2y
23

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CAMPOS ESTRUCTURALMENTE ESTABLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

HECTOR MENDEZ LANGO

MEXICO, D. F. 1986

Introducción

En 1937 A. Andronov y L. Pontrjagin introdujeron el concepto de campos estructuralmente estables. Se trata de una cierta clase de sistemas de ecuaciones diferenciales autonomas en $\mathbb{R}^2$ para los cuales una pequeña perturbación del campo vectorial no altera, esencialmente, el caracter topológico de su conjunto de trayectorias solución.

Andronov y Pontrjagin propusieron tambien, a manera de conjetura, un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un sistema analítico fuera estructuralmente estable. En 1950 H. De Baggis y en 1959 Marilia Peixoto y M.M. Peixoto demostraron la conjetura para sistemas de clase C^1. En 1962 M.M. Peixoto extiende estos resultados a variedades diferenciables, compactas, de dimensión dos.

En el presente trabajo intentamos mostrar, de manera breve, el desarrollo de esta teoría. En el primer capitulo trabajamos con sistemas de ecuaciones diferenciales autonomas lineales en $\mathbb{R}^n$ e introducimos los conceptos iniciales de equivalencia topológica y estabilidad estructural. Las demostraciones de H. De Baggis, M.C. Peixoto y M.M. Peixoto para campos en el plano conforman la parte principal del segundo y tercer capitulo. Por último en el cuarto capitulo estudiamos las caracteristicas de los campos estructuralmente estables en variedades diferenciables, compactas, orientables, de dimensión dos. Nos hemos guiado en esta última parte por el trabajo de M.M. Peixoto y por el libro de J. Palis y W. de Melo: Introduçao aos Sistemas Dinâmicos.

El primer capitulo y la primera sección del cuarto capitulo contienen las nociones básicas para entender el desarrollo que despues se sigue. Por eso quien ya tenga una primera idea sobre el tema puede omitirlos.

Las referencias a la bibliografía están escritas en parentesis cuadrados.

Indice

Capitulo I

Estudiaremos aqui el conjunto de los campos lineales en $\mathbb{R}^n$, y su relación con las ecuaciones diferenciales. En la primera sección distinguiremos a un conjunto especial de campos lineales llamados campos hiperbólicos y los estudiaremos, brevemente, a través del comportamiento cualitativo de sus soluciones; en la segunda sección mostraremos que los campos hiperbólicos forman un subconjunto abierto y denso en el conjunto de todos los campos lineales; en la tercera sección definiremos estabilidad estructural, y concluiremos el capitulo, y la sección, mostrando que los campos hiperbólicos son campos estructuralmente estables.

Sección 1. Primeras definiciones y campos hiperbólicos.

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las transformaciones lineales definidas en $\mathbb{R}^n$ y contradominio $\mathbb{R}^n$. Definimos en este espacio la siguiente norma:

$$\| L \| = \sup \{ |L(x)| \mid |x| = 1 ,\ x \in \mathbb{R}^n \}$$

donde $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $|x|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definimos la distancia entre L y M como sigue: $\rho(L,M) = \|L-M\|$ definimos tambien una bola abierta alrededor de L así:

$$B_\delta(L) = \{ M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid \rho(L,M) < \delta \}$$

La definición de conjunto abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es inmediata. En resumen le hemos dado a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ una topología.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

(1.1) $\quad X' = \Delta X \quad$ donde $X \in \mathbb{R}^n$ y Δ es una transformación lineal.

Esto induce un campo vectorial, esto es, a cada vector x de $\mathbb{R}^n$ se le asocia mediante Δ otro vector en $\mathbb{R}^n$.

Para encontrar las curvas solución de (1.1) necesitamos definir la siguiente aplicación del espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.

$$\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\exp(L) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} L^K$

donde L^0 es la identidad y $L^K = L \circ L \circ \cdots \circ L$, K veces.

Sabemos que esta aplicación está bien definida [Hir.] y que si tenemos la ecuación diferencial (1.1) con condición inicial $X(0) = K$, donde $K \in \mathbb{R}^n$, entonces la curva solución está dada por:

$$X(t) = \exp(t\Delta)K \quad , \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}$$

El conjunto de todas las curvas solución lo encontramos si tomamos todas las posibles condiciones iniciales K.

<u>Definición 1.1</u> Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, a la función $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada

por $\varphi(t,x) = \exp(tL)X$ le llamaremos el flujo asociado a la transformación L (o al campo L).

Este flujo tiene las siguientes propiedades:

i) Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t_0,x)$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo (en este caso lineal, ya que $\exp(t_0 L) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$).

ii) $\varphi(0,x)$ es la identidad en $\mathbb{R}^n$

iii) $\varphi(s,\varphi(t,x)) = \varphi(s+t,x)$.

Ahora, los campos lineales los podemos estudiar a través de sus valores propios. Definimos el espectro de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de valores propios de L, es decir, el conjunto de raíces del polinomio:

$$\det(L - \lambda I)$$

Observamos que tenemos, de hecho, una función n-valuada de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{C}$.

<u>Definición 1.2</u> Diremos que un campo lineal L es hiperbólico si el espectro de L no tiene elementos con parte real igual a cero.

Obsérvese que si L es hiperbólico entonces todos sus valores propios son distintos de cero y por lo tanto L es un isomorfismo, en este caso la ecuación (1.1) asigna el vector velocidad $\bar{0}$ sólo a la posición $\bar{0}$ de $\mathbb{R}^n$, esto es, el campo sólo se anula en $\bar{0}$. A las posiciones donde el campo se anula los llamaremos puntos críticos o singulares. Concluimos que si L es hiperbólico entonces tiene un sólo punto crítico o singularidad (en el origen).

A continuación enunciamos y demostramos un extenso lema que nos permitirá a partir del conocimiento de los valores propios de una transformación lineal llegar a algunas conclusiones sobre el comportamiento cualitativo de sus soluciones.

<u>Lema 1.3</u> Sea $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, supongamos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes tales que $\alpha < Re(\lambda) < \beta$ para todo valor propio λ de Δ. Entonces $\mathbb{R}^n$ tiene una base tal que en su correspondiente producto interno y norma se tiene:

$$\alpha |x|^2 \leq \langle \Delta x, x \rangle \leq \beta |x|^2 \qquad \text{para todo } x \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

<u>Demostración</u>: tomemos la segunda desigualdad. $Re(\lambda) < \beta$, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\lambda) < c < \beta$ para todo λ del espectro de Δ.

Caso 1.- Supongamos que Δ es diagonalizable, entonces $\mathbb{R}^n$ se puede obtener como la suma directa $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$ donde cada E_j es un subespacio vectorial de dimensión uno generado por el vector propio e_j perteneciente al valor propio λ_j donde λ_j es real, y cada F_k es un subespacio vectorial de dimensión dos generado por $\{f_k, g_k\}$, observemos que cada E_j y F_k es invariante bajo Δ, de donde Δ restringido a F_k está representada por la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$$

donde $a_k + i b_k = \lambda_k$ es valor propio de Δ. Por hipótesis tenemos $\lambda_j < c$ y $a_k < c$. Damos a $\mathbb{R}^n$ el producto interno definido por:

$$\langle e_j, e_j \rangle = \langle f_k, f_k \rangle = \langle g_k, g_k \rangle = 1$$

y toda otra pareja formada con e_j, f_k, g_k igual a cero.

Calculemos $\langle \Delta x, x \rangle$; como $\{e_j, f_k, g_k\}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$, tenemos que $X = x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + x_{r+1} f_1 + x'_{r+1} g_1 + \cdots + x_{r+s} f_s + x'_{r+s} g_s$

de donde $\quad \langle \Delta x, x \rangle = \langle \Delta x_1 e_1, x \rangle + \cdots + \langle \Delta x'_{r+s} g_s, x \rangle$

$$= x_1 \langle \Delta e_1, x \rangle + \cdots + x'_{r+s} \langle \Delta g_s, x \rangle$$

$$= x_1 \langle \lambda_1 e_1, x \rangle + \cdots + x'_{r+s} \langle -b_s f_s + a_s g_s, x \rangle$$

$$= x_1 \langle \lambda_1 e_1, x_1 e_1 \rangle + \cdots + x'_{r+s} \langle -b_s f_s + a_s g_s, x_{r+s} f_s + x'_{r+s} g_s \rangle$$

$$= x_1^2 \lambda_1 + \cdots + x_{r+s} \langle a_s f_s + b_s g_s, x_{r+s} f_s + x'_{r+s} g_s \rangle$$
$$+ x'_{r+s} \langle -b_s f_s + a_s g_s, x_{r+s} f_s + x'_{r+s} g_s \rangle$$

$$= x_1^2 \lambda_1 + \cdots + (x_{r+s})^2 \langle a_s f_s, f_s \rangle + x_{r+s} x'_{r+s} \langle b_s g_s, g_s \rangle$$
$$+ (x'_{r+s})^2 \langle a_s g_s, g_s \rangle - x'_{r+s} x_{r+s} \langle b_s f_s, f_s \rangle$$

$$= x_1^2 \lambda_1 + \cdots + (x_{r+s})^2 a_s + (x'_{r+s})^2 a_s$$

$$< x_1^2 c + \cdots + (x_{r+s})^2 c + (x'_{r+s})^2 c = \langle x, x \rangle c = |x|^2 c$$

porlotanto $\langle \Delta x, x \rangle < c\,|x|^2$ que es loque queriamos demostrar (ya que $c < \beta$)

Observese que en este caso la demostración de la otra desigualdad: si α es menor que la parte real de todo valor propio de Δ entonces $\alpha |x|^2 < \langle \Delta x, x \rangle$ es similar.

Caso 2.- Si Δ no es diagonalizable, existe una base en $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz asociada a Δ es de la forma

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_p \end{bmatrix}$$

donde cada Δ_j tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} a_j & & & \\ 1 & a_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_j \end{bmatrix} \quad \text{o la forma} \quad \begin{bmatrix} D_j & & & \\ I & D_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & D_j \end{bmatrix};$$

donde $a_j \in \mathbb{R}$, $D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Además $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ donde E_j es invariante bajo Δ_j (forma canónica de Jordan). Si para cada uno de estos subespacios pudieramos encontrar una base donde el lema fuera cierto entonces

$$\langle \Delta x, x \rangle = \langle \Delta_1 x_1, x \rangle + \cdots + \langle \Delta_p x_p, x \rangle \quad , \quad x = x_1 + \cdots + x_p \,,\ x_j \in E_j$$

$$= \langle \Delta_1 x_1, x_1 \rangle + \cdots + \langle \Delta_p x_p, x_p \rangle$$

$$\leq c \langle x_1, x_1 \rangle + \cdots + c \langle x_p, x_p \rangle = c \langle x, x \rangle$$

y por tanto

$$\langle \Delta x, x \rangle \leq c\, |x|^2$$

observese que, nuevamente, la otra desigualdad se probaría en forma análoga.
Vamos a demostrar el lema para cuando Δ consta de un solo bloque

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ 1 & \alpha_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

observese que $\Delta = S + N$ donde $S = \alpha_1 I$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Consideremos $\{e_1, \dots e_n\}$ los vectores propios de S y apliquemos N a cada uno de ellos, tenemos $N(e_1) = e_2, \dots, N(e_{n-1}) = e_n$, $N(e_n) = \bar{0}$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la siguiente base $\mathcal{B} = \{e_1, \frac{1}{\varepsilon} e_2, \dots \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} e_n\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_n\}$.
La representación de Δ en esta nueva base está dada por:

$$\Delta^* = (P^t)^{-1} \Delta P^t$$

donde P es la matriz formada por las expresiones de los vectores de la nueva base en términos de la vieja base, por lo tanto tenemos:

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ 1 & \alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{\varepsilon} & & & \\ & & \frac{1}{\varepsilon^2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ \varepsilon & \varepsilon\alpha_1 & & & \\ 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2\alpha_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-1}\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\varepsilon} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ \varepsilon & \alpha_1 & & \\ & \varepsilon & \alpha_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \varepsilon \quad \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Sea $\langle x,y\rangle_\varepsilon$ el producto interior inducido por la base $\mathcal{B}_\varepsilon$ y $\langle x,y\rangle$ el inducido por la base $\{e_1,\dots e_n\}$. Tomemos $x\in\mathbb{R}^n$ y observemos que:

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \quad \text{y} \quad x = \bar{x}_1\bar{e}_1 + \cdots + \bar{x}_n\bar{e}_n$$

calculemos ahora

$$\frac{\langle \Delta^* x, x\rangle_\varepsilon}{\langle x,x\rangle_\varepsilon} = \frac{\langle \alpha_1\bar{x}_1\bar{e}_1 + \varepsilon\bar{x}_1\bar{e}_1 + \alpha_1\bar{x}_2\bar{e}_2 + \cdots + \varepsilon\bar{x}_{n-1}\bar{e}_{n-1} + \alpha_1\bar{x}_n\bar{e}_n,\ x\rangle_\varepsilon}{\langle x,x\rangle_\varepsilon}$$

$$= \frac{\alpha_1\bar{x}_1^2 + \varepsilon\bar{x}_1^2 + \alpha_1\bar{x}_2^2 + \cdots + \varepsilon\,\bar{x}_{n-1}^2 + \alpha_1\bar{x}_n^2}{\langle x,x\rangle_\varepsilon}$$

$$= \frac{\alpha_1\langle x,x\rangle_\varepsilon + \varepsilon\,(\bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2)}{\langle x,x\rangle_\varepsilon}$$

$$= \alpha_1 + \frac{\varepsilon\,(\bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2)}{\langle x,x\rangle_\varepsilon} \le \alpha_1 + \frac{\varepsilon\langle x,x\rangle_\varepsilon}{\langle x,x\rangle_\varepsilon}$$

por lo tanto
$$\alpha_1 \le \frac{\langle \Delta^* x, x\rangle_\varepsilon}{\langle x,x\rangle_\varepsilon} \le \alpha_1 + \varepsilon$$

entonces $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\langle \Delta^* x, x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \alpha_1$

observemos que $\dfrac{\langle Sx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \alpha_1$ ya que $S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_1 \end{bmatrix}$

por lo tanto $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\langle \Delta^* x, x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \dfrac{\langle Sx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$

si tomamos $\delta > 0$ entonces existe $\varepsilon > 0$ y una base β_ε tal que

$$\frac{\langle \Delta^* x, x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} \leq \alpha_1 + \delta$$

de donde $\langle \Delta^* x, x \rangle_\varepsilon \leq (\alpha_1 + \delta) \langle x, x \rangle_\varepsilon$ para todo x en $\mathbb{R}^n$

por lo tanto $\langle \Delta^* x, x \rangle_\varepsilon \leq c \, |x|_\varepsilon^2$ donde $c = (\alpha_1 + \delta)$

como $\alpha_1 < \beta$, tomando $\delta = \beta - \alpha_1$ se tiene que existe una base β_ε de $\mathbb{R}^n$ tal que $\langle \Delta^* x, x \rangle_\varepsilon \leq \beta |x|_\varepsilon^2$ que es lo que queríamos demostrar (recuérdese que Δ^* es la representación de Δ en la base β_ε).

En forma análoga se demuestra el lema para el caso en que Δ está representada por una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} D_1 & & & \\ I & D_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & I & D_1 \end{bmatrix}$$

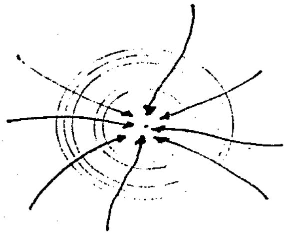
donde $D_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\blacksquare$

Como consecuencias inmediatas de este lema tenemos los siguientes resultados:

<u>Corolario 1.4</u> Sea $x' = \Delta x$, los valores propios de Δ tienen parte real negativa ($Re(\lambda) < 0$ para todo λ valor propio de Δ). Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ y un producto interno asociado a ella tal que toda trayectoria solución cruza transversalmente a todas las esferas

$$S_a = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = a \, , \, a > 0 \} ,$$

donde $|x|$ representa la norma inducida por este producto interno.



<u>Demostración</u>: sea $\delta < 0$ tal que $Re(\lambda) \leq \delta$ para todo valor propio de Δ. Sea $x(t)$ solución de $x' = \Delta x$, $x(t) = (x_1(t), \ldots \, x_n(t))$. Podemos suponer que este sistema ya está representado en la base de $\mathbb{R}^n$ mencionada en el lema 1.3, calculamos ahora la derivada con respecto al tiempo de la norma de la solución $x(t)$ ($x(t) \neq 0$ para t en $\mathbb{R}$)

$$\frac{d}{dt} |x(t)| = \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j x_j'}{\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right]^{1/2}}$$

de donde $\quad \dfrac{d}{dt} |x(t)| = \dfrac{\langle x, x' \rangle}{|x|}$

como $\Delta x = x'$, tenemos $\quad \dfrac{d}{dt} |x(t)| = \dfrac{\langle x, \Delta x \rangle}{|x|}$

ahora, por el lema sabemos que $\langle x, \Delta x\rangle \leq \delta |x|^2$,

entonces $\dfrac{\langle x, \Delta x\rangle}{|x|} \leq \delta |x|$

y por lo tanto $\frac{d}{dt}|x(t)| \leq \delta |x|$

pero como $\delta<0$, concluimos que $\frac{d}{dt}|x(t)| < 0$ (para toda solución distinta de la solucion $x(t) \equiv \bar{0}$) ■

<u>Corolario 1.5</u> Sea $x' = \Delta x$, los valores propios de Δ con parte real negativa. Entonces toda trayectoria solución cumple con:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{0}$$

<u>Demostración</u>: Sabemos que $\frac{d}{dt}|x(t)| \leq \delta |x|$

entonces $\dfrac{\frac{d}{dt}|x(t)|}{|x(t)|} \leq \delta$

pero ésto podemos escribirlo así $\frac{d}{dt}\left[\ln |x(t)|\right] \leq \delta$

e integrando obtenemos:

$$\ln |x(t)| - \ln |x(0)| \leq \delta t$$

$$\ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|} \leq \delta t$$

$$\frac{|x(t)|}{|x(0)|} \leq e^{\delta t}$$

entonces $|x(t)| \leq |x(0)|\, e^{\delta t}$ como $\delta<0$, si tomamos límite de ambos lados de la desigualdad obtenemos $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = 0$ ■

Observemos que estos resultados tienen sus equivalentes en el caso de que la parte real de todos los valores propios fuera estrictamente mayor que cero.

Definicion 1.6 Dada la ecuación $x' = Ax$ llamaremos fuente al punto crítico del campo A, si para toda solución $X(t)$ distinta de la solucion $X(t) \equiv \bar{0}$ se tiene que:

$$\lim_{t \to \infty} |X(t)| = \infty$$

Llamaremos sumidero al punto crítico, si para toda solución $X(t)$ se tiene que:

$$\lim_{t \to \infty} |X(t)| = 0$$

Relacionaremos, ahora, estos resultados con los campos hiperbólicos.

Teorema 1.7 Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es hiperbólico, entonces existe una única descomposicion de $\mathbb{R}^n$ en suma directa de dos subespacios, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, donde E^s y E^u son invariantes bajo L (y bajo el flujo asociado a L) tales que los valores propios de $L^s = L|_{E^s}$ tienen parte real negativa y los valores propios de $L^u = L|_{E^u}$ tienen parte real positiva.

Demostración: La demostración es consecuencia del teorema de la forma canónica de Jordan [Hir.]. Dado $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ existe una base $\Gamma = \{\gamma_1, \dots \gamma_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz asociada a L es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \Delta_{s_1} & & & & & & \\ & & & B_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & B_{s_2} & & & \\ & & & & & & C_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & C_{s_3} \\ & & & & & & & & & D_1 \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & D_{s_4} \end{bmatrix}$$

donde $\Delta_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ 1 & \lambda_i & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$ con $\lambda_i < 0$

$B_j = \begin{bmatrix} \mu_j & & \\ I & \mu_j & \\ & \ddots & \ddots \\ & & I & \mu_j \end{bmatrix}$ con $\mu_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\alpha_j < 0$

$C_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ 1 & \lambda_k & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \lambda_k \end{bmatrix}$ con $\lambda_k > 0$

$D_\ell = \begin{bmatrix} \mu_\ell & & \\ I & \mu_\ell & \\ & \ddots & \ddots \\ & & I & \mu_\ell \end{bmatrix}$ con $\mu_\ell = \begin{bmatrix} \alpha_\ell & -\beta_\ell \\ \beta_\ell & \alpha_\ell \end{bmatrix}$ y $\alpha_\ell > 0$

Sea E^s el subespacio generado por $\{\gamma_1, \dots \gamma_m\}$ donde cada γ_p, $p = 1, \dots m$, corresponde a los subespacios invariantes bajo $\Delta_1, \dots \Delta_{s_1}$, $B_1, \dots B_{s_2}$. Sea E^u el subespacio generado por $\{\gamma_{m+1}, \gamma_n\}$. Tenemos, entonces, que E^s y E^u son invariantes bajo L (y por lo tanto invariantes también bajo el flujo de L). Observemos, por último, que en esta base las matrices asociadas a L^s y L^u son:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_{s_1} & & \\ & & & B_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_{s_2} \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{s_3} & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_{s_4} \end{bmatrix}$$

respectivamente, con lo que terminamos la demostración ■

Observemos que si $X(t)$ es solución de $X' = AX$, A es hiperbólico y la condición inicial para $X(t)$ está en E^s $(X(0) \in E^s)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \bar{0}$$

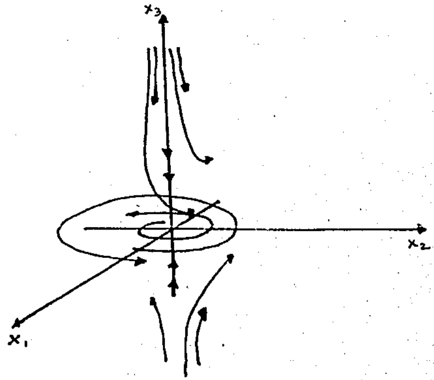
en cambio si la condición inicial está en E^u entonces

$$\lim_{t\to\infty} |X(t)| = \infty \ .$$

Esto es, A restringido a E^s es un sumidero y A restringido a E^u tiene una fuente.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$X' = AX \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



con condición inicial $X(0) = (a, b, c)$.

Las curvas solución están dadas por

$$(\exp A)\, X(0)$$

$$= \exp \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t\cos t & -e^t \operatorname{sen} t & 0 \\ e^t \operatorname{sen} t & e^t \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

por lo tanto $X(t) = (a e^t \cos t - b e^t \operatorname{sen} t,\ a \operatorname{sen} t\, e^t + b e^t \cos t,\ c e^{-t})$.

El flujo es: $\varphi(t, x) = (x_1 e^t \cos t - x_2 e^t \operatorname{sen} t,\ x_1 e^t \operatorname{sen} t + x_2 e^t \cos t,\ x_3 e^{-t})$

donde $x=(x_1, x_2, x_3)$.

Observamos que E^s es el eje x_3 y E^u el plano generado por el eje x_1 y el eje x_2. Además si $x \notin E^u$ y $x \notin E^s$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x) \neq \bar{0}$$

$$y \quad \lim_{t\to -\infty} \varphi(t,x) \neq \bar{0} .$$

Sección 2. Campos hiperbólicos y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos, en esta parte, que el conjunto de los campos hiperbólicos es abierto y denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Para hacerlo veremos primero que la función, n-valuada, de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{C}$, que a cada tramsformación lineal le asocia su espectro, es continua.

Lema 1.8 Los valores propios dependen continuamente de la transformación lineal.

Demostración: Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, consideremos en $\mathbb{R}^n$ la base canónica $\{e_1, \dots e_n\}$, entonces L tiene asociada una matriz

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los valores propios de L son las raíces del polinomio $\det(\Delta - \lambda I) = P(\lambda)$, esto es $P(\lambda) = C_n \lambda_n^n + \dots + C_1 \lambda + C_0$, donde cada C_i depende en forma continua de los coeficientes de la matriz, ya que son el resultado de multiplicar y sumar de distintas formas los coeficientes a_{ij}. Abusando de la notación podemos escribir $P(\lambda) = P(\lambda, a_{11}, \dots a_{nn})$, y como las raices son elementos de $\mathbb{C}$, tenemos que P puede interpretarse como una función de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n^2}$ en $\mathbb{C}$.

Sea λ_1 raiz del polinomio, supongamos que es de multiplicidad uno, entonces

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\, Q(\lambda)$$

donde $Q(\lambda)$ es un polinomio con coeficientes que tambien dependen de los a_{ij}. Como λ_1 es raiz tenemos

$$P(\lambda_1, a_{ij}) = 0 \qquad \text{donde } (\lambda_1, a_{ij}) \text{ es un elemento en } \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

Calculemos ahora $\left.\dfrac{\partial P}{\partial \lambda}\right|_{(\lambda_1, a_{ij})}$

aqui podemos considerar a P una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Como P tiene forma polinomial es una función holomorfa, entonces

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right|_{(\lambda_1, a_{ij})} = P'(\lambda_1)$$

y como λ_1 es raiz de multiplicidad uno, tenemos que

$$P'(\lambda_1) \neq 0$$

Si P es considerada como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, $P(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$, tendríamos que:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right|_{(\lambda_1, a_{ij})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_1, v_1)}$$

donde $\lambda_1 = (u_1, v_1)$. Esta matriz tiene determinante distinto de cero ya que está relacionada con $P'(\lambda_1)$.

Consideremos, ahora, la diferencial de $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^2$ en el punto (λ_1, a_{ij}):

$$DP\Big|_{(\lambda_1, a_{ij})} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial a_{11}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial a_{nn}} \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial v} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial a_{11}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial a_{nn}} \end{bmatrix}_{(u_1, v_1, a_{ij})}$$

observamos que el bloque $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_1, v_1, a_{ij})}$

tiene determinante distinto de cero.

Consideremos ahora la función:

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2}$$

definida por $\mathcal{P}(u, v, a_{ij}) = (P(u, v, a_{ij}), a_{ij}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{a}_{11}, \ldots \bar{a}_{nn})$, tenemos, ahora, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2} \arrow[rr, "P"] \arrow[drr, shift right, "\mathcal{P}"'] & & \mathbb{R}^2 \\ & & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2} \arrow[u, "\pi"'] \arrow[ull, shift right, "\mathcal{P}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección en las primeras dos coordenadas.

La matriz jacobiana de $\mathcal{P}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial a_{ij}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial a_{nn}} \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial v} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial a_{11}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial a_{nn}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

y evaluada en (u_1, v_1, a_{ij}) tiene determinante distinto de cero. Entonces, por el teorema de la función inversa, existe (localmente) una función inversa de $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}^{-1} : U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

Fijemonos, ahora, en el conjunto $P^{-1}(0) = \{(u, v, a_{11}, \dots a_{nn}) \mid P(u, v, a_{11} \dots a_{nn}) = 0\}$, $P^{-1}(0) = \mathcal{P}^{-1}(\pi^{-1}(0))$ ya que $\pi \circ \mathcal{P} = P$

ahora $\pi^{-1}(0) = \{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{a}_{11}, \dots \bar{a}_{nn}) \mid \bar{u} = 0, \bar{v} = 0\}$

entonces $\mathcal{P}^{-1}$ restringido al conjunto $\pi^{-1}(0)$ es tal que

$$\mathcal{P}^{-1}(0, 0, \bar{a}_{11}, \dots \bar{a}_{nn}) = (u, v, a_{11}, \dots a_{nn})$$

donde $(u, v, a_{11}, \dots a_{nn})$ está en $P^{-1}(0)$

entonces $u = u(\bar{a}_{11}, \dots \bar{a}_{nn})$ $\quad v = v(\bar{a}_{11}, \dots \bar{a}_{nn})$

y como $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$ tenemos que:

u y v son funciones que dependen de $a_{11}, \dots a_{nn}$, además u y v son funciones continuas ya que son componentes de una función continua, $\mathcal{P}^{-1}$, y por lo tanto λ depende continuamente de a_{ij} (localmente).

En caso de que λ_1 no sea raiz simple, entonces

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} Q(\lambda)$$

de donde $\quad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1 - 1} (\lambda - \lambda_1) Q(\lambda)$

y trabajaríamos con $(\lambda - \lambda_1) Q(\lambda) = R(\lambda)$; observamos que el conjunto de puntos donde se anula $R(\lambda)$ es un subconjunto del conjunto de puntos donde se anula $P(\lambda)$. Con ésto terminamos la demostración. ∎

<u>Teorema 1.9</u> El conjunto de los campos hiperbólicos forman un conjunto abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Demostración:</u> Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hiperbólico, sean $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sus valores propios, entonces $Re(\lambda_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, sea $\varepsilon = \min\{|Re(\lambda_i)|, i = 1, \dots n\}$,

entonces por el lema 1.8 existe $\delta > 0$ tal que si F está en $B_\delta(\Delta)$ no tiene q los valores propios de F tienen parte real distinta de cero, y por lo tanto F es hiperbólico. Concluimos que $B_\delta(\Delta)$ está totalmente contenida en el conjunto de los campos hiperbólicos y por lo tanto éstos forman un conjunto abierto ■

Observemos que si $\mu_1, \dots \mu_n$ son los valores propios de F, podemos ordenarlos de tal forma que obtenemos

$$|Re(\mu_i) - Re(\lambda_i)| < \varepsilon \qquad i = 1, \dots n$$

con lo que concluimos que Δ y F tienen la misma cantidad de valores propios con parte real negativa.

<u>Teorema 1.10</u> El conjunto de los campos hiperbólicos forman un conjunto denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Demostración</u>: Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ no hiperbólico, sea Δ su matriz asociada (forma canónica de Jordan), sea $\delta = \min\{|Re(\lambda_i)| \mid \lambda_i$ es valor propio de Δ y $Re(\lambda_i) \neq 0\}$ (si $Re(\lambda_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots n$, entonces sea $\delta = 1$).

Si tomamos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t < \delta$, entonces el campo $B = \Delta + tI$ es hiperbólico ya que los valores propios de él, $\mu_1, \dots \mu_n$, cumplen con:

$$Re(\mu_i) = Re(\lambda_i) + t \qquad i = 1, \dots n$$

y por lo tanto $Re(\mu_i) \neq 0 \quad i = 1, \dots n$.

Además la distancia entre Δ y B esta dada por

$$\rho(\Delta, B) = \|\Delta - B\| = \|\Delta - (\Delta + tI)\| = \|tI\| = |t|\,\|I\|$$

por lo tanto $\rho(\Delta, B) = |t|$, o sea, B está tan cercano de Δ como deseemos y por ser B hiperbólico, concluimos el teorema ■

Sección 3. Campos hiperbólicos y estabilidad estructural

Definición 1.11 Sean $Z, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, decimos que el campo Z es topologicamente equivalente al campo Y $(Z \sim Y)$ si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que toda trayectoria solución de Z es transformada en una trayectoria solución de Y preservando la orientación. En otras palabras, si $\varphi_t(x)$ es el flujo asociado a Z y $\Psi_t(x)$ el asociado a Y entonces para todo t existe un tiempo τ tal que
$$h(\varphi_t(x)) = \Psi_\tau(h(x))$$
además si $t > 0$ entonces $\tau > 0$. Si el tiempo se preserva, esto es, $t = \tau$, entonces decimos que Z y Y son conjugados topológicos.

Observemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto, tomemos $Y, Z, W \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, entonces:

i) $Y \sim Y$, tomamos h como el homeomorfismo identidad.

ii) Si $Z \sim Y$, entonces existe $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, homeomorfismo tal que $h(\varphi_t(x)) = \Psi_\tau(h(x))$, donde $\varphi_t(x)$ y $\Psi_\tau(x)$ son los flujos asociados a Z y Y respectivamente. Consideremos $h^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$$h^{-1}(h(\varphi_t(x))) = h^{-1}(\Psi_\tau(h(x)))$$
$$\varphi_t(x) = h^{-1}(\Psi_\tau(h(x)))$$
si $h(x) = y$, entonces $x = h^{-1}(y)$, tenemos que la última igualdad se transforma en:
$$\varphi_t(h^{-1}(y)) = h^{-1}(\Psi_\tau(y))$$

y por lo tanto $Y \sim Z$.

iii) Si $Z \sim Y$ y $Y \sim W$, queremos mostrar que $Z \sim W$.

Si los flujos asociados son $\varphi_t(x)$, $\psi_t(x)$, $\theta_t(x)$, de Z, Y y W respectivamente, entonces existen h, k homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_z(h(x))$$

$$k(\psi_t(y)) = \theta_s(k(y))$$

por lo tanto $$k \circ h(\varphi_t(x)) = \theta_s(k \circ h(x))$$

con ésto concluimos que $Z \sim W$ ya que $k \circ h$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

Para mostrar algunas propiedades de esta relación de equivalencia necesitamos las siguientes definiciones.

<u>Definición 1.12</u> Una trayectoria solución por x es una órbita cerrada si existe $\lambda > 0$ tal que $\varphi_\lambda(x) = x$ y $\varphi_t(x)$ no es trivial, o sea $\varphi_t(x) \neq x$ para alguna $t \in \mathbb{R}$.

<u>Definición 1.13</u> Sea $\underline{X} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, sea $\varphi_t(x)$ su flujo. Decimos que $y \in \mathbb{R}^n$ es un w-punto límite de x $(x \in \mathbb{R}^n)$ si existe una sucesión $\{t_n\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(x) = y \quad .$$

El conjunto de todos los w-puntos límite de x, forman el w-conjunto límite $w(x)$.

Analogamente definimos α-punto límite y α-conjunto límite, reemplazando $t_n \to \infty$ por $t_n \to -\infty$.

Por último, un conjunto límite será un conjunto de la forma $\omega(x)$ ó $\alpha(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

Veremos ahora tres proposiciones que muestran que si dos campos son topológicamente equivalentes, entonces el conjunto de sus trayectorias solución es "parecido".

Sean $X, Y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tales que $X \sim Y$ (bajo $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), entonces:

a) $p \in \mathbb{R}^n$ es una singularidad de $X \iff h(p)$ es una singularidad de Y.

Denotemos los flujos por X_t y Y_t, entonces tenemos

$$h(p) = h(X_t(p)) \quad \text{para todo } t \text{ en } \mathbb{R}, \text{ ya que } p \text{ es singu-}$$

laridad, además $\quad h(X_t(p)) = Y_\tau(h(p)) \quad$ para todo $\tau > 0$

por lo tanto $\quad h(p) = Y_\tau(h(p))$

de donde concluimos que $h(p)$ es singularidad para el campo Y.

b) la trayectoria (o órbita) por p, solución del campo X ($O_X(p)$) es cerrada $\iff O_Y(h(p))$ es cerrada.

Si λ es el período de $O_X(p)$, tenemos $X_\lambda(p) = p$ y como

$$h(p) = h(X_\lambda(p)) = Y_{\lambda^*}(h(p))$$

se tiene que $O_Y(h(p))$ es cerrada, y por ser h biyectiva su período es λ^*.
La otra parte de la demostración es inmediata.

c) la imagen bajo h de $\omega(p)$ es $\omega(h(p))$.

Sea $q \in \omega(p)$, por lo tanto existe $\{t_n\}$ tal que

$$\lim_{t_n \to \infty} X_{t_n}(p) = q$$

de aquí $\quad h(q) = h(\lim_{t_n \to \infty} X_{t_n}(p))$

como h es continua $\quad h(\lim_{t_n \to \infty} X_{t_n}(p)) = \lim_{t_n \to \infty} h(X_{t_n}(p))$

pero $\quad h(X_{t_n}(p)) = Y_{z_n}(h(p))$

de donde $\quad h(q) = \lim_{z_n \to \infty} Y_{z_n}(h(p))$

por lo tanto $\quad h(q) \in \omega(h(p))$

$h(\omega(p)) \subset \omega(h(p))$ $\quad$ y utilizando h^{-1} obtenemos

$h(\omega(p)) \supset \omega(h(p))$

concluimos que $\quad h(\omega(p)) = \omega(h(p))$.

Observemos que en estas demostraciones no hemos utilizado el hecho de que los campos son lineales. Por lo tanto las propiedades enunciadas hasta aquí (en esta sección) las tienen un conjunto de campos mas amplio que el conjunto de campos lineales, de hecho lo único que se le pide a cada campo es que tenga asociado un flujo.

Para justificar el camino que seguiremos, de aquí en adelante, veamos el siguiente ejemplo:

Sean X y $Y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definidos por las matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ respectivamente. El flujo de X es $\varphi_t(x,y) = e^t(x,y)$ y el de Y es $\psi_t(x,y) = e^t(x\cos t + y \operatorname{sen} t, -x \operatorname{sen} t + y\cos t)$, donde (x,y) es elemento de $\mathbb{R}^2$

Estos dos campos tienen sus dos valores propios con parte real mayor que cero; en ambos casos el punto crítico es una fuente. Con esta información nos gustaría concluir que son dos campos topologicamente equivalentes.

Construiremos un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ apoyandonos en el hecho de que todas las trayectorias, de ambos campos, son transversales a $S^1 = \{(x,y) \mid |(x,y)| = 1\}$, ésto con excepción de la trayectoria $\bar{o}$.

Definimos h de la siguiente forma:

i) $h(\bar{0}) = \bar{0}$

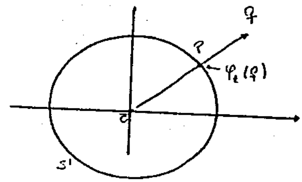
ii) $h(p) = p$ para todo p en S^1

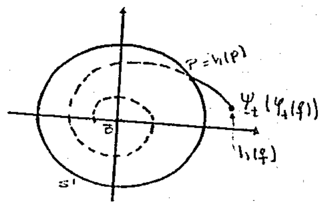
iii) Si $q \in \mathbb{R}^2$ no está en ninguno de los dos casos anteriores, entonces existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_t(q) = p$$

donde $p \in S^1$, en base a ésto definimos

$$h(q) = \Psi_{-t}(p) = \Psi_{-t}(\varphi_t(q)).$$





Observemos que h transforma trayectorias solución de X en trayectorias solución de Y. Tomemos $r \in \mathbb{R}^2$, sea $\varphi_t(r)$ la trayectoria solución que pasa por r en $t=0$, supongamos que $\varphi_\lambda(r) = p$ donde $p \in S^1$,

entonces $$\varphi_{\lambda-t}(\varphi_t(r)) = p \qquad t \in \mathbb{R},$$

por lo que
$$\begin{aligned} h(\varphi_t(r)) &= \Psi_{t-\lambda}(\varphi_{\lambda-t}(\varphi_t(r))) \\ &= \Psi_t(\Psi_{-\lambda}(\varphi_\lambda(\varphi_{-t}(\varphi_t(r))))) \\ &= \Psi_t(\Psi_{-\lambda}(\varphi_\lambda(r))) \end{aligned}$$

por lo tanto $$h(\varphi_t(r)) = \Psi_t(h(r)).$$

Que h es una biyección es inmediato del teorema de existencia y unicidad de soluciones. Lo que no es tan inmediato es que h sea continua.

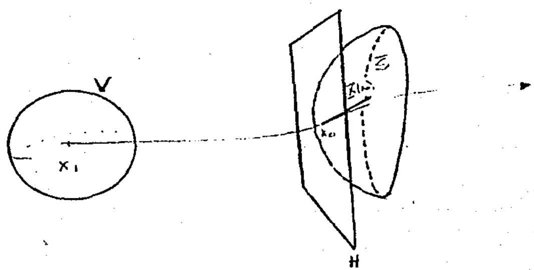
Para $q \neq \bar{0}$ podemos expresar a h de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h(q) &= \Psi_{-t}(\varphi_t(q)) \\ &= \Psi_{-t}(\varphi(t(q), q)) \end{aligned}$$

$$h(q) = \psi(-t(q), \varphi(t(q), q)).$$

Por lo tanto h es una composición de funciones. Sabemos que φ y ψ son continuas y nos faltaría ver que $t(q)$ es una función continua. Recordemos que $t(q)$ es el tiempo necesario para que $\varphi_t(q)$ esté en S'.

<u>Lema 1.14</u> Sean $\bar{X}$ un campo de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, x_0, x_1 puntos regulares $(\bar{X}(x_1) \neq \bar{0}, \bar{X}(x_0) \neq \bar{0})$ de una misma trayectoria, $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{t_1}(x_1) = x_0$ y $x_0 \in \bar{S}$, donde $\bar{S}$ es una superficie regular transversal al campo en x_0; entonces existen vecindades $V \subset U$ de x_1, $I \subset \mathbb{R}$ de t_1 y una función $s \in C^1$, $s: V \to \mathbb{R}$ tales que, $(t, x) \in I \times V$ y $\varphi_t(x) \in \bar{S}$ si y solo si $t = s(x)$, en particular $s(x_1) = t_1$.



<u>Demostración</u>: Sea H el plano tangente a $\bar{S}$ en x_0, sea $\{V_2, \dots, V_n\}$ una base de H, consideremos en U el sistema de coordenadas $(y_1, \dots y_n)$ donde la base tiene como origen al punto x_0 y está formada por los vectores $\{\bar{X}(x_0), V_2, \dots V_n\}$, éstos son linealmente independientes ya que $\bar{S}$ es transversal al campo en x_0.

Dado que $\bar{S}$ es una superficie regular, existe una vecindad x_0 en $\bar{S}$ tal que es la imagen inversa de un valor regular, $G(y_1, \dots y_n) = 0$, donde $DG_{(x_0)} \neq \bar{0}$, notemos que $DG_{(x_0)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Ker} DG_{(x_0)} = H$ ya que si $v \in H$, entonces existe $(y_1(t), \dots y_n(t)) \in \bar{S}$ tal que $(y_1(0), \dots y_n(0)) = x_0$

y $(y_1'(0), \dots y_n'(0)) = v$

como $G(y_1(t), \dots y_n(t)) = 0$

se tiene que $DG_{(x_0)}(v) = 0$ por lo tanto $H \subset \operatorname{Ker} DG_{(x_0)}$

y como la dimension de $\operatorname{Ker} DG_{(x_0)}$ es $n-1$ y la de H también, se tiene que $H = \operatorname{Ker} DG_{(x_0)}$.

Como $\bar{S}$ y $\underline{X}$ son transversales en x_0, entonces $\bar{X}(x_0) \notin H$ y por lo tanto $DG_{(x_0)}(\bar{X}(x_0)) \neq 0$.

En resumen tenemos:

$$\varphi(t, x) \in \bar{S} \iff G(\varphi(t, x)) = 0,$$

$$G(\varphi(t_1, x_1)) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[G(\varphi(t_1, x_1))\right] = DG_{(x_0)}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_1, x_1)\right] = DG_{(x_0)}(\bar{X}(x_0)),$$

pero $DG_{(x_0)}(\bar{X}(x_0)) \neq 0$,

por lo tanto $\frac{\partial}{\partial t}\left[G(\varphi(t_1, x_1))\right] \neq 0$.

Por el teorema de la función implícita, existen vecindades de t_1 y x_1 tales que $t = s(x)$ y $s \in C^1$. ∎

Gracias a este lema nuestra función $t(q)$ es continua, y por lo tanto h es continua en $q \in \mathbb{R}^2$, $q \neq \bar{0}$. Veremos ahora que h es continua en $\bar{0}$. Tenemos que mostrar que dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|q| < \delta$, entonces

$$|h(q)| < \varepsilon.$$

Demostración: Recordemos que $h(q) = \Psi_{-t}(\varphi_t(q))$ para $q \neq \bar{0}$, $h(\bar{0}) = \bar{0}$ y que $\lim_{t \to -\infty} |\Psi_t(p)| = 0$ para todo p en S^1. Como S^1 es compacto, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\Psi_\lambda(p)| < \varepsilon \quad \text{para todo } p \in S^1, \ \lambda \text{ sólo depende de } \varepsilon.$$

Además si $t < \lambda$ tenemos

$$(3,1) \qquad |\Psi_t(p)| < \varepsilon \quad \text{para todo } p \in S^1, \ (\text{observemos que } \lambda < 0).$$

Consideremos $\varphi_{-\lambda} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_{-\lambda}$ es continua, por lo tanto para $\varepsilon > 0$ (la misma que en (3,1)), existe $\delta > 0$ tal que si $|r| < \delta$ entonces

$$|\varphi_{-\lambda}(r)| < 1$$

ésto quiere decir que $\varphi_{-\lambda}(r)$ aún no pertenece a S^1. Llamemos $s(r) \in \mathbb{R}$ al tiempo tal que $\varphi_{s(r)}(r) \in S^1$, entonces $s(r) > -\lambda$, y de aquí $-s(r) < \lambda$.

Entonces si $|r| < \delta$

$$h(r) = \Psi_{-s(r)}(\varphi_{s(r)}(r))$$

$$= \Psi_{-s(r)}(p) \qquad \text{donde } p \in S^1,$$

como $-s(r) < \lambda$, por (3,1) tenemos

$$|\Psi_{-s(r)}(p)| < \varepsilon.$$

En resumen, si $|r| < \delta$, entonces $|h(r)| < \varepsilon$ ∎

El último detalle es mostrar que h^{-1} es continua; pero h^{-1} es de la forma:

i) $h^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}$

ii) $h^{-1}(p) = p$ para todo p en S^1

iii) $h^{-1}(m) = \varphi_{-t}(\Psi_t(m))$ ya que $h(q) = \Psi_{-t}(\varphi_t(q))$ y observamos que $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = I$

Entonces la demostración de que h^{-1} es continua es igual a la demostración de la continuidad de h.

Con ésto terminamos nuestro ejemplo. Las demostraciones que en él hicimos han sido lo bastante generales para poder concluir, casi inmediatamente, el siguiente lema.

<u>Lema 1.15</u> Dos campos lineales en $\mathbb{R}^n$ que tienen todos sus valores propios con parte real estrictamente mayor que cero son topologicamente equivalentes.

<u>Demostración</u>: Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tales que sus valores propios tienen parte real mayor que cero. Entonces por el corolario existen $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $S^1_{\mathcal{A}}$ y $S^1_{\mathcal{B}}$ esferas unitarias tales que son transversales a los flujos definidos por A y B respectivamente.

Observemos que $S^1_{\mathcal{A}}$ y $S^1_{\mathcal{B}}$ son homeomorfas ya que cada una de ellas es homeomorfa a S^1 en la norma usual bajo la aplicación

$$x \longrightarrow \frac{x}{|x|},$$

llamemos K al homeomorfismo entre $S^1_{\mathcal{A}}$ y $S^1_{\mathcal{B}}$.

Para mostrar que A y B son topologicamente equivalentes definimos

$$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \text{así:}$$

i) $h(\bar{0}) = \bar{0}$

ii) $h(p) = K(p)$ para todo p en $S^1_{\mathcal{A}}$

iii) $h(q) = \psi_{-t(q)} \circ K \circ \varphi_{t(q)}(q)$ donde φ_t y ψ_t son los flujos de A y B respectivamente y $t(q) \in \mathbb{R}$ es tal que $\varphi_{t(q)}(q) \in S^1_{\mathcal{A}}$.

La demostración de que h es un homeomorfismo que transforma trayectorias solución de A en trayectorias solución de B es igual a la hecha en el ejemplo ∎

Obsérvese que el mismo resultado se obtiene si ambos campos tienen todos sus valores propios con parte real negativa. Esto es, en lugar de tener dos campos con fuentes tendríamos dos campos con sumideros.

Nuestro siguiente paso es extender estos resultados a campos hiperbólicos cuya singularidad no es fuente ni sumidero.

<u>teorema 1.16</u> Sean L y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hiperbólicos, entonces L y T tienen la misma cantidad de valores propios (contando multiplicidad) con parte real menor que cero, si y sólo si son topologicamente equivalentes.

<u>Demostración:</u> Si L y T tienen la misma cantidad de valores propios con parte real negativa, y E^s, $E^{s'}$ son sus subespacios estables respectivamente, entonces

$$\text{dimension de } E^s = \text{dimension de } E^{s'}.$$

Restringidos a E^s y $E^{s'}$, L y T son sumideros, por lo tanto existe un homeomorfismo

$$h_s : E^s \longrightarrow E^{s'}$$

tal que $L\big|_{E^s} = L^s$ y $T\big|_{E^{s'}} = T^s$ son topologicamente equivalentes por lo tanto h_s cumple con

$$h_s\left(\varphi_t^s(p)\right) = \psi_t^s(h_s(p))$$ donde φ_t, ψ_t son los flujos de L y T respectivamente, y φ_t^s, ψ_t^s su respectiva restricción a E^s y $E^{s'}$.

De la misma forma vemos que existe un homeomorfismo

$$h_u : E^u \longrightarrow E^{u'}$$

y $$h_u\left(\varphi_t^u(p)\right) = \psi_t^u(h_u(p)).$$

Definimos $h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$h: E^s \oplus E^u \longrightarrow E^{s'} \oplus E^{u'}$$

si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x^s + x^u$ donde $x^s \in E^s$, $x^u \in E^u$, entonces

$$h(x) = h(x^s + x^u) = h_s(x^s) + h_u(x^u).$$

Podemos escribir $h = h_s \oplus h_u$ y observar que h hereda las propiedades que lo hacen un homeomorfismo. Mostraremos, entonces, solamente que h transforma trayectorias de L en trayectorias de T.

$$\begin{aligned} h(\varphi_t(x)) &= h(\varphi_t(x_s + x_u)) = h(\varphi_t^s(x_s) + \varphi_t^u(x_u)) \\ &= h_s(\varphi_t^s(x_s)) + h_u(\varphi_t^u(x_u)) = \psi_t^s(h_s(x_s)) + \psi_t^u(h_u(x_u)) \\ &= \psi_t(h_s(x_s) + h_u(x_u)) = \psi_t(h(x_s + x_u)) \end{aligned}$$

por lo tanto $\quad h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$.

Ahora supongamos que L y T son equivalentes bajo h, homeomorfismo. Observemos que $h(\bar{0}) = \bar{0}$ ya que h transforma singularidades en singularidades. Mostraremos, a continuación, que E^s y $E^{s'}$ tienen la misma dimensión.

Si $x \in E^s$, entonces $w(x) = \bar{0}$ y como $h(w(x)) = w(h(x))$

tenemos que $\quad w(h(x)) = \bar{0}$

y por lo tanto $\quad h(x) \in E^{s'}$

concluimos que $\quad h(E^s) \subset E^{s'}$.

Por un argumento similar tenemos que $h^{-1}(E^{s'}) \subset E^s$

entonces E^s y $E^{s'}$ son homeomorfos, de aquí que $\dim E^s = \dim E^{s'}$ y por lo tanto L y T tienen la misma cantidad de valores propios con parte real negativa ∎

<u>Definición 1.17</u> Un campo $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es estructuralmente estable si existe una veúndad N de él, tal que para todo campo lineal Y, tal que $Y \in N$, se tiene que Y es topologicamente equivalente a L.

A partir de esta definición inmediatamente encontramos campos que no son estructuralmente estables. Consideremos $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que el Kernel de Δ sea distinto de $\{\bar{0}\}$, esto es, el conjunto de singularidades es todo un subespacio de $\mathbb{R}^n$ no trivial; pero los campos hiperbólicos forman un conjunto denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces para toda veúndad N de Δ existe Y campo hiperbólico tal que $Y \in N$, pero Δ y Y no pueden ser topologicamente equivalentes ya que el homeomorfismo transforma puntos singulares de Δ en puntos singulares de Y en forma biyectiva, por lo tanto habría una correspondencia uno a uno entre $\operatorname{Ker}\Delta$ y $\{\bar{0}\}$, lo cual es una contradicción.

Concluimos este capitulo con el siguiente resultado:

<u>teorema 1.18</u> El conjunto de los campos estructuralmente estables en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de los campos hiperbólicos.

Demostración: Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hiperbólico, ya que los campos hiperbólicos forman un conjunto abierto, existe N veúndad de L tal que si $\bar{X} \in N$ entonces $\bar{X}$ es hiperbólico, ademas con la misma cantidad de valores propios con parte real negativa que L, por lo tanto L y $\bar{X}$ son topologicamente equivalentes. Concluimos que L es estructuralmente estable, o sea:

$$\{\text{Campos hiperbólicos}\} \subset \{\text{Campos estructuralmente estables}\}$$

Para ver la contención inversa mostraremos que si $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ no es hiperbólico entonces Δ no es estructuralmente estable.

Sea $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ no hiperbólico, para toda vecindad N de Δ consideremos los campos $B = \Delta + \delta I$ y $C = \Delta - \delta I$, donde $\delta < \min\{ |Re(\lambda_i)| \mid \lambda_i$ es valor propio de Δ, $Re(\lambda_i) \neq 0 \}$, y δ suficientemente pequeño para que

$$B \in N \quad y \quad C \in N,$$

si Δ fuera estructuralmente estable, entonces

$$\Delta \sim B \quad y \quad \Delta \sim C$$

y por lo tanto $B \sim C$ pero ésto es una contradicción ya que la cantidad de valores propios de B con parte real negativa es distinta a la cantidad de valores propios de C con parte real negativa ∎

Capitulo II

En esta parte trabajaremos con campos definidos en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Serán campos con derivadas parciales continuas, esto es, elementos de C^1. En la primera sección daremos las primeras definiciones y recordaremos el teorema de Poincaré - Bendixon. De la segunda sección en adelante tomaremos un campo estructuralmente estable y trataremos de ir descubriendo cuáles son sus características. En particular nos interesará describir lo mas ampliamente posible el conjunto de sus trayectorias solución. En la segunda sección estudiaremos los puntos singulares; mostraremos que un campo estructuralmente estable tiene una cantidad finita de este tipo de puntos, todos ellos simples y sus raíces caracteristicas con parte real distinta de cero. En la sección tres mostraremos que para un campo estructuralmente estable no puede haber una trayectoria solución que una dos puntos silla. La última sección (la cuarta) la dedicaremos al estudio de las trayectorias cerradas de un campo estructuralmente estable; mostraremos que sólo hay una cantidad finita de ellas, y que en todas se satisface

$$\int_\gamma \operatorname{div} \bar{X} \, dt \neq 0$$

donde γ es la trayectoria cerrada y $\bar{X}$ es un campo estructuralmente estable.

Sección 1 Definiciones y ejemplos.

Consideremos en $B^2 = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid |P| \leq 1 \}$ el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

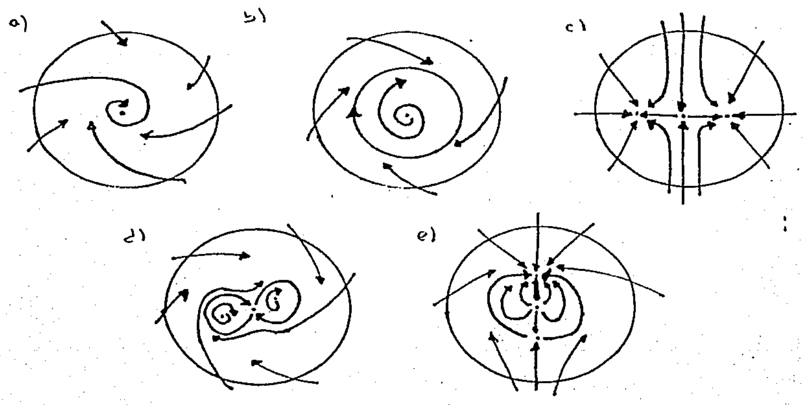
$$(1.1) \qquad \frac{dx}{dt} = X_1(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = X_2(x,y)$$

donde $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_1, X \in C^1$ y Ω es un conjunto abierto que contiene a B^2. Supongamos que la frontera de B^2 $(= S^1)$ es una curva sin contacto con el campo $X = (X_1, X_2)$, podemos considerar que

$$\langle X(p), p \rangle < 0 \quad \text{para todo } p \text{ en } S^1,$$

esto es, el campo apunta hacia adentro en todo punto de S^1, Bajo estas condiciones todas las trayectorias solución que intersectan S^1 entran en B^2 cuando t crece.

Dibujando algunas trayectorias nos podemos dar una idea de como son los campos con que trabajaremos.



<u>Definición 2.1</u> Llamaremos Σ al conjunto de todos los campos definidos en Ω abierto ($B^2 \subset \Omega$) tales que si $\overline{X} \in \Sigma$, entonces

i) $\overline{X}$ apunta hacia adentro en todo punto de S^1

ii) $\overline{X} \in C^1$.

Si tenemos otro campo $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ en Σ definimos la distancia entre $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ así:

$$\rho(\overline{X}, \overline{Y}) = \max_{B^2} \left\{ |X_1 - Y_1|, |X_2 - Y_2|, \left|\frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right| \right\},$$

este máximo existe ya que B^2 es compacto y $\overline{X}, \overline{Y} \in C^1$.

Definimos $\quad B_\delta(\overline{X}) = \{ \overline{Y} \in \Sigma \mid \rho(\overline{X}, \overline{Y}) < \delta \}$.

Las definiciones de punto singular, órbita cerrada y conjuntos límite se aplican también a elementos del conjunto Σ.

<u>Definición 2.2</u> Sean $\overline{X}, \overline{Y} \in \Sigma$, decimos que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h: B^2 \to B^2$ tal que transforma trayectorias de $\overline{X}$ en trayectorias de $\overline{Y}$ preservando la orientación, esto es si φ_t y ψ_t son los flujos asociados a $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ respectivamente, entonces

$$h(\{\varphi_t(p) \mid t \geq 0\}) = \{\psi_\tau(h(p)) \mid \tau \geq 0\}.$$

<u>Definición 2.3</u> Un campo $\overline{X} \in \Sigma$ es estructuralmente estable si existe $\delta > 0$, tal que para todo $\overline{Y} \in B_\delta(\overline{X})$, $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topológicamente equivalentes. A este campo $\overline{Y}$, le llamaremos una perturbación permitida de $\overline{X}$ (o simplemente una perturbación).

<u>Notación</u>: $\Sigma^* = \{ \bar{X} \in \Sigma \mid \bar{X}$ es estructuralmente estable $\}$

Parte fundamental de la herramienta con la que vamos a trabajar la forman las siguientes proposiciones (que aquí enunciamos sin demostración), [Hir.].

<u>teorema 2.4 (Poincaré - Bendixson).</u> Un conjunto límite, compacto, no vacío, en $\mathbb{R}^2$, que no contiene puntos singulares es una órbita cerrada.

<u>Definición 2.5</u> Un ciclo límite es una órbita cerrada γ tal que $\gamma \subset \omega(x)$ o $\gamma \subset \alpha(x)$ para algún $x \notin \gamma$.

<u>teorema 2.6</u> Sea γ un ω-ciclo límite. Si $\gamma = \omega(x)$, $x \notin \gamma$, entonces x tiene una vecindad N tal que $\gamma = \omega(y)$ para todo "y" en N. En otras palabras, el conjunto

$$\Delta = \{ y \mid \gamma = \omega(y) \} - \gamma$$

es abierto.

<u>teorema 2.7</u> Un conjunto compacto no vacío que es positivamente (o negativamente) invariante contiene un ciclo límite o un punto singular.

<u>Corolario 2.8</u> Sea γ una orbita cerrada y supongamos que el dominio del campo incluye la región U encerrada por γ. Entonces U contiene un punto singular o un ciclo límite.

<u>Teorema 2.9</u> Sea γ una órbita cerrada, sea U la región que encierra (U contenida en el dominio del campo). Entonces U contiene un punto singular.

Sección 2. Puntos singulares.

Sea $\overline{X} \in \Sigma$ un campo estructuralmente estable. En esta sección estudiaremos cuales son las características de sus puntos críticos.

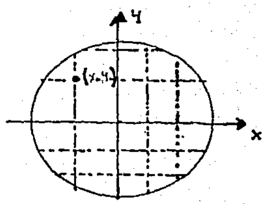
Observemos que $\overline{X} = (X_1, X_2)$ es tal que $X_1, X_2 \in C^1$, y por lo tanto (teorema de aproximación de Weierstrass) dada $\delta > 0$ existe $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ tal que $\overline{Y} \in B_\delta(\overline{X})$, Y_1 y Y_2 polinomios. Podemos encontrar estos dos polinomios de tal forma que sean primos relativos (los únicos factores comunes son los polinomios constantes) sumando una $\varepsilon > 0$ pequeña a alguno de ellos.

Mencionaremos, ahora, un teorema que nos da información acerca de los puntos críticos del campo $\overline{Y}$.

<u>teorema 2.10</u> Si $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son polinomios primos relativos, entonces existe sólo un número finito de valores y_0 para los cuales la ecuación

$$P(x, y_0) = 0 \text{ y } Q(x, y_0) = 0$$

tiene una raiz común. [Ahl.].



Este teorema nos dice que el campo $\overline{Y}$ tiene puntos críticos para una cantidad finita de coordenadas x_0 y una cantidad finita de ordenadas y_0, por lo tanto $\overline{Y}$ tiene una cantidad finita de puntos críticos.

Ahora, como $\overline{Y}$ es una perturbación permisible de $\overline{X}$, o sea es topo logicamente equivalente a $\overline{X}$, y ya que el homeomorfismo h transforma puntos críticos en puntos críticos en forma biyectiva, concluimos que $\overline{X}$ tiene a lo mas una cantidad finita de puntos críticos. Hemos demostrado lo siguiente:

<u>Lema 2.11</u> Si $\overline{X} \in \Sigma^*$, entonces $\overline{X}$ tiene una cantidad finita de puntos críticos.

Ahora, si $p=(0,0)$ es punto crítico de $\overline{X}$, podemos expresar a $\overline{X}$ de la siguiente forma (en una vecindad de p):

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} X_1(x,y) &= \left.\frac{\partial X_1}{\partial x}\right|_p x + \left.\frac{\partial X_1}{\partial y}\right|_p y + \varepsilon_1(x,y) \\ X_2(x,y) &= \left.\frac{\partial X_2}{\partial x}\right|_p x + \left.\frac{\partial X_2}{\partial y}\right|_p y + \varepsilon_2(x,y) \end{aligned}$$

donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_i(x,y)}{|(x,y)|} = 0 \qquad i=1,2$

si tomamos $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, tenemos que (2.1) se escribe así:

$$\overline{X} = \Delta\binom{x}{y} + \varepsilon\binom{x}{y}$$

donde $\Delta = D\overline{X}_{(p)}$ es la parte lineal del campo $\overline{X}$. Esta matriz Δ es en algunos casos de mucha utilidad para reconocer el aspecto topológico en una vecindad del punto crítico p; en este sentido enunciamos el siguiente teorema.

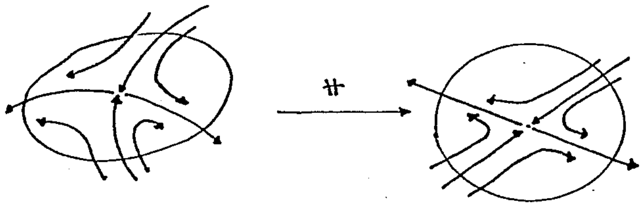
<u>teorema 2.12 (Hartman, Grobman).</u> Sea $\overline{X}: B^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo C^1 y $p=(x_0,y_0)$ una singularidad hiperbólica de $\overline{X}$, sea $L=D\overline{X}_{(p)}$, entonces $\overline{X}$ en p es localmente equivalente a L en $\overline{0}$. [Pal.].

Por singularidad hiperbólica consideramos a los puntos $p \in B^2$ tales que

i) $\overline{X}(p) = \overline{0}$

ii) $DX_{(p)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo hiperbólico.

Y por equivalencia local entre $\bar{X}$ y L entendemos que existen vecindades V de p y U de $\bar{o}$, y un homeomorfismo $H : V \to U$ tal que transforma trayectorias de $\bar{X}$ en trayectorias de L preservando la orientación, y $H(p) = \bar{o}$.



Podemos hacer una primera clasificación de los puntos críticos de $\bar{X}$ de la siguiente manera: p es un sumidero, fuente, silla o centro si $\bar{X}$ en "p" es localmente equivalente a $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ donde L tiene un sumidero, fuente, silla (un valor propio negativo y el otro positivo) o centro (valores propios con parte real igual a cero) respectivamente.

Observese que puede haber puntos críticos de otro tipo.

Si tenemos que $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son topologicamente equivalentes $(\bar{X} \sim \bar{Y})$ y "p" es un punto crítico de $\bar{X}$, entonces $h(p) = q$ es un punto crítico de $\bar{Y}$ tal que si p es un sumidero, fuente, silla o centro, entonces q es un sumidero, fuente, silla o centro respectivamente.

Para mostrar la validez de esta afirmación vemos que para p y $\bar{o}$ existen vecindades U y V respectivamente tales que

$$\dot{X}\big|_U \sim L\big|_V$$

y como $X \sim Y$, tenemos que $\overline{Y}|_W \sim L|_V$ donde $W = h(V)$.

Un poco más en general podemos concluir que si $\overline{X} \sim \overline{Y}$, entonces $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ tienen la misma cantidad de fuentes; la misma de sumideros; la misma de sillas y la misma de centros.

Definición 2.13 Sean $\overline{X} \in \Sigma$, p punto crítico de $\overline{X}$ aislado y S una esfera con centro en p de radio tan pequeño para que p sea el único punto crítico en su interior, y el campo $\overline{X}(s)$ para todo $s \in S$, definimos

$$\text{Indice de } S = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{X_1^2 + X_2^2} \qquad \text{donde } \overline{X} = (X_1, X_2).$$

Este índice del campo $\overline{X}$ con respecto a S es $\frac{1}{2\pi}$ veces la variación angular del vector $\overline{X}(s)$ cuando s recorre S una vez en sentido positivo.

Definición 2.14 Sea $p \in B^2$, p es un punto singular simple del campo $\overline{X}$ si $\left.\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x,y)}\right|_p \neq 0$

donde $\left.\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(x,y)}\right|_p$ = determinante de $D\overline{X}_{(p)}$.

Lema 2.15 Si $\overline{X}$ es un campo estructuralmente estable, entonces todo punto singular es simple.

Demostración: Supongamos que $\overline{o}$ es un punto singular tal que $\left.\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\overline{o}} = 0$.

Sea $\varphi : B^2 \to \mathbb{R}$ un polinomio tal que

$$\varphi(0,0) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{paratodo } (x_0,y_0) \text{ punto singular de } \overline{X}.$$

Consideremos el sistema $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ donde

$$Y_1(x,y) = X_1(x,y) + \frac{\varepsilon a_1}{M} x\, \varphi(x,y)$$
$$Y_2(x,y) = X_2(x,y) + \frac{\varepsilon a_2}{M} y\, \varphi(x,y)$$

donde $M = \max_{B^2} \left\{ |\varphi|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| \right\}$ y $|a_1|<1$, $|a_2|<1$ constantes.

Como $|x| \le 1$ y $|y| \le 1$ se tiene que $\rho(\overline{X}, \overline{Y}) \le \varepsilon$. Por lo tanto para ε suficientemente pequeño $\overline{Y}$ es una perturbación permitida de $\overline{X}$.

Sabemos que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ tienen la misma cantidad de singularidades, y no sólo ésto, si no que ambos campos se anulan precisamente en los mismos puntos.

Calculemos $\left.\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\overline{0}}$

$$\left.\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\right|_{0} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon a_1}{M}\varphi + \frac{\varepsilon a_1}{M}x\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\varepsilon a_1}{M}x\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\varepsilon a_2}{M}y\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon a_2}{M}\varphi + \frac{\varepsilon a_2}{M}y\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{matrix}\right|_{\overline{0}}$$

$$= \left.\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\overline{0}} + \frac{\varepsilon a_1}{M}\varphi\left[\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon a_2}{M}\varphi + \frac{\varepsilon a_2}{M}y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$$
$$+ \frac{\varepsilon a_1}{M}x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon a_2}{M}\varphi + \frac{\varepsilon a_2}{M}y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] + \frac{\partial X_1}{\partial x}\left[\frac{\varepsilon a_2}{M}\varphi + \frac{\varepsilon a_2}{M}y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$$
$$- \frac{\partial X_2}{\partial x}\left[\frac{\varepsilon a_1}{M}x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] - \frac{\varepsilon a_1}{M}y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\varepsilon a_1}{M}x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$$

evaluando en $\overline{0}$, muchos términos se cancelan y nos queda

$$\left.\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\overline{0}} = \frac{\varepsilon a_1}{M}\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon a_2}{M}\frac{\varepsilon a_1}{M} + \frac{\varepsilon a_2}{M}\frac{\partial X_1}{\partial x}$$
$$= \varepsilon\left[\frac{a_1}{M}\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{a_2}{M}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon a_1 a_2}{M^2}\right]_{\overline{0}}$$

de aquí que podamos escoger a_1 y a_2 de tal forma que obtengamos

$$(2.2) \qquad \left.\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\overline{0}} > 0 \quad \text{ó} \quad \left.\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\overline{0}} < 0$$

Ahora, sea S un circulo con centro en $\overline{0}$ que no contiene ningún otro punto singular y tal que el campo $\overline{X}$ no se anule en él. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que en ningún punto de S el campo de cualesquiera dos perturbaciones permitidas $\overline{Y}$ y Z esten en oposición, entonces el índice de S es el mismo para todo $Y \in B_\varepsilon(\overline{X})$, [Ref.], pero por (2.2) existen $\overline{Y}$ y Z permutaciones permitidas tales que

$$\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\bar 0} > 0 \quad y \quad \frac{\partial(Z_1,Z_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\bar 0} < 0 .$$

En el primer caso el origen es localmente homeomorfo a un centro, sumidero o fuente, y en el segundo caso el origen es localmente homeomorfo a un punto silla, lo cual es una contradicción ya que ambos campos tienen el mismo índice y en este caso $\overline{Y}$ tiene índice 1 y Z índice -1. Por lo tanto todo punto crítico de $\overline{X}$ es tal que $\det(D\overline{X})$ en él, es distinto de cero. Todo punto crítico es simple ∎

Lema 2.16 Si $\overline{X}$ es un campo estructuralmente estable, entonces $\overline{X}$ no tiene ninguna singularidad donde $D\overline{X}_{(p)}$ tenga valores propios imaginarios puros. En particular $\overline{X}$ no tiene centros.

Demostración: Sean (a_j, b_j) $j=1,\dots n$ las singularidades de $\overline{X}$, sean $m, p \in \mathbb{Z}$ tales que $m \neq 0$, $p \neq 0$, $m+p \neq 0$. Definimos $\varphi_j : B^2 \to \mathbb{R}$ como sigue

$$\varphi_j(x,y) = m(x-a_j) + p(y-b_j) ,$$

observemos que $\varphi_j(a_j,b_j) = 0$. Podemos escoger m y p de tal forma que si $j \neq k$, entonces $\varphi_j(a_k,b_k) \neq 0$.

Sea $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_n$, $\varphi : B^2 \to \mathbb{R}$, además $\varphi = 0$ en cada una de las singularidades. Consideremos el campo $\phi = (\varphi, \varphi)$, entonces la divergencia de ϕ en $q \in B^2$ es $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\big|_q + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\big|_q$, si nos olvidamos del punto podemos escribir $\operatorname{div}(\varphi,\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

$$\text{Ahora}\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\varphi_2\cdots\varphi_n + \cdots + \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-1}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}$$
$$= m\varphi_2\cdots\varphi_n + \cdots\cdots + \varphi_1\cdots\varphi_{n-1}\, m$$
$$= m\,(\varphi_2\cdots\varphi_n + \cdots\cdots + \varphi_1\cdots\varphi_{n-1})$$

$$\text{y}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = p\,(\varphi_2\cdots\varphi_n + \cdots\cdots + \varphi_1\cdots\varphi_{n-1})$$

$$\text{evaluando}\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{(a_j,b_j)} = m\,(\varphi_1\cdots\varphi_{j-1}\varphi_{j+1}\cdots\varphi_n) \neq 0$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{(a_j,b_j)} = p\,(\varphi_1\cdots\varphi_{j-1}\varphi_{j+1}\cdots\varphi_n) \neq 0$$

èsto para todo j desde 1 hasta n.

Ahora $\operatorname{div}(\varphi,\varphi)_{(a_j,b_j)} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{(a_j,b_j)} = (m+p)(\varphi_1\cdots\varphi_{j-1}\varphi_{j+1}\cdots\varphi_n)$

por lo tanto $\operatorname{div}(\varphi,\varphi)_{(a_j,b_j)} \neq 0$ para $j = 1,\dots n$

Sea ε suficientemente pequeño tal que el sistema $\underline{Y}_\varepsilon = (X_1+\varepsilon\varphi, X_2+\varepsilon\varphi)$ sea una perturbación permitida y de tal forma que el signo de los jacobianos en las singularidades se conserve (recuerdese que por el lema 2.15, todos los puntos críticos de $\overline{X}$ son simples).

Si existiera un punto crítico de $\overline{X}$, (a_k, b_k), donde $\operatorname{div}(X_1, X_2)_{(a_k,b_k)} = 0$, tendríamos que

$$\operatorname{div}(Y_1,Y_2)_{(a_k,b_k)} = \left[\frac{\partial\varepsilon\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon\varphi}{\partial y}\right]_{(a_k,b_k)}$$
$$= \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{(a_k,b_k)} \neq 0$$

por lo tanto $DY_{(a_k,b_k)}$ es hiperbólico (ya que el jacobiano en (a_k,b_k) también es distinto de cero). Por lo tanto $\overline{Y}$ no tiene centros, y como $\overline{Y}\sim\overline{X}$, entonces $\overline{X}$ tampoco tiene centros. Con èsto terminamos la segunda parte del lema. Nos falta demostrar que en ningún punto crítico la diferencial de $\overline{X}$ tiene valores propios con parte real nula.

Recordemos que para encontrar los valores propios de $D\overline{X}_{(q)}$ tenemos que resolver la ecuación $\det\left(D\overline{X}_{(q)}-\lambda I\right)=0$,

o sea,
$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial X_1}{\partial x}-\lambda & \frac{\partial X_1}{\partial y}\\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y}-\lambda\end{matrix}\right|_{(q)}=0$$

de donde
$$\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial y}-\lambda\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)+\lambda^2-\frac{\partial X_2}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial y}=0$$
$$\lambda^2-\lambda\left(\operatorname{div}(X_1,X_2)\right)+\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(x,y)}=0$$

despejando λ obtenemos
$$\lambda=\frac{\operatorname{div}(X_1,X_2)}{2}\pm\frac{\sqrt{\operatorname{div}(X_1,X_2)^2-4\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(x,y)}}}{2}$$

por lo tanto si $\operatorname{div}(X_1,X_2)\neq 0$, entonces los valores propios tienen parte real distinta de cero. Podemos observar, tambien, que si "q" es punto crítico de $\overline{X}$, el jacobiano en q es mayor que cero y $\operatorname{div}(X_1,X_2)_{(q)}=0$ (o sea, $D\overline{X}_{(q)}$ tiene valores propios imaginarios puros), entonces podemos tomar ε, tal que $|\varepsilon|$ pequeño, para que cualquier perturbación $(Y_1,Y_2)=(X_1+\varepsilon\varphi, X_2+\varepsilon\varphi)$ cumpla con
$$\left.\frac{\partial(Y_1,Y_2)}{\partial(x,y)}\right|_{(q)}>0\ ,$$
podemos modificar φ para obtener dos perturbaciones $\overline{Y}$ y $\overline{Y}^*$ tales que
$$\operatorname{div}(Y_1,Y_2)_{(q)}>0$$
$$\operatorname{div}(Y_1^*,Y_2^*)_{(q)}<0$$
pero $\overline{Y}\sim\overline{X}$ y $\overline{Y}^*\sim\overline{X}$, por lo tanto $\overline{Y}\sim\overline{Y}^*$ lo cual es una contradicción, ya que en q $\overline{Y}$ tiene una fuente y $\overline{Y}^*$ un sumidero y en todos los otros puntos críticos tienen el mismo tipo de singularidad. Por lo tanto $\overline{X}$ no tiene puntos críticos

donde $D\underline{X}$ tenga valores propios con parte real nula ∎

Sección 3. Unión de puntos silla.

Aunque nuestro objetivo en esta sección es aparentemente modesto, mostrar que un sistema estructuralmente estable no puede tener una trayectoria solución que una dos puntos silla, necesitaremos de tres lemas, uno de ellos con una demostración bastante extensa.

Lema 2.17 (Gronwall). Sea $u:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Supongamos que existen $c\geq 0$, $K\geq 0$ tales que

$$u(t)\leq c+\int_0^t K\,u(s)\,ds \qquad \text{para todo } t \text{ en } [0,\tau],$$

entonces $u(t)\leq ce^{Kt}$ para todo t en $[0,\tau]$.

Demostración: Lo demostraremos sólo para el caso $c>0$, que es el que precisamente utilisaremos despues.

Sea $U(t)=C+\int_0^t K\,u(s)\,ds$, entonces

$$(2,3) \qquad U'(t)=K\,u(t)$$

por hipótesis tenemos $u(t)\leq C+\int_0^t K\,u(s)\,ds$

de aquí que

$$u(t)\leq U(t)$$

$$Ku(t)\leq KU(t)$$

$$(2,4) \qquad K\frac{u(t)}{U(t)}\leq K$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad (2,3) por $U(t)$ obtenemos

$$\frac{U'(t)}{U(t)}=K\frac{u(t)}{U(t)}$$

y por (2,4) concluimos que $\dfrac{U'(t)}{U(t)}\leq K$

resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos

$$\ln(v(t)) - \ln(v(0)) \leq kt$$

$$\ln(v(t)) \leq \ln(v(0)) + kt$$

aplicando exponencial
$$v(t) \leq e^{\ln(v(0)) + kt}$$

$$v(t) \leq v(0)e^{kt}$$

$$v(t) \leq ce^{kt}$$

y como $u(t) \leq v(t)$, concluimos $u(t) \leq ce^{kt}$, $t \in [0, \tau]$ $\blacksquare$

<u>Lema 2.18</u> Sean $A, B \in \Sigma$, $A - B = \eta$, consideremos los siguientes sistemas en B^2

(2,5)
$$x'(t) = A(x(t)), \quad y'(t) = B(y(t))$$

donde $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ y $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$.

Entonces las trayectorias $x(t)$, solución de A, y $y(t)$, solución de B, se mantienen "cerca" para un tiempo finito si las condiciones iniciales están suficientemente cercanas y $\rho(A, B)$ es pequeña.

<u>Demostración:</u> Integrando las igualdades de (2,5) obtenemos

$$x(t) - x(0) = \int_0^t A(x(s))\,ds$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t B(y(s))\,ds$$

entonces
$$x(t) - y(t) = x(0) - y(0) + \int_0^t [A(x(s)) - B(y(s))]\,ds$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)| + \int_0^t |A(x(s)) - B(y(s))|\,ds$$

como $A - B = \eta$, $-B = \eta - A$, tenemos

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)| + \int_0^t |A(x(s)) - A(y(s)) + \eta(y(s))|\,ds$$

$$= |x(0) - y(0)| + \int_0^t |A(x(s)) - A(y(s))| + |\eta(y(s))|\,ds$$

como $\Delta \in C^1$, tenemos que Δ es Lipchitz, entonces

$$|x(t)-y(t)| \leq |x_0-y_0| + \int_0^t |\eta(y(s))|\,ds + \int_0^t k\,|x(s)-y(s)|\,ds$$

donde $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$. Si tomamos t solamente del intervalo $[0,\tau]$ obtenemos

$$|x(t)-y(t)| \leq |x_0-y_0| + |\eta(y(s_0))|\,\tau + \int_0^t k\,|x(s)-y(s)|\,ds$$

donde $s_0 \in [0,\tau)$ tal que $|\eta(y(s_0))| = \max\{|\eta(y(s))|,\ s \in [0,\tau]\}$.

Por el lema se tiene

$$|x(t)-y(t)| \leq \left[|x_0-y_0| + \delta\tau\right] e^{k\tau} \qquad \text{para todo } t \in [0,\tau]$$

donde $\delta = |\eta(y(s_0))|$.

Esto quiere decir que para todo t en $[0,\tau]$ la distancia entre las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ es pequeña si, $|x_0-y_0|$, las condiciones iniciales estan cercanas y si los campos estan cercanos (δ pequeña). A ésto le llamaremos continuidad con respecto a las condiciones iniciales y con respecto a variaciones pequeñas del campo ∎

Lema 2.19 Si $\underline{X}$ es estructuralmente estable entonces ninguna trayectoria solución va de un punto silla a otro punto silla.

Demostración: Iniciamos haciendo las siguientes observaciones:

Si ε $(0<\varepsilon<\pi)$ es suficientemente pequeño y λ, $0<\lambda\leq 1$, entonces el sistema $\underline{Y}_\lambda$ dado por:

$$Y_{1\lambda} = X_1 \cos(\lambda\varepsilon) - X_2 \operatorname{sen}(\lambda\varepsilon)$$

$$Y_{2\lambda} = X_1 \operatorname{sen}(\lambda\varepsilon) + X_2 \cos(\lambda\varepsilon)$$

es una perturbación permitida de $\underline{X}$. Para convencernos observemos que

$$|X_1 - Y_{1\lambda}| = |X_1(1-\cos(\lambda\varepsilon)) + X_2 \operatorname{sen}(\lambda\varepsilon)|$$

$$\left|\frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_{1\lambda}}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial X_1}{\partial x}(\cos(\lambda\varepsilon)-1) + \frac{\partial X_2}{\partial x}\operatorname{sen}(\lambda\varepsilon)\right|$$

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial y} - \frac{\partial y_{1\lambda}}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial y}(1-\cos(\lambda\varepsilon)) + \frac{\partial x_2}{\partial y}(\operatorname{sen}(\lambda\varepsilon))\right|$$

y por lo tanto $|X_1 - Y_{1\lambda}|$, $|X_2 - Y_{2\lambda}|$, $\left|\frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_{1\lambda}}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_{1\lambda}}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_{2\lambda}}{\partial x}\right|$ y $\left|\frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_{2\lambda}}{\partial y}\right|$ pueden ser menor que una $\delta > 0$ dada, si ε es suficientemente pequeña.

Observemos tambien que

$$\begin{bmatrix} Y_{1\lambda} \\ Y_{2\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\lambda\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\lambda\varepsilon) & \cos(\lambda\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

esto quiere decir que el vector $\overline{Y}_\lambda$ es el resultado de rotar el vector $\overline{X}$, un ángulo $\lambda\varepsilon$ en sentido positivo, en todo punto. De aquí concluimos que:

i) $\overline{X}$ y $\overline{Y}_\lambda$ tienen los mismos puntos críticos

ii) todo arco de trayectoria de $\overline{Y}_\lambda$ es un arco sin contacto para todo campo $\overline{Y}_\mu$ si $\lambda \neq \mu$

iii) considerando el índice de cada singularidad, el conjunto de puntos silla de $\overline{X}$ coincide con el conjunto de puntos silla de $\overline{Y}_\lambda$, $\lambda \in (0,1]$

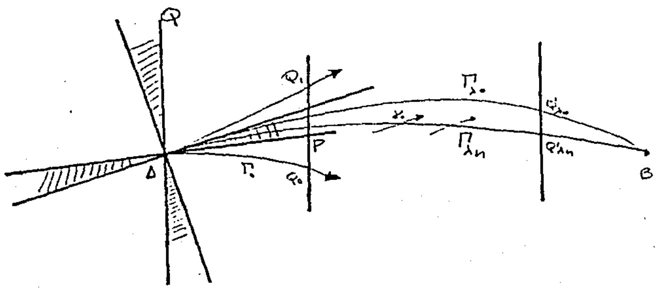
Por otro lado, sabemos que si $p \in B^2$ es punto silla de $\overline{X}$ entonces las trayectorias que tienden a p cuando $t \to \infty$ ó $t \to -\infty$ (llamadas tambien separatrices) tienen tangentes en p, que sólo dependen de la parte lineal de $\overline{X}$ [Cod.].

La parte lineal de $\overline{Y}_\lambda$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Y_{1\lambda}}{\partial x} & \frac{\partial Y_{1\lambda}}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_{2\lambda}}{\partial x} & \frac{\partial Y_{2\lambda}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\lambda\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\lambda\varepsilon) & \cos(\lambda\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix},$$

por lo tanto las tangentes de las separatrices para el sistema $\overline{Y}_\lambda$ son obtenidas de las tangentes a la separatrices de $\overline{X}$ mediante una rotación, entonces para ε pequeño las tangentes de $\overline{Y}_\lambda$ estan tan cerca como queramos de las tangentes a las separatrices de $\overline{X}$, recordemos que el ángulo de rotación decrece cuando λ se acerca al cero.

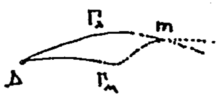
Si tenemos Δ y B dos puntos silla de $\overline{X}$, sean $\overline{\Delta P}$ y $\overline{\Delta Q}$ las tangentes de las separatrices que tienden a Δ. Todas las separatrices de $\overline{Y}_\lambda$ que tienden a Δ lo hacen con una tangente en alguno de los cuatro sectores sombreados.



Llamemos Γ_0 la separatriz de $\overline{X}$ y Γ_λ de de $\overline{Y}_\lambda$. Sea p tan cerca de Δ y ε suficientemente pequeño para que la perpendicular $\overline{Q_0P}$ (a $\overline{\Delta P}$) intersecte todas las separatrices desde Γ_0 hasta Γ_1 en Q_0 hasta Q_1, y tal que $\overline{Q_0Q_1}$ sea un arco sin contacto con $\overline{Y}_\lambda$, $\lambda \in (0,1]$.

Podemos suponer, además, que no hay puntos críticos en el interior de $Q_1\Delta Q_0$, al que llamaremos sector S.

Tenemos que Γ_λ intersecta $\overline{Q_0Q_1}$ en el punto Q_λ de tal forma que si $\mu < \lambda$, el arco $\widehat{\Delta Q_\mu}$ solución de $\overline{Y}_\mu$ está entre los arcos $\widehat{\Delta Q_0}$ y $\widehat{\Delta Q_\lambda}$ y estos tres arcos sólo se intersectan en Δ. Esta afirmación es en S y para mostrar su validez observemos que si $\mu < \lambda$, entonces en una vecindad de Δ, Γ_μ está "abajo" de Γ_λ, ahora, si Γ_λ y Γ_μ se intersectan en m, donde m no es punto singular, tendría mos que $Y_\lambda(m)$ sería paralelo a $Y_\mu(m)$, ó Y_μ se obtendría de $\overline{X}(m)$ mediante una rotación de un ángulo mayor que λ, lo cual es una contradicción ya que $\mu < \lambda$.



Supongamos que en los tres sectores restantes hemos construido un triángulo curvilíneo análogo a $Q_1 \Delta Q_0$.

Con estas bases podemos iniciar realmente la demostración del lema . Recuérdese que se trata de mostrar que si $\overline{X}$ es estructuralmente estable, entonces ninguna trayectoria solución de $\overline{X}$ une dos puntos silla.

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos puntos silla, C y D, que estan unidos por una trayectoria solución del campo $\overline{X}$.

Caso 1. Supongamos que $C \neq D$. Llamamos T_λ al homeomorfismo de equivalencia entre $\overline{X}$ y $\overline{Y}_\lambda$. Si γ, trayectoria solución, une las sillas C y D, entonces $T_\lambda(\gamma)$ es una trayectoria de $\overline{Y}_\lambda$ que une las sillas C_λ y D_λ. Como el número de puntos silla es finito se sigue que existen Δ y B puntos silla y un conjunto no numerable $J \subset (0,1]$ tal que

si $\lambda \in J$, entonces $T_\lambda(\gamma)$ es una trayectoria que une a Δ con B.

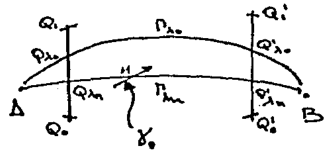
Llamemos $T_\lambda(\gamma) = \Gamma_\lambda'$. Podemos suponer que cuando t es creciente Γ_λ' sale de un sector S de Δ y se acerca a un sector S' de B.

Como J es no numerable podemos encontrar una sucesión monótona

$$\{\lambda_i\} \subset J \quad \text{convergente a } \lambda_0 \in J.$$

Llamaremos $\overline{Q_0'Q_1'}$ el análogo de $\overline{Q_0Q_1}$ para el sector S'. Sean Q_{λ_0}

y Q'_{λ_0} los puntos en los cuales Γ_{λ_0} intersecta $\overline{Q_0Q_1}$ y $\overline{Q'_0Q'_1}$ respectivamente. Observemos que es necesario un tiempo finito para ir de Q_{λ_0} a Q'_{λ} a través de Γ_{λ_0}.



De la continuidad de las soluciones con respecto a condición inicial y perturbaciones pequeñas del campo, se sigue que podemos encontrar n suficientemente grande para que el arco $\widehat{Q_{\lambda_n} Q'_{\lambda_n}}$ de Γ_{λ_n} se mantenga cerca del arco $\widehat{Q_{\lambda} Q'_{\lambda_0}}$ de Γ_{λ_0}, además podemos lograr que no haya algún punto crítico en la región contenida en:

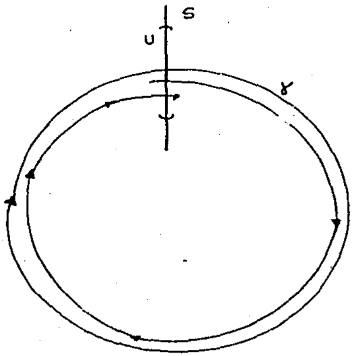
$$\overline{Q_{\lambda_n} Q_{\lambda_0}} \cup \widehat{Q_{\lambda_0} Q'_{\lambda_0}} \cup \overline{Q'_{\lambda_0} Q'_{\lambda_n}} \cup \widehat{Q'_{\lambda_n} Q_{\lambda_n}},$$

por lo tanto no existe punto crítico alguno entre Γ_{λ_0} y Γ_{λ_n} excepto Δ y B.

Consideremos una trayectoria γ_0, solución de $\overline{Y}_{\lambda}$ que en el punto $M \in \Gamma_{\lambda_n}$ entra en la región acotada por $\Gamma_{\lambda_0} \cup \Gamma_{\lambda_n} \cup \Delta \cup B = \Gamma$.

Si Γ_{λ_0} y Γ_{λ_n} no se intersectan, entonces Γ es una curva de Jordan. Como $\overline{Y}_{\lambda_0}$ es sin contacto con Γ_{λ_n} se tiene que γ_0 no sale por Γ_{λ_n}; tampoco por Γ_{λ_0} por unicidad de soluciones. Esta información junto con el teorema de Poincaré Bendixson nos hacen concluir que γ_0 tiende a Δ ó a B.

Haciendo la misma construcción para todo M en Γ_{λ_0} concluiríamos que existen una cantidad infinita de trayectorias de $\overline{Y}_{\lambda_0}$ que tienden a Δ (ó B), lo que es una contradicción ya que por el Teorema de Hartman Grobman el punto silla Δ (ó B) es localmente equivalente a un punto silla lineal y por lo tanto sólo existen



Si x está suficientemente cercano a $\bar{o}$, entonces, por el lema 2.18, hay un tiempo $t(x)$ cercano a λ para el cual

$$\varphi_{t(x)}(x) \in S.$$

Portanto, podemos definir una función

$$T : U \longrightarrow S$$

dada por

$$T(x) = \varphi_{t(x)}(x) \quad , \quad x \in U$$

donde U es subconjunto de S, U abierto en $\mathcal{H}$ que contiene a $\bar{o}$. Llamaremos a esta función transformación de Poincare. Sabemos por [Hir.] que T es de clase C^1.

<u>Lema 2.20</u> Si $\bar{X}$ es estructuralmente estable, entonces sólo tiene una cantidad finita de órbitas cerradas.

<u>Demostración</u> Como $\bar{X} \in C^1$ tenemos que existe un campo polinomial P, $P = (P_1, P_2) \in \Sigma$ tal que P es una perturbación permitida de $\bar{X}$ (Weierstrass). Por tanto existe un campo $\bar{Y} = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$ donde $\bar{Y}_1$ y $\bar{Y}_2$ son funciones analíticas, y $\bar{Y} \in \Sigma$ es una perturbación permitida de $\bar{X}$.

Como $\bar{Y}$ y $\bar{X}$ son topologicamente equivalentes, algunas de las características del comportamiento topológico de las trayectorias cerradas de $\bar{Y}$ son las mismas para trayectorias cerradas de $\bar{X}$. Por este motivo nuestra demostración seguirá los siguientes pasos:

Paso 1.- Mostraremos que en los sistemas analíticos que tienen órbitas cerradas, éstas son aisladas o forman una banda abierta.

Paso 2.- Mostraremos que los sistemas analíticos estructuralmente estables no pueden tener un conjunto de órbitas cerradas que forme una banda abierta.

Paso 3.- Mostraremos que los campos estructuralmente estables (analíticos o C') no pueden tener una cantidad infinita de órbitas cerradas.

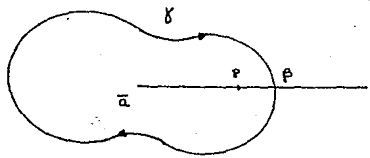
Paso 1.- Sea $\overline{Y} \in \Sigma$, analítico. Sea γ una órbita cerrada solución de $\overline{Y}$, supongamos que γ no es aislada, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $p \in B^2$ tal que $d(p, \gamma) < \varepsilon$ y la trayectoria solución de $\overline{Y}$ por p es cerrada. Por lo tanto si tomo q en γ, y una normal η a γ en q, consideramos la transformación de Poincaré $h : \eta \to \eta$. Sabemos que si $\overline{Y}$ es analítica, h es una función analítica en una vecindad de q. Consideremos la función $f : \eta \to \eta$ definida por:

$$f(x) = h(x) - x$$

f es analítica también, $f(q) = 0$ y como γ no es aislada se tiene que los puntos donde $f(x) = 0$ tienen una subsucesión que converge a q, por tanto f se anula en una sucesión de puntos de su dominio y esta sucesión converge a q, donde q está en el dominio de f, por tanto $f \equiv 0$ en una vecindad de q y γ está en una banda de trayectorias cerradas. Por el mismo argumento podemos concluir que esta banda es abierta.

Paso 2.- Ahora si $\overline{Y}$ además de analítico es estructuralmente estable mostraremos que sus soluciones cerradas no pueden formar una banda abierta Γ.

Supongamos que existe la banda Γ, sea γ trayectoria cerrada, $\gamma \in \Gamma$. Sabemos que en la región encerrada por γ existe al menos un punto crítico de $\overline{Y}$, sea $\bar{a}$ ese punto crítico. Por el teorema de Hartman Grobman existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\bar{a})$ está encerrada por γ y por todo punto de $B_\delta(\bar{a})$ no pasa una órbita cerrada.



Sea β en γ tal que $\overline{\bar{a}\beta}$ este en el interior de γ. Como Γ es abierta, tenemos que el conjunto $\overline{\bar{a}\beta} - (\overline{\bar{a}\beta} \cap \Gamma)$ es cerrado en $\overline{\bar{a}\beta}$. Sea p el punto de $\overline{\bar{a}\beta}$ mas cercano a β. Llamemos $\varphi_t(p)$ a la trayectoria solución de $\overline{Y}$ que pasa por p (observese que podemos suponer que p no es punto crítico). Por la forma en que encontramos p, tenemos que $\varphi_t(p)$ no es cerrada. Por el teorema de Poincare - Bendixon tenemos que a la semitrayectoria positiva

$$\varphi_t^+ = \{ \varphi_t(p) \mid t \geq 0 \}$$

le sucede alguna de las siguientes posibilidades:

i) tiende a un punto crítico.

ii) tiende a un ciclo límite (órbita cerrada)

iii) tiende a una gráfica compuesta por puntos críticos y trayectorias que los unen.

Los casos ii) y iii) no pueden suceder, ya que por continuidad de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales tendriamos que trayectorias que pasan en una vecindad de P tenderian al mismo ω-conjunto límite, lo cual no es cierto ya que en cualquier vecindad de p siempre encontramos órbitas cerradas.

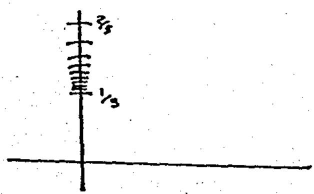
Por el mismo argumento φ_t^+ no tiende a un sumidero. Por lo tanto esta semitrayectoria tiende a un punto silla. Pero el mismo razonamiento se puede seguir para la semiórbita negativa φ_t^-, y por tanto tendriamos una trayectoria, φ_t, que une dos puntos silla. Esto último no es posible ya que $\underline{Y}$ es estructuralmente estable.

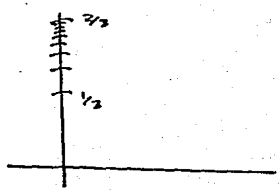
Por lo tanto las orbitas cerradas no pueden formar una banda abierta.

Paso 3.- Tenemos ya que todas las trayectorias cerradas son aisladas (y por lo tanto ciclos límite), sin embargo no es suficiente para afirmar que sólo son una cantidad finita. Consideremos como ejemplos a los conjuntos:

$A = \{$ circulos con centro en $\bar{0}$ y radio $r = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \}$

$B = \{$ circulos con centro en $\bar{0}$ y radio $r = \frac{2}{3} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \}$





Ambos son subconjuntos de B^2 con una cantidad numerable de órbitas cerradas, y sin embargo cada una de ellas aislada.

Mostraremos, ahora, que si Y es analítico o de clase C^1 y estructuralmente estable, entonces sólo tiene una cantidad finita de órbitas cerradas.

Supongamos que Y tiene una cantidad infinita de órbitas cerradas y aisladas. Como cada una de ellas debe contener en su interior al menos un punto crítico y sólo hay una cantidad finita de ellos, tenemos que existe una cantidad infinita de órbitas cerradas que contienen en su interior el mismo conjunto de puntos críticos $a_1, a_2, \dots a_s$. Sea $\Gamma = \{$ órbitas cerradas que contienen sólo a: $a_1, \dots a_s \}$.

Sean γ y γ^* en Γ y $d(\gamma, \gamma^*) = \min \{ d(p,q) \mid p \in \gamma, q \in \gamma^* \}$.

Dado que $\Gamma \subset B^2$ y Γ contiene una cantidad infinita de órbitas cerradas, tenemos ínfimo $\{ d(\gamma, \gamma^*) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma^* \in \Gamma \} = 0$. Por lo tanto existe una sucesión de órbitas cerradas $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{\lambda \to \infty} d(\gamma_\lambda, \gamma_{\lambda+1}) = 0$.

Observemos que esta sucesión tiene una subsucesión que es homeomorfa al conjunto A, o al conjunto B, que definimos antes. Sea $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esa subsucesión homeomorfa a A (el caso para B es similar). Sea C_n igual a γ_n unión su interior, por tanto C_n es compacto. Observemos que $C_m \subseteq C_n$ si $m \geq n$ y que la intersección finita es distinta del vacío

$$\bigcap_{i \in J} C_i \neq \phi \qquad J \text{ conjunto finito de índices.}$$

Por tanto

$$\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 3}} C_n \neq \phi$$

Llamemos C a $\bigcap\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 3}} C_n$, C contiene a los puntos críticos $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Sea $M \in \partial C$, podemos suponer $\overline{Y}(M) \neq \overline{0}$, consideremos un segmento transversal a $\overline{Y}$ en M, η_1 y consideremos la trayectoria solución de $\overline{Y}$ que pasa por M, $\varphi_t(M)$.

Fijemonos en la semitrayectoria $\varphi_t^+(M)$. Por el mismo argumento utilizado antes (paso 2) $\varphi_t^+(M)$ no puede tender a un sumidero, a unciclo límite, a una gráfica. La semiórbita $\varphi_t^-(M)$ tampoco le sucede lo anterior, ni sale de B^2 cuando t tiende a menos infinito. Tampoco $\varphi_t(M)$ puede unir puntos silla, por lo tanto $\varphi_t(M)$ es una orbita cerrada, pero ésto es una contradicción puesto que sería una trayectoria cerrada no aislada.

Por lo tanto $\overline{Y}$ sólo tiene una cantidad finita de órbitas cerradas ■

Mencionamos al inicio de esta sección la integral

$$\int_{\gamma} \operatorname{div} \overline{X}\,(\gamma(s))\,ds$$

donde γ es una órbita cerrada de $\overline{X}$, y $\operatorname{div}\overline{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}$ X_1 y X_2 son las componentes del campo $\overline{X}$. Discutiremos ahora su significado.

Consideremos la ecuación diferencial

$(1) \ldots \quad \overline{y}' = A(t)\,\overline{y}$ donde $\overline{y} \in \mathbb{R}^2$, $A(t)$ es una matriz de 2×2 para todo t en $\mathbb{R}$. Si tenemos dos soluciones a 1:

$$\overline{y}_1' = A(t)\,\overline{y}_1 \qquad \overline{y}_2' = A(t)\,\overline{y}_2$$

Podemos formar la ecuación

$$[\overline{y}_1' \; \overline{y}_2'] = A(t)\,[\overline{y}_1, \overline{y}_2]$$

es decir $\overline{Y}' = A(t)\,\overline{Y}$ donde $\overline{Y}$ es una matriz de 2×2 para todo t en $\mathbb{R}$ y $\overline{Y}$ tiene como primera columna a $\overline{y}_1$ y como segunda a $\overline{y}_2$.

El rango de $\overline{Y}(t)$ no depende de t, es decir, si $\overline{y}_1(t)$ y $\overline{y}_2(t)$ son soluciones de 1, entonces los vectores $\overline{y}_1(t_0)$ y $\overline{y}_2(t_0)$ son linealmente independientes si y solo si $\overline{y}_1(t)$ y $\overline{y}_2(t)$ son linealmente independientes para todo t en $\mathbb{R}$. Esto es parte del contenido del siguiente teorema.

<u>Teorema 2.21 (Liouville)</u>. Sea $\overline{Y}=\overline{Y}(t)$ una matriz de 2×2 para toda t en $\mathbb{R}$, solución de $\overline{Y}'=A(t)\overline{Y}$, donde $A(t)$ es una matriz de 2×2 para todo t en $\mathbb{R}$ con entradas continuas con respecto a t, entonces

$$\det \overline{Y}(t) = \det \overline{Y}(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{traza} A(s)\, ds\right]$$

donde $\det \overline{Y}(t)$ es el determinante de la matriz $\overline{Y}(t)$. [Har.].

<u>Demostración</u> Sea
$$A(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}$$

El determinante de $\overline{Y}(t)$ es: $\begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{vmatrix} = y_{11}(t)y_{22}(t) - y_{21}(t)y_{12}(t)$

si derivamos obtenemos: $$\frac{d}{dt}\left(\det \overline{Y}(t)\right) = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}$$

Por la ecuación 1 tenemos $$\begin{bmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

de donde $$y_{11}' = a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} \qquad y_{12}' = a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22}$$

Por lo tanto
$$\frac{d}{dt}\left(\det \overline{Y}(t)\right) = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}y_{21} & a_{12}y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}$$

de donde $\frac{d}{dt}\left(\det \overline{Y}(t)\right) = a_{11}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}$

Haciendo el mismo procedimiento con el otro sumando obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\det(\overline{Y}(t))\right) = a_{11}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}$$

$$= (\text{traza de } A)\det \overline{Y}(t)$$

Es decir, $\det \overline{Y}(t)$ cumple la ecuación diferencial:

$$\varphi' = T\varphi$$

cuya solución es: $\varphi(t) = \varphi(t_0)\exp\int_{t_0}^{t} T(s)\,ds$.

Por tanto

$$\det \overline{Y}(t) = \det \overline{Y}(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\text{traza } A(s)\,ds$$

■

<u>teorema 2.22</u> Sean $D\subset\mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $\overline{X}=(\overline{X}_1,\overline{X}_2)$ un campo vectorial definido en D de clase C^1, γ una órbita cerrada solución de $\overline{X}$ de periodo λ y $T: S_0 \to S$ la transformación de Poincaré en una sección transversal S en p, $p\in\gamma$. Entonces

$$T'(p) = \exp\int_0^{\lambda}\operatorname{div}\overline{X}(\gamma(t))\,dt.$$

<u>Demostración</u> Para todo t en $\mathbb{R}$ definimos $A(t) = D\overline{X}_{(\gamma(t))}$, diferencial de $\overline{X}$ en el punto $\gamma(t)$. Es decir

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x} & \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \overline{X}_2}{\partial x} & \frac{\partial \overline{X}_2}{\partial y}\end{bmatrix}_{\gamma(t)}.$$

Sea $\phi(t)$ una matriz solución de $\overline{Y}' = A(t)\overline{Y}$ .....(1) con condición inicial

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = E$$

Por el teorema anterior, (2.21), se tiene

$$\det \phi(\lambda) = \det \phi(0) \exp \int_0^\lambda \frac{\partial X_1}{\partial x}\Big|_{\gamma(s)} + \frac{\partial X_2}{\partial y}\Big|_{\gamma(s)} ds$$

es decir $$\det \phi(\lambda) = \exp \int_0^\lambda \operatorname{div} \overline{X}(\gamma(s))\, ds \quad \ldots\ldots (2)$$

Sabemos por [Hir.] que la matriz $\phi(\lambda)$ está dada por

$$\phi(\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda, p)$$ donde $\varphi(t,p)$ es el flujo asociado a $\overline{X}$.

Mostraremos, ahora, que $T'(p) = \det \phi(\lambda)$.

Como $\frac{d}{dt}(\varphi(t,p))\Big|_{t=0} = \overline{X}(p)$ tenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)(\overline{X}(p)) = \frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)\left(\frac{d}{dt}\varphi(t,p)\Big|_{t=0}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\varphi(\lambda, \varphi(t,p))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\varphi(\lambda+t, p)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\varphi(t,p)\Big|_{t=0}$$

$$= \overline{X}(p)$$

Por lo tanto $$\frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)(\overline{X}(p)) = \overline{X}(p) \quad \ldots\ldots (3)$$

Ahora, sea $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ una parametrización de S tal que $g(0) = p$.

Tenemos: $$T(g(s)) = \varphi(\lambda + \tau(\varphi(\lambda, g(s))), g(s))$$

donde $\tau(\overline{q})$ es el tiempo que le falta a $\overline{q}$ para llegar a S.

Derivando con respecto a s y evaluando en $s=0$, obtenemos

$$T'(p)g'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,p)\frac{d}{ds}\tau(\varphi(\lambda, g(s)))\Big|_{s=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)(g'(0)).$$

$$= \overline{X}(p)\frac{d}{ds}\tau(\varphi(\lambda, g(s)))\Big|_{s=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)(g'(0)).$$

Por lo tanto $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)\,(g'(0)) = T'(p)\,g'(0) - \overline{X}(p)\,\frac{d}{ds}\,\tau(\varphi(\lambda, g(s)))\big|_{s=0}$

Observemos que el conjunto $\{\overline{X}(p), g'(0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

La última igualdad que obtuvimos junto con (3) nos dan una expresión de la matriz $\frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p)$ en esta base :
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{d}{ds}\,\tau(\varphi(\lambda, g(s)))\big|_{s=0} \\ 0 & T'(p) \end{bmatrix}$$

y como $\frac{\partial \varphi}{\partial(x,y)}(\lambda,p) = \phi(\lambda)$ concluimos que
$$\det \phi(\lambda) = T'(p)$$

y por tanto por (2) tenemos $\quad T'(p) = \exp \int_0^\lambda \operatorname{div} \overline{X}\,(\gamma(s))\,ds$ ∎

<u>Definición 2.23</u>. Sea γ una órbita cerrada de $\overline{X}$, $p \in \gamma$. Sea T la transformación de Poincaré por p. Decimos que γ es hiperbólica si $\quad T'(p) \neq 1$

Es decir, si $\int_0^\lambda \operatorname{div} \overline{X}\,(\gamma(s))\,ds \neq 0$.

<u>Definición 2.24</u> Sea p un punto crítico (o singular) de $\overline{X}$, decimos que p es hiperbólico si
$$D\overline{X}_{(p)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{es un campo hiperbólico.}$$

Sabemos por [Hir.] que si $T'(p)$ es menor que uno, esto es, $\int_0^\lambda \operatorname{div} \overline{X}\,(\gamma(s))\,ds$ es menor que cero, entonces γ es una órbita cerrada atractora, y si $T'(p)$ es mayor que uno, $\int_0^\lambda \operatorname{div} \overline{X}(\gamma(s))\,ds > 0$, entonces γ es repulsora.

Consideremos, ahora, un campo $\overline{X}$ y una órbita cerrada γ solución de él. Dado que para todo punto p en γ se tiene que $\overline{X}(p) \neq 0$ (γ es una curva suave de clase C^2), tenemos que para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño existe una vecindad tubular N de γ, [Brö.].

N es construida de tal forma que $N \subset B^2$ y para todo punto p en γ, el segmento normal a $\overline{\gamma}(p)$, de longitud 2ε y centrado en p está contenido en la vecindad N. Además si p y q estan en γ y $p \neq q$, entonces sus respectivos segmentos normales no se intersectan.

Ahora definimos una función $f: B^2 \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{si } (x,y) \in N \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) \in \text{Interior de } \gamma - N \\ -\frac{1}{2} & \text{si } (x,y) \in \text{Exterior de } \gamma - N \end{cases}$$

Donde interior de γ es el subconjunto de B^2 encerrado por γ, exterior de γ es el complemento, en B^2, del interior de γ unión γ, y $g(x,y)$ está dada por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(\frac{-1}{(t+\varepsilon)^2}\right)}{\exp\left(\frac{-1}{(t+\varepsilon)^2}\right) + \exp\left(\frac{-1}{(\varepsilon-t)^2}\right)} - \dfrac{1}{2} & \text{si } -\varepsilon < t < \varepsilon \\ -\frac{1}{2} & \text{si } t = -\varepsilon \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \varepsilon \end{cases}$$

Donde t está dado por la siguiente regla: si (x,y) está en la normal correspondiente a p, nos fijamos en la longitud del segmento $\overline{(x,y),p}$, t será esta distancia con signo positivo si (x,y) está en el interior de γ y con signo negativo si (x,y) está en el exterior de γ.

Nuestra función f tiene las siguientes características: f es diferenciable, al menos de clase C^2, f se anula solamente en γ y para todo punto p en γ se tiene que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(p)} \neq (0,0)$ ya que la derivada direccional (en p) en dirección de la normal es:

$$\frac{\exp\left(\frac{-2}{\varepsilon^2}\right)}{\exp\left(\frac{-2}{\varepsilon^4}\right)\varepsilon^3} \neq 0$$

Siguiendo una construcción similar podemos obtener, dada una órbita cerrada Γ de X, una función $F: B^2 \to \mathbb{R}$ tal que F se anula sólo en Γ y Gradiente de F en γ es igual a $(0,0)$.

<u>Lema 2.25</u> Si X es estructuralmente estable y γ es una solucion, orbita, cerrada, entonces

$$h(\gamma) = \int_\gamma \operatorname{div}(X)(\gamma)\, d\gamma \neq 0.$$

<u>Demostración</u>

Sean $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ las òrbitas cerradas de X. Supongamos que $h(\gamma_1) = 0$. Consideremos una función f_1 tal que f_1 sólo se anula en γ_1 y para todo punto p en γ_1 se tiene que gradiente de f_1 en p es distinto de $(0,0)$. Sean $f_2, \ldots f_p$ funciones de B^2 en $\mathbb{R}$ tales que f_i sólo se anula en γ_i para $i = 2, 3, \ldots, p$ y Gradiente de f_i es igual a $(0,0)$ en todo punto de γ_i.

Consideremos el siguiente campo: $Y = (Y_1, Y_2)$ donde

$$Y_1(x,y) = X_1(x,y) + \varepsilon a\, f_1(x,y) f_2(x,y) \cdots f_p(x,y) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$$

$$Y_2(x,y) = X_2(x,y) + \varepsilon a\, f_1(x,y) f_2(x,y) \cdots f_p(x,y) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

Donde $\varepsilon > 0$, $|a| < 1$ constantes. Observemos que si ε es suficientemente pequeño, entonces Y es un campo cercano a X. Observamos tambien que $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ son órbitas cerradas tambien de Y.

Calculemos, ahora, la divergencia de $\overline{Y}$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \varepsilon a \frac{\partial f_1}{\partial x}\left[f_2 \cdot f_3 \cdots f_p \frac{\partial f_1}{\partial x}\right] + \varepsilon a\, f_1 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f_2 \cdots f_p \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial y} + \varepsilon a \frac{\partial f_1}{\partial y}\left[f_2 \cdots f_p \frac{\partial f_1}{\partial y}\right] + \varepsilon a\, f_1 \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f_2 \cdots f_p \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right]$$

Observemos que $\operatorname{div} \overline{Y}$ y $\operatorname{div} \overline{X}$ son iguales para todo punto p en γ_i, $i = 2, 3, \ldots, p$, y por tanto $h(\gamma_i) = h_Y(\gamma_i)$ $i = 2, \ldots, p$.

Como f_1 se anula en γ_1 tenemos

$$\int_{\gamma_1} \operatorname{div} \overline{Y}(\gamma_1(s))\, ds = \int_{\gamma_1} \operatorname{div} \overline{X}(\gamma_1(s))\, ds + \varepsilon a \int_{\gamma_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right]_{\gamma(s)} f_2 \cdot f_3 \cdots f_p\, ds$$

Como supusimos que $h(\gamma_1) = 0$, tenemos

$$h_Y(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} \operatorname{div} \overline{Y}(\gamma(s))\, ds = \varepsilon a \int_{\gamma_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right]_{\gamma(s)} f_2 \cdots f_p\, ds$$

por tanto $h_Y(\gamma_1) \neq 0$

Además, tomando "a" menor que cero ó "a" mayor que cero $h_Y(\gamma_1)$ toma un signo o el otro.

En resumen, tenemos una perturbación $\overline{Y}$ de $\overline{X}$ tal que tienen las mismas órbitas cerradas $\gamma_1, \ldots \gamma_p$, $h(\gamma_i) = h_Y(\gamma_i)$ para $i = 2, \ldots p$. Pero tomando $a < 0$ ó $a > 0$ obtenemos distintos signos para $h_Y(\gamma_1)$. Sabemos que si $h_Y(\gamma_1) > 0$ entonces γ_1 es un α-conjunto límite y si $h_Y(\gamma_1) < 0$, entonces γ_1 es un ω-conjunto límite. Es decir podemos obtener dos campos $\overline{Y}_1$ y $\overline{Y}_2$ cercanos a $\overline{X}$ tanto como queramos tales que $\overline{Y}_1 \sim \overline{X}$ y $\overline{Y}_2 \sim \overline{X}$, por tanto $\overline{Y}_1 \sim \overline{Y}_2$ y tales que en las órbitas $\gamma_2, \ldots \gamma_p$ tienen

$$h_{Y_1}(\gamma_i) = h_{Y_2}(\gamma_i) \qquad i = 2, \ldots p$$

y en γ_1 $\qquad h_{Y_1}(\gamma_1) < 0 < h_{Y_2}(\gamma_1)$

lo cual es una contradicción, ya que la equivalencia topológica transforma ω-conjuntos límite en ω-conjuntos límite.

Por lo tanto si $\overline{X}$ es estructuralmente estable y γ es una orbita cerrada de $\overline{X}$, entonces

$$h(\gamma) = \int_{\gamma} \operatorname{div} \overline{X}(r(s))\, ds \neq 0 .$$

■

Capitulo III

Mostraremos en este capitulo que si un campo $A \in \Sigma$ cumple con las siguientes condiciones:

i) A tiene sólo una cantidad finita de puntos críticos, todos ellos hiperbólicos

ii) A tiene sólo una cantidad finita de órbitas cerradas, todas ellas hiperbólicas

iii) A no tiene trayectorias solución que unan puntos silla.

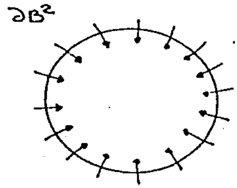
Entonces A es un campo estructuralmente estable. Es decir que para todo campo $\bar{Y}$ suficientemente cercano a A construiremos un homeomorfismo de B^2 en si mismo, tal que transforme trayectorias de A en trayectorias de $\bar{Y}$.

Denotaremos por A^* al campo (elemento de Σ) que cumpla con las condiciones i), ii), iii).

Nuestra tarea la hemos dividido en dos partes. En la primera mostraremos que si $\rho(\bar{Y}, A^*) < \delta$ (para una δ pequeña), entonces las trayectorias solución de $\bar{Y}$ son "muy parecidas" a las trayectorias solución de A^*. Observaremos que el conjunto de trayectorias de A^* induce una descomposición de B^2 en una cantidad finita de subregiones y que existe una correspondencia con las subregiones inducidas por las soluciones de $\bar{Y}$. En la segunda parte construiremos homeomorfismos en cada subregión, cuidando que sean compatibles para obtener así el homeomorfismo de B^2 en B^2 buscado.

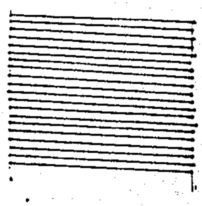
Seccion 1. Subregiones Canónicas

Llamaremos de aquí en adelante sumideros tambien a las trayectorias cerradas γ con $h(\gamma)<0$, llamaremos fuentes a las trayectorias γ tales que $h(\gamma)>0$. A la frontera de B^2 la consideramos tambien una fuente.



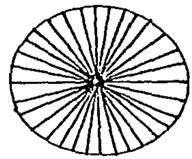
Definición 3.1 Sean $\bar{X}$ y $\tilde{\bar{X}}$ dos campos (o sistemas) definidos en las regiones R y $\tilde{R}$ respectivamente. Decimos que el conjunto φ de trayectorias de $\bar{X}$ es equivalente al conjunto $\tilde{\varphi}$ de trayectorias de $\tilde{\bar{X}}$ si existe un homeomorfismo de R en $\tilde{R}$ que transforme φ en $\tilde{\varphi}$.

Definición 3.2. Decimos que una subregión R de B^2 es una región paralela relativa al campo $\bar{X}$ si y sólo si el conjunto de trayectorias de $\bar{X}$ en R es equivalente a uno de los siguientes conjuntos:



a) El conjunto de segmentos de línea horizontales contenidos en una banda (abierta, semiabierta o cerrada) limitada por dos líneas paralelas.

b) El conjunto de todos los radios en un disco (abierto o cerrado) donde el centro está excluido.



Definición 3.3 Una trayectoria de un sistema $X \in \Sigma$ es ordinaria cuando pertenece a una región paralela. A una trayectoria no ordinaria la llamaremos trayectoria singular o separatriz.

Obsérvese que con esta definición ampliamos nuestro concepto de separatriz, ya que para un sistema $\overline{X} \in \Sigma$, el conjunto de sus separatrices será:

a) Puntos críticos

b) Trayectorias cerradas o ciclos límite.

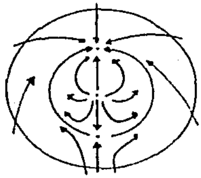
c) trayectorias que tienden a un punto silla (ya sea cuando t tiende a infinito o cuando t tiende a menos infinito).

Si el campo con el que estamos trabajando cumple con las condiciones i), ii), iii), o sea es A^*. Entonces el conjunto de separatrices es finito y, visto como subconjunto de B^2, es cerrado. Llamemos V a este conjunto.

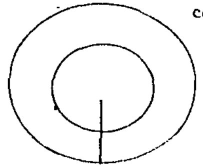
Definición 3.4 Una región canónica de A^* es una componente conexa de $B^2 - V$.

Obsérvese que ya que V es un conjunto finito de trayectorias de A^*, entonces la cantidad de componentes de $B^2 - V$ es finita.

Ejemplo 3.5



$B^2 - V$ (dos regiones canónicas).



Teorema 3.6 Cada región canónica de A^* tiene exactamente una fuente y un sumidero en su frontera.

Demostración Desarrollaremos la afirmación para sumideros, para fuentes es analoga. Observemos que en la frontera de una región existe al menos un sumidero. Supongamos que M_1 y M_2 $(M_1 \neq M_2)$ son dos sumideros en la frontera de la región C. Dado que C es conexa, existe una curva rectificable que une M_1 y M_2 totalmente contenida en C.

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow B^2 \qquad \gamma(0) = M_1 \,,\ \gamma(1) = M_2$$

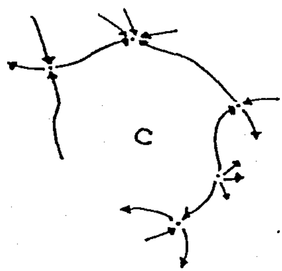
Dado que M_1 es sumidero, existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $p \in C$, $\gamma(s) = p$, $s < \delta$, se tiene que la trayectoria que pasa por p, $\varphi_t(p)$, converge a M_1 cuando t tiende a infinito.

Observemos que el conjunto de puntos de γ tales que convergen a M_1 cuando t tiende a infinito forman un conjunto abierto en γ (por continuidad con respecto a condiciones iniciales. La misma afirmación se puede hacer para M_2. Tenemos que

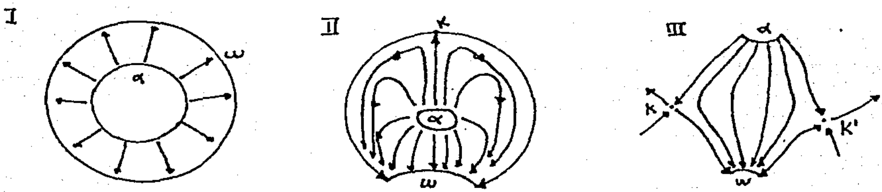
$$\gamma = D_1 \cup D_2$$

donde D_i es el abierto, en γ, correspondiente a M_i, $i = 1,2$, Además $D_1 \cap D_2 = \phi$, pero ésto es una contradicción ya que γ es conexa. Por lo tanto en la frontera de C sólo hay un sumidero ∎

Para encontrar todos los tipos posibles de regiones canónicas en B^2 observemos que si C es una de estas regiones, entonces su frontera contiene a lo más dos puntos silla. Esta afirmación es porque en A^* no hay trayectorias que unan puntos silla, por tanto en la frontera de C en medio de cada dos puntos silla debe existir una fuente o un sumidero, como nada mas hay una fuente y un sumidero, se sigue la afirmación.



Clasificaremos, ahora, las regiones canónicas.



I.- La frontera consiste de una fuente y un sumidero.

Ejemplos: a) La región acotada por dos órbitas cerradas, sin puntos críticos en su interior.

b) Si B^2 contiene sólo un sumidero y ninguna otra trayectoria singular, entonces B^2 sólo tiene una región canónica cuya frontera es ∂B^2 unión el sumidero.

II.- La frontera consiste de una fuente, un sumidero, un punto silla (K) y tres separatrices que tienden a K. Ejemplo: α puede ser una órbita cerrada y w un sumidero.

III.- La frontera consiste de una fuente, un sumidero, dos puntos silla y cuatro separatrices que tienden a ellos.

Obsérvese que podemos intercambiar α y w, la región resultante será del mismo tipo.

<u>Lema</u> <u>3.7</u> Por cada punto singular K de A^*, existe $\delta > 0$ y un disco abierto D con centro en K tal que D contiene un punto singular $\tilde{K}$ de cada sistema $\bar{X}$ con $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta$. Además K y $\tilde{K}$ son del mismo tipo.

<u>Demostración</u> Sea K un punto crítico de A^*, entonces $\left.\frac{\partial(A_1, A_2)}{\partial(x,y)}\right|_{(K)} \neq 0$ donde $A^* = (A_1, A_2)$. Consideremos $r > 0$ suficientemente pequeño para que $\left.\frac{\partial(A_1, A_2)}{\partial(x,y)}\right|_{(p)} \neq 0$ en todo punto p en el disco D con centro en K y radio r (ésto sí es posible ya que el jacobiano depende continuamente de la posición).

Como los puntos críticos son aislados, podemos escoger r de tal forma que D sólo contenga un punto crítico, K. Esto nos asegura que el campo A^* no se anula en la frontera de D, podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeña para que se cumpla lo siguiente:

a) si $\overline{X} \in \Sigma$ es tal que $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$ entonces $\overline{X}$ no se anula en la frontera de D

b) el índice de A^* y de $\overline{X}$ en la frontera de D es el mismo.

De aquí concluimos que $\overline{X}$ tiene al menos un punto crítico en el interior de D. Dividimos, ahora, nuestro problema en dos casos:

1.- K es una fuente o sumidero.

2.- K es un punto silla.

Supongamos que K es una fuente o sumidero, entonces el jacobiano de A^* es mayor que cero en todo D. Consideremos la siguiente expresión de $\overline{X} = (\overline{X}_1, \overline{X}_2)$

$$\overline{X}_1 = A_1 + \varepsilon_1$$
$$\overline{X}_2 = A_2 + \varepsilon_2 \qquad \text{donde } \varepsilon_1 \text{ y } \varepsilon_2 \text{ son funciones de } (x,y).$$

entonces
$$\frac{\partial(\overline{X}_1, \overline{X}_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} & \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(A_1, A_2)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\left[\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}\right] - \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}\left[\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}\right]$$

por lo tanto
$$\left|\frac{\partial(\overline{X}_1, \overline{X}_2)}{\partial(x,y)} - \frac{\partial(A_1, A_2)}{\partial(x,y)}\right|$$
$$= \left|\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}\right|$$
$$< \delta\left|\frac{\partial A_1}{\partial x}\right| + \delta\left|\frac{\partial A_2}{\partial y}\right| + \delta^2 + \delta\left|\frac{\partial A_2}{\partial x}\right| + \delta\left|\frac{\partial A_1}{\partial y}\right| + \delta^2$$

Concluimos que $\left|\frac{\partial(\overline{X}_1, \overline{X}_2)}{\partial(x,y)} - \frac{\partial(A_1, A_2)}{\partial(x,y)}\right| < \delta\,(6M)$ para todo punto en D, donde $M = \max_{\mathbb{R}^2}\left\{\left|\frac{\partial A_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial A_1}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial A_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial A_2}{\partial y}\right|\right\}$ y $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$.

En resumen tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$, entonces el Jacobiano de A^* y el Jacobiano de $\overline{X}$ tienen el mismo signo para todo punto en D, por lo tanto los puntos críticos de $\overline{X}$ en D son sumideros o fuentes y no puntos silla.

Ahora, como $\overline{X}$ y A^* tienen el mismo índice en la frontera ; éste es la suma de los índices de cada punto crítico ; el índice por cada fuente o sumidero es 1 y A^* tiene índice 1 en la ∂D, concluimos que $\overline{X}$ tiene un sólo punto crítico (que no es silla). Dado que los valores propios dependen continuamente de la matriz Jacobiana, tenemos que para δ suficientemente pequeña la parte real de los valores propios tiene el mismo signo para A^* y $\overline{X}$ si $\rho(A^*, \overline{X}) < \delta$. Por lo tanto $\overline{X}$ tiene una singularidad del mismo tipo que A^* en D.

Si K es un punto silla, la demostración es similar al primer caso ∎

<u>Lema 3.8.</u> Para cada trayectoria cerrada γ de A^* existe $\delta > 0$ y un anillo S, con $\gamma \subset S$, (S está acotado por dos curvas suaves cerradas) tal que si $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$ se tiene:

a) Los segmentos normales a γ contenidos en S son disjuntos y $\overline{X}$ es sin contacto (transversal) a ellos. $\overline{X}$ también es transversal a C y C', donde C y C' forman la frontera de S.

b) $\overline{X}$ tiene exactamente una órbita cerrada $\tilde{\gamma}$ en el interior de S.

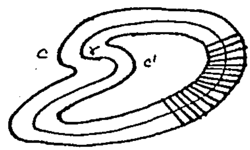
c) $h_{\overline{X}}(\tilde{\gamma})$ tiene el mismo signo que $h(\gamma)$, donde

$$h(\gamma) = \int_\gamma \operatorname{div} A^*(\gamma(s))\,ds.$$

<u>Demostración</u>. Primero encontraremos un anillo de ancho pequeño que contenga a γ y tal que los segmentos de las normales a γ en su interior sean disjuntas y sin contacto con respecto a A^*.

Sea η el período de γ, abusando de la notación podemos escribir :

$$\gamma : [0, \eta] \longrightarrow B^2.$$



Consideremos a $u_0 \in [0,\eta]$ y una vecindad U de u_0, sea $p = \gamma(u_0) \in \gamma$, demostraremos que existen W vecindad de p en γ y $\varepsilon > 0$ tales que los segmentos de línea normales a q $(q \in W \cap \gamma)$, con centro en q y longitud 2ε son disjuntos.

Sea $F : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(u,s) = \gamma(u) + s\,N(u)$, donde $u \in U$, $N(u)$ vector unitario normal en $\gamma(u)$ que señala hacia afuera. Observemos que F es diferenciable y que

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{\partial(\gamma_1(u) + sN_1(u))}{\partial u} & \dfrac{\partial(\gamma_1(u) + sN_1(u))}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial(\gamma_2(u) + sN_2(u))}{\partial u} & \dfrac{\partial(\gamma_2(u) + sN_2(u))}{\partial s} \end{matrix} \right|_{(u_0,0)}$$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} + s\dfrac{\partial N_1}{\partial u} & N_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u} + s\dfrac{\partial N_2}{\partial u} & N_2 \end{matrix} \right|_{(u_0,0)} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} & N_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u} & N_2 \end{matrix} \right|_{(u_0,0)} \neq 0$$

ya que $\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}(u_0), \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}(u_0)\right) = A^*(p)$ y $A^*(p)$ es ortogonal a (N_1, N_2). Por el teorema de la función inversa existe un paralelogramo en $U \times \mathbb{R}$

$$u_0 - \xi < u < u_0 + \xi \qquad -\varepsilon < s < \varepsilon$$

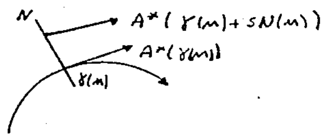
donde F es inyectiva. Esto significa que en la imagen del intervalo

$$(u_0 - \xi,\ u_0 + \xi)$$

los segmentos normales con centro en q y longitud 2ε no se intersectan.

Si construimos para cada punto $x \in \gamma$ un intervalo $x-\xi_x < u < x+\xi_x$, $-\varepsilon_x < s < \varepsilon_x$ cubrimos γ con las imágenes de estos rectángulos, como γ es compacta se tiene que existen $x_1, \dots, x_n$ tales que sus imágenes de rectángulos cubren γ. Si tomamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\}$ se tiene que los segmentos de normal de longitud 2ε con centro en γ son disjuntos.

Consideremos, ahora, la siguiente función $G : [0,\eta] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por:
$$G(u,s) = \left(A^*(\gamma(u) + sN(u))\right) \cdot \left(A^*(\gamma(u))\right)$$



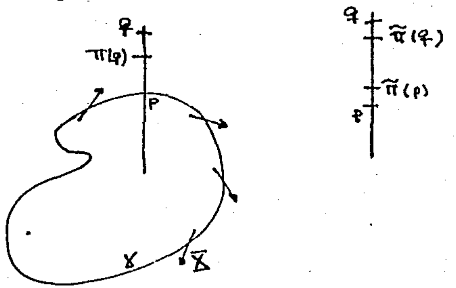
Observemos que G es continua y que $G(u,0) = |A^*(\gamma(u))|^2$ para todo $u \in [0,\eta]$. Como A^* no se anula en γ, existe $\alpha > 0$ tal que
$$G(u,0) \geq \alpha \quad \text{para todo } u \in [0,\eta].$$
Como el conjunto $[0,\eta] \times 0$ es compacto, se tiene que existe una vecindad V de él (o sea de γ) tal que $G(u,s) > 0$, $(u,s) \in V$. Esto quiere decir que en esa vecindad el campo A^* es transversal a la normal en todo punto de V, por lo tanto podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que los segmentos de normal de longitud 2ε con centro en γ sean disjuntos y el campo A^* es transversal a todos ellos. Dado que sólo hay una cantidad finita de órbitas cerradas podemos tomar ε tal que para todo punto, en el segmento de normal, su órbita no sea cerrada ni punto singular.

Ahora queremos construir C y C' curvas cerradas que encierren a γ y tales que A^* sea transversal a ellas.

Consideremos $p \in \gamma$ y el segmento de normal con centro en p y de longitud 2ε (esta ε es la ya construida). Dado que $h(\gamma) \neq 0$, podemos tomar $h(\gamma) < 0$, así γ es un sumidero. Tomemos q en el segmento de normal contenido en el exterior de γ, y de tal forma que en q este definida la transformación de Poincaré

$$\pi : K \longrightarrow K$$

donde K es un subconjunto abierto de la normal que contiene a p.



Consideremos el campo $\overline{X}$ obtenido de A^* bajo una pequeña rotación en el sentido positivo. Para este campo γ es una curva sin contacto, de hecho $\overline{X}$ siempre señala hacia afuera. Si el ángulo de rotación es suficientemente pequeño se tiene que la trayectoria solución de $\overline{X}$ que pasa por q intersecta K en un punto $\tilde{\pi}(q)$ y $\tilde{\pi}(q) \in \overline{pq}$. La órbita solución de $\overline{X}$ que pasa por p intersecta K en $\tilde{\pi}(p)$ y $\tilde{\pi}(p) \in \overline{pq}$.

Si $q = \tilde{\pi}(q)$ tenemos que la órbita solución de $\overline{X}$ que pasa por q, $\mathcal{O}_{\overline{X}}(q)$, es cerrada y sin contacto con el campo A^*. Podemos tomar q suficientemente cerca de p de tal forma que $\mathcal{O}_{\overline{X}}(q)$ esté contenida en la vecindad tubular de radio ε alrededor de γ y con ello habremos terminado.

Si $q \neq \tilde{\pi}(q)$ consideramos la sucesión $\{q_n = \tilde{\pi}^n(q)\}_{n\in\mathbb{N}}$. esta sucesión es decreciente en K y está acotada inferiormente por $\tilde{\pi}(p)$. Sea $\tilde{q}$ el punto a donde converge, entonces $\mathcal{O}_{\overline{X}}(\tilde{q})$ es cerrado (si no lo fuera, $\tilde{q}$ sería distinto de $\tilde{\pi}(\tilde{q})$ y por continuidad de las soluciones con respecto a la condición inicial tendríamos que para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande q_{N+1} estaría tan cerca de $\tilde{\pi}(\tilde{q})$ como quisieramos, lo cual es una contradicción). Nuevamente q puede tomarse lo suficientemente cerca de p para que $\mathcal{O}_{\overline{X}}(\tilde{q})$ esté contenida en la vecindad tubular de γ. Con esto construimos la curva C, de manera análoga construimos la curva C'. Llamaremos S a la región abierta contenida entre C y C'.

Ahora mostraremos que si $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$, $\overline{X} \in \Sigma$, entonces $\overline{X}$ tiene sólo una órbita cerrada $\tilde{\gamma}$ en el interior de S, además $h(\gamma)$ y $h_{\overline{X}}(\gamma)$ tienen el mismo signo.

Dado que A^* es transversal a C y C' podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que si $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta_1$, se tenga que $\overline{X}$ tambien es transversal a C y C'. Por el Teorema de Poincaré - Bendixon se sigue que $\overline{X}$ tiene al menos una órbita cerrada $\tilde{\gamma}$ en S.

Veremos que si δ es suficientemente pequeña, entonces $h(\gamma)$ y $h_{\overline{X}}(\gamma)$ tienen el mismo signo; una vez hecho ésto podemos concluir que $\overline{X}$ tiene una sola órbita cerrada en S, ya que de no ser así existirían dos dos órbitas consecutivas y por lo tanto una sería atractora y la otra repulsora, esto es $h_{\mathbb{X}}(\gamma_1) < 0 < h_{\mathbb{X}}(\gamma_2)$ lo cual es una contradicción [Lef.].

Sea $\gamma = (f(t), g(t))$ de periodo τ y tal que

$$h(\gamma) = \int_\gamma \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\right)_{\gamma(t)} dt = \int_0^\tau \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}(f,g) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(f,g)\right) dt$$

Sea ε, $0<\varepsilon<\tau$ tal que

$$\left| \int_t^\tau \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\right] dt \right| \le \frac{h(\gamma)}{4} \qquad \text{si } |\tau - t| < \varepsilon \quad \ldots (1)$$

Sea $\tilde\gamma = (\tilde f, \tilde g)$ de periodo $\tilde\tau$, entonces

$$h_{\mathbb{X}}(\tilde\gamma) = \int_0^{\tilde\tau} \left[\frac{\partial X_1}{\partial x}(\tilde f,\tilde g) + \frac{\partial X_2}{\partial y}(\tilde f,\tilde g)\right] dt \qquad \mathbb{X} = (X_1, X_2).$$

Consideremos un punto $p\in\gamma$ y p' en la intersección de la normal a γ en p con $\tilde\gamma$, a partir de p y p' comenzamos a contar t. Por la continuidad con respecto a cambios en el campo y condiciones iniciales, tenemos que existe $\delta_2>0$ tal que si $\rho(\mathbb{X}, A^*) < \delta_2$, entonces $|\tau - \tau'| < \varepsilon$. Y por tanto $\frac{\tilde\tau}{\tau}$ esta cercano a uno.

Por la continuidad de $\frac{\partial A_1}{\partial x}$, $\frac{\partial A_2}{\partial y}$, $\frac{\partial X_1}{\partial x}$ y $\frac{\partial X_2}{\partial y}$, existe $\delta_3>0$ tal que si $\rho(\mathbb{X}, A^*) < \delta_3$ tenemos que para toda $M\in\gamma$ y $\tilde M\in\tilde\gamma$ con $d(M,\tilde M)<\delta_3$

$$\left|\frac{\partial A_1}{\partial x}(M) - \frac{\partial X_1}{\partial x}(\tilde M)\right| + \left|\frac{\partial A_2}{\partial y}(M) - \frac{\partial X_2}{\partial y}(\tilde M)\right| < \frac{h(\gamma)}{4\tau} \quad \ldots\ldots (2)$$

Sea $\delta_4>0$ tal que si $\rho(\mathbb{X}, A^*) < \delta_4$, entonces $d(\gamma(t), \tilde\gamma(t)) < \delta_3$ para todo t, $0\le t\le \tau+\varepsilon$.

Calculemos ahora

$$h_{\mathbb{X}}(\tilde\gamma) - h(\gamma) = \int_0^{\tilde\tau}\left[\frac{\partial X_1}{\partial x}(\tilde f,\tilde g) - \frac{\partial A_1}{\partial x}(f,g) + \frac{\partial X_2}{\partial y}(\tilde f,\tilde g) - \frac{\partial A_2}{\partial y}(f,g)\right]dt - \int_{\tilde\tau}^{\tau}\left[\frac{\partial A_1}{\partial x}(f,g)+\frac{\partial A_2}{\partial y}(f,g)\right]dt$$

Por (1) y (2) y tomando $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$ tenemos que

$$|h_{\mathbb{X}}(\tilde\gamma) - h(\gamma)| \le \left|\int_0^{\tilde\tau}\frac{h(\gamma)}{4\tau}dt\right| + \left|\frac{h(\gamma)}{4}\right| = \frac{|h(\gamma)|\,\tilde\tau}{4\tau} + \frac{|h(\gamma)|}{4}$$

entonces $|h_{\mathbb{X}}(\tilde\gamma) - h(\gamma)| < \frac{3}{4}|h(\gamma)|$ y por tanto $h(\gamma)$ y $h_{\mathbb{X}}(\tilde\gamma)$ tienen el mismo signo ∎

Definición 3.9 Sean K_i, $i=1,\dots,r$ los puntos singulares de A^* y γ_j, $j=1,\dots,s$ sus órbitas cerradas. Las regiones D_i y S_j construidas segun los lemas 3.7 y 3.8 las llamaremos regiones críticas asociadas a K_i y γ_j.

Lema 3.10 Si $\delta>0$ es suficientemente pequeño y $\rho(\overline{X},A^*)<\delta$, entonces cada punto singular de $\overline{X}$ está en el interior de algún D_i, y cada órbita cerrado de $\overline{X}$ está en el interior de algún S_j.

En otras palabras, los puntos críticos y las órbitas cerradas de A^* son estables bajo perturbaciones pequeñas del campo.

Demostración Lo que necesitamos demostrar se traduce en las siguientes dos afirmaciones:

a) Existe $\delta>0$ tal que si $\rho(\overline{X},A^*)<\delta$, entonces en $B^2-\bigcup_{i=1}^{r} D_i$, $\overline{X}$ no tiene puntos singulares.

b) Existe $\delta>0$ tal que si $\rho(\overline{X},A^*)<\delta$, entonces en $B^2-\bigcup_{j=1}^{s} S_j$, $\overline{X}$ no tiene órbitas cerradas.

Afirmación (a). Sea $G=B^2-\bigcup_{i=1}^{r} D_i$, G es compacto. Consideremos la siguiente función $F: G\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(p)=|A^*(p)|$, como el campo A^* no se anula en G se tiene que $F(p)>0$ para todo p en G; como G es compacto, existe $\eta>0$ tal que $F(p)\geq\eta$ para todo p en G. Si tomamos $\delta<\eta/2$ concluimos que para todo campo $\overline{X}$ en $B_\delta(A^*)$, $|\overline{X}(p)|>0$ para todo p en G y por lo tanto $\overline{X}$ no tiene puntos crítica en G.

Afirmación (b). Sea $F = B^2 - \bigcup_{j=1}^{s} S_j$, F es compacto. Consideremos primero F' el conjunto obtenido de F quitando todos los D_i que contienen puntos silla. Sea $p \in F'$ y consideremos la trayectoria de A^* que pasa por este punto, $\varphi_t(p)$, esta trayectoria es no cerrada. Como no hay unión de sillas, alguna de las semitrayectorias de $\varphi_t(p)$ no converge a un puntosilla, supongamos que ésta es

$$\varphi_t^-(p) = \{\varphi_t(p) \mid t \leq 0\},$$

entonces φ_t^- converge a un ciclo límite, una fuente o sale de B^2. Si $\rho(\bar{X}, A^*)$ es pequeña, por continuidad con respecto a variaciones pequeñas del campo se tiene que la órbita de $\bar{X}$ que pasa por p, $\psi_t(p)$, tambien tiende a un ciclo límite, una fuente o sale de B^2. De hecho $\psi_t(p)$ entra en alguna de las regiones críticas D_i, S_j, o sale de B^2 cuando t decrece, y como la otra semitrayectoria no puede ingresar a estas regiones ni salir de B^2 cuando t tiende a mas infinito, concluimos que $\psi_t(p)$ es no cerrada.

Sea $\delta^*(p)$ el supremo de las δ tales que para cualquier $\bar{X}$ con $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta$, la trayectoria solución de $\bar{X}$ que pasa por p es no cerrada. Observemos que $\delta^*(p) > 0$ para todo p en F'. Demostraremos ahora que existe $\alpha > 0$, α constante, tal que $\delta^*(p) \geq \alpha$ para todo p en F'.

Supongamos que no es posible encontrar esta α, entonces existe una sucesión $\{x_i\}$, $x_i \in F'$, tal que

$$\lim_{i \to \infty} \delta^*(x_i) = 0$$

Como F' es compacto, existe una subsucesión $\{y_j\}$ de $\{x_i\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} y_j = \bar{y} \ , \ \bar{y}\in F' \quad y \quad \lim_{j\to\infty} \delta^*(y_j) = 0$$

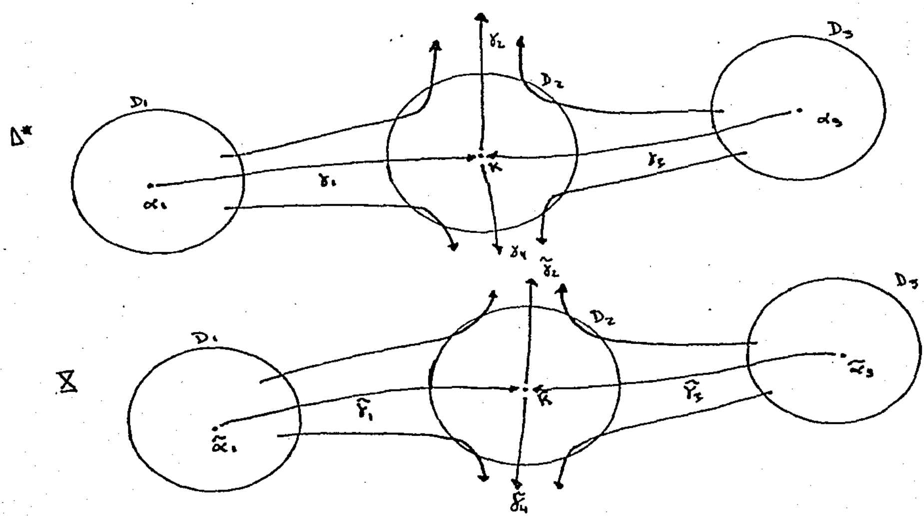
Como $\bar{y}\in F'$, se tiene que la órbita de A^* que pasa por $\bar{y}$ es no cerrada, por lo tanto existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tales que para todo $\bar{X}$, $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta_1$, y todo p, $d(p, \bar{y}) < \delta_2$, la órbita de $\bar{X}$ que pasa por p es no cerrada. Como y_i converge a $\bar{y}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_j, \bar{y}) < \delta_2/2$ para todo $j > N$. Observemos que para todos estos puntos y para todo campo $\bar{X}$, $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta_1$, la órbita de $\bar{X}$ que pasa por y_i es no cerrada, por lo tanto $\delta^*(y_j) \geq \delta_1$ para todo $j > N$, y por tanto $\lim_{j\to\infty} \delta^*(y_j) \geq \delta_1 > 0$ lo cual es una contradicción.

Concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que $\delta^*(p) \geq \alpha$ para todo p en F'. Tomemos δ, $0 < \delta < \alpha$ y tenemos que para todo $\bar{X}$, $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta$, y todo punto $p \in F'$ la trayectoria $\theta_{\bar{X}}(p)$ es no cerrada.

Recuérdese que F' era el conjunto F quitándole los D_i que contienen puntos silla. Tomemos ahora un punto p en D_i, si la trayectoria de $\bar{X}$ por p es cerrada, ella debe estar contenida toda en D_i. En el interior de $\theta_{\bar{X}}(p)$ habría otro punto crítico, que no es silla, lo cual es una contradicción. Por tanto $\bar{X}$ no tiene órbitas cerradas en F. ∎

<u>Lema 3.11</u> Sea K un punto silla de A^*, sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sus cuatro separatrices, γ_1 y γ_3 tienden a K cuando t tiende a infinito; γ_2 y γ_4 cuando t tiende a menos infinito. Supongamos que γ_1 y γ_3 provienen de las fuentes α_1 y α_3, y γ_2 y γ_4 tienden a los sumideros w_2 y w_4 respectivamente. Entonces:

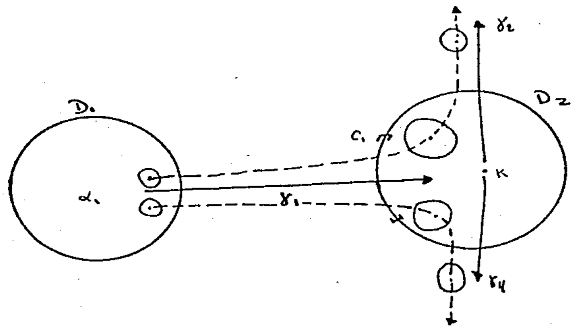
podemos hallar $\delta > 0$ suficientemente pequeña para que todo campo $\overline{X}$, $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$, tenga separatrices $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4$ que tienden a $\tilde{K}$ (asociado con K), y estas separatrices unan $\tilde{K}$ con $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3, \tilde{w}_2, \tilde{w}_4$ (asociadas con $\alpha_1, \alpha_3, w_2, w_4$).



<u>Demostración</u> Observemos primero que lo que se trata de demostrar es que para una perturbación pequeña del campo A^*, las uniones de fuentes, puntos silla y sumideros se conservan, esto es, son estables. Por lo tanto las fronteras de las regiones canónicas de A^* y de la perturbación $\overline{X}$ son cualitativamente iguales. Es decir, si R es una región canónica de A^*, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $\overline{X}$, $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$, se tiene que $\overline{X}$ tiene una región canónica $\hat{R}$ tal que si una trayectoria γ forma parte de la frontera de R,

entonces existe una correspondiente $\tilde{\gamma}$ que forma parte de la frontera de $\tilde{R}$.

Iniciamos la demostración. Dado que γ_1 tiende a K cuando t tiende a infinito, podemos tomar D_2 tal que el campo A^* es transversal a C_1 y todas las órbitas "entran" a D_2 cuando t crece. Si llamamos $p = \gamma_1 \cap \partial D_2$ entonces C_1 es una vecindad de p (en ∂D_2).



Parametrizamos C_1 de la siguiente forma $C_1 : [-\eta, \eta] \to B^2$ tal que $C_1(0) = p$, $C_1(s)$ esté antes de p (recorriendo ∂D_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj) si $s<0$, y $C_1(s)$ esté después (o abajo) de p si $s>0$.

Consideremos el punto $C_1(-1/2) = q$. Sea $\varphi_t(q)$ la trayectoria de A^* que pasa por q, $\varphi_0(q) = q$, entonces existe r_1 tal que $\varphi_{r_1}(q)$ es elemento del interior de D_2. Existe $r_2 > r_1$ tal que $\varphi_{r_2}(q)$ está en el exterior de D_2 y existe $r_0 < r_1$ tal que $\varphi_{r_0}(q)$ está en el interior de D_1. Sean $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que:

$$B_{\varepsilon_0}(\varphi_{r_0}(q)) \subset D_1^{\circ} \quad \text{(interior de } D_1\text{)}$$

$$B_{\varepsilon_1}(\varphi_{r_1}(q)) \subset D_2^{\circ}$$

$$B_{\varepsilon_2}(\varphi_{t_2}(q)) \subset (B^2 - D_2)^\circ$$

Entonces por la continuidad con respecto a las condiciones iniciales y a variaciones pequeñas del campo, y tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tenemos que existen δ_1 y δ_2 tales que para todo punto M, $d(M, \varphi_{t_0}(q)) < \delta_1$, y todo campo $\overline{X}$, $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta_2$, la órbita $\mathcal{O}_{\overline{X}}(M)$ se mantiene en una vecindad tubular de $\varphi_t(q)$. De hecho $\mathcal{O}_{\overline{X}}(M)$ parte de D_1°, entra en D_2° y sale hacia $(B^2 - D_2)^\circ$. Observese que es necesario tomar $\delta_1 < \varepsilon_0$, lo que obviamente es posible.

La misma construcción es posible para el punto $C_1(\eta/2) = q'$, obteniéndose las δ_1' y δ_2' respectivas.

Tomemos δ_2'' tal que si $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta_2''$, entonces $\overline{X}$ es transversal a C_1 y toda trayectoria de $\overline{X}$ que intersecta C_1 entra en D_2 cuando t crece.

Si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1', \delta_1''\}$ tenemos que para un campo $\overline{X}$, $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$, existe un conjunto de trayectorias que provienen de $\tilde{\alpha}_1$, ingresan en el interior de D_2 (que contiene al punto silla $\tilde{K}$), unas salen en la dirección de γ_2 y otras en dirección de γ_4. Consideremos el siguiente conjunto $E \subset [-\eta, \eta]$

$$E = \{ s \mid \mathcal{O}_{\overline{X}}(C_1(s)) \text{ sale hacia } \gamma_2 \},$$

este conjunto es no vacío, ya que $-\eta/2 \in E$; es abierto por continuidad de las soluciones con respecto a la condición inicial; está acotado superiormente por $\eta/2$. Sea $\eta^* =$ supremo de E. $\mathcal{O}_{\overline{X}}(C_1(\eta^*))$ no puede salir hacia γ_4 (otra vez por continuidad de soluciones con respecto a la condición inicial). Entonces $\Theta_{\bar{X}}(c_1(\eta^*))$ es una separatriz que tiende a $\tilde{K}$. Además $\Theta_{\bar{X}}(c_1(\eta^*))$ proviene de $\tilde{\alpha}_1$.

Los tres casos restantes podemos tratarlos en forma similar. ■

En resumen, tenemos el siguiente resultado:

<u>Teorema 3.12</u> Sea λ el conjunto de separatrices de A^* y $\hat{\lambda}$ el de $\bar{X}$. Si $\delta > 0$ es suficientemente pequeña y $\bar{X}$ es tal que $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta$. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre los conjuntos λ y $\hat{\lambda}$ de modo que:

a) Separatrices correspondientes son del mismo tipo.

b) Un subconjunto de $\hat{\lambda}$ acota una región canónica de $\bar{X}$ si y solo si el subconjunto correspondiente de λ acota una región canónica, similar, de A^*.

<u>Demostración</u>. Por los lemas 3.7, 3.8 y 3.10 tenemos una correspondencia uno a uno ($K_i \longrightarrow \tilde{K}_i$, $i = 1, \dots r$; $\gamma_j \longrightarrow \tilde{\gamma}_j$; $j = 1, \dots s$) entre los puntos críticos y los ciclos límite de A^* y $\bar{X}$. Esta correspondencia no cambia el tipo de la singularidad ni la estabilidad de los ciclos límite.

Por el lema 3.11 tenemos una correspondencia uno a uno entre las separatrices. Esta correspondencia es tal que asocia a una separatriz que une fuentes, puntos sillas o sumideros (de A^*), otra separatriz que une las correspondientes fuentes, puntos silla o sumideros (en $\bar{X}$). Concluimos que si un conjunto de separatrices de A^* acota una región canónica R, entonces el correspondiente conjunto de separatrices de $\bar{X}$ acota una región canónica $\tilde{R}$ del mismo tipo. Todo ésto es valido si tomamos como δ el mínimo de las deltas utilizadas en los lemas 3.7, 3.8, 3.10 y 3.11 . Y si $\rho(\mathbb{X}, A^*) < \delta$ ■

Sección 2. La equivalencia topológica

En esta parte nos proponemos construir el homeomorfismo de B^2 en B^2 que haga topologicamente equivalente a $\overline{X}$ con A^*, siempre que $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$ (donde δ es la mencionada en el teorema 3.12).

Consideremos $K = (0,0)$ un punto silla de A^*, tomando a los ejes coordenados como las tangentes a las separatrices, podemos expresar a $A^* = (A_1, A_2)$ de la forma siguiente:

$$A_1(x,y) = -\lambda x + p(x,y)$$
$$A_2(x,y) = \mu y + q(x,y) \qquad \lambda > 0,\ \mu > 0$$

osea, tenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda x + p(x,y) \\ y' &= \mu y + q(x,y) \end{aligned} \qquad (1)$$

donde p y q y sus primeras derivadas parciales se anulan en K

Lema 3.13 Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ y $\eta > 0$ tales que si $\rho(\overline{X}, A^*) < \delta$, la longitud de cualquier arco de trayectoria de $\overline{X}$ en el interior del Disco, D, con centro en K (punto silla) y radio η, es menor que ε.

Demostración Tomemos δ y η tan pequeños para que en el interior de D, $\overline{X}$ sólo tenga una singularidad (punto silla) en (x_0, y_0). $\overline{X}$ se puede expresar así:

$$x' = -\lambda x + p(x,y) + \overline{p}(x,y) = \overline{X}_1(x,y)$$
$$y' = \mu y + q(x,y) + \overline{q}(x,y) = \overline{X}_2(x,y)$$

Obsérvese que si (x,y) es elemento de $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \eta^2\}$

$$x' = \frac{\partial \mathbb{X}_1}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} (x-x_0) + \frac{\partial \mathbb{X}_1}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} (y-y_0) + (x-x_0)\xi_1 + (y-y_0)\xi_2$$

$$y' = \frac{\partial \mathbb{X}_2}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} (x-x_0) + \frac{\partial \mathbb{X}_2}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} (y-y_0) + (x-x_0)\xi_3 + (y-y_0)\xi_4$$

donde ξ_i son funciones de (x,y) que podemos hacer tan pequeñas como queramos si tomamos δ y η suficientemente pequeños. Tenemos la siguiente expresión para el campo $\overline{\mathbb{X}}$:

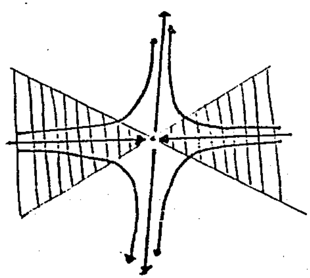
$$\begin{aligned} x' &= (-\lambda + a_1)(x-x_0) + a_2(y-y_0) + (x-x_0)\xi_1 + (y-y_0)\xi_2 \\ y' &= (x-x_0)a_3 + (\mu + a_4)(y-y_0) + (x-x_0)\xi_3 + (y-y_0)\xi_4 \end{aligned} \qquad (2)$$

donde a_j, $j=1,2,3,4$ son constantes (una vez que tenemos $\mathbb{X}$).

Dividimos ahora la región D en dos subconjuntos:

$$\mathrm{I} = \{(x,y)\in D \mid \mu|y-y_0| \le \lambda|x-x_0|\}$$

$$\mathrm{II} = \{(x,y)\in D \mid \mu|y-y_0| \ge \lambda|x-x_0|\}$$



De (2) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_3(x-x_0) + (\mu+a_4)(y-y_0) + (x-x_0)\xi_3 + (y-y_0)\xi_4}{(-\lambda+a_1)(x-x_0) + a_2(y-y_0) + (x-x_0)\xi_1 + (y-y_0)\xi_2}$$

$$= \frac{a_3 + (\mu+a_4)\left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right] + \xi_3 + \left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right]\xi_4}{-\lambda + a_1 + a_2\left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right] + \xi_1 + \left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right]\xi_2} \quad \ldots\ldots (3)$$

Observemos que en el conjunto I se tiene $\mu|y-y_0| \leq \lambda|x-x_0|$, entonces $\frac{|y-y_0|}{|x-x_0|} \leq \frac{\lambda}{\mu}$;; $-\frac{\lambda}{\mu} \leq \frac{y-y_0}{x-x_0} \leq \frac{\lambda}{\mu}$. Además a_1, a_2, a_3 y a_4 tienen la siguiente forma:

$$a_1 = \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$a_2 = \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$a_3 = \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$a_4 = \frac{\partial q}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

Por (1), si (x_0,y_0) está suficientemente cerca de K, se tiene que $\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|$ y $\left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|$ son pequeñas. Como $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta$, se tiene que $\left|\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial \bar{q}}{\partial x}\right|$ y $\left|\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right|$ son menores que δ. Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe δ y η tales que $|a_j| < \varepsilon \quad j = 1,2,3,4$

Regresemos a nuestra expresión (3), de ella obtenemos

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq \left| \frac{a_3 + (\mu + a_4)\frac{\lambda}{\mu} + \xi_3 + \frac{\lambda}{\mu}\xi_4}{-\lambda + a_2\left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right] + \xi_1 + \left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right]\xi_2} \right|$$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq \left| \frac{a_3 + \lambda + a_4\frac{\lambda}{\mu} + \xi_3 + \frac{\lambda}{\mu}\xi_4}{-\lambda + a_2\left[\frac{y-y_0}{x-y_0}\right] + \xi_1 + \left[\frac{y-y_0}{x-x_0}\right]\xi_2} \right|$$

Por lo tanto para δ y η suficientemente pequeños, se tiene que la parte derecha de esta desigualdad está cercana a $\left|\frac{\lambda}{-\lambda}\right| = 1$, de donde podemos escoger δ y η tales que $\left|\frac{dy}{dx}\right| < 2$ para todo punto en la región I (distinto de (x_0,y_0)). En forma análoga obtenemos $\left|\frac{dx}{dy}\right| < 2$ en la región II.

Sea γ un arco de trayectoria solución de $\bar{X}$ contenido en el disco D con centro en K y radio η. Podemos dividir γ en dos subarcos $\gamma_1 + \gamma_2$, donde $\gamma_1 = \gamma \cap \mathrm{I}$ y $\gamma_2 = \gamma \cap \mathrm{II}$. La longitud de γ, $\ell(\gamma)$, está dada por:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^2}\, dx \;+\; \int_c^d \sqrt{1+\left|\frac{dx}{dy}\right|^2}\, dy$$

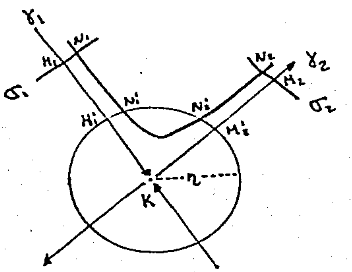
por tanto

$$\ell(\gamma) \leq (b-a)\sqrt{5} + (d-c)\sqrt{5} \, .$$

Como $(b-a) < \eta$ y $(d-c) < \eta$, obtenemos $\ell(\gamma) < 2\eta\sqrt{5}$ con lo que queda demostrado el lema ■

<u>Lema</u> <u>3.14</u> Sea K un punto silla de A^*, sean γ_1 y γ_2 dos separatrices que tienden a él cuando $t \to \infty$ y $t \to -\infty$ respectivamente. A través de $M_1 \in \gamma_1$ y $M_2 \in \gamma_2$ consideremos dos pequeños arcos sin contacto, σ_1 y σ_2, llamamos N_2 al punto donde de la trayectoria que pasa por $N_1 \in \sigma_1$ cruza σ_2 . Entonces cuando $N_1 \to M_1$ se tiene que

$$\ell(\overline{N_1 N_2}) \longrightarrow \ell(\overline{M_1 K}) + \ell(\overline{M_2 K}) \, .$$



<u>Demostración</u>. Con la terminología del lema anterior, aquí tenemos un sólo campo A^*, por tanto $\delta = 0$. Llamemos M_i' a las intersecciones de γ_i con la frontera de D, $i = 1, 2$. Dado $\varepsilon > 0$ existe η tal que el lema anterior es valido . En-

tonces $\ell(\overline{M_1'K}) + \ell(\overline{M_2', K}) < 2\varepsilon$ y $\ell(N_1', N_2') < \varepsilon$. Obsérvese que cuando $d(M_1, N_1)$ es pequeña se tiene que

$$|\ell(\overline{M_1M_1'}) - \ell(\overline{N_1N_1'})| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\ell(\overline{M_2M_2'}) - \ell(\overline{N_2N_2'})| < \varepsilon .$$

Calculemos ahora $|\ell(\overline{N_1N_2}) - \ell(\overline{M_1K}) - \ell(\overline{M_2K})|$

$$= |\ell(\overline{N_1N_1'}) + \ell(\overline{N_1'N_2'}) + \ell(\overline{N_2'N_2}) - \ell(\overline{M_1K}) - \ell(\overline{M_2K})|$$

$$= |\ell(\overline{N_1N_1'}) + \ell(\overline{N_1'N_2'}) + \ell(\overline{N_2N_2'}) - \ell(\overline{M_1M_1'}) - \ell(\overline{M_1'K}) - \ell(\overline{KM_2'}) - \ell(\overline{M_2'M_2})|$$

$$\leq |\ell(\overline{N_1N_1'}) - \ell(\overline{M_1M_1'})| + |\ell(\overline{N_2N_2'}) - \ell(\overline{M_2'M_2})| + |\ell(N_1'N_2') - \ell(\overline{M_1'K}) - \ell(\overline{KM_2'})|$$

Por lo tanto $\quad |\ell(\overline{N_1N_2}) - [\ell(\overline{M_1K}) + \ell(\overline{M_2K})]| \leq 5\varepsilon$ ∎

<u>Lema 3.15</u> Sea A_0B_0 un arco (que no se autointerseca) y A_iB_i, $i=1,2,\ldots$ una sucesión de arcos que convergen a A_0B_0 de la siguiente forma:

a) $\ell(A_iB_i)$ tiende a $\ell(A_0B_0)$ cuando i tiende a infinito.

b) si $M \in A_0B_0$ es tal que $\ell(A_0M) = s$ y $M_i \in A_iB_i$ es tal que $\ell(A_iM_i) = s$, entonces dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i > N$ se tiene que $d(M, M_i) < \varepsilon$, y esta N no depende de M.

Entonces:

c) Un punto M_i de A_iB_i con $z_i = \frac{\ell(A_iM_i)}{\ell(A_iB_i)}$ converge a un punto M_0 en A_0B_0 si y solo si z_i converge a $z_0 = \frac{\ell(A_0M_0)}{\ell(A_0, B_0)}$ cuando i tiende a infinito

d) Los puntos en A_iB_i convergen uniformemente a puntos en A_0B_0 con igual z-coordenada.

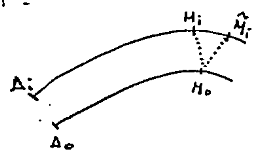
<u>Demostración</u>. Demostraremos primero (c). Supongamos que $\lim_{i\to\infty} z_i = z_0$, tenemos que mostrar que $\lim_{i\to\infty} M_i = M_0$.

El $\lim_{i\to\infty} z_i = z_0$ implica que $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{\ell(\Delta_i M_i)}{\ell(\Delta_i B_i)} = \frac{\ell(\Delta_0 M_0)}{\ell(\Delta_0 B_0)}$

como $\lim_{i\to\infty} \ell(\Delta_i B_i) = \ell(\Delta_0 B_0)$ . . . . (1)

tenemos que $\lim_{i\to\infty} \ell(\Delta_i M_i) = \ell(\Delta_0 B_0)$.

Observemos ahora que $d(M_i, M_0) \leq \ell(M_i \widehat{M}_i) + d(\widehat{M}_i, M_0)$ donde $\ell(\Delta_i \widehat{M}_i) = \ell(\Delta_0 M_0)$.



$$d(M_i, M_0) \leq |\ell(\Delta_i \widehat{M}_i) - \ell(\Delta_i M_i)| + d(\widehat{M}_i, M_0)$$
$$= |\ell(\Delta_0 M_0) - \ell(\Delta_i M_i)| + d(\widetilde{M}_i, M_0)$$

de (1) y de la convergencia de $\Delta_i B_i$ a $\Delta_0 B_0$ concluimos que dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i > N$, $d(M_i, M_0) < \varepsilon$. Por lo tanto $\lim_{i\to\infty} M_i = M_0$

Supongamos, ahora, que $\lim_{i\to\infty} M_i = M_0$ y observemos que

$$|\ell(\Delta_i M_i) - \ell(\Delta_0 M_0)| = |\ell(\Delta_0 M_{i_0}) - \ell(\Delta_0 M_0)|$$

donde M_{i_0} es tal que $\ell(\Delta_i M_i) = \ell(\Delta_0 M_{i_0})$ para toda $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$|\ell(\Delta_i M_i) - \ell(\Delta_0 M_0)| = \ell(M_{i_0} M_0).$$

Observemos que $\lim_{i\to\infty} \ell(M_{i_0} M_0) = 0$ ya que de no ser así existiría $\varepsilon > 0$, ε constante tal que $\ell(M_{i_0}, M_0) \geq \varepsilon$ para toda $i \in \mathbb{N}$, pero como M_i converge a M_0, se tiene que M_{i_0} converge a M_0 y esto nos lleva a que $\ell(M_0, M_0) \geq \varepsilon$

lo que es una contradicción, ya que $\Delta_0 B_0$ no se autointersecta. Concluimos que si $\lim_{i\to\infty} M_i = M_0$ entonces $\lim_{i\to\infty} \ell(\Delta_i M_i) = \ell(\Delta_0 M_0)$ y por lo tanto

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\ell(\Delta_i M_i)}{\ell(\Delta_i B_i)} = \frac{\ell(\Delta_0 M_0)}{\ell(\Delta_0 B_0)},$$

es decir, $\lim_{i\to\infty} z_i = z_0$.

Mostraremos ahora la afirmación (d). Queremos mostrar que la convergencia de puntos de $\Delta_i B_i$ a puntos $\Delta_0 B_0$ con igual z-coordenada es uniforme.

Supongamos que no es uniforme, entonces dada $\varepsilon>0$ existe una subsucesión de arcos $\Delta_j B_j$ que convergen a $\Delta_0 B_0$, y puntos $M_j \in \Delta_j B_j$ tales que $d(M_j, M_{j_0})>\varepsilon$ (para todo j) donde M_{j_0} denota el punto en $\Delta_0 B_0$ con la misma z coordenada de M_j.

Observemos que el conjunto $\{M_j\}$ tiene un punto límite en $\Delta_0 B_0$, llamemoslo $\overline{M}$, sea $\overline{z}$ su coordenada, entonces existe una subsucesión de $\{M_j\}$ tal que converge a $\overline{M}$, $\{M_k\} \to \overline{M}$, y las coordenadas de M_k, z_k, convergen a $\overline{z}$, como z_k es la misma para todo M_j e igual a la coordenada de M_{j_0}, se tiene que $\overline{z}$ es la coordenada de M_{j_0}, pero por la afirmación (c) obtenemos que $\overline{M} = M_{j_0}$ lo que es una contradicción con $d(M_j, M_{j_0}) > \varepsilon$. ∎

<u>Teorema 3.16</u> Sea $A^* \in \Sigma$ un campo que satisface las condiciones:

i) A^* tiene sólo una cantidad finita de puntos críticos, todos hiperbólicos.

ii) A^* tiene sólo una cantidad finita de órbitas cerradas, todas hiperbólicas

iii) A^* no tiene trayectorias solución que unen puntos silla.

Entonces A^* es un campo estructuralmente estable. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(\bar{X}, A^*) < \delta$ podemos encontrar un homeomorfismo de B^2 en sí mismo que transforma trayectorias de A^* en trayectorias de $\bar{X}$ (conservando la orientación).

Demostración. Consideremos primero δ suficientemente pequeño para que el teorema 3.12 y los lemas 3.13, 3.14 y 3.15 se cumplan.

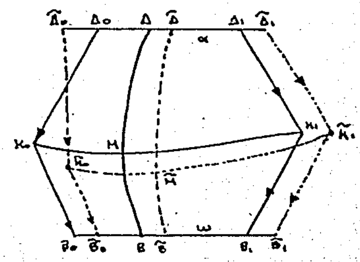
Sea G^* el conjunto obtenido de B^2 quitando los interiores de todas las regiones críticas que contengan una fuente, un sumidero o un ciclo límite.

Sean R_n y $\tilde{R}_n$ $n=1,\dots,m$, las correspondientes regiones canónicas de A^* y $\bar{X}$. Llamemos R_n^* y $\tilde{R}_n^*$ la intersección de la cerradura de R_n y $\tilde{R}_n$ con G^* respectivamente.

Para cada n definiremos un homeomorfismo h_n de R_n^* en $\tilde{R}_n^*$.

Denotamos por R y $\tilde{R}$ una región de las del tipo R_n o $\tilde{R}_n$ respectivamente. Observemos que dado que tenemos tres tipos de regiones canónicas, debemos construir el homeomorfismo distinguiendo tres casos.

a) Sea R una región del tipo $\overline{\underline{11}}$. R^* está acotada por las curvas $A_0K_0B_0$, $A_1K_1B_1$, donde K_0 y K_1 son puntos silla, y por los arcos $\alpha = A_0A_1$ y $\omega = B_0B_1$ (que son parte de la frontera de una región crítica o de la frontera de B^2. Sea U el rectángulo $0 \le u \le 1$,



$0 \leq v \leq 2$. Definimos $\varphi: R^* \to U$ de la siguiente forma:

1.- El arco $\Delta_0\Delta_1$ es transformado en el lado $0 \leq u \leq 1$, $v = 0$ por fracciones de longitud de arco, esto es, si $\Delta \in \Delta_0\Delta_1$, $\varphi(\Delta) = (u, 0)$ donde $u = \dfrac{\ell(\Delta_0\Delta)}{\ell(\Delta_0\Delta_1)}$.

2.- En forma similar el arco $\Delta_0 K_0$ es transformado en el semilado $(0, v)$ donde $0 \leq v \leq 1$; el arco $\Delta_1 K_1$ en el semilado $(1, v)$, $0 \leq v \leq 1$; el arco $K_0 B_0$ en $(0, v)$, $1 \leq v \leq 2$; y el arco $K_1 B_1$ en $(1, v)$, $1 \leq v \leq 2$.

3.- Sean $u_0 = \dfrac{\ell(\Delta_0 K_0)}{\ell(\Delta_0 B_0)}$ y $u_1 = \dfrac{\ell(\Delta_1 K_1)}{\ell(\Delta_1 B_1)}$. En cada trayectoria ΔB que inicie en el punto $\Delta \sim (u, 0)$ consideremos el punto M tal que

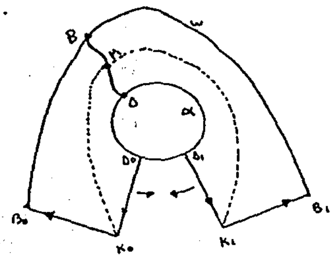
$$\frac{\ell(\Delta M)}{\ell(\Delta B)} = (1-u)u_0 + u u_1 \quad \ldots\ldots (1)$$

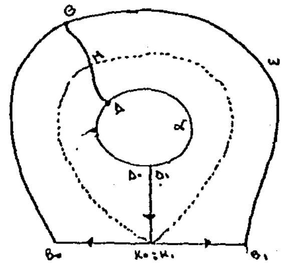
Definimos $\varphi(M) = (u, 1)$. Si $P \in \Delta B$ definimos $\varphi(P) = (u, v)$, donde $v = \dfrac{\ell(\Delta P)}{\ell(\Delta M)}$ cuando $P \in \Delta M$ ó $v = 1 + \dfrac{\ell(MP)}{\ell(MB)}$ cuando $P \in MB$, con ésto hemos definido φ en todo R^*

Observemos que φ es uno a uno y sobreyectiva. La continuidad de φ en todos los puntos interiores de R^* se sigue de la continuidad con respecto a las condiciones iniciales, del lema 3.15 y de la igualdad (1). Para mostrar la continuidad de φ en las curvas $\Delta_0 K_0 B_0$ y $\Delta_1 K_1 B_1$ hacemos uso tambien del lema 3.14. De hecho estos lemas muestran tambien que φ^{-1} es continua, por lo tanto φ es un homeomorfismo.

De la misma manera construimos un homeomorfismo $\hat{\varphi}$ de $\tilde{R}^*$ en U. Entonces $f = \hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi : R^* \to \tilde{R}^*$ es un homeomorfismo de R^* en $\tilde{R}^*$. Además $f(K_0) = \hat{K}_0$, $f(K_1) = \hat{K}_1$. Con esto terminamos el caso (a).

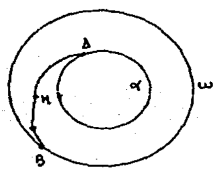
b) Sea R una región de tipo $\overline{II}$. Observemos que esta región puede asumirse como un caso límite de regiones del tipo $\overline{III}$ (cuando los puntos silla coinciden).





El lugar geométrico de los puntos M es ahora una curva cerrada que contiene en su interior a la curva $\Delta_0 \Delta \Delta_1$. El homeomorfismo φ se define en forma totalmente análoga al caso anterior.

c) Sea R una región de tipo I. En este caso $R^* = \tilde{R}^*$ y estan acotadas por dos curvas cerradas (una de ellas puede ser la frontera de B^2).



Tomemos un homeomorfismo de la curva α en el círculo $0 \leq u \leq 1$ con los extremos identificados. Para cada $M \in R^*$ nos fijamos en $\Delta \in \alpha$ tal que M esté en la trayectoria solución de A^* que pase por Δ; definimos $\varphi(M) = (u, v)$ donde u es el real que le corresponde a Δ y $v = \frac{l(\Delta M)}{l(\Delta B)}$ donde B es el punto donde la trayectoria por M intersecta w. De esta forma definimos un homeomorfismo de R^* en el producto del círculo por el intervalo $0 \leq v \leq 1$. Haciendo lo mismo para $\tilde{R}^*$ obtenemos un homeomorfismo entre R^* y $\tilde{R}^*$.

En resumen tenemos una familia de homeomorfismos

$$f_n : R^*_n \to \tilde{R}^*_n \quad n = 1, \dots m$$

tales que si $p \in R^*_k \cap R^*_l$ entonces $f_k(p) = f_l(p)$ para cualesquiera k y l en $\{1, \dots m\}$. Poniendo juntos estos homeomorfismos, tenemos un homeomorfismo T^* de G^* en sí mismo, y T^* es un homeomorfismo que preserva orientación (de las trayectorias).

Queremos extender ahora el homeomorfismo T^* al interior de los discos D_i que contienen puntos críticos (fuentes o sumideros).

Supongamos que la región D contiene a los puntos críticos K y $\tilde{K}$ de A^* y $\bar{X}$ respectivamente, y que φ_t es el flujo de A^* y ψ_t el de $\bar{X}$.

Observemos que T^* está ya definido en la frontera de D (∂D). Sea q en el interior de D definimos

$$T^*(q) = \psi_{-t} \circ T^* \circ \varphi_t(q)$$

donde t es el tiempo necesario para que $\varphi_t(q) \in \partial D$. Además

$$T^*(K) = \tilde{K}$$

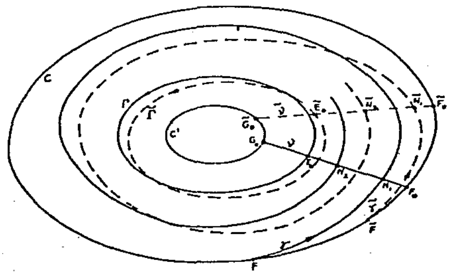
Esta definición extiende a T^* a D. Además por lo desarrollado en el capítulo I, T^* es un homeomorfismo en D.

Nos resta definir un homeomorfismo φ en cada región S, donde S contiene los ciclos límite Γ y $\tilde{\Gamma}$ de A^* y $\bar{X}$ respectivamente.

Sean C y C' las curvas que forman la frontera de S, supongamos que

$h(\Gamma)<0$ y Γ orientada en contra de las manecillas del reloj.

Tomemos una normal a Γ, ν, fija y parametricemos Γ, C, C' por fracciones de longitud de arco contadas a partir de ν en sentido positivo.



Obtenemos así los puntos E_w, $0\le w\le 1$, en Γ con $E_0=E_1=\nu\cap\Gamma$; F_u $0\le u\le 1$ en C con $F_0=F_1=\nu\cap C$; G_v $0\le v\le 1$ en C' con $G_0=G_1=\nu\cap C'$. Observamos que T^* está definido en C y C', llamaremos $\tilde{F}_u=T^*(F_u)$, $\tilde{G}_v=T^*(G_v)$, $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1$. Unimos $\tilde{F}_0$ con $\tilde{G}_0$ mediante un segmento de recta $\tilde{\nu}$ y tomamos s y δ lo suficientemente pequeños para que $\tilde{\nu}$ sea un arco sin contacto para $\overline{X}$.

Obsérvese que el homeomorfismo $\varphi: S\to S$ debe transformar el anillo abierto S' acotado por C y Γ en el anillo abierto $\tilde{S}'$ acotado por C y $\tilde{\Gamma}$; y al anillo S'' acotado por C' y Γ en el anillo abierto $\tilde{S}''$ acotado por C' y $\tilde{\Gamma}$.

Definimos $\varphi(F_u)=T^*(F_u)=\tilde{F}_u$, $0\le u\le 1$. Sea γ la trayectoria de A^* que entra en S a través de algún punto F en C, γ interseca ν un número infinito de veces, creando una sucesión monótona $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, que tiende á E_0. Llamemos $\tilde{\gamma}$ la trayectoria de $\overline{X}$ que intersecta C en el punto $\tilde{F}$,

$\widehat{F} = \varphi(F)$, $\widehat{\gamma}$ intersectará $\widehat{\nu}$ creando una sucesión $\{\widetilde{N}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con límite $\widehat{E}_0$, $\widetilde{E}_0 = \widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{\nu}$. De esta forma γ y $\widehat{\gamma}$ están divididas en una cantidad infinita de sub arcos: $FN_1 = \gamma_1$, $N_iN_{i+1} = \gamma_{i+1}$; $\widetilde{F}\widetilde{N}_1 = \widetilde{\gamma}_1$, $\widetilde{N}_i\widetilde{N}_{i+1} = \gamma_{i+1}$ $i \in \mathbb{N}$. Definimos φ de tal forma que transforme el arco cerrado γ_i en $\widetilde{\gamma}_i$ mediante fracciones de longitud de arco, es decir, si $M \in N_iN_{i+1}$ entonces $\varphi(M) = \widetilde{M}$, $\widetilde{M} \in \widetilde{N}_i\widetilde{N}_{i+1}$, donde $\dfrac{\ell(N_iM)}{\ell(N_iN_{i+1})} = \dfrac{\ell(\widetilde{N}_i\widetilde{M})}{\ell(\widetilde{N}_i\widetilde{N}_{i+1})}$ $i \in \mathbb{N}$, con $N_0 = F$. De esta forma φ está definida en el anillo abierto S'. Analogamente definimos φ en el anillo S''. Para extender φ a Γ, parametrizemos $\widetilde{\Gamma}$ mediante fracciones de longitud de arco $\widetilde{\omega}$, tomando $\widetilde{E}_0$ como el origen y orientando $\widetilde{\Gamma}$ en sentido positivo. Entonces $\varphi(E_\omega)$ será el punto en $\widetilde{\Gamma}$ con coordenada $\widetilde{\omega} = \omega$, $0 \le \omega \le 1$.

Claramente φ es uno a uno y sobreyectiva. Observese que cada punto M de S pertenece a cierto arco N_iN_{i+1} de la trayectoria que le corresponde (este arco será Γ si $M \in \Gamma$). Supongamos que tenemos una sucesión $\{M_j\} \to M$. Sea $\{N_k^jN_{k+1}^j\}$, k depende de j, la correspondiente sucesión de arcos. Entonces por continuidad con respecto a las condiciones iniciales se tiene que $\ell(N_k^jN_{k+1}^j) \to \ell(N_iN_{i+1})$ cuando j tiende a infinito. Situación similar tenemos en $\widetilde{S}$ para el campo $\overline{X}$, por el lema 3.15, se sigue que $\varphi(M_j) \to \varphi(M)$ cuando j tiende a infinito, lo que muestra que φ es continua. En forma análoga φ^{-1} es continua, por lo tanto φ es un homeomorfismo en S.

Hacemos esta misma construcción para cada S_k, $k=1,\dots,s$, regiones que contienen a los ciclos límite $\gamma_1,\dots,\gamma_s$. Tomando $T^* = \varphi$ en cada S_k extendemos T^* a todo B^2. Por lo tanto T^* es un homeomorfismo de B^2 en sí mismo que transforma trayectorias de A^* en trayectorias de $\underline{X}$ ■

Todo lo desarrollado en el capítulo II y en este capítulo se resume en el siguien te resultado:

<u>teorema</u> <u>3.17</u> Un campo $\underline{X} \in \Sigma$ es estructuralmente estable si y solo si cumple las <u>siguientes</u> condiciones:

i) $\underline{X}$ tiene sólo una cantidad finita de puntos críticos, todos hiperbólicos

ii) $\underline{X}$ tiene sólo una cantidad finita de órbitas cerradas, todas hiperbólicas

iii) $\underline{X}$ no tiene trayectorias solución que unan puntos silla.

■

Capitulo IV

En esta parte extenderemos los resultados obtenidos en los tres primeros capitulos, a campos definidos sobre variedades diferenciales compactas de dimensión dos orientables (M^2). Nuestro objetivo central es mostrar que si tenemos un campo X de clase C^1 definido sobre M^2, entonces X es estructuralmente estable si y solo si X cumple con las siguientes condiciones:

a) Existen sólo una cantidad finita de singularidades, todas ellas hiperbólicas.

b) Los α y ω- conjuntos límite de toda trayectoria solamente pueden ser singularidades u órbitas cerradas.

c) No existen trayectorias que conecten puntos silla.

d) Existen sólo una cantidad finita de órbitas cerradas, todas ellas simples.

En la primera sección presentamos un conjunto de teoremas y resultados que nos servirán como herramienta en las secciones siguientes. De la segunda a la cuarta sección consideramos un campo X estructuralmente estable dado, y vamos descubriendo cuales son las condiciones que cumple. En la segunda sección discutimos cantidad y naturaleza de sus singularidades; en la tercera discutimos sus conjuntos límite y finalmente en la cuarta estudiamos sus órbitas cenadas.

En la quinta, y última, sección mostramos que las condiciones a), b), c) y d) son suficientes para que un campo que las cumpla sea estructuralmente estable.

En todo el capítulo consideramos M^2 como una variedad diferenciable, orientable, compacta, conexa de dimensión dos.

La totalidad del material que presentamos en esta parte se puede encontrar en el libro de J. Palis y W. De Melo, Introduçao aos Sistemas Dinâmicos, y en el artículo de H.M. Peixoto, Structural Stability on two Dimensional Manifolds.

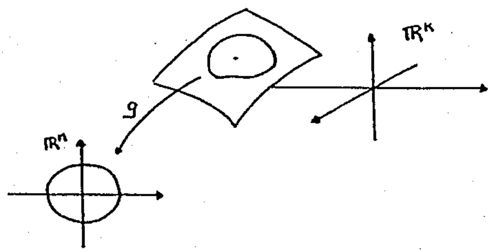
Sección 1. Definiciones y Proposiciones Iniciales.

Definición 4.1 Sea M un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^k$. Consideremos en M la topología inducida. Decimos que M es una variedad diferenciable de dimensión n si para cada punto p en M existen una vecindad $U \subset M$ de p, una vecindad $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ de $\bar{o}$, y un homeomorfismo

$$g : U \to U_0$$

tal que para cada $u \in U_0$

$$dg^{-1}_{(u)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{es inyectiva.}$$



Decimos (g, U) es una carta local en torno de p, y U es una vecindad coordenada de p. Si los homeomorfismos g son de clase C^r, entonces decimos que M es una variedad de clase C^r. Si solamente decimos variedad diferenciable, entonces los homeomorfismos g son de clase C^∞. Además si g_1 y g_2 son dos homeomorfismos definidos en U_1 y U_2, y $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, entonces el cambio de coordenadas

$$g_2 \circ g_1 : g_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow g_2(U_1 \cap U_2)$$

es un difeomorfismo de clase C^r (ó C^∞).

Definición 4.2. Sean M^m y N^n variedades y f una función de M^m en N^n. Decimos que f es de clase C^r si para cada punto p en M y para cualesquiera par de cartas coordenadas

$$g : U \to \mathbb{R}^m \quad \text{en torno a } p \quad \text{y}$$
$$h : V \to \mathbb{R}^n \quad \text{en torno a } f(p), \text{ con } f(U) \subset V$$

se tiene que

$$h \circ f \circ g^{-1} : g(U) \to h(V)$$

es de clase C^r.

Consideremos, ahora, una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^K$, con $\alpha(0) = p$. Podemos ver que α es diferenciable según la definición de arriba si y solamente si α es diferenciable como una curva en $\mathbb{R}^K$. Por tanto si α es una curva diferenciable en M, podemos considerar el vector tangente $\alpha'(0)$. A el conjunto de los vectores tangentes $\alpha'(0)$ a todas las curvas α tales que $\alpha(0) = p$, lo llamamos el espacio tangente a M en p y lo denotamos por T_pM.

Proposición 4.3. T_pM es un espacio vectorial de dimensión n, donde n es la dimensión de la variedad M.

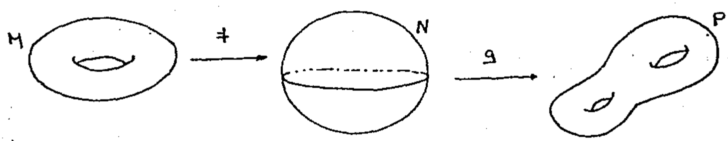
Definición 4.4 Sean $f : M \to N$ una transformación diferenciable, p un punto en M y v un vector en T_pM. Consideremos una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha'(0) = v$ y $\alpha(0) = p$ (llamada curva adaptada a v). Tenemos que $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ es una curva diferenciable en N. Definimos una transformación de T_pM en $T_{f(p)}N$ como sigue:

$$df_{(p)}(v) = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)_{(0)}$$

La transformación $df_{(p)}$ es lineal y la llamaremos la diferencial de f en p.

<u>Teorema 4.5</u> <u>(Regla de la cadena)</u>. Sean $f: M \to N$ y $g: N \to P$ transformaciones de clase C^r entre Variedades diferenciales. Entonces $g\circ f: M \to P$ es de clase C^r y

$$d(g\circ f)_{(p)} = dg_{(f(p))}\, df_{(p)}$$



<u>Definición 4.6</u> Una transformación $f: M \to N$ es un difeomorfismo de clase C^r si f es de clase C^r y tiene inversa f^{-1} de la misma clase. En este caso para cada p en M la

$$df_{(p)}: T_pM \to T_{f(p)}N$$

es un isomorfismo y su inversa está dada por:

$$df^{-1}_{(f(p))} = \left[df_{(p)}\right]^{-1}.$$

En particular M y N tienen la misma dimensión.

<u>Definición 4.7</u> Decimos que $f: M \to N$ es un difeomorfismo local en $p \in M$ si existen vecindades U de p en M y V de $f(p)$

en N tales que f restringida a U es un difeomorfismo sobre V.

Definición 4.8 (Subvariedad) Sea S un subconjunto de M, M variedad diferenciable. Decimos que S es una subvariedad de clase C^r de M de dimensión s si para cada $p \in S$, existen abiertos $U \subset M$ de p, $V \subset \mathbb{R}^s$ que contiene al $\bar{0}$, $W \subset \mathbb{R}^{m-s}$ que contiene al $\bar{0}$ y un difeomorfismo de clase C^r

$$\varphi : U \longrightarrow V \times W \quad \text{tal que}$$
$$\varphi(S \cap U) = V \times \{\bar{0}\}.$$

Observemos que $\mathbb{R}^k$ es una variedad diferenciable y que si $M \subset \mathbb{R}^k$ es una variedad, entonces M es una subvariedad de $\mathbb{R}^k$, (según nuestra definición).

Consideremos una cubierta numerable $\{U_n\}$ de la variedad M. Decimos que esa cubierta es localmente finita si para todo p en M existe una vecindad V de él que intersecta a lo más un número finito de elementos de la cubierta.

Una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_n\}$ es una colección numerable $\{\varphi_n\}$ de funciones reales no negativas, de clase C^∞ tales que:

a) Para cada índice n, el soporte de φ_n está contenido en U_n, donde soporte de φ_n es la cerradura del conjunto de puntos donde φ_n es positiva.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Proposición 4.9. Dada una cubierta numerable y localmente finita de M, existe una partición de la unidad subordinada a esa cubierta.

Corolario 4.10 Sea $K \subset M$ cerrado, entonces existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $f^{-1}(0) = K$.

Corolario 4.11 Sean M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}^s$ una función de clase C^r $(M \subset \mathbb{R}^K)$. Entonces existe una función de clase C^r $\tilde{f} : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^s$ tal que $\tilde{f}$ restringida a M es igual a f.

Corolario 4.12 Sean U y V abiertos de la variedad M tales que $\overline{U} \subset V$, entonces existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$ de clase C^∞ tal que $\varphi = 1$ en U y $\varphi = 0$ en $M \setminus V$.

Definición 4.13 (Fibrado tangente) Sea M^n una variedad diferenciable, $M^n \subset \mathbb{R}^K$. El fibrado tangente a M es el siguiente conjunto:

$$TM = \{ (p, v) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \mid p \in M,\ v \in T_pM \}$$

La topología en TM es la inducida por la topología en $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$. La proyección natural $\pi : TM \to M$, $\pi(p, v) = p$ es una transformación continua.

Sabemos además que TM es una variedad diferenciable y que π es de clase C^∞.

Obsérvese que podríamos haber iniciado esta sección definiendo a una variedad M sin que ella sea un subconjunto de $\mathbb{R}^K$.

Sea M un espacio topológico Hausdorff con base numerable. Una carta local en M es un par (g, U) donde $U \subset M$ es un abierto y g es un homeomorfismo sobre un abierto U_0 de $\mathbb{R}^n$. Decimos que U es una vecindad parametrizada en M. Si (φ_1, U_1) y (φ_2, U_2) son dos cartas locales en M con $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, el cambio de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ es un homeomorfismo.

En resumen: una variedad diferenciable de clase C^r, $r \geq 1$ es un espacio topológico junto con una colección de cartas locales tales que

a) las vecindades parametrizadas cubren M

b) los cambios de coordenadas son difeomorfismos de clase C^r.

A esta colección de cartas locales le llamamos un atlas C^r de M.

La equivalencia de las dos posibles definiciones de variedad diferencial es mostrada en el siguiente teorema.

<u>Teorema</u> <u>4.14</u> <u>(Whitney)</u> Si M es una variedad diferenciable de dimensión n, existe un encaje propio $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

Esto es, $df_{(p)}$ es inyectivo para todo p en M, f es inyectiva, si nos fijamos nada mas en $f(M)$ entonces f es un homeomorfismo, donde $f(M)$ tiene la topología inducida. En otras palabras $f(M)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

<u>Definición</u> <u>4.15</u> Sea $M^2 \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable de dimensión dos. Un campo de vectores de clase C^1 en M^2 es una transformación $\bar{X}$ de clase C^1

$$\bar{X} : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

tal que a cada punto p en M^2 le asocia un vector $\bar{X}(p)$ en $T_p M$.

Este campo $\bar{X}$ se corresponde con una transformación C^1

$$\overline{X} : M \longrightarrow TM$$

tal que $\pi \circ \overline{X}$ es la identidad en M, π es la proyección de TM en M.

Denotamos por $\mathfrak{X}^1(M)$ al conjunto de campos C^1 en M.

Definición 4.16 Una curva integral de $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M)$ que pasa por el punto $p \in M$ es una transformación de clase C^2

$$\alpha : I \longrightarrow M \qquad (I \text{ intervalo que contiene al } 0)$$

tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = \overline{X}(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.

A la imagen de una curva así definida la llamamos trayectoria u órbita solución del campo $\overline{X}$

Si $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo entre variedades de clase C^2 y $\overline{X}$ es un campo de clase C^1 en M, entonces $\overline{Y} = f_* \overline{X}$ definido por:

$$\overline{Y}(q) = df_{(p)}(\overline{X}(p)) \qquad q \in N \text{ y } q = f(p),$$

es un campo de clase C^1 en N.

Si $\alpha : I \to M$ es una curva integral de $\overline{X}$, entonces $f \circ \alpha : I \to N$ es una curva integral de $\overline{Y}$. En particular f transforma trayectorias de $\overline{X}$ en trayectorias de $\overline{Y}$.

Si $g : U \to U_0$ es una carta local de M, entonces $\overline{Y} = g_* \overline{X}$ es un campo de clase C^1 en $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ (suponemos M de dimensión 2), decimos que $\overline{Y}$ es la expresión de $\overline{X}$ en la carta local (g, U). Bajo estas consideraciones, los teoremas locales sobre existencia, unicidad y diferenciabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$ se extienden a campos en variedades bidimensionales.

<u>teorema</u> <u>4.17</u> Sea M una variedad compacta y $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M)$. Entonces existe en M un flujo global de clase C^r asociado a $\overline{X}$.

Esto es, existe una transformación

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$$

tal que $\varphi(0,p) = p$ y $\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(t,p)\right) = \overline{X}(\varphi(t,p))$.

<u>Corolario</u> <u>4.18</u> Sean $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M)$ y $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ el flujo de $\overline{X}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ la transformación

$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$

dada por $\varphi_t(p) = \varphi(t,p)$ es un difeomorfismo de clase C^1.

Además:

a) φ_0 es la identidad en M

b) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

<u>Definición</u> <u>4.19</u> Sean $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M)$ y φ_t el flujo de $\overline{X}$. La órbita de $\overline{X}$ por p en M es el conjunto $o(p) = \{\varphi_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Si $\overline{X}(p) = \overline{0}$, entonces la órbita es el punto p. En este caso decimos que p es una singularidad de $\overline{X}$ (o que p es un punto crítico).

Si α es una órbita no inyectiva, y existe $\tau > 0$ tal que

$$\alpha(0) = \alpha(\tau) = p \qquad y \quad \alpha(t) \neq p \quad \text{para todo } t \text{ en } (0,\tau),$$

entonces α es difeomorfa al círculo S^1 y decimos que α es cerrada de periodo τ.

<u>Definición</u> <u>4.20</u> El ω-conjunto límite de la órbita γ que pasa por p, $\omega(\gamma)$, es $\omega(p)$.

En forma similar definimos el α-conjunto límite de la órbita γ, $\alpha(\gamma)$.

Lema 4.21 Sean $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^1(M)$, M una variedad compacta y γ una órbita de $\mathbb{X}$, entonces:

a) $\omega(\gamma)$ es distinto del conjunto vacío.

b) $\omega(\gamma)$ es cerrado (y por tanto compacto).

c) $\omega(\gamma)$ es invariante bajo el flujo, esto es, $\omega(\gamma)$ es una unión de orbitas de $\overline{X}$.

d) $\omega(\gamma)$ es conexo.

Consideremos, ahora, en $M^2 \subset \mathbb{R}^k$ (variedad compacta) el espacio de las funciones definidas en M de clase C^1, $C^1(M, \mathbb{R}^s)$. Este espacio tiene estructura de espacio vectorial:

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p)$$
$$(\lambda f)(p) = \lambda(f(p))$$

para f, g en $C^1(M, \mathbb{R}^s)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observamos que el conjunto $\mathfrak{X}^1(M^2)$ forma un subespacio vectorial de $C^1(M^2, \mathbb{R}^k)$: si $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$, entonces

$$(\overline{X} + \overline{Y})(p) = \overline{X}(p) + \overline{Y}(p)$$
$$(\lambda \overline{X})(p) = \lambda \overline{X}(p) \qquad \text{para todo } p \text{ en } M^2.$$

Ademas podemos definir una norma en $\mathfrak{X}^1(M)$ de la siguiente forma: Sea $\{U_1, \dots, U_n\}$ una cubierta abierta de M (compacta) tal que cada U_i esté contenido en el dominio de una carta local (g_i, V_i) con $g_i(V_i) = B_2(0)$ y $g_i(U_i) = B_1(0)$, donde $B_\delta(0)$ es una bola abierta con centro en 0 y radio δ (en $\mathbb{R}^2$). Dado $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$, denotamos por $\overline{X}^i = \overline{X} \circ g_i^{-1} : B_2(0) \to \mathbb{R}^k$

y denotamos las componentes de $\overline{X}^i$, $\overline{X}^i = (X_1^i, X_2^i)$, definimos

$$\|\overline{X}\| = \max_i \left\{ \max_{(x,y)\in\overline{B_1(0)}} \left\{ \|X_1^i\|, \|X_2^i\|, \left\|\frac{\partial X_1^i}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial X_1^i}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial X_2^i}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial X_2^i}{\partial y}\right\| \right\} \right\}$$

Con esta norma definimos una distancia en $\mathfrak{X}^1(M^2)$ y con ella una topología, llamada topología C^1.

<u>Definición</u> <u>4.22</u> Sean $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ en $\mathfrak{X}^1(M)$, decimos que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topológicamente equivalentes $(\overline{X} \sim \overline{Y})$ si existe un homeomorfismo $h: M \to M$ que transforma órbitas de $\overline{X}$ en órbitas de $\overline{Y}$ preservando su orientación.

Es decir, si $p \in M$ y $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < t < \delta$,

$$h(\varphi_t(p)) = \psi_{t'}(h(p))$$

para alguna t' en $(0, \varepsilon)$, donde φ_t y $\psi_{t'}$ son los flujos correspondientes a $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ respectivamente. Si $t = t'$, entonces decimos que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topológicamente conjugados.

<u>Definición</u> <u>4.23</u> Sean $S \subset N$ una subvariedad de clase C^r y $f: M \to N$ una transformación C^K, donde K, r son mayores o iguales a uno. Decimos que f es transversal a S en un punto p, en M, si $f(p) \notin S$ ó

$$df_{(p)}(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N.$$

Esto es, si la imagen de T_pM bajo la diferencial df_p contiene un subespacio complementario a $T_{f(p)}S$ en $T_{f(p)}N$. Decimos que f es transversal a S $(f \pitchfork S)$ si lo es en cada punto p de M.

Definición 4.24 Sean S_1, S_2 subvariedades de N. Decimos que S_1 es transversal a S_2 si la inclusión $i: S_1 \to N$ es transversal a S_2.

teorema 4.25 (Thom) Sean M variedad compacta, $S \subset N$ una subvariedad cerrada, entonces el conjunto de las transformaciones $f \in C^k(M, N)$ transversales a S es abierto y denso en $C^k(M,N)$.

teorema 4.26 El conjunto de los difeomorfismos de clase C^1 en M, $Dif^1(M)$ forman un conjunto abierto en $C^1(M,M)$.

Definición 4.27 Decimos que p en M es una singularidad simple de un campo $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M)$ si

$$d\overline{X}_{(p)} : T_pM \to T_pM$$

es una transformación lineal que no posee al cero como uno de sus valores propios.

Definición 4.28 Sea $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$, decimos que p es un punto regular de $\overline{X}$ si $\overline{X}(p) \neq \overline{0}$.

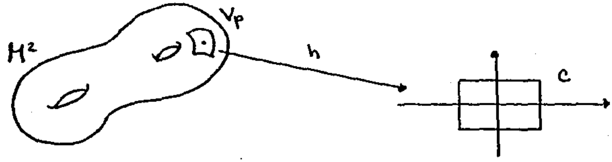
teorema 4.29 (Flujo tubular). Sean $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ y $p \in M$ un punto regular de $\overline{X}$. Sean $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|<1, |y|<1\}$ y $\overline{X}_c$ un campo en C definido por

$$\overline{X}_c(x,y) = (1,0).$$

Entonces existe un difeomorfismo de clase C^1

$$h : V_p \to C \qquad (V_p \text{ vecindad de } p \text{ en } M)$$

que transforma trayectorias de $\overline{X}$ en trayectorias de $\overline{X}_c$



Llamaremos a V_p una caja de flujo.

Observamos que este teorema nos dice que en una vecindad de un punto regular, las imagenes de las trayectorias solución bajo h, en $\mathbb{R}^2$, son segmentos de lineas rectas horizontales. De hecho estas curvas en $\mathbb{R}^2$ son tambien solución del campo

$$dh(\overline{X})_{(x,y)} = dh_{h^{-1}(x,y)}(\overline{X}(h^{-1}(x,y)))$$

que podriamos considerar como una representación de $\overline{X}$ en C bajo la función h. Si hacemos, ahora, una pequeña perturbación del campo $dh(\overline{X})$ en el interior de C, digamos $dh(\overline{X}) + \overline{Y}$, donde $\overline{Y}(x,y) \neq \overline{0}$ en interior de C y $\overline{Y}(x,y) = 0$ para todo punto (x,y) en el complemento del interior de C, podemos regresar este campo a la variedad mediante dh^{-1} y tener un nuevo campo en M definido así:

$$\underline{\overline{W}}(p) = \begin{cases} \overline{X}(p) & \text{si } p \notin \text{interior de } V_p \\ dh^{-1}(dh(\overline{X}) + \overline{Y}) & \text{si } p \in \text{interior de } V_p \end{cases}$$

Esta es, en pocas palabras, una de las herramientas principales que vamos a utilizar, sin embargo nos gustaría que $\underline{\overline{W}} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ pero como el teorema sólo nos garantiza que $h \in C^1$, tenemos que $dh^{-1} \in C^0$ por lo que no podemos asegurar que nuestro campo $\underline{\overline{W}}$ sea de clase C^1.

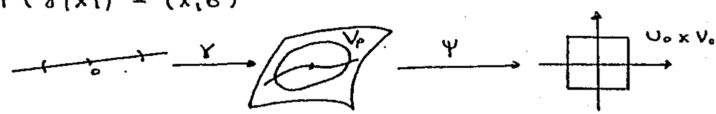
Para superar esta situación, consideremos el siguiente camino: dado $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$, M^2 compacta, $p \in M^2$ y $\overline{X}(p) \neq \overline{0}$ consideremos una carta coordenada (g, U) donde U es vecindad de p y $g(p)=\bar{0}$. Sea $dg\bar{X}=\bar{X}^*$ la representación del campo en esta carta, de hecho, tenemos

$$\bar{X}^*(x,y) = dg_{(g^{-1}(x,y))}\left(\bar{X}(g^{-1}(x,y))\right).$$

Sea $\gamma(t)$ solución de $\bar{X}$ tal que $\gamma(0)=p$, como $\frac{d\gamma(t)}{dt}=\bar{X}(\gamma(t))$ tenemos que $\gamma(t)\in C^2$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Como $\bar{X}(p)\neq 0$ tenemos que $\frac{d\gamma}{dt}\big|_{t=0}$ es no singular (inyectiva), entonces [ ] existen vecindades U_0 y V_p en $\mathbb{R}$ y M respectivamente, V_0 en $\mathbb{R}$ y un difeomorfismo de clase C^2

$$\Psi : V_p \longrightarrow U_0 \times V_0$$

tal que $\Psi(\gamma(x)) = (x,0)$



Esto es, existe una vecindad V_p de p y un difeomorfismo

$$\Psi : V_p \longrightarrow \Psi(V_p) \qquad \text{de clase } C^2$$

tal que la imagen de la intersección de la curva solución de $\bar{X}$ por p y V_p es un intervalo del eje x, que contiene al cero, de hecho $\Psi(p)=0$. Ahora con $d\Psi$ tenemos una representación del campo $\bar{X}$ en $\Psi(V_p)$

$$\bar{X}^*(x,y) = d\Psi_{(\Psi^{-1}(x,y))}\left(\bar{X}(\Psi^{-1}(x,y))\right)$$

donde $\bar{X}^*(0,0) = (L,0)$ con $L>0$

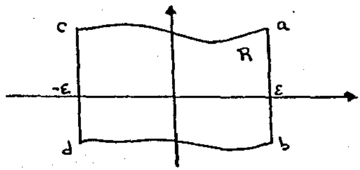
Consideremos un rectángulo curvilíneo R con las siguientes propiedades:

i) R está totalmente contenido en $\Psi(V_p)$.

ii) Si $\bar{X}^* = (\bar{X}_1^*, \bar{X}_2^*)$, entonces para todo (x,y) en R se tiene $\bar{X}_1^*(x,y)>0$.

iii) Los lados $\overline{ca}$ y $\overline{db}$ son arcos de trayectoria de $\underline{X}^*$

iv) los segmentos $\overline{cd}$ y $\overline{ab}$ son verticales y cruzan el eje x en $-\varepsilon$ y ε respectivamente. Con ε suficientemente pequeño estos segmentos son transversales al campo



Llamaremos a $\varphi^{-1}(R) \subset M^2$ una caja de flujo. Consideremos, ahora, una pequeña perturbación de $\underline{X}^*$ en el interior de R, digamos $\underline{X}^* + \underline{Y}$. Regresando este campo a la variedad M^2 tenemos:

$$\underline{W}(p) = \begin{cases} \underline{X}(p) & \text{si } p \notin \text{interior de } \varphi^{-1}(R) \\ \left[d\varphi^{-1}(\underline{X}^* + \underline{Y})\right](p) & \text{si } p \in \text{interior de } \varphi^{-1}(R) \end{cases}$$

Ahora sí podemos asegurar que $\underline{W} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$. Llamaremos a $\varphi^{-1}(R \wedge \text{eje } y)$ una sección transversal a $\underline{X}$ en p.

Sección 2. Las singularidades

Mostraremos aquí que si $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ es estructuralmente estable, entonces solamente hay una cantidad finita de singularidades, todas hiperbólicas.

teorema 4.30 Sean $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M)$ y $p \in M$ una singularidad simple de $\overline{X}$. Entonces existen vecindades $N(\overline{X}) \subset \mathfrak{X}^1(M)$, $U_p \subset M$, de $\overline{X}$ y p respectivamente, y una función continua

$$\rho : N(\overline{X}) \longrightarrow U_p$$

tal que a cada campo $\overline{Y} \in N(\overline{X})$ le asocia una única singularidad de $\overline{Y}$ en U_p. En particular una singularidad simple es aislada.

Demostración Como es una afirmación local podemos suponer que el campo $\overline{X}$ está definido en D^2, $D^2 = \{ \overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\overline{x}\| \leq 1 \}$. Sabemos que $\mathfrak{X}^1(D^2)$ es un espacio de Banach y que

$$\varphi : D^2 \times \mathfrak{X}^1(D^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

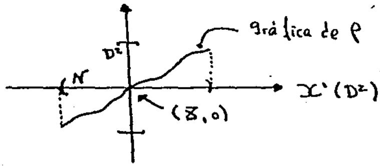
definida por $\varphi(\overline{x}, \overline{Y}) = \overline{Y}(x)$ es de clase C^1. Como $\overline{X}(\overline{o}) = 0$ tenemos que $\varphi(o, \overline{X}) = 0$, además

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, \overline{Y})}{\partial x} \right|_{(0, \overline{X})} = D\overline{X}_{(0)} \qquad \text{donde } D\overline{X}_{(0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

es un isomorfismo (ya que o es una singularidad simple). Por el teorema de la función implícita para espacios de Banach, concluimos que existen vecindades U del o y N de $\overline{X}$, y una función

$$\rho : N \longrightarrow U \qquad \text{de clase } C^1$$

tal que $\varphi(\rho(\overline{Y}), \overline{Y}) = 0$ para todo $\overline{Y}$ en N



La función ρ asigna a cada $\overline{Y}$ en N un único punto $\rho(\overline{Y})$ en U tal que $\overline{Y}(\rho(\overline{Y}))=0$. Como $D\overline{X}_{(0)}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, y como el conjunto de estos isomorfismos es abierto, concluimos que $D\overline{Y}_{(\rho(\overline{Y}))}$ es un isomorfismo (tomando más pequeñas U y N si es necesario). Por lo tanto $\rho(\overline{Y})$ es una singularidad simple de $\overline{Y}$ ∎

Este teorema tambien nos permite concluir lo siguiente: Si $\overline{X}\in\mathfrak{X}^1(M^2)$, M^2 compacta, y $\overline{X}$ solamente tiene singularidades simples, entonces la cantidad de ellas es finita ya que todas son singularidades aisladas.

Consideremos, ahora, el fibrado tangente TM. Sea $M_0=\{(p,0)\mid p\in M\}$ la sección nula. Sabemos que M_0 es una subvariedad de TM difeomorfa a M.

Un campo de vectores $\overline{X}\in\mathfrak{X}^1(M)$ puede ser visto como una transformación de clase C^1 de M en TM, que denotaremos con la misma letra $\overline{X}$. Por tanto P es una singularidad de $\overline{X}$ si y solamente si $\overline{X}(P)\in M_0$.

<u>Lema</u> <u>4.31</u> Sea $\overline{X}\in\mathfrak{X}^1(M^2)$ y $p_0\in M^2$ una singularidad de $\overline{X}$. Entonces p_0 es una singularidad simple de $\overline{X}$ si y solamente si la transformación $p\longrightarrow(p,\overline{X}(p))$ de M en TM es transversal a la sección nula M_0 en p_0.

<u>Demostración</u>. Sea $g:U\longrightarrow\mathbb{R}^2$ una carta local de M, con $g(p_0)=0$.

Sea $TU = \{(p,v) \in TM \mid p \in U,\ v \in T_pM\}$. La función $t_g : TU \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por $t_g(p,v) = (g(p),\ Dg_{(p)}(v))$ es una carta local de TM.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\bar{X}"] \arrow[d, "g"'] & TU \arrow[d, "t_g"] & \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\bar{\bar{X}}^*"'] & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(\bar{x},\bar{y}) = \bar{y}$ y $\bar{X}^*$ es la expresión del campo en las cartas locales. De hecho lo que tenemos es $p \xrightarrow{\bar{\bar{X}}^*} (p, \bar{X}^*(p))$

Si $\bar{X}$ es transversal en p_0, entonces $d\bar{X}_{p_0}(T_{p_0}M)$ es complementario a $T_{p_0}M_0$ en TM. Para $\bar{X}^*$ se tiene que $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{D\bar{\bar{X}}^*_{p_0}} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ donde $d\bar{\bar{X}}^*_{p_0}$ tiene la expresión matricial

$$D\bar{\bar{X}}^*_{p_0} = \begin{bmatrix} I \\ D\bar{X}^*_{p_0} \end{bmatrix}$$

y como $\bar{X}$ es transversal, tenemos que la imagen de $\mathbb{R}^2$ bajo $D\bar{X}^*_{p_0}$ es de dimensión dos, puesto que $I(\mathbb{R}^2)$ y $D\bar{X}^*_{p_0}(\mathbb{R}^2)$ generan todo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Concluimos que $D\bar{X}^*_{p_0}$ es un isomorfismo.

Ahora si $D\bar{X}^*_{p_0}$ es un isomorfismo, entonces $\tilde{I}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$\tilde{I}\binom{x}{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y $D\bar{X}^*_p(\mathbb{R}^2)$ generan $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, entonces $\bar{X}$ es transversal a M_0 ■

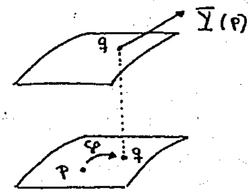
<u>Definición 4.32</u> Sea $\mathcal{G}_0$ el conjunto de los campos $\bar{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ cuyas singularidades son todas simples.

Lema 4.33 El conjunto $\mathcal{G}_0$ es abierto y denso en $\mathcal{X}^1(M^2)$.

Demostración Observemos primero que si $\overline{X}$ tiene todas sus singularidades simples, entonces $\overline{X} : M \longrightarrow TM$ es transversal a M_0. Como el conjunto A de las transformaciones C^1 de M en TM transversales a M_0 es abierto, entonces $\mathcal{G}_0$ es abierto ya que $\mathcal{G}_0 = A \cap \mathcal{X}^1(M^2)$.

Demostraremos ahora la densidad de $\mathcal{G}_0$; sea $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M^2)$ un campo cualquiera, por el teorema 4.25 existen transformaciones $\overline{Y} : M \longrightarrow TM$ transversales a M_0 tan cerca de $\overline{X}$ como deseemos. Sin embargo puede ocurrir que $\overline{Y}$ no sea un campo de vectores. Esto es, si denotamos por $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección $\pi(p, v) = p$, podría ocurrir que $\pi(Y(p)) \neq p$ para algún p en M.

Sabemos que $\pi \circ \overline{X} = id$ en M, si $\overline{Y}$ está suficientemente próximo de $\overline{X}$, entonces $\varphi = \pi \circ \overline{Y}$ está próximo a la identidad en M, y por el teorema 4.26, φ es un difeomorfismo.



Sea $\overline{Z} = \overline{Y} \circ \varphi^{-1}$, esto es,

$$\overline{Z}(q) = \overline{Y} \circ \varphi^{-1}(q) = (q, \overline{Y}(p)).$$

Obtenemos que $\pi \circ \overline{Z} = \pi \circ \overline{Y} \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = Id$.

Por tanto $\overline{Z}$ sí es un campo de vectores en M.

Como $\overline{Y}$ es transversal a M_0 y φ^{-1} es un difeomorfismo próximo a la Id, se tiene que $\overline{Z}$ es transversal a M_0. Además como tomamos $\overline{Y}$ cercano a $\overline{X}$, tenemos que $\overline{Z}$ está cercano a $\overline{X}$ ■

<u>Definición</u> <u>4.34</u> Sea $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$, decimos que $\overline{X}$ es estructuralmente estable si existe una vecindad N de $\overline{X}$, en $\mathfrak{X}^1(M^2)$, tal que para todo $\overline{Y}$ en N se tiene que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topologicamente equivalentes.

<u>Corolario</u> <u>4.35</u> Si $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ es estructuralmente estable, entonces $\overline{X}$ tiene una cantidad finita de singularidades.

<u>Demostración</u> Sea $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ estructuralmente estable, sea N la vecindad mencionada en la definición 4.34. Como $\mathcal{G}_0$ es denso, se tiene que existe $\overline{Y} \in \mathcal{G}_0$ tal que $\overline{Y} \in N$. Sabemos que $\overline{Y}$ solo tiene una cantidad finita de singularidades; como $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topologicamente equivalentes y el homeomorfismo de esta equivalencia transforma singularidades de $\overline{X}$ en singularidades de $\overline{Y}$ en forma biunívoca, concluimos que $\overline{X}$ tiene solo una cantidad finita de ellas ∎

<u>Definición</u> <u>4.36</u> Sea $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ y p en M una singularidad de $\overline{X}$. Decimos que p es una singularidad hiperbólica si

$$D\overline{X}_{(p)} : T_pM \longrightarrow T_pM$$

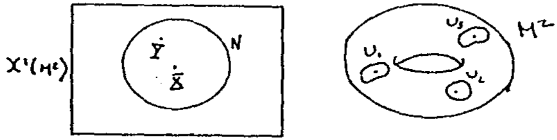
es un campo lineal hiperbólico.

<u>Definición</u> <u>4.37</u> Llamaremos $\mathcal{G}_1$ a el subconjunto de $\mathfrak{X}^1(M^2)$ tal que si $\overline{X} \in \mathcal{G}_1$ entonces la singularidades de $\overline{X}$ son todas hiperbólicas.

<u>Lema</u> <u>4:38</u> $\mathcal{G}_1$ es denso en $\mathfrak{X}^1(M^2)$.

<u>Demostración</u>. Mostraremos que $\mathcal{G}_1$ es denso en $\mathcal{G}_0$, y como $\mathcal{G}_0$ es denso en $\mathfrak{X}^1(M^2)$ se sigue que $\mathcal{G}_1$ es denso en $\mathfrak{X}^1(M^2)$.

Sea $\overline{X}$ en $\mathcal{G}_0$, sean $P_1, P_2, \ldots, P_k \in M$ sus singularidades. Por el teorema 4.30 existen vecindades $N, U_1, \ldots, U_k$ de $\overline{X}, P_1, \ldots, P_k$ respectivamente, y funciones continuas $\rho_j : N \longrightarrow U_j$ $j = 1, 2, \ldots, k$ tales que para todo campo $\overline{Y}$ en N, $\rho_j(\overline{Y})$ es la única singularidad de $\overline{Y}$ en U_j.



Podemos suponer que las vecindades U_j son disjuntas. Si p en M es tal que $p \in M - \bigcup_{j=1}^{k} U_j$, entonces $\overline{X}(p) \neq \overline{0}$ y por la compacidad de $M - \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ existe δ mayor que cero tal que $\|\overline{X}(p)\| \geq \delta$ para todo p en $M - \bigcup_{j=1}^{k} U_j$, por lo tanto, haciendo mas pequeña N si es necesario, se tiene que si $\overline{Y} \in N$, entonces $\overline{Y}$ solo tiene singularidades en $\bigcup_{j=1}^{k} U_j$.

Mostraremos que existe un $\overline{Y} \in \mathcal{G}_1$ arbitrariamente cercano a $\overline{X}$.

Observemos que si $\mu > 0$ es suficientemente pequeño, entonces

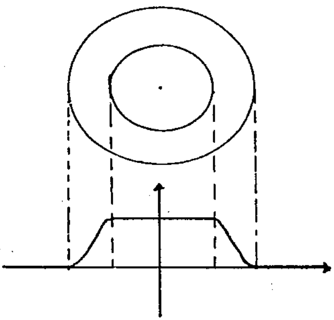
$$D\overline{X}_{(P_j)} + \mu I$$

es un campo lineal hiperbólico de $T_{P_j}M$ en $T_{P_j}M$ para todo $j = 1, \ldots k$. Basta, por tanto, que dada una vecindad $N_1 \subset N$ de $\overline{X}$, exista $\overline{Y} \in N_1$ tal que $\overline{Y}_{(P_j)} = 0$ y

$$D\overline{Y}_{(P_j)} = D\overline{X}_{(P_j)} + \mu I$$

Sea $V_j \subset U_j$ una vecindad de P_j, sea $g_j : V_j \longrightarrow B_3(0) \subset \mathbb{R}^2$ una carta local con $g_j(P_j) = (0,0)$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ tal que $\varphi(B_1(0)) = 1$ y $\varphi(\mathbb{R}^2 - B_3(0)) = 0$, donde $B_1(0)$ y $B_3(0)$ denotan, respectivamente, la bolas de radio 1 y 3 en $\mathbb{R}^2$ con centro en 0.

Denotamos por $g_{j*}\overline{X}$ la expresión del campo $\overline{X}$ en la carta local g_j.



$$g_{j*}\overline{X}(q) = Dg_{j\,(g_j^{-1}(q))}\,\overline{X}\,(g_j^{-1}(q)) .$$

Definimos un nuevo campo $\overline{Y}$ en $\mathfrak{X}^1(M^2)$ de la siguiente forma

$$\overline{Y}(p) = \begin{cases} \overline{X}(p) & \text{si } p \in M - \bigcup_{j=1}^{k} V_j \\ (Dg_j)^{-1}_{(g_j(p))}\left[g_{j*}\,\overline{X}\,(g_j(p)) + \mu\,\varphi(g_j(p))\,I\,(g_j(p))\right] & \text{si } p \in V_j\ ,\ I = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \end{cases}$$

Observamos que $\overline{Y}(p_j) = (Dg_j)^{-1}_{0}\left[g_{j*}\overline{X}(0) + \mu\, I(0)\right] = \overline{0}$ para $j=1,\dots,k$.

Esto es, $\overline{Y}$ y $\overline{X}$ tienen el mismo conjunto de singularidades.

Si $p \in V_j$ podemos escribir

$$\overline{Y}(p) = (Dg_j)^{-1}_{g_j(p)}\, g_{j*}\overline{X}\,(g_j(p)) + (Dg_j)^{-1}_{g_j(p)}\,\mu\,\varphi(g_j(p))\,I\,(g_j(p))$$
$$= \overline{X}(p) + \mu\,(Dg_j)^{-1}_{g_j(p)}\, I\,(g_j(p))$$

por lo tanto $\overline{Y}(p) = \overline{X}(p) + \mu\, g_{j*}^{-1}\, I(p)$

entonces $D\overline{Y}_{p_j} = D\overline{X}_{p_j} + \mu\, I$.

Si tomamos μ suficientemente pequeño, tenemos que $\overline{Y} \in \mathcal{N}_1$ y $\overline{Y}$ solo tiene singularidades hiperbólicos ∎

<u>Corolario</u> <u>4.39</u> Si $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ es estructuralmente estable, entonces $\overline{X}$ es elemento de $\mathcal{G}_1$.

<u>Demostración</u> Sea $p_k \in M$, sea $\overline{X}$ estructuralmente estable tal que p_k es singularidad de $\overline{X}$, supongamos que $D\overline{X}_{p_k}$ no es hiperbólico. Entonces, con la misma construcción del Lema 4.38, encontramos $\overline{Y} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ tal que

$\overline{Y}(p) = \overline{X}(p)$ para todo $p \in M - V_K$, donde V_K es una vecindad de p_K que no contiene otro punto singular de $\overline{X}$ y tal que

$$g_K : V_K \longrightarrow B_3(0) \quad \text{y}$$

$$\overline{Y}(p) = (Dg_K)^{-1}_{g_K(p)} \left[g_{K*} \overline{X}(g_K(p)) + \mu \varphi_K(g_K(p)) I(g_K(p)) \right]$$

Por lo tanto $\overline{Y}(p_K) = \overline{0}$ y $D\overline{Y}_{p_K} = D\overline{X}_{p_K} + \mu I$.

Si $\mu > 0$ obtenemos una fuente o punto silla para $\overline{Y}$ en p_K, si $\mu < 0$, obtenemos un sumidero o un punto silla en p_K. Como $\overline{Y}$ y $\overline{X}$ coinciden en los otros puntos singulares y $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son topologicamente equivalentes (para $|\mu|$ suficientemente pequeña) tenemos que una fuente es topologicamente equivalente a una silla o que un sumidero es equivalente a una silla, lo que es una contradicción. Por tanto toda singularidad de $\overline{X}$ es hiperbólica ∎

Sección 3. Conjuntos Límite

Nuestro objetivo en esta parte es mostrar que si $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ es estructuralmente estable, entonces el ω y α – conjunto límite de toda trayectoria sólo puede ser una singularidad o una órbita cerrada.

Definición 4.40 Decimos que una trayectoria γ, no singular, del campo $\overline{X}$ es recurrente si:

$$\gamma \subset \alpha(\gamma) \quad ó \quad \gamma \subset \omega(\gamma).$$

Definición 4.41 Decimos que γ es recurrente no trivial si γ no es una órbita cerrada

Definición 4.42 Un conjunto μ (en M) es minimal si es compacto e invariante bajo el flujo de $\overline{X}$ y ningún subconjunto propio de él tiene estas propiedades.

Lema 4.43 Si μ es minimal, $p \in \mu$ y γ la trayectoria que pasa por p, entonces $\alpha(\gamma) = \omega(\gamma) = \mu$.

Demostración Ya que $\omega(\gamma)$ es cerrado, por tanto compacto en M, e invariante bajo el flujo, tenemos que $\mu \subset \omega(\gamma)$. Además, como μ es invariante, tenemos $\omega(\gamma) \subset \mu$. Por tanto $\mu = \omega(\gamma)$. La otra igualdad se demuestra en forma análoga ∎

Definición 4.44 A un conjunto minimal μ que no es una órbita singular o cerrada lo llamaremos minimal no trivial.

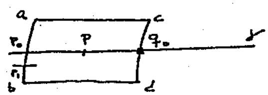
<u>Lema</u>. <u>4.45</u>. Si existe un conjunto $\mathcal{M}$ minimal no trivial, entonces para todo p en $\mathcal{M}$ la órbita por p, $\gamma(p)$, es recurrente no trivial.

<u>Demostración</u> Sea $p \in \mathcal{M}$, consideremos γ la trayectoria que pasa por p. Como $\mathcal{M}$ es invariante tenemos que $\gamma \subset \mathcal{M}$. La órbita γ no es cerrada ya que $\mathcal{M}$ es minimal no trivial. Por Lema 4.43 tenemos que $\omega(\gamma) = \mathcal{M}$. Por lo tanto $\gamma \subset \omega(\gamma)$, γ es recurrente no trivial ■

En los siguientes lemas mostraremos que la existencia de órbitas recurrentes no triviales, para un campo $\overline{X}$, es una condición inestable. Esto es, podemos encontrar un campo $\overline{Y}$ tan cercano como queramos al campo $\overline{X}$, tal que $\overline{Y}$ no tiene orbitas con recurrencia no trivial. Al final concluimos que si $\overline{X}$ es estructuralmente estable entonces todas las órbitas de $\overline{X}$ tienen recurrencia trivial.

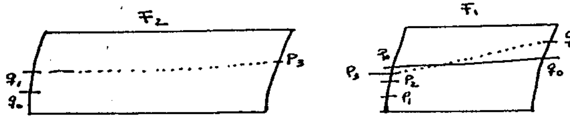
<u>Lema</u> <u>4.46</u> Sean $\overline{X} \in \mathfrak{X}^r(M^2)$ y γ una órbita recurrente no trivial. Entonces por cualquier punto p en γ existe un circulo (o sea, una curva simple cerrada) transversal a $\overline{X}$.

<u>Demostración</u> Consideremos una caja de flujo que contiene a p. Los segmentos $\bar{ab}$ y $\bar{cd}$ son transversales a $\overline{X}$. Como $p \in \omega(\gamma)$, γ intersecta $\bar{ab}$ una cantidad infinita de veces



Sea P_1 la primera vez que γ intersecta $\bar{ab}$, supongamos que P_1 está abajo de P_0 (recordemos que M^2 es orientable).

Tomemos otra caja de flujo que contenga al arco $\overline{q_0 P_1}$. En esta caja tomamos un arco de trayectoria de $\overline{X}$ que sale de un punto q_1 de cd (arriba de q_0) e intersecta $\overline{ab}$ en P_2 (arriba de P_1)



En F_2 podemos tomar un arco $\overline{q_1P_3}$ con P_3 entre P_2 y P_0, tal que el arco $\overline{q_1P_3}$ sea transversal al campo $\overline{X}$. Completamos el círculo uniendo en F_1 los puntos P_3 y q_1 con un arco transversal a $\overline{X}$. Tal arco debe tener en P_3 y q_1 la misma dirección tangente que el arco anterior. Llamemos C al círculo construido. Si $p \notin C$, entonces mediante el flujo de $\overline{X}$ trasladamos C hasta que $p \in C$. ∎

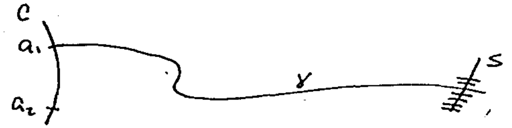
Observemos que si C es un círculo transversal a $\overline{X}$ y nos fijamos en $\Gamma \subset C$, el conjunto de puntos cuyas trayectorias vuelven a intersectar C, podemos definir la transformación de Poincare

$$P : \Gamma \longrightarrow C$$

que a cada punto $x \in \Gamma$ le asocia la primera vez que la trayectoria positiva por x, $\gamma^+(x)$, vuelve a intersectar C. Por el teorema del flujo tubular Γ es un conjunto abierto en C. Por tanto $\Gamma = C$ ó Γ es la unión a lo más numerable de intervalos abiertos en C.

<u>Lema 4.47</u> Supongamos que $\Gamma \neq C$ y sea (a_1, a_2) un intervalo maximal en C ((a_1,a_2) es uno de los intervalos que forman Γ). Entonces $\omega(a_1)$ es un punto silla (lo mismo para $\omega(a_2)$).

<u>Demostración</u> Mostraremos primero que $\omega(a_1)$ no contiene puntos regulares. Supongamos que $x \in \omega(a_1)$ es tal que $\overline{X}(x) \neq 0$. Sea S una sección transversal a $\overline{X}$ en x. Como $x \in \omega(a_1)$ y γ no es cerrada, entonces $\gamma(x)$ intersecta S una cantidad infinita de veces.



Por otro lado, si tomamos $q \in (a_1, a_2)$ el número N de veces que el arco $qP(q)$ intersecta S es finito, ya que S es transversal a $\overline{X}$ y $qP(q)$ es compacto. Por continuidad con respecto a condiciones iniciales el número N es constante en una vecindad de q, y como (a_1, a_2) es conexo, entonces el número N es el mismo para todo $r \in (a_1, a_2)$ .....(*)

Ahora, recordemos que $\gamma(a_1)$ intersecta S una cantidad infinita de veces y por continuidad de soluciones con respecto a la condición inicial, se tiene que dado $n > N$ existe $q \in (a_1, a_2)$, q cercano a a_1, tal que $\gamma(q)$ cruza S n veces lo cual es una contradicción con (*). Por tanto $\omega(a_1)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(a_1)$ es un punto crítico. Este punto crítico no puede ser un sumidero porque entonces para q suficientemente cercano a a_1 se tendría también que $\omega(q) = \omega(a_1)$ y P no estaría definida en q. Por lo tanto $\omega(a_1)$ es un punto silla. En forma análoga se muestra que $\omega(a_2)$ es un punto silla. ∎

Observemos que como sólo hay una cantidad finita de sillas (si $\overline{X}$

es elemento de g_i), entonces se tiene que Γ es la unión finita de intervalos abiertos en C.

Si consideramos P^{-1}, obtenemos también que P^{-1} está definida sólo en una cantidad finita de intervalos abiertos de C, en cuyos extremos pasan trayectorias que provienen de puntos silla.

<u>Lema 4.48</u> Si $P: \Gamma \to C$ está definida en todo C. Esto es $\Gamma = C$. Entonces M^2 es el toro (T^2).

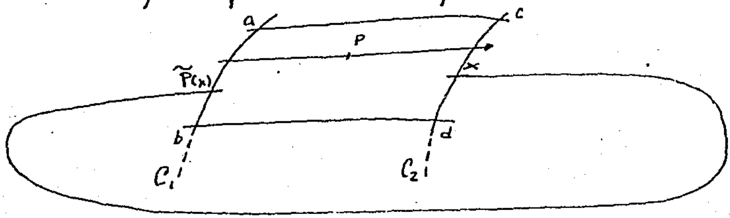
<u>Demostración</u> Sea $L = \{ \varphi_t(C) \mid t \in \mathbb{R} \}$, φ_t flujo de X. L es abierto en M^2 por la continuidad de las soluciones con respecto a la condición inicial. Además L es cerrado ya que si tenemos $\{x_n\} \subset L$ convergente a x, nos fijamos en $\{q_n\}$ tales que $q_n \in C$, $x_n \in \varphi_{t_n}(q_n)$. Como C es compacto se tiene que $\{q_n\} \to q$, $q \in C$. Además la sucesión de tiempos t_n también está acotada. Por tanto $\{x_n\} \to x$ donde $x = \varphi_T(q)$, esto es $x \in L$. Como M^2 es conexa tenemos que $L = M^2$. Concluimos también que X no tiene singularidades. Sabemos por el teorema de Hopf [God.] que las únicas variedades, M^2, que admiten un campo $X \in C^1$ sin singularidades son el toro (T^2) y la botella de Klein (K^2). Como M^2 es orientable se tiene $M^2 = T^2$ ∎

<u>Lema 4.49</u> Si $X \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ es un campo sin singularidades y sin órbitas cerradas, entonces X puede ser aproximado por un campo $\overline{W}$ que posee una órbita cerrada.

<u>Demostración</u> Sea X tal que no posee órbitas cerradas ni singularidades. Sea $x \in M^2$ y nos fijamos en $\omega(x)$. Este conjunto es minimal no trivial. Por tanto si $p \in \omega(x)$, tenemos por lema 4.45 que $\gamma(p)$ es recurrente no trivial. En

resumen tenemos en M^2 un campo sin singularidades ni orbitas cerradas y con una orbita recurrente no trivial, entonces si consideramos C un circulo transversal a $\overline{X}$ en p obtenemos que la transformación de Poincare $P:\Gamma \to C$ está definida en todo Γ y por el lema 4.48 obtenemos que M^2 es T^2.

Ahora, sea $C_1 = \varphi_{-\delta}(C)$ y $C_2 = \varphi_{\delta}(C)$ con $\delta \geq 0$ pequeño. C_1 y C_2 son círculos transversales a $\overline{X}$. Consideremos una caja de flujo F, $p \in F$, cuyos lados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ pertenezcan a C_1 y C_2

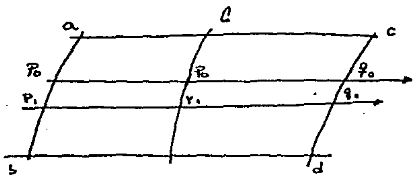


Definimos $\tilde{P}: C_2 \to C_1$ asociando a cada punto x en C_2 el punto de C_1 donde la trayectoria positiva de x intersecta C_1 por primera vez. Observemos que tambien tenemos

$$\varphi_{-2\delta} : C_2 \to C_1$$

y como M es orientable $\tilde{P}$ y $\varphi_{-2\delta}$ inducen la misma orientación en C_1. Sea $p_i = \tilde{P}^i(q_0)$, donde q_0 es tal que $\varphi_\delta(p) = q_0$. Como $\gamma(p)$ es recurrente; existe una sucesión de índices n_i tales que $\{P_{n_i}\}$ converge a P_0. Abusando de la notación podemos suponer que $\{P_i\}$ converge a P_0 y que P_i siempre está abajo de P_0 donde $P_0 = \varphi_{-\delta}(P)$.

Llamaremos $r_i = \varphi_\delta(P_i)$ y $q_i = \varphi_{2\delta}(P_i)$.



Observamos que en nuestra caja de flujo el círculo C se corresponde con el eje "y", y la trayectoria por p con el eje "x".

Sea $\Psi : M \to \mathbb{R}$ una función positiva de clase C^∞ tal que $\Psi \equiv 0$ en $M-F$ y $\Psi > 0$ en el interior de F. Consideremos la familia de campos

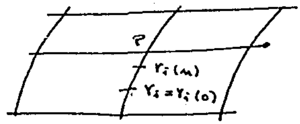
$$\overline{Z}_{(\mu)} = \overline{X} + \varepsilon \mu \Psi \overline{Y}$$

donde $\overline{Y}$ es el campo $(0,1)$. Tomando ε pequeño $\overline{Z}_{(\mu)}$ está próximo a $\overline{X}$ para toda $\mu \in [0,1]$.

Fijamos un intervalo cerrado I en $\overline{ab}$ que contenga a p_0 en su interior. Dado $\varepsilon > 0$ nos fijamos para cada punto $x \in I$, en las trayectorias de $\overline{Z}_{(0)}$ y $\overline{Z}_{(1)}$ que pasan por x y llamamos $\overline{\delta}(x)$ a la longitud del segmento determinado por las intersecciones de estas trayectorias y el eje "y" (C). Como I es compacto se tiene que existe $\overline{\delta} > 0$ tal que $\overline{\delta} = \min\{\overline{\delta}(x) \mid x \in I\}$.

Fijemos un índice i tal que la distancia entre p y $\varphi_\delta(p_i) = r_i$ sea menor que $\overline{\delta}$. Llamemos $\gamma(\mu)$ la trayectoria de $\overline{Z}_{(\mu)}$ que pasa por p. Como $\tilde{P}$ está definida en todo $\overline{cd}$ se tiene que $\gamma(\mu)$ regresa un número infinito de veces al segmento $\overline{ab}$. Podemos determinar un cierto μ_0 suficientemente pequeño para que para toda $\mu \leq \mu_0$, $\gamma(\mu)$ intersecte I en la i-esima vez en el punto $p_i(\mu)$ arriba de p_i. De tal forma que pasemos continuamente del arco

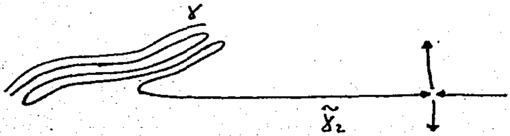
PP_i al arco $PP_i(u)$. El correspondiente punto $r_i(u)$ donde $\gamma(u)$ intersecta el eje "y" está arriba de r_i. Tenemos, así, que la ordenada de $r_i(u)$ es una función continua creciente de u.



Si $r_i(u_0)$ está arriba de P, entonces para alguna $u < u_0$ $r_i(u) = P$ y tenemos una órbita cerrada. Si $r_i(u)$ está abajo de P consideramos $r_i(u)$ para valores $u > u_0$ y para algún $u \leq 1$ tenemos que $r_i(u) = P$. Esto último es posible ya que la distancia entre r_i y P es menor que $\bar{\delta}$ y la distancia entre r_i y $r_i(1)$ es mayor que $\bar{\delta}$ y portanto $r_i(1)$ está arriba de P. Finalmente siempre es posible obtener una órbita cerrada para el campo $\bar{Z}(u)$, donde $\bar{Z}(u)$ esta arbitrariamente próximo (tanto como queramos) a $\bar{X}$. Sea $\bar{Z}(u) = \bar{W}$ y terminamos ■

<u>Lema. 4.50</u> Sea $\bar{X} \in \mathcal{G}_1$ tal que $\bar{X}$ tiene al menos una singularidad. Si existe una órbita de $\bar{X}$ ω-recurrente no trivial, entonces $\bar{X}$ puede ser aproximado por un campo $\bar{W}$ que presenta una unión de sillas más que $\bar{X}$.

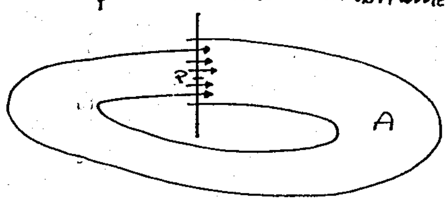
<u>Demostración</u> Sea γ ω-recurrente no trivial; mostraremos que existe una separatriz estable $\tilde{\gamma}_2$ tal que se anula en γ. Esto es, $\gamma \subset \alpha(\tilde{\gamma}_2)$



Consideremos un punto p en γ y un círculo C transversal a $\bar{X}$ en p. Sea $T: \Gamma \subset C \to C$ la tranformación de Poincaré definida en Γ. Sabemos que $\Gamma \neq C$ (en caso contrario no habría singularidades). Supongamos que γ no es anulada por separatrices estables, esto es, supongamos que existe un intervalo en C conteniendo a p y disjunto de separatrices estables. Sea $I \subset C$ el intervalo maximal que satisface esta propiedad.

Como γ es ω-recurrente y $p \in \gamma$, entonces $T^k(p) \in I$ para algún entero $k > 0$. Afirmamos que $T^k(I) \subseteq I$. Observemos que primero que $T^k(I) \cap I \neq \phi$ ya que $T^k(p) \in I$. Ahora, si $T^k(I)$ no es subconjunto de I implica que $T^k(I)$ tendría como punto interior a alguno de los extremos de I. Como I es el intervalo maximal tenemos que $T^k(I)$ tiene puntos que pertenecen a separatrices estables, y como esas separatrices son invariantes bajo el flujo concluimos que I tiene puntos de separatrices estables lo que es una contradicción. Por tanto $T^k(I) \subseteq I$.

Con la función T^k podemos construir una región A que contiene a p y es homeomorfa a un anillo e invariante bajo el flujo φ_t, $t > 0$



Pero esto no es posible, pues γ no podría ser ω recurrente no trivial en A. Por tanto γ sí es anulada por una separatriz estable $\hat{\gamma}_2$.

Mostraremos, ahora, que γ es acumulada por alguna separatriz inestable o ella misma es una separatriz inestable.

Supongamos que es posible encontrar un intervalo en C, I, tal que $p \in I$ y I es disjunto de separatrices inestables. Como γ es ω-recurrente tenemos que existe $k>0$ tal que $T^{k}(I) \cap I \neq \phi$. Concluimos que para algún $q \in I$, $T^{-k}(q)$ está bien definida y $T^{-k}(q) \in I$.

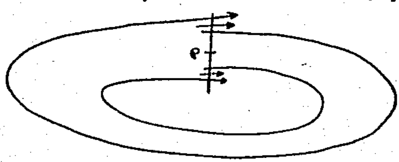
Existen dos posibilidades a considerar: T^{-k} está definido en todo I o no lo está.

<u>Caso 1</u>. T^{-k} no está definida en todo el arco I.

En este caso existe $z \in I$ cuya órbita negativa "muere" en una silla, en particular $z \in I \cap \tilde{\gamma}$ para alguna separatriz inestable $\tilde{\gamma}$; lo que contradice la definición de I

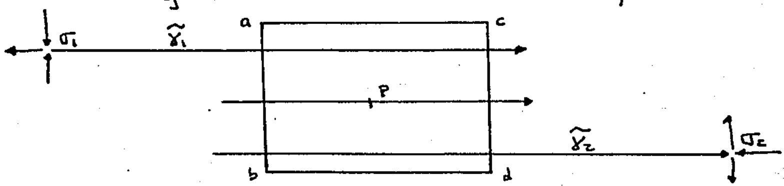
<u>Caso 2</u> T^{-k} bien definida en todo I

Tenemos, entonces, que $T^{-k}(I) \subseteq I$ por una argumentación análoga a la realizada al inicio del lema. Encontramos nuevamente una región A homeomorfa a un anillo tal que $p \in A$ y el campo puede ser transversal a A en algunos (dos) subconjuntos de I, donde $\overline{X}$ señala hacia afuera. Nuevamente γ no podría ser ω-recurrente en esas condiciones. Por tanto γ sí es aproximada (acumulada) por una separatriz inestable $\tilde{\gamma}_1$.



Ahora, sea $\widetilde{\gamma}_1$ una separatriz inestable tal que $\widetilde{\gamma}_1 = \gamma$ ó $\widetilde{\gamma}_1$ se acumula en γ, sea $\widetilde{\gamma}_2$ una separatriz estable que se acumula en γ. Consideremos los círculos $C_1 = \varphi_{-\delta}(C)$ y $C_2 = \varphi_{\delta}(C)$ transversales a $\overline{X}$ (φ_t es el flujo de $\overline{X}$). Sean $T: \Gamma \subset C_2 \to C_1$ la transformación de Poincaré y F una caja de flujo que contiene a p. Como el número de sillas es finito ($\overline{X} \in \mathcal{G}_1$) podemos tomar a F disjunto de uniones de sillas que ya tenga $\overline{X}$.

Sean σ_1 y σ_2 las sillas asociadas a $\widetilde{\gamma}_1$ y $\widetilde{\gamma}_2$



Queremos mostrar que con una pequeña perturbación del campo $\overline{X}$ obtenemos un nuevo campo con una unión de sillas mas que $\overline{X}$.

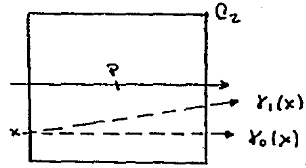
Sea Ψ una función C^∞ tal que $\Psi(\text{int}\, F) > 0$ y $\Psi(M - F) = 0$, sea $\overline{Y}$ el campo $\overline{Y}(q) = (0,1)$ (apunta hacia arriba).

Consideremos la familia de campos

$$\overline{Z}(\mu) = \overline{X} + \varepsilon\mu\Psi\overline{Y}$$

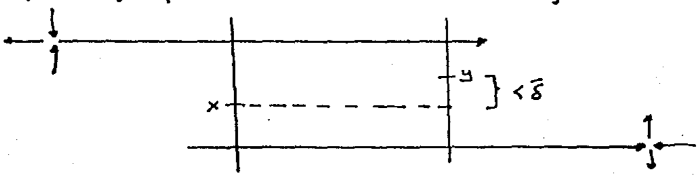
donde $\varepsilon > 0$ y $\mu \in [0,1]$. Tomando ε pequeño, $\overline{Z}(\mu)$ está próximo a $\overline{X}$ para toda μ.

Fijemos un pequeño intervalo cerrado I en $[a,b]$ que contiene a $P_0 = \varphi_{-\delta}(p)$. Llamaremos $\gamma_\mu(x)$ la órbita de $\overline{Z}(\mu)$ que pasa por x para todo x en I. Sea $\bar{\delta}(x)$ igual a la distancia entre $\gamma_0(x) \cap C_2$ y $\gamma_1(x) \cap C_2$, sea $\bar{\delta} = \min\{\bar{\delta}(x) \mid x \in I\}$, $\bar{\delta}$ es estrictamente mayor que cero ya que I es compacto. Sean x_0 la primera vez que $\tilde{\gamma}_1$ intersecta $\overline{ab}$ y y_0 la primera vez que $\tilde{\gamma}_2$ intersecta $\overline{cd}$ (para $t<0$). Observemos que los



arcos $\overline{\sigma_1 x_0}$ y $\overline{y_0 \sigma_2}$ no son afectados por la familia de perturbaciones propuestas.

Tomemos, ahora, un punto $x \in \tilde{\gamma}_1 \cap I$, cercano a p_0 y un punto "y" en $\tilde{\gamma}_2 \cap C_2$ tal que la distancia entre y y $\varphi_{2\delta}(x)$ sea menor que $\bar{\delta}$. Todo esto es posible ya que p_0 es elemento de $\omega(\tilde{\gamma}_1)$ y de $\alpha(\tilde{\gamma}_2)$.



El punto x corresponde a la i-ésima intersección de $\tilde{\gamma}_1$ con C_1, $i \geq 0$, y el punto y a la j-ésima intersección de $\tilde{\gamma}_2$ con C_2 (si tomamos el flujo de $-X$), $j \geq 0$, Supongamos que x está abajo de y en F.

Consideremos la transformación que a cada $\mu \in [0,1]$ le asocia la i-ésima intersección $X(\mu)$ de la separatriz $\tilde{\gamma}_1(\mu)$ del campo $\bar{Z}(\mu)$ con C_1. Observemos que $X = X(0)$. Consideremos $Y(\mu)$ la j-ésima intersección de la separatriz $\tilde{\gamma}_2(\mu)$ del campo $\bar{Z}(\mu)$ con C_2.

Como M^2 es orientable, $x(u)$ es monótona creciente en $u\in[0,1]$ con imagen en $[a,b]$, y $y(u)$ es monótona decreciente en $[0,1]$ con imagen en $[c,d]$.

Consideremos dos casos:

1.- Supongamos que $x(u)$ y $y(u)$ están bien definidas para todo u en $[0,1]$. Entonces existe u_0 en $(0,1)$ tal que la distancia entre $\varphi_{2\delta}(x(u_0))$ y $y(u_0)$ es cero, ya que $x(u)$ y $y(u)$ son continuas y tenemos que la distancia entre $\varphi_{2\delta}(x(0))$ y $y(0)$ era estrictamente menor que $\bar{\delta}$. Por tanto sí existe $u_0\in(0,1)$ tal que $x(u)$ y $y(u)$ están en la misma trayectoria. Concluimos que $\bar{\bar{Z}}(u)$ tiene una unión de sillas mas que $\underline{X}$.

2.- Supongamos que una de las transformaciones, por ejemplo $x(u)$ no este definida para todo u en $[0,1]$. Entonces $\tilde{\gamma}_1(u_0)$ para algún u_0 en $(0,1)$ pasa por algún punto extremo del dominio de definición de T y por el lema 4.47, tenemos que $\tilde{\gamma}_1(u_0)$ va a un punto silla σ_3 y ya tenemos una nueva unión de sillas.

Para terminar llamamos $\underline{W}$ a $Z(u_0)$ ∎

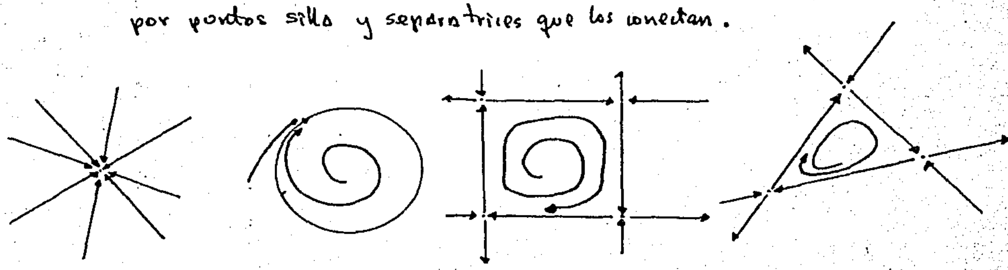
<u>Lema</u> <u>4.51</u> El campo $\underline{Y}_1\in\mathcal{G}_1$ puede ser aproximado por un campo $\underline{Y}_1'\in\mathcal{G}_1$ tal que todos sus conjuntos minimales sean triviales.

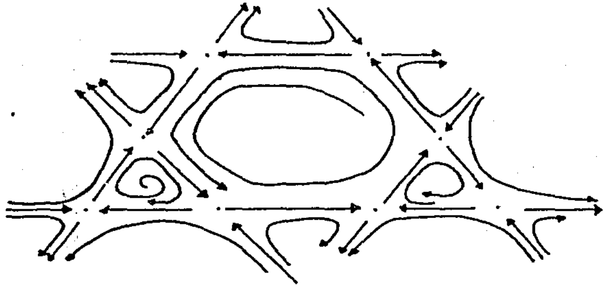
<u>Demostración</u> Supongamos que μ es un conjunto minimal, de $\underline{Y}_1$, no trivial. Sea $p\in\mu$ y sea C un circulo transversal a $\underline{Y}_1$ que pase por p. Definimos $T:\Gamma\to C$ como antes.

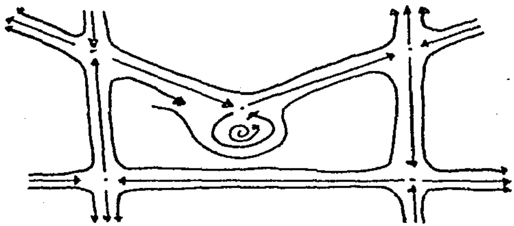
Caso 1.- Si $\Gamma = C$, entonces $M^2 = T^2$. Por el lema 4.49, existe $\bar{Y}_1'$ un campo cercano a $\bar{Y}_1$ tal que $\bar{Y}_1'$ tiene una órbita cerrada γ. Dado que $\bar{Y}_1'$ no tiene puntos críticos, se tiene que γ no acota una celda, y por tanto $T^2 - \gamma$ es homeomorfo a un cilindro. Pero en un cilindro no puede haber recurrencias no triviales. Concluimos que $\bar{Y}_1'$ tiene sólo recurrencias triviales.

Caso 2.- Si $\Gamma \neq C$, entonces $\bar{Y}_1$ si tiene singularidades, y por el lema 4.50, $\bar{Y}_1$ puede ser aproximado por $\bar{Y}_{1,2}$ donde $\bar{Y}_{1,2}$ presenta una unión de sillas mas que $\bar{Y}_1$. Si $\bar{Y}_{1,2}$ tiene conjuntos minimales no triviales hacemos una nueva aproximación $\bar{Y}_{1,3}$, que a su vez presenta una ligazón nueva de sillas. Como la cantidad de sillas es finita (digamos m), entonces se pueden hacer a lo mas $2m$ uniones de sillas, y por tanto $\bar{Y}_1$ puede aproximarse por $\bar{Y}_1'$ con todos sus conjuntos minimales triviales ∎

<u>Lema</u> <u>4.52</u> Conservando la notación del lema anterior. $\bar{Y}_1'$ puede ser aproximado por un campo $\bar{Y}_2'$ tal que el α y ω-conjunto límite de toda trayectoria está formado por una singularidad, una órbita cerrada o una gráfica cerrada compuesta por puntos silla y separatrices que los conectan.







<u>Demostración</u> Sea γ una trayectoria de Y_i, supongamos que $\omega(\gamma)$ no es una singularidad ni una orbita cerrada ni una gráfica cerrada. Sea $\mu \subset \omega(\gamma)$ un conjunto minimal. Observemos que μ no puede ser un sumidero ya que en ese caso $\omega(\gamma) = \mu$, pero $\omega(\gamma)$ no es una singularidad; por razón similar μ no puede ser una órbita cerrada.

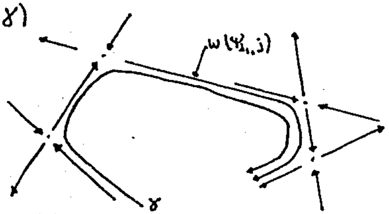
Ahora dividamos en dos casos:

1.- Supongamos que $\omega(\gamma)$ no contiene singularidades. Como μ no es órbita cerrada y $\omega(\gamma)$ no tiene puntos singulares, concluimos que μ es no trivial, lo cual contradice el hecho de que todos los conjuntos minimales de Y_i son triviales.

2.- $\omega(\gamma)$ contiene singularidades. Estas singularidades solo pueden ser puntos silla. Además, como hemos supuesto que $\omega(\gamma)$ no es una sola singularidad,

$\omega(\gamma)$ contiene varios puntos silla, digamos $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Observemos que las separatrices que unen estos puntos silla tambien pertenecen a $\omega(\gamma)$.

Llamaremos $\Psi(i,1)$ y $\Psi(i,2)$ a las separatrices del punto silla s_i $i=1,2,\ldots,m$. Como $\omega(\gamma)$ no es una gráfica cerrada, se tiene que para algún indice i_1 una de las separatrices de s_{i_1}, $\Psi(i_1,j)$ es tal que $\Psi(i_1,j) \subset \omega(\gamma)$ y $\omega(\Psi_{i_1,j})$ no es una sola singularidad, ni una órbita cerrada ni una gráfica cerrada. Ademas $\omega(\Psi(i_1,j))$ está contenido en $\omega(\gamma)$



Siguiendo el mismo razonamiento obtenemos separatrices $\Psi(i_1,j)$, $\Psi(i_2,j)\ldots,\Psi(i_k,j)$ tales que

$$\Psi(i_k,j) \subset \omega(\Psi(i_{k-1},j)) \quad y \quad \omega(\Psi(i_{k-1},j)) \supset \omega(\Psi(i_k,j))$$

de hecho tenemos

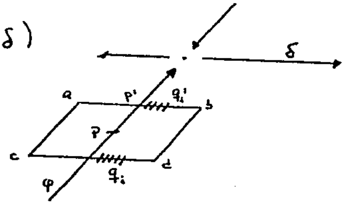
$$\omega(\gamma) \supset \omega(\Psi(i_1,j)) \supset \cdots \supset \omega(\Psi(i_k,j)) \cdots$$

Dado que sólo hay una cantidad finita de separatrices, debe existir una separatriz $\Psi(i,j)$ tal que

$$\Psi(i,j) \subset \omega(\Psi(i,j))$$

Llamaremos δ a $\Psi(i,j)$. Por tanto $\delta \subset \omega(\delta)$.

Observemos que existe otra separatriz, Ψ, que converge al punto silla de δ y tal que $\varphi \subset \omega(\delta)$



Consideremos una pequeña caja de flujo R en un punto p en φ, y construida de tal forma que la trayectoria por p cruce la frontera de R en p' y no vuelva a intersectar R. Además R tan pequeña para que sea disjunta de uniones de sillas.

Sean $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots$ los puntos donde δ intersecta $\overline{cd}$ y q_i' las intersecciones de δ con $\overline{ab}$. Como $\varphi \subset \omega(\delta)$, tenemos que la sucesión $\{q_i'\}$ converge a p' cuando i tiende a infinito. Siguiendo un argumento similar al del lema 4.50, con una pequeña perturbación $\overline{Y}_{1,1}'$ obtenemos una nueva unión de sillas (que $\overline{Y}_1'$ no tenía). Si $\overline{Y}_{1,1}'$ no satisface que todo α y ω-conjunto límite de toda trayectoria sea una singularidad, una órbita cerrada o una gráfica cerrada, repetimos nuestra construcción y encontramos $\overline{Y}_{1,2}'$ cercano a $\overline{Y}_{1,1}'$ (y por tanto cercano a $\overline{Y}_1'$) tal que $\overline{Y}_{1,2}'$ muestra una nueva unión de sillas. Como la cantidad de sillas es m, obtenemos finalmente un campo $\overline{Y}_2'$ cercano a $\overline{Y}_1'$ tal que satisface las condiciones del lema ∎

<u>Definición 4.53</u> Llamaremos $\mathcal{G}_2$ al conjunto de campos de $\mathfrak{X}^1(H^2)$ tales que:

i) $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$

ii) Para toda trayectoria γ de $\overline{Y}_2 \in \mathcal{G}_2$ se tiene que $\alpha(\gamma)$ y $\omega(\gamma)$ están formados por un punto crítico, o una órbita cerrada, o una gráfica cerrada, cada uno.

Definición 4.54 Llamaremos $\mathcal{G}_3$ al conjunto de campos de $\mathfrak{X}^1(M^2)$ tales que:

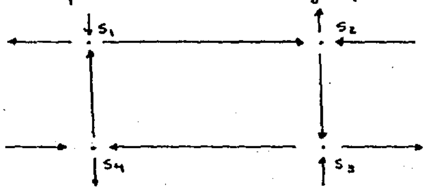
i) $\mathcal{G}_3 \subset \mathcal{G}_2$

ii) Si $Y_3 \in \mathcal{G}_3$, entonces Y_3 no tiene trayectorias solución que unan puntos silla.

Lema 4.55 Todo campo $Y_2 \in \mathcal{G}_2$ puede ser aproximado por un campo $Y_3 \in \mathcal{G}_3$.

Demostración Si Y_2 tiene una gráfica cerrada formada por puntos silla y separatrices, mostraremos que existe una aproximación $Y_{2,1}$ tal que $Y_{2,1} \in \mathcal{G}_2$ pero con una gráfica cerrada menos que Y_2. Siguiendo varias veces este camino demostraremos el lema.

Supongamos que Y_2 tiene una gráfica $s_1 s_2 s_3 s_4 s_1 = g$

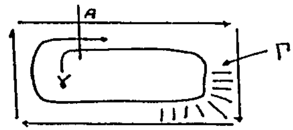


Como M es orientable, g tiene una vecindad homeomorfa a un anillo, y por lo tanto sólo se pueden presentar los siguientes dos casos:

1.- Existe una trayectoria, γ, para la cual g es su ω-conjunto límite (ó $g = \alpha(\gamma)$).

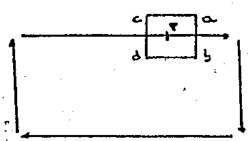
2.- Existen una cantidad infinita de órbitas cerradas que se acumulen en g.

Supongamos que existe γ solución de $\overline{Y}$ tal que $\omega(\gamma) = g$ (el otro caso se trata en forma similar). Consideremos un punto A en la separatriz que une S_1 con S_2 y una sección transversal al campo que lo contenga.



γ intersecta esta sección en una sucesión de puntos $A_1, A_2, \ldots$ que convergen a A monotonamente. Escogemos A_1 tan cerca de A para que no existan singularidades en el anillo Γ determinado por el arco de trayectoria que une A_1 y A_2, unión el segmento de la sección que une A_1 y A_2 unión con g.

Sea p otro punto en la separatriz que une S_1 con S_2 y consideremos un rectángulo R (caja de flujo) asociado a él, $R = abcd$, tal que el lado $\overline{db}$ está en el interior de Γ, y $\overline{ca}$ está arriba de la separatriz.



Distinguiremos, ahora, dos casos:

i) la separatriz S_1S_2 no pertenece al $\omega(\beta)$ para toda β separatriz inestable de un punto silla.

ii) la separatriz S_1S_2 es parte de $\omega(\beta)$ donde β es separatriz inestable de un punto silla.

Caso i) Podemos hacer que la caja de flujo R lo suficientemente pequeña para que no contenga ningún arco de trayectoria perteneciente a alguna separatriz inestable distinta de S_1S_2.

Consideremos la siguiente familia de campos (perturbaciones de $\overline{Y}_2$).

$$\overline{Y}_{2,1}(\mu) = \overline{Y}_2 + \varepsilon \mu \varphi \overline{Z}$$

donde $\mu \in [0,1]$, φ es una funcion de clase C^∞ tal que φ en el interior de R es estrictamente mayor que cero, y φ en M^2 menos interior de R es cero, $\overline{Z}$ es el campo $(0,-1)$ (apunta hacia abajo) y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña. Observamos que $\overline{Y}_{2,1}(\mu)$ ya no tiene la unión entre S_1 y S_2 si $\mu \in (0,1]$. Además esta perturbación no introduce alguna nueva unión de sillas, ya que Γ es invariante bajo el flujo de $\overline{Y}_2$.

Caso ii) Podemos tomar R suficientemente pequeño para que todas las trayectorias arriba de p regresen a R en un punto más cercano a p. Supongamos que δ es una trayectoria que proviene de un punto silla, σ, e intersecta el lado $\overline{cd}$ de R en una sucesión monótona decreciente de puntos q_i que convergen a P_0, $P_0 = S_1S_2 \cap \overline{cd}$. Consideremos $\bar{\mu} \in (0,1)$, y la trayectoria $\delta(\bar{\mu})$ de $\overline{Y}_{2,1}(\bar{\mu})$ que pasa por q_1 (y proviene del punto silla σ). Si esta trayectoria cruza P_1, $P_1 = S_1S_2 \cap \overline{ab}$, y tiende a S_2 (lo que quiere decir que une los puntos silla σ y S_2), entonces μ' cercano a $\bar{\mu}$, $\mu' > \bar{\mu}$, obtenemos que $\delta(\mu')$ ya no toque P_1, de hecho toca $\overline{ab}$ abajo de P_1 en algún momento y converge a una órbita cerrada (Poincaré-Bendixson). Si $\delta(\bar{\mu})$ no toca P_1, entonces para un tiempo suficientemente grande toca abajo de P_1 y converge a una órbita cerrada. Entonces la perturbación $\overline{Y}_{2,1(\tilde{u})}$ no crea con δ una nueva unión de sillas. Lo hecho con δ se puede hacer con cualquier otra trayectoria que provenga de un punto silla y tenga a S_1S_2 como parte de su ω conjunto límite.

Con este procedimiento podemos aproximar $\overline{Y}_2$ por $\overline{Y}_{2,1}$ donde $\overline{Y}_{2,1}$ ya no tenga gráficas cerradas. Si $\overline{Y}_{2,1}$ tiene uniones de puntos silla, por el mismo argumento podemos deshacer esas uniones (sin crear otras) con perturbaciones pequeñas del campo $\overline{Y}_{2,1}$. Por lo tanto $\overline{Y}_2$ se puede aproximar por $\overline{Y}_3$ donde $\overline{Y}_3$ no tiene uniones de sillas ∎

En resumen tenemos que todo campo $\overline{Y}_1 \in \mathcal{G}_1$ puede ser aproximado por un campo $\overline{Y}_3$ tal que

i) $\overline{Y}_3 \in \mathcal{G}_1$

ii) los conjuntos minimales de $\overline{Y}_3$ son todos triviales

iii) El ω y α conjunto límite de cualquier trayectoria es un punto singular o una órbita cerrada.

iv) No hay soluciones que unan puntos silla.

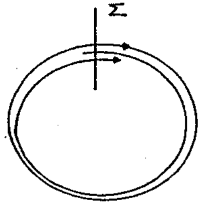
Esto es, $\mathcal{G}_3$ es denso en $\mathcal{G}_1$

Obtenemos también un corolario inmediato:

<u>Corolario 4.56</u> Si $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M^2)$ es estructuralmente estable, entonces $\overline{X} \in \mathcal{G}_3$.

Sección 4. Orbitas Cerradas.

Consideremos una órbita cerrada, γ, de un campo $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$. Por un punto $x_0 \in \gamma$ consideremos una sección transversal, Σ, al campo $\overline{X}$.



La órbita por x_0 vuelve a intersectar Σ en un tiempo τ (Período de γ). Por continuidad del flujo de $\overline{X}$, la órbita por un punto x cercano a x_0 también vuelve a intersectar Σ en un tiempo cercano a τ. Por tanto si $V \subset \Sigma$ es una vecindad de x_0 (en Σ) suficientemente pequeña, podemos definir la siguiente transformación

$$T : V \longrightarrow \Sigma$$

donde $T(x)$ es el punto donde la trayectoria por x vuelve a intersectar Σ por primera vez. Esta función es llamada la transformación de Poincaré (o transformación de holonomía o monodromía).

Sabemos que T es un difeomorfismo local de la misma clase que el campo $\overline{X}$, $T \in C^1$, [ ].

<u>Definición 4.57</u> Sean γ una órbita cerrada de $\overline{X}$, $p \in \gamma$ y Σ una sección transversal a $\overline{X}$ en p. Decimos que γ es

una órbita cerrada hiperbólica, o simple, de $\overline{X}$ si

$$T'(p) \neq 1 .$$

Si $T'(p) < 1$ decimos que γ es un atractor o que γ es estable, si $T'(p) > 1$ decimos que γ es repulsor o que γ es inestable.

<u>Definición</u> <u>4.58</u> Sea γ una separatriz inestable de algún punto silla. Decimos que γ está estabilizada si $\omega(\gamma)$ es un elemento hiperbólico (órbita cerrada atractora o sumidero).

En forma análoga definimos separatriz estable estabilizada.

<u>Lema</u> <u>4.59</u> Todo campo $\overline{Y}_3 \in \mathcal{G}_3$ puede ser aproximado por un campo $\overline{Y}_3'$, tal que $\overline{Y}_3' \in \mathcal{G}_3$ y las separatrices de $\overline{Y}_3'$ estan estabilizadas.

<u>Demostración</u>. Sea γ una órbita cerrada. Supongamos que γ es el ω-conjunto límite de σ, donde σ es una separatriz inestable del campo $\overline{Y}_3$. Supongamos que γ no es hiperbólica, entonces, $h'(0) = 1$ donde h es la transformación de Poincaré definida en una sección transversal Σ por $p \in \gamma$.

Consideremos una caja de flujo F en p tal que $\Psi(F) = R$, $\Psi \in C^2$ y R es un rectángulo curvilíneo en $\mathbb{R}^2$.

Con la diferencial de Ψ obtenemos una representación del campo $\overline{Y}_3$ en R

$$\overline{Y}_3^*(x,y) = d\Psi_{\Psi^{-1}(x,y)}\left(\overline{Y}_3(\Psi^{-1}(x,y))\right)$$

para todo (x,y) en R. Observemos que $\overline{Y}_3^*$ tiene dos componentes

$$\overline{Y}_3^*(x,y) = \left(\overline{Y}_{3,1}^*(x,y),\ \overline{Y}_{3,2}^*(x,y)\right)$$

y de hecho obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en R

$$\frac{dx}{dt} = \overline{Y}^{*}_{3,1}$$
$$\frac{dy}{dt} = \overline{Y}^{*}_{3,2}$$

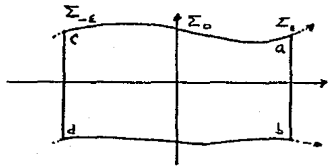
Ahora, podemos construir la caja de flujo F, y portanto R, de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

i) $\Psi(\Sigma) = R \cap$ eje y

ii) $\overline{Y}^{*}_{3,1}(x,y) > 0$ para todo (x,y) en R

iii) los lados $\overline{ca}$ y $\overline{db}$ sean arcos de trayectoria de $\overline{Y}^{*}_{3}$

iv) los segmentos $\overline{cd}$ y $\overline{ab}$ cruzan el eje x en los puntos $(-\varepsilon,0)$ y $(\varepsilon,0)$ respectivamente, y son transversales al campo.



Ademas, por la forma en construimos las cajas de flujo, $\Psi(F \cap \gamma)$ es igual al eje x $\cap$ R. Llamaremos al segmento $R \cap$ eje y $= \Sigma_0$, y a los segmentos $\overline{cd}$ y $\overline{ab}$, $\Sigma_{-\varepsilon}$ y Σ_ε respectivamente

Como γ no es hiperbólica, tenemos que $h'(0) = 1$ donde

$$h : \Sigma_0 \to \Sigma_0 \; .$$

Definimos las siguientes funciones a través de trayectorias. Esto es, la función asigna a un punto x, en el dominio, el punto donde la trayectoria por x intersecta por primera vez el contradominio

$$h_\varepsilon : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_\varepsilon$$

$$h_{-\varepsilon} : \Sigma_{-\varepsilon} \longrightarrow \Sigma_0$$

$$T : \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \Sigma_{-\varepsilon}$$

Observemos la siguiente función:

$$h_\varepsilon \circ h_{-\varepsilon} \circ T : \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \Sigma_\varepsilon .$$

Sea $H = h_\varepsilon \circ h_{-\varepsilon}$ y obtenemos: $H \circ T : \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \Sigma_\varepsilon$.

Como γ no es hiperbólica, tenemos

$$H'(T)T' = 1 \qquad \text{en cero.}$$

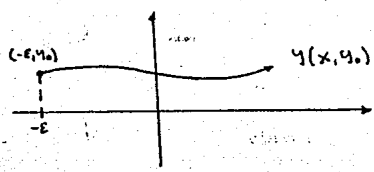
Como T conserva orientación tenemos que $T' > 0$, y portanto $H'(T) > 0$,

Si logramos hacer una pequeña modificación del campo $\overline{Y}_3^*$ de tal forma que $H'(T(0))^* < H'(T(0))$, donde el asterisco significa que tomamos H y T en la modificación, habremos transformado a γ en una orbita hiperbólica.

Observemos que H' es la derivada de H con respecto a la altura, esto es, $H' = \frac{\partial H}{\partial y}$. Como $\overline{Y}_{3,1}^* > 0$ en R consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{Y}_{3,2}^*}{\overline{Y}_{3,1}^*} \qquad (**)$$

Llamemos $y(x, y_0)$ la solución con condición inicial $y(-\varepsilon) = y_0$. Con esta notación tenemos que:



$$y(x, 0) = 0 \qquad x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

o sea la gráfica de esta solución es el segmento en el eje x que une los puntos $(-\varepsilon,0)$ y $(\varepsilon,0)$.

En este contexto la funion H se puede representar así:

$$H(s) = y(\varepsilon,s) \qquad \text{donde } y \text{ es solución de } (**).$$

Observemos que y depende de x y y_0, donde y_0 es la condición inicial. Si y_0 varia, osea, s varia, $y(\varepsilon,y_0)$ varia. Tenemos, entonces, la siguiente igualdad

$$\left.\frac{\partial y(x,y_0)}{\partial y_0}\right|_{(\varepsilon,0)} = H'(0)$$

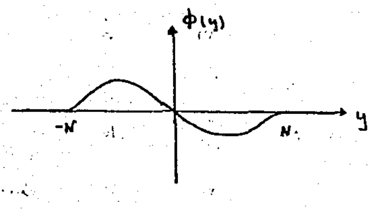
Sea $F(x,y) = \dfrac{\overline{Y}^{*}_{3,2}(x,y)}{\overline{Y}^{*}_{3,1}(x,y)}$. Sabemos por [Hur.] que

$$\frac{\partial y(x,y_0)}{\partial y_0} = \exp\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x,0)} dx\right]$$

Consideremos una función $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\phi(0)=0$, $\phi'(0)<0$, $\phi(y)<0$ para $0<y<N$, $\phi(y)>0$ para $-N<y<0$ donde

N = mínimo de los valores absolutos de las ordenadas de a,b,c,d,

$\phi(y)$ de clase C^∞ y $\phi(y)=0$ para y tales que $|y|\geq N$.



Por ejemplo:

$$\phi(y) = -\operatorname{sen}(\pi N y)\, g(y)$$

donde $g\in C^\infty$ en $\mathbb{R}$, $g(0)=1$, $g'(0)=0$ y $g(y)=0$ si $|y|\geq N$.

Sea $f(x)$ tal que $f(x)>0$ si $|x|<\varepsilon$, $f(x)=0$ si $|x|\geq\varepsilon$, $f\in C^\infty$. Sea $\overline{Y}_3'$ una perturbación de $\overline{Y}_3^*$ dada por

$$\overline{Y}_3' = \overline{Y}_*^* + \delta\,\phi\, f\, \overline{Z}$$

donde $\overline{Z}(x,y)=(0,1)$ y δ suficientemente pequeño.

Observemos que $\overline{Z}$ sólo afecta al campo $\overline{Y}_3^*$ en la componente vertical.

Por tanto

$$\overline{Y}_3' = (\overline{Y}_{3,1}', \overline{Y}_{3,2}') = (\overline{Y}_{3,1}^*, \overline{Y}_{3,2}^* + \delta\phi f \overline{Z})$$

Esta perturbación nos induce la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{Y}_{3,2}^* + \delta\phi f \overline{Z}}{\overline{Y}_{3,1}^*}$$

y portanto $$\frac{dy}{dx} = F + \frac{\delta\phi f \overline{Z}}{\overline{Y}_{3,1}^*} = \widehat{F}$$

Sea $\widehat{H}$ la modificación de H bajo $\widehat{F}$. Calculamos $\left.\frac{d\widehat{H}}{ds}\right|_{s=0}$

y obtenemos

$$\left.\frac{dH}{ds}\right|_0 = \exp\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial y}(x,0)\, dx\right]$$

$$= \exp\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial y}(x,0)\, dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\overline{Y}_{3,1}^*(x,0)\,\delta f(x)\phi'(0)}{[\overline{Y}_{3,1}^*(x,0)]^2}\, dx\right]$$

ya que como $\phi(0)=0$ tenemos $\varepsilon\phi(x)\phi(0)=0$ para todo x en $[-\varepsilon,\varepsilon]$

Además, como $\overline{Y}_{3,1}^*(x,0)>0$ y $\phi'(0)<0$ obtenemos

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\overline{Y}_{3,1}^*(x,0)\,\delta f(x)\,\phi'(0)}{[\overline{Y}_{3,1}^*(x,0)]^2}\, dx < 0$$

Por lo tanto $\left.\frac{d\widehat{H}}{ds}\right|_0 < \left.\frac{dH}{ds}\right|_0$.

Ahora, con $d\varphi^{-1}$ obtenemos un campo $\overline{Y}_3'$ cercano a $\overline{Y}_3$ tal que la separatriz σ ya es estabilizada. Siguiendo el mismo proceso para las otras separatrices concluimos el lema, ya que la cantidad de separatrices es finita ■

Observese que mediante el proceso arriba descrito hemos logrado que bajo una perturbación, Y_3^1, la órbita γ sea una órbita hiperbólica. Si γ era un ω-conjunto límite de ambos lados, entonces γ en Y_3^1 conserva esta característica, además de que la perturbación no introduce una nueva órbita cerrada. Pero si γ era de un lado ω-conjunto límite y del otro α-conjunto límite, tenemos que γ en Y_3^1 es ω-conjunto límite de ambos lados (ya que $h'(0) < 1$), y Y_3^1 tiene al menos una órbita cerrada mas que Y_3, donde esta nueva órbita es α-conjunto límite de ambos lados.

Por otro lado, si ya tenemos Y_3^1 con separatrices estabilizadas, entonces una perturbación de Y_3^1 suficientemente pequeña mantiene esta característica. Esta afirmación se sigue del hecho de que la transformación de Poincaré en p depende continuamente del campo. Esto es, si tenemos

$$T : V \subset \Sigma \to \Sigma$$

la transformación de Poincaré asociada X, entonces existe una vecindad N de X en $\mathfrak{X}^1(M^2)$ tal que para todo Y en N, Σ es tambien una sección transversal y toda órbita de Y que pase por V vuelve a intersectar Σ. Además la relación $N \longrightarrow C^1(V, \Sigma)$ que a cada $Y \in N$ asigna su transformación de Poincare es continua.

En conclusión: si γ es una órbita cerrada hiperbólica de X, digamos un ω-conjunto límite, entonces todo campo Y suficientemente cercano a X tiene una órbita cerrada relacionada con γ (próxima a γ), ésta órbita es hiperbólica y ω-conjunto limite.

<u>Definición</u> <u>4.60</u> Sea $\mathcal{G}_4$ un subconjunto de $\mathfrak{X}^1(M^2)$ tal que:

i) $\mathcal{G}_4 \subset \mathcal{G}_3$

ii) Si $\mathfrak{X}_4 \in \mathcal{G}_4$, entonces las separatrices de $\mathfrak{X}_4$ están estabilizadas.

iii) $\mathfrak{X}_4$ sólo tiene una cantidad finita de órbitas cerradas.

<u>Lema</u>. <u>4.61</u>. Sea $\mathfrak{X}_3 \in \mathcal{G}_3$ con separatrices estabilizadas, entonces $\mathfrak{X}_3$ se puede aproximar por $\mathfrak{X}_4$ donde $\mathfrak{X}_4 \in \mathcal{G}_4$.

<u>Demostración</u>. Primero aproximaremos $\mathfrak{X}_3$ por un campo $\mathfrak{X}_{3,2}$ tal que $\mathfrak{X}_{3,2} \in \mathcal{G}_1$, $\mathfrak{X}_{3,2}$ tenga separatrices estabilizadas, no unión de sillas y sólo un número finito de órbitas cerradas. Y despues aproximaremos $\mathfrak{X}_{3,2}$ por un campo $\mathfrak{X}_4$ que conserve las características de $\mathfrak{X}_{3,2}$ y que tambien cumpla que el ω-conjunto limite (o α-conjunto limite) de toda trayectoria es una singularidad o una órbita cerrada; con ésto terminariamos.

Por el teorema 4.14 podemos suponer a nuestra variedad M^2 como una subvariedad de $\mathbb{R}^5$, y al campo $\mathfrak{X}_3$ como una función

$$\mathfrak{X}_3 : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5 .$$

Por el Corolario 4.11, $\mathfrak{X}_3$ puede ser extendida a una función

$$\tilde{\mathfrak{X}}_3 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5 \quad , \quad \tilde{\mathfrak{X}}_3 \in C^1$$

tal que

$$\tilde{\mathfrak{X}}_3 \Big|_{M^2} = \mathfrak{X}_3 .$$

Esta función puede ser aproximada por una función polinomial (Weierstrass) o analitica $\tilde{\mathfrak{X}}_{3.1}$. Consideremos, ahora, $\tilde{\mathfrak{X}}_{3.1}$ restringido a M^2

$$\tilde{\mathfrak{X}}_{3.1} \Big|_{M^2} = \mathfrak{X}_{3.1}$$

Podría suceder que $\overline{Y}_{3,1}$ no fuera un campo en M^2. Esto es, que existiera $p \in M^2$ tal que $\overline{Y}_{3,1}(p) \notin T_pM^2$, sin embargo si tomamos

$$\overline{Y}_{3,2} = \pi \circ \overline{Y}_{3,1} \qquad \text{donde } \pi \text{ es la proyección en } T_pM^2,$$

obtenemos $\overline{Y}_{3,2}$ una aproximación de $\overline{Y}_3$. Podemos hacer esta aproximación tan cercana a $\overline{Y}_3$ para asegurar $\overline{Y}_{3,2} \in \mathcal{G}_1$ y que $\overline{Y}_{3,2}$ tenga separatrices estabilizadas (y por tanto no existen en $\overline{Y}_{3,2}$ uniones de sillos).

El campo $\overline{Y}_{3,2}$ no es analítico, pero topologicamente se comporta como un campo analítico, esto es, toda órbita cerrada de $\overline{Y}_{3,2}$ es aislada o pertenece a una banda abierta de órbitas cerradas.

Queramos, ahora, ver que $\overline{Y}_{3,2}$ tiene una cantidad finita de órbitas cerrados o se puede aproximar por un campo que cumpla ésto.

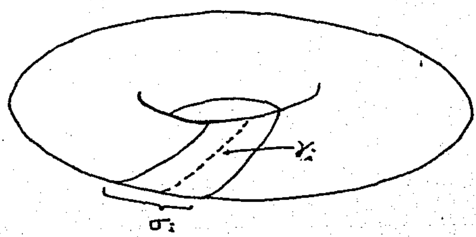
Distinguiremos dos casos:

1.- Todas las trayectorias de $\overline{Y}_{3,2}$ son cerradas.

2.- No todas las trayectorias de $\overline{Y}_{3,2}$ son cerradas.

En el 1er caso observamos que $M^2 = T^2$. Podemos agrupar todas las trayectorias en una cantidad finita de bandas de órbitas cerradas. Llamaremos a las bandas σ_i, $i=1,\dots,n$, y cada banda σ_i estará centrada en la órbita cerrada γ_i, $i=1,\dots,n$.

Como en el lema 4.59, podemos hacer pequeñas perturbaciones en cada σ_i que se anulen en la frontera de



σ_i, y lograr que γ_i sea una órbita periódica hiperbólica estable, para cada i. En las fronteras de σ_i obtenemos órbitas cerradas inestables que mediante una pequeña perturbación (lema 4.59) podemos hacer hiperbólicas.

Por tanto $Y_{3,2}$ se puede aproximar por un campo que tiene una cantidad finita de órbitas cerradas, todas hiperbólicas.

En el segundo caso (no todas las trayectorias son cerradas) afirmamos que $Y_{3,2}$ tiene sólo una cantidad finita de órbitas cerradas. Observemos, primero, que las órbitas cerradas deben ser aisladas ya que si forman una banda abierta (que no es toda la variedad), tomamos p en la frontera de la banda y siguiendo el razonamiento hecho en el lema 2.20, concluimos que por p pasa una trayectoria que une dos puntos silla, lo cual es una contradicción.

Una contradicción semejante se obtiene si suponemos que todas las órbitas son aisladas pero hay una cantidad infinita de ellas

Concluimos que $Y_{3,2}$ tiene una cantidad finita de órbitas cerradas, y por el lema 4.59 podemos lograr que todas ellas (mediante una pequeña perturbación) sean hiperbólicas.

Ahora aproximaremos $Y_{3,2}$ por un campo tal que tenga como ω-conjunto límite (y α-conjunto límite) de toda trayectoria una singularidad o una órbita cerrada.

Supongamos que existe γ, trayectoria de $Y_{3,2}$, tal que $\omega(\gamma)$ no es un punto singular ni una órbita cerrada. Sea $\mu \subset \omega(\gamma)$ un conjunto minimal. Como las separatrices de $Y_{3,2}$ están estabilizadas, μ no puede ser un punto silla (no es sumidero ni orbita cerrada), por tanto μ es minimal no trivial. Tenemos, entonces, una recurrencia no trivial, podemos definir

$$T : \Gamma \subset C \longrightarrow C$$

donde C es un circulo transversal al campo.

• Observemos que $\Gamma = C$, ya que si $\Gamma \neq C$ entonces por el lema 4.50, existe un campo cercano a $\overline{Y}_{3,2}$ que muestra una unión de puntos silla, pero ésto no es posible ya que las separatrices de $\overline{Y}_{3,2}$ están estabilizadas.

Entonces $M^2 = T^2$. Por el lema 4.49. el campo $\overline{Y}_{3,2}$ puede ser aproximado por uno que tenga una órbita cerrada γ, y no tenga recurrencias no triviales. Hacemos (mediante otra aproximación) esta órbita γ hiperbólica (toda nueva aproximación tendrá esta característica). Hacemos, ahora, una aproximación analítica y obtenemos un campo con una cantidad finita de órbitas cerradas, una de ellas próxima a γ, por tanto este nuevo campo no tiene recurrencias no triviales. A las órbitas cerradas las hacemos hiperbólicas y terminamos. Esta última aproximación cumple las condiciones del lema ∎

<u>Teorema</u> <u>4.62</u>

Si $\overline{X} \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ es estructuralmente estable. Entonces

a) $\overline{X}$ tiene una cantidad finita de singularidades, todas hiperbólicas.

b) $\overline{X}$ tiene una cantidad finita de órbitas cerradas, todas hiperbólicas

c) $\overline{X}$ no tiene unión de sillas

d) El ω y α - conjunto límite de toda trayectoria es una singularidad o una órbita cerrada.

Demostración

a) Demostrado en Corolario 4.39.

b) Ya que h (la equivalencia topológica) preserva orbitas cerradas y $\overline{X}$ se puede aproximar por un campo $\overline{Y}$ que tiene sólo una cantidad finita de órbitas cerradas (lema 4.61), tenemos que $\overline{X}$ sólo tiene una cantidad finita de órbitas cerradas. Si una de las órbitas cerradas de $\overline{X}$ no es hiperbólica, entonces siguiendo la construcción del lema 4.59 obtenemos dos campos cercanos a $\overline{X}$, digamos $\overline{Y}_1$ y $\overline{Y}_2$, tales que $\overline{Y}_1$ tiene a esa órbita como ω-conjunto límite y $\overline{Y}_2$ la tiene como α-conjunto límite. Esto no es posible ya que h preserva los ω-conjuntos límite así como los α-conjuntos límite.

c) La demostración es con el lema 4.55 y observando que h preserva uniones de sillo

d) Se sigue de lemas 4.51, 4.52 y 4.55. ∎

Sección 5. El homeomorfismo.

En esta parte mostraremos que las condiciones a, b, c y d del teorema 4.62, son suficientes para que $\overline{X}$ sea estructuralmente estable. Esto es, si $\overline{X}$ cumple con a, b, c y d. Entonces existe N vecindad de $\overline{X}$ tal que para todo $\overline{Y}$ en N se tiene un homeomorfismo h de M^2 en si mismo tal que h transforma trayectorias solución de $\overline{X}$ en trayectorias solución de $\overline{Y}$, preservando su orientación. De hecho la sección está dedicada a la construcción del homeomorfismo h.

Definición 4.63 Sea $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M^2)$. Llamaremos elementos críticos de $\overline{X}$ a sus singularidades y sus orbitas cerradas.

Teorema 4.64 Sea $\overline{X} \in \mathcal{X}^1(M^2)$ tal que cumple con las siguientes condiciones:

a) $\overline{X}$ tiene una cantidad finita de elementos críticos, todos hiperbólicos.

b) $\overline{X}$ no tiene unión de sillas

c) Cualquier órbita de $\overline{X}$ tiene como α-conjunto límite un único elemento crítico, y como ω-conjunto límite un único elemento crítico.

Entonces $\overline{X}$ es estructuralmente estable.

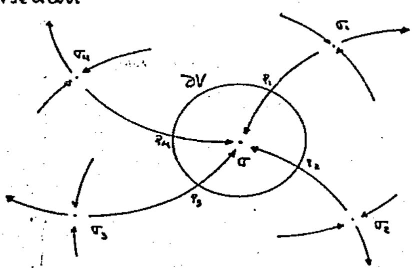
Demostración Dado que los elementos críticos de $\overline{X}$ son hiperbólicos, existe una vecindad N de $\overline{X}$ (en $\mathcal{X}^1(M^2)$) tal que si $\overline{Y}$ es elemento de N, entonces $\overline{Y}$ tiene la misma cantidad de elementos críticos que $\overline{X}$. Los elementos críticos de $\overline{Y}$ son del mismo tipo que los de $\overline{X}$. De hecho existe una correspondencia uno a uno entre ambos conjuntos de elementos críticos.

Si la vecindad N es suficientemente pequeña podemos asegurar que si σ_1 y σ_2 son elementos críticos de $\overline{Y}$ tales que existe una trayectoria γ con $\alpha(\gamma) = \sigma_1$ y $w(\gamma) = \sigma_2$, entonces para los correspondientes elementos críticos β_1 y β_2 de $\overline{X}$ existe también una trayectoria, Γ, tal que $\alpha(\Gamma) = \beta_1$ y $w(\Gamma) = \beta_2$.

Sea $\overline{Y}$ elemento de esta vecindad N.

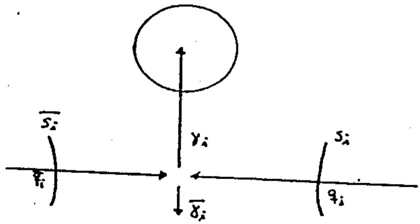
<u>Caso 1</u>. Supongamos que $\overline{X}$ no posee órbitas cerradas. Consideremos un sumidero σ de $\overline{X}$ y el correspondiente $\sigma(\overline{Y})$ sumidero de $\overline{Y}$. Sea V un disco tal que $\sigma \in V$, $\sigma(\overline{Y}) \in V$, ∂V transversal a $\overline{X}$ y a todo $\overline{Y}$ en N. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ las sillas de $\overline{X}$ tales que exista una trayectoria, γ_i de $\overline{X}$ con $\alpha(\gamma) = \sigma_i$ y $w(\gamma) = \sigma$.

Llamaremos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a los puntos en que las separatrices de las sillas σ_i intersectan ∂V



Sean $P_1(\overline{Y}), P_2(\overline{Y}), \ldots, P_n(\overline{Y})$ los correspondientes puntos para las separatrices de las sillas $\sigma_i(\overline{Y})$.

Para cada σ_i consideremos las secciones S_i, $\overline{S_i}$ transversales a las separatrices (estables) de σ_i en los puntos $q_i, \overline{q}_i$



Llamaremos γ_i y $\overline{\gamma}_i$ las separatrices inestables de σ_i. Sea φ_t el flujo de $\overline{X}$ nos fijamos en $\varphi_t(\overline{S}_i)$ y $\varphi_t(S_i)$ para todo t mayor o igual a cero. Obtenemos una familia tubular vecindad de γ_i y de $\overline{\gamma}_i$, las fibras de esta familia son $\varphi_t(\overline{S}_i)$ y $\varphi_t(S_i)$, $t \in \mathbb{R}^+$, unión γ_i y $\overline{\gamma}_i$. Llamaremos f a cada fibra. Sea la variedad estable de σ_i el siguiente conjunto

$$W^s(\sigma_i) = \beta_i \cup \sigma_i \cup \overline{\beta}_i$$

donde β_i y $\overline{\beta}_i$ son las separatrices estables de σ_i. De manera similar podemos definir variedad inestable de σ_i.

$$W^u(\sigma_i) = \gamma_i \cup \sigma_i \cup \overline{\gamma}_i$$

La proyección, π_i, que a cada punto de la fibra f le asocia $f \cap W^s(\sigma_i)$ es una función continua. Obsérvese que π_i induce un homeomorfismo de una vecindad I_i de P_i en ∂V sobre una vecindad de σ_i en $W^s(\sigma_i)$.

Efectuamos esta misma construcción para el campo $\overline{Y}$.

Empezaremos, ahora, a construir el homeomorfismo h (de equivalencia topológica entre $\overline{X}$ y $\overline{Y}$).

$$h : M^2 \longrightarrow M^2$$

Sean $h(\sigma) = \sigma(Y)$, $h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$, $h(p_i) = p_i(Y)$,

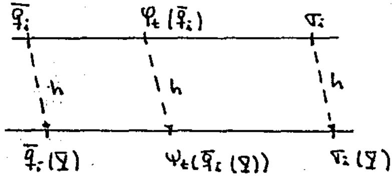
$h(q_i) = q_i(Y)$ y $h(\bar{q}_i) = \bar{q}_i(Y)$.

Extendemos h a $W^s(\sigma_i)$ mediante las ecuaciones siguientes:

i) $h(\varphi_t(q_i)) = \psi_t(h(q_i)) = \psi_t(q_i(Y))$

ii) $h(\varphi_t(\bar{q}_i)) = \psi_t(h(\bar{q}_i)) = \psi_t(\bar{q}_i(Y))$

donde ψ_t es el flujo de Y



Ahora definimos h en I_i de la siguiente manera: Sea $x \in I_i$

$$h(x) = [\pi_i(Y)]^{-1}(h(\pi_i(x)))$$

Tenemos que h está definido en un número finito de intervalos disjuntos I_i de ∂V. Si la vecindad N de X es pequeña entonces h restringido a I_i está próximo a la identidad, y por tanto podemos extender h a toda la frontera de V (en forma continua). Repetimos esta operación para todos los sumideros (de X y Y).

Observamos que si $y \in M^2$ entonces $\omega(y)$ es un sumidero o un punto silla. Si $\omega(y)$ es un sumidero, σ_i, entonces existe $z \in \partial V$ tal que $y = \varphi_t(z)$. Si $\omega(y)$ es un punto silla, entonces existe z igual a q_i o $\bar{q}_i$ y nuevamente $y = \varphi_t(z)$. Por tanto podemos extender h a toda la variedad así:

$$h(\varphi_t(z)) = \psi_t(h(z))$$

donde z es un punto de M^2 donde h ya estaba definida.

Resta sólo definir h en las fuentes θ_j, $j=1,\dots,m$

$$h(\theta_j) = \theta_j(Y).$$

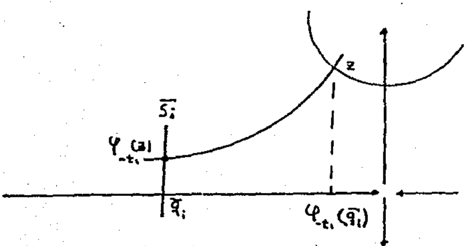
Observemos que h es biyectiva y por tanto existe h^{-1}, la cual tiene una definición similar a h.

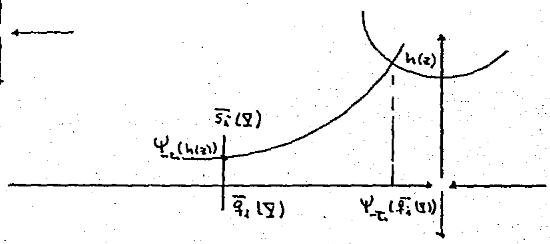
Mostraremos ahora que h es continua.

i) h es continua en los sumideros. La demostración es completamente análoga a la realizada en el lema 1.15.

ii) h es continua en las fuentes. Para demostrar esta afirmación, observemos primero que h transforma secciones transversales en secciones transversales.

Sea $\varphi_{-t_1}(z) \in \overline{S_i}$



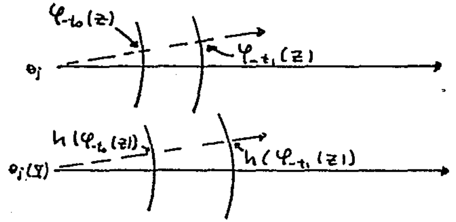


Además $\quad h\,\varphi_{-t_0}(z) = \varphi_{-t_0}(h(z))$

pero $\quad \varphi_{-t_0}(z) = \varphi_{-t_0+t_1-t_1}(z)$

por tanto $\quad h\,\varphi_{-t_0}(z) = h\,\varphi_{t_1-t_0}(\varphi_{-t_1}(z))$

y $\quad h\,\varphi_{t_1-t_0}(\varphi_{-t_1}(z)) = \psi_{t_1-t_0}(h(\varphi_{-t_1}(z))$



Pero $\varphi_{-t_1}(z) \in \overline{S_i}$ y $h(\varphi_{-t_1}(z)) \in \overline{S_i}(Y)$. Por tanto h aplicado a un punto y (cercano a una fuente) tambien se puede encontrar como

$$h(y) = \psi_{-t} \circ h \circ \varphi_t(y)$$

donde $\varphi_t(y)$ esté en una sección transversal S_i.

Si consideramos un círculo alrededor de la fuente θ_j (transversal a $\overline{X}$). Este círculo bajo se transforma, bajo h, en otro círculo que encierra $\theta_j(Y)$.

Nuevamente siguiendo el lema 1.15, se muestra que h es continua en las fuentes.

iii) h es continua en $W^s(\sigma)$, σ sumidero, donde

$$W^s(\sigma) = \{P \in M^2 \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(P) = \sigma\}.$$

Esta afirmación se sigue del mismo lema.

iv) h es continua en $W^s(\sigma_i)$, σ_i silla, $i=1,2,\dots n$. Primero observemos que

$$\Pi_i(Y)\,h(z) = h\,\Pi_i(\overline{X})(z)$$

Sea $x \in W^s(\sigma_i)$. Consideremos una sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

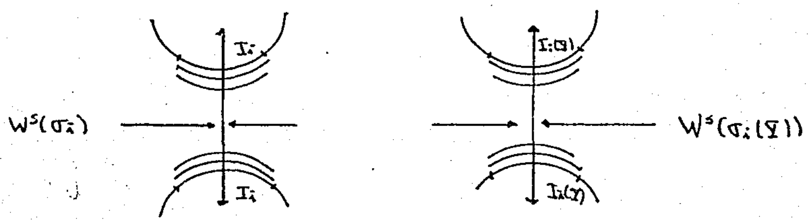
Necesitamos demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} h(x_n) = h(x) .$$

Si nos restringimos a $W^s(\sigma_i)$, entonces h sí es contínua, esto es, si $x_n \in W^s(\sigma_i)$ para todo n y $\pi_i(\bar{Y})\, x_n$ converge a x, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \pi_i(\bar{Y})\, h(x_n) = h(x) .$$

Pero obsérvese que aunque x_n no perteneciera $W^s(\sigma_i)$ para toda n, de todos modos se tendrían las dos convergencias siguientes, ya que π_i es contínua. Portanto sólo resta mostrar que $h(x_n)$ converge hacia $W^s(\sigma_i(\bar{Y}))$. Para ésto construimos familias tubulares para $W^s(\sigma_i)$ y $W^s(\sigma_i(\bar{Y}))$ usando los segmentos I_i, $I_i(\bar{Y})$ contenidos en ∂V, saturando con los flujos φ_t y ψ_t.



Como $h(I_i) = I_i(\bar{Y})$, entonces transforma fibras de la familia tubular de $W^s(\sigma_i)$ en fibras de la familia tubular de $W^s(\sigma_i(\bar{Y}))$. Por lo tanto $\tilde{\pi}_i$ y $\tilde{\pi}_i(\bar{Y})$, las respectivas proyecciones en $W^u(\sigma_i)$ y $W^u(\sigma_i(\bar{Y}))$, son contínuas.

Además

$$h(\widehat{\pi}_i(z)) = \widehat{\pi}_i(\overline{Y})(h(z)) \quad \ldots\ldots (*)$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x \in W^s(\sigma_i)$ tenemos que

$$\widehat{\pi}_i(x_n) = \widehat{\pi}_i(x) = \sigma_i$$

y como la restricción de h a $W^u(\sigma_i)$ es continua, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} h(\widehat{\pi}_i(x_n)) = h(\sigma_i) = \sigma_i(\overline{Y})$$

Por $(*)$ tenemos

$$h(\widehat{\pi}_i(x_n)) = \widehat{\pi}_i(\overline{Y})(h(x_n))$$

y por lo tanto $$\lim_{n\to\infty} \widehat{\pi}_i(\overline{Y})h(x_n) = \sigma_i(\overline{Y})$$

Concluimos que $$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x) \qquad \text{donde } h(x) \in \pi_i^{-1}(\overline{Y})(\sigma_i(\overline{Y})).$$

y, por tanto, h es continua en M^2. Como h^{-1} está definida en forma similar a h, tenemos que h^{-1} es continua y, por tanto, h es un homeomorfismo.

Caso 2 Supongamos que $\overline{X}$ posee órbitas cerradas, y todas ellas son atractivas. Sean φ_t y ψ_t los flujos de $\overline{X}$ y $\overline{Y}$. Podemos suponer, por [ ], que las órbitas cerradas de $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ tengan el mismo período τ, y admitan secciones transversales invariantes.

En cada singularidad atractora σ_i, $\sigma_i(\overline{Y})$, consideremos un círculo C_i transversal a $\overline{X}$ y $\overline{Y}$. En cada órbita cerrada σ_j, $\sigma_j(\overline{Y})$, consideramos una sección transversal invariante Σ_j, y en cada Σ_j tomamos dominios I_j, $I_j(\overline{Y})$, donde esten definidos las transformaciones de Poincaré de $\overline{X}$ y $\overline{Y}$.

Como en el caso 1, construimos familias tubulares (para $W^u(\sigma_k)$) asociadas a las sillas σ_k, $\sigma_k(\overline{Y})$, de $\overline{X}$ y $\overline{Y}$; tomando secciones $\overline{S}_k$, S_k, $\overline{S}_k(\overline{Y})$ y $S_k(\overline{Y})$ transversales a $W^s(\sigma_k)$ y $W^s(\sigma_k(\overline{Y}))$ y considerando las familias $\varphi_t(S_k)$, $\varphi_t(\overline{S}_k)$, $\psi_t(S_k(\overline{Y}))$ y $\psi_t(\overline{S}_k(\overline{Y}))$.

El homeomorfismo h deberá transformar cada fibra de la familia tubular de σ_k en una fibra de la familia tubular de $\sigma_k(\overline{Y})$. Además preservará los circulos transversales C_i y las secciones transversales Σ_j.

Definimos h siguiendo el mismo camino que en el caso 1, (a partir de las secciones transversales S_k, $\overline{S}_k$, $S_k(\overline{Y})$, $\overline{S}_k(\overline{Y})$). Así, h queda definido en un número finito de intervalos de los circulos C_i y de los dominios I_j, tales intervalos contienen las intersecciones de las variedades inestables de las sillas con C_i y I_j.

Si $\overline{Y}$ está suficientemente próximo a $\overline{X}$, entonces h es próximo a la identidad, y por tanto puede ser extendido a todo C_i y todo I_j.

Definimos para cada singularidad σ_ℓ de $\overline{X}$

$$h(\sigma_\ell) = \sigma_\ell(\overline{Y})$$

y para cada órbita cerrada σ_j definimos

$$h(\Sigma_j \cap \sigma_j) = \Sigma_j \cap \sigma_j(\overline{Y}).$$

Finalmente extendemos h a todo M^2 como en el primer caso, si $y \in M^2$, entonces

$$h(y) = \Psi_t \circ h \circ \varphi_t(y).$$

La continuidad de h en las singularidades, variedades estables de sillas y variedades estables de sumideros, se sigue de lo expresado en el caso 1.

La continuidad de h en las órbitas cerradas se sigue de la invariancia de las secciones Σ_j y de lo realizado en el capítulo tres.

Caso 3. $\overline{X}$ posee órbitas cerradas atractoras y órbitas cerradas repulsoras. La demostración es similar al caso dos con algunas pequeñas variantes. La construcción completa del homeomorfismo, en este caso, se puede ver en [ ].

En conclusión dado $\overline{Y}$ en N, podemos construir un homeomorfismo $h: M^2 \longrightarrow M^2$, tal que h transforma trayectorias de $\overline{X}$ en trayectorias de $\overline{Y}$ (Preservando orientación). Esto es, $\overline{X}$ es estructuralmente estable ■

Teorema 4.65 Los campos estructuralmente estables forman un conjunto abierto y denso en $\mathfrak{X}^1(M^2)$.

Demostración. La densidad se sigue del corolario 4.56 y de los lemas 4.59 y 4.61.

Ahora, sea $\overline{X}$ estructuralmente estable. Existe $\delta > 0$ tal que para todo campo $\overline{Y}$ en $B_\delta(\overline{X})$ se tiene que $\overline{Y}$ es topológicamente equivalente a $\overline{X}$, $\overline{Y} \sim \overline{X}$. Tomemos $\delta/2$ y afirmemos que todo campo $\overline{W}$ en $B_{\delta/2}(\overline{X})$ es estructuralmente estable.

Sea $\overline{W}$ en $B_{\delta/2}(\overline{X})$, por tanto $\overline{W} \sim \overline{X}$. Consideremos la bola de radio $\delta/2$ con centro en $\overline{W}$, $B_{\delta/2}(\overline{W})$. Sea $\overline{Z} \in B_{\delta/2}(\overline{W})$.

Como $B_{\delta/2}(\overline{W}) \subset B_\delta(\overline{X})$ se tiene que $\overline{Z} \in B_\delta(\overline{X})$ y por tanto $\overline{Z} \sim \overline{X}$. Como la relación $\sim$ es una relación de equivalencia (capítulo 1, sección 3), obtenemos

$$\overline{Z} \sim \overline{W} \qquad \text{para todo } \overline{Z} \text{ en } B_{\delta/2}(\overline{W}).$$

Portanto $\overline{W}$ es estructuralmente estable. Esto es, todo campo en $B_{\delta/2}(\overline{X})$ es estructuralmente estable. Concluimos que el conjunto de los campos estructuralmente estables es abierto ∎

Fin.

Bibliografía

[Ahl.] Ahlfors L., Complex Analysis. International Student Edition. 1979.

[And.] Andronov A. y Pontrjagin L., Systèmes Grossiers. Doklady Akad. Nauk 14, 247 — 251. 1937.

[Brö.] Bröcker T., Introducción a la Topología Diferencial. Editorial A.C. 1977.

[Cod.] Coddington E. y Levinson N., Theory of Ordinary Differential Equations. Mc. Graw Hill, New York. 1955.

[DeB.] De Baggis H., Dynamical Systems with Stable Structure. Contributions to the Theory of nonlinear Oscillations: 1–38. 1950.

[De M.] De Mello A. y Barone H., Equaçoes Diferenciais. IMEUSP. 1979.

[God.] Godbillon C., Dynamical Systems on Surfaces. Springer, Universitext. 1980.

[Har.] Hartman P., Ordinary Differential Equations. Birkhäuser. 1982.

[Hir.] Hirsch W. y Smale S., Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Academic Press. 1974.

[Hur.] Hurewicz W., Ordinary Differential Equations in the Real Domain with emphasis on Geometric Methods. Providence. 1943.

[Lef.] Lefschetz S., Differential Equations: Geometric theory. Interscience, Princeton University.

[Pal.] Palis J. y De Melo W., Introdusao aos Sistemas Dinâmicos, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. 1977.

[Pe. y Pe] Peixoto H.C. y Peixoto M.M., Structural Stability in the Plane with Enlarged Boundary Conditions. Anais da Academia Brasileira de Ciências: 31. 135-160. 1959.

[Pe. 1] Peixoto M.M., On Structural Stability. Annals of Math: 69. 199-222. 1959.

[Pe. 2] Peixoto M.M., Structural Stability on two Dimensional Manifolds. Topology 1, 101-120. 1962.