beta,\partial}h^{\alpha\beta,\partial} - h_{\alpha\beta,\partial}h^{\partial\beta,\alpha} + h^{\partial\mu}{}_{,\mu}h_{\partial\nu}{}^{,\nu} + h^{\nu}{}_{\nu,\partial}h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\partial} - 2h^{\partial\mu}{}_{,\mu}h^{\nu}{}_{\nu,\partial}\right\}\\ &+ p\left\{h^{\partial\mu}{}_{,\mu}h_{\partial\nu}{}^{,\nu} + h^{\nu}{}_{\nu,\partial}h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\partial} - 2h^{\partial\mu}{}_{,\mu}h^{\nu}{}_{\nu,\partial}\right\}\end{aligned} \tag{2.30}$$

La situación ahora es difernte con $\mathcal{L}'$ puesto que si elegimos los valores $k = \frac{1}{2}$ y $p = -\frac{1}{2}$, entonces (2.30) se ruduce en

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{4}\left\{h_{\alpha\beta,\gamma}h^{\alpha\beta,\gamma} - h_{\alpha\beta,\gamma}h^{\gamma\beta,\alpha} - h^{\gamma\mu}{}_{,\mu}h_{\gamma\nu}{}^{,\nu} - h^{\nu}{}_{\nu,\gamma}h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\gamma} + 2h^{\gamma\mu}{}_{,\mu}h_{\nu}{}^{\nu}{}_{,\gamma}\right\}. \tag{2.31}$$

Después de un cálculo tedioso (2.31) nos lleva a las correctas ecuaciones de campo de la teoría linealizada

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}}\right)_{,\epsilon} = H^{k\lambda\theta}{}_{,\theta} = 0. \tag{2.32}$$

Esto significa que $\mathcal{L}'$ definido por (2.31) es una acción lagrangiana equivalente a $\overset{c}{\mathcal{L}}{}'$ (expresión (1.105)) y $\mathcal{L}''$ (ecuación (1.122)). En realidad puede mostrarse fácilmente que $\mathcal{L}'$ es exactamente $\overset{c}{\mathcal{L}}{}'''$ definida por (1.130). En resumen: las ecuaciones linealizadas en el vacío, expresadas por el campo $H^{\alpha\beta\gamma}$ esto es $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$, son derivables a través de la acción cuadrática

$$\mathcal{L}' = \tfrac{1}{2}\left\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}\right\}. \tag{2.33}$$

En presencia de fuentes las ecuaciones de campo–débil, escritas mediante el campo $H^{\alpha\beta\gamma}$ son $H^{\alpha\beta\gamma}$

$$H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = -\overline{T}^{\alpha\beta} \tag{2.34}$$

y la densidad lagrangiana que nos conduce a estas últimas es

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\left\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}\right\} + h_{\mu\nu}\overline{T}^{\mu\nu}. \tag{2.35}$$

§2.3 Gravitación linealizada: ¿una correcta teoría de norma?

Electrodinámica clásica es la teoría de norma por excelencia; más aún, es en base a ella que se dictan las reglas de juego para hablar de una teoría de norma. En esta sección primero esbozaremos en que consisten tales reglas, después las ejemplificaremos en el caso de electrodinámica y para terminar, seguiremos su posible aplicación en la teoría linealizada. Dicho de otra manera, intentaremos construir gravitación linealizada como una coherente teoría de norma (propósito central de la sección).

Una teoría I descrita por el campo físico T, determinado a su vez, por las ecuaciones de campo $F(T)=0$, y susceptible de expresarse por los potenciales A, esto es $T=T(A)$, puede concebirse como una teoría de norma $\overset{N}{I}$, salamente si alguna simetría interna SI o externa SE esté presente en ella (matemáticamente esto se deja entrever por la existencia de cierta entidad independiente que involucra a $F(T)$. A veces tal entidad no es obvia, la simetría se nos oculta). Este hecho significa que existe un grupo de transformaciones (grupo de norma) U : $A \to A'$, bajo el cual T y $F(T)=0$ (así como su lagrangiana asociada $\mathcal{L}(T)$) no se modifican: $T(A) \overset{u}{=} T'(A')$, $F(T)=0 \overset{u}{\to} F'(T')=0$ (asimismo $\mathcal{L}(T)=\mathcal{L}'(T')$). Dicho brevemente, la existencia de u mantiene inalterada la situación física. Siendo equivalentes las descripciones físicas de $\overset{N}{I}$ por medio de A o A', estamos en posibilidad de elegir la que más convenga a nuestros particulares intereses. Esta libertad de elección, producto de la inhablilidad física en detectar A, permite condicionar a A mismo. Dicho condicionamiento (elección de norma) se da en función del especial problema que se quiera resolver. Pero de una ú otra manera al fijar la norma (FN) se busca hacer más manipulables las ecuaciones de campo (ver sección 1.3), es decir, $F'(A')=0 \overset{FN}{\to} S'(A')=0$ (donde S' *es más conveniente*).

El siguiente y definitivo eslabón de una teoría de norma consiste en poder introducir al campo de norma A como un campo *compensador* de alguna simetría rota, con toda premeditación, de una segunda teoría J. Para mirar de cerca este proceso, permitamos considerar las simetrías (SI o SE) de J. De nueva cuenta admitase que existe para J un grupo de norma, es decir, una transformación $W : \psi \to \psi'$ ante el cual el propio campo ψ y sus correspondientes ecuaciones $M(\psi) = 0$ al igual que su lagrangiana asociada $\tilde{L}(\psi)$, no modifican su realidad física ($J = \overset{N}{J}$). Esto es, $\tilde{L}(\psi) \overset{W}{=} \tilde{L}'(\psi')$, $M(\psi) = 0 \overset{W}{\to} M'(\psi') = 0$. El paso crucial siguiente es el demandar una *ampliación* de W, o sea *atreverse* a cambiar el grupo de norma $W \to W'$. En general, la densidad $\tilde{L}(\psi)$ y las ecuaciones de campo $M(\psi) = 0$ se alterarán sustancialmente ($\tilde{L}(\psi) \overset{W'}{\to} L'(\psi')$, $M(\psi) = 0 \overset{W'}{\to} K'(\psi') = 0$). En el ánimo de restituirle la simetría a la teoría $\overset{N}{J}$, en el sentido de que ahora se preserve además ante W', es necesario introducir un campo compensador C en las ecuaciones de campo de J, esto es $F(T) \oplus C = 0$ (lo cual significa que debemos modificar hasta cierto punto a la teoría $\overset{N}{J}$, o sea $\overset{N}{J} \to \overset{N}{V}$). Luego entonces, la teoría modificada $\overset{N}{V}$ (en analogía con $K'(\psi') = 0$ se propone la explícita forma de $F(T) \oplus C = 0$) admitirá como grupo de norma a W' (lo que quiere decir $F(T) \oplus C = 0 \overset{W'}{\to} F'(T') \oplus C' = 0$) *si y solo si se acepta pagar el precio* de una definida transformación $D : C \to C'$ para el campo compensador ($C = C' = C + ?$). Escrito brevemente: conseguir la invarianza de $\overset{N}{V}$ bajo $W' : \psi \to \psi'$ demanda $D : C \to C'$. El invocar al campo compensador C no es hacer ciencia ficción ya que es posible, en general, elucubrar la naturaleza del mismo mediante el conocimiento de $C' = C + ?$.

En vista de la relativa arbitrariedad (en general) de ?, no es sostenible asignarle una directa interpretación física a C (en este sentido es mejor darle a C el nombre de potencial más que el de campo. Sobreentendiendo la idea de que los campos son observables y los potencailes nolo son). Sin embargo, esto no impide que podamos dibujar con C alguna o algunas cantidades que si conlleven una significación física. En otros términos: jugando con $C' = C+?$ podemos eventualmente construir (eliminando la arbitrariedad ?) algún objeto (u objetos) $M = M(C)$ tal que $M(C) = M'(C')$ (luego entonces M es observable). Ya en este momento hay bases para sospechar que el misterioso campo compensador C es precisamente el campo de norma A, es decir, simplemente $A = C$. *Por regalo de los dioses* todavía podemos ir más lejos; esgrimiendo alguna operación sobre la forma funcional de $M = M(C)$ es posible, en general, eliminar su explícita dependencia en C y por consecuencia obtener alguna ecuación de campo (o identidad) para M, o sea $K(M) = 0$. Pero saber esto último es conocer hasta cierto punto el tipo de interacción. O en pocas palabras: es posible conocer la naturaleza de la interacción surgida por insistir en compensar la simetría a la teoría $\tilde{\jmath}$. Y ahora si es evidente la identificación $A = C$, y por ende $U := D$:, $T = M$, $L = \tilde{L}$ y $F = K$. El juego de las teorías de norma no es un pasatiempo intracendente. Basta decir que *por un acuerdo de los dioses* las interacciones fundamentales pueden introducirse por este proceso, es decir, las interacciones fuerte, débil, electromagneética y gravitacional son viables de dibujarse como teorías de norma (T'Hooft 1980).

Toca ahora hacer transparentes las ideas anteriores con el ejemplo de la interacción electromagnética. Concretamente vamos a describir a electrodinámica clásica como una teoría de norma, en la que el potencial electromagnético A^{μ} (campo de norma) es introducido como un campo compensador. Electrodinámica clásica (en elvacío) es correctamente descrita por el tensor de Lorentz antisimétrico de campo $F^{\mu\nu}$. Las correspondientes ecuaciones de campo son las ***célebres*** ecuaciones de Maxwell,

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.36}$$

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0. \tag{2.37}$$

De la última ecuación se sigue la existencia del cuadripotencial A^{μ} definido por

$$F_{\alpha\beta} = 2A_{[\beta,\alpha]} \tag{2.38}$$

o sea, la teoría es susceptible de expresarse vía A^{μ}. La existencia de la identidad

$$F^{\mu\nu}{}_{,\mu,\nu} \equiv 0 \tag{2.39}$$

define la presencia de una simetría de norma interna (asociada a la conservación de carga). Esto significa que existe un grupo de transformaciones $U : A^{\mu} \rightarrow A'^{\mu} = A^{\mu} - \lambda^{,\mu}$ (donde $\lambda(x^{\alpha})$ es una función escalar arbitraria) bajo el cual en campo (2.38) y sus respectivas ecuaciones (2.36) y (2.37), así como su densidad lagrangiana asociada

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} \quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.40}$$

no se modifican. Es muy sencillo probar la invarianza del campo,

$$F'_{\alpha\beta} = 2A'_{[\beta,\alpha]} = A'_{\beta,\alpha} - A'_{\alpha,\beta} = (A_{\beta} - \lambda_{,\beta})_{,\alpha} - (A_{\alpha} - \lambda_{,\alpha})_{,\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} = 2A_{[\beta,\alpha]} = F_{\alpha\beta}$$

por lo tanto, la densidad (2.40) también es invariante

$$\mathcal{L}' = -\tfrac{1}{4} \quad F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{4} \quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathcal{L}$$

y análogamente las ecuaciones de campo

$$F'_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0 = F_{[\alpha\beta,\gamma]} \quad \text{y} \quad F'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 = F^{\mu\nu}{}_{,\nu}$$

Luego entonces estamos en posibilidad de elegir A'^{μ} o A^{μ} para describir la teoría. Supóngase que lo hacemos vía A'^{μ}, por tanto, de (2.38) y (2.36) se sigue la ecuación

$$A'^{\nu}{}_{,\nu}{}^{,\mu} - A'^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{2.41}$$

Ahora bien, en la última expresión las distintas componentes de A'^{μ} se encuentran visiblemente acopladas. Admítase nuestro interés, por algún motivo especial, en desacoplar al sistema (2.41). Esto se logra si imponemos la condición de norma (conocida universalmente por condición de Lorentz),

$$A'^{,\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{2.42}$$

Esta particular norma siempre en posible de imponer sin pérdida de generalidad; dada cualquier solución A^{μ} podemos siempre construir una A' tal que (2.42) se verifique, integrando simplemente la ecuación

$$\lambda^{,\mu}{}_{,\mu} = A^{\mu}{}_{,\mu}. \tag{2.43}$$

A la luz de la condición (2.42), las ecuaciones (2.41) se desacoplan en el sistema

$$A'^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.44}$$

que evidentemente es más manipulable que (2.41). Fijar la norma de Lorentz es tan sólo una posibilidad. Para otros propósitos(radiación) es más conveniente fijar la norma de Coulomb($A'^{i}{}_{,i} = 0$, $A^0 = 0$).

Nuestro siguiente paso en hacer la imagen de norma para electrodinámica clásica, es introducir A^μ como un campo compensador. Para conseguir esto, consideremos alguna de las ecuaciones de la mecánica cuántica. Por ejemplo, la ecuación relativista de Klein–Gordon de partícula libre.

$$\phi_{,\mu}{}^{,\mu} - m^2\phi = 0. \tag{2.45}$$

Es fácil mostrar que (2.45) se preserva bajo las transformaciones globales de fase (obviamente se trata de una simetría interna)

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-iq\lambda}\phi \qquad \text{con} \quad \lambda \quad \text{y} \quad q \quad \text{constantes.} \tag{2.46}$$

En efecto, metiendo (2.46) en (2.45) se obtiene

$$0 = \phi_{,\mu,\mu} - M^2\phi = e^{iq\lambda}(\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi')$$

lo que implica

$$\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' = 0. \tag{2.47}$$

Es decir, invarianza de fase global (2.46) es un grupo de norma para la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon.

Si nos atrevemos a ensanchar el grupo de norma (2.46), en el sentido de hacer local al parámetro λ, esto es $\lambda \rightarrow \lambda(x^\alpha)$, entonces la transformación de fase local

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-iq\lambda(x^\alpha)}\phi \tag{2.48}$$

con $\lambda(x^\alpha)$ una función escalar y arbitraria, va ha modificar violentamente a la ecuación (2.45). Específicamente (2.48) convierte a (2.45) en

$$0 = \phi_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi = e^{iq\lambda}(\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' + 2iq\lambda^{,\mu}\phi'_{,\mu} - q^2\lambda^{,\mu}\lambda_{,\mu}\phi' + iq\lambda_{,\mu}{}^{,\mu}\phi'). \tag{2.49}$$

Entonces, invarianza de fase local (2.48) no es una simetría de norma para la partícula libre de Klein–Gordon.

Si queremos restituirle la simetría, ahora bajo (2.48), a la ecuación (2.45) es necesario modificar a la misma, introduciendo un campo compensador

A^α, en analogía con (2.49), o sea

$$\phi_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi - 2iqA^\mu\phi_{,\mu} - q^2A^\mu A_\mu\phi - iqA^\mu{}_{,\mu}\phi = 0. \qquad (2.50)$$

Y ahora a esta ecuación de Klein–Gordon modificada, apliquémosle (2.48). Después de algún trabajo se implica

$$\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' - 2iq(A^\mu - \lambda^{,\mu})\phi'_{,\mu} - q^2(A^\mu - \lambda^{,\mu})(A_\mu - \lambda_{,\mu})\phi' - iq(A^\mu - \lambda^{,\mu})_{,\mu}\phi' = 0. \qquad (2.51)$$

Entonces, el precio a pagar por conseguir la invarianza de (2.50) ante los cambios locales de fase (2.48), lo que significa (2.51)=(2.50), es aceptar que el campo compensador A^α se transforme por

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \lambda^{,\mu} \qquad (2.52)$$

es decir,

$$\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' - 2iqA'^\mu\phi'_{,\mu} - q^2A'^\mu A'_\mu\phi' - iqA'^\mu{}_{,\mu}\phi' = 0 \qquad (2.53)$$

se implica de (2.50) por vía de (2.48) *acompañada* de (2.52).

En pocas palabras: para obtener invarianza de fase local en la ecuación de Klein–Gordon modificada (2.50) se requiere *invitar a la fiesta* al bien definido grupo *de animación* (2.52).

La naturaleza del campo compensador A^α podría parecer en este momento algo misteriosa. De entrada A^α no es un campo físico por culpa de la arbitrariedad de $\lambda(x^\alpha)$. Diferenciando y luego antisimetrizando (2.52) se encuentra un objeto sencillo invariante bajo la propia ecuación (2.52). En detalle, $A'^{\mu,\nu} = A^{\mu,\nu} - \lambda^{,\mu,\nu}$, y entonces $A'^{[\mu,\nu]} = A^{[\mu,\nu]}$ (en vista de $\lambda^{[\mu,\nu]} = 0$. Recordar $[()] = 0$). Consecuentemente, en base al inobservable A^α podemos definir al , en principio observable

$$F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu,\mu]}. \qquad (2.5)$$

Sobra decir que el objeto $F_{\mu\nu}$ es un tensor de Lorentz ($F_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu{}_\mu\Lambda^\nu{}_\nu F_{\mu\nu}$), antisimétrico ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) e invariante bajo (2.52) ($F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$).

Los dioses nos permiten ir más lejos aún; diferenciando una vez a (2.54) y después antisimetrizando totalmente a la expresión resultante, eliminamos la explícita dependencia de A^μ y obtenemos una ecuación de campo para $F_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= 2A_{[\nu,\mu]} \\ F_{\mu\nu,\alpha} &= 2A_{[\nu,\mu],\alpha} \\ F_{[\mu\nu,\alpha]} &= 2A_{[[\nu,\mu],\alpha]} = 2A_{[\nu,\mu,\alpha]} = 2A_{[\nu(,\mu,\alpha)]} = 0 \end{aligned} \tag{2.55}$$

donde hemos empleado $[[]] = []$ y $[()] = 0$. *Si suponemos* que las seis componentes independientes de $F_{\mu\nu}$ representan a las tres componentes de un vector polar $\mathbf{E}$ y las otras tres a las componentes de un axial $\mathbf{B}$, se puede demostrar entonces (Anderson página 144), que las ecuaciones de campo

$$F_{[\mu\nu,\alpha]} = 0 \tag{2.56}$$

en el lenguaje $(1+3)$ toman la forma

$$F_{[\mu\nu,\alpha]} = \left\{-\nabla \circ \mathbf{B}, \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial T}\right\} = \{0, \mathbf{0}\}. \tag{2.57}$$

Y ahora se nos revela claramente la naturaleza del campo A^μ. El campo compensador A^μ (campo de norma) es presisamente el potencial electromagnético, $F^{\mu\nu}$ es el campo electromagnético ($\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{B}$ el magnético), las componentes escalar y vectorial de (2.57) son las ecuaciones de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial T}$ (presisamente las ecuciones que definen las campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$), entonces (2.57)=(2.37). Las otras dos ecuaciones: $\nabla \cdot E = 0$ y $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial T}$, englobadas en $F^{\mu\nu}, \nu = 0$, se obtienen invocando, además, al principio de conservación de energías (Kobe 1977).

Así, en resumidas cuentas al campo físico que modifica la ecuación de Klein–Gordon es finalmente el electromagnético. Dicho de otra forma: el precio a pagar por engolosinarse con invarianza de fase local en la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon es presisamente el que la misma *deje de ser libre*¡. La interacción compensadora es la electromagnética. La ecuación ***compensada*** (2.50) es la ecuación de Klein–Gordon de la partícula urgida electromagnéticamente, que de igual forma podría haberse obtenido si admitimos otro estilo de derivar. Es decir, si introducimos la derivada covariante (de norma)

$$;\mu =, \mu - iqA_\mu \tag{2.58}$$

entonces haciendo, en la ecuación libre de Klein–Gordon (2.45), la transcripción

$$,\alpha \rightarrow ;\alpha \tag{2.59}$$

afectamos electromagnéticamente a la partícula de tal suerte que

$$\phi_{;\alpha}{}^{;\alpha} - M^2\phi = 0 \tag{2.60}$$

es exactamente (2.50).

La idea de una derivada de norma, es intrínsica a las teorías de norma. Es interesante notar que si en lugar de tomar la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon como base de nuestro análisis, hubiésemos considerado su densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \phi_{,\mu} = \phi^{,\mu} - M^2\phi^2 \tag{2.61}$$

las conclusiones hubiesen sido del todo equivalentes.

Si gravitación linealizada ***es algo asi como una electordinámica de dos índices***, entonces esperaríamos de manera natural encontrar en ella una consistente teoría de norma. En los siguientes renglones vamos a exhibir que este es esencialmente el caso.

La teoría linealizada (en el vacío) es adecuadamente descrita por el tensor (de Lorentz) de campo, antisimétrico en sus últimos índices, $H^{\alpha\beta\gamma}$. Las correspondientes ecuaciones de campo son las ecuaciones linealizadas

$$H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0 \tag{2.62}$$

aunadas a las relaciones

$$H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.63}$$
$$H_{[\alpha\beta\gamma]} = 0. \tag{2.64}$$

No es difícil comprobar que la descomposición más simple de $H^{\alpha\beta\gamma}$ en términos de las primeras parciales de un potencial de Lorentz simétrico $h^{\alpha\beta,\gamma}$ y de sus contracciones $h^{\alpha\mu}{}_{,\mu}$ y $h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\alpha}$ seguida de (2.64), y que verifica idénticamente (2.63) es

$$H_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha[\beta,\gamma]} + \eta_{\alpha[\beta}h_{\gamma]}{}^{\mu}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\mu}{}_{[,\beta}\eta_{\gamma]\alpha}. \tag{2.65}$$

Esto significa que la teoría es susceptible de expresarse vía $h_{\alpha\beta}$.

La existencia de la identidad

$$H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\beta,\gamma} \equiv 0 \tag{2.66}$$

definde la presencia de una simetría de norma externa (asociada a la conservación del tensor de energía–momento). Luego entonces, existe un grupo de transformaciones $U : h^{\alpha\beta} \rightarrow h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}$ (donde $\lambda(x^\alpha)$ es una función escalar arbitraria al punto de no perder el orden de $h^{\alpha\beta}$) ante el cual el campo (2.65) y sus respectivas ecuaciones (2.62)-(2.64), asi como su densidad lagrangiana asociada

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\left\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}\right\} \tag{2.67}$$

no se alteran de forma. Es simple mostrar la invarianza del campo:

$$\begin{aligned} H'_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left\{h'_{\alpha\beta,\gamma} - h'_{\alpha\gamma,\beta} + \eta_{\alpha\beta}h'_{\gamma}{}^{\mu}{}_{,\mu} - \eta_{\alpha\gamma}h'_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\mu} + h'_{\mu}{}^{\mu}{}_{,\beta}\eta_{\gamma\alpha} - h'_{\mu}{}^{\mu}{}_{,\gamma}\eta_{\beta\alpha}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{(h_{\alpha\beta} - \lambda_{,\alpha,\beta})_{,\gamma} - (h_{\alpha\gamma} - \lambda_{,\alpha,\gamma})_{,\beta} + \eta_{\alpha\beta}(h_{\gamma}{}^{\mu} - \lambda_{,\gamma}{}^{,\mu})_{,\mu} \\ &\qquad -\eta_{\alpha\gamma}(h_{\beta}{}^{\mu} - \lambda_{,\beta}{}^{,\mu})_{,\mu} + (h_{\mu}{}^{\mu} - \lambda_{,\mu}{}^{,\mu})\eta_{\gamma\alpha} - (h_{\mu}{}^{\mu} - \lambda_{,\mu}{}^{,\mu})_{,\gamma}\eta_{\beta\alpha}\} \\ &= H_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_{,\alpha[,\beta,\gamma]} + \eta_{\alpha\beta}\lambda^{,\mu}{}_{[,\mu,\gamma]} + \eta_{\alpha\beta}\lambda^{,\mu}{}_{[,\beta,\mu]} \\ &= H_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

(de nuevo hemos utilizado $[()] \equiv 0$). Por tanto la acción (2.67) también es invariante

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\left\{H'^{\alpha\beta\gamma}H'_{\alpha\beta\gamma} - H'^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H'^{\beta}{}_{\beta\gamma}\right\} = \frac{1}{2}\left\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}\right\} = \mathcal{L}$$

(obviamente de $H'_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\beta\gamma}$ se sigue $H'^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma} = H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}$). Y análogamente las ecuaciones de campo

$$H'^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0 = H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma}, \qquad H'^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} = 0 = H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} \qquad \text{y} \qquad H'_{[\alpha\beta\gamma]} = H_{[\alpha\beta\gamma]}.$$

A la luz de estas invarianzas estamos en posibilidad de elegir $h'_{\alpha\beta}$ o $h_{\alpha\beta}$ para representar a la teoría. Admitamos que lo hacemos vía $h'_{\alpha\beta}$, entonces de (2.65) y (2.62) se obtiene la ecuación

$$h'^{\alpha[\beta,\mu]}{}_{,\mu} + h'_{\mu}{}^{[\mu,\beta],\alpha} + \eta^{\alpha\beta}h'_{\mu}{}^{[\nu,\mu]}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.68}$$

que reescriba en función de la definición $\overline{h}'^{\alpha\beta} = h'^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h'_{\sigma}{}^{\sigma}$ toma el aspecto

$$\overline{h}'^{\alpha\beta}{}_{,\mu}{}^{,\mu} + \eta^{\alpha\beta}(\overline{h}'^{\nu\mu}{}_{,\mu})_{,\nu} - (\overline{h}'^{\alpha\mu}{}_{,\mu})^{,\beta} - (\overline{h}'^{\beta\mu}{}_{,\mu})^{,\alpha} = 0. \tag{2.69}$$

Ahora bien, en la última expresión las distintas componente de $\overline{h}'^{\alpha\beta}$ se muestra visiblemente acopladas. Puede suceder que por alguna razón particular estemos interesados en desacoplar al sistema (2.69). Por simple inspección de (2.69), esto se logra si imponemos la condición de norma (conocida también como condición de Lorentz)

$$\overline{h}'^{\theta\mu}{}_{\mu} = 0. \tag{2.70}$$

Esta particular elección de norma siempre es posible de imponer sin pérdida de generalidad; dada cualquier solución $\overline{h}^{\alpha\beta}$ podemos siempre construir un $\overline{h}'^{\alpha\beta}$ tal que (2.70) se verifique. Lo que se consigue integrando simplemente la ecuación

$$\lambda^{,\alpha,\beta}{}_{,\beta} = 2\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \tag{2.71}$$

en virtud de la condición (2.70), las ecuaciones (2.60) se desacoplan en el sistema

$$\overline{h}'^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = 0 \tag{2.72}$$

claramente más manipulable que el propio (2.60). Fijar la norma de Lorentz es tan solo una posibilidad interesante. Otra opción es fijar la norma especial de Hilbert ($h^{\alpha}{}_{\alpha} = h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha}{}^{,\gamma} = 0$.)

Nuestro siguiente paso en el dibujo de norma de la teoría linealizada es el introducir el campo $h^{\alpha\beta}$ como un campo compensador. Antes de hacerlo, es importante remarcar una diferencia de fondo en la naturaleza de las simetrías de norma de electrodinámica clásica y la teoría linealizada. Mientras en electrodinámica invarianza de norma ($A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} - \lambda^{,\mu}$) es una simetría interna (asociada a la conservación de la carga), en gravitación linealizada invarianza de norma ($h^{\alpha\beta} \to h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}$) es una simetría externa (asociada a la conservación del tensor de energía-momento). En este contexto es de resaltar el hecho que gravitación es la única de las interacciones fundamentales que, por ahora, ha sido tratada con uniminanidad como una teoría de norma pensada siempre en función de simetrías externas (Wilson 1980).

Después de este comentario, invoquemos de nuevo a la ecuación de partícula libre de Klein-Gordon

$$\phi_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi = 0. \tag{2.45}$$

Es muy fácil demostrar que la misma es invariante de forma bajo las trnsformaciones globales de coordenadas infinitesimales

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \tfrac{1}{2}\lambda^{,\mu} \tag{2.73}$$

con $\lambda^{,\mu}$ vector constante (λ es lineal) e infinitesimal. (Obviamente se trata de una simetría extrna). En efecto; basta ver que $\phi^{,\mu}$ es invariante ante (2.73),

$$\phi'^{,\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \phi^{,\alpha} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}\phi^{,\alpha} = \phi^{,\mu}$$

y por tanto $\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} = \phi_{,\mu}{}^{,\mu}$ lo que implica (por ser escalar $\phi' = \phi$)

$$\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' = 0. \tag{2.74}$$

Es decir, la transformación de corrimientos infinitesimales constantes en las coordenadas (traslaciones infinitesimales constantes) es un grupo de norma de la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon.

Si nos tomamos el atrevimiento de *cambiar* al grupo de norma (2.73), en el sentido de hacer local al cuadrivector $\lambda^{,\mu}$, esto es $\lambda^{,\mu} \to \lambda^{,\mu}(x^{\alpha})$, entonces la traslación infinitesimal local

$$x^{\mu} \to x^{,\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\lambda^{,\mu}(x^{\alpha}) \tag{2.75}$$

con $\lambda^{,\mu}(x^{\alpha})$ función vectorial arbitraria e infinitesimal, va alterar abruptamente a la ecuación (2.45). Explícitamente (2.75) convierte a (2.45) en

$$0 = \phi_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi = \phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' + \lambda^{,\alpha,\beta}\phi'_{,\alpha,\beta} + \tfrac{1}{2}\lambda^{,\alpha,\beta}{}_{,\alpha}\phi'_{,\beta} \tag{2.76}$$

llanamente esto significa que la transformación (2.75) no define una simetría de norma local (externo) para la ecuación de partícula libre de Klien–Gordon.

Si se quiere restituir la simetría a la ecuación de Klein–Gordon de partícula libre, ahora respecto a (2.75), es necesario modificar la ecuación misma introduciendo, en analogía con (2.76), un campo compensador.

Tenemos de momento una pequeña dificultad: la ecuación modificada de Klein–Gordon, mapeada de (2.76), puede ser

$$\phi_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha,\beta} - \tfrac{1}{2}h^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\phi_{,\beta} = 0 \tag{2.77}$$

donde $h^{\alpha\beta}$ es el campo compensador (necesariamente simétrico y débil). Sin embargo, si reescribimos el término $\frac{1}{2}\lambda^{,\alpha,\beta}{}_{,\alpha}\phi'_{,\beta}$ de (2.76) en la forma $\frac{1}{2}\lambda^{,\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\beta}\phi'_{,\beta}$, sería igualmente viable considerar como ecuación modificada a

$$_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi - h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha,\beta} - \tfrac{1}{2}h^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{,\beta}\phi_{,\beta} = 0 \tag{2.78}$$

donde $h^{\alpha}{}_{\alpha}$ es la traza de $h^{\alpha\beta}$. Existe una solución feliz, en el sentido de tomar en cuenta las dos posibilidades, a esta ambivalencia. Reescribamos (2.76) en la forma

$$\phi'{}_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' + \lambda^{,\alpha,\beta}\phi'{}_{,\alpha,\beta} + \lambda^{,\alpha,\beta}{}_{,\alpha}\phi'{}_{,\beta} - \tfrac{1}{2}\,\lambda^{,\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\beta}\phi'{}_{,\beta} = 0 \qquad (2.79)$$

entonces la ecuación de KLein–Gordon modificada, por analogía con (2.79), es

$$phi_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi - h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha,\beta} - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \tfrac{1}{2}\,h_{\alpha}{}^{\alpha,\beta}\phi_{,\beta} = 0. \qquad (2.80)$$

Aplicando de nuevo (2.75) a la ecuación anterior, obtenemos después de breve cálculo

$$\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' - (h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta})\phi'_{,\alpha,\beta} - (h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta})_{,\alpha}\phi'_{,\beta} + \tfrac{1}{2}\,(h^{\alpha}{}_{\alpha} - \lambda^{,\alpha}{}_{,\alpha})^{,\beta}\phi'_{,\beta} = 0 \qquad (2.81)$$

luego entonces el precio a pagar por conseguir invarianza de (2.80) bajo traslaciones infinitesimales locales del estilo de (2.75), esto es (2.80)=(2.81), es aceptar que el campo compensador $h^{\alpha\beta}$ y su traza $h^{\alpha}{}_{\alpha}$ se transformen por

$$h^{\alpha\beta} \to h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta} \qquad (2.82)$$

y

$$h^{\alpha}{}_{\alpha} \to h'^{\alpha}{}_{\alpha} = h^{\alpha}{}_{\alpha} - \lambda^{,\alpha}{}_{,\alpha}. \qquad (2.83)$$

De esta forma la invarianza es completa. Es decir,

$$\phi'_{,\mu}{}^{,\mu} - M^2\phi' - h'^{\alpha\beta}\phi'_{,\alpha,\beta} - h'^{\alpha\beta}{}_{,\alpha}\phi'_{,\beta} + \tfrac{1}{2}\,h'^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{,\beta}\phi'_{,\beta} = 0. \qquad (2.84)$$

se implica de (2.80) por vía de (2.75) acompañada de (2.82) y (2.83).

En pocas y sustanciales palabras: para obtener invarianza bajo traslaciones infinitesimales locales en la ecuación de Klein–Gordon modificada (2.80), es indispensable tomar en cuenta a la bien definida transformación (2.82) (y a su transversa (2.83)).

La naturaleza del campo compensador es hasta este momento algo misteriosa. Por principio de cuentas $h^{\alpha\beta}$ y su traza $h^{\alpha}{}_{\alpha}$ no estan bien definidos por culpa de la relativa arbitrariedad de $\lambda'^{\alpha}(x^{\alpha})$. Nuestro siguiente paso en la dirección de sondear alguna significación física asociada a $h^{\alpha\beta}$ y $h^{\alpha}{}_{\alpha}$, es construir objetos observables funciones de los propios $h^{\alpha\beta}$ (y de $h^{\alpha}{}_{\alpha}$), esto es entes carentes de toda arbitrariedad. Puesto en otros términos: anhelamos dibujar objetos invariantes ante (2.82) y (2.83) que eventualmente nos lleven a definir algún campo físico. La situación es más complicada que en electrodinámica en virtud de que ahora el campo de norma es de dos índices. Puede mostrarse que los entes $h^{\alpha[\beta,\gamma]}$ y $h_\alpha{}^{[\alpha,\gamma]}$ son los objetos más simples, deducidos de una primera derivación sobre (2.82) y (2.83), en los que la arbitrariedad suministrada por $\lambda^{,\mu}(x^\alpha)$ no esta presente. En efecto; diferenciado (2.82) y (2.83), $h'^{\alpha\beta,\gamma} = h^{\alpha\beta,\gamma} - \lambda^{,\alpha,\beta,\gamma}$ y $h'_\alpha{}^{\alpha,\gamma} = h_\alpha{}^{\alpha,\gamma} - \lambda_{,\alpha}{}^{,\alpha,\gamma}$ y luego antisimetrizando en sus dos últimos índices, $h'^{\alpha[\beta,\gamma]} = h^{\alpha[\beta,\gamma]}$ y $h_\alpha{}'^{[\alpha,\gamma]} = h_\alpha{}^{[\alpha,\gamma]}$ (donde por enésima vez hemos utilizado $[()] \equiv 0$) concluimos que los objetos de Lorentz $h^{\alpha[\beta,\gamma]}$ y $h_\alpha{}^{[\alpha,\gamma]}$ son invariantes de forma bajo las propias reglas (2.82) y (2.83). Consecuentemente, en base al indefinible campo de norma $h^{\alpha\beta}$ y a su traza $h^\alpha{}_\alpha$ podemos diseñar los campos, en principio observables:

$$S_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha[\beta,\gamma]} \tag{2.85}$$

y

$$S^\alpha{}_{\alpha\gamma} = K_\gamma = h^\alpha{}_{[\alpha,\gamma]}. \tag{2.86}$$

Resulta claro que el campo físico $\mathbf{H}$ más general inducido por el campo compensador $h^{\alpha\beta}$ va tener la forma $\mathbf{H} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{K}$. Antes de inferir $\mathbf{H}$ permitásenos analizar por separado (2.85) y (2.86). A consecuencia de su parcial antisimetría, el campo $S_{\alpha\beta\gamma}$ tiene en principio veinticuatro componentes independientes, las que rersultan demasiadas para sospechar que el mismo tenga que ver algo con las interacciones conocidas. Tomando antisimetría a (2.85) conseguimos directamente las ecuaciones (de nuevo $[[]] = []$ y $[()] = 0$)

$$S_{[\alpha\beta\gamma]} = 0 \tag{2.87}$$

que son cuatro relaciones independientes que involucran a $S_{\alpha\beta\gamma}$. Diferenciando $S^{\alpha\beta\gamma}$ doblemente respecto a sus índices de antisimetría, deducimos otras cuatro expresiones (tipo Bianchi) independientes (recuérdese que $[] \otimes () \equiv 0$)

$$S^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\beta,\gamma}. \tag{2.88}$$

Entonces, gracias a (2.87) y (2.88) reducimos en dieciséis el número de componentes funcionalmente independientes de $H^{\alpha\beta\gamma}$. Todavía son demasiadas. Afortunadamente no hemos considerado aún a (2.86). Sin más preámbulos y por obvia simplicidad la forma de H debería ser del estilo

$$H_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma} + \eta_{\alpha\beta} K_\gamma. \tag{2.89}$$

Definido **H** por medio de (2.89) tiene más componentes independientes que **S** (el térmno $\eta_{\alpha\beta}K_\gamma$ rompe la antisimetría en β y γ). Sin embargo, tenemos una simple solución a la mano; antisimetrizando en β y γ el segundo factor de (2.89) obtenemos al objeto

$$H_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma} + 2\eta_{\alpha[\beta}K_{\gamma]} = S_{\alpha\beta\gamma} + S^{\sigma}{}_{\sigma[\gamma}\eta_{\beta]\alpha} \tag{2.90}$$

que puesto explícitamente en términos de $h^{\alpha\beta}$ y $h^{\alpha}{}_{\alpha}$ es ni más ni menos

$$H_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha[\beta,\gamma]} + \eta_{\alpha[\beta}h_{\gamma]}{}^{\mu}{}_{,\mu} + h_{\mu}{}^{\mu}{}_{,[\beta}\eta_{\gamma]\alpha} \tag{2.10}$$

nuestro bien conocido campo linealizado, que según hemos probado satisface las relaciones de campo (2.13) y (2.14).

La misteriosa personalidad del campo compensador $h^{\alpha\beta}$ ha sido ha sido descubierta: $h^{\alpha\beta}$ es el potencial gravitacional débil, introducido por demandar invarianza de forma a la ecuación modificada de Klein–Gordon (2.80) ante traslaciones infinitesimales locales de la forma de (2.75). Dicho de otra manera: el precio a pagar por engolosinarse de invarianza de traslaciones infinitesimales locales en la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon es precisamente el que la misma *deje de ser libre¡*. La interacción compensadora es la gravitación linealizada. La ecuación *compensada* (2.80) es la ecuación de Klein–Gordon de partícula urgida por el campo linealizado, que de igual forma podría haberse conseguido si cambiamos la forma de derivar. Si en la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon aplicamos la *regla de oro* (principio de equivalencia) de relatividad general , →; entonces obtenemos la ecuación de Klein–Gordon para la partícula en presencia de gravitación

$$0 = \phi_{;\mu}{}^{;\mu} - M^2\phi = g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}{}^{,\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\phi_{,\sigma} - M^2\phi \tag{2.11}$$

Ahora bien, si en la anterior ecuación de covarianza general hacemos la sustitución dde campo–débil $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ e ignoramos términos de orden $h \otimes \partial h$, conseguimos la ecuación (2.80). Consecuentemente, ***al definir*** ; como ; ***evaluada*** en el campo–débil, se tiene una derivada de norma para la teoría linealizada. En síntesis: la transcripción

$$\text{(derivada parcial)} \quad , \to \;\; ; \quad \text{(derivada covariante débil)} \tag{2.91}$$

aplicada a la ecuación de partícula libre de Klein–Gordon (2.45) es tal que

$$\phi_{;\mu}{}^{;\mu} - M^2\phi = 0 \tag{2.91}$$

es exactamente la ecuación (2.80), esto es, la ecuación de Klein–Gordon para la partícula inmersa en el campo–débil.

Es importante hacer las siguientes observaciones:

(a) Jugando con específicas simetrías internas y externas de mecánica cuántica (representada en la ecuación de Klein–Gordon) hemos introducido las interacciones electromagnética y gravitacional (campo–débil). Sin embargo, es necesario notar que *en este juego*, introducir la última es más artificioso que el hacerlo con la primera. La razón de fondo de este hecho estriva en que durante el proceso hemos hecho *mutis* ante una hipótesis a todas luces imprescindible; las fuentes materiales generadoras del campo compensador simétrico $h_{\alpha\beta}$ (y por tanto del campo físico $H_{\alpha\beta\gamma}$) deben ser a su vez simétricas. *Limpiamente* invarianza bajo traslaciones locales infinitesimales *sugiere* introducir un campo $S^{\alpha\beta\gamma}$ (ecuación (2.85)) para el que $S^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} \neq S^{\beta\alpha\gamma}{}_{,\gamma}$ y en conceecuencia las posibles fuentes materiales $T^{\alpha\beta}$ generadoras del campo $S^{\alpha\beta\gamma}$, vía la ecuación $S^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = T^{\alpha\beta}$, serían necesariamente no simétricas. Por el contrario, si demandamos que el campo físico $H^{\alpha\beta\gamma}$ inducido por traslaciones locales sea engendrado por fuentes simétricas, entonces $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma}$ y por tanto $H^{\alpha\beta\gamma}$ definido por (2.90) es esencialmente el único campo que satisface todos los requerimientos (por ejemplo, unas identidades tipo Bianchi $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\beta,\gamma} \equiv 0$).

(b) En la presentación estandard de la teoría linealizada (Capítulo 1), donde el tensor linealizado de Einstein $\overline{G}_{\alpha\beta}$ juega el papel de campo físico, se clama que el grupo de norma es dado por $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - 2\xi^{(\alpha,\beta)}$. Sin embargo, bajo este grupo, la densidad lagrangiana (1.105) asociada (es decir, la acción que engendra $\overline{G}^{\alpha\beta} = 0$) *no es invariante de norma* (aún si se le agregase una divergencia pura tampoco lo sería (Trautman 1962)).

Representando al campo linealizado por $H^{\alpha\beta\gamma}$ observamos que además de ser el mismo invariante bajo el grupo de norma $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}$, sus ecuaciones de campo $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$ son derivadas por una lagrangiana (2.67) *que resulta ser invariante de norma*. Amén de otros beneficios (por ejemplo, la posible localización de la energía en el campo) el que la acción lagrangiana sea invariante de norma es un lugar común en todas las interacciones de norma. ¿Porqué en la versión usual de la teoría linealizada no se tiene la misma situación?. Simplemente por empesinarse en decir que $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - 2\xi^{(\alpha,\beta)}$ es el grupo de norma de la teoría. Si aceptácemos $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}$ como el natural grupo de norma entonces estaríamos en la línea de las auténticas teorías de norma. En síntesis: si se quiere pintar a la gravitación linealizada como una correcta teoría de norma, en el sentido de que tenga asociada una lagrangiana invariante de norma (como todas las otras teorías de norma), *es necesario* cambiar el estandard grupo de norma $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - 2\xi^{(\alpha,\beta)}$ por el uniparamétrico grupo $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \lambda^{,\alpha,\beta}$ y *es preferible* representar a la teoría vía el campo $H^{\alpha\beta\gamma}$.

(c) Por algún misterioso acuerdo de los dioses, las simetrías internas y externas no interfieren (por lo menos no obviamente). Consecuentemente, podemos acoplar a una partícula libre, los campos gravitacional débil y electromagnético de manera independiente. En particular, mediante el empleo de sus respectivas derivadas de norma ($;\alpha$ y $;\alpha$), se puede obtener, haciendo la transcripción combinada $,\alpha \to \circ;\alpha$, la ecuación de Klein–Gordon de la partícula accionada por los campos electromagnético y de gravitación linealizado. $\phi_{\circ;\alpha}{}^{;\alpha} - M^2\phi = 0$ de la ecuación de partícula libre $\phi_{,\alpha}{}^{,\alpha} - M^2\phi = 0$.

§2.4 Sobre la localización de la energía en campos gravitacionales débiles

¿Es local la energía gravitacional?. En la sección (1.9) nos vimos involucrados con la anterior cuestión. Ahora volveremos a tocar este punto.

Según MTW cualquier persona que intente contestar afirmativamente la pregunta, es decir, que busque una *fórmula mágica* capáz de describir localmente la energía y momento del campo gravitacional, está buscando *una respuesta correcta a una cuestión incorrecta.* En opinión de ellos, se ha gastado mucho tiempo y esfuerzo para concluir que la pregunta es banal, sobre todo porque la respuesta se tenía desde un principio en las manos: el principio de equivalencia *prohibe tajantemente* localizar la energía gravitacional. Einstein, cayendo libremente hacia la tierra en su bien *localizado* elevador no siente los efectos gravitacionales. Para él, en estas circunstancias, los gravitones son partículas del todo desconocidas. Por lo tanto, carece de sentido buscar la energía gravitacional a sus alrededores. La estructura matemática de la relativiadad general es consistente con esta situación; el candidato idóneo para representar la energía y momento del campo gravitacional es el conocido pseudotensor canónico (sección (1.9))

$$\tau_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{k\lambda,\beta}} g_{k\lambda,\alpha} \tag{1.26}$$

en el que $\mathcal{L}$ es la función de Lagrange generadora de las ecuaciones gravitacionales de Eisntein (en el vacío) $R_{\nu\mu} = 0$. Por ser $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Gamma\text{'s})$ es ella una pseudodensidad, es decir, es una cantidad dependiente del sistema de coordenadas, y por ende $\tau_\alpha{}^\beta$ no define unívocamente la energía y momento del campo gravitacional.

Aún cuando la gravedad sea débil, las opiniones de MTW son de principio sostenibles: el tensor canónico de energía momento para el campo gravitacional débil $h_{\alpha\beta}$,

$$\tau_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{k\lambda,\beta}} h_{k\lambda,\alpha} \tag{1.109}$$

es el objeto de Lorentz pero no es invariante bajo el grupo de norma estandard de la teoría linealizada: $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha,\beta)}$ (sección 1.9). Es decir, $\tau_\alpha{}^\beta$ no es invariante en última instancia ante traslaciones locales infinitesimales del estilo $x' = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha)$.

En resumen: la energía gravitacional, aún en el caso de ser débil, no es localizable. Este es el punto de vista aceptado en el presente.

A diferencia de la gravedad, hacerse la misma pregunta en el caso del campo electromagnético es involucrarse con una posibilidad correctamente planteada. O dicho de otra forma, indagar sobre el energía y momentos electromagnéticos contenidos en un volumen de *cualquier dimensión*, es una empresa con sentido. Primero que todo porque existe, en la opinión de MTW, una y sólo una fórmula para describir edecuadamente la energía y momento del campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$, a saber

$$T_{e}^{\alpha\beta} = F^{\alpha\mu} F_{\mu}{}^{\beta} + \tfrac{1}{4}\, \eta^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{2.93}$$

Este objeto es una cantidad observable (es de Lorentz e invariante de norma). En segundo lugar, y más importante, es el hecho que la energía y momento electromagnéticos *pesan* y por consiguiente *curvan* el espacio-tiempo. Son fuentes en el lado derecho de las ecuaciones einstenianas (los fotones crean gravedad). Sus efectos son del todo visibles.

Permítasenos ser en esta sección una más de esas ingenuas personas que buscan localizar la energía gravitacional. Sino en campos donde la gravedad sea fuerte si por lo menos donde sea débil. Más de un motivo nos anima a tal propósito. Después de todo hasta ahora no hemos encontrado ninguna objeción de fondo para describir la teoría linealizada como una electrodinámica de dos índices y si para la electrodinámica de un índice (la de Maxwell) se localiza correctamente la energía y momento en el campo, ¿Porqué no iba a suceder lo mismo para una electrodinámica aumentada en un índice?. Fuera de toda analogía estamos interasados en localizar la energía del campo débil por dos razones, en nuestra opinión, de peso: la primera es que nos es claro que el principio de equivalencia es algo ajeno a la gravitación linealizada (el espacio–tiempo siempre es llano). La segunda, y más importante, es que en el dibujo de la teoría linealizada, por vía de los campos $H_{\alpha\beta\gamma}$, contamos con una densidad lagrangiana invariante de norma (sección 2.3).

Entremos de lleno al asunto; el tensor canónico de energía momento para cualquier campo relativista es preescrito por la expresión (1.102). En el particular caso de la teoría linealizada, expresada por $H_{\alpha\beta\gamma}$, el tensor canónico adquiere el aspecto

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h_{(k\lambda),\mu}}\, h_{k\lambda}{}^{,\mu} \tag{2.94}$$

donde $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}\}$ es la densidad de Lagrange, cuadrática en los campos e invariante bajo el grupo de norma $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \lambda_{,\alpha,\beta}$, que genera las ecuaciones de campo–débil (en el vacío) $H^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$.

Un cálculo directo, algo tedioso, nos lleva a encontrar

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h_{(k\lambda),\mu}} = H^{(k\lambda)\nu} \tag{2.95}$$

y entoces (2.94) adquiere la explícita forma

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\tfrac{1}{2}\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}\} - H^{k\lambda\nu}h_{k\lambda}{}^{,\nu} \tag{2.96}$$

esta expresión canónica de Lorentz es débilmente conservada ($\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$), no es simétrica ($\tau^{\mu\nu} \neq \tau^{\nu\mu}$) y lo que es más grave para nuestros propósitos: no es invariante de norma (el término $H^{k\lambda\nu}h_{k\lambda}{}^{,\nu}$ no es invariante ante los cambios $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \lambda_{,\alpha,\beta}$). En electrodinámica clásica la simetrizaión del tensor de energía–momento, vía el método de Belinfante (Soper página 120), trae como consecuencia su invarianza de norma. Sin embargo, este hecho es fortuito. Para la teoría linealizada la situación es muy diferente, como lo veremos a continuación.

Para simetrizar (2.96) por la receta de Belinfante (Apéndice 3) necesitamos primero construir el tensor de espín $S^{\rho\mu\nu}$ asociado al campo linealizado. Esto es relativamente fácil de hacer por medio de la fórmula que lo define (Soper página 114)

$$S^{\alpha\beta\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{(k\lambda),\mu}} [\tilde{M}^{\alpha\beta}]_{k\lambda}{}^{\theta\phi} h_{\theta\phi} \tag{2.97}$$

donde $[\tilde{M}^{\alpha\beta}]_{k\lambda}{}^{\theta\phi}$ son los generadores infinitesimales de la transformación de Lorentz. Específicamente para este caso se tiene (Soper páginas 113 y 114)

$$\begin{aligned} [\tilde{M}^{\alpha\beta}]_{k\lambda}{}^{\theta\phi} &= [M^{\alpha\beta}]_k{}^\theta \delta_\lambda^\phi + [M^{\alpha\beta}]_\lambda{}^\phi \delta_k^\theta \\ &= -\delta_k^\alpha \delta_\lambda^\phi \eta^{\beta\theta} + \delta_k^\beta \delta_\lambda^\phi \eta^{\alpha\theta} \\ &\quad - \delta_\lambda^\alpha \delta_k^\theta \eta^{\beta\phi} + \delta_\lambda^\beta \delta_k^\theta \eta^{\alpha\phi} \end{aligned} \tag{2.98}$$

sustituyendo (2.95) y (2.98) en (2.97) se obtiene para $S^{\alpha\beta\mu}$ la expresión explícita

$$S^{\alpha\beta\mu} = -2H^{(\alpha\phi)\mu} h_\phi{}^\beta + 2H^{(\beta\phi)\mu} h_\phi{}^\alpha \tag{2.99}$$

y ahora según Belinfante el objeto $F^{\mu\nu\rho}$, antisimétrico en ν y ρ, definido por

$$F^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\{S^{\nu\rho\mu} + S^{\mu\rho\nu} - S^{\mu\nu\rho}\} = H^{(\nu\mu)\phi} h_\phi{}^\rho - H^{(\rho\mu)\phi} h_\phi{}^\nu + \frac{3}{2} H^{\phi\rho\nu} h_\phi{}^\mu \tag{2.100}$$

hace del tensor canónico $\tau^{\mu\nu}$ un objeto simétrico. O más precisamente: a través de (2.100) se puede construir un $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu} + F^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\{H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^\alpha{}_\alpha{}^\gamma H^\beta{}_{\beta\gamma}\} - H^{\phi\rho\nu} h_{\phi\rho}{}^{,\mu} \\ &\quad + \left\{H^{(\nu\mu)\phi} h_\phi{}^\rho - H^{(\rho\mu)\phi} h_\phi{}^\nu + \frac{3}{2} H^{\phi\rho\nu} h_\phi{}^\mu\right\}_{,\rho} \end{aligned} \tag{2.101}$$

sea simétrico ($\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\nu\mu}$) y conservado ($\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$). Después de explorar directamente a $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ encontramos que *no es invariante de norma*. Lo que definitivamente no es de nuestro agrado. Mirando detenidamente a (2.96) se nos ocurre pensar que parecería muy difícil hacerlo invariante de norma; si le adicionamos a (2.96) la cantidad $H^{k\lambda\nu} h_k{}^\mu{}_{,\lambda}$, que tiene la simpática propiedad de tener una divergencia idénticamente nula, esto es $\{H^{k\lambda\nu} h_k{}^\mu{}_{,\lambda}\}_{,\nu} \equiv 0$, entonces podemos conseguir en el tensor de Lorentz

$$\tau'^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}(H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} - H^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\gamma}H^{\beta}{}_{\beta\gamma}) + H^{k\lambda\nu}(h_k{}^{\mu}{}_{,\lambda} - h_{k\lambda}{}^{,\mu}) \qquad (2.102)$$

un objeto conservado ($\tau'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$) e invariante de norma (la cantidad ($h_k{}^{\mu}{}_{,\lambda} - h_{k\lambda}{}^{,\mu}$) se preserva bajo los cambios $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \lambda_{,\alpha,\beta}$). Desafortunadamente al explorar en detalle el tensor $\tau'^{\mu\nu}$ nos encontramos con el hecho de que *no es simétrico*. ¡Que dilema!. Si es simétrico el tensor de energía-momento del campo-débil ($\mathcal{T}^{\mu\nu}$) entonces no es invariante de norma. Y si es invariante de norma ($\tau'^{\mu\nu}$) entonces no es simétrico. Esto no sucede en electrodinámica donde la conducta $\mathcal{T}_e^{\mu\nu}$ (2.93) es a todas luces irreprochable (lo que significa que es simétrico e invariante de norma). Sin descartar la posibilidad que exista un tensor simétrico e invariante de norma para la energía y momento del campo-débil, nos basta exhibir al objeto (2.102) como un viable candidato a representar la energía y momento locales del campo linealizado. O en otras palabras: *energía y momento en la gravitación linealizada es localizada*, siempre y cuando se admita a $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \lambda_{,\alpha,\beta}$ como grupo de norma de la teoría.

0.1 Principio de acción estacionaria

El principio de acción estacionaria de Halmiton, esencial en Mecánica Analítica, puede extenderse sin grandes dificultades a la teoría clásica de campos.

Consideremos un conjunto de campos $\phi^A(x^\alpha)$. El superíndice A simboliza su carácter tensorial, $A = 1, 2, \ldots N$. La información *dinámica* de un sistema de teoría de campos (relativistas) se encuentra descrita por una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$, cuya integral sobre una región fija ω del espacio-tiempo de Minkowski, constituye la acción del sistema

$$I = \int_\omega \pounds d^4 x \tag{A.1}$$

las condiciones que en la práctica se imponen a $\mathcal{L}$ son:

i. Que sea real (no tenemos en mente campos complejos)

ii. Por considerar exclusivamente ecuaciones de campo a lo más de segundo orden, $\mathcal{L}$ Es dependiente, en general, de ϕ^A y $\phi^A{}_{,\lambda}$. Esto es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^A, \partial_\lambda \phi^A)$$

iii. $\mathcal{L}$ debe ser local. Esto significa que $\mathcal{L}$ depende de ϕ^A y $\phi^A{}_{,\lambda}$ en un mismo punto del espacio-tiempo.. No consideramos dependencia explícita de $\mathcal{L}$ en x^α (los sistemas son cerrados).

iv. Debe ser escalar de Lorentz y por consecuencia la integral de acción (A.1) no depende del sistema inercial de coordenadas empleando en su evaluación. Las ecuaciones de campo se siguen del principio de acción estacionaria.

$$\delta I = 0 \tag{A.2}$$

donde las variaciones de los campos $\delta\phi^A$, arbitrarias dentro de ω, se suponen nulas en la superficie Σ de la región ω.

$$\delta\phi^A = 0 \qquad \text{sobre} \qquad \Sigma \tag{A.3}$$

Entonces

$$\int_\omega \delta\mathcal{L}(\phi^A, \partial_\lambda \phi^A) d^4 x = 0 \qquad \text{con} \qquad \delta\phi^A|_\Sigma = 0 \tag{A.4}$$

es la expresión explícita del principio de acción estacionaria, bajo las hipótesis antes expuestas.

Del principio integral podemos conseguir unas relaciones diferenciales equivalentes. Para lograr esto, recordemos la expresión elemental

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\,\delta{\phi^A}_{,\lambda} \tag{A.5}$$

cuyo segundo término de la derecha se puede reescribir por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\,\delta{\phi^A}_{,\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\,\delta\phi^A\right\} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\right)\delta\phi^A \tag{A.6}$$

donde hemos considerado $(\delta\phi^A)_{,\lambda} = \delta{\phi^A}_{,\lambda}$, es decir, las variaciones $\delta\phi^A$ y $\delta{\phi^A}_{,\lambda}$ no son independientes [1]

Sustituyendo (A.6) en (A.5), $\delta\mathcal{L}$ toma la forma

$$\delta \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\right)\right]\delta\phi^A + \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\,\delta\phi^A\right\}. \tag{A.7}$$

Al introducir (A.7) en (A.4), vemos que la integral del último término de (A.7) puede convertirse, vía el teorema de Gauss, en una integral sobre Σ la cual se anula por (A.3). Entonces solo sobrevive la primera integral de (A.7),

$$\int_\omega \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial {\phi^a}_{,\lambda}}\right)\right\}\delta\phi^A\, d^4x = 0 \tag{A.8}$$

por ser del todo arbitrarias las variaciones $\delta\phi^A$ en el interior de ω, concluimos que el principio de acción estacionaria implica la validez, en cada punto de ω, de las ecuaciones de Euler–Lagrange para teoría de campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\phi^A}_{,\lambda}}\right) = 0. \tag{A.9}$$

Es claro que la equivalencia de (A.9) y (A.4) es del todo completa.

[1] Por definición $\delta\phi^A(x) = \phi'^A(x) - \phi^A(x)$ es una variación local y por tanto $(\delta\phi^A)_{,\lambda} = {\phi'^A}_{,\lambda} - {\phi^A}_{,\lambda} = \delta{\phi^A}_{,\lambda}$

0.2 Campos simétricos en las ecuaciones de Euler–Lagrange

Al derivar las ecuaciones de Euler–Lagrange para teoría de campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_{,\lambda}}\right) = 0 \qquad (B.1)$$

procedimos independientemente de cualquier información sobre las posibles simetrías de los campos ϕ^A. En este apéndice analizaremos brevemente el problema de tener campos simétricos de orden dos en la *maquinaria lagrangiana*. Para fijar ideas, permitásenos considerar las particulares acciones lagrangianas

$$\mathcal{L}_1 = h_{\alpha\beta,\gamma}h^{\gamma\beta,\alpha} = h_{\alpha\beta,\gamma}h_{\omega\phi,\theta}\eta^{\omega\gamma}\eta^{\phi\beta}\eta^{\theta\alpha} \qquad (B.2)$$

$$\mathcal{L}_2 = h_{\alpha\beta,\gamma}h^{\beta\gamma,\alpha} = h_{\alpha\beta,\gamma}h_{\omega\phi,\theta}\eta^{\omega\beta}\eta^{\phi\gamma}\eta^{\theta\alpha} \qquad (B.3)$$

sus correspondientes ecuaciones de campo dictadas por (B.1) son

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}}\right)_{,\epsilon} &= \left(h_{\alpha\beta,\gamma}\frac{\partial h_{\omega\phi,\theta}}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}}\eta^{\omega\gamma}\eta^{\phi\beta}\eta^{\theta\alpha} + h_{\omega\phi,\theta}\frac{\partial h_{\alpha\beta,\gamma}}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}}\eta^{\omega\gamma}\eta^{\phi\beta}\eta^{\theta\alpha}\right)_{,\epsilon}\\ &= (h_{\alpha\beta,\gamma}\eta^{k\gamma}\eta^{\lambda\beta}\eta^{\epsilon\alpha} + h_{\omega\phi,\theta}\eta^{\omega\epsilon}\eta^{\phi\lambda}\eta^{\theta k})_{,\epsilon}\\ &= (2h_{\alpha\beta,\gamma}\eta^{k\gamma}\eta^{\lambda\beta}\eta^{\epsilon\alpha})_{,\epsilon}\\ &= 2h^{\epsilon\lambda,k}{}_{,\epsilon}\end{aligned} \qquad (B.4)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathcal{L}2}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}}\right)_{,\epsilon} &= \left(h_{\alpha\beta,\gamma}\frac{\partial h_{\omega\phi,\theta}}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}}\eta^{\omega\beta}\eta^{\phi\gamma}\eta^{\epsilon\alpha} + h_{\omega\phi,\theta}\frac{\partial h_{\alpha\beta,\gamma}}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}}\eta^{\omega\beta}\eta^{\phi\gamma}\eta^{\theta\alpha}\right)_{,\epsilon}\\ &= \Bigl(h_{\alpha\beta,\gamma}\eta^{k\beta}\eta^{\lambda\gamma}\eta^{\epsilon\alpha} + h_{\omega\phi,\theta}\eta^{\omega\lambda}\eta^{\phi\epsilon}\eta^{\theta k} biggrp_{,\epsilon}\\ &= h^{\epsilon k,\lambda}{}_{,\epsilon} + h^{\lambda\epsilon,k}{}_{,\epsilon}\end{aligned} \qquad (B.5)$$

Ahora bien, si suponemos simétrico al campo $h_{\alpha\beta}$, esto es $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$, entonces $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ y consecuentemente sus respectivas ecuaciones de campo (B.4) y (B.5) deberían ser iguales. Sin embargo, observando directamente (B.4) y (B.5) concluimos que en general (B.4)$\neq$(B.5). Para resolver esta dificultad vamos a simetrizar al operador $\partial/\partial h_{k\lambda,\epsilon}$. Luego entonces, si hacemos la transcripción

$$\frac{\partial}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}} \to \frac{\partial}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}} + \frac{\partial}{\partial h_{\lambda k,\epsilon}}\right\} \qquad (B.6)$$

en las ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes a $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ obtenemos

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}}\right)_{,\epsilon} = h^{\epsilon k,\lambda}{}_{,\epsilon} + h^{\lambda\epsilon,k}{}_{,\epsilon} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial h_{(k\lambda),\epsilon}}\right)_{,\epsilon} \tag{B.7}$$

Es decir, las respectivas ecuaciones de campo generadas por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ serían del todo idénticas. La regla (B.6) es de carácter general para los casos en que se tengan campos simétricos en la maquinaria lagrangiana. Es importante señalar que (B.6) no es una descomposición trivial. Esto es, de $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ no se sigue $\frac{\partial}{\partial h_{\alpha\beta,\sigma}} = \frac{\partial}{\partial h_{\beta\alpha,\sigma}}$. Para comprobar esto, basta considerar el contraejemplo $\mathcal{L} = h_{\alpha\beta,\gamma} h^{\gamma\beta,\alpha}$ para el que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{k\lambda,\epsilon}} = 2h^{\epsilon\lambda,k} \neq 2h^{\epsilon k,\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{\lambda k,\epsilon}} \tag{B.8}$$

0.3 Simetrización del tensor canónico de energía–momento. *Método de Belinfante*

Hemos señalado que el tensor canónico de energía–momento asociado a la densidad $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^A, \gamma\phi^A)$

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_{,\nu}}\phi^{A,\mu} \qquad (C.1)$$

es débilmente conservado ($\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$) y en general no es simétrico ($\tau^{\mu\nu} \neq \tau^{\nu\mu}$). En este apéndice, siguiendo en esencia, el método de Belinfante, vamos a simetrizar a $\tau^{\mu\nu}$. En otras palabras, construiremos a partir de $\tau^{\mu\nu}$, un nuevo tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ conservando ($\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$) y simétrico ($\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\nu\mu}$).

La conservación $\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ no define unívocamente a $\tau^{\mu\nu}$: podemos adicionarle a este último un término de la forma $F^{\mu[\nu\rho]}{}_{,\rho}$ sin que la conservación se altere: $(\tau^{\mu\nu} + F^{\mu[\nu\rho]}{}_{,\rho})_{,\nu} = \tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} + F^{\mu[\nu\rho]}{}_{,\rho,\nu} = \tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ (en virtud del conocido resultado $F^{\mu[\nu\rho]}{}_{,\rho,\nu} \equiv 0$). Entonces si definimos al tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ (sobreentendiendo que $F^{\mu\nu\rho}$ es antisimétrico en sus dos últimos índices, $F^{\mu[\nu\rho]} = F^{\mu\nu\rho}$), a través de la expresión

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu} + F^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} \qquad (C.2)$$

el mismo se conservara automáticamente

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (C.3)$$

y solo nos falta determinar la forma explícita de $F^{\mu\nu\rho}$ que nos asegure su simetría

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\nu\mu}. \qquad (C.4)$$

Supongamos por un momento que $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ es simétrico. Entonces se le puede escribir como

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\{\mathcal{T}^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\nu\mu}\} \qquad (C.5)$$

sustituyendo (C.2) en (C.5) se obtiene

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\{\mathcal{T}^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\nu\mu}\} + \tfrac{1}{2}\{F^{\mu\nu\rho} + F^{\nu\mu\rho}\}_{,\rho} \qquad (C.6)$$

Por otro lado, de la conservación de la densidad de momento angular $J^{\mu\nu\rho}$ ($J^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} = 0$) se sigue que el tensor de espín $S^{\alpha\beta\mu}$ antisimétrico en sus primeros dos índices es tal que

$$S^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} = \tau^{\mu\nu} - \tau^{\nu\mu} \tag{C.7}$$

de donde inmediatamente deducimos

$$\tfrac{1}{2}\left\{\tau^{\mu\nu} + \tau^{\nu\mu}\right\} = \tau^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, S^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} \tag{C.8}$$

sustituyendo (C.8) en (C.6) se tiene

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\left\{F^{\mu\nu\rho} + F^{\nu\mu\rho} - S^{\mu\nu\rho}\right\}_{,\rho} \tag{C.9}$$

y ahora comparando (C.2) y (C.9) se obtiene, por consistencia, que

$$F^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} = \tfrac{1}{2}\left\{F^{\mu\nu\rho} + F^{\nu\mu\rho} - S^{\mu\nu\rho}\right\}_{,\rho} \tag{C.10}$$

de la cual se implica

$$\left(F^{\mu\nu\rho} - F^{\nu\mu\rho} + S^{\mu\nu\rho}\right)_{,\rho} = 0. \tag{C.11}$$

Ahora bien, tenemos libertad de elegir $F^{\mu\nu\rho}$ de tal suerte que la expresión dentro del paréntesis se anule. Esto implica

$$S^{\mu\nu\rho} = F^{\nu\mu\rho} - F^{\mu\nu\rho} \tag{C.12}$$

de la anterior expresión se puede construir la suma

$$S^{\nu\rho\mu} + S^{\mu\nu\rho} - S^{\mu\nu\rho} = 2F^{\mu\nu\rho} \tag{C.13}$$

por tanto, la explícita expresión de $F^{\mu\nu\rho}$ que nos asegura simetría en $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ es

$$F^{\mu\nu\rho} = \tfrac{1}{2}\left\{S^{\nu\rho\mu} + S^{\mu\rho\nu} - S^{\mu\nu\rho}\right\}_{,\rho} \tag{C.15}$$

Para exhibir la explícita simetría del $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ preescrito por (C.15), reescribámoslo en la forma (empleando (C.7))

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(\tau^{\mu\nu} + \tau^{\nu\mu}\right) + \tfrac{1}{2}\left(S^{\nu\rho\mu} + S^{\mu\rho\mu}\right)_{,\rho} \tag{C.16}$$

o más compactamente

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \tau^{(\mu\nu)} - S^{\rho(\mu\nu)}{}_{,\rho} \tag{C.17}$$