



24
93
Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ingeniería

*ANALISIS NUMERICO PARA LA SOLUCION
DE LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA*

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A N

María Alejandra Lara Flores
César Eduardo Hernández Cruz

MEXICO, D. F.

1982



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE INGENIERIA

A los Pasantes señorita MA. ALEJANDRA LARA FLORES y señor
CESAR EDUARDO HERNANDEZ CRUZ

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a ustedes a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Agustín Deméneghi Colina, para que lo desarrollen como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANALISIS NUMERICO PARA LA SOLUCION DE LA INTERACCION
SUELO-ESTRUCTURA"

1. Introducción.
2. Descripción del método utilizado.
3. Métodos numéricos.
4. Aplicación del análisis numérico a la resolución del problema de la interacción suelo-estructura.
5. Ejemplos de aplicación.
6. Conclusiones.

Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesionales, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 17 de noviembre de 1960
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ COPRIU

JJE/OBLH/em

	Pág.
1.- INTRODUCCION	1
2.- DESCRIPCION DEL METODO UTILIZADO	
2.1 Antecedentes	4
2.2 Consideraciones Generales	15
2.3 Descripción detallada del método propuesto por el Ing. Agustín Deméneghi Ceccina (1950)	16
2.3.1 Ecuaciones derivadas de la aplicación del método de las rigideces	17
2.3.2 Condición de equilibrio de momentos en el nudo (i, j)	29
2.3.3 Condición de equilibrio de momentos en la cruzia i	41
2.3.4. Obtención del desplazamiento en la ci- mentación a la mitad de la cruzia i	44
2.3.5 Equilibrio de fuerzas verticales	46
2.3.6 Cálculo de hundimientos del suelo	48
2.3.7 Secuencia de operaciones en el análisis conjunto	57
3.- METODOS NUMERICOS	
3.1 Generalidades	60
3.2 Métodos Numéricos Aplicados a la solución de Ecuaciones Algebraicas Lineales Simultáneas	66
3.3 Método de Gauss	72

	Pág.
4.- APLICACION DEL ANALISIS NUMERICO A LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DE LA INTERACCION SUELO - ESTRUCTURA	
4.1 <i>Enfoque General</i>	79
4.2 <i>Desarrollo del Programa</i>	80
5.- EJEMPLOS DE APLICACION	89
6.- CONCLUSIONES	94
APENDICE "A"	98
APENDICE "B"	109
APENDICE "C"	112
APENDICE "D"	119
APENDICE "E"	131
APENDICE "F"	135
APENDICE "G"	138
APENDICE "H"	140
APENDICE "I"	151
BIBLIOGRAFIA	154

CAPITULO 1

INTRODUCCION

El estudio de la cimentación resulta de suma importancia en toda obra ingenieril y el buen funcionamiento de ésta depende, en gran medida, de una cimentación bien diseñada. Hasta la fecha, los métodos con los que se cuenta para el análisis de las cimentaciones en suelos de mediana a alta compresibilidad de estructuras reticulares, que es el caso que con mucha frecuencia se presenta al ingeniero, son complejos y, -- aún cuando éstos representan un avance en este campo, su --- aplicación a problemas reales requiere una gran cantidad de cálculos e iteraciones que no siempre resultan prácticos.

En el año de 1979 el M. en I. Agustín Deméneghi Colina desarrolló un método para el análisis de la interacción suelo es

estructura considerando una acción repartida del terreno sobre la estructura que, básicamente, consiste en incorporar el -- cálculo de asentamientos del suelo al análisis estructural.-- El objetivo del presente trabajo es presentar este método -- así como su aplicación a problemas prácticos mediante un programa de computadora que facilita la solución de los mismos.

En el capítulo segundo de este trabajo se presenta, de manera muy general, un breve resumen de los métodos que tradicionalmente se venían utilizando para problemas del tipo de los mencionados anteriormente. Se presenta también la descripción del método de Deméneghi. Este capítulo se complementa con varias demostraciones contenidas en los apéndices A, B y C.

En el capítulo tercero se presentan generalidades sobre los métodos numéricos y la programación en lenguaje FORTRAN, que son de mucha utilidad para la solución de un sistema de ecuaciones lineales como el que resulta de la aplicación del método expuesto en el cap. 2; se trata principalmente el método de eliminación de Gauss, el cual se presenta de manera -- más amplia en el apéndice D.

En el capítulo cuarto se presentan las etapas más importantes de la solución mediante el método de Deméneghi, su des--

cripción, diagramas de bloques y/o de flujo, así como la codificación del programa empleado, complementándose este capítulo con los apéndices restantes.

En el capítulo quinto se presentan ejemplos de aplicación -- del método, así como un instructivo para el manejo del programa y la interpretación de resultados.

Finalmente, en el capítulo sexto se presentan las conclusiones del análisis numérico de la interacción suelo-estructura.

2. DESCRIPCION DEL METODO UTILIZADO

2.1 Antecedentes

Se presentan en esta parte, a manera de resumen, los enfoques que se le venían dando al problema de la interacción suelo-estructura en el análisis y diseño de las cimentaciones. Paralelo habrá que mencionar algunos conceptos simples, pero no por ello poco importantes, sobre el contacto suelo-estructura (Juárez B. y Rico R., Tomo II, 1979).

Es bien sabido que si se tiene una área cargada, la rigidez de ésta afecta la distribución de asentamientos y presiones en el suelo que le subyace; se considerará, en primer lugar, el caso de suelos puramente friccionantes y de suelos puramente cohesivos. Posteriormente se analizarán los casos de cimentaciones totalmente rígidas y cimentaciones totalmente fle

xibles.

Considérese en primer lugar el caso de una área uniformemente cargada y totalmente flexible. Debido a su flexibilidad, las presiones que el área cargada transmita al suelo serán idénticas a la presión uniforme sobre el área. Por otra parte, el asentamiento tendrá un valor máximo al centro del área cargada y menor en la periferia, como puede apreciarse en la fig.-2.1.1.a., siempre y cuando el medio cargado se suponga idealmente elástico.

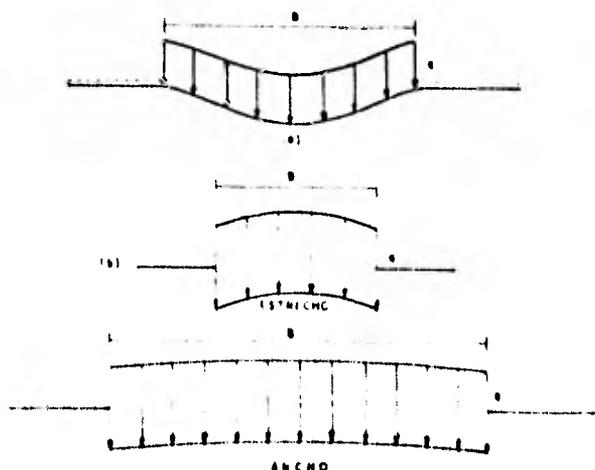


FIG. 2.1.1. Perfil de asentamiento bajo un área uniformemente cargada sobre la superficie de un medio semi-infinito

Según se observa en la práctica, el asentamiento inmediato, - debido exclusivamente a cambio de forma (es decir, excluyendo el asentamiento por consolidación) de áreas flexibles carga--

das uniformemente y apoyadas en arcillas saturadas, adopta un perfil similar al mostrado en la parte (a) de la anterior figura.

Cuando el área flexible se apoya sobre arenas o gravas, el perfil se parece al mostrado en la parte (b) de la fig. 2.1.1, ésto se debe a que estos suelos poseen la propiedad de que su rigidez aumenta con el confinamiento, el cual obviamente será máximo en la zona que está bajo el centro del área cargada.

Consideremos ahora el caso de que se tenga una placa infinitamente rígida a través de la cual se transmite una carga al suelo; debido a su rigidez, la placa se asentará uniformemente, lo que ocasionará que la presión de contacto entre placa y medio en general no sea uniforme. Bajo las consideraciones anteriores se puede ver que en el medio homogéneo y elástico la presión es mínima al centro y máxima en las orillas, ya que para que el asentamiento sea uniforme, se deberá disminuir la tendencia al asentamiento en la parte central (por medio de una disminución de presión) y aumentar dicha tendencia en las orillas (aumentando la presión). Un razonamiento análogo para el caso del medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento, conduce a una distribución en la cual la presión es máxima bajo el centro del área cargada y mucho menor bajo la periferia. En la fig. 2.1.2, se muestran ambas distribucio--

nes.

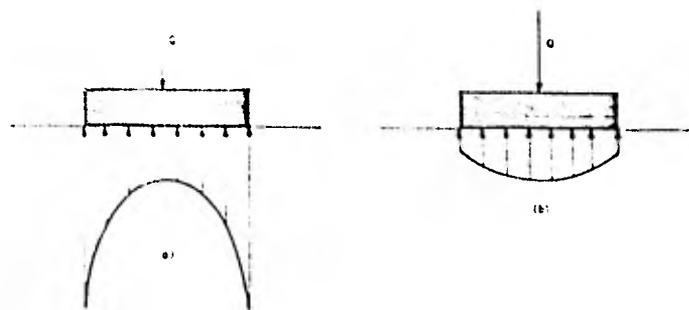


FIG 2.1.2 Distribución de presiones bajo una placa infinitamente rígida
 a) Medio homogéneo y elástico
 b) Medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento

En la práctica, el caso (a) de la fig. 2.1.2. se parece a la distribución de presiones que se presenta en una arcilla saturada en condiciones iniciales. A pesar de que teóricamente la presión es infinita en la periferia de la placa y es igual a la mitad de la presión media bajo el centro de la misma, es evidente que la primera condición no se puede satisfacer, ya que el valor de la presión en la periferia estará limitado a su máximo, el cual dependerá de la resistencia del material.

En la parte (b) de la anterior figura se presenta, en forma aproximada, la distribución real de presiones bajo una placa rígida colocada sobre arena o grava.

A la presión que actúa entre la base del cimiento y el terreno de cimentación se le conoce como presión de contacto. Es común que en el diseño de un cimiento se considere que la --

presión de contacto es uniforme. En el caso de cimientos rígidos desplantados en arena, esa consideración conduce a un diseño conservador, pero en arcilla, donde la presión es mayor en los bordes, quedará del lado inseguro, utilizándose los factores de seguridad para contrarrestar este efecto.

En el diseño de cimentaciones rígidas de grandes dimensiones, como losas y cajones, desplantados en suelos compresibles, es importante tomar en cuenta la distribución no uniforme de la presión de contacto. (Terzaghi - Peck, 1967).

La evaluación de las distribuciones de esfuerzos y asentamientos ha preocupado a los ingenieros desde hace tiempo. El profesor Terzaghi fue de los primeros investigadores que trató de atacar el problema desde un punto de vista práctico en ingeniería. A continuación se presenta un resumen del trabajo realizado por este investigador (1943).

Consideremos un sistema en el cual el suelo de la cimentación se reemplaza por un grupo de resortes igualmente espaciados y con un cierto módulo elástico, cada uno de los cuales es independiente del otro, tal como se muestra en la fig. 2.1.3. El módulo elástico puede o no ser constante dependiendo del tipo de obra y condiciones del subsuelo.

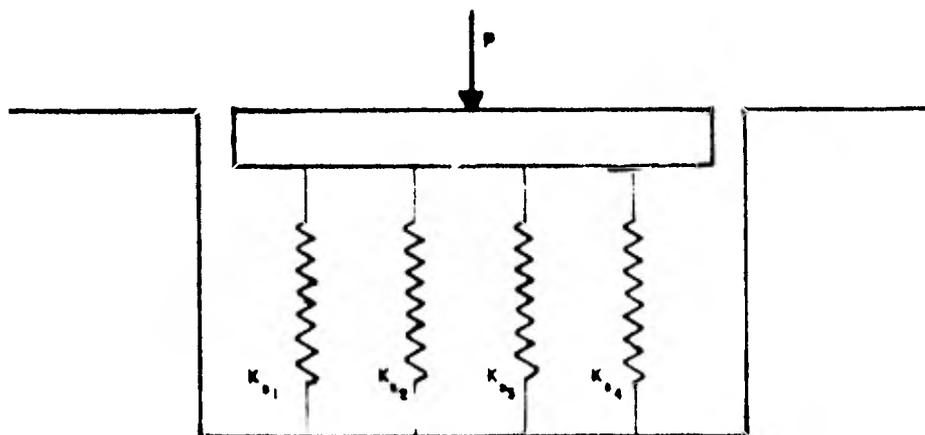


Fig 2.1.3 Cimentación sobre resortes

Veamos la manera de determinar este parámetro, al cual denominaremos Módulo de Reacción del Subsuelo y que está definido - por la relación:

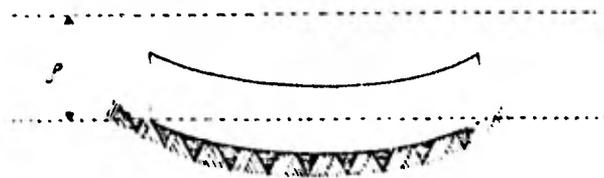
$$K_s = \frac{p}{\rho}$$

donde:

- K_s es el módulo de Reacción del Subsuelo
- p es una carga por unidad de área de una superficie horizontal en una masa de suelo
- ρ es el correspondiente asentamiento de la superficie

La obtención de los datos necesarios para asignar un valor razonable a este módulo, requiere aplicar una presión uniforme-

sobre la superficie expuesta del suelo, para después medir la deflexión de los diferentes puntos y así poder tomar un valor promedio de los valores transmitidos; o bien transmitir una presión total conocida sobre el suelo por medio de un cuerpo rígido (tal como un bloque de concreto), medir el desplazamiento y calcular la relación entre la presión y el desplazamiento, véase fig. 2.1.4.



el PISO FLEDO

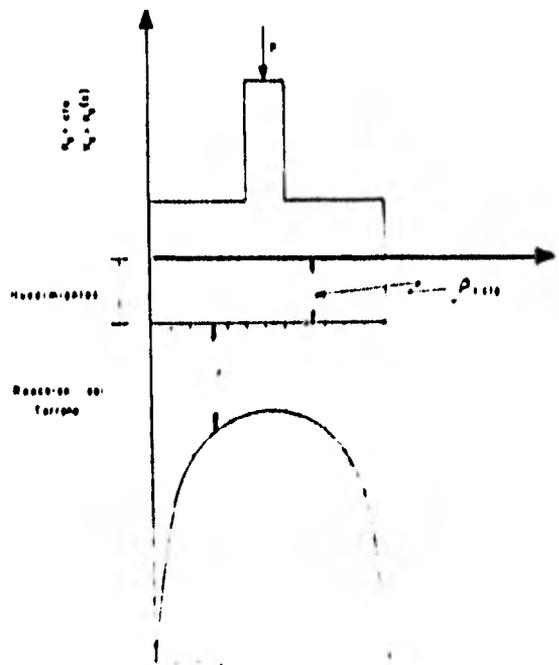


FIG. 2.1.4 Determinación del módulo de reacción del subsuelo K_g .

En ambos casos los procedimientos involucran un factor arbitrario, ya que se reemplaza un módulo variable por un valor promedio, que es el módulo de reacción del subsuelo K_s .

Del análisis dimensional de K_s resulta:

$$K_s = \frac{E}{c} \text{ (gr m/cm}^3\text{)}$$

La expresión anterior representa solamente un modelo que se asemeja al comportamiento real del suelo.

El valor del módulo de reacción del subsuelo K_s , depende no solamente de la naturaleza del suelo, sino también de la forma y tamaño del área que soporta la carga. De lo anterior se desprende la necesidad de considerar todos los factores mencionados, al seleccionar el valor de K_s , ya que estos influyen en su determinación. Además el valor de K_s no es una constante para un suelo dado.

Otro trabajo realizado es el del Dr. Zeevaert (1973) que se presenta a continuación:

Considérese una planta de cimentación que se idealiza en un sistema de vigas cortas en un sentido y vigas longitudinales en el otro. Las vigas cortas tienen una rigidez mayor con re

lación a la compresibilidad del suelo que las vigas longitudinales. Se requiere que las vigas cortas tomen las reacciones y las cargas de las columnas, para lo cual se considera a las vigas longitudinales como un sistema estáticamente determinado, es decir, que trabaja con áreas tributarias. Si los asentamientos diferenciales con esta hipótesis se cumplen, las vigas longitudinales no requieren de ninguna rigidez especial, -excepto la necesaria para transmitir la presión de contacto -entre la losa de cimentación y la reacción de las vigas. Las vigas longitudinales, sin embargo, pueden ser diseñadas con la rigidez necesaria para reducir los asentamientos diferenciales a valores permisibles o menores. En este caso las vigas longitudinales, además de transmitir reacciones, son utilizadas para distribuir cargas desbalanceadas en las vigas --cortas, requeridas para obtener continuidad en las reacciones del terreno. Por lo tanto las vigas longitudinales pueden --ser llamadas vigas para balancear cargas (vigas LB) para distinguirlas de las vigas de reacción (vigas RB). (Miguel Pozas, Tesis Profesional, 1980).

La superficie cargada se divide en bandas con área A_{ii} en dirección de las vigas cortas.

El siguiente paso es determinar el asentamiento medio δ'_{ii} de cada banda de área A_{ii} .

$$\delta'_{an} = \frac{\sum s_n a_n}{A_n}$$

Los valores δ'_{an} se consideran la primera aproximación para el desplazamiento vertical promedio en cada banda, correspondiendo a la primera suposición de una reacción del terreno q'_{an} . Una vez que los valores δ'_{an} son conocidos, la primera aproximación del módulo de cimentación puede ser calculado para cada banda:

$$K'_n = \frac{q'_{an} A_n}{\delta'_{an}}$$

Usando los valores de K'_n y los de las columnas cargadas Q_n para las bandas correspondientes, calculamos los desplazamientos verticales, considerando la rigidez de la estructura de cimentación en la dirección longitudinal, como si se tratase de una viga ó cimentación elástica; así introducimos en el cálculo la rigidez de la viga dada por EI . El resultado de esta primera aproximación, dá los cortantes y momentos flexionantes en la estructura de cimentación y los desplazamientos verticales promedio, δ''_{an} , con los cuales se pueden obtener los valores corregidos de la reacción del terreno:

$$q''_{an} = \frac{s''_{an} A'_n}{A_n}$$

En este paso, el cálculo puede realizarse por métodos corrientes de ingeniería estructural: ya sea métodos numéricos o -- a través del establecimiento de la matriz correspondiente para obtener las reacciones desconocidas de cada banda.

Con el mejoramiento del promedio de las reacciones unitarias del terreno q''_{an} de cada banda tributaria, se efectúa un segundo análisis de asentamientos. Los parámetros de compresibilidad deben ser corregidos para el mejoramiento de los niveles de esfuerzo inducidos en el subsuelo.

El cálculo de asentamientos llevado a cabo dará un mejoramiento de los desplazamientos verticales promedio del subsuelo, - bajo las bandas transversales; a éstos les llamaremos δ''_{an} y a partir de ellos se calcula el módulo de cimentación para las bandas tributarias por medio de la siguiente expresión:

$$K''_{n} = \frac{q''_{an} A_n}{\delta''_{an}}$$

Usando el valor de K''_{n} mejorado, llevaremos a cabo un segundo ciclo de cálculos para determinar cortantes, momentos flexionantes, deflexiones y reacciones del subsuelo como previamente se describió. El procedimiento se repite hasta que el cambio en cortantes y momentos flexionantes se considere despreciable para fines prácticos.

De lo visto anteriormente se observa que la resolución del -- problema de la interacción suelo-estructura presenta dificultades para su aplicación en la práctica. Los estudios de Terzaghi sirven únicamente para una viga semi-rígida cargada en su centro y apoyada sobre un medio elástico; pero la mayoría de los edificios dista bastante de cumplir con estas condiciones tan particulares. Por otra parte, el método de Zeevaertes más completo, pero hay necesidad de hacer iteraciones tanto para el análisis estructural como para el cálculo de hundimientos, lo cual requiere un gran número de operaciones.

2.2 Consideraciones Generales

De los antecedentes presentados anteriormente, se desprende -- la necesidad de un método que tome de manera conjunta las características tanto de la estructura como del suelo.

Hasta ahora el problema se ha tratado, en general, sin tomar en cuenta: por un lado el ingeniero de mecánica de suelos la rigidez de la estructura; por el otro el ingeniero estructuralista hace un diseño con un factor de seguridad alto debido a -- que desconoce la reacción del suelo sobre la estructura. El método del Ing. Deméneghi analiza en forma conjunta el problema de la interacción suelo-estructura cubriendo las deficiencias de los métodos tradicionales.

2.3 Descripción detallada del método propuesto por el Ing. - Agustín Deméneghi Colina (1980).

Consideremos una estructura reticular apoyada sobre un suelo de mediana a alta compresibilidad fig 2.3.1, en que la cimentación puede ser resuelta a base de zapatas corridas o mediante una losa con contratraves de concreto armado. Se determinarán los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos en la estructura.

En vista de que desconocemos la distribución de la reacción del suelo, ésta se considerará en forma discreta como se muestra en la fig. 2.3.1.

Para hacer el análisis conjunto de la estructura y el suelo conviene emplear el método de las rigideces. Para aplicar el método de las rigideces o de los desplazamientos en la solución de una estructura hiperestática se necesitan determinar primero las componentes independientes de los desplazamientos: lineales (δ_i, ξ_i) y angulares ($\theta_{i,j}$) que se desconocen.

Estos desplazamientos se consideran las incógnitas del problema y utilizando las relaciones esfuerzo-deformación del material, las fuerzas internas de la estructura se pueden expresar en función de estos desplazamientos.

Por cada componente de desplazamiento desconocida, se establece una ecuación de equilibrio en función de las fuerzas externas conocidas y de las fuerzas internas no conocidas, las cuales están expresadas en términos de los desplazamientos. Se forma un sistema de ecuaciones cuyo número es igual al número de componentes de desplazamiento desconocidas. Sin embargo, tal como se puede apreciar en la fig. 2.3.1., no conocemos -- completo el vector de cargas, pues las reacciones del terreno R_i y T_i son también incógnitas. No obstante, al realizar el análisis de hundimientos del terreno, podremos obtener los desplazamientos del suelo ξ_i y ζ_i en función de las reacciones R_i y T_i . Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones derivadas de la aplicación inicial del método de las rigideces, nos quedará un sistema de ecuaciones en que las incógnitas serán únicamente los giros en los nudos $(\theta_{i,j})$ y las reacciones del terreno R_i, T_i .

La solución del sistema permite conocer los valores de los desplazamientos y de las reacciones, con las cuales se pueden calcular las fuerzas internas de la estructura.

2.3.1 Ecuaciones derivadas de la aplicación del método de las rigideces

Para encontrar dichas ecuaciones se utilizará el método pen--

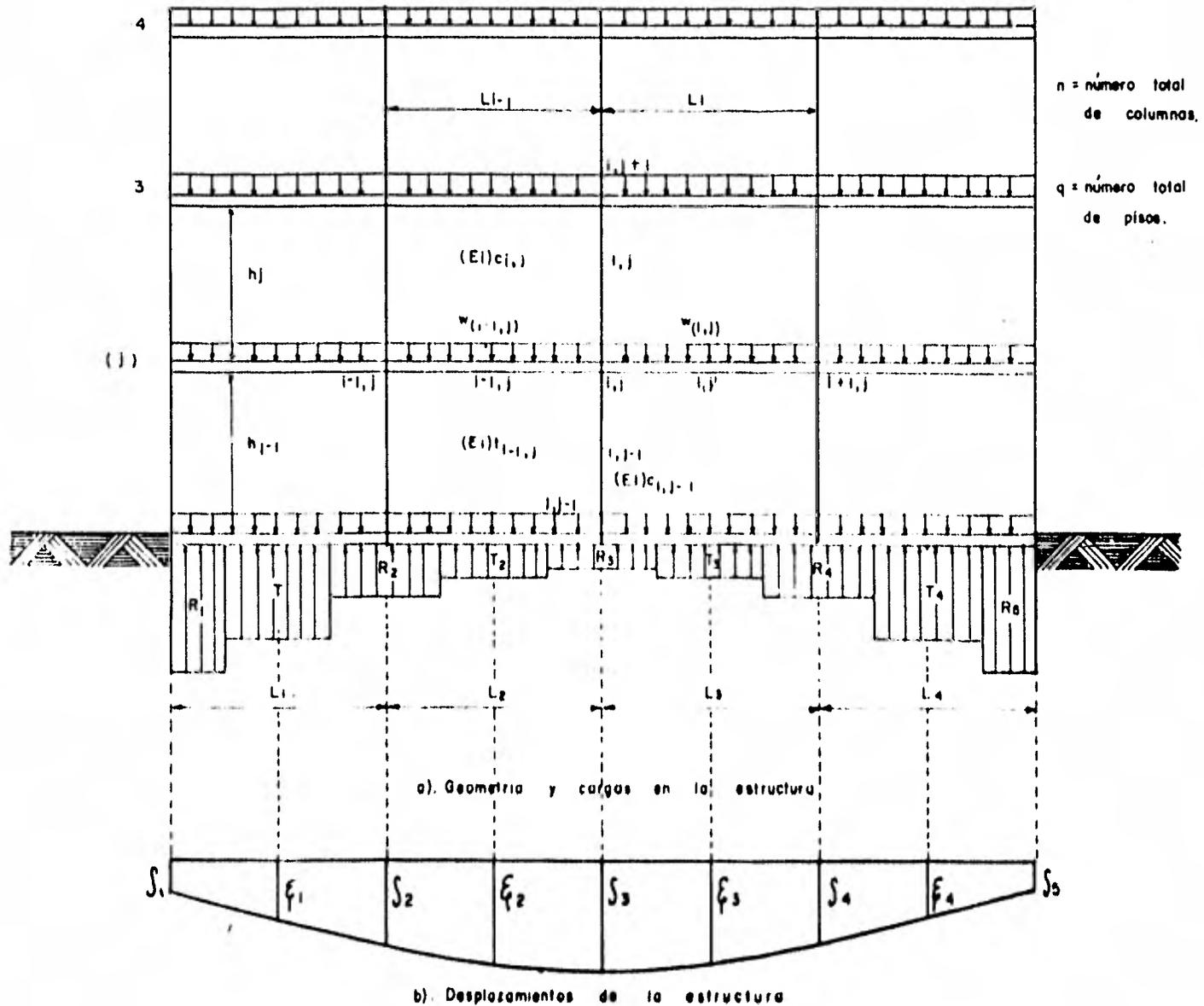


FIG. 2.31. Características de la estructura

diente deformación (Luthe, 1971) que a continuación se presenta.

Las ecuaciones para aplicar este método se obtienen de los Teoremas de Mohr, y por lo tanto, solo se considera el efecto por flexión, no considerándose los efectos de fuerza cortante y fuerza normal. La ecuación de pendiente-deformación expresa el momento en el extremo de una barra en función de los giros de la tangente en cada extremo de la curva elástica de la barra, de la rotación de la cuerda que une los extremos de la elástica y del sistema de cargas aplicado en cada barra.

La convención de signos supone que los momentos de nudo sobre barra en los extremos de la viga, los giros θ de tangentes y ψ de la cuerda con respecto a la posición original de la viga son positivos en la dirección de las manecillas del reloj.

Considérese una viga de sección transversal constante y sujeta a un sistema cualquiera de cargas, como se indica en la fig. 2.3.2, en donde $M_{(i,j)}$ indica el momento en el extremo i de la barra (i,j) . La deformación de la viga se presenta en la fig. 2.3.3. De la deformación de la viga anterior se obtienen las relaciones:

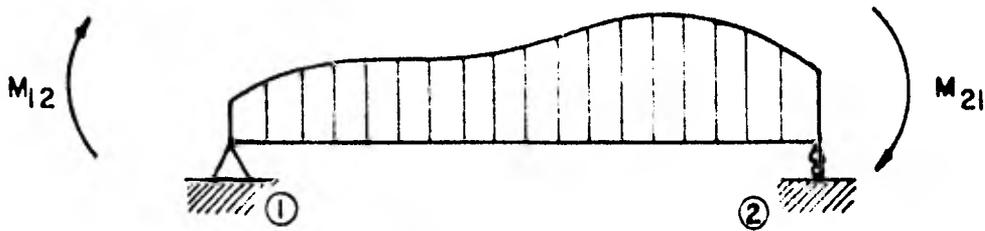
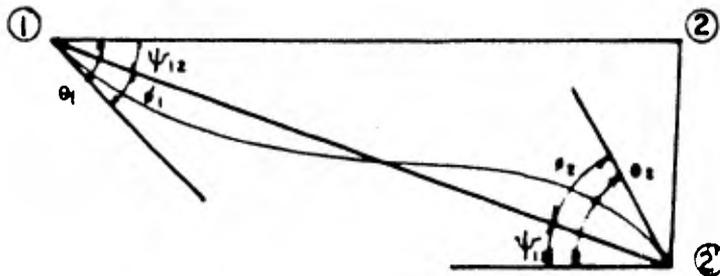


FIG.2.3.2.(a) Sistema de cargas



(b) Deformación de la viga.

FIG.2.3.3. Sistema de cargas y deformación de una viga prismática.

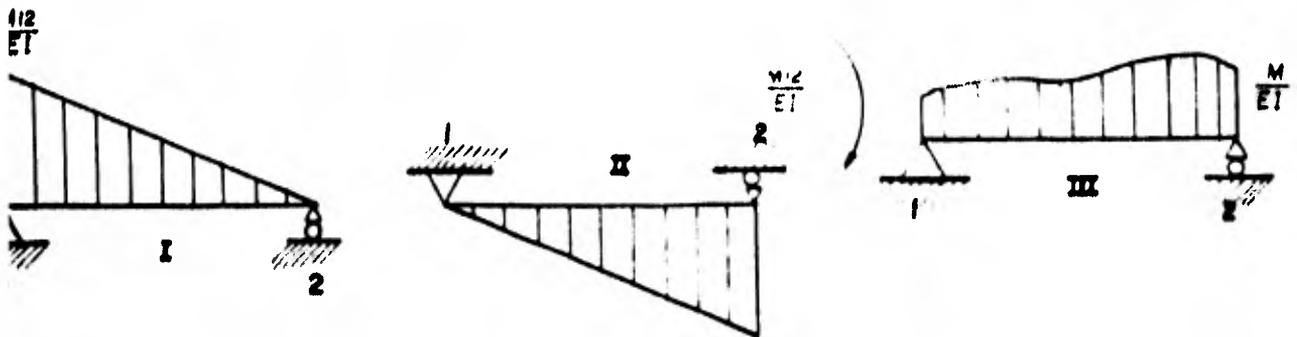


Fig 2,3,4 Descomposición de la viga

$$\phi(i, j) = \theta(i, j) - \psi(i, j)(i+1, j) \quad 2.3.1$$

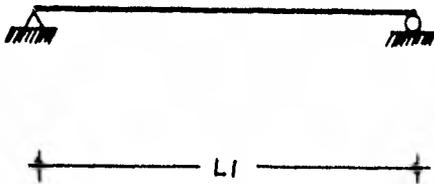
$$\phi(i+1, j) = \theta(i+1, j) - \psi(i, j)(i+1, j) \quad 2.3.2$$

Los giros $\phi(i, j)$ y $\phi(i+1, j)$ se pueden calcular aplicando los Teoremas de Mohr o la viga conjugada a la estructura original, que por el principio de superposición se puede separar en las vigas de la fig. 2.3.4., cargadas con el diagrama M/EI correspondiente.

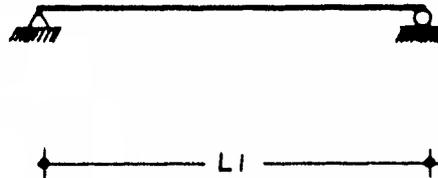
A continuación se enuncia el método de la viga conjugada. -- Con este método se supone una viga ficticia denominada viga - conjugada que tiene la misma longitud que la viga real, pero con apoyos tales que si la viga conjugada se carga con el diagrama M/EI de la viga real, la fuerza cortante de la viga conjugada en una sección cualquiera es igual a la pendiente de - la tangente de la viga real en ese punto, y el momento flexio nante de la viga conjugada en un punto cualquiera es el des- plazamiento en ese punto de la viga real.

Los apoyos de la viga conjugada se pueden determinar conside- rando las características de la viga real y las condiciones - correspondientes en la viga conjugada. Para nuestro caso:

Viga Real



Viga Conjugada

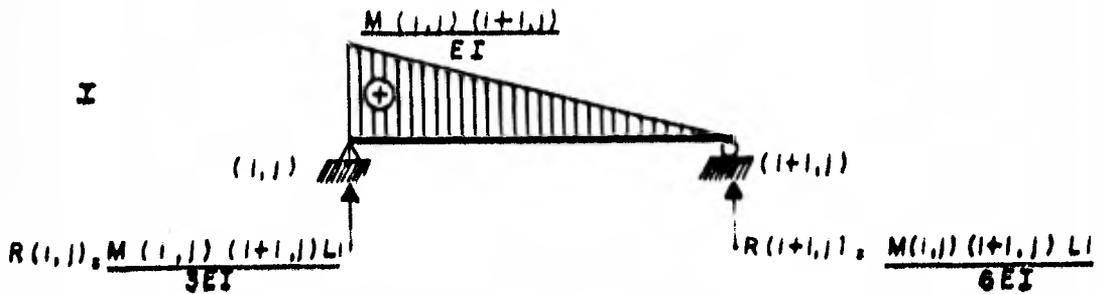


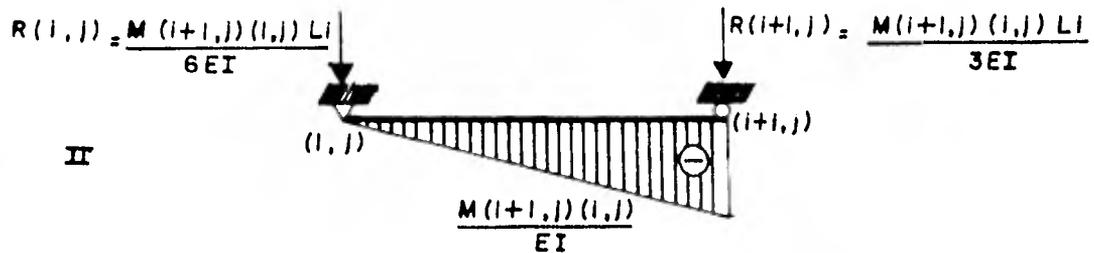
De acuerdo a lo anterior y por el principio de superposición de causas y efectos se tiene:

$$\phi(x, j) = \phi_I(x, j) + \phi_{II}(x, j) + \phi_{III}(x, j) \quad 2.3.3$$

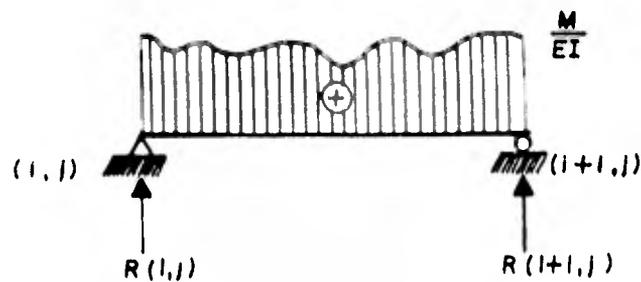
$$\phi(x+1, j) = \phi_I(x+1, j) + \phi_{II}(x+1, j) + \phi_{III}(x+1, j) \quad 2.3.4$$

en donde:





III



Para el cálculo de reacciones se tiene:

Haciendo $\sum M_{(i, j)} = 0$

$$\frac{M}{EI} L \cdot \frac{L}{2} - R_{(i+1, j)} L = 0$$

$$R_{(i+1, j)} = \frac{M L^2}{2 EI}$$

donde:

$M L_i$ es el área del diagrama de momentos

L_j es el brazo de palanca

Entonces:

$M L_i \times L_j$ es el momento estático con respecto al punto (i, j)
y que denominaremos $(M_0)_{i, j}$

Entonces:

$$R_{(i+1, j)} = \frac{(M_0)_{i, j}}{L_i EI}$$

De igual manera tenemos:

$$\sum M_{(i+1, j)} = 0$$

$$- \frac{M L_i L_2}{EI} + R_{(i, j)} L_i = 0$$

$$R_{(i, j)} = \frac{M L_i + L_2}{L_i EI}$$

$$R_{(i, j)} = \frac{(M_0)_{(i+1, j)}}{L_i EI}$$

Las reacciones obtenidas anteriormente son las fuerzas cortan

tes de la viga conjugada, se tiene que las ecs. 2.3.3 y 2.3.4 quedan:

$$\psi(i, j) = \frac{M(i, j)(i+1, j) L_i}{3EI} - \frac{M(i+1, j)(i, j) L_i}{6EI} + \frac{(M_0)_{i+1, j}}{L_i EI}$$

$$\psi(i+1, j) = -\frac{M(i, j)(i+1, j) L_i}{6EI} + \frac{M(i+1, j)(i, j) L_i}{3EI} - \frac{(M_0)_{i, j}}{L_i EI}$$

Sustituyendo los valores de $\psi(i, j)$ y $\psi(i+1, j)$ en 2.3.1 y 2.3.2 tenemos:

$$\frac{M(i, j)(i+1, j) L_i}{3EI} - \frac{M(i+1, j)(i, j) L_i}{6EI} + \frac{(M_0)_{i+1, j}}{L_i EI} = \theta(i, j) -$$

$$- \psi(i, j)(i+1, j)$$

$$-\frac{M(i, j)(i+1, j) L_i}{6EI} + \frac{M(i+1, j)(i, j) L_i}{3EI} - \frac{(M_0)_{i, j}}{L_i EI} = \theta(i+1, j) -$$

$$- \psi(i, j)(i+1, j)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas anteriores:

$$M(i, j)(i+1, j) = \frac{2EI}{L_i} (2\theta(i, j) + \theta(i+1, j) - 3\psi(i, j)(i+1, j)) +$$

$$+ \frac{2}{Ll^2} \left[(M_0)_{i,j} - 2(M_0)_{i+1,j} \right]$$

$$M_{(i+1,j)}(i,j) = \frac{2EI}{Ll} (\theta_{(i,j)} + 2\theta_{(i+1,j)} - 3\psi_{(i,j)}(i+1,j)) +$$

$$+ \frac{2}{Ll^2} \left[2(M_0)_{i,j} - (M_0)_{i+1,j} \right]$$

que son las ecs. 2.3.5 y 2.3.6 respectivamente

Si se considera una viga con los dos extremos empotrados, las condiciones de los desplazamientos en los apoyos son:

$$\theta_{(i,j)} = \theta_{(i+1,j)} = \psi_{(i,j)}(i+1,j) = 0 \quad 2.3.7$$

Sustituyendo los valores de 2.3.7 en 2.3.5 y 2.3.6:

$$M_{(i,j)}(i+1,j) = \frac{2}{Ll^2} \left[(M_0)_{i,j} - 2(M_0)_{i+1,j} \right] = M_{(i,j)}^e(i+1,j)$$

$$M_{(i+1,j)}(i,j) = \frac{2}{Ll^2} \left[2(M_0)_{i,j} - (M_0)_{i+1,j} \right] = M_{(i+1,j)}^e(i,j)$$

que son las ecs. 2.3.5' y 2.3.6' donde $M_{(i,j)}^e(i+1,j)$ y $M_{(i+1,j)}^e(i,j)$ son los momentos de empotramiento de la viga de

blemente empotrada, sustituyendo éstos en 2.3.5 y 2.3.6, respectivamente, se tiene:

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = \frac{2EI}{L_i} (2\theta_{(i,j)} + \theta_{(i+1,j)} - 3\psi_{(i,j)(i+1,j)}) + M_{(i,j)(i+1,j)}^e$$

$$M_{(i+1,j)(i,j)} = \frac{2EI}{L_i} (\theta_{(i,j)} + 2\theta_{(i+1,j)} - 3\psi_{(i,j)(i+1,j)}) + M_{(i+1,j)(i,j)}^e$$

que son las ecs. 2.3.8 y 2.3.9 respectivamente. Desarrollando se tiene:

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = M_{(i,j)(i+1,j)}^e + \frac{4EI}{L_i} \theta_{(i,j)} + \frac{2EI}{L_i} \theta_{(i+1,j)} - \frac{6EI}{L_i} \psi_{(i,j)(i+1,j)}$$

$$M_{(i+1,j)(i,j)} = M_{(i+1,j)(i,j)}^e + \frac{2EI}{L_i} \theta_{(i,j)} + \frac{4EI}{L_i} \theta_{(i+1,j)} - \frac{6EI}{L_i} \psi_{(i,j)(i+1,j)}$$

Los momentos obtenidos en las expresiones anteriores son momentos de nudo sobre barra, por lo tanto, el momento de barra sobre nudo tendrá sentido contrario; esto es, en contra de las manecillas del reloj. Sin embargo, nos conviene en el análisis estructural que el momento de barra sobre nudo sea positivo en el sentido de las manecillas del reloj. Aceptando esta convención de signos, las expresiones anteriores quedan:

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = M_{(i,j)(i+1,j)}^e - \frac{4EI}{L_i} \theta_{(i,j)} - \frac{2EI}{L_c} \theta_{(i+1,j)} + \frac{6EI}{L_i} \psi_{(i,j)(i+1,j)}$$

$$M_{(i+1,j)(i,j)} = M_{(i+1,j)(i,j)}^e - \frac{2EI}{L_i} \theta_{(i,j)} - \frac{4EI}{L_c} \theta_{(i+1,j)} + \frac{6EI}{L_c} \psi_{(i,j)(i+1,j)}$$

que son las ecs. 2.3.10 y 2.3.11.

Para evitar el manejo de términos negativos, basta cambiar ahora la convención de giros, considerando que un giro es positivo cuando tiene sentido contrario a las manecillas del reloj, ocasionando un momento positivo cuyo sentido es el de --

las manecillas del reloj. El momento de empotramiento lo consideramos positivo en el sentido de las manecillas del reloj.

De acuerdo con lo anterior las ecs. 2.3.10 y 2.3.11 quedan:

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = M_{(i,j)(i+1,j)}^e + \frac{4EI}{L_i} \theta_{(i,j)} + \frac{2EI}{L_i} \theta_{(i+1,j)} + \frac{6EI}{L_i} \psi_{(i,j)(i+1,j)}$$

$$M_{(i+1,j)(i,j)} = M_{(i+1,j)(i,j)}^e + \frac{2EI}{L_i} \theta_{(i,j)} + \frac{4EI}{L_i} \theta_{(i+1,j)} + \frac{6EI}{L_i} \psi_{(i,j)(i+1,j)}$$

que son las ecs. 2.3.12 y 2.3.13

Para aclarar los signos de momento, giros y desplazamientos-lineales tenemos:

Los momentos $M_{(i,j)(i+1,j)}$, $M_{(i,j)(i+1,j)}^e$, $M_{(i+1,j)(i,j)}$ y $M_{(i+1,j)(i,j)}^e$ son momentos de barra sobre nudo y son positivos cuando tienen el sentido de las manecillas del reloj.

Los giros $\theta_{(i,j)}$ y $\theta_{(i+1,j)}$ son positivos cuando tienen sentido contrario a las manecillas del reloj (cuando ésto ocurre - los momentos que ocasionan son positivos).

El desplazamiento relativo $v_{(i,j)(i+1,j)}$ es positivo cuando el nudo $(i+1,j)$ se desplaza hacia abajo una distancia mayor que el nudo (i,j) . En estas condiciones, el momento que provoca este desplazamiento es un momento positivo.

Con lo anterior los momentos de las ecs. 2.3.12 y 2.3.13 serán de barra sobre nudo y todos tendrán signo positivo, es decir, tendrán el sentido de las manecillas del reloj.

Las expresiones 2.3.12 y 2.3.13 son el resultado de la aplicación del método de las rigideces. Es una suma de términos -- que corresponden a las siguientes etapas:

1. Se fijan los nudos lineal y angularmente y se calculan los momentos de empotramiento.
2. Se permite el giro del apoyo (i,j) y luego el del apoyo $(i+1,j)$.
3. Por último se permite el desplazamiento lineal relativo entre los apoyos (i,j) y $(i+1,j)$.

Una vez que se ha explicado la obtención de las ecs. 2.3.12- y 2.3.13 en las cuales nos apoyaremos, se mencionarán los pasos para la descripción del método de Deméneghi; dichos pasos son:

- Se empezará con la condición de equilibrio de momentos en el nudo (i, j) .
- Seguiremos con la condición de equilibrio de momentos en la cruzía (i) .
- Continuaremos con la determinación de la deflexión ξ_i a la mitad de la cruzía i .
- Terminaremos con la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en toda la estructura.

2.3.2 Condición de equilibrio de momentos en el nudo (i, j)

El momento sobre el nudo (i, j) debido a la barra $(i, j) - (i+1, j)$ que es la traza (i, j) de la fig. 2.3.1 es:

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = M_{(i,j)(i+1,j)} + \frac{JH}{L} \xi_{(i,j)} + \frac{JH}{L} \xi_{(i+1,j)}$$

$$+ \frac{6EI}{Li} \psi(i, j) (i+1, j) \quad 2.3.12$$

en donde:

$M_{(i, j) (i+1, j)}$ momento sobre el nudo (i, j) debido a la trabe-
 $(i, j) (i+1, j)$

$M_{(i, j) (i+1, j)}^e$ momento de empotramiento sobre el nudo (i, j) -
 debido a la trabe $(i, j) (i+1, j)$

$\theta_{(i, j)}$ giro en el nudo (i, j)

$\theta_{(i+1, j)}$ giro en el nudo $(i+1, j)$

y llamando:

$$K_{t(i, j)} = \frac{EI(i, j)}{Li} = \text{rigidez de la trabe } (i, j)$$

Véase la fig. 2.3.5

$$\left. \begin{aligned} \phi(i, j) &= 2\theta(i, j) \\ \phi(i+1, j) &= 2\theta(i+1, j) \end{aligned} \right\} \text{Doblegiros en los nudos} \\ (i, j) \text{ y } (i+1, j)$$

por último:

$$\psi(i, j) (i+1, j) = \frac{\delta_v(i+1, j) - \delta_v(i, j)}{Li}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ec. 2.3.12 tenemos:

$$\begin{aligned}
 M_{(i,j)(i+1,j)} &= M_{(i,j)(i+1,j)}^e + 2K_{t(i,j)} \phi_{(i,j)} + \\
 &+ K_{t(i,j)} \phi_{(i+1,j)} + \\
 &+ \frac{6K_{t(i,j)}}{L_i} (\delta_{v(i+1,j)} - \delta_{v(i,j)}) \quad 2.3.12'
 \end{aligned}$$

De manera análoga el momento sobre el nudo (i,j) debido a la trabe $(i-1,j)$ valdrá:

$$\begin{aligned}
 M_{(i,j)(i-1,j)} &= M_{(i,j)(i-1,j)}^e + 2K_{t(i-1,j)} \phi_{(i,j)} + \\
 &+ K_{t(i-1,j)} \phi_{(i-1,j)} + \\
 &+ \frac{6K_{t(i-1,j)}}{L_{i-1}} (\delta_{v(i)} - \delta_{v(i-1,j)}) \quad 2.3.13'
 \end{aligned}$$

Los momentos sobre los nudos (i,j) debido a las columnas (j) y $(j-1)$ serán:

$$\begin{aligned}
 M_{(i,j)(i,j+1)} &= M_{(i,j)(i,j+1)}^e + 2K_{c(i,j)} \varphi_{(i,j)} + \\
 &+ K_{c(i,j)} \varphi_{(i,j+1)} + \\
 &+ \frac{6K_{c(i,j)}}{h_j} (\delta_{h(i,j+1)} - \delta_{h(i,j)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{(i,j)(i,j-1)} &= M_{(i,j)(i,j-1)}^e + 2K_{c(i,j-1)} \varphi_{(i,j)} + \\
 &+ K_{c(i,j-1)} \varphi_{(i,j-1)} + \\
 &+ \frac{6K_{c(i,j-1)}}{h_{j-1}} (\delta_{h(i,j)} - \delta_{h(i,j-1)})
 \end{aligned}$$

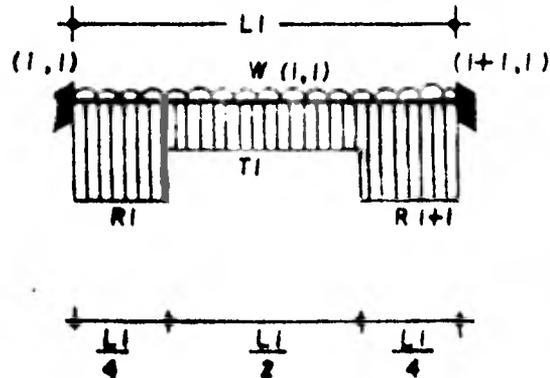
en donde:

$$K_{c(i,j)} = \frac{EI_{c(i,j)}}{h_j} \quad ; \quad K_{c(i,j-1)} = \frac{EI_{c(i,j-1)}}{h_{(j-1)}}$$

Obtención de los momentos de empotramiento para las trabes.

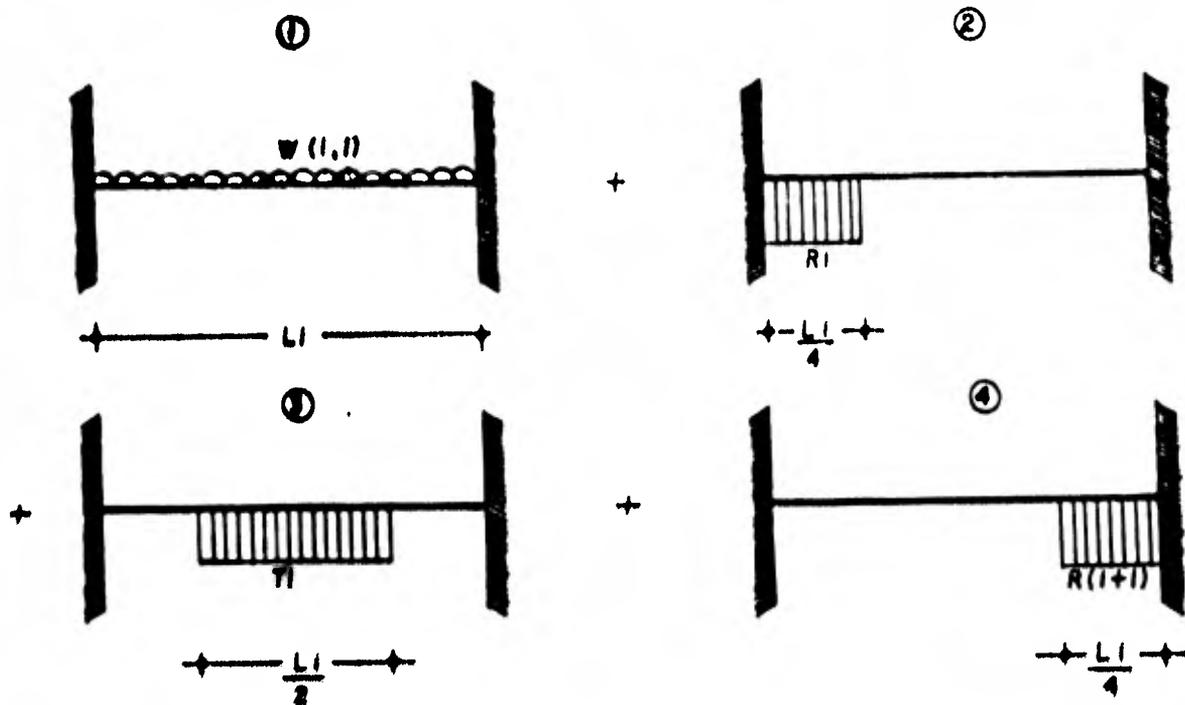
Primer nivel de piso ($j = 1$)

Consideremos la trabe (i, l) que se muestra en la fig 2.3.1.



donde $w(i, l)$ es una carga por unidad de longitud.

La cual se puede descomponer en:



De acuerdo a las consideraciones iniciales se tendrá entonces que:

$$M_{(i,1)(i+1,1)}^e = \frac{w_{(i,1)} L_i^2}{12} - \frac{67}{3072} R_i L_i^2 - \frac{13}{3072} R_{(i+1)} L_i^2 - \frac{11}{192} T_i L_i^2 \quad 2.3.14$$

$$M_{(i,1)(i-1,1)}^e = - \frac{w_{(i-1,1)} L_{(i-1)}^2}{12} + \frac{67}{3072} R_i L_{(i-1)}^2 + \frac{13}{3072} R_{(i-1)} L_{(i-1)}^2 + \frac{11}{192} T_{(i-1)} L_{(i-1)}^2$$

que es la ec. 2.3.15

Para el resto de los niveles $(i > 1)$

$$M_{(i,j)(i,j)}^e = \frac{w_{(i,j)} L_i^2}{12} \quad 2.3.16$$

$$M_{(i,j)(i,j)}^e = - \frac{w_{(i,j)} L_i^2}{12} \quad 2.3.17$$

La obtención de los momentos anteriores se presenta en forma detallada en el apéndice A.

Para las columnas (fig. 2.3.5)

Debido a que en el presente trabajo se utilizará una estructura simétrica tanto en geometría como en cargas, y no estará sujeta a cargas laterales, entonces no existirán desplazamientos laterales. Si no se cumpliera lo anterior, habría que tomar en cuenta los desplazamientos laterales en el análisis. Por lo tanto en nuestro caso:

$$M_{(i,j)(i,j+1)}^e = M_{(i,j)(i,j-1)}^e = 0 \quad 2.3.18$$

$$\delta_{h(i,j-1)} = \delta_{h(i,j)} = \delta_{h(i,j+1)} = 0 \quad 2.3.19$$

Es evidente que los asentamientos en el sentido vertical en los nudos $(i-1,j)$, (i,j) y $(i+1,j)$ serán iguales en cada entrepiso (despreciando la deformación axial en las columnas), razón por la cual los subíndices (j) desaparecerán (fig. 2.3.6). Cosa semejante ocurre con los desplazamientos horizontales que serán iguales para los nudos $(i-1,j)$, (i,j) y $(i+1,j)$ en los que desaparecerán ahora los subíndices (i) , por lo ---

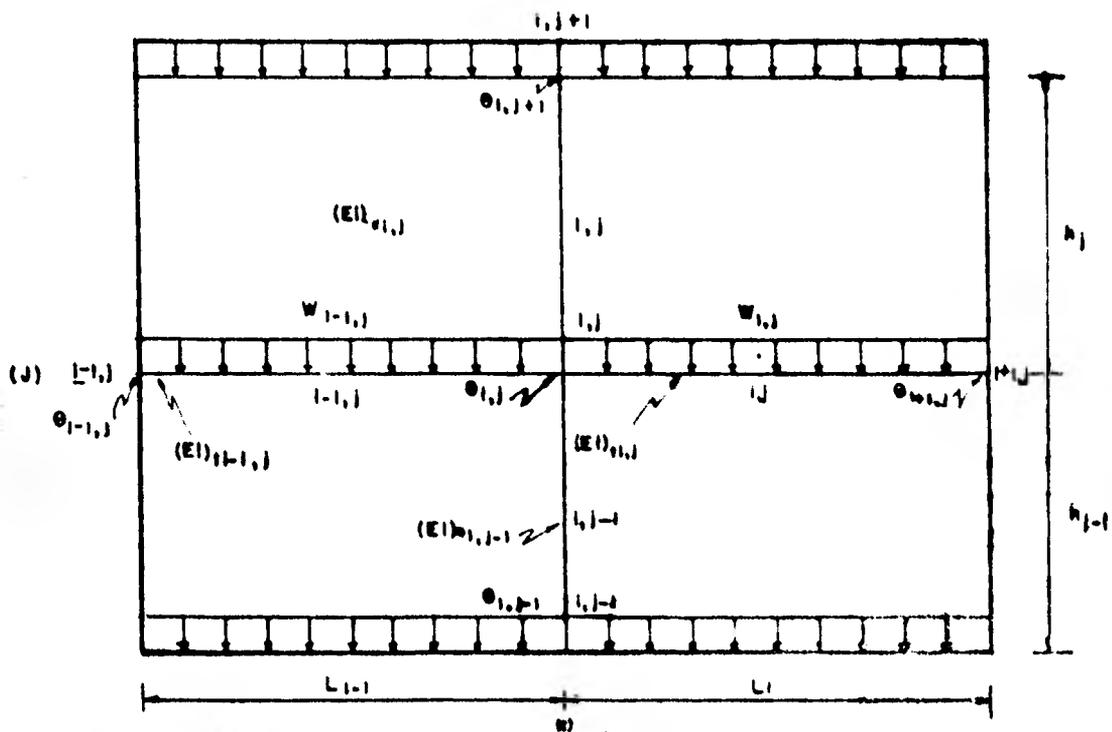


FIG. 2.3.3. Notación y datos en la estructura

que, introduciendo éstas consideraciones en las ecs. 2.3.14 a 2.3.19 y sustituyendo éstas en las ecs. 2.3.12' y 2.3.13' nos quedará:

Para $j = 1$

$$\begin{aligned}
 M_{(i,1)(i+1,1)} = & \frac{W_{(i,1)} L_i^2}{12} - \frac{67}{3072} R_i L_i^2 - \frac{13}{3072} R_{(i+1)} L_i^2 - \\
 & - \frac{11}{192} T_i L_i^2 + 2K_{e_{(i,1)}} \delta_{(i,1)} + \\
 & + K_{e_{(i,1)}} \delta_{(i+1,1)} - \frac{5K_{e_{(i,1)}}}{L_i} \delta_{(i,1)} + \\
 & + \frac{6K_{e_{(i,1)}}}{L_i} \delta_{(i+1,1)}
 \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

$$\begin{aligned}
M_{(i,1)(i-1,1)} &= - \frac{W_{(i-1,1)} L_{(i-1)}^2}{12} + \frac{67}{3072} R_i L_{(i-1)}^2 + \\
&+ \frac{13}{3072} R_{(i-1)} L_{(i-1)}^2 + \frac{11}{192} T_{(i-1)} L_{(i-1)}^2 + \\
&+ 2K_{t_{(i-1,1)}} \phi_{(i,1)} + K_{t_{(i-1,1)}} \phi_{(i-1,1)} - \\
&- \frac{6K_{t_{(i-1,1)}}}{L_{(i-1)}} s_{(i-1)} + \frac{6K_{t_{(i-1,1)}}}{L_{(i-1)}} \delta_i \quad 2.3.21
\end{aligned}$$

Para el resto de los niveles: $j > 1$

$$\begin{aligned}
M_{(i,j)(i+1,j)} &= \frac{W_{(i,j)} L_i^2}{12} + 2K_{t_{(i,j)}} \phi_{(i,j)} + \\
&+ K_{t_{(i,j)}} \phi_{(i+1,j)} - \frac{6K_{t_{(i,j)}}}{L_i} \delta_i + \\
&+ \frac{6K_{t_{(i,j)}}}{L_i} s_{(i+1)} \quad 2.3.22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{(i,j)(i-1,j)} &= -\frac{w_{(i-1,j)} L_{(i-1)}^2}{12} + 2K_{t(i-1,j)} \phi_{(i,j)} + \\
&+ K_{t(i-1,j)} \phi_{(i-1,j)} - \frac{6K_{t(i-1,j)}}{L_{(i-1)}} \delta_{(i-1)} + \\
&+ \frac{6K_{t(i-1,j)}}{L_{(i-1)}} \delta_i
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Para las columnas se tiene:

$$M_{(i,j)(i,j+1)} = 2K_{c(i,j)} \phi_{(i,j)} + K_{c(i,j)} \phi_{(i,j+1)} \tag{2.3.24}$$

$$M_{(i,j)(i,j-1)} = 2K_{c(i,j-1)} \phi_{(i,j)} + K_{c(i,j-1)} \phi_{(i,j-1)} \tag{2.3.25}$$

En el nudo (i,j) debe haber equilibrio de momentos, por lo -- tanto,

$$\begin{aligned}
M_{(i,j)(i+1,j)} + M_{(i,j)(i-1,j)} + M_{(i,j)(i,j+1)} + \\
+ M_{(i,j)(i,j-1)} = 0
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Para el primer nivel ($j = 1$) se tiene:

Sustituyendo las ecs. 2.3.20, 2.3.21 y 2.3.24 en la ec. 2.3.

26

$$\begin{aligned}
 \frac{w_{(i,1)} L_i^2}{12} &= \frac{67}{3072} R_i L_i^2 - \frac{13}{3072} R_{(i+1)} L_i^2 - \frac{11}{192} T_i L_i^2 + \\
 &+ 2K_{t(i,1)} \phi_{(i,1)} + K_{t(i,1)} \phi_{(i+1,1)} - \\
 &- \frac{6K_{t(i,1)}}{L_i} \delta_i + \frac{6K_{t(i,1)}}{L_i} \delta_{(i+1)} - \frac{w_{(i-1,1)} L_{(i-1)}^2}{12} + \\
 &+ \frac{67}{3072} R_i L_{(i-1)}^2 + \frac{13}{3072} R_{(i-1)} L_{(i-1)}^2 + \\
 &+ \frac{11}{192} T_{(i-1)} L_{(i-1)}^2 + 2K_{t(i-1,1)} \phi_{(i,1)} + \\
 &+ K_{t(i-1,1)} \phi_{(i-1,1)} - \frac{6K_{t(i-1,1)}}{L_{(i-1)}} \delta_{(i-1)} + \\
 &+ \frac{3K_{t(i-1,1)}}{L_{(i-1)}} \delta_i + 2K_{c(i,1)} \phi_{(i,1)} + \\
 &+ K_{c(i,1)} \phi_{(i,2)} = 0
 \end{aligned}$$

2.3.27

Si hacemos que:

$$K_{(i,1)} = K_{t(i-1,1)} + K_{t(i,1)} + K_{c(i,1)}$$

donde $K_{(i,1)}$ es la suma de las rigideces de los elementos que concurren al nudo, es decir, la rigidez del nudo.

Entonces agrupando términos y sustituyendo la rigidez del nudo:

$$\begin{aligned} & K_{t(i-1,1)} \phi_{(i-1,1)} + 2K_{(i,1)} \phi_{(i,1)} + K_{t(i,1)} \phi_{(i+1,1)} + \\ & + K_{c(i,1)} \phi_{(i,2)} - \frac{6K_{t(i-1,1)}}{L_{(i-1)}} \delta_{(i-1)} + 6 \left(\frac{K_{t(i-1,1)}}{L_{(i-1)}} \right) \cdot \\ & - \frac{K_{t(i,1)}}{Li} \delta_i + \frac{6K_{t(i,1)}}{Li} \delta_{(i+1)} + \frac{13}{3072} L_{(i-1)}^2 R_{(i-1)} + \\ & + \frac{67}{3072} (L_{(i-1)}^2 - Li^2) Ri - \frac{13}{3072} Li^2 R_{(i+1)} + \\ & + \frac{11}{192} L_{(i-1)}^2 T_{(i-1)} - \frac{11}{192} Li^2 T_i \cdot \end{aligned}$$

$$= \frac{W_{(i-1,1)} L_{(i-1)}^2 - W_{(i,1)} Li^2}{12} \quad 2.3.27$$

Para el resto de los niveles $j > 1$

Sustituyendo las ecs. 2.3.22 a 2.3.25 en 2.3.26 y ordenando - términos tenemos

$$\begin{aligned} & K_{t(i-1,j)} \phi(i-1,j) + 2K_{(i,j)} \phi(i,j) + K_{t(i,j)} \phi(i+1,j) + \\ & + K_{c(i,j-1)} \phi(i,j-1) + K_{c(i,j)} \phi(i,j+1) - \\ & - \frac{6K_{t(i-1,j)}}{L_{(i-1)}} \delta_{(i-1)} + 6 \left(\frac{K_{t(i-1,j)}}{L_{(i-1)}} - 6 \frac{K_{t(i,j)}}{Li} \right) \delta_i + \\ & + \frac{6K_{t(i,j)}}{Li} \delta_{(i+1)} = \frac{W_{(i-1,j)} L_{(i-1)}^2 - W_{(i,j)} Li^2}{12} \quad 2.3.28 \end{aligned}$$

2.3.3 Condición de equilibrio de momentos en la cruzja i

En la cruzja i (fig. 2.3.1) se debe cumplir que los momentos - están en equilibrio (Luthe 1971), por lo tanto tomemos los -- cortantes que se presentan a la izquierda de dicha cruzja:

$$\sum_{k=1}^i R_k + \sum_{k=1}^{i-1} T_k - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^q w_{k,j} L_k = V_i \quad 2.3.29$$

en donde q es el número de pisos de la estructura.

Si hacemos un diagrama de cuerpo libre de la cruzía i y tomando momentos con respecto al nudo $(i+1, j)$

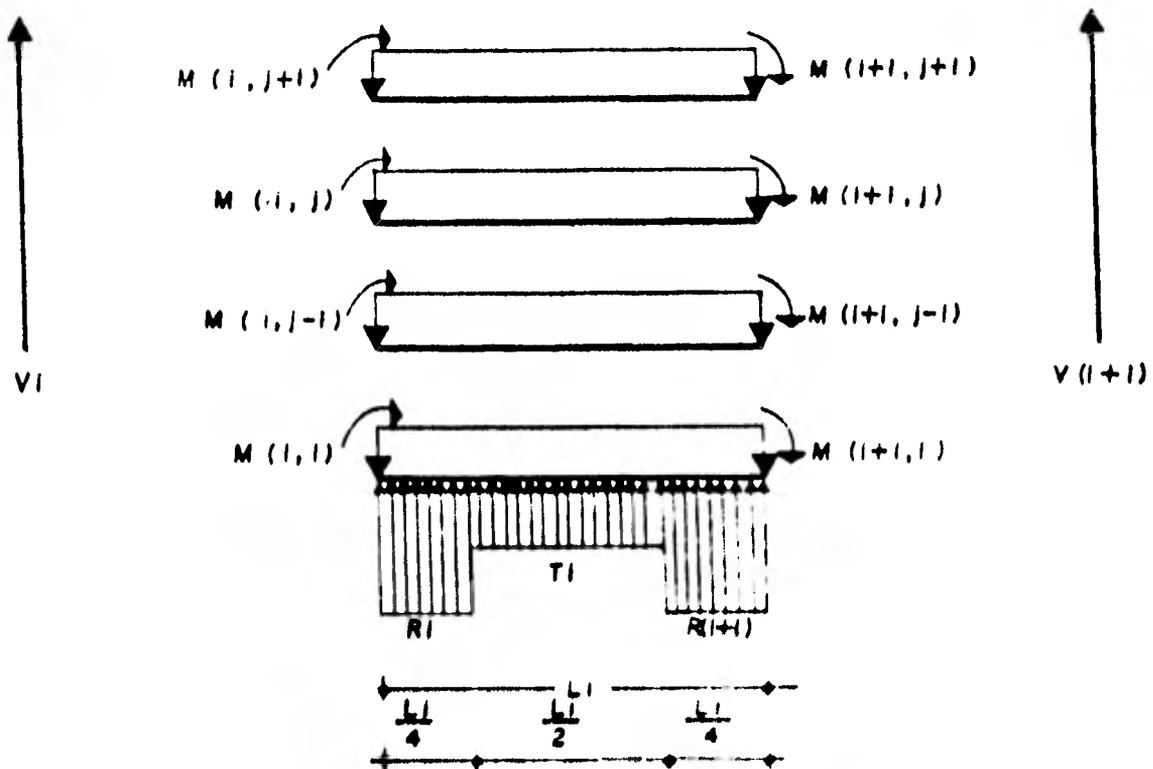


Fig. 2.3.6. Diagrama de cuerpo libre de la cruzía

Entonces:

$$V_c = \sum_{k=1}^{c-1} \frac{R_k L_k}{4} + \frac{R_{k+1} L_k}{4} + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{T_k L_k}{2} - \sum_{k=1}^{c-1} \sum_{j=1}^q w_{k,j} L_k$$

Haciendo la suma de momentos en el nudo $(c+1, 1)$ tenemos:

$$\begin{aligned} V_c L_c + R_c \frac{L_c}{4} \left(\frac{7}{8} L_c \right) + R_{(c+1)} \frac{L_c}{4} \left(\frac{1}{8} L_c \right) + (T_c \frac{L_c}{2} - \\ - \sum_{j=1}^q w_{(c,j)} L_c) \frac{L_c}{2} = \sum_{j=1}^q M_{(c,j)}(c+1, j) + \\ + \sum_{j=1}^q M_{(c+1,j)}(c, j) \end{aligned}$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} 3 \sum_{j=1}^q K_{t(c,j)} \delta_{(c,j)} + 3 \sum_{j=1}^q K_{t(c,j)} \delta_{(c+1,j)} - \frac{12}{L_c} \sum_{j=1}^q K_{t(c,j)} \delta_c + \\ + \frac{12}{L_c} \sum_{j=1}^q K_{t(c,j)} \delta_{(c+1)} - \frac{7}{4} R_c L_c - \frac{1}{4} R_{c+1} L_c - \\ - \frac{121}{512} L_c^2 R_c - \frac{7}{512} L_c^2 R_{c+1} = \dots \end{aligned}$$

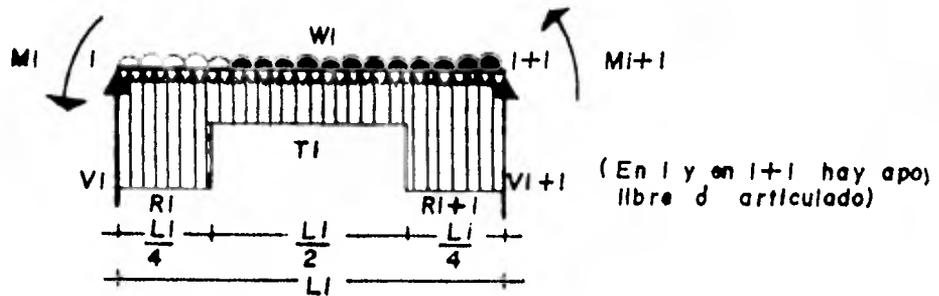
$$= - L_i \sum_{K=1}^{i-1} L_K \sum_{j=1}^q w_{(K,j)} - \frac{L_i^2}{2} \sum_{j=1}^q w_{(i,j)} \quad 2.3.29$$

La obtención de la anterior ecuación se presenta en el apéndice B.

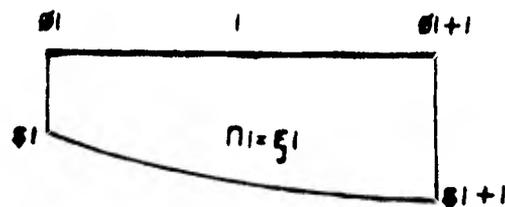
2.3.4 Obtención del desplazamiento en la cimentación a la mitad de la cruzja i (fig. 2.3.1 y fig. 2.3.7).

Falta encontrar ecuaciones que nos relacionen los desplazamientos ξ_i a la mitad de la cruzja i en el primer nivel de piso ($j = 1$), con los doblegiros en los extremos de la barra $\phi(i, 1)$ y $\phi(i+1, 1)$, con los desplazamientos δ_i y δ_{i+1} bajo las columnas y con la fuerza a la mitad de la cruzja T_i (fig. 2.3.7). Para ésto, se empleará el 2o. Teorema de la Viga Conjugada: las cargas sobre la barra $(i, 1)$ se muestran en la fig. 2.3.7, los diagramas del momento flexionante se muestran en la fig. 2.3.8 y la viga conjugada correspondería también a los diagramas anteriores divididos entre EI .

Tomando momentos en la viga conjugada con respecto al centro de la cruzja i , obtenemos la siguiente expresión en la cual tenemos relacionados doblegiros, desplazamientos y cargas.



e) CARGAS



b) DESPLAZAMIENTOS

Fig. 2.3.7. Esquema que muestra las cargas y desplazamientos equivalentes en el tramo i, i

El diagrama de momento flexionante será la suma de los diagramas debidos a:

- Los momentos M_i y M_{i+1} fig. 2.3.8.a
- La carga w_i fig. 2.3.8.b
- Las cargas R_i , R_{i+1} y T_i fig. 2.3.8.c

La viga conjugada será la suma de los diagramas de la fig --- 2.3.8, divididos entre EI . Para obtener η_i , tomemos momentos en la viga conjugada con respecto al punto i' de lo cual se tendrá:

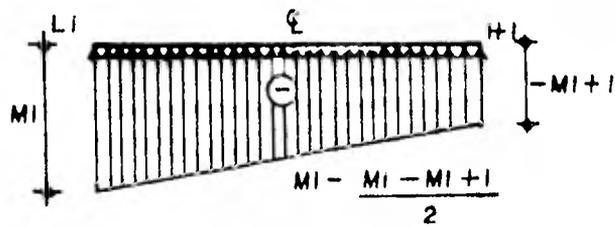
$$\begin{aligned}
& K_{t(i,1)} \phi_{i,1} - K_{t(i,1)} \phi_{i+1,1} - \frac{8K_{t(i,1)}}{Li} \delta_i - \frac{8K_{t(i,1)}}{Li} \delta_{i+1} , \\
& + \frac{16K_{t(i,1)}}{Li} \epsilon_i + \frac{1}{256} R_i Li^2 + \frac{1}{256} R_{i+1} Li^2 \\
& + \frac{13}{384} T_i Li^2 = \frac{1}{24} W_{i,1} Li^2 \qquad \qquad \qquad 2.3.35
\end{aligned}$$

El desarrollo para la obtención de la anterior ecuación se --
 presenta en el apéndice C.

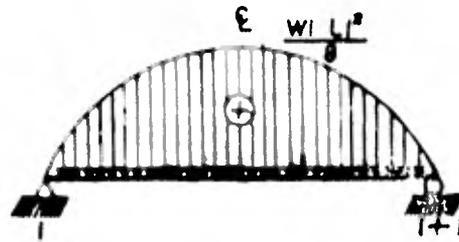
2.3.5 Equilibrio de fuerzas verticales

La última ecuación por obtenerse es la correspondiente al ---
 equilibrio de fuerzas verticales. Si se observa la fig 2.3.1
 tenemos:

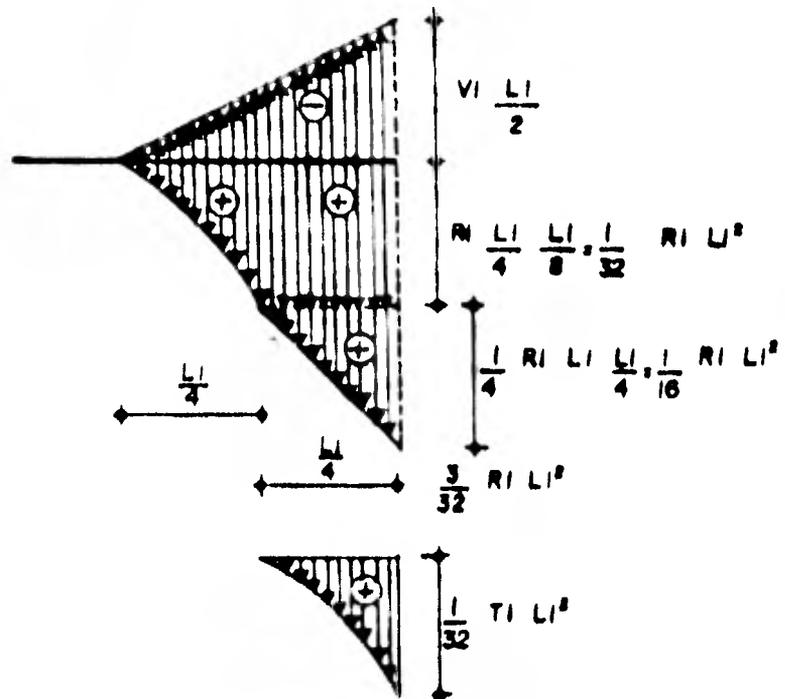
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^q W_{i,j} Li &= \sum_{i=1}^{n-1} R_i \frac{Li}{4} + \sum_{i=2}^n R_i \frac{Li-1}{4} , \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} T_i \frac{Li}{2}
\end{aligned}$$



a) Debido a M_I y M_{I+1}



b) Debido a W



c) debido a V_I , R_I y T_I

Fig. 2, 3, B. Diagramas de momento flexionante.

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} L_i R_i + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n L_{i-1} R_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} L_i T_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} L_i \sum_{j=1}^q W_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} L_i R_i + \sum_{i=2}^n L_{i-1} R_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} L_i T_i =$$

$$= 4 \sum_{i=1}^{n-1} L_i \sum_{j=1}^q W_{i,j}$$

Entonces:

$$L_1 R_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (L_{i-1} + L_i) R_i + L_{n-1} R_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} L_i T_i =$$

$$= 4 \sum_{i=1}^{n-1} L_i \sum_{j=1}^q W_{i,j}$$

2.3.36

en donde:

n número de columnas

q número de pisos

2.3.6 Cálculo de los hundimientos del suelo

Determinaremos ahora los desplazamientos verticales del suelo δ_i y ξ_i en función de las reacciones del terreno R_i y T_i (fig. 2.3.1). Para ésto, se hará un cambio en la notación llamando Q_i a las fuerzas, y ζ_i a los desplazamientos (fig. 2.3.9), se puede ver que el cambio de variable está dado por:

$$R_i = Q_{2i-1} \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$T_i = Q_{2i} \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$\delta_i = \zeta_{2i-1} \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\xi_i = \zeta_{2i} \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Siendo n el número de columnas de la estructura.

Calcularemos ahora los desplazamientos ζ_i en función de las cargas, para la estratigrafía y propiedades del subsuelo que se muestran en la fig. 2.3.9.

Para calcular dichos desplazamientos, recordemos que el asentamiento total primario de un estrato de arcilla de espesor H_j , debido a un proceso de consolidación unidimensional, con flujo vertical, inducido por una sobrecarga $\Delta\sigma$ actuante en la superficie del mismo, puede determinarse a partir de los da-

tos de la prueba de consolidación y del esquema de la fig. 2.

3.10. (Juárez Badillo, 1979).

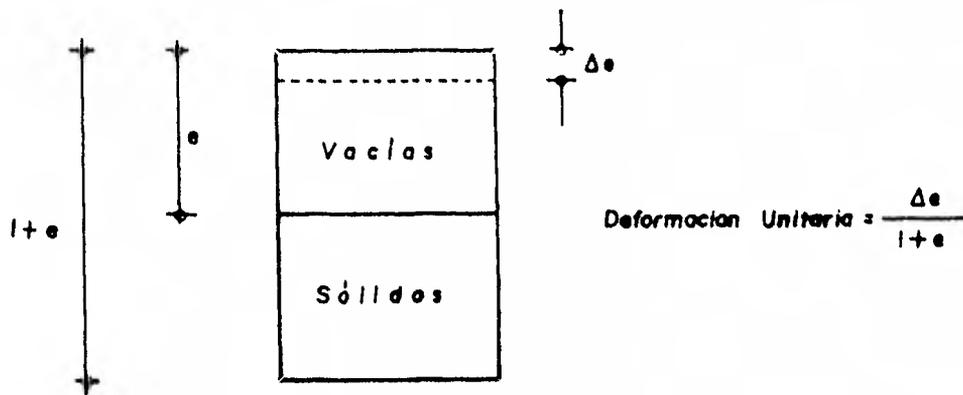


Fig. 2,3,9. Esquema que ilustra la obtención del asentamiento total de un estrato de suelo.

Si Δe representa la disminución de espesor de una muestra de suelo de espesor total $1+e$, se podrá escribir, para un estrato de espesor H_j .

$$\Delta H = \frac{\Delta e}{1+e} H_j \quad 2.3.37$$

en donde:

ΔH es la disminución de espesor total del estrato de espesor H_j .

En caso de que los incrementos de presión $\Delta \bar{\sigma}$ transmitidos al suelo varíen con la profundidad o en el que $\frac{\Delta e}{1+e}$ varíe apreciablemente a lo largo del espesor del estrato, por ejemplo: --

Por efecto de preconsolidación en parte de él, se hace necesario expresar la ec. 2.3.37 en forma diferencial y obtener el asentamiento total por un proceso de integración a lo largo del espesor del estrato. Puede entonces escribirse:

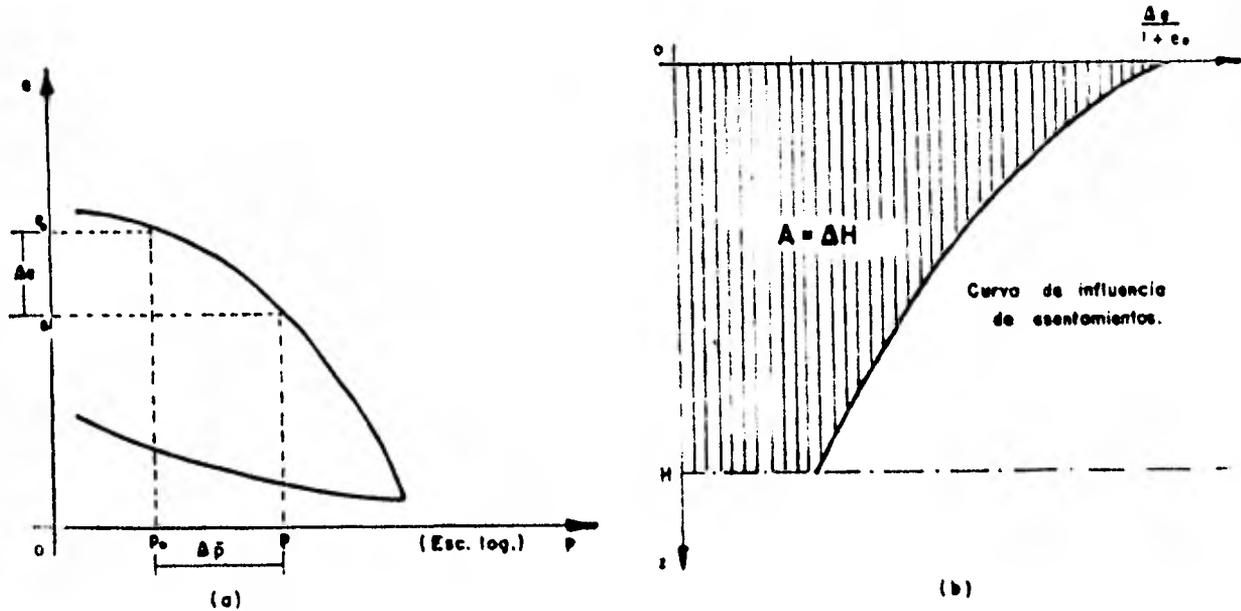
$$d \Delta H = \frac{\Delta e}{1 + e} dz$$

lo cual al integrarse dá:

$$\Delta H = \int_0^H \frac{\Delta e}{1 + e} dz \quad 2.3.38$$

Considerando la frontera superior del estrato compresible como el origen de las z . La ecuación anterior es la ecuación general para el cálculo del asentamiento total por consolidación primaria, supuesto un proceso unidimensional de consolidación.

La ec. 2.3.38 sugiere un método simple de trabajo para evaluar los asentamientos en un caso práctico dado (fig. 2.3.10).



2.3.10. Métodos para la obtención de la curva de influencia

Si se tienen pruebas de consolidación efectuadas sobre muestras inalteradas representativas de un estrato compresible a diferentes profundidades, se contará con una curva de compresibilidad para cada prueba, representativa del comportamiento del suelo a esa profundidad, ver parte (a) de la fig. 2.3.10.

Sobre esas gráficas se llevará el valor de p_0 , presión actual efectiva del suelo a esa profundidad; a continuación se llevará a partir de p_0 el valor \bar{p} , determinado según los métodos de distribución del esfuerzo en la masa del suelo (Teorías de Boussinesq, Carta de Newmark, etc) y que presenta el nuevo esfuerzo efectivo ($\bar{\sigma}$) a que estará sujeta la fase sólida del suelo, cuando éste se haya consolidado totalmente bajo la nue

va condición de cargas, representada por la estructura cuyo asentamiento se calcula.

La ordenada del valor $\bar{P} = \bar{P}_0 + \Delta\bar{\sigma}$, proporcionará la e final que teóricamente alcanzaría el suelo a la profundidad de que se trate. Puede así determinarse $\Delta e = e - e_0$.

En la parte (b) de la fig 2.3.10 se muestra la gráfica $\frac{\Delta e}{1 + e_0}$ VS. Z que deberá trazarse una vez determinados sus puntos $-\frac{c}{\gamma}$ por el procedimiento anterior, aplicado a distintas profundidades.

Se observa de la ec. 2.3.38 que el área entre 0 y H bajo la gráfica anterior, llamada curva de influencia de los asentamientos, proporciona directamente el valor de ΔH .

En algunos casos especiales los asentamientos pueden calcularse con métodos que son simplificación del anterior. Por ejemplo, en el caso de un estrato compresible, homogéneo, de pequeño espesor, en el que el coeficiente m_v pueda considerarse constante para el intervalo de presiones en que se trabaja, puede escribirse:

$$\Delta H = \int_0^H \frac{\Delta e}{1 + e_0} dz = \int_0^H m_v \Delta \sigma dz$$

Se sabe que:

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma} \quad \text{y que} \quad m_v = \frac{a_v}{1 + e_0}$$

por consiguiente:

$$\Delta h = \int_0^H \frac{\Delta \sigma a_v}{1 + e_0} dz$$

$$\Delta H = \int_0^H \frac{a_v}{1 + e_0} \Delta \sigma dz$$

$$\Delta H = \int_0^H m_v \Delta \sigma dz \quad ; \quad \text{como} \quad m_v = \text{cte}$$

$$\Delta H = m_v \int_0^H \Delta \sigma dz$$

La integral representa el área de incremento de presiones entre las profundidades 0 y H, y puede calcularse gráficamente.

Si además puede considerarse constante el espesor H tratado, la fórmula se reduce simplemente a:

$$\Delta H_{(i,j)z} = m_{v(i,j)} \Delta \sigma H_j \quad 2.3.39$$

La ecuación anterior proporciona la deformación del estrato j bajo la carga Q_r , es decir, la deformación del cuadro (i,j) - debida a una carga colocada en t , Q_r , en donde: (ver fig. 2.3.11).

$\Delta H_{(i,j)z}$ es igual a la deformación del cuadro (i,j) debida a una carga colocada en t , (Q_r)

$m_{v(i,j)}$ es el módulo de deformación del cuadro (i,j)

H_j es el espesor del estrato j

$\Delta \sigma_{(i,j)z}$ es el esfuerzo normal vertical en el cuadro (i,j) - debido a la presión $\frac{Q_r}{br}$ en el contacto cimentación-suelo

br es el ancho de la cimentación, correspondiente a la carga Q_r

Pero:

$$i_{(i,j)z} = i_{(i,j)z} \frac{Q_r}{br}$$

siendo:

$i_{(i,j)z}$ el valor de influencia en el cuadro (i,j) debido a - una presión unitaria colocada en t

El valor de $I_{(i,j)z}$ se puede determinar calculando el esfuerzo que ocasiona una presión unitaria en el área a_{z1} sobre el cuadro (i,j) (Zeevaert, 1973).

La deformación del cuadro (i,j) debida a todas las cargas Q_z será:

$$\xi_{(i,j)} = m_{v(i,j)} H \sum_{z=1}^m I_{(i,j)z} \frac{Q_z}{a_{z1}} \quad 2.3.40$$

en donde:

m es el número de cargas aplicadas en la superficie

$m = 2n - 1$ donde n es el número de columnas

Ahora bien, el hundimiento bajo el punto i valdrá:

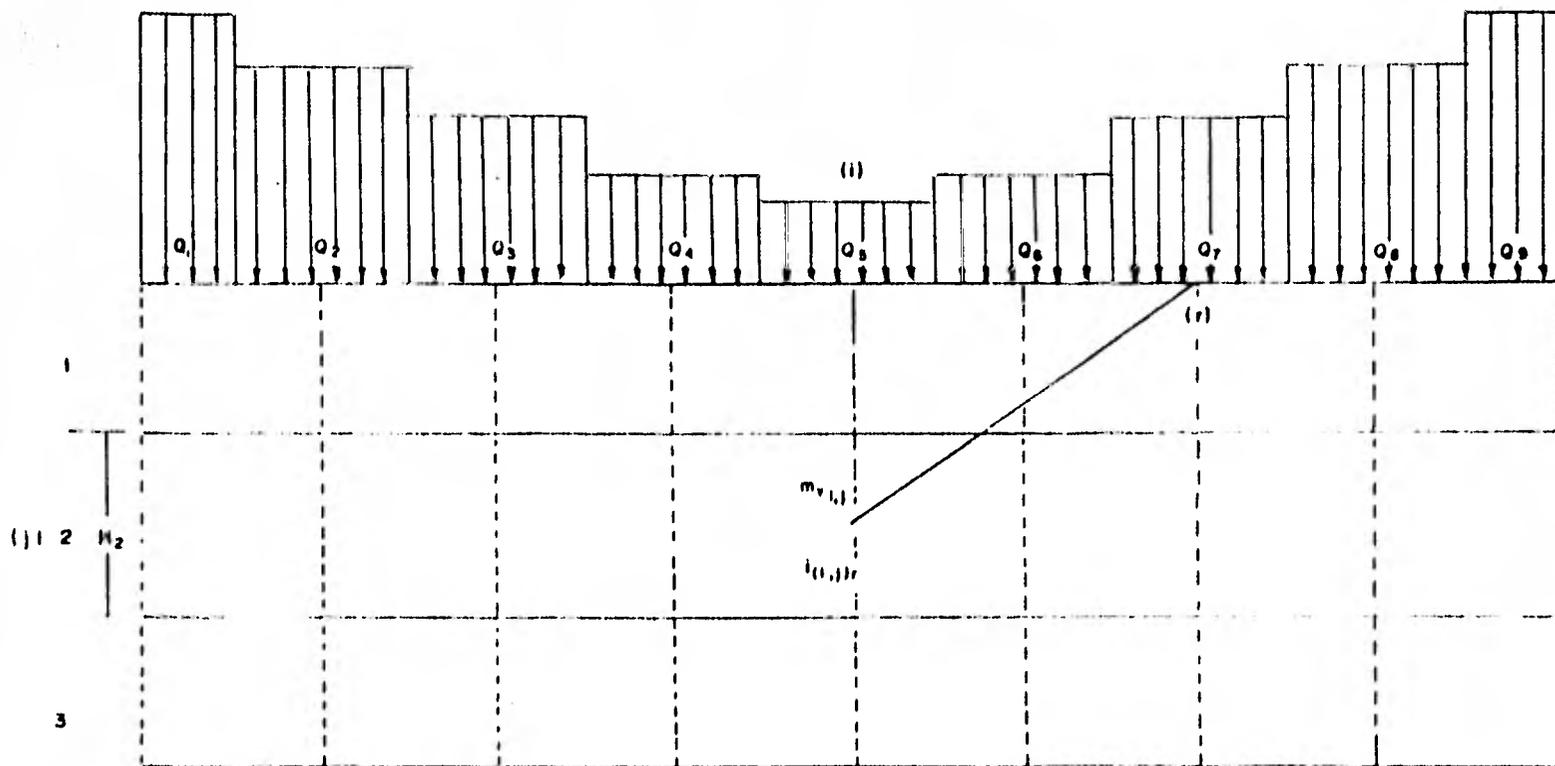
$$\xi_i = \sum_{j=1}^p \xi_{(i,j)}$$

Es decir

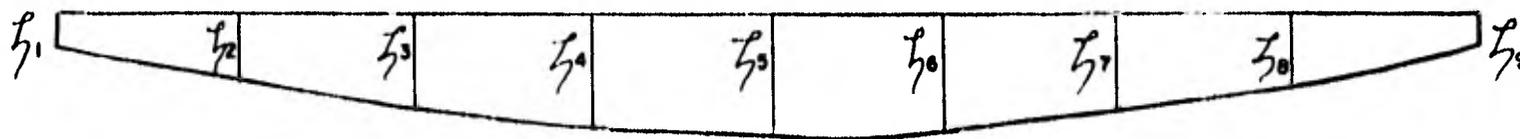
$$\xi_i = \sum_{j=1}^p m_{v(i,j)} H \sum_{z=1}^m I_{(i,j)z} \frac{Q_z}{a_{z1}}$$

siendo:

p el número de estratos del subaudo:



a). Cargas , estratigrafía y propiedades.



b). Desplazamientos verticales.

m = número total de cargas
 p = número total de estratos.

FIG. 2.3.11. Determinación de los desplazamientos verticales (hundimientos) del terreno.

En esta ecuación los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas Q_i .

Es importante hacer la siguiente aclaración: los valores del módulo de deformación del suelo $m_{v(i,j)}$ dependen del esfuerzo de confinamiento, el cual no se conoce *a priori*. Por esta razón los $m_{v(i,j)}$ deben de determinarse para un nivel de esfuerzo lo más cercano posible a la realidad (Zeevaert, 1973), dependiendo esta parte, de la experiencia del ingeniero que realiza el análisis. Si posteriormente se ve que el nivel de presiones considerado en el primer análisis está muy alejado de la magnitud de esfuerzos obtenidos después de resolver todo el problema, es probable que hubiera necesidad de volver a calcular los hundimientos del suelo con los valores corregidos del módulo al tomar un nuevo nivel de esfuerzos.

Con la aclaración anterior, empleando la ec. 2.3.41 los valores de ζ_i serán función lineal de las cargas Q_i .

Para determinar los desplazamientos δ_i y ξ_i (notación en estructura, fig. 2.3.1) emplearemos las siguientes transformaciones:

$$R_i = Q_{2i-1} \quad \dots \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$T_i = Q_{2i} \quad \dots \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\delta_i = \xi_{2i-1} \quad \dots \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\xi_i = \xi_{2i} \quad \dots \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

que son las ecs. 2.3.42 a 2.3.45

De esta manera, los hundimientos del terreno δ_i y ξ_i quedarán en función lineal de las reacciones R_i y T_i .

2.3.7 Secuencia de operaciones en el análisis conjunto

En los incisos 2.3.1 a 2.3.5 se ha descrito el método propuesto, y se han desarrollado las ecuaciones necesarias para su aplicación. Enumeraremos ahora los pasos a seguir para su utilización.

- a) Determinar las características geométricas de la estructura (longitudes de traves L_i , alturas de columnas h_j), las cargas actuantes sobre ellas $W_{i,j}$ y las rigideces de traves y columnas
- b) Emplear la ec. 2.3.27 y la 2.3.28 para el primer nivel y los restantes, en todos los nudos de la estructura, -

es decir, variando i desde 1 hasta el número de columnas n , y j desde 1 hasta el número total de niveles q .

- c) Utilizar la ec. 2.3.29, obtenida del equilibrio de momentos de la cruzía i , para todas las cruñas de la estructura, haciendo variar i desde 1 hasta $(n-1)$.
- d) Aplicar la ec. 2.3.35 que relaciona los desplazamientos ξ_i a la mitad de la cruzía i con los doblegiros, los desplazamientos δ_i y δ_{i+1} y la reacción T_i , para todas las cruñas de la estructura, variando i desde 1 hasta $(n-1)$.
- e) Usar la ec. 2.3.36 de equilibrio de fuerzas verticales.
- f) Emplear la ec. 2.3.41 para obtener los hundimientos del terreno ζ_i en función de las cargas Q_i .
- g) Hacer el cambio de variable para volver a la notación de la estructura, aplicando las ecs. 2.3.42 a 2.3.45.
- h) Sustituir las ecs. que nos relacionan δ_i y ξ_i con R_i y T_i en las expresiones obtenidas al aplicar las ecs. 2.3.27, 2.3.28, 2.3.29, 2.3.35, 2.3.36, con lo que obtendremos ecuaciones en las que las incógnitas serán única

mente $\phi_{i,j}$, R_i y T_i .

- i) Resolver el sistema de ecuaciones anterior, con lo que conoceremos los valores de $\phi_{i,j}$, R_i y T_i .
- j) Sustituir los valores de las reacciones en las ecuaciones que las relacionan con los desplazamientos, obteniéndose éstos.

El problema ha quedado resuelto, pues después de seguir los pasos anteriores, conoceremos los doblegiros, las reacciones del terreno y los desplazamientos verticales.

Para calcular los momentos sobre los nudos de la estructura se utilizan las ecs. 2.3.20, 2.3.21, 2.3.24 y 2.3.25.

CAPITULO 3

METODOS NUMERICOS

3.1 Generalidades

El lenguaje de programación FORTRAN es ampliamente conocido por estudiantes de Ingeniería que han cursado sus carreras - en los últimos diez años. La importancia del uso de computadoras en las diversas instituciones educativas se ha reconocido de dos maneras: la primera de ellas mediante la enseñanza de algún curso en lenguaje de programación FORTRAN, la segunda al utilizarse la computadora en cursos medios y avanzados para facilitar el aprendizaje de varios temas, y para llevar a cabo cálculos que de otra manera serían difíciles o imprácticos, también se usa como instrumento de análisis y diseño en problemas de ingeniería. Este uso está basado en-

capacidad de operar a gran velocidad, dar resultados de un alto grado de precisión, guardar grandes cantidades de información y llevar a cabo secuencias de operaciones largas y complejas sin la intervención humana.

Sin embargo, contrariamente a lo pensado por la mayoría de las personas, una computadora no resuelve un problema, sino que ayuda a explorar alternativas para su solución, dejando la elección de la alternativa que represente la mejor solución al usuario.

Pasos para resolver un problema con computadora

Identificación del problema y definición de la meta.

Se trata de escoger un método general para abordar un problema, decidiendo qué combinaciones de objetivos deben satisfacer el sistema y especificando las condiciones bajo las cuales deberá operar. Esto es sencillo en algunas aplicaciones; en otras requiere tiempo. En cualquier caso, este paso demanda claramente un conocimiento completo del problema.

Descripción matemática

Como regla hay varias maneras de escribir matemáticamente un

proceso; se debe escoger uno o desarrollar uno nuevo si no se puede aplicar ningún método establecido. Este paso requiere un conocimiento completo del problema y de los campos pertinentes a las matemáticas.

Análisis numérico

La formulación matemática del problema puede no ser directamente traducida al lenguaje de la computadora, ya que la computadora solamente puede efectuar operaciones aritméticas y tomar decisiones cuantitativas sencillas. Las funciones trigonométricas, ecuaciones diferenciales, integrales, raíces cuadradas y logaritmos, para mencionar algunos ejemplos, se deben expresar en términos de operaciones aritméticas; además, se debe establecer que los resultados no deberán quedar invalidados por cualquier error relativo a los datos o introducido por los cálculos.

Programación de la computadora

El proceso numérico debe ser establecido, desde ahora, como un conjunto definido con precisión, de operaciones con la computadora. Existen, en general, los pasos en esta parte: en el primero, la secuencia de operaciones se escribe en forma gráfica en un diagrama de flujo. Después debe establecer

se el procedimiento en un lenguaje que pueda ser entendido - por la computadora, o que pueda ser entendido después de una etapa preliminar de traducción. FORTRAN es dicho lenguaje.

Prueba de programa

Existen tantas posibilidades de cometer errores en la programación, que la mayoría de los programas no trabajan correctamente la primera vez que se les prueba. Los errores deberán ser localizados y el programa deberá probarse concienzudamente para establecer que funcionará como se pretende. La computadora se utiliza en esta etapa.

Producción

Finalmente, el programa puede ser combinado con los datos -- del problema y correrse. En una situación típica, muchos -- conjuntos de datos se meten en la computadora en una corrida y las soluciones se producen sin la intervención humana entre dichos conjuntos. Este paso puede requerir desde pocos segundos hasta muchas horas, dependiendo esto del problema y de la computadora.

Interpretación

Los resultados impresos por la computadora no constituyen -- siempre una respuesta final al problema. El usuario de la - computadora debe interpretar los resultados para ver lo que - significan, en términos de las combinaciones de objetivos, - que debe satisfacer el sistema propuesto. A menudo, es nece - sario repetir alguno o todos los pasos anteriores antes de - que el problema quede realmente resuelto.

Programación FORTRAN

Uno de los procedimientos para resolver un problema con FOR- TRAN consiste en una serie de proposiciones, las cuales son - de varios tipos. Una de ellas especifica las operaciones -- aritméticas que son lo más importante del procedimiento. La segunda llama a las operaciones de entrada o salida, como la lectura de una tarjeta de datos, la impresión de una línea - de resultados, o la perforación de una tarjeta de resulta--- dos. Las proposiciones de estos dos primeros tipos se ejecu - tan en el orden en que fueron escritas; un tercer tipo de -- proposición altera el flujo de control de ejecución de las - proposiciones, de manera que algunos grupos de proposiciones pueden ejecutarse repetidamente o de otro modo, cambiarse la secuencia. El cuarto tipo de proposición nos dará cierta in

formación acerca del procedimiento sin que en sí requiera alguna computación.

Tomadas en conjunto, todas las proposiciones que especifican el procedimiento para la solución del problema constituyen un programa fuente. Cuando el programa fuente ha sido escrito o perforado en tarjetas, se convierte por medio de un compilador FORTRAN en el programa objeto. Este es un grupo de instrucciones elementales que la computadora puede entender, por ejemplo: sumar dos números, ó imprimir una línea.

La traducción del programa fuente al programa objeto es necesaria porque el lenguaje de FORTRAN es mucho más sofisticado que el lenguaje de las instrucciones de máquina. Es el programa objeto el que en realidad ejecuta la computadora para obtener resultados.

De esta forma, la palabra FORTRAN se refiere tanto al lenguaje para expresar los procedimientos de la solución del problema como al compilador. El compilador FORTRAN, también -- llamado un procesador ó traductor, es en sí un programa grande de instrucciones de computadora; el compilador es generalmente proporcionado por el fabricante de la computadora. Este aspecto de traducción es el que condujo al significado -- original de la palabra FORTRAN: FOR - mula; TRAN - slation,

y, desde su introducción en el año de 1955 ha evolucionado - de manera continua.

3.2 Métodos Numéricos Aplicados a la Solución de Ecuaciones Algebraicas Lineales Simultáneas

Las ecuaciones simultáneas se presentan en casi todas las ramas de las matemáticas aplicadas. En algunos casos provienen directamente de la formulación inicial de un problema; - en muchos otros la solución de un sistema de ecuaciones es - una parte del ataque a otro tipo de problema.

Específicamente, se considera en esta parte la solución de - un conjunto de n ecuaciones con n incógnitas. Cada término en cada ecuación contiene una sola incógnita, y cada incógnita aparece a la primera potencia. Se dice que tal ecuación es lineal. En el caso de dos incógnitas la gráfica de dicha ecuación es una línea recta; para tres incógnitas, es un plano, y para más de tres incógnitas es un hiperplano. La solución que se busca es un conjunto de valores para las n incógnitas, el cual, cuando se sustituye en las n ecuaciones, las satisface a todas simultáneamente.

Dado un conjunto arbitrario de ecuaciones, no se puede decir sin investigarlo previamente, que existe una solución, o que

en caso de existir, sea una solución única. Hay tres y solo tres posibilidades.

1. El sistema tiene solución única. Por ejemplo;

$$2x + y = 4$$

$$x - y = -1$$

La solución es $x = 1$ y $y = 2$; ningún otro par de valores de x y y satisface ambas ecuaciones. Este tipo de sistema, que por supuesto será el que interese principalmente, se representa geoméricamente en el caso bidimensional en la fig. 3.2.1, en la que se ve que las dos líneas se intersectan en un solo punto. Las coordenadas de este punto son la solución que se busca.

2. El sistema no tiene solución. Por ejemplo;

$$2x + 3y = 10$$

$$2x + 3y = 6$$

La fig. 3.2.2 muestra la gráfica de estas dos líneas. Son paralelas, como se puede ver, y no hay solución.

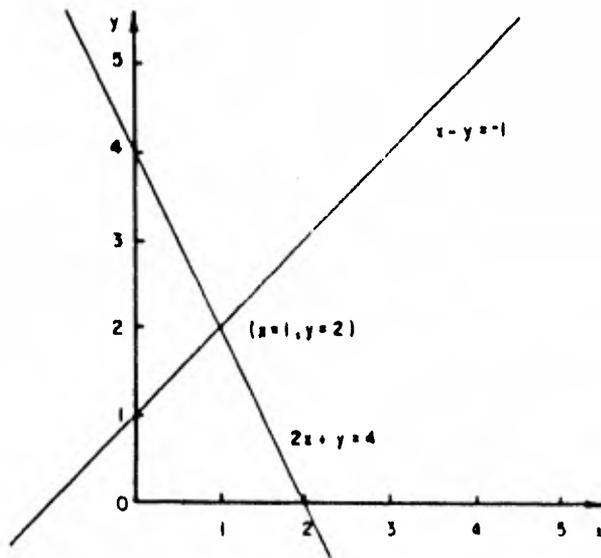


FIG. 3.2.1. Representación geométrica de un sistema de dos ecuaciones simultáneas que tienen solución única; las líneas se distinguen claramente y se intersectan.

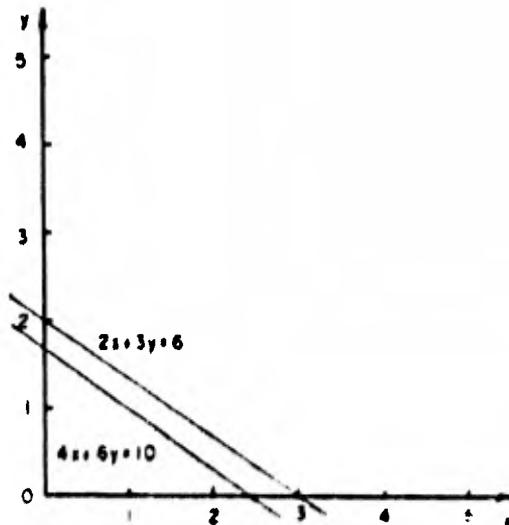


FIG. 3.2.2. Representación geométrica de un sistema de dos ecuaciones simultáneas que no tienen solución; las líneas son paralelas.

3. El sistema tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo;

$$4x + 6y = 12$$

$$2x + 3y = 6$$

Estas son realmente formas alternas de la misma ecuación que corresponde a una línea recta como se ve en la fig. 3.2.3. Cualquier punto de esta línea es una solución, tal como $x = 0, y = 2$; $x = 1, y = 4/3$; $x = 3, y = 0$, etc.

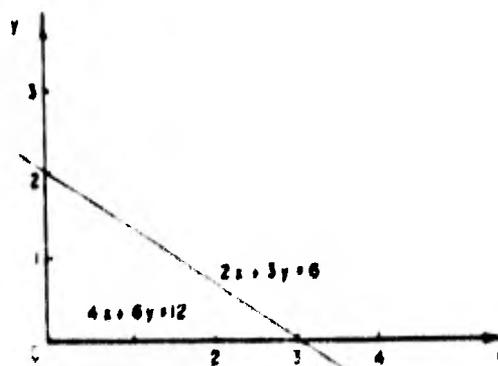


FIG 3.2.3 Representación geométrica de un sistema de dos ecuaciones simultáneas que tienen un número infinito de soluciones; las líneas son idénticas

Se denomina singular a un sistema del tipo 2 ó 3. A veces - se sabe por la formulación de un problema que el sistema no puede ser singular. Si no se cuenta con esta información, - como ocurre usualmente se debe confiar en que el método de - solución indique la singularidad o bien hacer una prueba ex- plicita de esta posibilidad. Se verá en la parte 3.3 que el método de eliminación de Gauss dá información inmediata acer- ca de la singularidad. Una prueba directa consiste en calcu- lar el valor del determinante de los coeficientes; un valor- cero indica singularidad. Desgraciadamente, la valuación -- del determinante es casi tan laboriosa como la solución del- sistema.

Desde el punto de vista de la aritmética de precisión infini- ta, un sistema es singular o no lo es. Desde el punto de -- vista de computación práctica, un sistema puede ser casi sin- gular, lo cual lleva a una solución que tiene poca confiabi- lidad. Considérense las ecuaciones

$$5x + 7y = 12$$

$$2x + 3y = 7$$

Estas tienen la solución única $x = 1$ y $y = 1$. Considé- rese el par de valores $x = 1.115$ y $y = 0$. Entonces:

$$5x + 7y = 12.075$$

$$7x + 10y = 16.905$$

Cuando se redondean a dos dígitos, los segundos miembros de este sistema coinciden con los segundos miembros de las ecuaciones originales. Como los valores originales fueron dados con solo dos cifras, la última solución encontrada debe ser considerada tan buena como la solución única. El problema estriba en que las líneas son casi paralelas, como se muestra en la fig. 3.2.4.

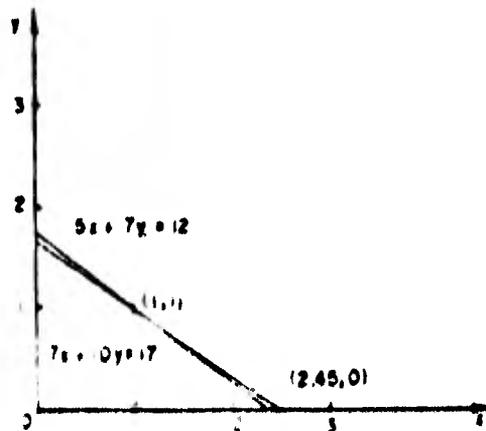


Fig. 3.2.4 Representación geométrica de un sistema de dos ecuaciones simultáneas que son singulares, las líneas son casi paralelas.

El punto indicado por la última solución, aunque no pertenece a ninguna de las líneas está muy próximo a ambas.

Las ecuaciones del tipo del sistema original se denominan -- mal condicionadas o de mal comportamiento. Siempre que dos líneas (o planos o hiperplanos) sean casi paralelas, las --- ecuaciones serán mal comportadas. En tal caso es difícil en contrar una solución numérica, y como se ha visto, su precisión será dudosa. Desafortunadamente, en tres o más dimensiones puede existir un sistema de ecuaciones que sea singular o casi singular sin que ningunos planos sean paralelos o casi paralelos. Sin embargo, independientemente del mecanismo geométrico, el método de eliminación de Gauss o una prueba explícita lo detectará.

Antes de entrar en los detalles de los métodos de solución, se pueden brevemente visualizar los principales modos de ata car el problema.

En general, hay dos tipos de técnicas numéricas para resolver ecuaciones simultáneas: directas que son finitas, e indirectas que son infinitas. Naturalmente ninguna técnica -- práctica puede ser infinita. Lo que se quiere decir es que, en principio, los métodos directos (despreciando errores por redondeo) producirán una solución exacta, si la hay, en un -

número finito de operaciones aritméticas.

Por otra parte, un método indirecto requerirá, en principio un número infinito de operaciones aritméticas para producir una solución exacta. Dicho de otra manera, un método indirecto tiene un error por truncamiento mientras que un método directo no lo tiene.

Sin embargo la expresión "en principio" del párrafo anterior es crucial: en la realidad se tienen errores por redondeo. Se tendrá que considerar más cuidadosamente esta cuestión. En un sistema grande, mal comportado, los errores por redondeo de un método directo pueden hacer que la solución carezca de sentido. A pesar de su error teórico por truncamiento, un método indirecto puede ser mucho más deseable porque en él los errores por redondeo no se acumulan. Cabe aclarar que en el presente trabajo se aplicará un método directo como lo es el de eliminación de Gauss y que será el único a tratar.

3.3 Método de Gauss

Para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, se empleará el método de Gauss, el cual se presenta más ampliamente en el apéndice D. A continuación se describe el método.

do utilizado en forma general:

Se resuelve un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$Ax = b$$

en donde:

A matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones

b vector de términos independientes

x solución del sistema de ecuaciones

El primer paso a seguir en la resolución es descomponer la matriz de coeficientes A en las matrices: inferior L y superior U, de tal manera que su producto sea igual a la matriz A:

$$A = LU$$

Las ecuaciones utilizadas para obtener las matrices U y L -- son las siguientes:

Matriz U:

$$u_{ij} = a_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j, \quad i > 1$$

Matriz L:

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.3.a)$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}; \quad i > j; \quad j > 1 \quad (3.3.b)$$

La matriz L es triangular inferior, de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz U es una matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & u_{NN} \end{bmatrix}$$

Con el objeto de eliminar errores por redondeo se procede a equilibrar los renglones de la matriz A , lo cual consiste en dividir los elementos de cada renglón entre el máximo valor absoluto de los elementos del renglón.

Para hallar los valores de l_{ij} es necesario dividir entre el valor de la diagonal de la columna correspondiente (ecs. --- 3.3.a y 3.3.b), denominando pivote, el cual corresponde al máximo valor absoluto de los elementos de una columna de la matriz equilibrada. Para poder realizar lo anterior, se --- efectúa un intercambio virtual de los renglones de la matriz A .

A continuación se obtienen los valores del vector x que satisfacen el sistema de ecuaciones lineales. Se tiene;

$$Ax = b$$

pero

$$A = LU \quad ; \quad LUx = b$$

$$(sea \quad Ux = y)$$

entonces

$$Ly = b$$

Ya que se conocen L y b se puede obtener el valor del vector y (solución hacia adelante), con las siguientes expresiones:

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

Después se resuelve el sistema

$$Ux = y \quad (\text{solución hacia atrás}), \text{ em---}$$

pleando las fórmulas

$$x_N = \frac{y_N}{u_{NN}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=1+1}^N u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

Una vez que se ha resuelto el sistema de ecuaciones $Ax = b$, se obtiene el vector x_1 , solución del sistema. Luego se realiza el producto $Ax_1 = b_1$. El residuo r_1 , definido como la diferencia entre el valor exacto de b y el valor de b_1 , valdrá:

$$r_1 = b - b_1 = b - Ax_1$$

Con el valor de r_1 , se resuelve el sistema $Adx_1 = r_1$, con lo cual se obtiene el valor del vector dx_1 .

Haciendo: $x_2 = x_1 + dx_1$

Se tiene

$$Ax_2 = A(x_1 + dx_1) = Ax_1 + Adx_1 = b_1 + r_1 = b$$

por lo tanto, x_2 es una solución refinada del sistema de --- ecuaciones, correspondiente a la primera iteración.

Se puede realizar otra iteración de la siguiente manera:

$$Ax_2 = b_2 \quad ; \quad r_2 = b - b_2 = b - Ax_2$$

$$Adx_2 = r_2 \quad \text{se obtiene} \quad dx_2$$

$$x_3 = x_2 + dx_2$$

y así sucesivamente.

El número de iteraciones que se realicen dependerá de la precisión que se desea alcanzar en un problema determinado.

En vista de que el residuo $r_i = b - Ax_i$, b se conoce con --- exactitud, puesto que es un dato, es importante que el producto Ax_i se realice con bastante precisión.

Dada la naturaleza del problema de la interacción suelo-es-- estructura, el método de Gauss resulta ser adecuado para obtener la solución del sistema de ecuaciones resultante de la - aplicación del método propuesto por el Ing. Agustín Doméne-- ghi.

CAPITULO 4

APLICACION DEL ANALISIS NUMERICO A LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DE LA INTERACCION SUELO - ESTRUCTURA

4.1 *Enfoque General*

Dada la enorme cantidad de cálculos que implica la resolución del problema de la interacción suelo - estructura, el uso de la computadora para dicha resolución resulta ser lo más indicado. Elaborar un programa de computadora para dicho fin no es complicado, pero sí se requiere tener un buen conocimiento de los métodos que intervienen en el análisis.

El programa que se presenta en este trabajo, pretende ser útil tanto para ingenieros, en la práctica de cimentaciones, como para estudiantes interesados en el tema, para quienes -

este método represente una alternativa más en la solución de este tipo de problemas; claro está que dicho programa está sujeto a modificaciones que seguramente lo harán más completo, pero representa una buena introducción a problemas de este tipo. En su elaboración se empleó el lenguaje de programación FORTRAN, el cual es de uso común en la práctica de la ingeniería, además, se trató de que fuera sencillo para su mejor comprensión.

4.2 Desarrollo del Programa

El programa consta de cinco partes principales, siendo éstas:

1. Obtención de la matriz de hundimientos del terreno ζ_i - en función de las cargas Q_k
2. Cambio de variables para transformar la notación usada en el punto anterior a la usada en la estructura.
3. Formación de la matriz de rigideces de la estructura.
4. Sustitución de la matriz de hundimientos en la matriz de rigideces de la estructura.

5. Resolución del sistema resultante mediante el método de Gauss.

La descripción de cada uno de ellos se presenta a continuación:

1. Obtención de la matriz de hundimientos del terreno en función de las cargas Q_n

La ecuación empleada para ello es la siguiente

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^p m_v(i,j) H_j \sum_{n=1}^m I(i,j)_n \frac{Q_n}{b_n} \quad (4.2.1)$$

donde

ζ_i es el desplazamiento (en m) en el punto i según la notación de hundimientos

$m_v(i,j)$ es el módulo de variación volumétrica del suelo (en m^2/ton) en el punto i del estrato j

H_j es el espesor (en m) del estrato j

$I(i,j)_n$ es el valor de influencia de una carga unitaria q_n sobre el punto i del estrato j (adimensional)

Q_n es la carga (en ton/m) aplicada en n que produce el hundimiento en el punto i

b_n es el ancho de cimentación considerado (en m)

Es de mencionarse que el método empleado para el cálculo de los valores de influencia fue el de Boussinesq¹ - para el caso de una área uniformemente cargada y cuya expresión es

$$\sigma_z = \frac{w}{4\pi} \left[\frac{2xyz (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{z^2 (x^2 + y^2 + z^2) + x^2 y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \operatorname{ang} \tan \frac{2xyz (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{z^2 (x^2 + y^2 + z^2) - x^2 y^2} \right] \quad (4.2.2)$$

en donde:

$$\sigma_z = I_{(i,j)} q_n$$

$$w = q_n$$

x, y, z tienen la misma interpretación que en la teoría mencionada

El principal problema para la aplicación de la expresión anterior es el cálculo de x , el diagrama de bloques para el cálculo de $I_{(i,j)} q_n$ se presenta en el apé-

1 Juárez Badillo, Tomo II, Capítulo II, pág. 23

dice E y la valuación de la expresión de σ_z se resuelve en el programa mediante la subrutina VALOR.

Una vez obtenidos los valores de influencia se forma un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} \xi_1 = & (m_{v_1,1} H_1 I_{1,1,1} + m_{v_1,2} H_2 I_{1,2,1} + \dots + \\ & + m_{v_1,p} H_p I_{1,p,1}) Q_1 + \dots + (m_{v_1,1} H_1 I_{1,1,r} + \\ & + m_{v_1,2} H_2 I_{1,2,r} + \dots + m_{v_1,p} H_p I_{1,p,r}) Q_r \\ \xi_2 = & (m_{v_2,1} H_1 I_{2,1,1} + m_{v_2,2} H_2 I_{2,2,1} + \dots + \\ & + m_{v_2,p} H_p I_{2,p,1}) Q_1 + \dots + (m_{v_2,1} H_1 I_{2,1,r} + \\ & + m_{v_2,2} H_2 I_{2,2,r} + \dots + m_{v_2,p} H_p I_{2,p,r}) Q_r \\ & \vdots \\ \xi_m = & (m_{v_m,1} H_1 I_{m,1,1} + m_{v_m,2} H_2 I_{m,2,1} + \dots + \end{aligned}$$

$$+ m_{vm,p} H_p I_{m,p,1} Q_1 + \dots + (m_{vm,1} H_1 \cdot$$

$$\cdot I_{m,1,r} + m_{vm,2} H_2 I_{m,2,r} + \dots + m_{vm,p} H_p I_{m,p,r} Q_r$$

2. Cambio de variables para transformar la notación usada en el punto anterior a la usada en la estructura.

Sea

$$\sum_{j=1}^p m_{v,i,j} H_j \sum_{r=1}^m I_{(i,j)r} \cdot \frac{1}{b_r} = q(i,r)$$

donde $q(i,r)$ será el coeficiente de Q_r . Si se sustituye el valor de dichos coeficientes en el último sistema encontrado en el inciso anterior se tendrá

$$c_1 = q_{1,1} Q_1 + q_{2,1} Q_2 + q_{3,1} Q_3 + \dots + q_{m,1} Q_m$$

$$c_2 = q_{1,2} Q_1 + q_{2,2} Q_2 + q_{3,2} Q_3 + \dots + q_{m,2} Q_m$$

⋮

$$c_m = q_{1,m} Q_1 + q_{2,m} Q_2 + q_{3,m} Q_3 + \dots + q_{m,m} Q_m$$

En el cambio de variable el coeficiente $q_{(i,r)}$ se transforma a coeficientes de la forma $\tau d_{(i,r)}$, $t d_{(i,r)}$, --- $\tau z_{(i,r)}$ y $t z_{(i,r)}$, y las incógnitas Q_n se transforman en las incógnitas que en el análisis estructural se llamarán $R_{(i,j)}$ y $T_{(i,j)}$. Quedando el sistema transformado de la siguiente manera:

$$\delta_1 = \tau d_{(1,1)} R_1 + t d_{(1,1)} T_1 + \tau d_{(2,1)} R_2 + \dots + \\ + t d_{(n-1,1)} T_{n-1} + \tau d_{(n,1)} R_n$$

$$\xi_1 = \tau z_{(1,1)} R_1 + t z_{(1,1)} T_1 + \tau z_{(2,1)} R_2 + \dots + \\ + t z_{(n-1,1)} T_{n-1} + \tau z_{(n,1)} R_n$$

⋮

$$\xi_{n-1} = \tau z_{(1,n-1)} R_1 + t z_{(1,n-1)} T_1 + \tau z_{(2,n-1)} R_2 + \\ + \dots + t z_{(n-1,n-1)} T_{n-1} + \tau z_{(n,n-1)} R_n$$

$$\delta_n = \tau d_{(1,n)} R_1 + t d_{(1,n)} T_1 + \tau d_{(2,n)} R_2 + \dots +$$

$$+ td_{(n-1,n)} T_{n-1} + rd_{(n,n)} R_n$$

El diagrama de flujo que representa el cambio de variables, así como sus comentarios se presentan en el apéndice F.

3. Formación de la matriz de rigideces de la estructura.

El primer paso en este proceso es la obtención de las rigideces de todos los elementos de la estructura para la cual se empleó la expresión:

$$K = \frac{EI}{L}$$

donde:

- K es la rigidez relativa del elemento considerado
- E es el módulo de elasticidad del elemento
- I es el momento de inercia del elemento
- L es la longitud del elemento

El paso siguiente es la obtención de las rigideces de los nudos; la rigidez de un nudo es la suma de las rigideces de todos los elementos que concurren al nudo,

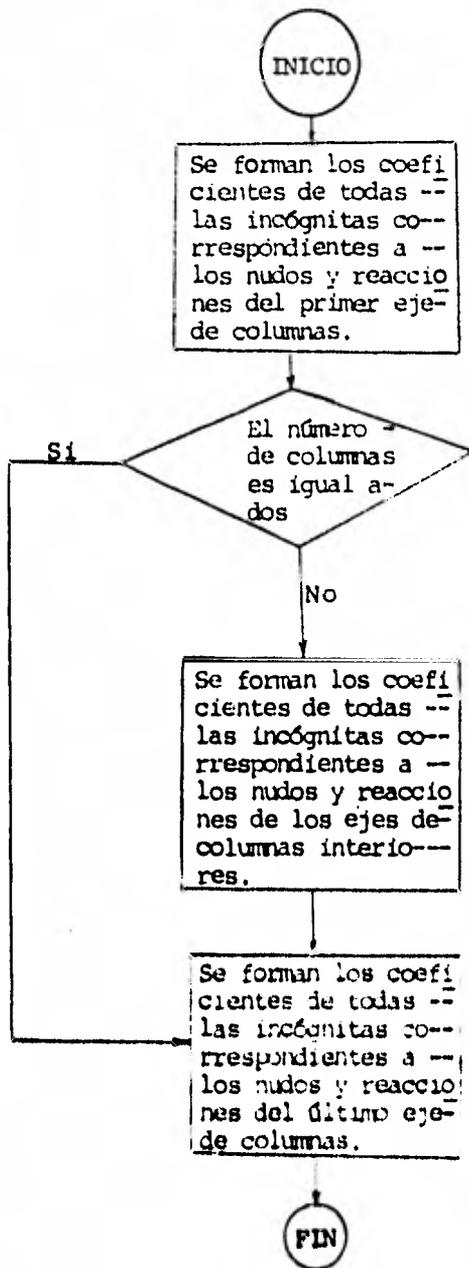


Diagrama de bloques que ilustra la formación de la matriz de rigideces de la estructura,

Una vez conocidas las rigideces relativas y de nudo se procede a formar los coeficientes de las ecuaciones resultantes de la aplicación del método de las rigideces.

4. Sustitución de la matriz de hundimientos en la matriz de rigideces de la estructura.

Recordando que se ha formado a partir del método de las rigideces un sistema de ecuaciones cuyo número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, pues las reacciones del terreno R_i y T_i son también incógnitas, sin embargo, al realizar el análisis de hundimientos del terreno se obtienen los desplazamientos del suelo δ_i y ξ_i en función de las reacciones R_i y T_i ; así, sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones derivadas de la aplicación del método de las rigideces, quedará un sistema de ecuaciones en que las incógnitas serán únicamente los giros en los nudos y las reacciones del terreno. El diagrama de flujo que realiza dicha sustitución se presenta en el apéndice G.

5. Resolución del sistema resultante mediante el método de Gauss.

Dicho método se ha tratado ampliamente en el capítulo -

anterior y el procedimiento a seguir se presenta, en --
forma detallada en el apéndice H.

TESTS IN I S R
 = = = = =

10
 10

C
 C
 C

```

DIFFICIL IL(25),LH(25),W(25,25),ET(25,25),EL(25,25),LH1(25,25),LH
*1(25,25),H(25),ENV(25,25),C(25,25,25),C(25,25),T(25,25),D(25),T(25
*,25),Z(25,25),X(25),C(25,25),H(25,25),T(25,25),P(25,25),A(25,25
*),I(25,25),AL(25,25),AHV(25,25),IK(25,25),I(25,25),TAN(25,25),L
*(25),AI(25),AH(25),PA(25),HC(10),H(10),G(15,15),PC(15),IT(15),D
*(15)
LUMPH/M/PC/VI

LECTURA DE DATOS

DATOS DE LA ESTRUCTURA
HEAD(5,1) 4,10,11

1  FOMAT(310)
  HEAD(5,2) ANCHO
2  FOMAT(15,2)
  HEAD(5,10) (H(J), J=1,N)
  HEAD(5,10) (IL(I), I=1,N-1)
  HEAD(5,10) (CH(I), I=1,N-1)
10 FOMAT(MF10.5)
  DO 15 J=1,NO
  HEAD(5,10) (W(I,J), I=1,N-1)
15 CONTINUE
  DO 20 J=1,NO
  HEAD(5,25) (ET(I,J), I=1,N-1)
20 CONTINUE
25 FOMAT(MF10.5)
  DO 30 J=1,NO-1
  HEAD(5,25) (C(I,J), I=1,N)
30 CONTINUE
  DO 35 J=1,NO
  HEAD(5,25) (TM(I,J), I=1,N-1)
35 CONTINUE
  DO 40 J=1,NO-1
  HEAD(5,25) (CM(I,J), I=1,N)
40 CONTINUE
  M=PN-1
  DO 45 J=1,PN
  HEAD(5,10) (ENV(I,J), I=1,N)
45 CONTINUE
  YEAR=1/200
  MPIT(1,50)

50 FOMAT(////,0IX,"IMPRESION DE DATOS")
  WRITE(6,60) M,NL
60 FOMAT(7,5X,"NUMERO DE LIGS DE COLUMNAS",PY,12,7,5,"NUMERO DE RI
  VELLE",17X,1)
  WRITE(6,62) M,NL
62 FOMAT(7,5X,"NUMERO DE FRACCIONES DEL TIEMPO",2X,12,7,5A,"NUMERO
  1 DE ESTADIOS",12X,12)
  WRITE(6,40) ANCHO
42 FOMAT(7,5X,"ANCHO DE COLUMNA",17X,11,2)
  WRITE(6,15)
    
```

```

86 FORMAT (///,5X,"ESPESOR DE CADA ESTRATO ( EN M )",/)
DO 67 J=1,NP
67 WRITE (6,65) J,(J)
65 FORMAT (5X,"ESTRATO",12,3X,F5.2)
WRITE (6,64)
64 FORMAT (/,5X,"ALTURA DE ENTREPISOS ( EN M )",/)
DO 3 I=1,NQ-1
3 WRITE (6,69) I,(M(I))
69 FORMAT (5X,"ENTREPISO",12,3X,F5.2)
WRITE (6,63)
63 FORMAT (///,5X,"LOS SIGUIENTES DATOS SE PROPORCIONAN DE IZQUIERDA
A DEPECMA"//)
WRITE (6,62)
62 FORMAT (5X,"DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNAS",/)
WRITE (6,61) (I,(I)) (I=1,I-1)
61 FORMAT (10(5X,F5.2))
WRITE (6,66)
66 FORMAT (/,5X,"CARGAS EN CADA TRABE EN (TON/M)",/)
DO 71 J=1,NQ
WRITE (6,73) J,(C(I,J),I=1,N-1)
73 FORMAT (5X,"NIVEL",12,10(3X,F6.2))
71 CONTINUE
WRITE (6,68)
68 FORMAT (/,5X,"MODULO DE ELASTICIDAD DE TRABES EN (KG/CM2)",/)
DO 75 J=1,NQ
WRITE (6,79) J,(E(I,J),I=1,I-1)
79 FORMAT (5X,"NIVEL",12,8(3X,F10.5))
75 CONTINUE
WRITE (6,74)
74 FORMAT (/,5X,"MODULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS EN (KG/CM2)",/)
DO 80 J=1,NQ-1
WRITE (6,77) J,(E(C(I,J),I=1,I))
77 FORMAT (5X,"ENTREPISO",12,8(3X,F10.5))
80 CONTINUE
WRITE (6,76)
76 FORMAT (/,5X,"MOMENTO DE INERCIA DE TRABES EN (CM4)",/)
DO 85 J=1,NQ
WRITE (6,81) J,(IPI(I,J),I=1,I-1)
81 FORMAT (5X,"NIVEL",12,8(3X,F10.5))
85 CONTINUE
WRITE (6,78)
78 FORMAT (/,5X,"MOMENTO DE INERCIA DE COLUMNAS EN (CM4)",/)
DO 90 J=1,NQ-1
WRITE (6,81) J,(CPI(I,J),I=1,I)
91 FORMAT (5X,"ENTREPISO",12,8(3X,F10.5))
90 CONTINUE
WRITE (6,88)
88 FORMAT (/,5X,"PV EN CADA ESTRATO DE SUELO EN (M2/TON)",/)
DO 95 J=1,NP
WRITE (6,94) J,(SPV(I,J),I=1,M)
94 FORMAT (5X,"ESTRATO",12,8(3X,F10.5))
95 CONTINUE

```

OBTENCION DE LOS VALORES DE INFLUENCIA
OBTENCION DE LAS DISTANCIAS ACUMULADAS A:
AL(1)=0.0
SUM=0.0
DO 328 I=2,N
AL(2*I-1)=L(I-1)+F1
328 SUM=AL(2*I-1)

CCCC


```

346 X1=PAY(2*K-2)
GO TO 349
347 IF (I=1) 347, 348, 349
X1=PAY(2*K-1)-PAY(2*I-2)
GO TO 349
348 X1=PAY(2*K-2)-PAY(2*I-2)
349 Z1=AM(J)
CALL VALUE (Y1,Y,Z1)
ALE=V1*2.0
IF (I=1) 350, 350, 351
350 X1=PAY(2*K-3)
GO TO 352
351 X1=PAY(2*K-3)-PAY(2*I-2)
352 CALL VALUE (X1,Y,Z1)
F(I,J,F)=ALE-V1*2.0
347 CONTINUE
341 CONTINUE
340 CONTINUE
KE=1
DO 353 I=3,M
KE=KE+1
DO 354 I=2,KL
DO 355 J=1,NP
X1=PAY(2*I-2)-PAY(2*K-3)
Z1=AM(J)
CALL VALUE (Y1,Y,Z1)
ALE=V1*2.0
X1=PAY(2*I-2)-PAY(2*K-3)
CALL VALUE (X1,Y,Z1)
F(I,J,F)=ALE-V1*2.0
355 CONTINUE
354 CONTINUE
353 CONTINUE

```

C
C
C

EQUACION 2.3.41 CALCULO DE LOS MULTIPLICADORES DEL SUPLO

```

423 DO 344 I=1,M
DO 345 I=1,M
SUM=0.0
DO 348 J=1,NP
SUM=(SMV(I,J)*M(J)*C(1,J)-ZANCHA)*SUM
349 CONTINUE
U(PM,I)=SUM
385 CONTINUE
380 CONTINUE

```

C
C

EQUACIONES 2.3.42 A 2.3.45 CARRIOS DE VARIABLES

```

DO 395 I=1,M
DO 400 I=1,M
M2(I,I)=F(2*I-1,2*K-1)
CONTINUE
DO 405 I=1,M-1
I2(I,I)=F(2*I,2*K-1)
CONTINUE
345 CONTINUE
DO 410 I=1,M-1
DO 415 I=1,M
F2(I,I)=F(2*I-1,2*K)
CONTINUE
415 DO 420 I=1,M-1

```

```

      FZ(I,F)=0(2*I,2*F)
420 CONTINUE
430 CONTINUE
      DO 700 I=1,M
      DO 710 KP=1,M
      DO 720 J=1,NP
      F(I,J,KP)=0.0
720 CONTINUE
710 CONTINUE
700 CONTINUE

```

OBTENCION DE LAS INDICES DE TRAPES Y DE COLUMNAS

```

      DO 110 J=1,NP
      DO 115 I=1,N-1
      TK(I,J)=(FT(I,J)*TH(I,J)+1.0E-7)/TL(J)
115 CONTINUE
110 CONTINUE
      DO 120 I=1,N
      DO 125 J=1,NP-1
      CK(I,J)=(EC(I,J)*CP(I,J)+1.0E-7)/CH(J)
125 CONTINUE
120 CONTINUE

```

OBTENCION DE LAS INDICES DE PUNTO

```

      DO 130 J=1,NP
      DO 135 I=1,N
      IF (J=1) 140,140,145
140 IF (I=1) 150,150,155
150 TK(I,J)=TK(I,J)+CK(I,J)
      GO TO 135
155 IF (I=1) 160,165,165
160 TK(I,J)=TK(I-1,J)+TK(I,J)+CK(I,J)
      GO TO 135
165 TK(I,J)=TK(I-1,J)+CK(I,J)
      GO TO 135
170 IF (J=NP) 170,175,175
170 IF (I=1) 180,180,185
180 TK(I,J)=TK(I,J)+TK(I,J-1)+CK(I,J)
      GO TO 135
185 IF (I=1) 190,195,195
190 TK(I,J)=TK(I-1,J)+TK(I,J)+CK(I,J-1)+TK(I,J)
      GO TO 135
195 TK(I,J)=TK(I-1,J)+CK(I,J-1)+TK(I,J)
      GO TO 135
200 IF (I=1) 200,205,205
200 TK(I,J)=TK(I,J)+TK(I,J-1)
      GO TO 135
205 IF (I=1) 210,215,215
210 TK(I,J)=TK(I-1,J)+TK(I,J)+CK(I,J-1)
      GO TO 135
215 TK(I,J)=TK(I-1,J)+CK(I,J-1)
135 CONTINUE
130 CONTINUE

```

EQUACION 2.3.27 CONSIDERANDO LOS VALORES DE LOS PUNTOS DE TRAPES Y DE COLUMNAS

$$\begin{aligned}
 F(1,1,1) &= 2.0 \cdot TK(1,1) \\
 F(2,1,1) &= TK(1,1) \\
 F(1,2,1) &= CK(1,1)
 \end{aligned}$$

```

U(1,1)=(-6.0*TF(1,1))/TL(1)
U(2,1)=(6.0*TF(1,1))/TL(1)
K(1,1)=(-67.0*(TL(1)**2))/3072.0
K(2,1)=(-13.0*(TL(1)**2))/192.0
I(1,1)=(-11.0*(TL(1)**2))/192.0
C(1)=(-W(1,1)*(TL(1)**2))/12.0
C
192  FAPA I=2 NASTA I-1
      IF (I-2) 101,101,102
      DO 730 I=2,N-1
F(I-1,1,1)=TF(I-1,1)
F(I,1,1)=2.0*TF(I,1)
F(I+1,1,1)=TF(I,1)
F(I,2,1)=CF(I,1)
U(I-1,1)=6.0*TF(I-1,1)/TL(I-1)
U(I,1)=6.0*(TF(I-1,1)/TL(I-1)-(TF(I,1)/TL(I)))
U(I+1,1)=6.0*(TF(I,1)/TL(I))
K(I-1,1)=13.0*(TL(I-1)**2)/3072.0
K(I,1)=7.0*(TL(I-1)**2)-TL(I)**2)/3072.0
I(I-1,1)=11.0*(TL(I-1)**2)/192.0
I(I+1,1)=-13.0*(TL(I)**2)-3072.0
I(I,1)=-11.0*(TL(I)**2)/192.0
C(I)=(W(I-1,1)*(TL(I-1)**2)-(W(I,1)*(TL(I)**2)))/12.0
730  CONTINUE
      CONTINUE I=1
191  F(I-1,1,N)=TF(N-1,1)
      F(I,1,N)=2.0*TF(I,N)
      F(I+1,1,N)=CF(I,N)
      U(I-1,1,N)=6.0*TF(I-1,1)/TL(I-1)
      U(I,1,N)=6.0*TF(I,1)/TL(I)
      U(I+1,1,N)=13.0*(TL(I-1)**2)-TL(I)**2)/3072.0
      K(I,1,N)=7.0*(TL(I-1)**2)-TL(I)**2)/3072.0
      I(I-1,1,N)=11.0*(TL(I-1)**2)/192.0
      I(I,1,N)=-13.0*(TL(I)**2)-3072.0
      I(I+1,1,N)=-11.0*(TL(I)**2)/192.0
      C(I)=(W(N-1,1)*(TL(I-1)**2)-(W(I,1)*(TL(I)**2)))/12.0
C
EQUACION 2.3.20 EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LOS NUDOS
DEL RESTO DE LOS NIVELLOS J+1
C
C
C
197  IF (I-2) 206,206,207
      I=1 NASTA J=N-1
      DO 210 J=2,N-1
      N=(J-1)*N+1
      F(1,J,N)=2.0*TF(1,J)
      F(2,J,N)=TF(1,J)
      F(1,J-1,N)=CF(1,J-1)
      F(1,J+1,N)=CF(1,J)
      U(1,J,N)=6.0*TF(1,J)/TL(I)
      U(2,J,N)=6.0*TF(1,J)/TL(I)
      C(J,N)=W(1,J)*(TL(I)**2)/12.0
      210 CONTINUE
      I=1 NASTA J=N-1
      DO 220 J=2,N-1
      N=(J-1)*N+1
      F(I-1,J,N)=TF(N-1,J)
      F(I,J,N)=2.0*TF(I,J)
      F(I,J-1,N)=CF(N,J-1)
      F(I,J+1,N)=CF(N,J)
      U(I-1,J,N)=6.0*TF(I-1,J)/TL(I-1)
      U(I,J,N)=6.0*TF(I,J)/TL(I)
      U(I+1,J,N)=13.0*(TL(I-1)**2)-TL(I)**2)/3072.0
      220 CONTINUE

```

```

204 IF (N=2) 245, 245, 225
C
J=NC VARIANDP I IECDE 2 PASTA N=1
225 DO 230 I=2, N-1
F=(N-1)*N+1
F(I-1, NC, Y)=TF(I-1, NC)
F(I, NC, Y)=2.0*TF(I, NC)
F(I+1, NC, Y)=TF(I, NC)
F(I, NC-1, Y)=CF(I, NC-1)
D(I-1, Y)=-6.0*TF(I-1, NC)/TL(I-1)
D(I, Y)=6.0*((TF(I-1, NC)/TL(I-1))-(TF(I, NC)/TL(I)))
D(I+1, Y)=6.0*TF(I, NC)/TL(I)
C(Y)=(CF(I-1, NC)*(TL(I-1)**2))-(W(I, NC)*(TL(I)**2))/12.0
230 CONTINUE
IF (N=2) 245, 245, 250
250 DO 235 J=2, N-1
DO 240 I=2, N-1
K=(J-1)*N+1
F(I-1, J, Y)=TY(I-1, J)
F(I, J, Y)=2.0*TY(I, J)
F(I+1, J, Y)=TY(I, J)
F(I, J-1, Y)=CY(I, J-1)
F(I, J+1, Y)=CY(I, J)
D(I-1, Y)=-6.0*TY(I-1, J)/TL(I-1)
D(I, Y)=6.0*((TY(I-1, J)/TL(I-1))-(TY(I, J)/TL(I)))
D(I+1, Y)=6.0*TY(I, J)/TL(I)
C(Y)=(CY(I-1, J)*(TL(I-1)**2))-(W(I, J)*(TL(I)**2))/12.0
240 CONTINUE
235 CONTINUE
C
CUAFDC I=1 Y J=NC
245 F=(N-1)*N+1
F(1, NC, Y)=2.0*TF(1, NC)
F(2, NC, Y)=TF(1, NC)
F(1, NC-1, Y)=CF(1, NC-1)
D(1, Y)=-6.0*TF(1, NC)/TL(1)
D(2, Y)=6.0*TF(1, NC)/TL(1)
C(Y)=-W(1, NC)*(TL(1)**2)/12.0
C
CUAFDC I=N Y J=1C
K=(N-1)*N+1
F(N-1, 1C, Y)=TF(N-1, 1C)
F(N, 1C, Y)=2.0*TF(N, 1C)
F(N, 1C-1, Y)=CF(N, 1C-1)
D(N-1, Y)=-6.0*TF(N-1, 1C)/TL(N-1)
D(N, Y)=6.0*TF(N, 1C)/TL(N)
C(Y)=W(N-1, 1C)*(TL(N-1)**2)/12.0
C
C
C
EQUACION 2.3.29 EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LAS CRUJIAS
PARA I=1
K=1
SUMI=0.0
SUMI=C.C
F=1
DO 255 J=1, NC
F(1, J, Y)=3.0*TY(1, J)
F(2, J, Y)=3.0*TY(1, J)
SUMI=SUMI+TF(1, J)
SUMI=SUMI+W(1, J)
255 CONTINUE
D(1, Y)=-12.0*SUMI/TL(1)
D(2, Y)=12.0*SUMI/TL(1)
C(Y)=12.0*W(1, NC)*(TL(1)**2)/12.0

```

```

M(2,Y)=-7.0*(TL(1)**2)/512.0
I(1,Y)=-TL(1)**2/4.0
C(Y)=-TL(1)**2*SINI/2.0
IF(N.LE.2) GO TO 260
DO 265 I=2,N-1
SUMD=0.0
SUMI=0.0
SUME=0.0
K=Y+1
DO 275 J=1,N0
F(J,J,K)=3.0*TK(I,J)
F(I+1,J,K)=3.0*TK(I,J)
SUMD=SUMD+TK(I,J)
SUMI=SUMI+M(I,J)
275 CONTINUE
DO 270 KC=1,I-1
SUMY=0.0
DO 272 J=1,N0
SUMY=SUMY+W(KC,J)
272 CONTINUE
SUME=TL(KC)*SUMY+SUME
T(KC,K)=-TL(I)*TI(KC)/2.0
270 CONTINUE
L(K)=-TL(I)*SUME-(TL(I)*TI(I)*SUMI/2.0)
IF(I.LE.2) GO TO 280
DO 285 KC=2,I-1
W(KC,K)=-TL(I)*(TL(KC-1)+TL(KC))/4.0
285 CONTINUE
280 U(1,K)=-12.0*SUMD/TL(I)
U(I+1,K)=12.0*SUMD/TL(I)
W(1,K)=-TL(I)*TL(I)/4.0
W(I,K)=-((TL(I-1)*TL(I))/4.0)+(121.0*(TL(I)**2)/512.0)
W(I+1,K)=-7.0*(TL(I)**2)/512.0
T(I,K)=-TL(I)**2/4.0
265 CONTINUE

```

C
C
C

EQUACION 2.3.35 DESPLAZAMIENTO EN LA CIMENTACION
A LA MITAD DE LAS CRUJIAS

```

260 DO 290 I=1,N-1
K=Y+1
F(1,I,K)=TK(I,1)
F(I+1,I,K)=-TK(I,1)
U(1,K)=-P.0*TK(I,1)/TL(I)
U(I+1,K)=-M.0*TK(I,1)/TL(I)
Z(I,K)=1.0*TK(I,1)/TI(I)
W(1,K)=TI(I)**2/512.0
W(I+1,K)=TL(I)**2/256.0
T(I,K)=13.0*(TL(I)**2)/384.0
C(K)=W(1,K)*TL(I)**2/24.0
290 CONTINUE

```

C
C

EQUACION 2.3.36 DISTRIBUCION DE FUERZAS VERTICALES

```

K=Y+1
W(1,K)=TI(I)
W(I,K)=TI(I-1)
IF(N.LE.2) GO TO 300
DO 300 I=2,N-1
W(1,K)=TI(I-1)+TI(I)
300 CONTINUE

```


C MEDIANTE EL METODO DE GAUSS

```

N1=N
N=NT
CALL DECOMP (NT, A, UL)
CALL SOLVE (NT, UL, R, X)
CALL IMPROV (NT, A, UL, R, X, IUDIGI)
K=1
DO R60 J=1,NO
DO P65 I=1,NI
WRITE (1, R70) I, J, X(K)
R70 FORMAT (/, 5X, "GIRU EN EL PUDO(", I2, ", ", I2, ")=", F10.6)
GI(I, J)=X(K)
K=K+1
P65 CONTINUE
R60 CONTINUE
DO R75 I=1,NI
WRITE (6, R80) I, X(K)
R80 FORMAT (/, 5X, "REACCION R(", I2, ")=", F10.6)
RC(I)=X(K)
K=K+1
R75 CONTINUE
DO R85 I=1, NI-1
WRITE (6, R90) I, Y(K)
R90 FORMAT (/, 5X, "REACCION T(", I2, ")=", F10.6)
IT(I)=X(K)
K=K+1
R85 CONTINUE
DO R00 Y=1, NI
SIGMA=0.0
I=1
DO R05 J=NI*NO+1, NI*NO+NI
SIGMA=X(J)*PC(I, Y)+SIGMA
I=I+1
R05 CONTINUE
I=1
DO R10 J=NI*NO+NI+1, NI*NO+(2*NI-1)
SIGMA=X(J)*TC(I, Y)+SIGMA
I=I+1
R10 CONTINUE
MC(Y)=SIGMA
R00 CONTINUE
DO R15 Y=1, NI-1
ZICPA=0.0
I=1
DO R20 J=NI*NO+1, NI*NO+NI
ZICPA=X(J)*PZ(I, Y)+ZICPA
I=I+1
R20 CONTINUE
I=1
DO R25 J=NI*NO+NI+1, NI*NO+(2*NI-1)
ZICPA=X(J)*TZ(I, Y)+ZICPA
I=I+1
R25 CONTINUE
MT(Y)=ZICPA
R15 CONTINUE
WRITE (6, R30)
R30 FORMAT (/, 5X, "CUMULADO PARA LAS REACCIONES", /)
DO R35 I=1, NI
WRITE (6, R40) I, Y(I)
R40 FORMAT (/, 5X, "C(", I2, ")=", F7.6)

```

```

DC(I)=MC(I)
835 CONTINUE
WRITE (6,845)
845 FORMAT (//,5X,"FUNDIMIENTO DE LAS COLUMNAS EN LAS TRAMES",//)
DO 850 I=1,N1-1
WRITE (6,855) I,MT(I)
855 FORMAT (/,5X,"M(","12,"")=","10.4)
850 CONTINUE
C OBTENCION DE LOS MOMENTOS EN LAS TRAMES
WRITE (6,901)
901 FORMAT (//,5X,"MOMENTOS EN LAS TRAMES",//)
DO 905 I=1,N1-1
TMO=(M(I,1)*(TL(I)**2)/12.)+(67.*FC(I)*(TL(I)**2)/3072.)-(113.*FC(I
1+1)*(TL(I)**2)/3072.)-(11.*TK(I,1)*(TL(I)**2)/192.)+(2.*TK(I,1)*CI(I
2,1)+(TK(I,1)*GI(I+1,1))-(6.*TK(I,1)*OC(I,1))+(6.*TK(I,1)*FC(I
3+1)/TL(I))
WRITE (6,905) I,I+1,TMO
905 FORMAT (/,5X,"MOMENTO M(","12,"")(","12,"")=","10.4)
900 CONTINUE
DO 910 I=2,N1
TMO=(-M(I-1,1)*(TL(I-1)**2)/12.)+(67.*FC(I)*(TL(I-1)**2)/3072.)+(1
13.*FC(I-1)*(TL(I-1)**2)/3072.)+(11.*TK(I-1)*(TL(I-1)**2)/192.)+(2.*
TK(I-1,1)*CI(I,1)+(TK(I-1,1)*GI(I-1,1))-(6.*TK(I-1,1)*OC(I-1)/TL(I
3I-1))+(6.*TK(I-1,1)*FC(I)/TL(I-1))
WRITE (6,915) I,I-1,TMO
915 FORMAT (/,5X,"MOMENTO M(","12,"")(","12,"")=","10.4)
910 CONTINUE
DO 920 J=2,ND
DO 925 I=1,N1-1
TMO=(M(I,J)*(TL(I)**2)/12.)+(2.*TK(I,J)*(TL(I,1)))+(TK(I,J)*(CI(I+1,
2))-(6.*TK(I,J)*FC(I)/TL(I)))+(6.*TK(I,J)*OC(I+1)/TL(I))
WRITE (6,930) I,J,I+1,J,TMO
930 FORMAT (/,5X,"MOMENTO M(","12,"")(","12,"")(","12,"")=","10.4)
925 CONTINUE
DO 940 I=2,N1
TMO=(-M(I-1,J)*(TL(I-1)**2)/12.)+(2.*TK(I-1,J)*(TL(I,1)))+(TK(I-1,J)
1*GI(I-1,J))-(6.*TK(I-1,J)*OC(I-1)/TL(I-1))+(6.*TK(I-1,J)*FC(I)/TL(I
2I-1))
WRITE (6,935) I,J,I-1,J,TMO
935 FORMAT (/,5X,"MOMENTO M(","12,"")(","12,"")(","12,"")=","10.4)
940 CONTINUE
920 CONTINUE
WRITE (6,921)
921 FORMAT (//,5X,"MOMENTOS EN LAS COLUMNAS",//)
DO 950 I=1,N1
DO 955 J=1,ND-1
LMO=(2.*TK(I,J)*CI(I,J))+(TK(I,J)*GI(I,1))
WRITE (6,960) I,J,I+1,J,LMO
960 FORMAT (/,5X,"MOMENTO M(","12,"")(","12,"")(","12,"")=","10.4)
955 CONTINUE
DO 965 J=2,ND
LMO=2.*TK(I,J-1)*CI(I,J)+TK(I,J-1)*GI(I,J-1)
WRITE (6,970) I,J,I+1,J,LMO
970 FORMAT (/,5X,"MOMENTO M(","12,"")(","12,"")(","12,"")=","10.4)
965 CONTINUE
950 CONTINUE
CALL EX11
END

```

```

SUBROUTINE DECOMP (IT, A, UL)
DIMENSION A(25,25),U(25,25),S(25),IPS(25)
COMMON IPS
N=IT
C INICIO IPS, UL, S(25)
DO 5 I=1,N
IPS (I) = 1
RUMPM = 0.0
DO 2 J=1,N
UL (I,J) = A(I,J)
IF (RUMPM.GE.1/S(UL(I,J))) GO TO 2
1 RUMPM = ABS(UL(I,J))
2 CONTINUE
IF (RUMPM) 3,4,3
3 S( I) = 1.0/RUMPM
GO TO 5
4 CALL SING (I)
S( I) = 0.0
5 CONTINUE
C ELIMINACION GAUSSIANA CON PIVOTEO PARCIAL
DO 17 I=1,N-1
RIP = 0.0
DO 11 J=I,N
IP = IPS (I)
SIZE = ABS(UL (II,J))*S(IP)
IF (SIZE.LE.MIG) GO TO 11
10 RIP = SIZE
IIXDIV = I
11 CONTINUE
IF (MIG) 13,12,13
12 CALL SING (2)
GO TO 17
13 IF (IIXDIV.EQ.I) GO TO 15
14 J=IPS (I)
IPS (I) = IPS (IIXDIV)
IPS (IIXDIV) = J
15 KP = IPS (K)
PIVOT = U (IP,K)
DO 16 J=I+1,N
IP = IPS (I)
RN = -U (IP,J)/PIVOT
UL (IP,J) = RN
DO 16 J=I+1,N
UL (IP,J) = U (IP,J) + (RN*UL(KP,J))
16 CONTINUE
17 CONTINUE
KP = IPS (K)
IF (U (KP,K)) 19,12,19
18 CALL SING (3)
19 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SOLVE (IT, UL, H, X)
DIMENSION UL(25,25),P(25),X(25),IPS(25)
COMMON IPS
N=IT
IP = IPS (1)
X(1)=P(IP)
DO 2 I=2,N
IP = IPS (I)
SUM = 0.0
DO 1 J=1,I-1
1 SUM = SUM + UL (IP,J)*X(J)
2 X(I) = P(IP) -SUM
C
IP = IPS (N)
X(N) = X(N)/UL (IP,N)
DO 4 IBACK = 2,N
I = N+1 - IBACK
I VA DESDE (N-1) HASTA 1
IP = IPS (I)
SUM = 0.0
DO 3 J= I+1,N
3 SUM = SUM + UL (IP,J)*X(J)
4 X(I) = (X(I) - SUM)/UL (IP,I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE IMPFIV (N1, A, U1, M, X, IDIGIT)
DIMENSION A(25,25),U1(25,25),M(25),X(25),PE(25),DX(25)
DOUBLE PRECISION SUM
N = N1
EPS = 1.0*10**(-8)
ITMAX = 5
XNORM = 0.0
DO 1 I=1,M
1 XNORM = AMAX1 (XNORM, ABS (X(I)))
IF (XNORM.NE.0) GO TO 3
DIGITS = -ALOG10 (EPS)
IDIGIT = DIGITS
GO TO 10
3 DO 9 ITER = 1,ITMAX
DO 5 J=1,N
SUM = 0.0
DO 4 J=1,N
4 SUM = SUM + A(I,J)*X(J)
SUM = PE (I) - SUM
5 RE(I) = SUM
CALL SOLVE (N,M,PE,DX)
DXNORM = 0.0
DO 6 I=1,N
TEMP = X(I)
X(I) = X(I) + DX(I)
DXNORM = AMAX1 (DXNORM, ABS(X(I) - TEMP))
6 CONTINUE
IF (ITER.LE.1) GO TO 4
DIGITS = -ALOG10 (AMAX1 (DXNORM/XNORM, EPS))
IDIGIT = DIGITS
8 IF (DXNORM<EPS*XNORM) 10,10,9
9 CONTINUE
C LAS ITERACIONES NO CONVERGIERON
CALL SINC (3)
10 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SING (IMHY)
11 FORMAT (/5X, " MATRIZ CON UN MENGLON DE CEROS EN LA SUBROUTINA DECO
IMP "/)
12 FORMAT (/5X, " MATRIZ SINGULAR EN LA SUBROUTINA DECOMP. DIVISION EN
TIPO CEROS EN LA SUBROUTINA SOLVE"/)
13 FORMAT (/5X, "RESULTADOS DE LA INTERACCION SUELO ESTRUCTURA",//)
NOUT = 6
C NOUT = LA UNIDAD ESTANDAR DE SALIDA
GO TO (1,2,3) IMHY
1 WRITE (NOUT, 11)
GO TO 10
2 WRITE (NOUT, 12)
GO TO 10
3 WRITE (NOUT, 13)
10 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE VALOP (X1,Y,Z1)
COMMON/UNO/VI
VI=(2.*X1*Y*Z1*((X1**2+Y**2+Z1**2)**.5)/(Z1**2*(X1**2+Y**2+Z1**2)+
1(X1**2*Y**2))*((X1**2+Y**2+2.*Z1**2)/(X1**2+Y**2+Z1**2)))+ATAN(2.*X
21*Y*Z1*((X1**2+Y**2+Z1**2)**.5)/(Z1**2*(X1**2+Y**2+Z1**2))-(X1**2*Y
3**2)))/(4.*3.14159)
IF (VI)10,20,20
10 VI=VI+0.25
20 RETURN
END

```

SLU

NO ERRORS DETECTED. NUMBER OF LINES = 797.
COMPILATION TIME = 45 SECONDS FRAMESET, 4.55 SECONDS PROBLETT (5170 LPI).
D2 STACK SIZE = 57 WORDS. FILE SIZE = 140 WORDS. ESTIMATED CORE STORAGE REQUIREMENT = 2144 WORDS.
TOTAL PROGRAM CODE = 2660 WORDS. ARRAY STORAGE = 28741 WORDS.
NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 18. NUMBER OF L1SE SEGMENTS = 140.
PROGRAM CODE FILE = (11FA)TESIS-01 CSC2.
COMPILER COMPILED ON 06/12/81 (FORTRAN ON CSC2).

SECRET SEGMENT IS 0073 1000
START OF SECRET ON
SEGMENT OCC IS 0073 1000



CAPITULO 5

EJEMPLOS DE APLICACION

Se presentan, en este capítulo, cuatro ejemplos que ilustran el método desarrollado en los capítulos anteriores; se considerarán estructuras reticulares sencillas con simetría tanto en dimensiones como en cargas. En los siguientes ejemplos solo se obtendrán los resultados hasta el análisis estructural, quedando fuera del alcance de este trabajo lo referente al diseño estructural.

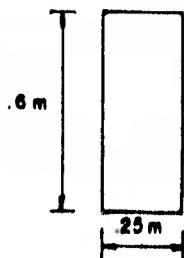
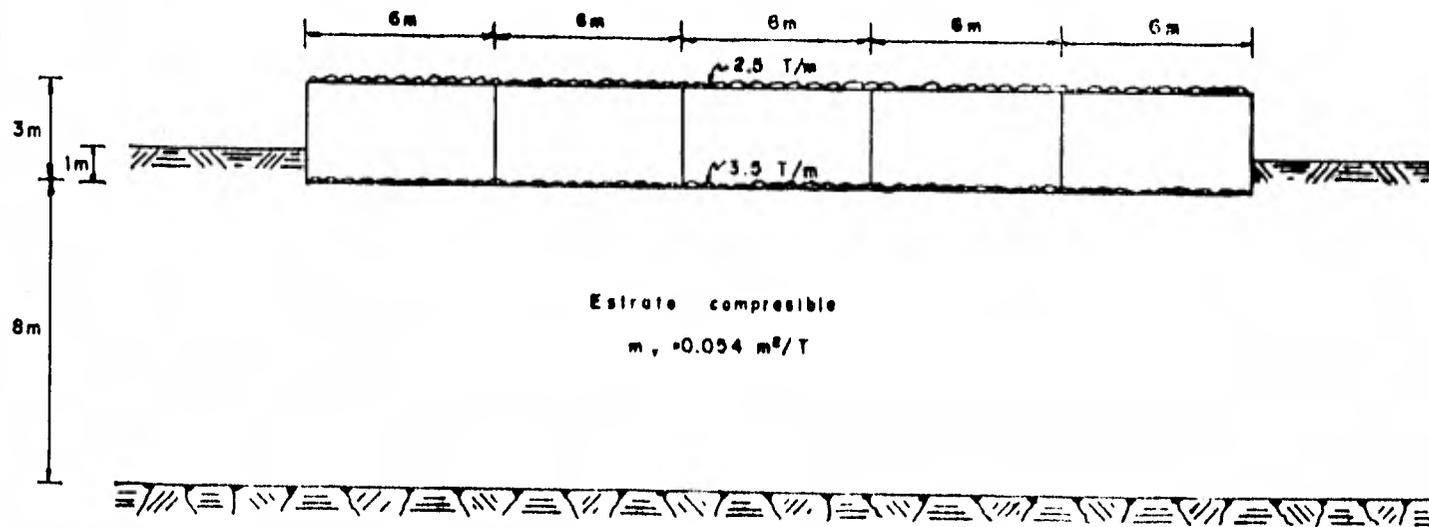
EJEMPLO 1

Se analiza una estructura formada por seis ejes de columnas y un entrepiso, cimentada a base de un cajón desplantado sobre un suelo compresible a una profundidad de 1 m. El espesor del

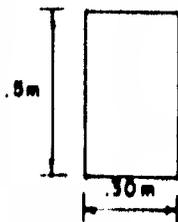
estrato compresible es de 8 m y su módulo de variación volumétrica (m_v) es de $0.054 \text{ m}^2/\text{ton}$, el cual corresponde a un suelo de alta compresibilidad.

La reacción del suelo sobre la losa del cajón de cimentación será resistida por medio de contratrabes; en este ejemplo se considera que el ancho tributario de la contratrase es de 4 m. La geometría de la estructura y la magnitud de las cargas se presentan en la fig 5.1.

Para resolver el problema planteado se usa el programa de computadora que se incluye en el presente trabajo. Los datos se proporcionan según se muestra en el instructivo de uso que se presenta en el Apéndice I.



Sección transversal en traves y contra traves



Sección transversal de columnas

Ancho del = 4 m cimiento

$$E_c = 10,000 \sqrt{T^c} = 141,420 \text{ kg/cm}^2$$

FIG. 5.1. Ejemplo 1

110

PROPIEDADES DE MATERIALES

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES
MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES
MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES
MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES
MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES
MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES
MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES

PROPIEDADES DE LOS MATERIALES DE CONSTRUCCION

DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNAS
0,00 0,00 0,00 0,00 0,00

CARGAS EN CADA UNO DE LOS EJES

NIVEL 1 1,50 2,50 3,50 4,50 5,50
NIVEL 2 1,50 2,50 3,50 4,50 5,50

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES DE CONSTRUCCION

NIVEL 1 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08
NIVEL 2 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES DE CONSTRUCCION

NIVEL 1 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08
NIVEL 2 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES DE CONSTRUCCION

NIVEL 1 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08
NIVEL 2 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES DE CONSTRUCCION

NIVEL 1 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08
NIVEL 2 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08

MODULO DE ELASTICIDAD DE LOS MATERIALES DE CONSTRUCCION

NIVEL 1 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08
NIVEL 2 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08 1,00E+08

RESULTADOS DE LA INTERACCION DE LA ESTRUCTURA

GIRO EN EL NUDO(1, 1)= -0.004873

GIRO EN EL NUDO(2, 1)= -0.007764

GIRO EN EL NUDO(3, 1)= -0.002308

GIRO EN EL NUDO(4, 1)= 0.002308

GIRO EN EL NUDO(5, 1)= 0.007764

GIRO EN EL NUDO(6, 1)= 0.004873

GIRO EN EL NUDO(1, 2)= -0.010737

GIRO EN EL NUDO(2, 2)= -0.007313

GIRO EN EL NUDO(3, 2)= -0.002609

GIRO EN EL NUDO(4, 2)= 0.002609

GIRO EN EL NUDO(5, 2)= 0.007313

GIRO EN EL NUDO(6, 2)= 0.010737

REACCION P(1)= 15.857792

REACCION P(2)= 6.161764

REACCION P(3)= 5.756638

REACCION P(4)= 5.756638

REACCION P(5)= 6.161764

REACCION P(6)= 15.857792

REACCION T(1)= 2.270186

REACCION T(2)= 5.142059

REACCION T(3)= 5.406413

REACCION T(4)= 5.142059

REACCION T(5)= 2.270186

HUNDIMIENTO BAJO LAS COLUMNAS

H(1)=0.27105

H(2)=0.31094

H(3)=0.32094

$$MC(4) = 0.32984$$

$$MC(5) = 0.31094$$

$$MC(6) = 0.27605$$

FUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LAS TRABES

$$MT(1) = 0.29219$$

$$MT(2) = 0.32148$$

$$MT(3) = 0.33049$$

$$MT(4) = 0.32148$$

$$MT(5) = 0.29219$$

MOMENTOS EN LAS TRABES

$$\text{MOMENTO } M(1,1)(2,1) = 10.8626$$

$$\text{MOMENTO } M(2,1)(3,1) = -4.6903$$

$$\text{MOMENTO } M(3,1)(4,1) = -8.6494$$

$$\text{MOMENTO } M(4,1)(5,1) = -12.4811$$

$$\text{MOMENTO } M(5,1)(6,1) = -16.4036$$

$$\text{MOMENTO } M(2,1)(1,1) = 16.4036$$

$$\text{MOMENTO } M(3,1)(2,1) = 12.4811$$

$$\text{MOMENTO } M(4,1)(3,1) = 8.6494$$

$$\text{MOMENTO } M(5,1)(4,1) = 4.6903$$

$$\text{MOMENTO } M(6,1)(5,1) = -10.8626$$

$$\text{MOMENTO } M(1,2)(2,2) = 13.9727$$

$$\text{MOMENTO } M(2,2)(3,2) = 9.2684$$

$$\text{MOMENTO } M(3,2)(4,2) = 4.7329$$

$$\text{MOMENTO } M(4,2)(5,2) = 0.7418$$

$$\text{MOMENTO } M(5,2)(6,2) = -2.1044$$

$$\text{MOMENTO } M(2,2)(1,2) = 2.1044$$

$$\text{MOMENTO } M(3,2)(2,2) = -0.7418$$

MOMENTO $M(4, 2)(3, 2) = -4,7329$

MOMENTO $M(5, 2)(4, 2) = -9,2689$

MOMENTO $M(6, 2)(5, 2) = -13,9727$

MOMENTOS EN LAS COLUMNAS

MOMENTO $M(1, 1)(1, 2) = -10,8626$

MOMENTO $M(1, 2)(1, 1) = -13,9727$

MOMENTO $M(2, 1)(2, 2) = -12,1133$

MOMENTO $M(2, 2)(2, 1) = -11,8739$

MOMENTO $M(3, 1)(3, 2) = -3,8317$

MOMENTO $M(3, 2)(3, 1) = -3,0911$

MOMENTO $M(4, 1)(4, 2) = 3,8317$

MOMENTO $M(4, 2)(4, 1) = 3,0911$

MOMENTO $M(5, 1)(5, 2) = 12,1133$

MOMENTO $M(5, 2)(5, 1) = 11,8739$

MOMENTO $M(6, 1)(6, 2) = 10,8626$

MOMENTO $M(6, 2)(6, 1) = 13,9727$

$m_v = 0.034 \text{ m}^2/\text{ton}$

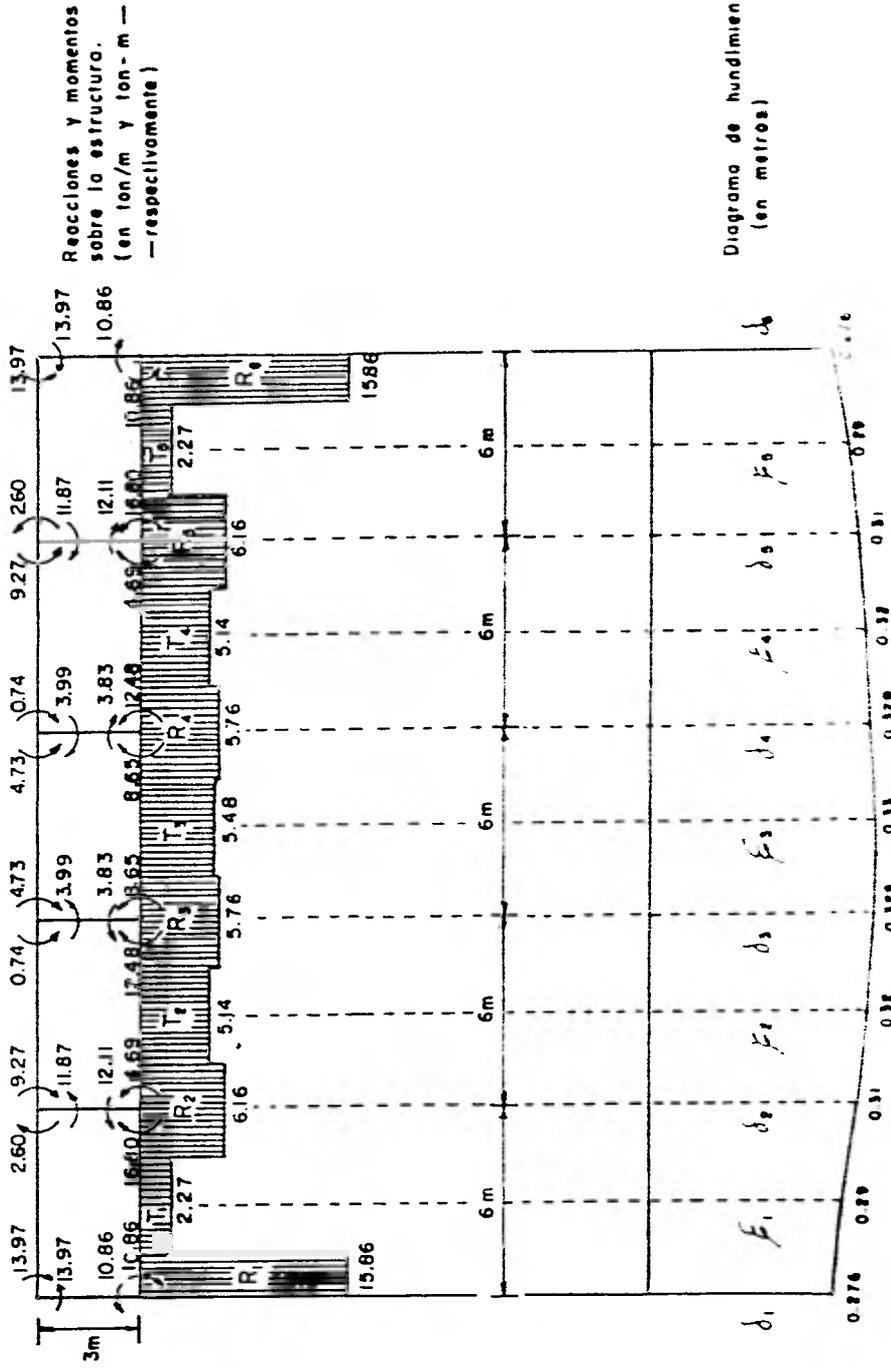


FIG 3.1' Representación gráfica de los resultados del ejemplo 1

EJEMPLO 2

Con el objeto de comparar los resultados obtenidos para un suelo de alta compresibilidad y un suelo de rigidez media se hará el análisis para una estructura con las mismas características que en el ejemplo anterior, exceptuando el módulo de variación volumétrica del suelo (m_v), que para el presente ejemplo es de $0.005 \text{ m}^2/\text{ton}$, el cual corresponde a un suelo medianamente rígido.

Se tendrán en cuenta las mismas consideraciones que en el ejemplo anterior, proporcionándose los datos en forma similar, como se muestra enseguida.

U. N. A. M.
INSTITUTO DE INGENIERIA
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA Tesis (genyrc 2)

CODIFICADO POR _____

FECHA _____

PAGINA _____

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	6	2	1																	
1	4.5																			
2	8.0																			
3	16.0		6.0																	
4	8.0																			
5	3.5		3.5		3.5		3.5		3.5		3.5		3.5		3.5		3.5		3.5	
6	2.5		2.5		2.5		2.5		2.5		2.5		2.5		2.5		2.5		2.5	
7	14172 E106																			
8	14172 E106																			
9	14172 E106																			
10	45000 E106																			
11	45000 E106																			
12	11250 E106																			
13	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
14	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005



IMPRESION DE DATOS

NUMERO DE EJES DE COLUMNAS 6
 NUMERO DE NIVELES 2
 NUMERO DE REACCIONES DEL TIEMPO 11
 NUMERO DE ESTRATOS 1
 ANCHO DE CEMENTO 0,00

ESPESOR DE CADA ESTRATO (EN M.)
 ESTRATO 1 0,00
 ALTURA DE ENTRENIDOS (EN M.)
 ENTRENIDO 1 3,00

LOS SIGUIENTES DATOS SE PROPORCIONAN DE 12000000 A 10000000

DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNAS
 1,00 2,00 3,00 4,00 5,00

CARGAS EN CADA TABLA EN (TON/M)
 NIVEL 1 3,50 3,50 3,50 3,50 3,50
 NIVEL 2 3,50 3,50 3,50 3,50 3,50

MODULO DE ELASTICIDAD DE TABLAS EN (KG/CM²)
 NIVEL 1 101021000 101021000 101021000 101021000 101021000
 NIVEL 2 101021000 101021000 101021000 101021000 101021000

MODULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS EN (KG/CM²)
 ENTRENIDO 1 101021000 101021000 101021000 101021000 101021000 101021000

MODULO DE ELASTICIDAD DE TRAVESANTES EN (KG/CM²)
 NIVEL 1 450001000 450001000 450001000 450001000 450001000
 NIVEL 2 450001000 450001000 450001000 450001000 450001000

MODULO DE ELASTICIDAD DE ENTRENIDOS EN (KG/CM²)
 ENTRENIDO 1 112000000 112000000 112000000 112000000 112000000 112000000

MODULO DE ELASTICIDAD DE ESTRATOS EN (KG/CM²)
 ESTRATO 1 500001000 500001000 500001000 500001000 500001000 500001000
 ENTRENIDO 1 500001000 500001000 500001000 500001000 500001000 500001000

RESULTADOS DE LA INTERACCION SUELO ESTRUCTURA

GIRO EN EL NUDO(1, 1)= -0.000695
GIRO EN EL NUDO(2, 1)= -0.001437
GIRO EN EL NUDO(3, 1)= -0.000105
GIRO EN EL NUDO(4, 1)= 0.000105
GIRO EN EL NUDO(5, 1)= 0.001437
GIRO EN EL NUDO(6, 1)= 0.000695
GIRO EN EL NUDO(1, 2)= -0.005384
GIRO EN EL NUDO(2, 2)= -0.001351
GIRO EN EL NUDO(3, 2)= -0.000225
GIRO EN EL NUDO(4, 2)= 0.000225
GIRO EN EL NUDO(5, 2)= 0.001351
GIRO EN EL NUDO(6, 2)= 0.005384
REACCION P(1)= 11.768911
REACCION P(2)= 7.151954
REACCION P(3)= 6.831035
REACCION P(4)= 6.831035
REACCION P(5)= 7.151954
REACCION P(6)= 11.768911
REACCION T(1)= 2.429761
REACCION T(2)= 5.069058
REACCION T(3)= 5.069058
REACCION T(4)= 5.069058
REACCION T(5)= 2.429761

MOVIMIENTOS EN LAS COLUMNAS

U(1)=0.02043
U(2)=0.03121
U(3)=0.01351

$$HC(4) = 0.03351$$

$$HC(5) = 0.03121$$

$$HC(6) = 0.02043$$

MOMENTOS EN LAS TRABES

$$HT(1) = 0.02541$$

$$HT(2) = 0.03184$$

$$HT(3) = 0.03250$$

$$HT(4) = 0.03184$$

$$HT(5) = 0.02541$$

MOMENTOS EN LAS TRABES

$$\text{MOMENTO } M(1,1)(2,1) = 3.5025$$

$$\text{MOMENTO } M(2,1)(3,1) = -7.3254$$

$$\text{MOMENTO } M(3,1)(4,1) = -6.8775$$

$$\text{MOMENTO } M(4,1)(5,1) = -7.1080$$

$$\text{MOMENTO } M(5,1)(6,1) = -9.5667$$

$$\text{MOMENTO } M(2,1)(1,1) = 9.5667$$

$$\text{MOMENTO } M(3,1)(2,1) = 7.1080$$

$$\text{MOMENTO } M(4,1)(3,1) = 6.8775$$

$$\text{MOMENTO } M(5,1)(4,1) = 7.3254$$

$$\text{MOMENTO } M(6,1)(5,1) = -3.5025$$

$$\text{MOMENTO } M(1,2)(2,2) = 0.0784$$

$$\text{MOMENTO } M(2,2)(3,2) = 0.1345$$

$$\text{MOMENTO } M(3,2)(4,2) = 7.2604$$

$$\text{MOMENTO } M(4,2)(5,2) = 0.9063$$

$$\text{MOMENTO } M(5,2)(6,2) = 4.6441$$

$$\text{MOMENTO } M(2,2)(1,2) = -0.1441$$

$$\text{MOMENTO } M(3,2)(2,2) = -0.9063$$

MOMENTO $M(4, 2)(3, 2) = -7.2604$

MOMENTO $M(5, 2)(4, 2) = -6.1395$

MOMENTO $M(6, 2)(5, 2) = -6.0789$

MOMENTOS EN LAS COLUMNAS

MOMENTO $M(1, 1)(1, 2) = -3.5925$

MOMENTO $M(1, 2)(1, 1) = -6.0789$

MOMENTO $M(2, 1)(2, 2) = -2.2408$

MOMENTO $M(2, 2)(2, 1) = -2.1454$

MOMENTO $M(3, 1)(3, 2) = -0.2305$

MOMENTO $M(3, 2)(3, 1) = -0.2946$

MOMENTO $M(4, 1)(4, 2) = 0.2305$

MOMENTO $M(4, 2)(4, 1) = 0.2946$

MOMENTO $M(5, 1)(5, 2) = 2.2408$

MOMENTO $M(5, 2)(5, 1) = 2.1454$

MOMENTO $M(6, 1)(6, 2) = 3.5925$

MOMENTO $M(6, 2)(6, 1) = 6.0789$

$$m_v = 0.005 \text{ m}^2/\text{ton}$$

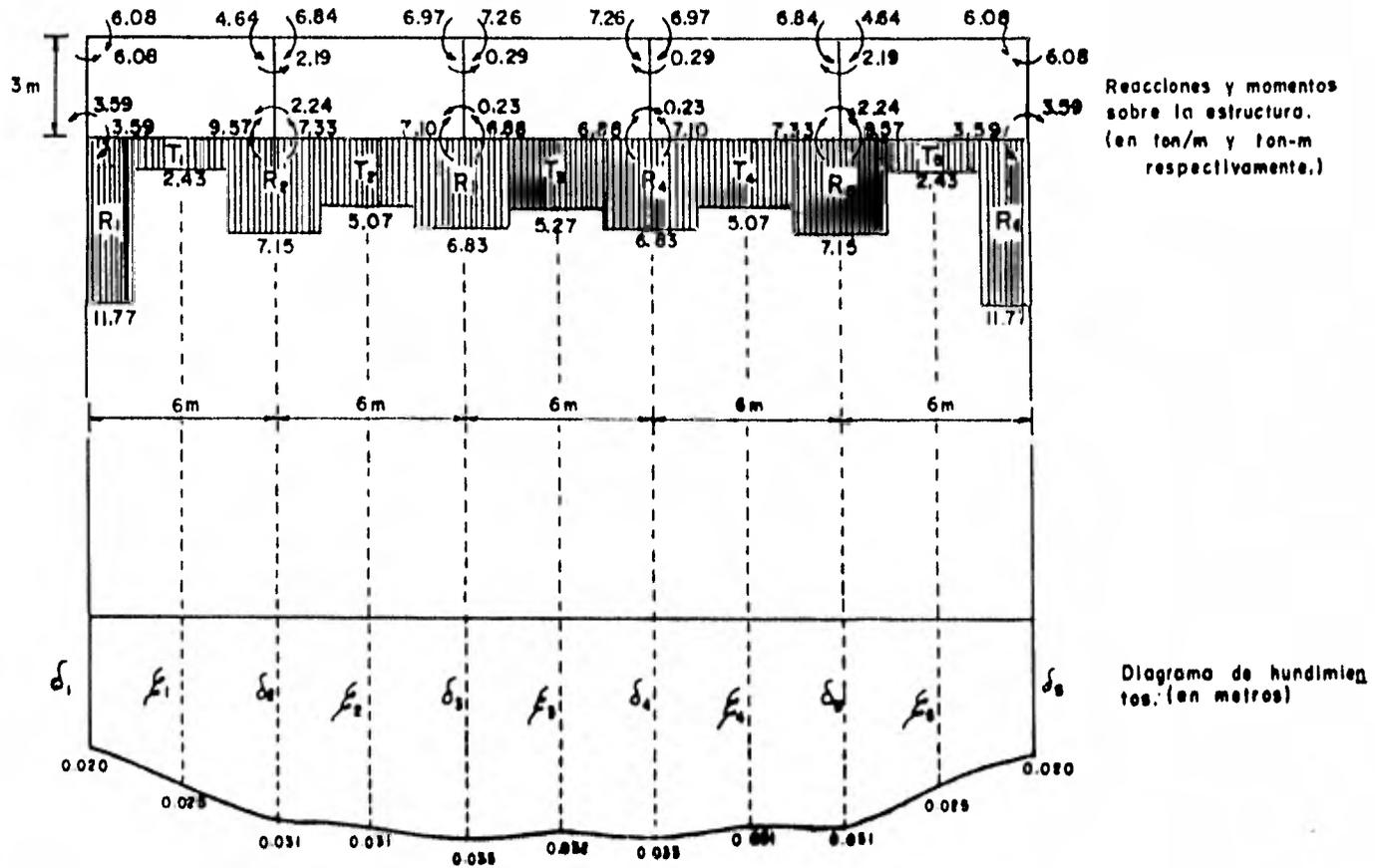


FIG. 5.2. Representación gráfica de los resultados del ejemplo 2

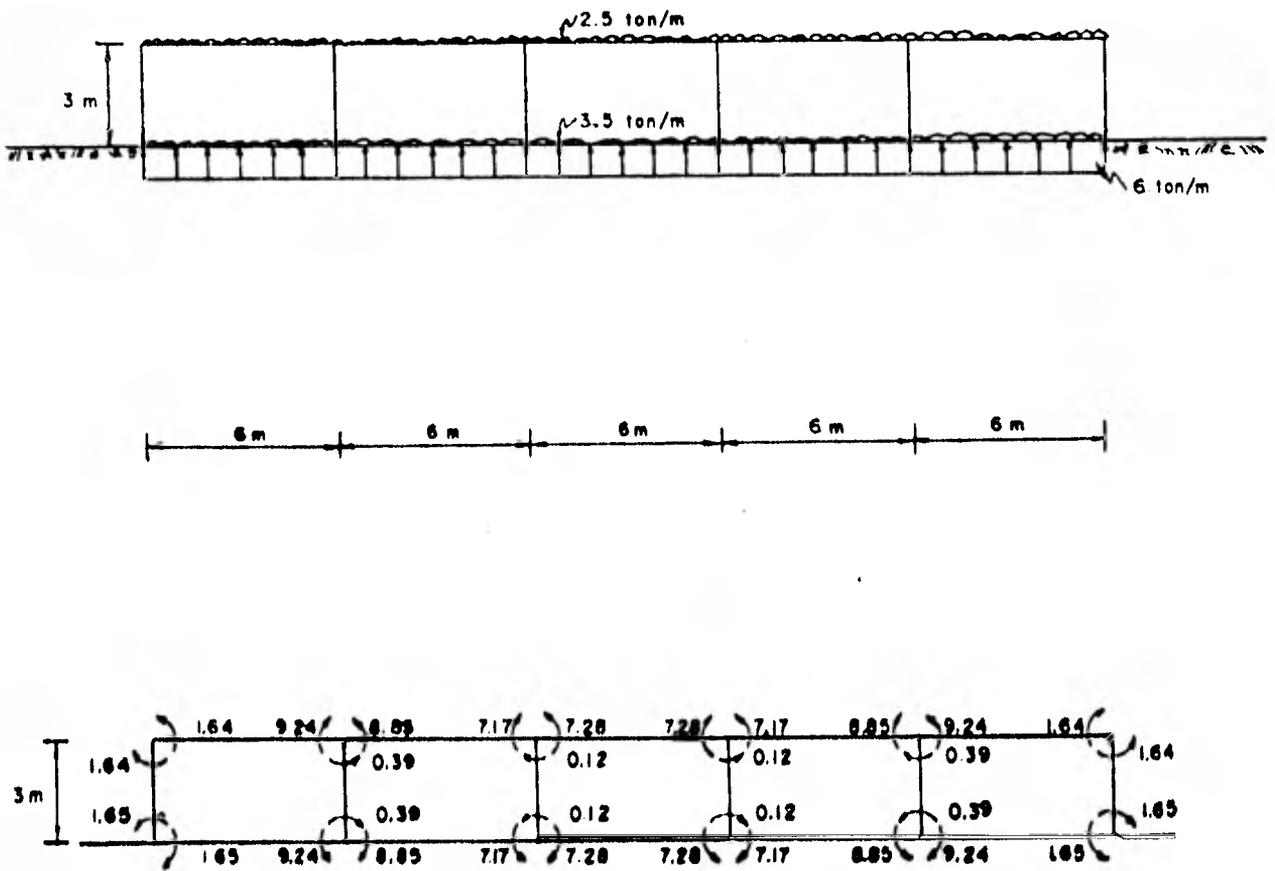
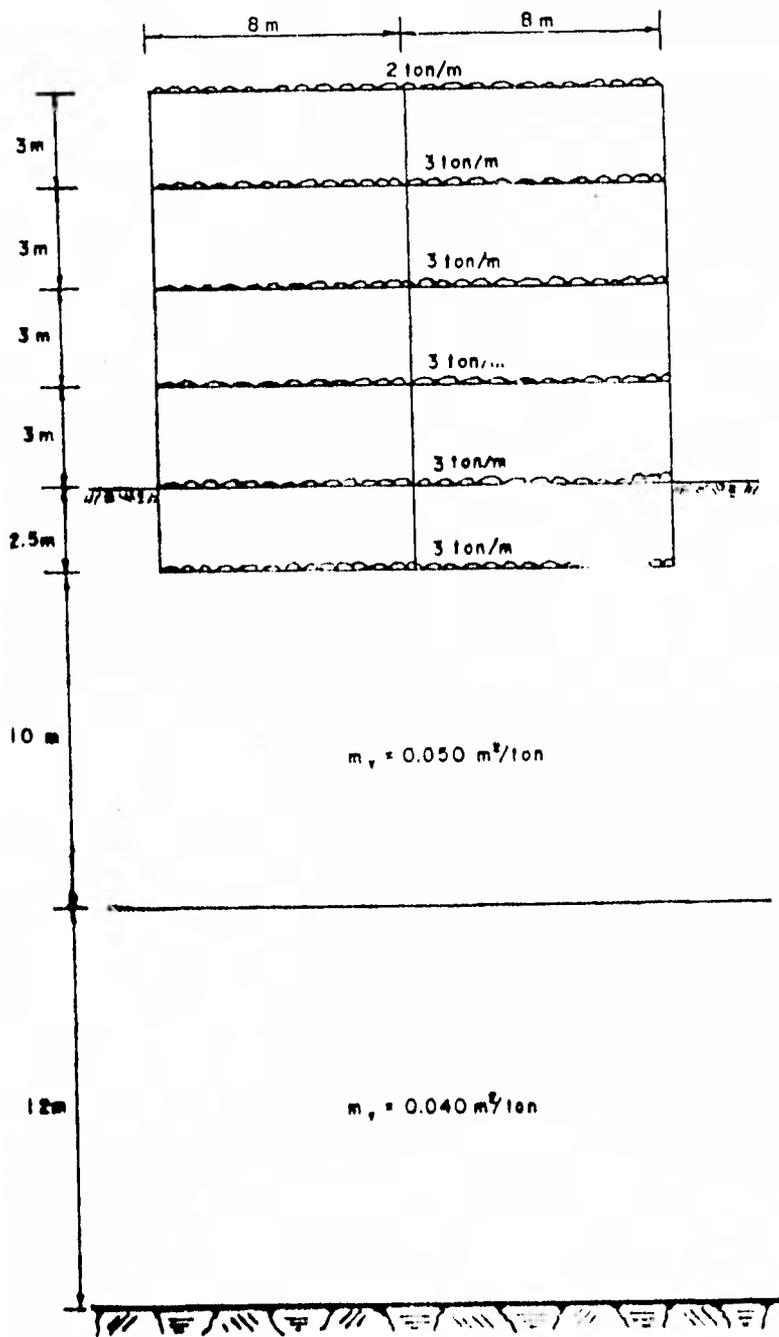


FIG. 3.5. a) Resultado del análisis de la estructura de los ejemplos 1 y 2 por el método de CROSS.

EJEMPLO 3

Se presenta una estructura formada por tres ejes de columnas y cinco entrepisos, cimentada a base de un cajón desplantado sobre suelo compresible a una profundidad de 2.5 m.

Se considera que el suelo sobre el que se va a desplantar está formado por dos estratos cuyos espesores son de 10 y 12 m; los módulos de variación volumétrica son de 0.050 y 0.040 m²/ton que corresponden a un suelo de alta y mediana compresibilidad, respectivamente. El ancho tributario de la contratrase es de 4 m. La geometría de la estructura y la magnitud de las cargas se presentan en la fig 5.3.

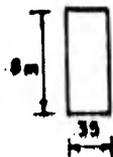


Ancho del cimiento = 4 m

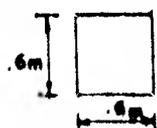
$E = 10,000 \sqrt{t^c}$
 $= 141,420 \text{ kg/cm}^2$



Sección transversal en contratrabes



Sección transversal en trabes



Sección transversal en columnas

FIG. 3.3. Ejemplo 3

U. N. A. M.
INSTITUTO DE INGENIERIA
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	FECHA	PAGINA	DE
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			
20																			
21																			
22																			
23																			
24																			
25																			
26																			
27																			
28																			
29																			
30																			
31																			
32																			
33																			
34																			
35																			
36																			
37																			
38																			
39																			
40																			
41																			
42																			
43																			
44																			
45																			
46																			
47																			
48																			
49																			
50																			
51																			
52																			
53																			
54																			
55																			
56																			
57																			
58																			
59																			
60																			
61																			
62																			
63																			
64																			
65																			
66																			
67																			
68																			
69																			
70																			
71																			
72																			
73																			
74																			
75																			
76																			
77																			
78																			
79																			
80																			
81																			
82																			
83																			
84																			
85																			
86																			
87																			
88																			
89																			
90																			
91																			
92																			
93																			
94																			
95																			
96																			
97																			
98																			
99																			
100																			

IMPRESION DE DATOS

NUMERO DE EJES DE COLUMNAS 3
 NUMERO DE NIVELES 6
 NUMERO DE REACCIONES DEL TERRENO 5
 NUMERO DE ESTRATOS 2
 ANCHO DE CIMIENTO 4.00

ESPESOR DE CADA ESTRATO (EN M)

ESTRATO 1 10.00
 ESTRATO 2 12.00

ALTURA DE ENTREPISOS (EN M)

ENTREPISO 1 2.50
 ENTREPISO 2 3.00
 ENTREPISO 3 3.00
 ENTREPISO 4 3.00
 ENTREPISO 5 3.00

LOS SIGUIENTES DATOS SE PROPORCIONAN DE IZQUIERDA A DERECHA

DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNAS

R.DD R.OO

CARGAS EN CADA TRABE EN (TON/M)

NIVEL 1	3.00	3.00
NIVEL 2	3.00	3.00
NIVEL 3	3.00	3.00
NIVEL 4	3.00	3.00
NIVEL 5	3.00	3.00
NIVEL 6	3.00	3.00

MODULO DE ELASTICIDAD DE TRABES EN (KG/CM²)

NIVEL 1	.14142E+06	.14142E+06
NIVEL 2	.14142E+06	.14142E+06
NIVEL 3	.14142E+06	.14142E+06
NIVEL 4	.14142E+06	.14142E+06
NIVEL 5	.14142E+06	.14142E+06
NIVEL 6	.14142E+06	.14142E+06

MODULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS EN (KG/CM²)

ENTREPISO 1	.14142E+06	.14142E+06	.14142E+06
ENTREPISO 2	.14142E+06	.14142E+06	.14142E+06

ENTREPISO 3 .14142E+06 .14142E+06 .14142E+06
 ENTREPISO 4 .14142E+06 .14142E+06 .14142E+06
 ENTREPISO 5 .14142E+06 .14142E+06 .14142E+06

MOMENTO DE INERCIA DE VIGAS EN (CM4)

NIVEL 1 .1675E+08 .1675E+08
 NIVEL 2 .14933E+07 .14933E+07
 NIVEL 3 .14933E+07 .14933E+07
 NIVEL 4 .14933E+07 .14933E+07
 NIVEL 5 .14933E+07 .14933E+07
 NIVEL 6 .14933E+07 .14933E+07

MOMENTO DE INERCIA DE COLUMNAS EN (CM4)

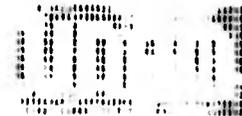
ENTREPISO 1 .10000E+07 .10000E+07 .10000E+07
 ENTREPISO 2 .10000E+07 .10000E+07 .10000E+07
 ENTREPISO 3 .10000E+07 .10000E+07 .10000E+07
 ENTREPISO 4 .10000E+07 .10000E+07 .10000E+07
 ENTREPISO 5 .10000E+07 .10000E+07 .10000E+07

MY EN CADA ESTRATO DE SUELO EN (M2/TON)

ESTRATO 1 .50000E-01 .50000E-01 .50000E-01 .50000E-01 .50000E-01
 ESTRATO 2 .40000E-01 .40000E-01 .40000E-01 .40000E-01 .40000E-01

RESULTADOS DE LA INTERACCION SUELO ESTRUCTURA

GIRO EN EL NUDO 1, 1)R =0,000137
 GIRO EN EL NUDO 2, 1)R =0,000000
 GIRO EN EL NUDO 3, 1)R =0,000137
 GIRO EN EL NUDO 1, 2)R =0,000067
 GIRO EN EL NUDO 2, 2)R =0,000000
 GIRO EN EL NUDO 3, 2)R =0,000067
 GIRO EN EL NUDO 1, 3)R =0,000033
 GIRO EN EL NUDO 2, 3)R =0,000000
 GIRO EN EL NUDO 3, 3)R =0,000033
 GIRO EN EL NUDO 1, 4)R =0,000017
 GIRO EN EL NUDO 2, 4)R =0,000000
 GIRO EN EL NUDO 3, 4)R =0,000017
 GIRO EN EL NUDO 1, 5)R =0,000009
 GIRO EN EL NUDO 2, 5)R =0,000000
 GIRO EN EL NUDO 3, 5)R =0,000009



GIRO EN EL NUDO (2, 6) = 0.000000
GIRO EN EL NUDO (3, 6) = 0.000957
REACCION RC (1) = 42.263526
REACCION RC (2) = 15.511490
REACCION RC (3) = 42.263526
REACCION TC (1) = 5.112492
REACCION TC (2) = 5.112492

HUNDIMIENTO BAJO LAS COLUMNAS

HC (1) = 0.06966
HC (2) = 0.07323
HC (3) = 0.06966

HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LAS TIJAS

HT (1) = 0.07122
HT (2) = 0.07122

MOMENTOS EN LAS TIJAS

MOMENTO M (1, 1) (2, 1) = 5.0671
MOMENTO M (2, 1) (3, 1) = -11.7542
MOMENTO M (2, 1) (1, 1) = +11.7542
MOMENTO M (3, 1) (2, 1) = -5.0671
MOMENTO M (1, 2) (2, 2) = -10.6476
MOMENTO M (2, 2) (3, 2) = -10.7544
MOMENTO M (2, 2) (1, 2) = +10.7544
MOMENTO M (3, 2) (2, 2) = -10.6476
MOMENTO M (1, 3) (2, 3) = -10.7544
MOMENTO M (2, 3) (3, 3) = -10.6442
MOMENTO M (2, 3) (1, 3) = +10.6442

MOMENTO $M(3, 3)(2, 3) = -10.7360$
 MOMENTO $M(1, 4)(2, 4) = 10.5946$
 MOMENTO $M(2, 4)(3, 4) = 10.6650$
 MOMENTO $M(2, 4)(1, 4) = -10.6650$
 MOMENTO $M(3, 4)(2, 4) = -10.5946$
 MOMENTO $M(1, 5)(2, 5) = 20.0187$
 MOMENTO $M(2, 5)(3, 5) = 10.4529$
 MOMENTO $M(2, 5)(1, 5) = -10.4529$
 MOMENTO $M(3, 5)(2, 5) = -20.0187$
 MOMENTO $M(1, 6)(2, 6) = 12.6905$
 MOMENTO $M(2, 6)(3, 6) = 6.1170$
 MOMENTO $M(2, 6)(1, 6) = -6.1170$
 MOMENTO $M(3, 6)(2, 6) = -12.6905$

MOMENTOS EN LAS COLUMNAS

MOMENTO $M(1, 1)(1, 2) = -5.8671$
 MOMENTO $M(1, 2)(1, 3) = -10.2170$
 MOMENTO $M(1, 3)(1, 4) = -9.7972$
 MOMENTO $M(1, 4)(1, 5) = -9.1210$
 MOMENTO $M(1, 5)(1, 6) = -10.7667$
 MOMENTO $M(1, 2)(1, 1) = -4.2306$
 MOMENTO $M(1, 3)(1, 2) = -4.9384$
 MOMENTO $M(1, 4)(1, 3) = -0.4336$
 MOMENTO $M(1, 5)(1, 4) = -4.2520$
 MOMENTO $M(1, 6)(1, 5) = -12.6905$
 MOMENTO $M(2, 1)(2, 2) = 0.0000$
 MOMENTO $M(2, 2)(2, 3) = 0.0000$
 MOMENTO $M(2, 3)(2, 4) = 0.0000$
 MOMENTO $M(2, 4)(2, 5) = 0.0000$
 MOMENTO $M(2, 5)(2, 6) = 0.0000$

MOMENTO M(2, 2)(2, 1)=	0.0000
MOMENTO M(2, 3)(2, 2)=	0.0000
MOMENTO M(2, 4)(2, 3)=	0.0000
MOMENTO M(2, 5)(2, 4)=	0.0000
MOMENTO M(2, 6)(2, 5)=	0.0000
MOMENTO M(3, 1)(3, 2)=	5.8671
MOMENTO M(3, 2)(3, 3)=	10.2170
MOMENTO M(3, 3)(3, 4)=	9.7472
MOMENTO M(3, 4)(3, 5)=	9.6610
MOMENTO M(3, 5)(3, 6)=	10.7667
MOMENTO M(3, 2)(3, 1)=	4.2506
MOMENTO M(3, 3)(3, 2)=	9.9384
MOMENTO M(3, 4)(3, 3)=	9.9336
MOMENTO M(3, 5)(3, 4)=	9.2520
MOMENTO M(3, 6)(3, 5)=	12.6405

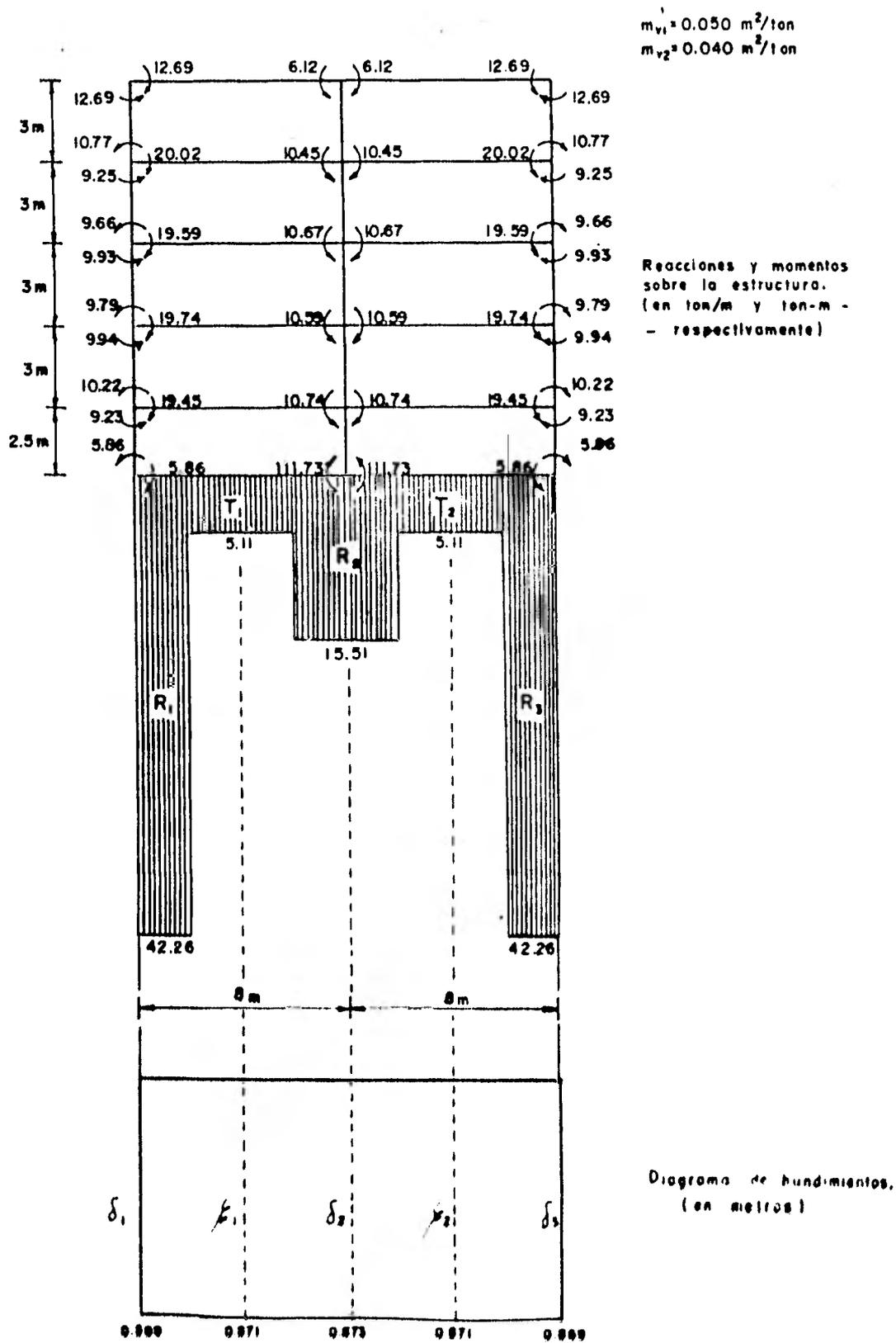


FIG. 5.3' Representación gráfica de los resultados del Ejemplo 3.

EJEMPLO 4

Al igual que en el ejemplo 2, se compararán los resultados del ejemplo anterior desplantando dicha estructura sobre suelo medianamente rígido, resultando ser los módulos de variación volumétrica de 0.005 y 0.003 m²/ton.

Con el fin de comparar los resultados de los ejemplos anteriores, se analizaron dichas estructuras por el método de Cross, considerando la reacción del suelo uniformemente distribuida. El resultado de dicho análisis se presenta en la fig 5.5.

IMPRESION DE DATOS

NUMERO DE EJES DE COLUMNAS 3
 NUMERO DE NIVELES 6
 NUMERO DE REACCIONES DEL TERRENO 5
 NUMERO DE ESTRATOS 2
 ANCHO DE CEMENTO 4.00

ESPESOR DE CADA ESTRATO (EN M)

ESTRATO 1 10.00
 ESTRATO 2 12.00

ALTURA DE ENTREPISOS (EN M)

ENTREPISO 1 2.50
 ENTREPISO 2 3.00
 ENTREPISO 3 3.00
 ENTREPISO 4 3.00
 ENTREPISO 5 3.00

LOS SIGUIENTES DATOS SE PROPORCIONAN DE IZQUIERDA A DERECHA

DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNAS

8.00 8.00

CARGAS EN CADA TRAPE EN (TON/M)

NIVEL 1	3.00	3.00
NIVEL 2	3.00	3.00
NIVEL 3	3.00	3.00
NIVEL 4	3.00	3.00
NIVEL 5	3.00	3.00
NIVEL 6	2.00	2.00

MODULO DE ELASTICIDAD DE TRABES EN (KG/CM²)

NIVEL 1	.141421+06	.141421+06
NIVEL 2	.141421+06	.141421+06
NIVEL 3	.141421+06	.141421+06
NIVEL 4	.141421+06	.141421+06
NIVEL 5	.141421+06	.141421+06
NIVEL 6	.141421+06	.141421+06

MODULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS EN (KG/CM²)

ESTRATO 1	.141421+06	.141421+06	.141421+06
ESTRATO 2	.141421+06	.141421+06	.141421+06

ENIPRISI 3	.10102E+06	.10102E+06	.10102E+06
ENIPRISU 0	.10102E+06	.10102E+06	.10102E+06
ENIPRISU 5	.10102E+06	.10102E+06	.10102E+06

MOMENTO DI INERZIA LE TRAVI IN (CM⁴)

NIVEL 1	.16875E+08	.16875E+08
NIVEL 2	.14933E+07	.14933E+07
NIVEL 3	.14933E+07	.14933E+07
NIVEL 4	.14933E+07	.14933E+07
NIVEL 5	.14933E+07	.14933E+07
NIVEL 6	.14933E+07	.14933E+07

MOMENTO DI INERZIA LE CILINDRIS IN (CM⁴)

ENIPRISU 1	.10E+0E+07	.10E+0E+07	.10E+0E+07
ENIPRISU 2	.10E+0E+07	.10E+0E+07	.10E+0E+07
ENIPRISU 3	.10E+0E+07	.10E+0E+07	.10E+0E+07
ENIPRISU 4	.10E+0E+07	.10E+0E+07	.10E+0E+07
ENIPRISU 5	.10E+0E+07	.10E+0E+07	.10E+0E+07

PIU' IN CALA ESTIMATO EF SOTTO EF (MPZ/TON)

ESTIMATO 1	.50000E+02	.50000E+02	.50000E+02	.50000E+02	.50000E+02
ESTIMATO 2	.30000E+02	.30000E+02	.30000E+02	.30000E+02	.30000E+02

RESULTATI DE LA INTERACCION DELLE STRUTTURE

G1M0 (1, 1) EF NOD0 (1, 1) = 0,000033
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (2, 1) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (3, 1) = 0,000033
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (1, 2) = 0,000089
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (2, 2) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (3, 2) = 0,000089
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (1, 3) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (2, 3) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (3, 3) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (1, 4) = -0,000039
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (2, 4) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (3, 4) = 0,000039
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (1, 5) = 0,000033
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (2, 5) = 0,000000
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (3, 5) = 0,000033
 G1M0 (1, 1) EF NOD0 (1, 6) = -0,000039



GIRO EN EL NUDO(2, 6)= 0.000000

GIRO EN EL NUDO(3, 6)= 0.000016

REACCION R(1)= 41.141760

REACCION R(2)= 16.610204

REACCION R(3)= 41.141760

REACCION T(1)= 5.299018

REACCION T(2)= 5.299018

HUNDIMIENTO BAJO LAS COLUMNAS

HC(1)=0.08206

HC(2)=0.08527

HC(3)=0.08206

HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LAS TRABES

HT(1)=0.08338

HT(2)=0.08338

MOMENTOS EN LAS TRABES

MOMENTO M(1,1)(2,1)= 4.6127

MOMENTO M(2,1)(3,1)= -108.1338

MOMENTO M(2,1)(1,1)= 108.1338

MOMENTO M(3,1)(2,1)= -4.6127

MOMENTO M(1, 2)(2, 2)= 18.7236

MOMENTO M(2, 2)(3, 2)= 11.0588

MOMENTO M(2, 2)(1, 2)= -11.0588

MOMENTO M(3, 2)(2, 2)= -18.7236

MOMENTO M(1, 3)(2, 3)= 10.1475

MOMENTO M(2, 3)(3, 3)= 11.2470

MOMENTO M(2, 3)(1, 3)= -11.2470

MOMENTO M(3, 3)(2, 3)= -10.1473
 MOMENTO M(1, 4)(2, 4)= 11.0834
 MOMENTO M(2, 4)(3, 4)= 11.3289
 MOMENTO M(2, 4)(1, 4)= -11.3289
 MOMENTO M(3, 4)(2, 4)= -11.0834
 MOMENTO M(1, 5)(2, 5)= 10.3854
 MOMENTO M(2, 5)(3, 5)= 11.1274
 MOMENTO M(2, 5)(1, 5)= -11.1274
 MOMENTO M(3, 5)(2, 5)= -10.3854
 MOMENTO M(1, 6)(2, 6)= 12.1910
 MOMENTO M(2, 6)(3, 6)= 6.7252
 MOMENTO M(2, 6)(1, 6)= -6.7252
 MOMENTO M(3, 6)(2, 6)= -12.1910

MOMENTOS EN LAS COLUMNAS

MOMENTO M(1, 1)(1, 2)= -4.1127
 MOMENTO M(1, 2)(1, 3)= -10.1076
 MOMENTO M(1, 3)(1, 4)= -9.4484
 MOMENTO M(1, 4)(1, 5)= -9.3764
 MOMENTO M(1, 5)(1, 6)= -10.3962
 MOMENTO M(1, 2)(1, 1)= 4.1127
 MOMENTO M(1, 3)(1, 2)= 10.1076
 MOMENTO M(1, 4)(1, 3)= 9.4484
 MOMENTO M(1, 5)(1, 4)= 9.3764
 MOMENTO M(1, 6)(1, 5)= 10.3962
 MOMENTO M(2, 1)(2, 2)= 0.0000
 MOMENTO M(2, 2)(2, 3)= 0.0000
 MOMENTO M(2, 3)(2, 4)= 0.0000
 MOMENTO M(2, 4)(2, 5)= 0.0000
 MOMENTO M(2, 5)(2, 6)= 0.0000

MOMENTO M(2, 2)(2, 1)=	0.0000
MOMENTO M(2, 3)(2, 2)=	0.0000
MOMENTO M(2, 4)(2, 3)=	0.0000
MOMENTO M(2, 5)(2, 4)=	0.0000
MOMENTO M(2, 6)(2, 5)=	0.0000
MOMENTO M(3, 1)(3, 2)=	4.6127
MOMENTO M(3, 2)(3, 3)=	10.1076
MOMENTO M(3, 3)(3, 4)=	9.0484
MOMENTO M(3, 4)(3, 5)=	9.3764
MOMENTO M(3, 5)(3, 6)=	10.3462
MOMENTO M(3, 2)(3, 1)=	4.6160
MOMENTO M(3, 3)(3, 2)=	9.7484
MOMENTO M(3, 4)(3, 3)=	9.1065
MOMENTO M(3, 5)(3, 4)=	8.9892
MOMENTO M(3, 6)(3, 5)=	12.1910

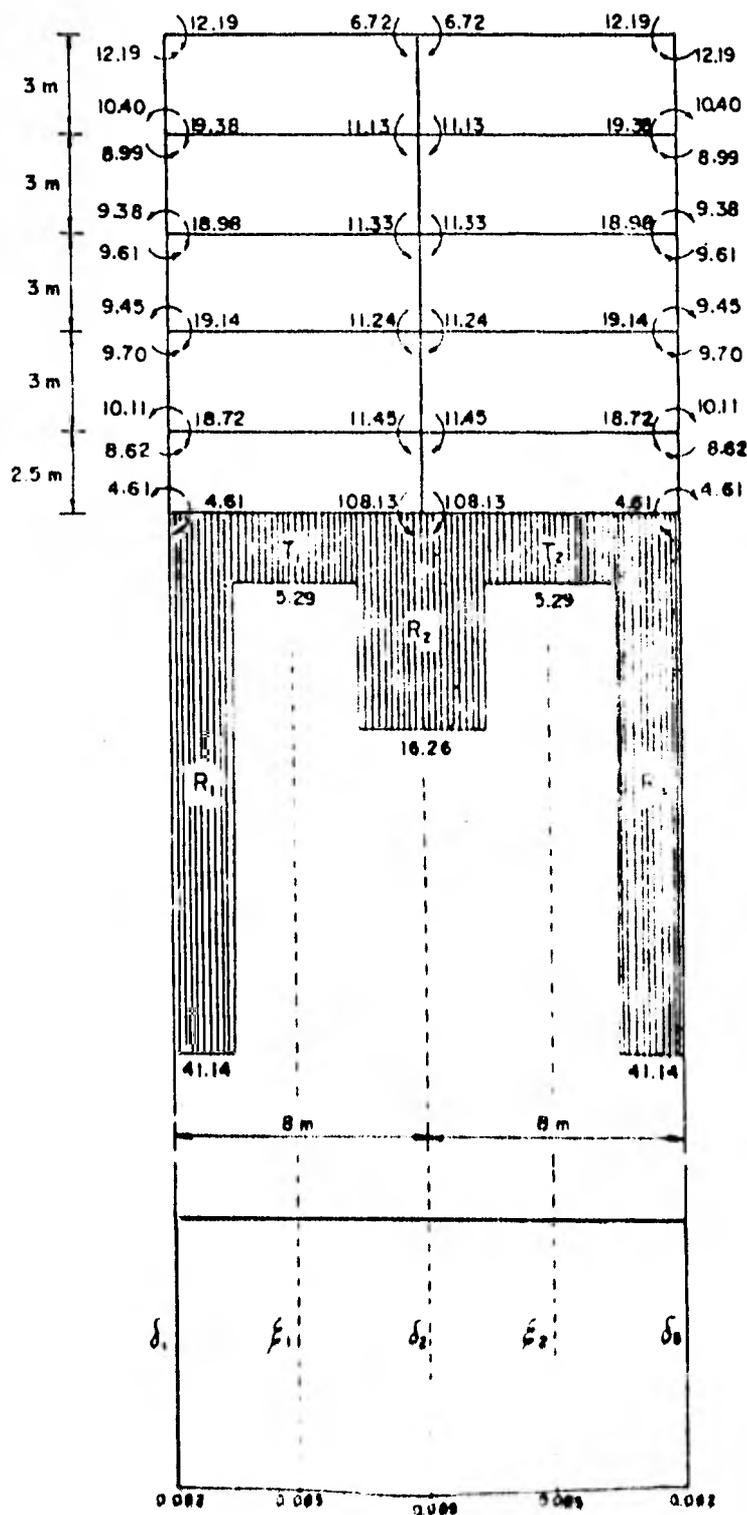
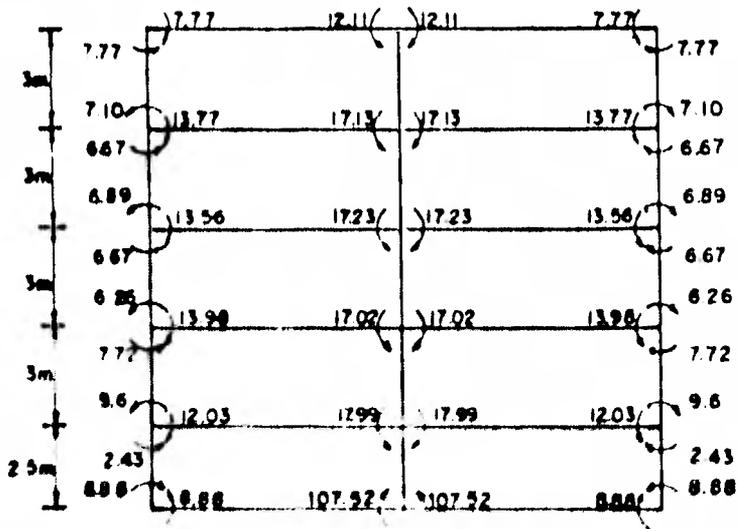
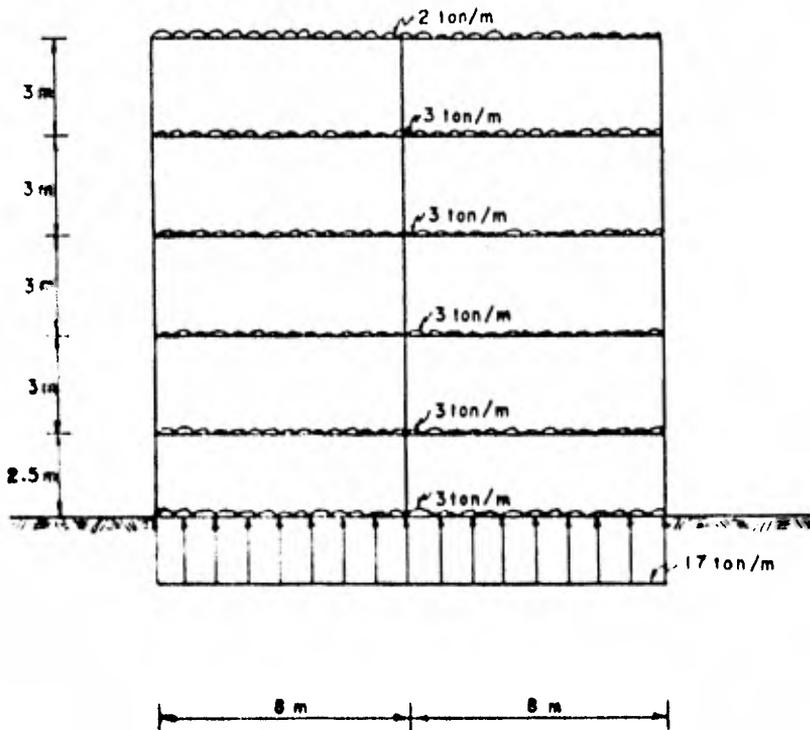


FIG. 5.4 Representación gráfica de los resultados del ejemplo 4



(b) Resultado del análisis de la estructura de los ejemplos 3 y 4 por el método de CROSS

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Se presentan a continuación las conclusiones que se desprenden de lo tratado en los capítulos anteriores.

- 1.- El método de interacción suelo- estructura que se trata en esta tesis, el cual como se recordará, consiste básicamente en la incorporación del cálculo de hundimientos del suelo al análisis estructural, es un procedimiento que no requiere iteraciones, ya que su solución se obtiene con base en un solo planteo, lo cual constituye una ventaja sobre los métodos iterativos tradicionales.
- 2.- El análisis de este tipo de problemas se facilita mediante el uso de una computadora, ya que una estructura se puede analizar bajo diferentes condiciones de carga y geometría, a fin de encontrar la mejor solución.

3.- De la comparación de los resultados de los ejemplos presentados se observa que:

- a.- Entre los ejemplos 1 y 2 hay diferencias considerables en la magnitud de los momentos, no así en su sentido. En el ejemplo 1 (estructura larga, suelo compresible) la distribución de la reacción del terreno en el centro de la estructura tiende a ser prácticamente uniforme, mientras que en los extremos se concentra. En el ejemplo 2 (estructura larga, suelo medianamente rígido), la reacción se concentra bajo las columnas, siendo la distribución de la reacción al centro de las contratrajes menor que bajo las columnas, pero de magnitud considerable. En cuanto a los hundimientos se tiene que el hundimiento total en el ejemplo 1 es de 33 cm aproximadamente, mientras que el hundimiento diferencial máximo resulta ser de 6 cm . En el ejemplo 2 éstos resultan ser de 3.3 y 1.3 cm , respectivamente. Es posible que la diferencia entre los resultados se deba a que en la estructura del ejemplo 1 se tiene un hundimiento diferencial grande con respecto al del ejemplo 2.
- Por otra parte, si se comparan los ejemplos anteriores con la estructura analizada considerando la reacción del terreno como una carga uniformemente distribuida, se tiene que hay una gran diferencia tanto en la magnitud como en el sentido de los momentos.

b.- Entre los ejemplos 3 (estructura alta, suelo compresible) y 4 (estructura alta, suelo medianamente rígido) el sentido de los momentos es idéntico en ambos casos y la magnitud de éstos es sumamente parecida, resultando también muy parecida su distribución de reacciones. En el ejemplo 3 el hundimiento total es de 87.3 cm y el hundimiento diferencial máximo es de 4 mm. En el ejemplo 4 el hundimiento total es de 8.5 cm y el hundimiento diferencial máximo es de 3 mm. Probablemente la similitud de los resultados se deba a que los hundimientos diferenciales son muy pequeños.

Comparando los ejemplos anteriores con la estructura analizada considerando la reacción del terreno como carga uniformemente distribuida, se tiene que el sentido de los momentos coincide con los anteriores, pero su magnitud difiere considerablemente en los extremos de la estructura, no así al centro de la misma.

De lo anterior se puede pensar que tanto la distribución de la reacción como los momentos dependen , en gran medida, de la rigidez de la estructura, ya que éste influirá en que se presenten hundimientos diferenciales grandes o pequeños.

4.- Entre los inconvenientes que presenta este método está el de la restricción de su aplicación a estructuras reticulares simétricas tanto en cargas como en geometría; asimismo, no se consideran fuerzas laterales, por lo tanto, no se consideran

desplazamientos horizontales. Además , la solución dada es válida exclusivamente para el plano.

De lo anterior se desprende la necesidad de tomar en cuenta los efectos de la interacción suelo - estructura, ya que se nota la influencia de ésta en las reacciones, hundimientos y elementos mecánicos (principalmente momento flexionante), reflejándose esto en los resultados obtenidos por el método tradicional (método de Cross), que difieren en gran medida de los obtenidos con el método tratado en este trabajo.

Esta diferencia en los resultados se acentúa más en estructuras largas, diferencia que en la práctica se disminuye por medio de juntas constructivas. Aparentemente, en estructuras altas se observa que la interacción suelo - estructura no influye sustancialmente en los resultados, es posible que esto suceda debido a la rigidez y conformación de la estructura.

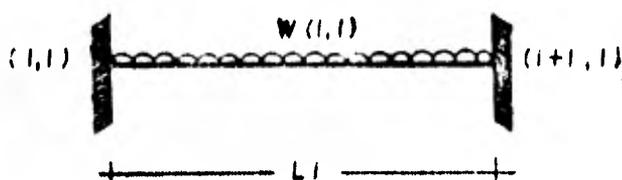
A P E N D I C E "A"

A P E N D I C E "A"

OBTENCION DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA LAS TRABES

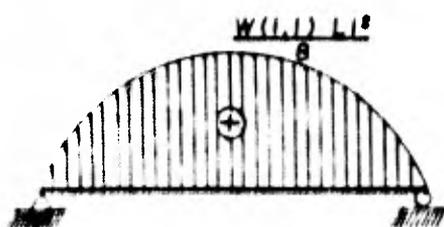
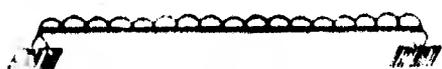
Obteniendo los momentos de empotramiento de cada una de estas vigas:

Solución de la viga 1



Utilizando las ecs. 2.3.5' y 2.3.6' tenemos que:

$$(M_o)_{(i, 1)} = (M_o)_{(i+1, 1)} = \frac{2}{3} \frac{w(l, l) L_i^2}{8} \frac{L_i^2}{L_i} \frac{L_i}{2}$$



que es el momento estático del -
área del diagrama de momento ---

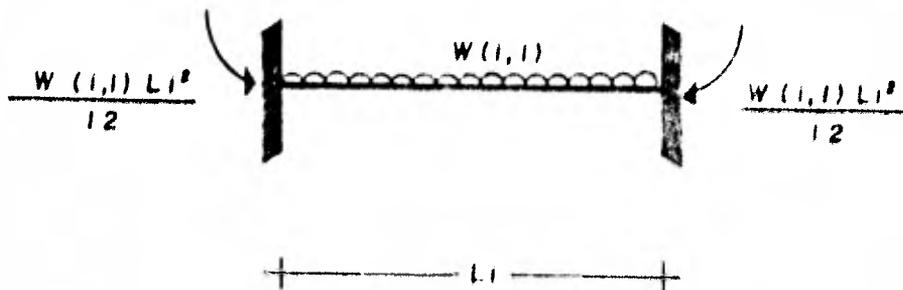
isostático

$$\begin{aligned} (M_0)_{(i,1)} &= (M_0)_{(i+1,1)} = \\ &= \frac{w(i,1) L_i^4}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^e_{(i,1)(i+1,1)} &= \frac{2}{L_i^2} \left[\frac{w(i,1) L_i^4}{24} - 2 \left(\frac{w(i,1) L_i^4}{24} \right) \right] = \\ &= - \frac{w(i,1) L_i^2}{12} \end{aligned}$$

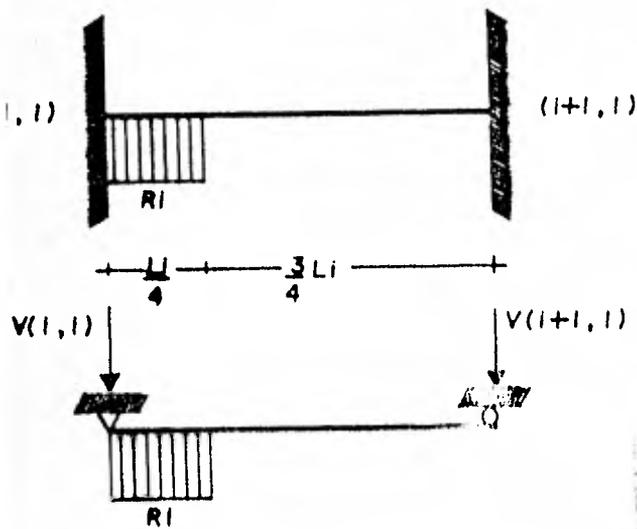
$$\begin{aligned} M^e_{(i+1,1)(i,1)} &= \frac{2}{L_i^2} \left[2 \left(\frac{w(i,1) L_i^4}{24} \right) - \frac{w(i,1) L_i^4}{24} \right] = \\ &= \frac{w(i,1) L_i^2}{12} \end{aligned}$$

Entonces:



Solución de la viga 2

Calculando las reacciones de la viga isostática se tiene:



$$\Sigma M_{(i, 1)} = 0$$

$$-R_i \frac{L_i}{4} \times \frac{L_i}{8} + L_i V_{(i+1, 1)} = 0$$

$$V_{(i+1, 1)} = \frac{R_i L_i}{32}$$

Haciendo $\Sigma F_y = 0$

$$-V_{(i, 1)} + R_i \frac{L_i}{4} - \frac{R_i L_i}{32} = 0$$

$$V_{(i, 1)} = \frac{7}{32} R_i L_i$$

Obtengamos las ecuaciones de momento flexionante de la viga isostática:

$$0 \leq x \leq \frac{L_i}{4}$$

$$M_x = -\frac{7}{32} R_i L_i x + R_i \frac{x^2}{2} \quad \text{que es la ecuación de una parábola con valores:}$$

$$M_x = 0 = 0$$

$$M_x = \frac{L_i}{4} = -\frac{3}{128} R_i L_i^2$$

$$\frac{L_i}{4} \leq x \leq L_i$$

$$M_x = \frac{R_i L_i}{32} x - \frac{R_i L_i^2}{32} \quad \text{que es la ecuación de una recta con valores:}$$

$$M_x = \frac{L_i}{4} = \frac{3}{128} R_i L_i^2$$

$$M_x = L_i = 0$$

Obtengamos el área del diagrama de momentos en el intervalo -
 $0 \leq x \leq \frac{L_i}{4}$

$$R_x \left\{ (x, y) / 0 \leq x \leq \frac{L_i}{4} ; 0 \leq y \leq -\frac{7}{32} R_i L_i x + R_i \frac{x^2}{2} \right\}$$

$$A_p = \int_0^{\frac{L_i}{4}} \left[\begin{array}{c} -\frac{7}{32} R_i L_i x + R_i \frac{x^2}{2} \\ dy dx \end{array} \right]_0^{\frac{L_i}{4}} = \int_0^{\frac{L_i}{4}} \left(-\frac{7}{32} R_i L_i x + R_i \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{7}{64} R_i L_i x^2 + R_i \frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{L_i}{4}} = -\frac{13}{3072} R_i L_i^3$$

$$M_y = \int_0^{\frac{L_i}{4}} \left[\begin{array}{c} -\frac{7}{32} R_i L_i x + R_i \frac{x^2}{2} \\ x dy dx \end{array} \right]_0^{\frac{L_i}{4}} = \int_0^{\frac{L_i}{4}} \left[-\frac{7}{32} R_i L_i x^2 + R_i \frac{x^3}{2} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{7}{96} R_i L_i x^3 + R_i \frac{x^4}{8} \right]_0^{\frac{L_i}{4}} = -\frac{4}{6144} R_i L_i^4$$

El centroide de la parábola con respecto al nudo $(i, 1)$ será:

$$\bar{x}_p = \frac{-\frac{4}{6144} R_i L_i^4}{-\frac{13}{3072} R_i L_i^3} = \frac{2}{13} L_i$$

El momento estático de la parábola con respecto al nudo $(i, 1)$ será:

$$S_y = \bar{x}_p A_p = \frac{26}{3072} R_i L_i^4$$

Para el intervalo $\frac{L_i}{4} \leq x \leq L_i$

$$A_T = \frac{3}{4} L_i x - \frac{3}{128} R_i L_i^2 x \frac{1}{2} = - \frac{9}{1024} R_i L_i^3$$

$$\bar{x}_T = \frac{L_i}{4} + \frac{1}{3} x \frac{3}{4} L_i = \frac{L_i}{2}$$

$$A_T \times \bar{x}_T = - \frac{9}{2048} R_i L_i^4$$

$$(M_o)_{(i,1)} = \left(- \frac{26}{39\,936} - \frac{9}{2048} \right) R_i L_i^4 = - \frac{403}{79\,872} R_i L_i^4$$

$$(M_o)_{(i+1,1)} = - \frac{13}{3072} R_i L_i^3 \times \frac{11}{13} L_i - \frac{9}{2048} R_i L_i^4$$

$$= - \frac{637}{79\,872} R_i L_i^4$$

$$M_{(i,1)(i+1,1)}^e = \frac{2}{L_i^2} \left[- \frac{403}{79\,872} R_i L_i^4 + \frac{1274}{79\,872} R_i L_i^4 \right]$$

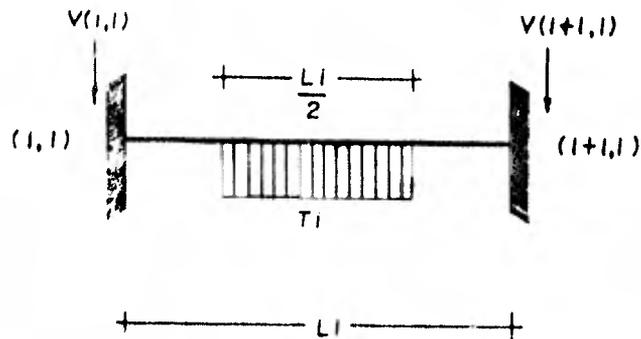
$$= \frac{67}{3072} R_i L_i^2$$

$$M_{(i+1,1)}^{e(i,1)} = \frac{2}{L_i^2} \left[-\frac{506}{79572} R_i L_i^3 + \frac{037}{79572} R_i L_i^4 \right]$$

$$= -\frac{13}{3072} R_i L_i^2$$

Solución de la viga 3

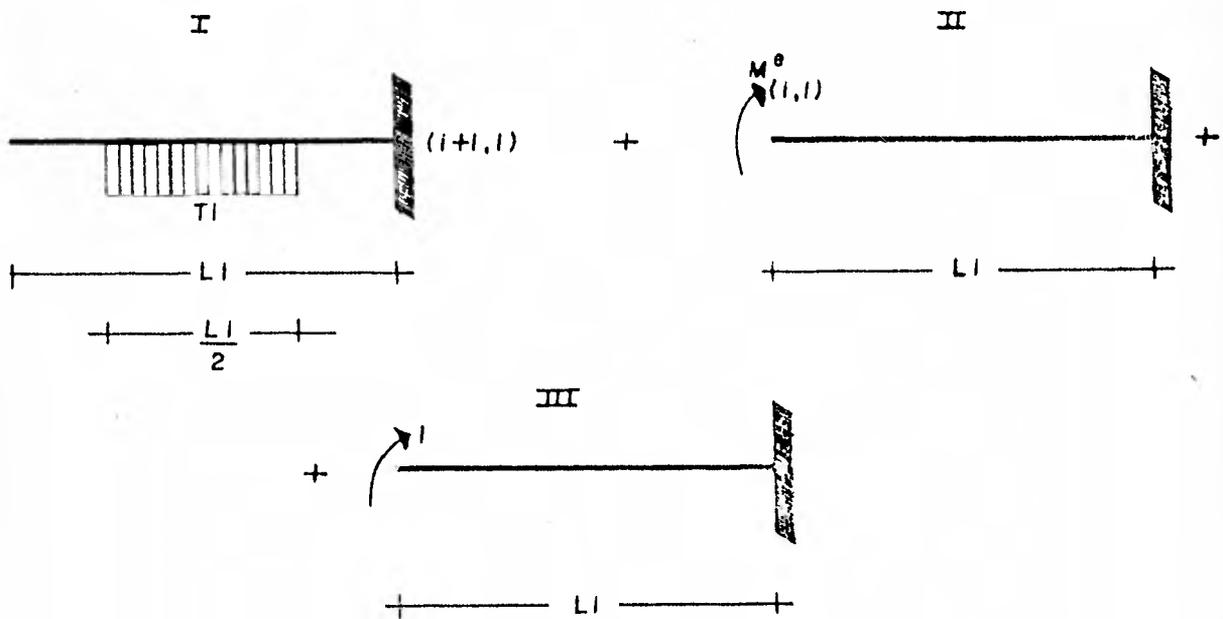
Para obtener los momentos de empotramiento se empleará el método de las flexibilidades



Las reacciones se pueden conocer debido a la simetría de cargas, cuyos valores son:

$$V_{(i,1)} = \frac{T_i L_i}{4} \quad \text{y} \quad V_{(i+1,1)} = \frac{T_i L_i}{4}$$

La viga anterior es:



Solución de la viga I

Ecuaciones de momentos

$$0 \leq x \leq \frac{L_i}{4}$$

$$M_x = - \frac{T_i L_i}{4} x$$

$$\frac{L_i}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} L_i$$

$$M_x = -\frac{T_c L_c}{4} x + \frac{T_c}{2} \left(x - \frac{L_c}{4} \right)^2 = T_c \frac{x^2}{2} - T_c L_c \frac{x}{2} + \frac{T_c L_c^2}{32}$$

$$\frac{3}{4} L_c - x \leq L_c$$

$$M_x = T_c L_c \frac{x}{4} - \frac{T_c L_c^2}{4}$$

Solución de la viga II

Ecuación de momento

$$0 \leq x \leq L_c$$

$$M_x = M_1^e(x, l)$$

Solución de la viga III

Ecuación de momento

$$0 \leq x \leq L_c$$

$$m = 1$$

Considerando únicamente el efecto de flexión se aplica la fórmula:

$$\int_0^{L_i} \frac{M^e(x, l) m}{EI} dx = \theta$$

de donde:

$$\theta_I(x, l) = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L_i} \frac{T_i L_i}{4} x dx + \frac{T_i L_i^2}{32} \right] + \left[\frac{T_i L_i}{4} \cdot \frac{x}{2} + T_i L_i \cdot \frac{x}{2} + \frac{T_i L_i^2}{4} \right] dx =$$

$$= \frac{11}{192} \frac{T_i L_i^3}{EI}$$

$$\theta_{II}(x, l) = \frac{1}{EI} \int_0^{L_i} M^e(x, l) dx + \frac{T_i L_i^2}{EI}$$

Pero:

$$= \frac{11}{192} \frac{T_i L_i^3}{EI} + \frac{T_i L_i^2}{EI}$$

$$M_{(i,1)}^e = \frac{11}{192} T_i L_i^2 = M_{(i+1,1)}^e$$

Solución de la viga 4

Los momentos de empotramiento de esta viga se pueden obtener de igual manera que para la viga 2, considerando la posición de la carga, de lo que resulta:

$$M_{(i,1)}^e = \frac{13}{3072} R_{(i+1)} L_i^2$$

$$M_{(i+1,1)}^e = -\frac{37}{3072} R_{(i+1)} L_i^2$$

A P E N D I C E "B"

A P E N D I C E "B"

DESARROLLO DEL EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LA CRUJIA i

$$\sum_{j=1}^Q M(i, j)(i+1, j) + \sum_{j=1}^Q M(i+1, j)(i, j) = \frac{w(i, 1) L_i^2}{12} -$$

$$- \frac{67}{3072} R_i L_i^2 - \frac{13}{3072} R_{(i+1)} L_i^2 - \frac{11}{192} T_i L_i^2 +$$

$$+ 2K_{t(i, 1)} \psi(i, 1) + K_{t(i, 1)} \psi(i+1, 1) - \frac{6K_{t(i, 1)}}{L_i} \delta_i +$$

$$+ \frac{6K_{t(i, 1)}}{L_i} \varepsilon_{(i+1)} - \frac{w(i, 1) L_i^2}{12} + \frac{13}{3072} R_i L_i^2 +$$

$$+ \frac{11}{192} T_i L_i^2 - \frac{67}{3072} R_{(i+1)} L_i^2 + 2K_{t(i, 1)} \psi(i+1, 1) +$$

$$+ K_{t(i,1)} \phi(i,1) - \frac{6K_{t(i,1)}}{L_i} \delta_i + \frac{6K_{t(i,1)}}{L_i} \delta_{(i+1)} +$$

$$+ \sum_{j=2}^q \frac{W(i,j) L_i^2}{12} + 2 \sum_{j=2}^q K_{t(i,j)} \phi(i,j) +$$

$$+ \sum_{j=2}^q K_{t(i,j)} \phi(i+1,j) - 6 \sum_{j=2}^q \frac{K_{t(i,j)}}{L_i} \delta_i +$$

$$+ 6 \sum_{j=2}^q \frac{K_{t(i,j)}}{L_i} \delta_{(i+1)} - \sum_{j=2}^q \frac{W(i,j) L_i^2}{12} +$$

$$+ 2 \sum_{j=2}^q K_{t(i,j)} \phi(i+1,j) + \sum_{j=2}^q K_{t(i,j)} \psi(i,j) -$$

$$- 6 \sum_{j=2}^q \frac{K_{t(i,j)}}{L_i} \delta_i + 6 \sum_{j=2}^q \frac{K_{t(i,j)}}{L_i} \delta_{(i+1)} = - \frac{9}{512} L_i^2 R_i +$$

$$+ 3 \sum_{j=1}^q K_{t(i,j)} \phi(i,j) + 3 \sum_{j=1}^q K_{t(i,j)} \psi(i+1,j) -$$

$$- 12 \sum_{j=1}^q \frac{K_{t(i,j)}}{L_i} \delta_i + 12 \sum_{j=1}^q \frac{K_{t(i,j)}}{L_i} \delta_{(i+1)} + \frac{9}{512} L_i^2 R_{(i+1)}$$

Haciendo la igualdad:

$$\begin{aligned}
 & \frac{L_i}{4} \sum_{k=1}^{i-1} L_K R_K + \frac{L_i}{4} \sum_{k=1}^{i-1} L_K R_{K+1} + \frac{L_i}{2} \sum_{k=1}^{i-1} L_K T_K - \\
 & - L_i \sum_{k=1}^{i-1} L_K \sum_{j=1}^q w_{k,j} + \frac{7}{32} L_i^2 R_i + \frac{1}{32} L_i^2 R_{i+1} + \\
 & + \frac{L_i^2}{4} T_i - \frac{L_i^2}{2} \sum_{j=1}^q w_{(i,j)} = - \frac{9}{512} L_i^2 R_i + \\
 & + \frac{9}{512} L_i^2 R_{(i+1)} + 3 \sum_{j=1}^q K_{t(i,j)} \phi_{(i,j)} + \\
 & + 3 \sum_{j=1}^q K_{t(i,j)} \phi_{(i+1,j)} - \frac{12}{L_i} \sum_{j=1}^q K_{t(i,j)} \delta_i + \\
 & + \frac{12}{L_i} \sum_{j=1}^q K_{t(i,j)} \delta_{(i+1)}
 \end{aligned}$$

A P E N D I C E "C"

A P E N D I C E "C"

APLICACION DEL METODO DE LA VIGA CONJUGADA

$$\eta_i - \delta_i = \frac{1}{EI} \left[M_i - \frac{M_i - M_{i+1}}{2} \right] \frac{L_i}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{L_i}{2} + \frac{M_i - M_{i+1}}{2} \frac{L_i}{2} \frac{1}{2} \frac{L_i}{2} \frac{1}{EI} -$$

$$- \frac{2}{3} \frac{w_c L_i^2}{8} \frac{L_i}{2} \frac{3}{8} \frac{L_i}{2} \frac{1}{EI} + \left[\frac{1}{2} v_i' \frac{L_i}{2} \frac{L_i}{2} \frac{1}{3} \frac{L_i}{2} -$$

$$- \frac{1}{3} \frac{L_i}{4} \frac{1}{32} R_i L_i^2 + \frac{L_i}{4} + \frac{1}{4} \frac{L_i}{4} \right] - \frac{L_i}{4} \frac{1}{32} R_i L_i^2 \frac{1}{2} \frac{L_i}{4} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{L_i}{4} \frac{1}{16} R_i L_i^2 + \frac{1}{8} \frac{L_i}{4} - \frac{1}{8} \frac{L_i}{4} - \frac{1}{32} T_i L_i^2 \frac{1}{4} \frac{L_i}{4} \left] \frac{1}{EI} -$$

$$- \frac{7}{8} \frac{L_i}{8}$$

2, 3, 30

Pero

$$M_i^e = M_i^e + 2K\phi_i + K\phi_{i+1} - \delta \frac{K}{L_i} \delta_i + \delta \frac{K}{L_i} \delta_{i+1}$$

$$M_i^e = \frac{w_i L_i^2}{12} - \frac{67}{3072} R_i L_i^2 - \frac{13}{3072} R_{i+1} L_i^2 - \frac{11}{192} T_i L_i^2$$

Sustituyendo $K = \frac{EI}{L_i}$:

$$M_i^e = \frac{w_i L_i^2}{12} - \frac{67}{3072} R_i L_i^2 - \frac{13}{3072} R_{i+1} L_i^2 - \frac{11}{192} T_i L_i^2 +$$

$$+ 2 \frac{EI}{L_i} \phi_i + \frac{EI}{L_i} \phi_{i+1} - \delta \frac{EI}{L_i} \delta_i + \delta \frac{EI}{L_i} \delta_{i+1}$$

$$M_{i+1}^e = M_{i+1}^e + 2K\phi_{i+1} + K\phi_i - \delta \frac{K}{L_i} \delta_{i+1} + \delta \frac{K}{L_i} \delta_i$$

$$M_{i+1}^e = \frac{w_{i+1} L_{i+1}^2}{12} - \frac{67}{3072} R_{i+1} L_{i+1}^2 - \frac{13}{3072} R_i L_{i+1}^2 - \frac{11}{192} T_{i+1} L_{i+1}^2$$

$$M_{i+1} = -\frac{W_i L_i^2}{12} + \frac{67}{3072} R_{i+1} L_i^2 + \frac{13}{3072} R_i L_i^2 + \frac{11}{192} T_i L_i^2 +$$

$$+ 2 \frac{EI}{L_i} \phi_{i+1} + \frac{EI}{L_i} \phi_i - 6 \frac{EI}{L_i^2} \delta_i + 6 \frac{EI}{L_i^2} \delta_{i+1}$$

Por otra parte:

$$M_i - \frac{M_i + M_{i+1}}{2} = \frac{1}{2} (M_i + M_{i+1})$$

$$M_i + M_{i+1} = -\frac{27}{1536} R_i L_i^2 + \frac{27}{1536} R_{i+1} L_i^2 + 3 \frac{EI}{L_i} \phi_i +$$

$$+ 3 \frac{EI}{L_i} \phi_{i+1} - 12 \frac{EI}{L_i^2} \delta_i + 12 \frac{EI}{L_i^2} \delta_{i+1} \quad 2.3.31$$

$$M_i - M_{i+1} = -\frac{40}{1536} R_i L_i^2 - \frac{40}{1536} R_{i+1} L_i^2 - \frac{22}{192} T_i L_i^2 +$$

$$+ \frac{7}{12} \phi_i L_i^2 + \frac{EI}{L_i} \phi_i - \frac{EI}{L_i} \phi_{i+1} \quad 2.3.32$$

De la ecu. 2.3.31, haciendo $M_{i+1} = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{i+1} = & -V'_i L_i + R_i \frac{L_i}{4} \left(\frac{L_i}{2} + \frac{L_i}{4} + \frac{1}{2} \frac{L_i}{4} \right) + T_i \frac{L_i}{2} \frac{L_i}{2} + \\ & + R_{i+1} \frac{L_i}{4} \frac{L_i}{8} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore V'_i = \frac{1}{L_i} \left[\frac{7}{32} R_i L_i^2 + \frac{1}{4} T_i L_i^2 + \frac{1}{32} R_{i+1} L_i^2 \right] \quad 2.3.33$$

Sustituyendo las expresiones 2.3.31, 2.3.32 y 2.3.33 en 2.3.

30 tenemos:

$$\begin{aligned} \eta_i = & \delta_i + \frac{1}{12} \frac{L_i^2}{EI} \frac{1}{2} \left(-\frac{9}{512} R_i L_i^2 + \frac{9}{512} R_{i+1} L_i^2 + 3 \frac{EI}{L_i} \phi_i + \right. \\ & + 3 \frac{EI}{L_i} \phi_{i+1} - 12 \frac{EI}{L_i^2} \delta_i + 12 \frac{EI}{L_i^2} \delta_{i+1} \left. \right) + \\ & + \frac{1}{16} \frac{L_i^2}{EI} \left(-\frac{5}{192} R_i L_i^2 - \frac{5}{192} R_{i+1} L_i^2 - \frac{11}{96} T_i L_i^2 + \right. \\ & + \frac{1}{6} W_i L_i^2 + \frac{EI}{L_i} \phi_i - \frac{EI}{L_i} \phi_{i+1} - \frac{1}{12} \frac{1}{EI} R_i L_i^2 \left. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{L_i^3}{48} \cdot \frac{1}{L_i} \left(\frac{7}{32} R_i L_i^2 + \frac{1}{4} T_i L_i^2 + \frac{1}{32} R_{i+1} L_i^2 \right) - \right. \\
& - \left. \frac{5}{6144} R_i L_i^4 - \frac{1}{1024} R_i L_i^4 - \frac{1}{1536} R_i L_i^4 - \frac{1}{6144} T_i L_i^4 \right] \frac{1}{EI} - \\
& - \frac{1}{4} \phi_i L_i \\
\eta_i = & \delta_i - \frac{3}{4096} \frac{R_i L_i^4}{EI} + \frac{3}{4096} \frac{R_{i+1} L_i^4}{EI} + \frac{1}{8} \phi_i L_i + \frac{1}{8} \phi_{i+1} L_i - \\
& - \frac{1}{2} \delta_i + \frac{1}{2} \delta_{i+1} - \frac{5}{3072} \frac{R_i L_i^4}{EI} - \frac{5}{3072} \frac{R_{i+1} L_i^4}{EI} - \\
& - \frac{11}{1536} \frac{T_i L_i^4}{EI} + \frac{1}{96} \frac{W_i L_i^4}{EI} + \frac{1}{16} \phi_i L_i - \frac{1}{16} \phi_{i+1} L_i - \\
& - \frac{1}{128} \frac{W_i L_i^4}{EI} + \frac{7}{1536} \frac{R_i L_i^4}{EI} + \frac{1}{192} T_i L_i^4 + \frac{1}{1536} \frac{R_{i+1} L_i^4}{EI} - \\
& - \frac{10}{4096} R_i L_i^4 - \frac{1}{2144} T_i L_i^4 - \frac{1}{4} \phi_i L_i
\end{aligned}$$

$$\eta_i = \delta_i - \frac{1}{4096 EI} R_i L_i^4 - \frac{1}{4096 EI} R_{i+1} L_i^4 -$$

$$- \frac{13}{6144 EI} T_i L_i^4 + \frac{1}{2} \delta_i + \frac{1}{2} s_{i+1} - \frac{1}{16} \phi_i L_i +$$

$$+ \frac{1}{16} \phi_{i+1} L_i + \frac{1}{384 EI} w_i L_i^4$$

$$\therefore \eta_i = - \frac{\phi_i L_i}{16} + \frac{\phi_{i+1} L_i}{16} + \frac{s_i}{2} + \frac{s_{i+1}}{2} + \frac{w_i L_i^4}{384 EI} -$$

$$- \frac{R_i L_i^4}{4096 EI} - \frac{R_{i+1} L_i^4}{4096 EI} - \frac{13 T_i L_i^4}{6144 EI}$$

2.3.54

Recordando que $K_t = \frac{(EI)_t}{L_i}$

Multiplicando por $\frac{(EI)_t}{L_i^2} = \frac{K_t}{L_i}$ la ecuación anterior:

$$\frac{K_t(i,1)}{L_i} \eta_i = - \frac{1}{16} K_t(i,1) \phi(i,1) + \frac{1}{16} K_t(i,1) \phi(i+1,1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{K_t(i,1)}{L_i} s_i + \frac{1}{2} \frac{K_t(i,1)}{L_i} s_{i+1} + \frac{w_i L_i^2}{384} -$$

$$-\frac{R_i L_i^2}{4096} - \frac{R_{(i+1)} L_i^2}{4096} - \frac{13 T_i L_i^2}{6144}$$

Multiplicando por 16:

$$\begin{aligned}
 16 \frac{K_{t(i,1)}}{L_i} \eta_i &= -K_{t(i,1)} \phi(i,1) + K_{t(i,1)} \phi(i+1,1) + \\
 &+ 8 \frac{K_{t(i,1)}}{L_i} s_i + 8 \frac{K_{t(i,1)}}{L_i} \delta_{i+1} + \\
 &+ \frac{1}{24} W_i L_i^2 - \frac{1}{256} R_i L_i^2 - \frac{1}{256} R_{i+1} L_i^2 - \\
 &- \frac{13}{384} T_i L_i^2
 \end{aligned}$$

Sea $\eta_i = \xi_i$

A P E N D I C E "D"

A P E N D I C E "D"

ELIMINACION GAUSSIANA Y DESCOMPOSICION LU

Para un sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$, con una matriz-densa cuyos elementos se almacenan en la memoria de alta velocidad, no se ha hallado mejor clase de algoritmos de solución, sea en tiempo o en exactitud, que los métodos de eliminación sistemática de C.F. Gauss. Resulta, por lo tanto que todo gabinete de computación debe tener buenos programas para resolver sistemas lineales mediante eliminación. El presente apéndice explica esta clase de algoritmos y también algunas versiones especiales de ella.

La eliminación gaussiana ocurre en muchas variantes que son algebraicamente las mismas. Los métodos difieren según sea-

el almacenamiento de las matrices, el orden de la eliminación, las precauciones tomadas contra grandes errores de redondeo y la manera en que se mejoren las soluciones calculadas. Hay también variantes especialmente adaptadas para sistemas con matrices simétricas, definidas positivas, en los cuales el almacenamiento es reducido aproximadamente a la mitad.

Definición. Una matriz triangular inferior es una matriz cuadrada $C = (c_{i,j})$ tal que $c_{i,j} = 0$ para $i < j$. Igualmente, si $c_{i,j} = 0$ para $i > j$, C es triangular superior.

La base algebraica de eliminación gaussiana es el teorema siguiente:

Teorema LU. Dada una matriz cuadrada A de orden n , donde A_k indica la matriz principal menor hecha de las primeras k filas y columnas, supóngase que $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Luego, existe una matriz triangular inferior única $L = (m_{i,j})$, con $m_{1,1} = m_{2,2} = \dots = m_{n,n} = 1$, y una matriz triangular superior única $U = (u_{i,j})$ de manera que $LU = A$. Además, $\det(A) = u_{1,1} \cdot u_{2,2} \cdot \dots \cdot u_{n,n}$. Para probar este teorema se usa inducción sobre n . Si $n = 1$ evidentemente solo $u_{1,1} = 1 \cdot u_{1,1}$ y $\det(A) = u_{1,1}$. Supóngase --

que el teorema sea cierto para $n = k - 1$; para $n = k$, se particiona A en submatrices:

$$A = \begin{bmatrix} A_{k-1} & c \\ r & a_{kk} \end{bmatrix}$$

donde r es una fila de $k - 1$ componentes y c es una columna de $k - 1$ componentes.

Sea

$$L = \begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{k-1} & u \\ 0 & u_{kk} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$LU = \begin{bmatrix} L_{k-1} & U_{k-1} & L_{k-1} & u \\ m & U_{k-1} & m u + u_{kk} \end{bmatrix}$$

Ahora, por la hipótesis inductiva L_{k-1} y U_{k-1} están únicamente determinados y $L_{k-1} U_{k-1} = A_{k-1}$. Además, ni L_{k-1} ni U_{k-1} son singulares (o además, A_{k-1} sería singular, contrario a la hipótesis). Entonces, el requisito $LU = A$ es equivalente

$$a_{k-1} L_{k-1} U = c \text{ y } m u_{k-1} = \kappa \text{ y } m u + u_{kk} = a_{kk}.$$

Así, u , m y u_{kk} pueden determinarse únicamente en ese orden, y L y U se determinan en forma única. Por último,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot \det(u_{k-1}) \cdot u_{kk} \\ &= u_{1,1} \cdot \dots \cdot u_{k-1, k-1} \cdot u_{kk} \end{aligned}$$

con lo que se demuestra el teorema LU.

De manera similar, puede probarse, según las mismas hipótesis, que A puede descomponerse únicamente en la forma $A=LDU$, donde L y U son matrices triangulares superiores e inferiores con unos sobre la diagonal y D es una matriz diagonal. Además, la $\det(A) = d_{1,1} \cdot \dots \cdot d_{n,n}$. Realmente la D del teorema LU es simplemente la DU del teorema LDU. Además puede demostrarse que si A es simétrica y satisface las hipótesis del teorema LU, entonces $A = LDU$ implica que $D = L^T$, la transpuesta de L . Si A es definida positiva, entonces un teorema de la teoría de matrices dice que $\det A_\kappa > 0$ para $\kappa=1,2,\dots,n$ y de aquí que el teorema LDU tiene todo $d_{\kappa,\kappa} > 0$. Si se hace

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_{1,1}} & \circ \\ \circ & \sqrt{d_{n,n}} \end{bmatrix}$$

y haciendo $G = L D^{1/2}$, se obtiene que $A = G G^T$. En resumen:

Corolario. Si A es una matriz simétrica, definida positiva, entonces puede descomponerse únicamente en $G G^T$, donde G es una matriz triangular inferior con -- elementos diagonales positivos.

El factoro de A como el producto de LU es la idea básica de todos los esquemas gaussianos de eliminación, porque entonces el sistema $Ax = b$ puede escribirse

$$LUx = b$$

Esto representa los sistemas triangulares

$$Ly = b \quad \text{y} \quad Ux = y$$

que son fácilmente resueltos. Los componentes de la solución intermedia pueden obtenerse directamente del primer sistema, ya que la primera ecuación involucra solamente a u_1 , -

la segunda solamente a y_1 é y_2 y así sucesivamente. Luego, los componentes de x pueden igualmente obtenerse del segundo sistema en el orden x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 . El cálculo de L y U junto con la solución de $Ly = b$ es denominado ordinariamente la eliminación anterior, y la solución de $Ux = y$ es la sustitución posterior. Si se refiere al cómputo de L y U como la descomposición triangular.

Los distintos métodos difieren en el orden en que se realizan las operaciones en la eliminación anterior. Hay importantes diferencias en cuanto a si las ecuaciones (filas de A) se intercambian o no, o en si lo hacen las variables (columnas de A). Los intercambios se estudiarán enseguida de que se haya discutido la eliminación con mayor detalle. Además, a veces la matriz L se almacena, y a veces no. La importancia de guardar L puede demostrarse fácilmente si A es una matriz almacenada general. La diagonal de L no necesita almacenarse pues se sabe que es toda de unos. La parte diagonal inferior de L junto con U puede ocupar el espacio originalmente tomado por A . No se necesita almacenamiento intermedio alguno, puesto que los elementos de L se crean al mismo tiempo que los elementos de A se ajustan a cero. Casi todo el tiempo de computación requerido para resolver $Ax = b$ se invierte hallando L y U ; los cálculos que realmente comprenden a b son relativamente pocos. Lo aquí que si uno necesitara resolver otro sistema con la misma matriz A pero --

con un nuevo miembro derecho b , hay toda razón para conservar a L y U y evitar con ello repetir la descomposición triangular. Se presentan nuevos sistemas con la misma A a computar, por ejemplo, la matriz inversa A^{-1} . También se presentan en un mejoramiento iterativo de la primera solución - un proceso para hallar x con elevada precisión -. A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo de lo mencionado anteriormente para su mejor comprensión.

Dada una matriz A y un vector b de orden 4, se usan operaciones elementales sobre las filas para poner ceros por debajo de la diagonal principal de A . Supóngase que $a_{1,1} \neq 0$; que $m_{i,1} = a_{i,1}/a_{1,1}$ ($i = 2, 3, 4$). Para $i = 2, 3, 4$ se sustrae $m_{i,1}$ veces la primera ecuación i -ésima, y también se sustrae $m_{i,1}$ veces b_1 de b_i para lograr tres ecuaciones que no contengan x_1 . Esta nueva serie de tres ecuaciones junto con la primera ecuación de la serie original, puede escribirse

$$A^{(2)} x = b^{(2)}$$

donde $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$, y $a_{i,1}^{(2)} = 0$ para $i = 2, 3, 4$. Si M_1 es la matriz triangular inferior

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \bigcirc \\ & -m_{2,1} & 1 & & \\ & -m_{3,1} & 0 & 1 & \\ & -m_{4,1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene $A^{(2)} = M_1 A$; $b^{(2)} = M_1 b$. Si ahora se supone que $a_{2,2}^{(2)} \neq 0$. Se hace $m_{i,2} = a_{i,2}^{(2)} / a_{2,2}^{(2)}$ ($i = 3, 4$). Premultiplicando $A^{(2)}$ y $b^{(2)}$ por:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \bigcirc \\ 0 & & 1 & & \\ & 0 & -m_{3,2} & 1 & \\ & 0 & -m_{4,2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener $A^{(3)} = M_2 A^{(2)}$ y $b^{(3)} = M_2 b^{(2)}$. Esto corresponde a eliminar x_2 de las últimas dos ecuaciones. Por último supóngase que $a_{3,3}^{(3)} \neq 0$, que $m_{4,3} = a_{4,3}^{(3)} / a_{3,3}^{(3)}$ y premultiplíquese $A^{(3)}$ y $b^{(3)}$ por

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \circ \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -m_{4,3} & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, $A^{(4)} = M_3 A^{(3)} = M_3 M_2 M_1 A$.

Es una matriz triangular superior que se designa U . El sistema original adopta ahora la forma $Ux = A^{(4)} x = b^{(4)}$,
 $= M_3 b^{(3)}$, y tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & a_{2,4}^{(2)} \\ & & a_{3,3}^{(3)} & a_{3,4}^{(3)} \\ \circ & & & a_{4,4}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(4)} \end{bmatrix} \dots \dots D.1$$

Supóngase que $M = M_3 M_2 M_1$. Luego, como $MA = U$, se tiene --
 que $A = M^{-1} U$. Pero $M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}$. No es difícil ver --
 que M_k^{-1} es simplemente M_k con los signos de sus elementos no
 diagonales invertidos. Además, el producto $M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}$ es --

simplemente:

$$L = M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \circ \\ m_{2,1} & 1 & & \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí que M^{-1} sea la L del teorema LU ; es decir, $A = M^{-1}U = LU$. Obsérvese que la matriz M nunca está realmente formada y que, en realidad, no se expresa fácilmente en términos de $m_{i,j}$. A medida que progresa la eliminación, los elementos $m_{i,j}$ en lugar de los elementos debajo de la diagonal $M_{i,i}$ de L se almacenan en lugar de los elementos debajo de la diagonal de A , y los elementos $u_{i,j}$ de U se almacenan en lugar de la diagonal y sobre los elementos encima de la diagonal de A . Al final se tiene la matriz

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ m_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix}$$

almacenada en lugar de A .

El procesamiento del miembro derecho - es decir, la transformación de b en $b^{(4)}$ - se efectúa a menudo simultáneamente -- con el procesamiento de A , pero como se almacenan todos los multiplicadores necesarios, bien se puede efectuar más adelante como operación por separado.

Lo que se acaba de ver constituye la eliminación gaussiana ordinaria sin intercambios. La descomposición triangular se resuelve porque L es simplemente la matriz de multiplicadores $(m_{i,j})$ con una diagonal de unos y U es la matriz $A^{(4)}$ de D.1. Obsérvese también que la solución intermedia y es simplemente $b^{(4)}$, el miembro derecho de D.1.

Necesidad de intercambiar filas

Se supuso que $a_{1,1} \neq 0$, $a_{2,2}^{(2)} \neq 0$, $a_{3,3}^{(3)} \neq 0$ en el algoritmo mencionado anteriormente. (Obsérvese que $\det(A_1) = a_{1,1}$, $a_{2,2}^{(2)}$, \dots , $a_{n,n}^{(n)}$; véase el teorema (U). Si cualquiera de estos números se hiciera cero, no se podrá continuar con la eliminación en la forma establecida. Por ejemplo, supóngase que el "pivote" $a_{1,1}$ fuera cero. Como el $\det(A) \neq 0$, se sabe que $a_{1,j} \neq 0$ para algunos $j \neq 1$. Si se intercambia cualquiera de dicha fila i -ésima de A y b con la primera fila -

de A y b , se obtendrá un sistema de ecuaciones equivalente - con $a_{1,1} \neq 0$. Luego, se podrá proseguir con el algoritmo -- anterior. Un remedio análogo sería posible en cualquier eta pa donde $a_{r,r}^{(r)} = 0$.

A menos que un pivote sea exactamente cero, este intercambio no es necesario en teoría. Sin embargo, la intuición señala que si se trabaja con un pivote cero es imposible usar entonces un pivote $a_{1,1}$ que esté cerca de cero, será inexacto como aritmética de precisión limitada.

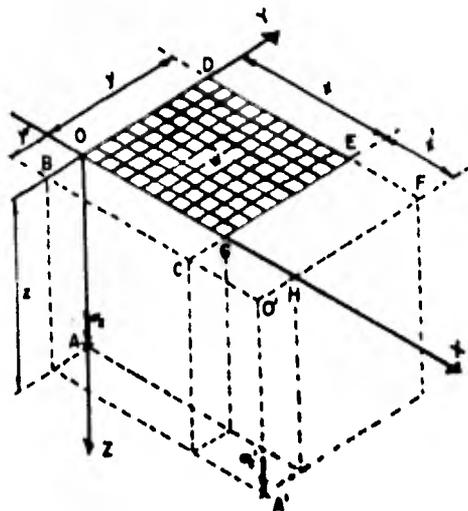
Por lo tanto, debe elegirse como pivote el mayor, en valor -- absoluto, de los números $a_{i,r}^{(r)}$ ($i \geq r$) (o uno de los mayores si hay varios). Esto se cumple en cada etapa intercambiando las filas r e i después de determinar que $a_{i,r}^{(r)}$ es un elemento de valor absoluto máximo en la columna. Este procedimiento es equivalente al intercambio de las ecuaciones correspondientes en el sistema original.

A P E N D I C E "E"

A P E N D I C E "E"

CALCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA

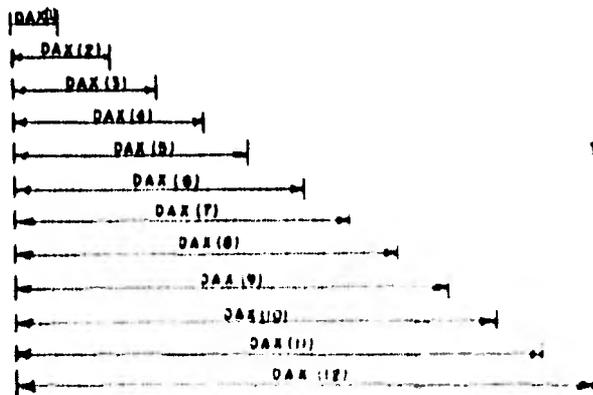
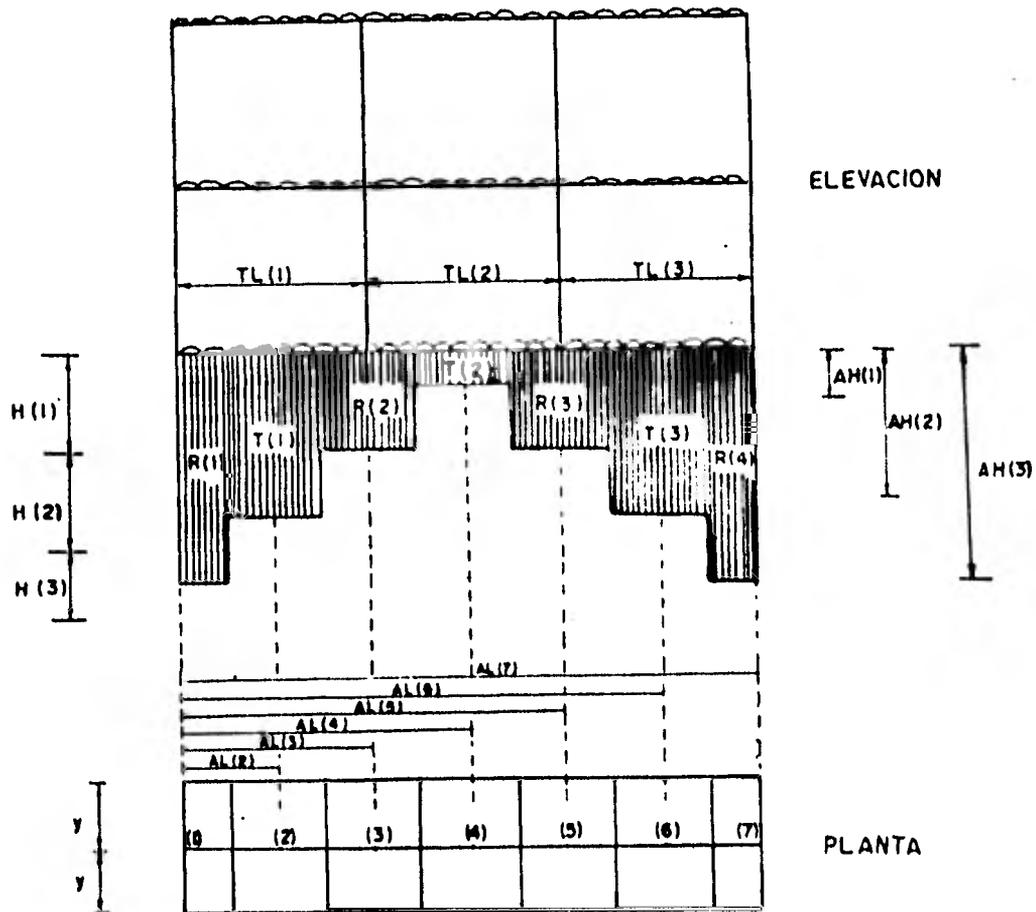
Como se sabe, la solución de Boussinesq para el cálculo del incremento de esfuerzos debido a una superficie rectangular uniformemente cargada es válida para una esquina de dicha superficie, y como para nuestro caso, resulta de interés calcular dichos incrementos de esfuerzo (llamados valores de influencia) bajo cada columna y al centro de cada crujía; se requiere entonces determinar los valores de α , β y γ que intervienen en la expresión 4.2.2. La interpretación geométrica de dichos valores se muestra en la figura siguiente.



Distribución de esfuerzos bajo una superficie rectangular uniformemente cargada

Se tiene entonces que:

- y es el ancho de la cimentación tributario al marco analizado y por lo tanto puede considerarse constante.
- z es la profundidad a la que se calcula el valor de influencia y se torna al centro de cada estrato.
- x es la distancia a la esquina del área cargada y dada la diversidad de cargas su determinación no es fácil.



TL(1) = Distancia entre columnas.

H(1) = Espesor de estratos de suelo.

NOTAS

1. Para aplicar la expresión de Boussinesq es necesario determinar las distancias x y las profundidades z principalmente, ya que el ancho y se considera constante, el problema principal que se presenta es la determinación de X , para lo cual se calculan las distancias acumuladas $AL(I)$ y $DAX(I)$ las cuales tienen la representación mostrada en la figura. Para la obtención de z se calculan las profundidades acumuladas $AH(I)$ cuya representación se muestra en la figura.
2. El cálculo de los incrementos de esfuerzos $I_{(i,j)_k}$ debido a cada reacción bajo sí misma se realiza formando -- las X a partir de las longitudes entre columnas $TL(I)$ y aplicando la expresión de Boussinesq directamente.
3. El cálculo del incremento de esfuerzos $I_{(i,j)_k}$ debido a la carga $R(I)$ sobre todos los puntos considerados, se realiza tomando como primer paso, x igual a la distancia acumulada $AL(I)$ según el punto en cuestión y calcula el incremento de esfuerzos.

Como segundo paso se considera $x = AL(I) - TL(I)$ y calcula el incremento de esfuerzo, por último el valor de-

influencia definitivo será la diferencia del valor calculado en el primer paso menos el valor calculado en el segundo paso.

4. El cálculo del incremento de esfuerzo $\{i, j\}_k$ de todas las cargas bajo todos los puntos, se realiza tomando como x las distancias acumuladas $DAX(i)$ aplicando el mismo procedimiento de 3.

A P E N D I C E " F "

A P E N D I C E "F"

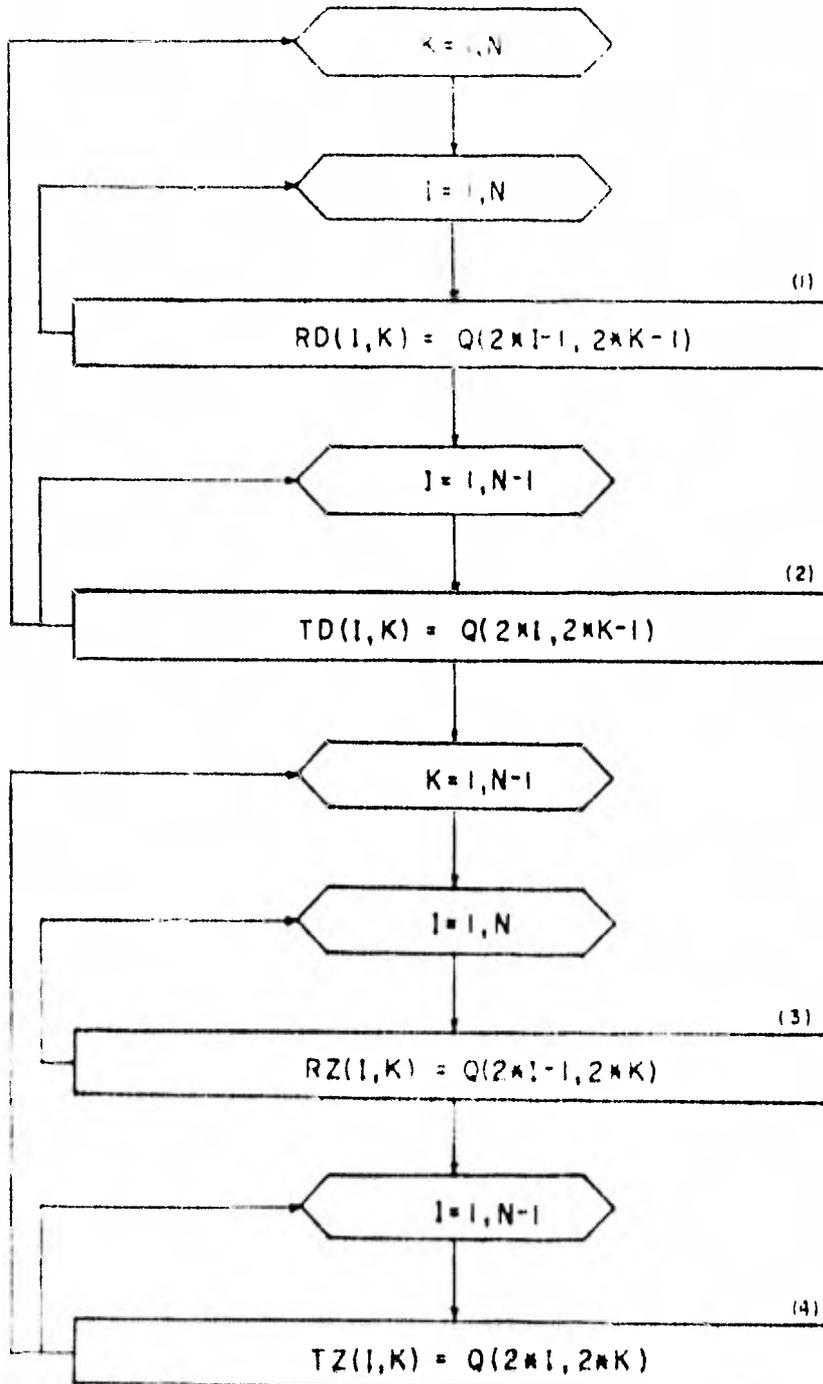
CAMBIO DE VARIABLES

Se presenta a continuación el diagrama de flujo que representa el cambio de variable

APENDICE F

CAMBIO DE VARIABLE

Se presenta a continuación el diagrama de flujo que representa el cambio de variable.



NOTAS

- a. El subíndice K indica el punto en el que se analiza el efecto la carga colocada en I .
1. R_D representa el coeficiente de las cargas Q de las ecuaciones de desplazamientos. Este coeficiente asocia el desplazamiento δ bajo cada columna debido a la acción de las cargas R que actúan sobre las columnas.
 2. T_D representa el coeficiente de las cargas Q de las ecuaciones de desplazamientos. Este coeficiente asocia el desplazamiento δ bajo cada columna, debido a la acción de las cargas T que actúan al centro de cada cruzaja.
 3. R_T representa el coeficiente de las cargas Q de las ecuaciones de desplazamientos. Este coeficiente asocia el desplazamiento ξ al centro de cada cruzaja debido a la acción de las cargas R que actúan sobre las columnas.
 4. T_T representa el coeficiente de las cargas Q de las ecuaciones de desplazamientos. Este coeficiente asocia el desplazamiento ξ al centro de cada cruzaja debido a la

la acción de las cargas F que actúan al centro de cada-cruzía.

De esta manera se efectúa el cambio de la notación usado en - el cálculo de hundimientos a la notación usada en el cálculo-estructural.

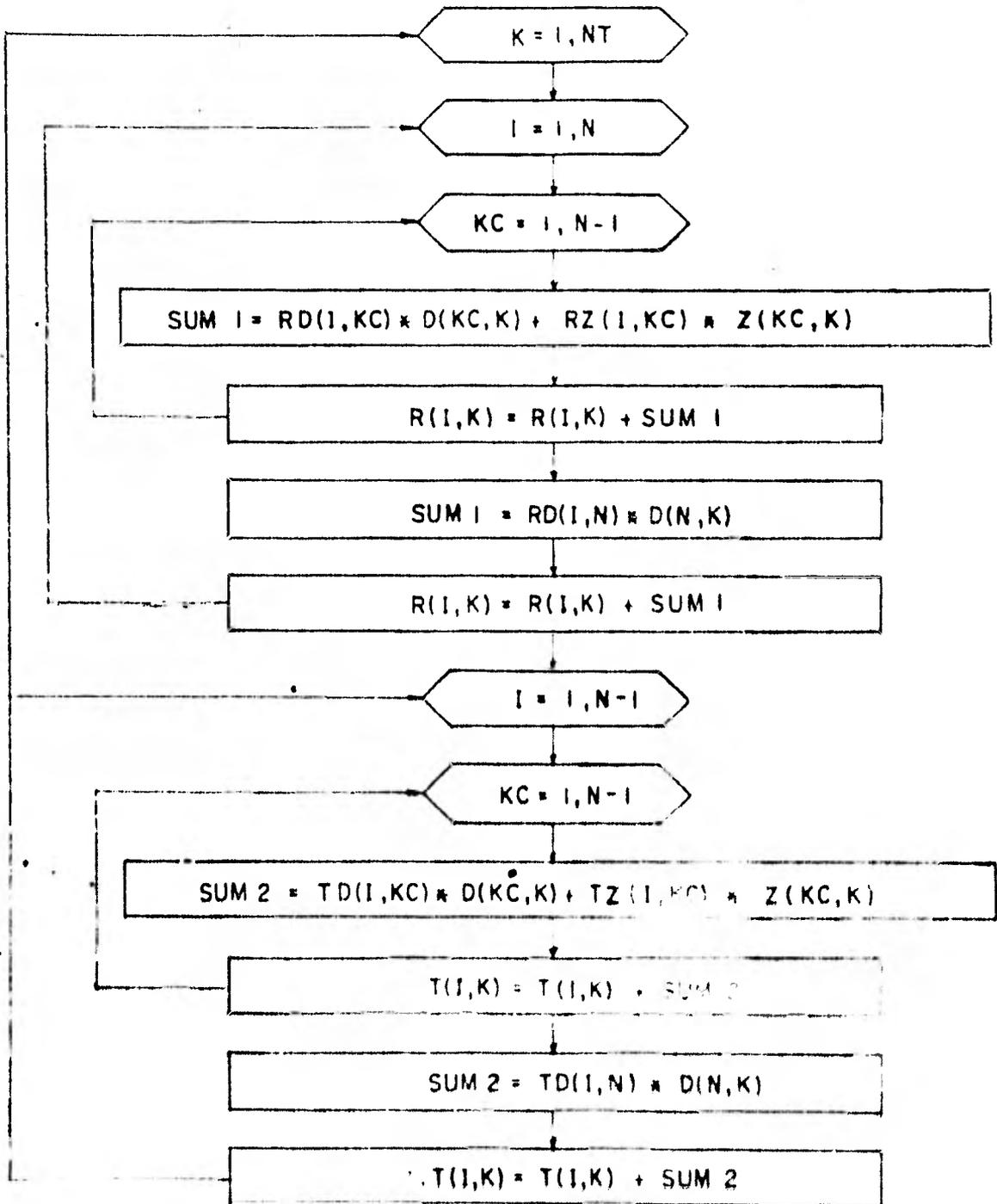
A P E N D I C E "G"

A P E N D I C E "G"

SUSTITUCION DE LA MATRIZ DE HUNDIMIENTOS EN LA MATRIZ DE RIGID
DECES DE LA ESTRUCTURA.

DIAGRAMA DE FLUJO

Sustitucion de la matriz de hundimientos
en la matriz de rigideces de la estructura.



NOTAS

1. En esta parte se hace la sustitución de los coeficientes de los desplazamientos δ_i y ξ_i que están en función de R_i en la matriz de rigideces eliminando, de esta manera, a las incógnitas δ_i y ξ_i .

2. En esta parte se hace la sustitución de los coeficientes de los desplazamientos δ_i y ξ_i que están en función de T_i en la matriz de rigideces, eliminándose así las incógnitas δ_i y ξ_i .

A P E N D I C E "H"

A P E N D I C E "H"

RESOLUCION DEL SISTEMA RESULTANTE MEDIANTE EL METODO DE GAUSS

SUBROUTINA SOLVE

En esta subrutina se obtienen los valores del vector x que satisfacen el sistema de ecuaciones lineales. Se tiene:

$$Ax = b$$

pero

$$A = LU \quad ; \quad L \underset{y}{U} x = b \quad ; \quad Ly = b$$

Ya que se conocen L y b , se puede obtener el valor del vector y (solución hacia adelante), con las siguientes expresiones:

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

Después se resuelve el sistema de n ecuaciones lineales empleando las fórmulas:

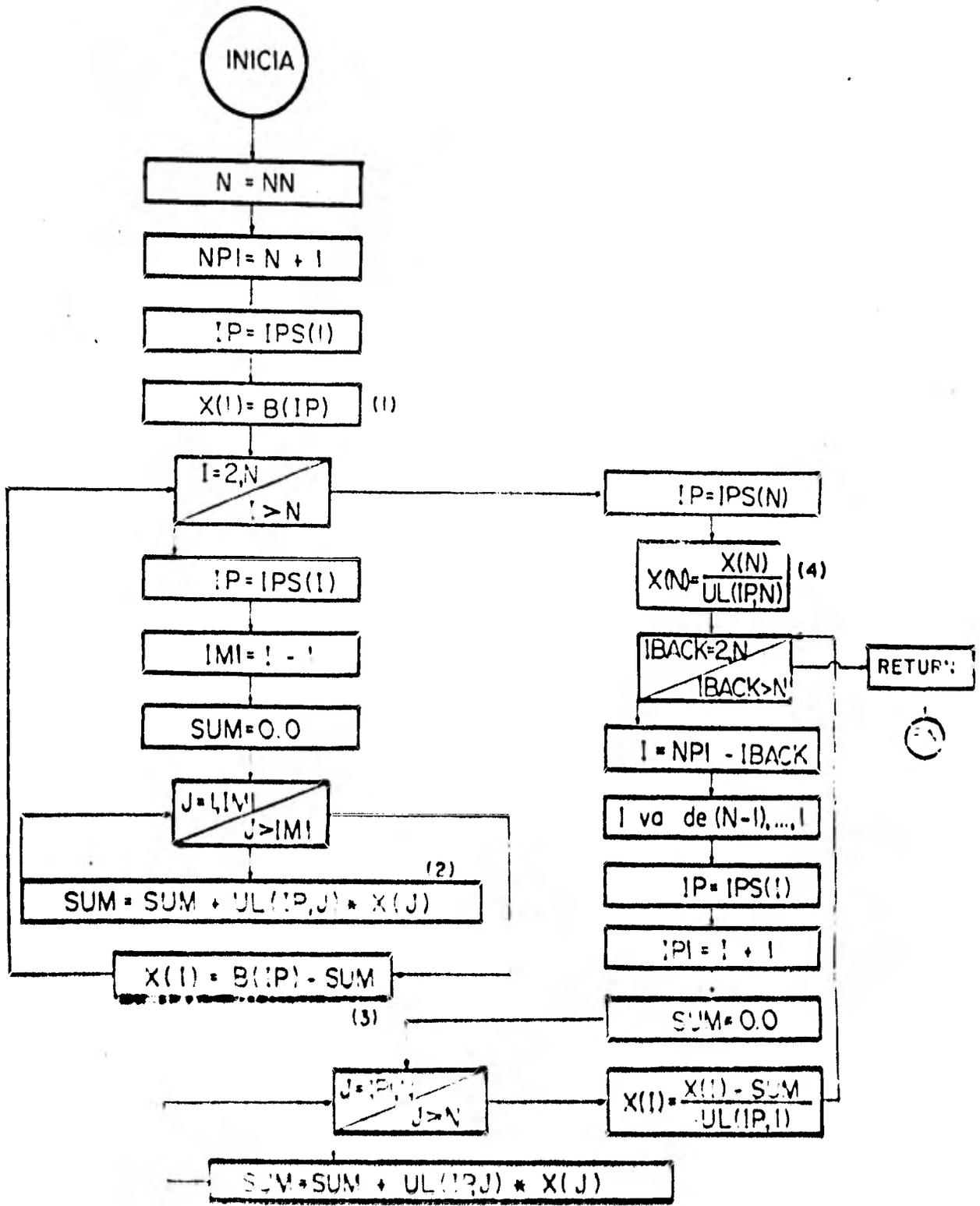
$$x_N = \frac{b_N}{u_{NN}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^N u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

A continuación se presenta el diagrama de flujo de la subrutina *SOLVE*, en el que se han incluido algunas notas aclaratorias.

Es interesante hacer notar que tanto el vector *y* como el vector *x* se guardan en el mismo arreglo, y que a ambos se les designa como *X (I)* en el diagrama de flujo.

SUBROUTINA SOLVE DIAGRAMA DE FLUJO



NOTAS

- 1,2 y 3) Obtiene el vector y ($Ly = b$), tomando en cuenta el intercambio virtual. Almacena el vector y en el arreglo $X(N)$.
- 4 y 5) Se resuelve ahora el sistema $Ux = y$ y se obtiene el vector x , considerando también el intercambio virtual.

SUBROUTINA IMPRUV (Mejoramiento iterativo)

Una vez que se ha resuelto el sistema de ecuaciones $Ax = b$ se obtiene el vector x_1 , solución del sistema. Luego se realiza el producto $Ax_1 = b_1$. El residuo r_1 , definido como la diferencia entre el valor exacto de b y el valor de b_1 , valdrá:

$$r_1 = b - b_1 = b - Ax_1$$

Con el valor de r_1 , se resuelve el sistema $A dx_1 = r_1$, empleando la subrutina *SOLVE*, con lo que se obtiene el valor del vector dx_1 .

Haciendo $x_2 = x_1 + dx_1$

$$Ax_2 = A(x_1 + dx_1) = Ax_1 + Adx_1 = b_1 + r_1 = b$$

Por lo tanto x_2 es una solución refinada del sistema de ecuaciones, correspondiente a la primera iteración.

Se puede realizar otra iteración de la siguiente manera:

$$Ax_2 = b_2 \quad ; \quad r_2 = b - b_2 = b - Ax_2$$

$$Adx_2 = r_2 \quad \text{se obtiene} \quad dx_2$$

$$x_3 = x_2 + dx_2$$

y así sucesivamente.

El número de iteraciones que se realicen dependerá de la precisión que se desee alcanzar en un problema determinado.

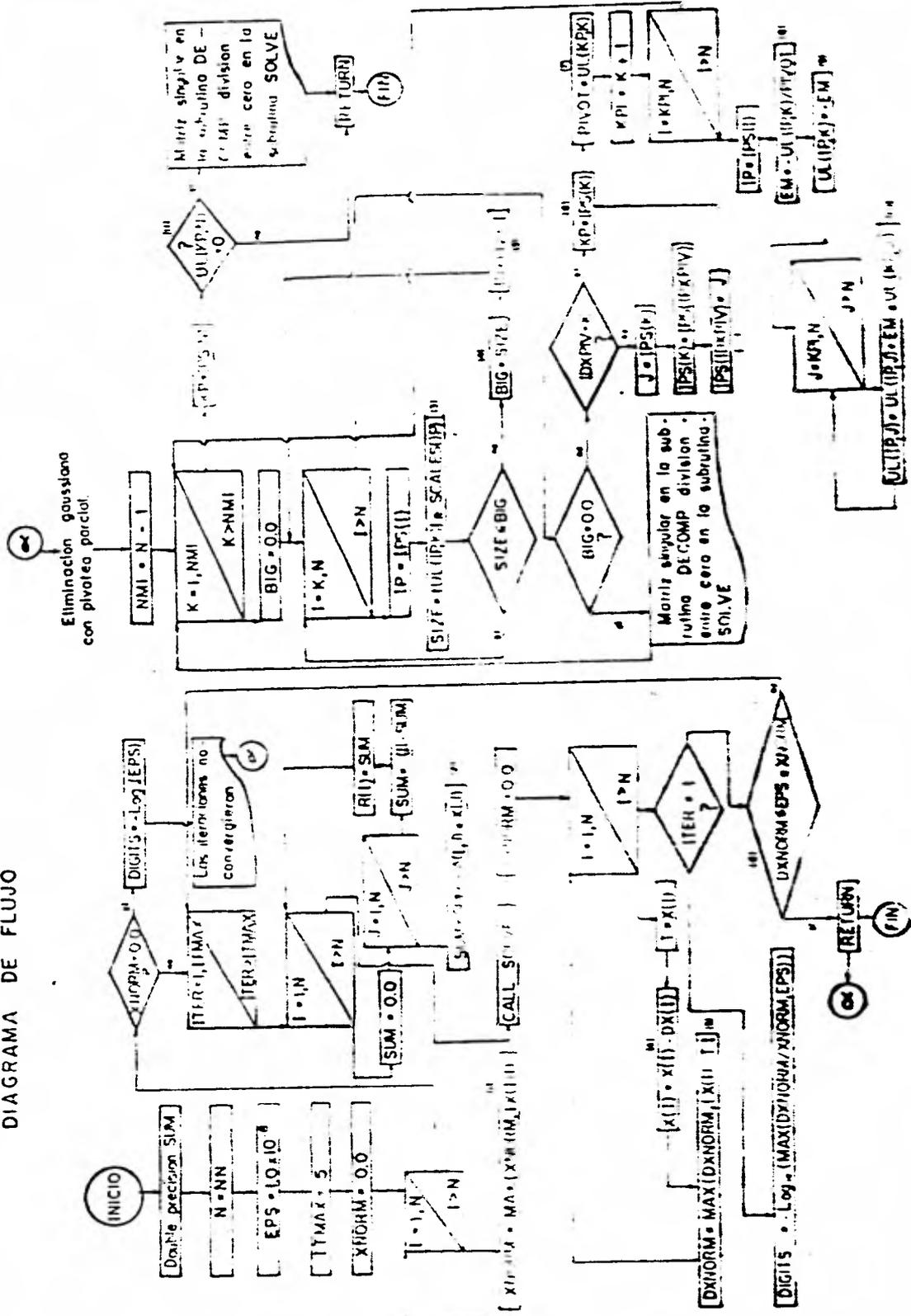
En vista de que en el residuo $r_i = b - Ax_i$, b se conoce con exactitud, puesto que es un dato, es importante que el producto Ax_i se realice con bastante precisión, lo que se logra en el programa asignándole al producto Ax_i un valor de doble precisión.

A continuación se presenta el diagrama de flujo del mejoramiento iterativo (subrutina IMPRUV).

El número de dígitos en la determinación de los valores de x_i depende del cociente de máximo valor absoluto $|x_i|$ en la primera iteración entre el máximo valor absoluto de b en la primera solución. Si este cociente resulta mayor que el va-

lor de EPS, el número de dígitos será igual al negativo del logaritmo en base 10 del cociente; en caso contrario, el número de dígitos corresponderá al valor del negativo del logaritmo de EPS. Por lo que se puede ver, la precisión que se busca en el mejoramiento iterativo está normalizada con respecto al máximo valor absoluto de los elementos de la primera solución.

SUBROUTINA IMPRUV
 DIAGRAMA DE FLUJO



NOTAS

1. $XNORM$ = Máximo de los valores absolutos del vector x -
(1a. solución)
2. Obtiene la suma $\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$ (para cada renglón)
3. Obtiene el residuo $r = b - Ax$ (para cada renglón i)
4. $x_2 = x_1 + dx_1$
5. $DXNORM$ = máximo de los valores absolutos del vector dx
(para cada iteración)
6. Únicamente para la primera iteración ($XNORM$)

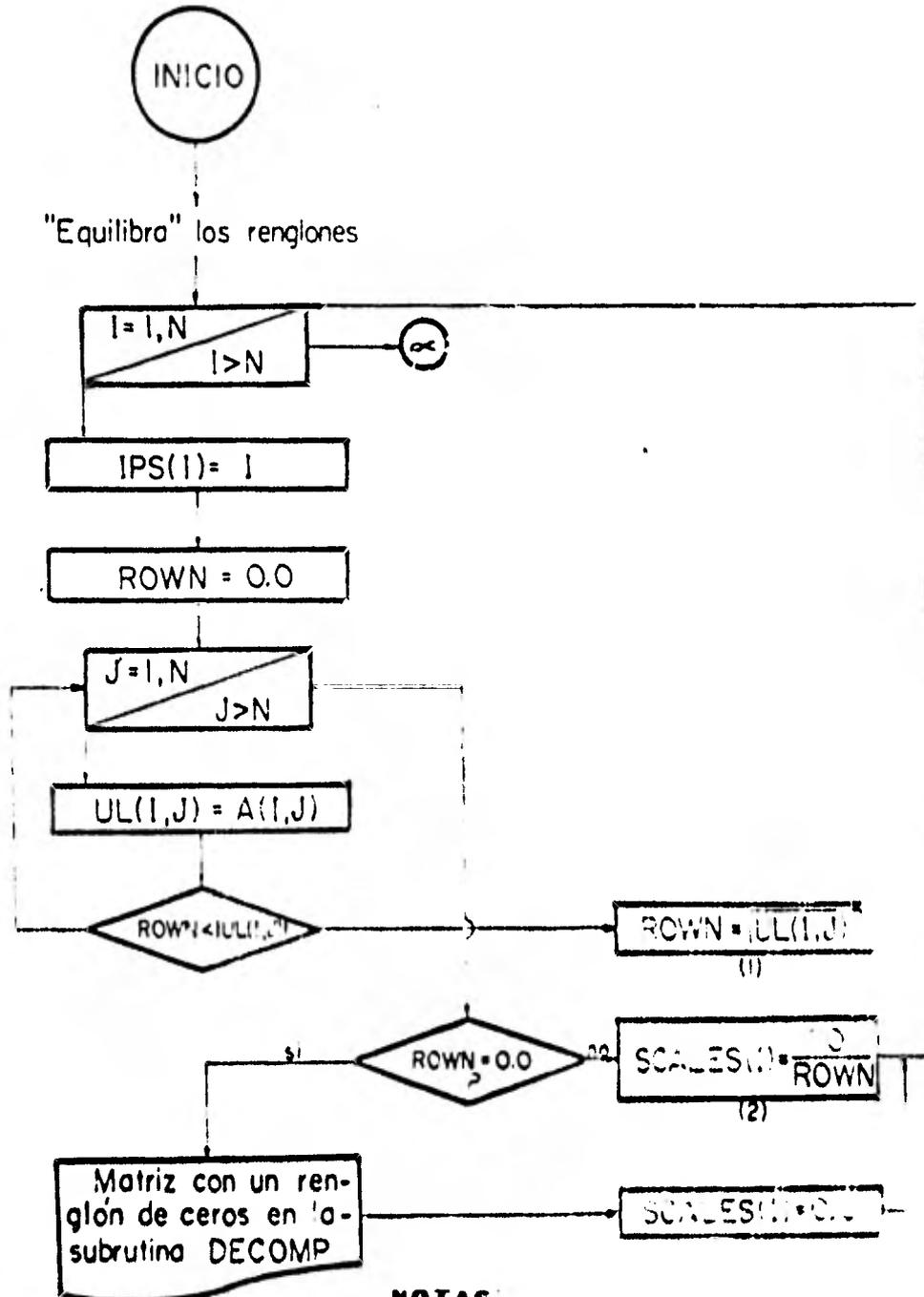
$\frac{DXNORM}{XNORM} \leq EPS$ (cuando se cumple esta desigualdad, se -
terminan las iteraciones. En caso con--
trario, continúan).

SUBROUTINA DECOMP

Como se mencionó anteriormente, con el objeto de eliminar -- errores de redondeo se emplea en la subrutina DECOMP el procedimiento de "equilibrar" los renglones de la matriz A , el cual consiste en dividir los elementos de cada renglón entre el máximo valor absoluto de los elementos del renglón. A -- continuación se presenta el diagrama de flujo correspondiente a la subrutina DECOMP. En este programa, tanto la matriz L como la matriz U se guardan en el mismo arreglo $U(N,N)$, -- ya que se conoce que L es triangular inferior con diagonal -- de unos y U es triangular superior.

Puede observarse que el programa incluye "equilibrio", pivoteo e intercambio virtual de los renglones. Al final del -- diagrama de flujo se incluyen algunas notas aclaratorias del desarrollo del mismo.

SUBROUTINA DECOMP DIAGRAMA DE FLUJO.



NOTAS

- 1) Busca el elemento de mayor valor absoluto del renglón

$$ROWN = \max |UL(I, J)|$$
- 2) $SCALES(I) = \frac{1.0}{\text{máximo valor absoluto del renglón } I}$

NOTAS

1. Busca el elemento de mayor valor absoluto del renglón:

$$ROWN = \max |UL(I, J)|$$

2. $SCALES(I) = \frac{1.0}{\text{máximo valor absoluto del renglón } I}$

3. "Pivotea", es decir, divide los elementos de una columna entre el máximo valor absoluto del renglón correspondiente:

$$SIZE = |UL(IP, K)| \cdot SCALES(I) = \frac{|UL(IP, K)|}{ROWN}$$

4. Busca el máximo valor absoluto de SIZE de la columna

$$BIG = \text{máximo valor absoluto de la columna}$$

5. $IDXPIV =$ índice del máximo (pívote)

- 5'. En este paso se realiza el intercambio virtual: solo-intercambia el renglón K y el renglón $IDXPIV$.

6. KP toma el valor del índice del máximo valor absoluto

7. Pivote = $UL(KP, K)$ = máximo valor absoluto de la columna
8. $EM = \text{factor} = -UL(IP, K)/PIVOT$
9. Obtiene la matriz triangular inferior L
10. Obtiene la matriz triangular superior U
11. Ve si el último elemento de la matriz (después de las operaciones) es cero. Si no lo es, termina. Si es nulo, lo indica.

A P E N D I C E " 1 "

A P E N D I C E " I "

I N S T R U C T I V O D E U S O

El programa presentado tiene la limitación de resolver una estructura de la cual se obtenga un sistema de ecuaciones lineales simultáneas de 25 X 25. El número de ecuaciones que se obtendrá de la aplicación de este método estará dado por la expresión:

$$N \times NQ + 2N - 1$$

donde:

N = número de ejes de columnas

NQ = número de niveles

Si se requiere resolver un sistema de ecuaciones mayor se tendrá que modificar la parte correspondiente a la instrucción *DIMENSION*.

FORMATO DE ENTRADA DE DATOS

La secuencia en la que se proporcionan los datos es como sigue:

- ① Número de ejes de columnas, número de niveles y número de estratos del suelo, perforados con un formato *E11*.
- ② Ancho tributario a las contrarribes, perforado con un formato *F5.2* (en m).
- ③ Espesor de los estratos de suelo perforados con un formato *E110.5* (en m),

- ④ Distancias entre ejes de columnas y longitud de traveses y contratraveses con formato $8F10.5$ (en m).
- ⑤ Altura de entrepisos y altura de columnas con formato $8F10.5$ (en ton/m).

Los siguientes datos se proporcionan por niveles, partiendo del inferior y de izquierda a derecha.

- ⑥ Cargas sobre las traveses con formato $8F10.5$ (en ton/m).
- ⑦ Módulo de elasticidad de las traveses con formato $8E10.5$ (en kg/cm^2).
- ⑧ Módulo de elasticidad de las columnas con formato $8E10.5$ (en kg/cm^2).
- ⑨ Momento de inercia de las traveses con formato $8E10.5$ (en cm^4).
- ⑩ Momento de inercia de las columnas con formato $8E10.5$ (en cm^4).
- ⑪ Módulo de variación volumétrica del suelo. Este dato se proporciona bajo cada columna y al centro de cada contratrabe para cada estrato de suelo partiendo del superior con un formato $8F10.5$ (en m^2/ton).

Los datos anteriores se podrán verificar en el listado de los resultados del programa.

BIBLIOGRAFIA

1. "Método para el Análisis Conjunto de la Estructura y el Suelo". Deméneghi Colina A.
2. "Mecánica de Suelos". Tomo II. Juárez Badillo E. y Rico Rodríguez A. Ed. Limusa, 1976.
3. "Análisis Estructural". Luthe R. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., 1971.
4. "Un Ejemplo del Análisis de la Interacción Suelo - Estructura". Pozas Estrada M. Tesis Profesional, 1980.
5. "Solución mediante Computadoras de Sistemas Algebraicos Lineales". Forsythe George E. and Moler Cleve B. - Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1973.
6. "Métodos Numéricos Programación FORTRAN". D.D. McCracken and W.S. Dorn. Ed. Limusa, 1979.