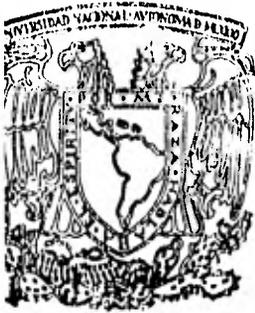


Universidad Nacional Autónoma de México *lej*

FACULTAD DE INGENIERIA *66*



METODO DE POZOS IMAGEN EN LA
SOLUCION DE PROBLEMAS DE BOMBEO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A:

LUIS GARZA VAZQUEZ



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ERIDAD NACIONAL
NITOMA

Señor LUIS GARZA VAZQUEZ,
P r e s e n t e .

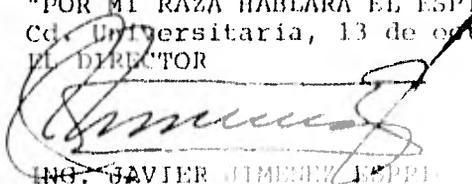
En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el profesor M. I. Rigoberto Rivera Constantino, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de Ingeniero CIVIL.

"METODO DE POZOS IMAGEN EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS
DE BOMBEO"

1. Introducción.
2. Antecedentes.
3. Pozos imagen en acuíferos confinados.
4. Pozos imagen en acuíferos no confinados.
5. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 13 de octubre de 1982
EL DIRECTOR


ING. JAVIER JIMENEZ LEPRI

1. INTRODUCCION

El problema de extraer agua subterránea por medios mecánicos ha sido visualizado desde la antigüedad. Sin embargo, el desarrollo de una tecnología formal que diera lugar a lo que hoy conocemos como hidráulica de pozos, data de aproximadamente un siglo, a partir de las investigaciones de Darcy y Dupuit, quienes proporcionaron el marco teórico de que hoy se dispone en este campo, en lo que a flujo establecido se refiere.

Desde el punto de vista de la ingeniería civil, la hidráulica de pozos tiene una amplia aplicación. La primera que se ocurre es la explotación de acuíferos con objeto de extraer agua para fines domésticos, agrícolas o industriales. Otro caso común se presenta al realizar excavaciones para cimentaciones, túneles, presas, canales etc. - en donde el nivel freático debe ser abatido con objeto de mejorar la estabilidad de los taludes, disminuir los empujes sobre las tablas, así como trabajar en condiciones favorables. Abatir el nivel de aguas freáticas puede también contribuir a evitar la falla de fondo.

En este último caso podría requerirse sólo un alivio de las presiones del agua en caso de que el acuífero en cuestión sea del tipo artesiano, es decir, que el agua esté a presión en dicho acuífero.

Otra aplicación que en épocas recientes se ha utilizado en México es la de disminuir las presiones de poro con objeto de acelerar el proceso de consolidación en suelos blandos.

Como podrá observarse en el capítulo de antecedentes, las condiciones de frontera planteadas originalmente en la teoría corresponden al caso idealizado de acuíferos de extensión infinita en todas las direcciones horizontales. Dichas condiciones restringen el uso de la teoría en casos donde las condiciones de frontera no cumplen con dichas hipótesis, como por ejemplo, el caso de bombeo cerca de una fuente de abastecimiento permanente tales como la costa de una laguna, del mar, de un río, etc. Algunas de estas limitaciones fueron superadas a partir de los estudios de Forchhammer en 1836, al introducir el método de pozos imagen. Dicho método permite resolver problemas de pozos cuyas condiciones de frontera son tales que existen líneas equipotenciales o líneas de flujo presentes, es decir, fronteras impermeables o fuentes de abastecimiento permanente de agua cercanas al pozo o pozos que necesariamente modifican las condiciones de flujo establecido en suelo.

Los casos prácticos en que dicho método puede aplicarse no son contados y como ejemplos pueden citarse los siguientes:

- A) Bombeo en excavaciones con fronteras impermeables tales como ataguías en la periferia.

- B) Bombeo cerca de fuentes permanentes de abastecimiento de agua como pueden ser costas marítimas donde se quiera prevenir la contaminación con agua salada, costas de lagunas, en las riberas de ríos etc. Tal es el caso del bombeo realizado con fines de enfriamiento con agua en instalaciones con gran transferencia de calor, o el caso de excavaciones cercanas a costas.

En el presente trabajo, además de presentar el método de pozos imagen y el procedimiento para su aplicación, se resuelven algunos casos de interés práctico o académico, con objeto de ejemplificar la mecánica del desarrollo matemático y además establecer expresiones de alguna utilidad que no aparecen en la literatura actual sobre el tema.

2.- ANTECEDENTES.

2.1- Principios fundamentales. Hipótesis

La hidráulica de pozos es un problema particular del estudio de flujo de agua en suelos. Como tal, se revisarán comensalmente los conceptos fundamentales y las leyes generales a los cuales se sujeta el flujo de agua en suelos.

Henry Darcy, en 1856, al investigar las características de flujo de agua a través de materiales térreos, descubrió experimentalmente la ley que gobierna el flujo de agua a través de materiales porosos. Dicha ley demuestra la existencia de una relación lineal entre el gradiente hidráulico y la velocidad de descarga del flujo a través del medio poroso, a condición de que dicho flujo sea laminar. Esta relación se expresa como

$$v = ki$$

donde v es la velocidad de descarga, i es el gradiente hidráulico definido como la relación entre la pérdida de carga hidráulica y la longitud que recorre el agua, y k es el coeficiente de proporcionalidad, llamado coeficiente de permeabilidad, el cual depende de las características del suelo, tales como la relación de vacíos, orientación de las partículas etc., y de la dirección del flujo. El coeficiente de permeabilidad se obtiene a través de pruebas de laboratorio o de campo, o incluso puede estimarse a partir de relaciones empíricas con la granulometría o la relación de vacíos. Las determinaciones de este -

coeficientes, distan mucho de tener una confiabilidad total debido, - por una parte, al mecanismo propio de las pruebas, y por otro lado a la heterogeneidad que los suelos normalmente presentan. Sin embargo, se puede llegar a definir el parámetro con que se va a hacer el análisis, a sabiendas de que los resultados representarían una aproximación de la realidad, tanto más cercana como sea confiable la determinación de k , y de como el problema se ajuste a las hipótesis que la teoría impone.

Los análisis expuestos en el presente trabajo se refieren a flujo establecido, es decir el vector velocidad en todo punto solamente depende de su posición, y no varía con el tiempo. Asimismo, se debe hacer énfasis en la diferencia entre flujo confinado y no confinado.

El flujo confinado, todas las condiciones de frontera en que este tiene lugar están determinadas. Para este caso, la ecuación hidrodinámica que rige el flujo bidimensional es la conocida como ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \nabla^2 h = 0 \quad 2.1.1$$

En donde h representa la carga hidráulica.

La anterior ecuación está afectada por las siguientes hipótesis necesarias para estudiar el fenómeno matemáticamente.

- A) El régimen establecido
- B) El suelo está saturado
- C) El agua y las partículas sólidas son incompresibles
- D) El flujo no modifica las características del suelo
- E) La ley de Darcy es aplicable
- F) El suelo es isotrópico en lo que se refiere a la permeabilidad.

Una función que satisface la ecuación de Laplace se dice que es armónica y como se demuestra al estudiar esta ecuación, si dos funciones son soluciones, su suma también lo es. Lo anterior es un hecho de bastante importancia y será frecuentemente invocado en el desarrollo de este trabajo.

Das funciones que son soluciones de la ecuación de Laplace son las siguientes:

$$\phi = -kh + c \quad 2.1.2$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 2.1.3$$

que combinadas, dan lugar a una solución única.

La ecuación 2.1.2 es la llamada función potencial y representa una familia de curvas en el plano donde ocurre el flujo.

Si damos a ϕ un valor constante, también h será constante, por lo --

cual, dicha curva representará puntos en que la carga hidráulica será constante. Por tal razón, a estas curvas se les da el nombre de -- equipotenciales.

Para $\psi = \text{constante}$, las curvas representan trayectorias del agua, llamándose entonces a estas líneas de flujo o de corriente, cumpliéndose además, que el gasto que a través de dos de ellas es constante en -- cualquier sección. Dos propiedades importantes, tanto de las líneas-equipotenciales como de las líneas de flujo, es que estas no pueden -- cortarse jamás entre sí.

Aunque lo anteriormente expuesto es válido para el caso de flujo bidimensional en el plano, también puede generalizarse para el caso de -- flujo radial, que es también bidimensional, a condición de hacer la conversión a coordenadas cilíndricas.

En flujo no confinado, considerando el caso en que una de las fronteras no sea conocida, es necesario hacer otras hipótesis en aras de poder obtener una representación matemática del problema. Para esto, -- es necesario definir la frontera cuya posición no se conoce pero que debe cumplir con algunas propiedades. En primer lugar, la frontera -- que limita el flujo debe estar a presión atmosférica, y por lo tanto, debe ser línea de corriente superior. Para mayor claridad, la diferencia entre flujo confinado y no confinado se muestra en la figura -- 2.1.1., aplicado a acuíferos.

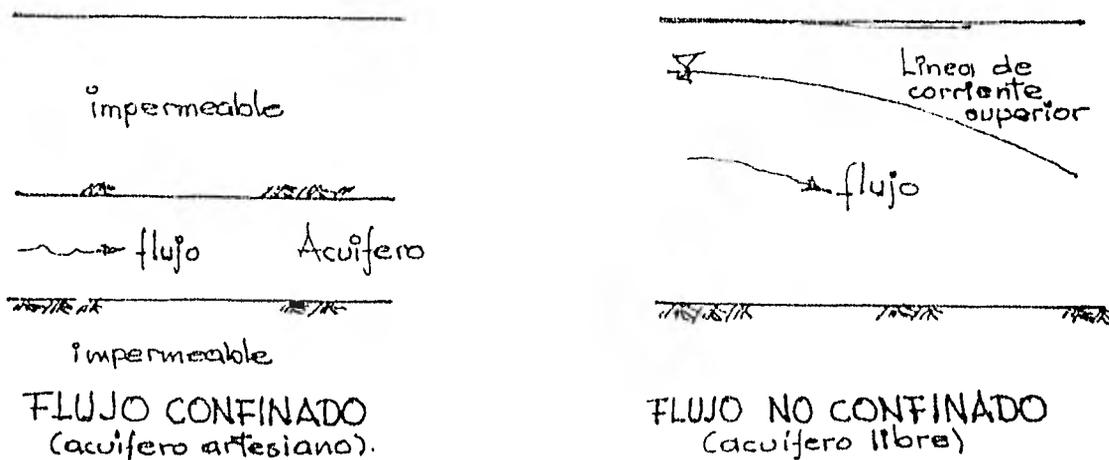


Figura 2.1.1

Las hipótesis que Dupuit, en 1863, estableció para estudiar el flujo no confinado son las siguientes:

- a) Para inclinaciones pequeñas de la línea de corriente superior las líneas de flujo pueden considerarse como horizontales, y por lo tanto, las líneas equipotenciales como verticales.
- b) El gradiente hidráulico es igual a la pendiente de la línea de corriente superior y es constante en la vertical trazado por el punto de que se trate.

Aunque las hipótesis anteriores son de naturaleza aparentemente contradictoria, su uso proporciona soluciones satisfactorias a problemas de flujo no confinado.

Con base a las anteriores hipótesis, más las antes enunciadas para -

flujo confinado es posible establecer la siguiente ecuación que gobierna los problemas de flujo no confinado.

$$\frac{\partial^2(h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(h^2)}{\partial y^2} = \nabla^2 h^2 = 0 \quad 2.1.4$$

en la cual se ve que la función h^2 es armónica puesto que satisface la ecuación de Laplace. También en este caso se cumple con la importante propiedad de que si dos funciones h^2 son solución de la ecuación 2.1.4, su suma también lo es.

2.2.- Flujo radial en un pozo con penetración total en un acuífero - artésiano (flujo confinado).

Considérese un pozo de extracción en el que se bombea un gasto constante y ha transcurrido el tiempo suficiente para considerar que el flujo es establecido (el nivel del agua dentro del pozo ya no cambia) Dicho pozo ha sido perforado en el centro de una isla circular cuyo corte se muestra en la figura 2.2.1

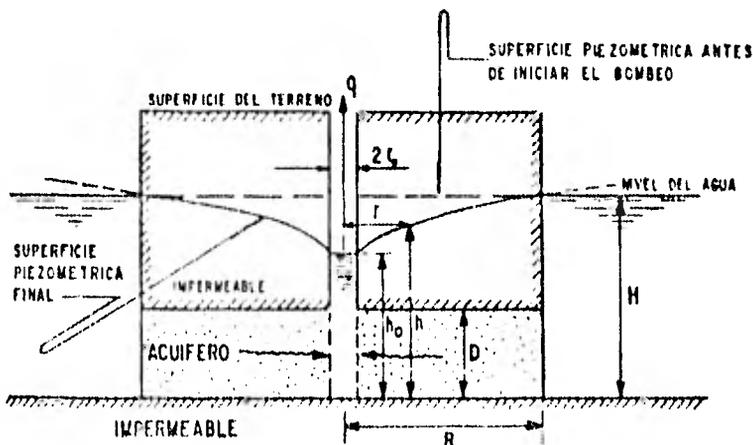


Figura 2.2.1

Pozo de penetración total en un acuífero artésiano

Utilizando coordenadas polares con el eje del pozo como origen, el gradiente hidráulico, tomado como la pendiente de la superficie piezométrica en cualquier punto fuera del pozo vale $i = dh/dr$. Nótese que en este caso no es necesario hacer uso de las hipótesis de Dupuit, pues por se el flujo horizontal, es cierto que el gradiente-

hidráulico es igual a lo largo de la vertical que se trace por el punto considerado. En este caso, el problema podría también resolverse mediante redes de flujo horizontales.

Por continuidad, se debe cumplir con que el gasto sea constante en cualquier sección que se considere. Consideremos un anillo de radio r . Aplicando la ley de Darcy.

$$q = vA = kiA = k \frac{dh}{dr} 2\pi r D$$

de donde

$$dh = \frac{q}{2\pi k D} \frac{dr}{r}$$

o integrando

$$h = \frac{q}{2\pi k D} \ln r + C \quad 2.2.1$$

Para evaluar la constante de integración, substituyamos la condición de frontera $h = H$ para $r = R$, de donde resulta

$$H = \frac{q}{2\pi k D} \ln R + C \quad 2.2.2$$

$$C = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r} \quad 2.2.3$$

llevando este último valor a la ecuación 2.2.1 se obtiene

$$h = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r} \quad 2.2.4$$

Esta última ecuación es la importante relación entre la carga hidráulica en cualquier punto de la masa de suelo y la distancia del pozo a dicho punto.

La carga hidráulica en el pozo resulta, substituyendo las condiciones $h=h_0$ y $r=r_0$

$$h_0 = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r_0} \quad 2.2.5$$

Si bien es cierto que hemos estudiado hasta ahora el caso particular de una isla rodeada por agua, la importante ecuación 2.2.5 obtenida para este caso puede generalizarse para una masa de suelo de longitud muy grande, a condición de que R sea la distancia para la cual ya no se presenta abatimiento, es decir, para la condición $h = H$. Si se conoce el abatimiento dentro del pozo, puede obtenerse R de la ecuación 2.2.5. En la práctica, esta distancia, que es también llamada radio de influencia del pozo, suele ser del orden de decenas a centenas de metros.

Cabe aclarar que la anterior ecuación 2.2.4, satisface la ecuación - de Laplace 2.1.1 si ésta se expresa en coordenadas cilíndricas como sigue.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

2.3- Flujo radial en un pozo con penetración total en un acuífero libre (flujo no confinado).

Nuevamente tomamos el caso de isla circular cuyo pozo se ha perforado en el centro, extrayéndose un gasto constante hasta que el flujo se haya establecido. Esta condición se muestra en la figura 2.3.1 con las variables que intervienen en el análisis.

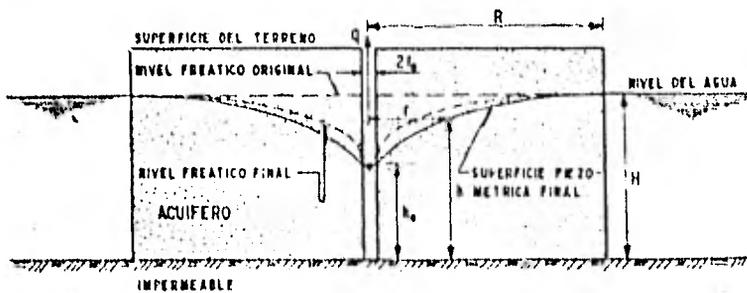


Figura 2.3.1.

Para poder establecer una relación entre el abatimiento del pozo y el gasto que se bombea, es necesario hacer uso de las hipótesis de Dupuit mencionadas en 2.1. En este caso

$$i = \frac{dh}{dr}$$

$$A = 2\pi r h$$

Y de acuerdo a la ley de Darcy

$$q = k \frac{dh}{dr} 2\pi r h$$

$$\int_r^R \frac{dr}{r} = \ln \frac{R}{r} = \frac{2\pi k}{q} \int_h^H h dh = \frac{\pi k}{q} (H^2 - h^2)$$

$$H^2 - h^2 = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

2.3.1

que es la ecuación equivalente a la ecuación 2.2.4 para flujo no confinado. Para la condición $h = h_0$ y $r = r_0$, obtendremos la carga hidráulica en el pozo.

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_0}$$

2.3.2

Ecuación para la que cabe hacer los mismos comentarios que para la ecuación 2.2.5

2.4.- Conjunto de pozos

Como ya ha sido mencionado, si una o varias funciones son soluciones de la ecuación de Laplace, su suma también lo es. Dos de estas funciones son las definidas para h en la ecuación 2.2.4 y para h^2 en la ecuación 2.3.1. En otras palabras, para el caso de flujo confinado en que la carga hidráulica en cualquier punto está definida por

$$h = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r}$$

para un conjunto de n pozos, la carga hidráulica es

$$h = H - \frac{1}{2\pi kD} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{R_i}{r} \quad 2.4.1$$

y análogamente, si para un pozo con flujo no confinado

$$h^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

entonces, para un conjunto de n pozos

$$h^2 = H^2 - \frac{1}{\pi k} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{R_i}{r} \quad 2.4.2$$

Cuando de los pozos del conjunto se extrae el mismo gasto q , se puede suponer además que el radio de influencia es el mismo para todos los pozos e igual a R . Para este caso, las ecuaciones 2.4.1 y -- 2.4.2 resultan:

para flujo confinado

$$h = H - \frac{q}{2\pi KD} \sum \ln \frac{R}{r_i} \quad 2.4.3$$

y para flujo no confinado

$$h^2 = H^2 - \frac{q}{\pi K} \sum \ln \frac{R}{r_i} \quad 2.4.4$$

Como ilustración de lo anterior calculemos el radio r_b de un pozo — que produciría el mismo abatimiento que un conjunto de n pozos. A partir de la ecuación 2.4.3, el abatimiento en uno de los pozos del conjunto será:

$$S_o = H - h_o = \frac{q}{2\pi KD} \sum \ln \frac{R_i}{r_i}$$

y el abatimiento del pozo equivalente será

$$S_o = \frac{nq}{2\pi KD} \ln \frac{R_b}{r_b}$$

igualando y considerando $R_i = R_b = R$

$$\sum \ln \frac{R}{r_i} = n \ln \frac{R}{r_b}$$

$$\sum \ln R - \sum \ln r_i = n \ln R - n \ln r_b$$

$$n \ln R - \sum \ln r_i = n \ln R - n \ln r_b$$

$$\sum \ln r_i = n \ln r_b$$

$$r_b = e^{\frac{\sum \ln r_i}{n}}$$

pero $\sum \ln r_i = \ln \prod r_i$

donde \prod es producto finito, es decir

$$\prod r_i = r_1 \times r_2 \times r_3 \dots r_n$$

$$r_b = e^{\ln(\prod r_i)^{1/n}} = (\prod r_i)^{1/n}$$

$$r_b = \sqrt[r_1 r_2 \dots r_n]$$

que es el promedio geométrico de las distancias de cada pozo a uno de ellos, el del abatimiento que se ha tomado como base, para el cual la r_i se tomará como el radio del pozo.

2.5.- Pozos de recarga.

Un pozo de recarga es, al contrario de un pozo de extracción, un pozo en que se inyecta agua al acuífero. El cono que se presenta es contrario al caso de pozos de extracción, como se muestra en la figura - 2.5.1.

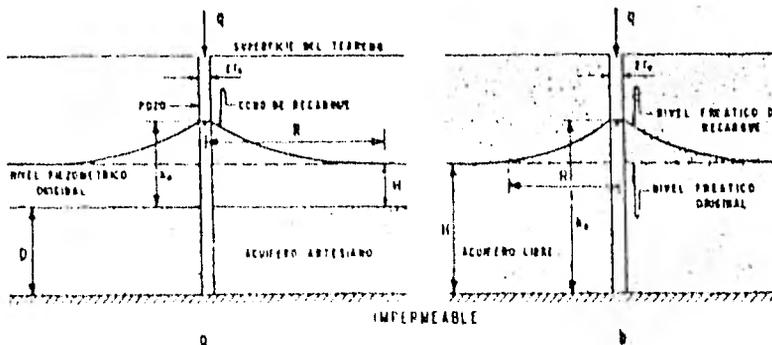


Fig. 2.5.1

La solución para este tipo de pozo se puede obtener de forma análoga a la vista para pozos de extracción, o bien formando las soluciones de pozos de extracción y considerando el signo del gasto negativo.

Las expresiones que resultan para los dos casos estudiados son los siguientes:

acuífero artesiano
$$h = H + \frac{Q}{2\pi k D} \ln \frac{R}{r}$$

acuífero libre
$$h^2 = H^2 + \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

2.6.- Flujo entre un pozo de recarga y uno de descarga.

A pesar de que el análisis que sigue se hará para el caso de flujo - confinado, las conclusiones que de él se derivon serán válidas para el caso de flujo no confinado.

Considérese el caso de un pozo de extracción y uno de recarga como - se muestra en la figura 2.6.1. Con líneas punteadas se muestran sus respectivos conos, si estuvieran trabajando aislados. La carga hidráulica en cualquier punto P será:

$$h = H - \frac{q_e}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{q_r}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r_r}$$

Si el gasto de extracción q_e es igual al gasto de recarga q_r

$$h = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{r_r}{r} \quad 2.6.1$$

y para $r = r_r$, $h = H$.

Lo anterior significa que en toda la línea intermedia entre los dos pozos, la carga hidráulica vale H , la carga inicial, lo cual equivale a la misma condición que tener una frontera de agua en esa línea, como se muestra en la figura 2.6.1, a

Haciendo un análisis similar al caso de flujo entre dos pozos de extracción, se puede concluir que en la línea intermedia perpendicular al eje de los pozos la velocidad de flujo vale cero, lo cual representa una condición equivalente a tener una pantalla impermeable a lo largo de esa línea.

3.- Pozos Imagen en acuíferos artesianos,

3.1.- Presentación del método.

Considérese el caso mostrando en la fig. 2.6.1 a correspondiente a un pozo de extracción colocado cerca de una frontera de agua, la cual representa una equipotencial. Se ha visto que una frontera tal se puede representar en las mismas condiciones suponiendo que existe un pozo imaginario de recarga a la misma distancia de la frontera de agua que el pozo real. El abatimiento en cualquier punto será entonces

$$h = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{r'}{r} \quad 2.6.1$$

en donde las literales tiene el significado mostrando en la fig. -- 2.6.1.

El abatimiento en el pozo real es, con $r = z_d$ y $r = r_0$

$$h = H - \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{z_d}{r_0} \quad 3.1.1$$

Debe notarse que en la expresión anterior ninguno de los parámetros -- tiene relación con el pozo imagen, o, dicho de otra manera, el método es únicamente una herramienta para facilitar la solución del problema. Nótese además que la solución es independiente del radio de influencia R.

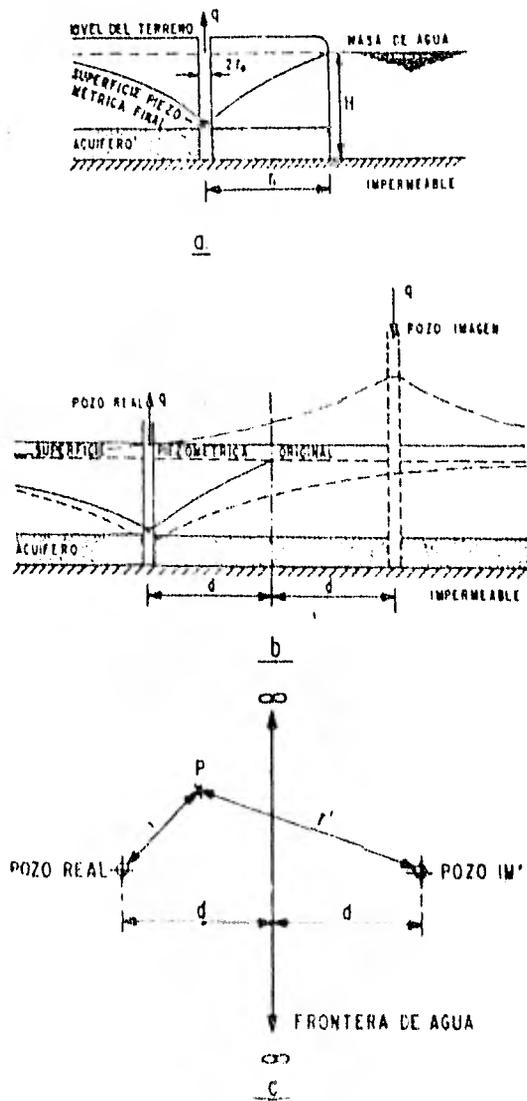


FIG. 2.6.1

Ahora considérese el caso de tener, en lugar de una frontera con agua, una frontera impermeable. Se ha visto ya que dichas condiciones de frontera pueden ser representadas por medio de un pozo imaginario de extracción a la misma distancia de la frontera que el pozo real, como se muestra en la figura 3.1.1.

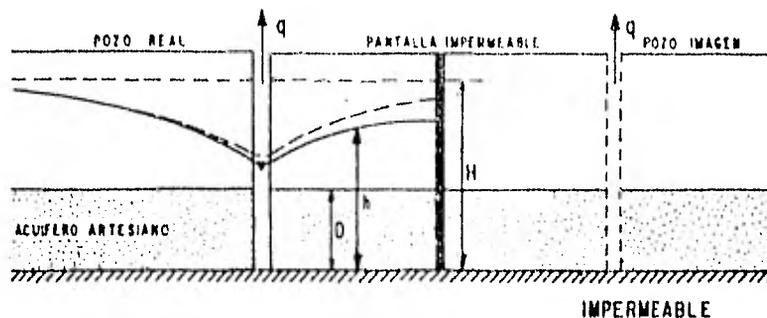


Fig. 3.1.1

En estas condiciones la carga hidráulica en cualquier punto será

$$h = H - \frac{q}{2\pi KD} \ln \frac{R^2}{rr}$$

y el abatimiento en el pozo será

$$h_0 = H - \frac{q}{2\pi KD} \ln \frac{R^2}{2dr_0}$$

debe notarse que en este caso la expresión no resulta independiente -- de R , término que se deberá obtener por medio de una prueba de bombeo, lo cual resulta caro y disminuye su importancia práctica.

En la presentación de los dos sencillos casos anteriores queda ejemplificado el uso de este método.

El método de pozo imagen permite resolver fácilmente casos de pozos -- cercanos a fronteras, ya sean impermeables, de agua, o ambas en diferentes arreglos, y podría resumirse como sigue:

- 1) Delimitación de las fronteras y el tipo de las mismas, así como ubicación de los pozos reales.
- 2) Colocación del pozo imagen correspondiente a cada pozo real
 - a) de extracción en caso de que se trate sea una superficie impermeable.
 - b) de recarga en caso de que la frontera sea una línea equipotencial (agua permanente).
- 3) Sumar las soluciones correspondientes.

3.2.- Aplicaciones

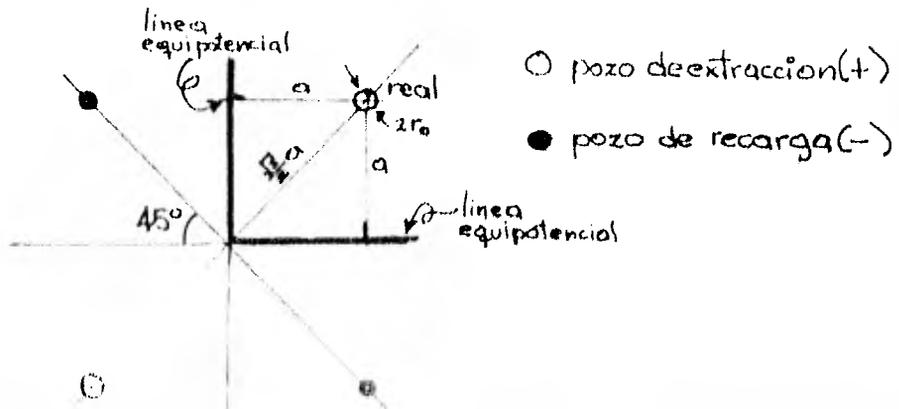
A continuación se presentan varios casos en los cuales se obtienen - soluciones basadas en el método del pozo imagen. En los casos en -- que el desarrollo matemático es complicado, este se ha omitido por -- considerar que queda fuera del alcance del texto, limitándose sólo a una somera delineación del procedimiento.

Para mayor facilidad en la presentación los análisis se presentan en función de los abatimientos en el pozo y el gasto de extracción, -- siendo el abatimiento.

$$S_0 = H - h_0$$

Puesto que en la práctica el dato que normalmente interesa es el gasto para un abatimiento requerido, de las expresiones obradas siempre será sencillo despejar el gasto en función del abatimiento y los demás parámetros fijos.

Caso 1: Cuadrante con dos equipotenciales



Dado que a la izquierda del pozo real se encuentra una línea equipotencial, el pozo imagen correspondiente es un pozo de recarga que a su vez requiere ser balanceado con un pozo de extracción inferior a él, - dada la equipotencial horizontal, que a su vez debe balancearse con un pozo de recarga a su derecha. Estos 3 pozos imagen, como se ve, reproducen las condiciones de frontera buscadas, quedando el sistema en - - equilibrio.

El abatimiento en el pozo real es entonces la suma de los abatimientos producidos por cada pozo, resultando

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{2\sqrt{2}a} - \frac{2q}{2\pi kD} \ln \frac{R}{2a}$$

de donde

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} (-\ln r_0 + \ln R + \ln R - \ln 2\sqrt{2}a - 2\ln R + 2\ln 2a)$$

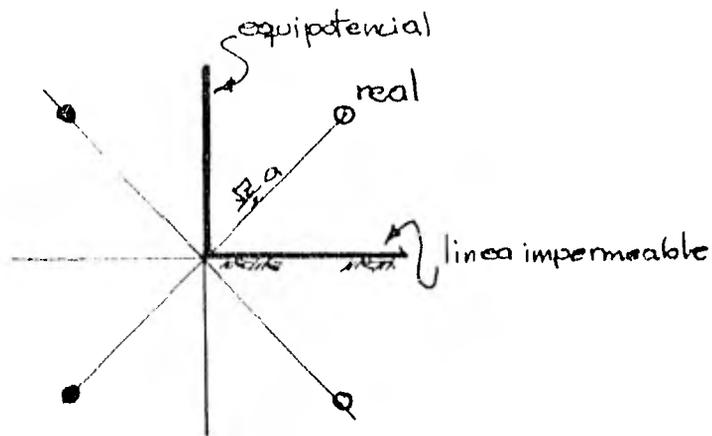
$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} (-\ln r_0 - \ln 2\sqrt{2}a + \ln 4a^2)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{4a^2}{2\sqrt{2}a r_0} = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{2a}{\sqrt{2}r_0}$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{\sqrt{2}a}{r_0}$$

que es la solución buscada.

CASO 2. Cuadrante con una equipotencial y una superficie impermeable.



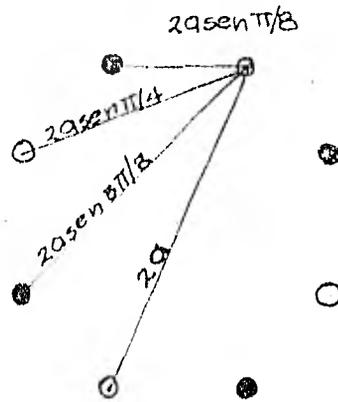
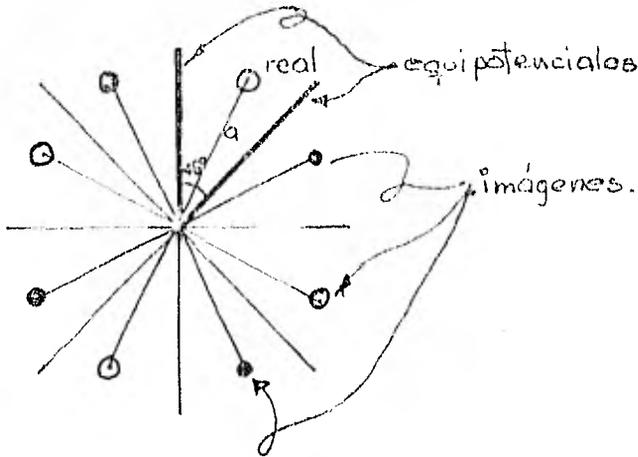
Como en el caso anterior el análisis nos da el resultado mostrado en la figura y la suma de las soluciones resulta,

$$S_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{2a} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{2a} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{2\sqrt{2}a}$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} (\ln R - \ln r_0 - \ln 2\sqrt{2}a)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2\sqrt{2}a}{r_0}$$

CASO 3.- Cuña 45° con dos equipotenciales.



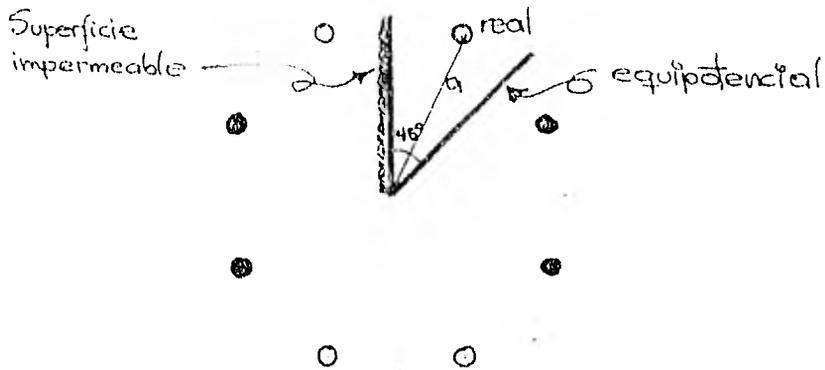
$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{R}{r_0} - 2 \ln \frac{R}{2a \operatorname{sen} \pi/8} + 2 \ln \frac{R}{2a \operatorname{sen} \pi/4} - 2 \ln \frac{R}{2a \operatorname{sen} \pi/8} + \ln \frac{R}{2a} \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln R - \ln r_0 - 2 \ln R + 2 \ln 2a \operatorname{sen} \pi/8 + 2 \ln R - 2 \ln 2a \operatorname{sen} \pi/4 - 2 \ln R + 2 \ln 2a \operatorname{sen} \pi/8 + \ln R - \ln 2a \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{1}{r_0} \frac{4a^2 \operatorname{sen}^2 \pi/8}{4a^2 \operatorname{sen}^2 \pi/4} \frac{4a^2 \operatorname{sen}^2 \pi/8}{2a} \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{a}{2r_0}$$

CASO 4.- Cuña a 45° con una equipotencial y una frontera impermeable.



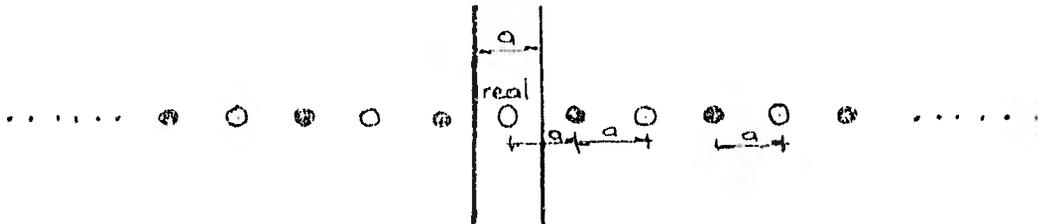
$$S_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K D} \left(\ln \frac{R}{r_0} - \ln \frac{R}{2a \operatorname{sen} \pi/8} + \ln \frac{R}{2a \operatorname{sen} \pi/8} - 2 \ln \frac{R}{2a \operatorname{sen} \pi/4} + \ln \frac{R}{2a} \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K D} \ln \frac{1}{r_0} \frac{4a^2 \operatorname{sen}^2 \pi/4}{2a} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K D} \ln \frac{2a}{r_0}$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K D} \ln \frac{a}{r_0}$$

Como puede observarse en los 2 casos anteriores, el problema es susceptible de ser resuelto por este método siempre y cuando el ángulo de la cuña sea múltiplo de 180°

CASO 5.- Dos equipotenciales paralelas



En este caso, el equilibrio en las condiciones de frontera se logra -añadiendo nuevos pozos imagen a cada lado de la península. Cada nuevo pozo desequilibra el sistema y debe colocarse otro más, continuando este proceso hasta el infinito, a ambos lados, obteniéndose:

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{1}{r_0} + \ln R - \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{R}{a} + \ln \frac{R}{2a} + \ln \frac{R}{2a} - \ln \frac{R}{3a} - \ln \frac{R}{3a} + \ln \frac{R}{4a} + \ln \frac{R}{4a} - \ln \frac{R}{5a} - \ln \frac{R}{5a} \dots \dots \dots \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} - \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{5}{4} + \ln \frac{5}{6} \dots \dots \dots \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} - \ln 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12}{7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13} \dots \dots \dots \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} - \ln 2 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81} \times \frac{120}{121} \times \frac{168}{169} \dots \dots \dots \right)$$

El producto infinito puede representarse como

$$\begin{aligned} \ln 2 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81} \times \frac{120}{121} \times \frac{168}{169} \cdot \cdot \cdot &= \ln 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \\ &= \ln 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Y como se puede demostrar en la teoría de series el producto infinito es absolutamente convergente y en efecto, converge a $\pi/4$

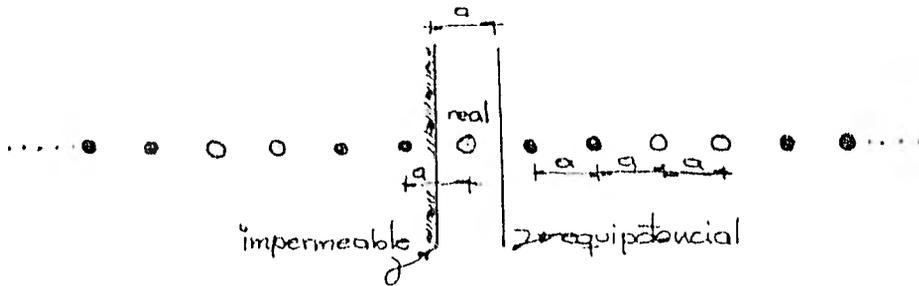
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

siendo la solución

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} - \ln \frac{\pi}{2} \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{2a}{\pi r_0}$$

CASO 6.- Una equipotencial y una superficie impermeable paralelas



al igual que en el caso anterior los pozos imagen se extienden hacia el infinito por ambos lados

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{R}{r_0} - \ln \frac{R}{a} + \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{R}{a} + \ln \frac{R}{2a} + \ln \frac{R}{3a} \right. \\ \left. - \ln \frac{R}{3a} + \ln \frac{R}{4a} + \ln \frac{R}{4a} - \ln \frac{R}{5a} + \ln \frac{R}{5a} - \ln \frac{R}{6a} \right. \\ \left. - \ln \frac{R}{6a} + \ln \frac{R}{7a} - \ln \frac{R}{7a} + \ln \frac{R}{8a} + \ln \frac{R}{8a} - \ln \frac{R}{9a} + \ln \frac{R}{9a} \dots \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} + \ln 2 \times \frac{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 6 \times 7 \times 9 \times 10 \times 10}{3 \times 4 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 8 \times 9 \times 11} \dots \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} + \ln 2 \times \frac{15}{16} \times \frac{63}{64} \times \frac{143}{144} \dots \right)$$

lo que nuevamente nos da un producto infinito dado por

$$\frac{15}{16} \times \frac{63}{64} \times \frac{143}{144} \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) =$$

que es también un producto absolutamente convergente cuyo valor es $2/\pi$. Entonces el abatimiento buscado es

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \left(\ln \frac{a}{r_0} + \ln 2(2/\pi) \right)$$

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{4a}{\pi r_0}$$

Cabe mencionar aquí que el argumento del logaritmo natural para el caso de una equipotencial y una superficie impermeable resulta el doble del argumento para el caso de dos equipotenciales.

4.- Pozos Imagen en acuíferos no confinados.

4.1.- El método de pozo imagen en acuíferos libres.

Consideremos en primer término, al igual que en el capítulo anterior, el caso de un pozo de extracción cerca de una costa como se muestra - en la figura 4.1.1

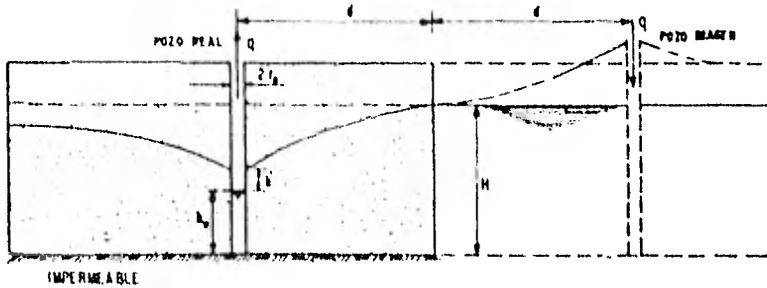


Fig. 4.1.1

para este caso, las ecuaciones obtenidas para la carga hidráulica para un pozo de extracción y uno de recarga eran respectivamente

$$h^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

y

$$h'^2 = H^2 + \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

Combinando ambas soluciones se obtiene

$$h^2 = H^2 + \frac{q}{\pi k} \ln \frac{r'}{r}$$

para la que caben los mismos comentarios que para la ecuación 2.6.1, siendo la solución para el caso estudiado.

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{2d}{r_0} \quad 4.1.1$$

Como se ve en esta expresión, el argumento del logaritmo natural es análogo al obtenido en la ecuación 3.1.1 para flujo confinado. Este es un hecho que se cumple en todos los casos, por lo cual para obtener las expresiones correspondientes al caso de acuíferos libres solo bastará substituir en una ecuación de la forma 4.1.1 los argumentos correspondientes al caso de acuífero artesiano, dado que el método es esencialmente el mismo que se mencionó en el subcapítulo 3.1

4.2.- Aplicaciones en acuíferos libres.

Los casos que se presentan a continuación son los mismos que en el capítulo anterior, y puesto que los desarrollos matemáticos sólo tienen lugar en los argumentos del logaritmo, y dado que dichos desarrollos son idénticos a los del caso de flujo confinado, en este caso sólo se presentarán los resultados. Asimismo las figuras resultan iguales.

CASO 1. Cuadrante con dos equipotenciales

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{2} a}{r_0}$$

CASO 2. Cuadrante con una equipotencial y una superficie impermeable

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \operatorname{Ln} 2 \frac{\sqrt{2} a}{r_0}$$

CASO 3. Cuña de 45° con dos equipotenciales

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \operatorname{Ln} \frac{a}{2r_0}$$

CASO 4. Cuña de 45° con una equipotencial y una frontera impermeable.

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \operatorname{Ln} \frac{a}{r_0}$$

CASO 5. Dos equipotenciales paralelas

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \operatorname{Ln} \frac{2a}{\pi r_0}$$

CASO 6. Una equipotencial y una superficie impermeable paralelas.

$$H^2 - h_0^2 = \frac{q}{\pi k} \operatorname{Ln} \frac{4a}{\pi r_0}$$

Es de notarse que en el caso de acuíferos libres no puede determinarse el abatimiento directamente como en el caso de acuíferos confinados. Sin embargo, cuando el abatimiento es pequeño, menor que la décima parte de H , se puede obtener una aproximación tomando en cuenta que

$$H^2 - h_0^2 = (H-h_0)(H+h_0)$$

$H-h_0 \approx S_0$, y $H+h_0$ es aproximadamente $2H$.

Como ejemplo, la expresión 4.1.1 resultaría

$$S_0 = \frac{q}{2\pi kH} \operatorname{Ln} \frac{2d}{r_0}$$

que es lo mismo que substituir en las expresiones de flujo confinado - la D por la H .

Lo anterior resulta en una aplicación práctica y expedita de las expre

siones manejadas para acuíferos no confinados, si se toman en cuenta el carácter de las hipótesis que se manejan para este caso.

A continuación se presenta una recopilación de casos resueltos por este método presentada en la referencia 2.

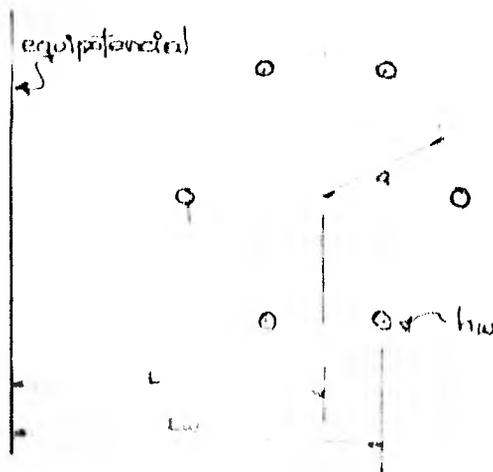
Tomando en cuenta lo ya comentado sobre los argumentos de los logaritmos para los dos casos de flujo estudiados, se presentan factores que representan sólo la parte que cambia, es decir, la forma general para flujo confinado es:

$$S_o = H - h_o = \frac{F_o}{2\pi kD}$$

y para flujo no confinado

$$S_o = H^2 - h_o^2 = \frac{F_o}{\pi k}$$

CASO 7. Arreglo circular de pozos igualmente espaciados



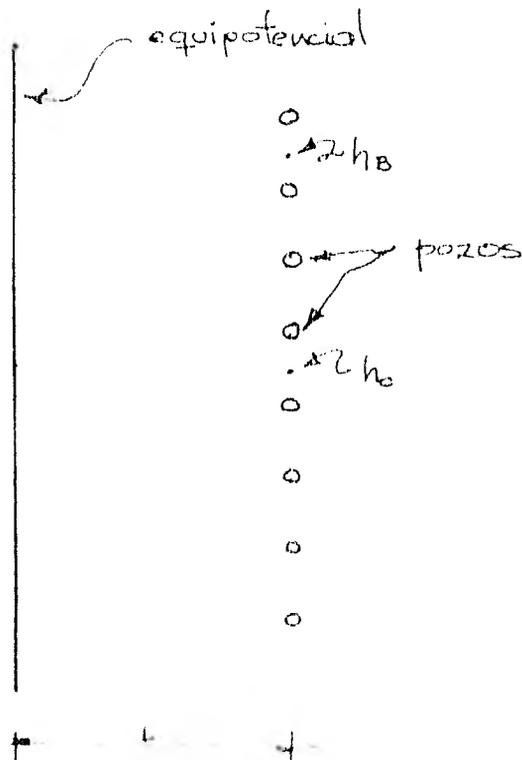
para abatimiento en el centro del arreglo

$$F_c = \frac{q}{2} \sum_{i=1}^n \ln \left[1 + 4 \left(\frac{L}{a} \right)^2 - 4 \left(\frac{L}{a} \right) \cos (i-1) \frac{2\pi}{n} \right]$$

y para el abatimiento en cualquiera de los pozos

$$F_o = q \left(n \ln \frac{2Lw}{a} + \ln \frac{a}{nr_o} \right)$$

CASO 8. Línea de pozos igualmente espaciadas



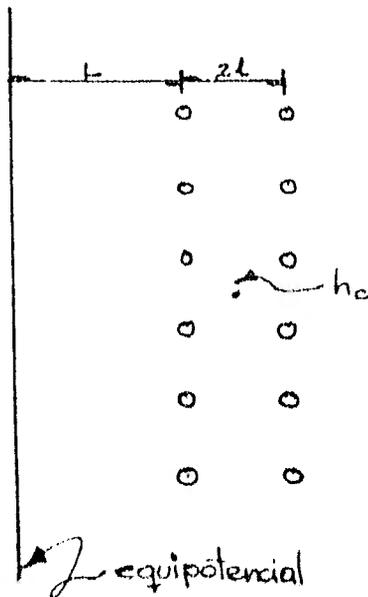
En el centro del sistema

$$F_C = 2q \sum_{i=1}^{n/2} \ln \sqrt{1 + \left[\frac{2L}{(q/2)(n+1-2i)} \right]^2}$$

En el centro de los dos últimos pozos

$$F_B = q \sum_{i=1}^n \ln \sqrt{1 + \left[\frac{2L}{(q/2)(2i-B)} \right]^2}$$

CASO 9. Dos líneas paralelas de pozos igualmente espaciados



En el centro del sistema de pozos.

$$\bar{F}_c = 2q \sum_{l=1}^{n/4} \left\{ \ln \sqrt{1 + \left[\frac{2L+l}{(q/4)(n+2-4l)} \right]^2} + \right. \\ \left. + \ln \sqrt{1 + \left[\frac{2L+3l}{(q/4)(n+2-4l)} \right]^2} \right\}$$

5.- Conclusiones

Los casos presentados, si bien son más bien ilustrativos, dan una - - idea clara de la utilidad del método, así como del mecanismo para su aplicación. La cantidad de problemas que pueden presentarse es muy - extensa y la finalidad de este texto es más bien didáctico, como se - menciona en un principio.

Debe insistirse, sin embargo, en que las soluciones planteadas provie- nen de un marco teórico idealizado, que debe ajustarse lo mejor posi- ble a las características de los problemas reales. Se debe tener con- ciencia de que los valores numéricos finales que se obtengan sólo re- presentarán aproximaciones útiles para formar el criterio del calcu- listu, y que dichas aproximaciones serán mejores en tanto mejor se co- nozcan los parámetros que intervienen en los cálculos y en tanto me- - jor sea la correspondencia de las hipótesis y características geomé- - tricas de la teoría con el problema real.

REFERENCIAS

- 1) Juárez, B.E., Rico, R.A., Mecánica de Suelos, tomo III, Limusa, México, 1980.
- 2) Mansur, Ch. I., Kaufman, R.I., Dewatering, Chapter 3 Of Foundation Engineering edited by G.A. Leonard, Mc Graw - Hill Book Co., Tokyo, 1962.
- 3) Jacob, C.E., Flow Of Ground Water, Engineering Hydraulics by - H. Rouse, John Wiley Andsons, 1950.
- 4) Harr, M.E., Groundwater and Seepage, Mc - Graw Hill Book Co., - 1962.
- 5) Juárez, B.E., Apuntes de clase de flujo de Agua en suelos, - - Depfi, México, 1981.